UNIVERSITÉ PARIS XI

U. E. R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

n° 168 - 75 . 48

SOUS - ESPACES DE L^1

(2ème version)

D. DACUNHA-CASTELLE

et J.L. KRIVINE

Publication Mathématique d'Orsay.

n^o 168 - 75 . 48

SOUS - ESPACES DE L^1

(2ème version)

D. DACUNHA-CASTELLE

et J.L. KRIVINE

Publication Mathématique d'Orsay

Orsay, le 15 Décembre 1975

SOUS - ESPACES DE L^1

(2ème version)

D. DACUNHA-CASTELLE

et J.L. KRIVINE.

0. INTRODUCTION ET RESULTATS.

Un résultat typique de ce travail est le suivant :

Théorème 0.1. Soit E un sous-espace réflexif de $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ($(\Omega, \mathcal{A}, P)$ étant un espace de probabilité). Si E contient un sous-espace isomorphe à ℓ^p, alors, pour chaque $\epsilon > 0$, E contient un sous-espace $(1+\epsilon)$ - isomorphe à ℓ^p.

En fait, la motivation de ce travail est l'étude de la conjecture (C) : tout sous-espace de dimension infinie de $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ contient un sous-espace isomorphe à ℓ^p pour un $p \in [1, 2]$. Seul le cas d'un sous-espace réflexif est à considérer, d'après [6]. L'étude de cette conjecture (*) nous a amené à un résultat plus fort que le théorème 0.1. Avant de l'énoncer, donnons la

Définition : Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires intégrables sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et $\mathcal{B}$ une sous-σ-algèbre de $\mathcal{A}$. On dira que

(*) Dans [7], il est annoncé, de façon incorrecte, la démonstration de (C) ; en fait il est seulement démontré que (C) $\Leftrightarrow$ (C') (voir plus loin l'énoncé de la conjecture (C')).

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est finalement $\mathcal{B}$-mesurable s'il existe une suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables dans $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dont la σ-algèbre de queue soit contenue dans $\mathcal{B}$ et telle que $\|X_n - Y_n\|_1 \to 0$ quand $n \to \infty$.

Rappelons que, si $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires, et $\mathcal{B}_n$ la σ-algèbre engendrée par les Y_k $(k \geq n)$, alors, par définition, la σ-algèbre de queue de la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est $\mathcal{B}_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n$.

Le résultat essentiel de ce travail s'énonce ainsi :

Théorème 0.2. (théorème principal). Soient E un sous-espace réflexif de $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ $\mathcal{B}$ une sous-σ-algèbre de $\mathcal{A}$, et p un réel $(1 < p \leq 2)$. Alors les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

1) pour chaque $\epsilon > 0$, E contient un sous-espace $(1+\epsilon)$ - isomorphe à ℓ^p dont la base est finalement $\mathcal{B}$-mesurable.

2) il existe une ultrapuissance de E qui contient un sous-espace isomorphe à ℓ^p dont la base est finalement $\mathcal{B}$-mesurable.

3) il existe une ultrapuissance de E qui contient un sous-espace isomorphe à ℓ^p dont la base est une suite de variables aléatoires échangeables et symétriques, dont la σ-algèbre de queue est contenue dans $\mathcal{B}$.

4) il existe une ultrapuissance de E qui contient une variable aléatoire $Z \neq 0$ avec $Z = UV$, U étant $\mathcal{B}$-mesurable, V indépendante de $\mathcal{A}$ et p-stable.

On voit que le théorème 0.1. se déduit du théorème principal en faisant $\mathcal{B} = \mathcal{A}$ et en ne considérant que l'équivalence $1 \Leftrightarrow 2$.

De plus, si on ne précise pas la valeur de p, on peut, dans la condition 4 supprimer l'hypothèse que V est p-stable. Autrement dit, on a le

Théorème 0.3. Soient E un sous-espace réflexif de $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $\mathcal{B}$ une sous-σ-algèbre de $\mathcal{A}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

a) il existe p, $1 < p \leq 2$ tel que E contienne un espace isomorphe à ℓ^p dont la base est finalement $\mathcal{B}$-mesurable.

b) il existe une ultrapuissance de E qui contient une variable aléatoire $UV \neq 0$, U étant $\mathcal{B}$-mesurable, V symétrique et indépendante de $\mathcal{A}$

Nous montrons également que la conjecture (C') suivante, apparemment plus faible que (C), équivaut en fait à (C) :

(C') : Tout sous-espace de $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ engendré par une suite de variables aléatoires non nulle, échangeable et symétrique contient un sous-espace isomorphe à ℓ^p pour un $p \in [1, 2]$.

(Une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires est dite échangeable et symétrique, si, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la loi du n-uplet $(X_o, X_1, \dots, X_n)$ est invariante par une permutation quelconque des variables, et aussi par le changement de l'un des X_i en $-X_i$).

Dans la partie I, on définit les ultrapuissances d'espaces de probabilités, et on étudie leurs propriétés.

La partie II établit un critère permettant de "redescendre" un espace ℓ^p convenable d'une ultrapuissance à l'espace initial. On montre ainsi, dans cette partie, l'implication $4 \Rightarrow 1$ du théorème principal. Ce critère est légèrement amélioré dans la partie V.

Dans la partie III on donne une technique qui, à partir d'un sous-espace de $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ isomorphe à ℓ^p, permet de construire des variables p-stables dans une ultrapuissance convenable (voir aussi [3]). La partie IV permet ensuite de retrouver l'hypothèse du critère établi en II, c'est-à-dire de prouver l'implication $3 \Rightarrow 4$ du théorème principal.

Enfin la partie V est essentiellement la récapitulation des différents résultats afin d'établir le théorème principal, le théorème 0.3. et le fait que (C) $\Leftrightarrow$ (C') .

I. PRELIMINAIRES : ULTRAPRODUITS D'ESPACES DE PROBABILITE.

Pour les définitions et notations sur les ultraproduits d'espaces de Banach, on se réfère à [2].

Soient $(\Omega_i, \mathcal{B}_i, P_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces de probabilité, $\mathcal{D}$ un ultrafiltre sur I, Λ l'ultraproduit $\prod_{i \in I} L^1(\Omega_i, \mathcal{B}_i, P_i)$ qui est un espace L^1. L'ensemble $\mathcal{B}$ des éléments de Λ de la forme $(1_{A_i})_{i \in I}$ avec $A_i \in \mathcal{B}_i$ est une σ-algèbre munie d'une probabilité P (on pose $P[(1_{A_i})_{i \in I}] = \lim_{\mathcal{D}} P_i(A_i) = \|(1_{A_i})_{i \in I}\|$). Le sous espace fermé de Λ engendré par $\mathcal{B}$ est de la forme $L^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$. L'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ est appelé ultraproduit de la famille $(\Omega_i, \mathcal{B}_i, P_i)_{i \in I}$ suivant l'ultraproduit $\mathcal{D}$; on notera $\mathcal{B} = \prod_{i \in I} \mathcal{B}_i/\mathcal{D}$ ou $(\mathcal{B}, P) = \prod_{i \in I} (\mathcal{B}_i, P_i)/\mathcal{D}$. $(\mathcal{B}_1, P_1)$, $(\mathcal{B}_2, P_2)$ étant deux σ-algèbres d'espaces de probabilité, on notera $(\mathcal{B}_1, P_1) \subset (\mathcal{B}_2, P_2)$ pour indiquer que $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$ et que P_2 est un prolongement de P_1.

Dans [2] on a vu que l'on a $\Lambda = L^1(\Omega, \mathcal{B}, P) \oplus \Lambda'$ où Λ' est l'ensemble des éléments de Λ étrangers à $L^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$, c'est-à-dire étrangers à $1_\Omega (1_\Omega = (1_{\Omega_i})_{i \in I})$.

Toute famille $(f_i)_{i \in I}$ où $f_i \in L^1(\Omega_i, \mathcal{B}_i, P_i)$ telle que $|f_i| \leq M$ pour tout $i \in I$ définit un élément de $L^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$: en effet, si $f = (f_i)_{i \in I}$ on a $|f| \leq M.\, 1_\Omega$, et, en fait, $f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{B}, P)$. Inversement pour tout $f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{B}, P)$, il existe une famille $(f_i)_{i \in I}$, $f_i \in L^\infty(\Omega_i, \mathcal{B}_i, P_i)$, $\|f_i\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, telle que $f = (f_i)_{i \in I}$ (car si $f = (g_i)_{i \in I}$, comme $f = (-\|f\|_\infty) \cup (f \cap \|f\|_\infty)$ on a $f = (f_i)_{i \in I}$, avec $f_i = -\|f\|_\infty \cup (g_i \cap \|f\|_\infty)$).

<u>Proposition I.1. Soient $f, g \in L^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$, $f = (f_i)_{i \in I}$, $g = (g_i)_{i \in I}$, avec $|g_i| \leq M$. Alors $fg = (f_i\, g_i)_{i \in I}$.</u>

Notons que $g \in L^\infty(\Omega, \mathcal{B}_i, P)$, $\|g\|_\infty \leq M$. On peut supposer $g \geq 0$.

Supposons d'abord $f = 1_A = (1_{A_i})_{i \in I}$, $(A \in \mathcal{B})$. On a alors $(g_i \cdot 1_{A_i})_{i \in I} \leq g$ et $\leq M \cdot 1_A$, donc $(g_i \cdot 1_{A_i})_{i \in I} \leq g \cdot 1_A$; de même $(g_i \cdot 1_{A_i^c})_{i \in I} \leq g \cdot 1_{A^c}$. Or $(g_i \cdot 1_{A_i})_{i \in I} + (g_i \cdot 1_{A_i^c})_{i \in I} = (g_i)_{i \in I} = g$. Donc $(g_i \cdot 1_{A_i})_{i \in I} = g \cdot 1_A$.

Le résultat est ainsi obtenu lorsque f est une fonction étagée. Dans le cas général, soit $f_n = (f^i_n)_{i \in I}$ une suite de fonctions $\mathcal{B}$-étagées qui tend vers f dans $L^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$. Alors $f_n \cdot g = (f^i_n \cdot g_i)_{i \in I}$. Or, pour n assez grand on a $\|f_n - f\|_1 \leq \epsilon$ donc, d'une part $\|f_n . g - fg\|_1 \leq M\epsilon$, d'autre part $\{i \in I ; \|f^i_n - f_i\|_1 \leq 2\epsilon\} \in \mathcal{D}$; comme $|g_i| \leq M$, $\{i \in I ; \|f^i_n\, g_i - f_i\, g_i\|_1 \leq 2M\epsilon\} \in \mathcal{D}$. Il en résulte que $\|(f_i\, g_i)_{i \in I} - (f^i_n\, g_i)_{i \in I}\|_1 \leq 2M\epsilon$, et donc $\|(f_i \cdot g_i)_{i \in I} - f_n\, g\|_1 \leq 2M\epsilon$. Donc $\|(f_i\, g_i)_{i \in I} - f\, g\|_1 \leq 3M\epsilon$. d'où le résultat puisque ϵ est un nombre > 0 arbitraire. <u>C.Q.F.D.</u>

<u>Proposition I.2. Soient $f, g \in L^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$ avec $fg \in L^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$ et $(f_i)_{i \in I}$ une famille représentant f . Il existe une famille $(g_i)_{i \in I}$ $(g_i \in L^1(\Omega, \mathcal{B}_i, P_i))$ représentant g, telle que $f_i\, g_i \in L^1(\Omega_i, \mathcal{B}_i, P_i)$ pour tout $i \in I$ et $fg = (f_i\, g_i)_{i \in I}$.</u>

On a $fg = (\varphi_i)_{i \in I}$, $g = (h_i)_{i \in I}$ avec $\varphi_i , h_i \in L^1(\Omega_i, \mathcal{B}_i, P_i)$. En écrivant $g = g^+ - g^-$, on voit qu'on peut supposer $g, h_i \geq 0$. On pose alors $g_i = h_i \cdot 1_{\{|f_i| \leq 1\}} + \dfrac{\varphi_i}{f_i} \cdot 1_{\{|f_i| > 1\}}$. Evidemment $g_i \leq h_i + \varphi_i$

donc $g_i \in L^1(\Omega_i, \mathcal{B}_i, P_i)$. D'après la proposition précédente, on a, pour $n > 0$: $f \cdot (g \cap n) = (f_i \circ (h_i \cap n))_{i \in I}$. D'autre part, pour n assez grand on a $\|f \cdot g - f \circ (g \cap n)\|_1 \leq \epsilon$ et $\|g - g \cap n\|_1 \leq \epsilon$ et par suite :

$$\{i \in I ; \|\varphi_i - f_i \cdot (h_i \cap n)\|_1 \leq 2\epsilon\} \in \mathcal{D} \qquad \text{et}$$

$$\{i \in I ; \|h_i - h_i \cap n\|_1 \leq 2\epsilon\} \in \mathcal{D} .$$

On a $\|g_i - h_i\|_1 = \int_{\{|f_i| > 1\}} |\frac{\varphi_i}{f_i} - h_i| \, dP_i$

Mais, pour un ensemble de $i \in I$ qui est dans $\mathcal{D}$, on a

$$\int_{\Omega_i} |\varphi_i - f_i \cdot (h_i \cap n) \, dP_i \leq 2\epsilon \text{ et } \int_{\Omega_i} |h_i - h_i \cap n| \, dP_i \leq 2\epsilon$$

donc $\int_{\{|f_i| > 1\}} |\varphi_i - f_i \circ (h_i \cap n)| \, dP_i \leq 2\epsilon$ d'où $\int_{\{|f_i| > 1\}} |\frac{\varphi_i}{f_i} - h_i \cap n| dP_i \leq 2\epsilon$

et donc $\int_{\{|f_i| > 1\}} | \frac{\varphi_i}{f_i} - h_i| \, dP_i \leq 4\epsilon$.

Donc $\{i \in I ; \|g_i - h_i\|_1 \leq 4\epsilon\} \in \mathcal{D}$. Comme $\epsilon > 0$ est arbitraire, on voit que $(g_i)_{i \in I} = (h_i)_{i \in I} = g$.

Soient $A_i = \{|f_i| \leq 1\} \in \mathcal{B}_i$ et $A = (A_i)_{i \in I} \in \mathcal{B}$. On a $f_i g_i = f_i h_i \cdot 1_{A_i} + \varphi_i 1_{A_i^c}$.

Comme $|f_i 1_{A_i}| \leq 1$ et que $(f_i 1_{A_i})_{i \in I} = f \circ 1_A$, on a $(f_i h_i 1_{A_i}) = f g 1_A$ (proposition précédente) ; de plus $(\varphi_i 1_{A_i^c})_{i \in I} = f g 1_{A^c}$. D'où $(f_i g_i)_{i \in I} = fg \cdot 1_A + fg \cdot 1_{A^c} = fg$. <u>C.Q.F.D.</u>

<u>Proposition I.3.</u> <u>Soient $f_1 = (f_1^{\,i})_{i \in I}, \ldots, f_k = (f_k^{\,i})_{i \in I}$ des éléments de $L^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$, avec $(\mathcal{B}, P) = \prod_{i \in I} (\mathcal{B}_i, P_i) / \mathcal{U}$. Soient π, π_i les distributions (probabilités sur $\mathbb{R}^k$) respectives des k-uplets de variables aléatoires $(f_1, \ldots, f_k)$, $(f_1^{\,i}, \ldots, f_k^{\,i})$. Alors $\pi = \lim_{\mathcal{U}} \pi_i$ (convergence étroite des probabilités sur $\mathbb{R}^k$).</u>

Soit $\mathcal{T}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel réticulé de fonctions réelles sur $\mathbb{R}^k$ engendré par les fonctions $1, x_1, \ldots, x_k$; si $\tau(x_1, \ldots, x_k) \in \mathcal{T}$, on a $\tau(f_1, \ldots, f_k) = (\tau(f_1^{\,i}, \ldots, f_k^{\,i}))_{i \in I}$ puisque l'ultraproduit est compatible avec les opérations de treillis et d'espace vectoriel, et que $1_\Omega = (1_{\Omega_i})_{i \in I}$. Il en résulte que

$$\int_\Omega \mathcal{T}(f_1, \ldots, f_k)\, dP = \lim_{\mathcal{U}} \int_{\Omega_i} \tau(f_1^{\,i}, \ldots, f_k^{\,i})\, dP_i \qquad (1)$$

Or le sous-espace $\mathcal{T}_b$ de $\mathcal{T}$ constitué des fonctions de $\mathcal{T}$ bornées sur $\mathbb{R}^k$ est un sous-espace dense de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^k \cup \{\infty\})$ / $(\mathbb{R}^k \cup \{\infty\}$ étant le compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{R}^k)$; en effet c'est un sous-espace réticulé de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^k \cup \{\infty\})$ qui sépare les points : l'égalité (1) montre donc alors que $\pi = \lim_{\mathcal{U}} \pi_i$. <u>C.Q.F.D.</u>

Lorsque la famille $(\Omega_i, \mathcal{B}_i, P_i)_{i \in I}$ est constituée d'un seul espace de probabilité $(\Omega_o, \mathcal{B}_o, P_o)$, l'ultraproduit de cette famille suivant l'ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur I est appelé ultrapuissance de l'espace de probabilité $(\Omega_o, \mathcal{B}_o, P_o)$ suivant l'ultrafiltre I. On note $(\mathcal{B}, P) = (\mathcal{B}_o, P_o)^{I}/\mathcal{U}$. Notons qu'on a un plongement canonique de la σ-algèbre $(\mathcal{B}_o, P_o)$ dans $(\mathcal{B}, P)$: si $A \in \mathcal{B}_o$ on lui fait correspondre la famille $(A_i)_{i \in I}$ avec $A_i = A_o$ pour tout $i \in I$. On considèrera donc dans la suite que $\mathcal{B}_o$ est une sous-σ-algèbre de $\mathcal{B} = \mathcal{B}_o^{\,I}/\mathcal{U}$.

<u>Proposition I.4.</u> : <u>Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille équi-intégrable de $L^1(\Omega_o, \mathcal{B}_o, P_o)$. Alors l'élément f de $L^1(\Omega_o, \mathcal{B}_o, P_o)^{I}/\mathcal{U}$ représenté par cette famille est dans $L^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$ où $(\mathcal{B}, P) = (\mathcal{B}_o, P_o)^{I}/\mathcal{U}$.</u>

La famille $(f_i)_{i \in I}$ étant équi-intégrable, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N > 0$ tel que $\int_{\{|f_i| > N\}} |f_i| \, dP_o \leq \epsilon$, autrement dit $\|f_i - f_i^N\|_1 \leq \epsilon$, où $f_i^N = f_i \circ 1_{\{|f_i| \leq N\}}$. Soit $f^N = (f_i^N)_{i \in I}$. Comme $|f_i^N| \leq N$ pour tout $i \in I$, $f^N \in L^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$. Comme $\|f_i - f_i^N\|_1 \leq \epsilon$, on a $\|f - f^N\| \leq \epsilon$. Donc $f^N \to f$ dans $L^1(\Omega_o, \mathcal{B}_o, P_o)^I/\mathcal{D}$, et par suite $f \in L^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$.

<u>Proposition I.5.</u> <u>Si F est un sous-espace réflexif de $L^1(\Omega_o, \mathcal{B}_o, P_o)$ alors $F^I/\mathcal{D} \subset L^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$, où $(\mathcal{B}, P) = (\mathcal{B}_o, P_o)^I/\mathcal{D}$. De plus $F^I/\mathcal{D}$ est un sous-espace réflexif de $L^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$.</u>

Rappelons qu'un sous-espace fermé d'un espace L^1 est réflexif si et seulement si sa boule unité est équi-intégrable. Le fait que $F^I/\mathcal{D} \subset L^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$ résulte donc immédiatement de la proposition I.4.

Il reste à montrer que la boule unité de $F^I/\mathcal{D}$ est équi-intégrable. Celle de F l'étant, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que $\int_A |\varphi| \, dP_o \leq \epsilon$ pour tout $A \in \mathcal{B}_o$; $P_o(A) \leq \eta$ et toute $\varphi \in F$, $\|\varphi\| \leq 1$.

Soient alors $f = (\varphi_i)_{i \in I} \in F^I/\mathcal{D}$, $\|f\| \leq 1$ (donc $\|\varphi\| \leq 1$ (donc $\|\varphi\| \leq 1$ pour tout $i \in I$) et $A = (A_i)_{i \in I} \in \mathcal{B}$, $P(A) \leq \eta$ (donc $P_o(A_i) \leq \eta$ pour tout $i \in I$ pour un choix convenable de la famille $(A_i)_{i \in I}$ représentant A). On a

$$\int_A |f| \, dP = \|f \circ 1_A\| = \lim_{\mathcal{D}} \|\varphi_i \circ 1_{A_i}\| = \lim_{\mathcal{D}} \int_{A_i} |\varphi_i| \, dP_o \leq \eta$$

<u>C.Q.F.D.</u>

<u>Proposition I.5.1.</u> <u>Soient $(f_i)_{i \in I}$ une famille indépendante équi-intégrable de variables aléatoires de $L^1(\Omega_o, \mathcal{B}_o, P_o$ et $\mathcal{D}$ un ultrafiltre non trivial sur I. Dans $L^1[\cdot(\mathcal{B}_o, P_o)^I/\mathcal{D}]$ on définit $f = (f_i)_{i \in I}$. Alors f est indépendante de $\mathcal{B}_o$.</u>

Supposons d'abord les f_i uniformément bornés, $\|f_i\|_\infty \leq K$, et soit $g \in L^\infty(\Omega_o, \mathcal{B}_o, P_o)$. Posons $h = E^{\mathcal{A}} g$, $\mathcal{A}$ étant la σ-algèbre engendrée par les $(f_i)_{i \in I}$. Pour $\epsilon > 0$ fixé, il existe h' intégrable, $\mathcal{A}$-mesurable et ne dépendant que d'un nombre fini des f_i, telle que $\|h - h'\|_1 \leq \epsilon$. Donc, sauf pour un nombre fini de i, h' est indépendante de f_i, d'où, pour ces i : $E(f_i h') = E(f_i) E(h')$.
Or $|E(f_i h) - E(f_i h')| \leq \|f_i\|_\infty \|h - h'\|_1 \leq K \epsilon$:
$|E(f_i) E(h') - E(f_i) E(h)| \leq |E(f_i)| \|h - h'\|_1 \leq K \epsilon$. Par suite, sauf pour un nombre fini de i, on a $|E(f_i h) - E(f_i) E(h)| \leq 2 K \epsilon$, donc
$|E(f_i g) - E(f_i) E(g)| \leq 2 K \epsilon$ (par définition de h, $E(f_i h) = E(f_i g)$, et $E(h) = E(g)$).

Comme $E(fg) = \lim\limits_{\mathcal{B}} E(f_i g)$, on a donc $|E(fg) - E(f) E(g)| \leq 2 K \epsilon$, donc $E(fg) = E(f) E(g)$ puisque ϵ est arbitraire.

Dans le cas général, on pose $f_i^N = f_i \, 1_{\{|f_i| \leq N\}}$ (N réel ≥ 0) et $f^N = (f_i^N)_{i \in I}$; d'après ce qu'on vient de voir, f^N est indépendante de $\mathcal{B}_o$. Or, pour N assez grand, $\|f_i^N - f_i\|_1 \leq \epsilon$ (uniformément en i, par équi-intégrabilité), d'où $\|f^N - f\|_1 \leq \epsilon$ et $f^N \to f$ dans L^1. Cela montre que f aussi est indépendante de $\mathcal{B}_o$: car, si $g \in L^\infty(\Omega_o, \mathcal{B}_o, P_o)$, $E(f^N g) \to E(fg)$ et $E(f^N) E(g) \to E(f) . E(g)$.

<u>C.Q.F.D.</u>

Ultrapuissances itérées.

Proposition I.6. Soient $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ des ultrafiltres respectifs sur I, J, $\mathcal{D}\times\mathcal{E}$ l'ultrafiltre sur $I\times J$ défini par $X\in\mathcal{D}\times\mathcal{E} \Leftrightarrow \{j\in J\ ;\ \{i\in I\ ;\ (i,j)\in X\}\in\mathcal{D}\}\in\mathcal{E}$. Si F est un espace de Banach, $(F^{I}/\mathcal{D})^{J}/\mathcal{E}$ est canoniquement isomorphe à $F^{I\times J}/\mathcal{D}\times\mathcal{E}$. De même, si $(\mathcal{B}_o, P_o)$ est la σ-algèbre d'un espace de probabilité, $((\mathcal{B}_o, P_o)^{I}/\mathcal{D})^{J}/\mathcal{E}$ est canoniquement isomorphe à $(\mathcal{B}_o, P_o)^{I\times J}/\mathcal{D}\times\mathcal{E}$.

Si $f\in(F^{I}/\mathcal{D})^{J}/\mathcal{E}$ on a $f=(f_j)_{j\in J}$ avec $f_j\in F^{I}/\mathcal{D}$, donc $f_j=(f_j^{\,i})_{i\in I}$. On définit l'isomorphisme de $(F^{I}/\mathcal{D})^{J}/\mathcal{E}$ sur $F^{I\times J}/\mathcal{D}\times\mathcal{E}$ en associant à f l'élément φ de $F^{I\times J}/\mathcal{D}\times\mathcal{E}$ défini par la famille $(f_j^{\,i})_{j\in J}^{i\in I}$.
Cette application étant linéaire, il suffit de voir qu'elle conserve la norme.
Or $\|f\| = \lim\limits_{\mathcal{E}} \|f_j\|$. Donc, pour $\epsilon>0$ donné, $Y=\{j\in J\ ;\ |\ \|f_j\|-\|f\|\ |\leq\epsilon\}\in\mathcal{E}$.
Mais $\|f_j\| = \lim\limits_{\mathcal{D}} \|f_j^{\,i}\|$, donc $X_j=\{i\in I\ ;\ |\ \|f_j^{\,i}\|-\|f_j\|\ |\leq\epsilon\}\in\mathcal{D}$.
Si $Z=\bigcup\limits_{j\in Y} X_j\times\{j\}$ alors $Z\in\mathcal{D}\times\mathcal{E}$ et $\{(i,j)\in I\times J\ ;\ |\ \|f_j^{\,i}\|-\|f\|\ |\leq 2\epsilon\}\supset Z$; donc $\{(i,j)\in I\times J\ ;\ |\ \|f_j^{\,i}\|-\|f\|\ |\leq 2\epsilon\}\in\mathcal{D}\times\mathcal{E}$ ce qui montre que
$\|f\| = \lim\limits_{\mathcal{D}\times\mathcal{E}} \|f_i^{\,j}\| = \|\varphi\|$. C.Q.F.D.

Proposition I.7. Soient $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles, $\mathcal{D}_n$ un ultrafiltre sur I_n, $\mathcal{D}$ un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$, F un espace de Banach; on pose $F_n=F^{I_n}/\mathcal{D}_n$. Alors $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n/\mathcal{D}$ est isomorphe à une ultrapuissance de F. Plus précisément, en supposant les I_n deux à deux disjoints, $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n/\mathcal{D}$ est isomorphe à $F^{J}/\mathcal{E}$ où $J=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ et où $X\in\mathcal{E}\Leftrightarrow\{n\in\mathbb{N}\ ;\ X\cap I_n\in\mathcal{D}_n\}\in\mathcal{D}$.

Démonstration analogue à la précédente.

Variables aléatoires échangeables.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{B}, P)$; la σ-algèbre de queue de cette suite est, par définition, $\mathcal{B}^\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}^{(n)}$, $\mathcal{B}^{(n)}$ étant la σ-algèbre engendrée par les X_k $(k \geq n)$.

Soit $\mathcal{B}_o$ une sous-σ-algèbre de $\mathcal{B}$. On dit que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite échangeable sur $\mathcal{B}_o$ si, pour chaque entier $k > 0$ et chaque variable Y $\mathcal{B}_o$-mesurable, les distributions (probabilités sur $\mathbb{R}^{k+1}$) de $(X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}, Y)$ $(i_1, \ldots, i_k$ entiers ≥ 0 distincts quelconques) sont les mêmes. Lorsque $\mathcal{B}_o = \{\emptyset, \Omega\}$ la suite sera dite échangeable (tout court). On sait (voir [5]) que dans ce cas les variables X_n sont conditionnellement indépendantes et équidistribuées sur $\mathcal{B}^\infty$, autrement dit, si $f_1, \ldots, f_k$ sont des fonctions réelles continues bornées sur $\mathbb{R}$ on a :

$$E^{\mathcal{B}^\infty} (f_1(X_1) \ldots f_k(X_k)) = \prod_{i=1}^{k} E^{\mathcal{B}^\infty} (f_i(X_o)) .$$

La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sera dite symétrique sur $\mathcal{B}_o$ si, quel que soit $k > 0$, $\epsilon_o, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_k = \pm 1$, et Y $\mathcal{B}_o$-mesurable, les distributions de $(\epsilon_o X_o, \epsilon_1 X_1, \ldots, \epsilon_k X_k, Y)$ sont les mêmes. Lorsque $\mathcal{B}_o = \{\emptyset, \Omega\}$ on dira suite symétrique (tout court).

Théorème I.1. Soient F un sous-espace réflexif de $L^1(\Omega_o, \mathcal{B}_o, P_o)$, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de la boule unité de F, et $\mathcal{D}$ un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$. Il existe un ultrafiltre $\mathcal{D}'$ sur $\mathbb{N}$ et une suite $Y_1, \ldots, Y_k, \ldots$ d'éléments de $F^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}'$ (sous-espace réflexif de $L^1[(\mathcal{B}_o, P_o)^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}']$) ayant les propriétés suivantes :

1) $Y_1, \ldots, Y_k, \ldots$ est une suite échangeable sur $\mathcal{B}_o$, conditionnellement indépendante et équidistribuée sur $\mathcal{B}_o$ et la σ-algèbre de queue de cette suite est contenue dans celle de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2) $\|X + \lambda_1 Y_1 + \dots + \lambda_{k-1} Y_{k-1} + \lambda_k Y_k\|_1 = \lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ \mathcal{D}}} \|X + \lambda_1 Y_1 + \dots + \lambda_{k-1} Y_{k-1} + \lambda_k X_n\|_1$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ et $X \in L^1(\Omega_o, \mathcal{B}_o, P_o)$.

3) La distribution (probabilité sur $\mathbb{R}^{k+1}$) du k+1-uplet $(X, Y_1, \dots, Y_{k-1}, Y_k)$ est la limite quand $n \to \infty$ suivant l'ultrafiltre $\mathcal{D}$ de celle de $(X, Y_1, \dots, Y_{k-1}, X_n)$ (où $X \in L^1(\Omega_o, \mathcal{B}_o, P_o)$).

On définit une suite croissante $(\mathcal{B}_k, P_k)$ de σ- algèbres ($\mathcal{B}_k \subset \mathcal{B}_{k+1}$ et P_{k+1} est un prolongement de P_k) en posant $(\mathcal{B}_{k+1}, P_{k+1}) = (\mathcal{B}_k, P_k)^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}$. On a évidemment $(\mathcal{B}_o, P_o) \subset (\mathcal{B}_k, P_k)$ et donc $X_n \in L^1(\mathcal{B}_k, P_k)$. On désigne alors par Y_{k+1} l'élément de $L^1(\mathcal{B}_{k+1}, P_{k+1}) = L^1[(\mathcal{B}_k, P_k)^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}]$ représenté par la suite équi-intégrable $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Il en résulte que $Y_1, \dots, Y_k \in L^1(\mathcal{B}_k, P_k)$ et on en déduit immédiatement les propriétés 2, 3 de l'énoncé du théorème(d'après la proposition I.3).

Soient m un entier > 0, $\mathcal{B}^{(m)}$ la sous-σ-algèbre de $\mathcal{B}_o$ engendrée par les X_n $(n \geq m)$, $\mathcal{B}^{\infty} = \bigcap\limits_{m \geq 0} \mathcal{B}^{(m)}$ la σ-algèbre de queue de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Lemme I.8. Si $f_1, \dots, f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont continues et tendent vers 0 à l'infini on a $E^{\mathcal{B}^{(m)}}(f_1(Y_1) \dots f_k(Y_k)) = \prod\limits_{i=1}^{k} E^{\mathcal{B}^{(m)}}(f_i(Y_1))$ pour tout $m \geq 0$.

On fait la démonstration par récurrence sur k, soit X une variable aléatoire $\mathcal{B}^{(m)}$-mesurable bornée. On a à montrer que

$$E(f_1(Y_1) \dots f_k(Y_k) \cdot X) = E(X \cdot \prod_{i=1}^{k} E^{\mathcal{B}^{(m)}}(f_i Y_1)))$$

D'après la propriété 3) de l'énoncé du théorème, on a

$$E(f_1(Y_1)\ldots f_k(Y_k)\,.\,X) = \lim_{\substack{n\to\infty\\ \mathscr{D}}} E(f_1(Y_1)\ldots f_{k-1}(Y_{k-1})\,f_k(X_n)\,.\,X)$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty\\ \mathscr{D}}} E(E^{\mathscr{B}^{(m)}}[f_1(Y_1)\ldots f_{k-1}(Y_{k-1})]\,f_k(X_n).X)$$

(puisque, pour n assez grand, $f_k(X_n)$ est $\mathscr{B}^{(m)}$-mesurable).

$$= \lim_{\substack{n\to\infty\\ \mathscr{D}}} E(\prod_{i=1}^{k-1} E^{\mathscr{B}^{(m)}} f_i(Y_k)\,.\,f_k(X_n)\,.\,X)$$

(d'après l'hypothèse de récurrence).

Or, si $Z = X\,.\,\prod_{i=1}^{k-1} E^{\mathscr{B}^{(m)}}(f_i(Y_1))$, Z est une variable aléatoire bornée qui est $\mathscr{B}^{(m)}$-mesurable, donc $\mathscr{B}_o$-mesurable. D'après la propriété 3) de l'énoncé du théorème, on a

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \mathscr{D}}} E(Z\,.\,f_k(X_n)) = E(Z\,.\,f_k(Y_1)) = E(Z\,.\,E^{\mathscr{B}^{(m)}} f_k(Y_1))$$

et on trouve donc exactement l'égalité à démontrer. <u>C.Q.F.D.</u>

D'après le lemme I.8, les variables $Y_1, \ldots, Y_k, \ldots$ sont conditionnellement indépendantes et équidistribuées sur la σ-algèbre $\mathscr{B}^{(m)}$. Il en résulte qu'elles sont échangeables et que leur σ-algèbre de queue est contenue dans $\mathscr{B}^{(m)}$; donc dans $\mathscr{B}^{\infty}$ puisque m est un entier ≥ 0 arbitraire.

En remplaçant $\mathscr{B}^{(m)}$ par $\mathscr{B}_o$ dans la démonstration du lemme I.8, on trouve

$$E^{\mathscr{B}_o}(f_1(Y_1)\ldots f_k(Y_k)) = \prod_{i=1}^{k} E^{\mathscr{B}_o}(f_i(Y_1))$$

Cela montre que les variables $Y_1, \ldots Y_k, \ldots$ sont conditionnellement indépendantes et équidistribuées sur la σ-algèbre $\mathscr{B}_o$, et donc échangeables au-dessus de $\mathscr{B}_o$.

Il reste à trouver sur $\mathbb{N}$, ou, ce qui revient au même, sur un ensemble I dénombrable, un ultrafiltre $\mathcal{D}'$ tel que $Y_1, \ldots, Y_k, \ldots \in F^{I}/\mathcal{D}'$. On définit l'espace de Banach F_k par récurrence en posant $F_o = F$, $F_{k+1} = F_k{}^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}$.
On a donc $F_o \subset F_1 \subset \ldots \subset F_k \subset \ldots$ et $F_k \subset L^1(\mathcal{B}_k, P_k)$. De plus $Y_1, \ldots, Y_k \in F_k$.

D'après la proposition I.6 on a $F_k = F^{\mathbb{N}^k}/\mathcal{D}_k$ où $\mathcal{D}_k$ est un ultrafiltre sur $\mathbb{N}^k$. Donc si on pose $G = \prod_{k \in \mathbb{N}} F_k/\mathcal{D}$, on a $G = F^I/\mathcal{D}'$ où $I = \bigcup_{k \geq 1} \mathbb{N}^k$ est dénombrable (proposition I.7). On a évidemment $F_m \subset G$ pour tout $m \geq 0$, puisque $F_m \subset F_k$ pour $k \geq m$. Il en résulte que $Y_1, \ldots, Y_k, \ldots \in G$. <u>C.Q.F.D.</u>

II. UN CRITERE POUR QU'UN SOUS-ESPACE DE L^1 CONTIENNE ℓ^p $(1 < p \leq 2)$

Soit p un réel, $1 < p \leq 2$. Une variable aléatoire Y sera dite p-stable si on a $E(e^{itY}) = e^{-|t|^p}$ pour $t \in \mathbb{R}$. On pose $\gamma_p = E(|Y|)$. Si $Y_o, \dots, Y_n$ sont indépendantes et p-stables, on a

$$\|\lambda_o Y_o + \dots + \lambda_n Y_n\|_1 = \gamma_p (|\lambda_o|^p + \dots + |\lambda_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

La partie II est consacrée à la démonstration du

__Théorème II.1.__ __Soient $(\Omega_o, \mathcal{B}_o, P_o)$ un espace de probabilité, P_o étant une mesure diffuse, F un sous-espace réflexif de $L^1(\Omega_o, \mathcal{B}_o, P_o)$ et $\mathcal{D}$ un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$; on a donc $F^{\mathbb{N}}/\mathcal{D} \subset L^1(\mathcal{B}, P)$, avec $(\mathcal{B}, P) = (\mathcal{B}_o, P_o)^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}$. On suppose qu'il existe une variable $Z \in F^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}$ telle que $Z = UV$, $U \in L^1(\mathcal{B}_o, P_o)$, $U \neq 0$, et $V \in L^1(\mathcal{B}, P)$, V étant une variable p-stable indépendante de $\mathcal{B}_o$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un sous-espace F' de F qui est $(1+\epsilon)$-isomorphe à ℓ^p (c'est-à-dire qu'il existe une application linéaire bijective $T : \ell^p \to F'$ avec $\|T\|\,\|T^{-1}\| \leq 1+\epsilon$).__

On pose $Z = (Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $Z_n \in F$; $V = (V_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $V_n \in L^1(\mathcal{B}_o, P_o)$. D'après la proposition I.2 on peut choisir la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de façon que $UV_n \in L^1(\mathcal{B}_o, P_o)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $Z = UV = (UV_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Autrement dit, on a $\lim_{\mathcal{D}} \|Z_n - UV_n\|_1 = 0$.

__Lemme II.1.__ __Soient $A \in \mathcal{B}_o$, $C_o, C_1, \dots, C_r \in \mathcal{B}$, contenus dans A et deux à deux disjoints. Alors pour chaque i, $0 \leq i \leq r$, il existe une famille $(C_i^n)_{n \in \mathbb{N}}$ représentant C_i, $C_i^n \in \mathcal{B}_o$, $P_o(C_i^n) = P(C_i)$, $C_o^n, \dots C_r^n$ étant deux à deux disjoints et inclus dans A.__

Démonstration par récurrence sur r. Pour $0 \leq i \leq r-1$ on a donc une famille $(C_i^n)_{n \in \mathbb{N}}$ représentant C_i, $P_o(C_i^n) = P(C_i)$, $C_o^n, \dots, C^n_{r-1}$ étant deux à deux disjoints et contenus dans A. On a d'autre part $C_r = (B_r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et comme C_r est contenu dans A et disjoint de $C_o, \dots, C_{r-1}$, on peut supposer $B_r^n \subset A$ et disjoint de $C_o^n, \dots, C^n_{r-1}$. Soient $\Gamma = A - (C_o \cup \dots \cup C_{r-1})$ et $\Gamma_n = A - (C_o^n \cup \dots \cup C^n_{r-1})$. On a donc $P(\Gamma) = P_o(\Gamma_n)$ et $C_r \subset \Gamma, B_r^n \subset \Gamma_n$. On définit C_r^n de la façon suivante : si $P(C_r) \geq P_o(B_r^n)$ on choisit $C_r^n \in \mathcal{B}_o$ tel que $B_r^n \subset C_r^n \subset \Gamma_n$ et $P_o(C_r^n) = P(C_r)$ (c'est possible car P_o est une mesure diffuse) ; si $P(C_r) \leq P_o(B_r^n)$, on choisit $C_r^n \in \mathcal{B}_o$ tel que $C_r^n \subset B_r^n$ et $P_o(C_r^n) = P(C_r)$.

Dans les deux cas on a $P_o(|B_r^n - C_r^n|) = |P_o(B_r^n) - P(C_r)|$ ($|B_r^n - C_r^n|$ désigne la différence symétrique). Comme $C_r = (B_r^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $|P_o(B_r^n) - P(C_r)| \underset{\mathcal{D}}{\to} 0$, donc $P_o(|B_r^n - C_r^n|) \underset{\mathcal{D}}{\to} 0$ ce qui montre que $C_r = (B_r^n)_{n \in \mathbb{N}} = (C_r^n)_{n \in \mathbb{N}}$. C.Q.F.D.

Lemme II.2. Soient Φ une variable aléatoire $\mathcal{B}$-étagée, indépendante de $\mathcal{B}_o$, telle que $\|U\Phi - UV\|_1 \leq \epsilon$ (ϵ réel > 0), $\mathcal{A}$ une sous-σ-algèbre finie de $\mathcal{B}_o$ et $D \in \mathcal{D}$. Il existe alors $n \in D$ et une variable aléatoire Ψ, $\mathcal{B}_o$-étagée, de même loi que Φ et indépendante de $\mathcal{A}$ telle que $\|U\Psi - UV_n\|_1 \leq 2\epsilon$.

On a $\Phi = \lambda_o 1_{B_o} + \dots + \lambda_k 1_{B_k}$ avec $B_o, \dots, B_k \in \mathcal{B}$ deux à deux disjoints. Soient $A_o, \dots, A_\ell \in \mathcal{B}_o$ les atomes de $\mathcal{A}$ ($A_o, \dots, A_\ell$ sont deux à deux disjoints, $\bigcup_{j=0}^{\ell} A_j = \Omega_o$, et ils engendrent $\mathcal{A}$). On pose $C_{ij} = B_i \cap A_j$ ($0 \leq i \leq k$; $0 \leq j \leq \ell$). Donc $P(C_{ij}) = P(B_i)\,P_o(A_j)$ (puisque Φ est indépendante de $\mathcal{B}_o$). Les C_{ij} sont deux à deux disjoints et $C_{ij} \subset A_j$. D'après le lemme II.1 on peut donc écrire $C_{ij} = (C^n_{ij})_{n \in \mathbb{N}}$ où $C^n_{ij} \in \mathcal{B}_o$, $P_o(C^n_{ij}) = P(C_{ij})$, $C^n_{ij} \subset A_j$, les C^n_{ij} étant deux à deux disjoints pour n fixé.

On pose $B_i^n = \bigcup_{j=0}^{\ell} C^n_{ij}$: donc

$$P_o(B_i^n) = \sum_{j=0}^{\ell} P_o(C^n_{ij}) = \sum_{j=0}^{\ell} P(C_{ij}) = P(B_i)$$

De plus $B_i^n \cap A_j = C^n_{ij}$ donc

$$P_o(B_i^n \cap A_j) = P_o(C_{ij}) = P(B_i)\ P_o(A_j) = P_o(B_i^n)\ P_o(A_j)$$

Cela montre que la variable $\Phi_n = \lambda_o 1_{B_o^n} + \ldots + \lambda_k 1_{B_k^n}$ a même loi que Φ et est indépendante de $\mathcal{A}$.

D'autre part on a $B_i = (B_i^n)_{n \in \mathbb{N}}$ (puisque $(B_i^n)_{n \in \mathbb{N}} = (\bigcup_{j=0}^{\ell} C^n_{ij})_{n \in \mathbb{N}} = \bigcup_{j=0}^{\ell} C_{ij} = B_i$) ce qui montre que $\Phi = (\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

D'après la proposition I.1, on a $U\Phi = (U\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On a vu d'autre part que $UV = (UV_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Comme $\|U\Phi - UV\|_1 \leq \epsilon$ par hypothèse, il en résulte que $\{n \in \mathbb{N} ; \|U\Phi_n - UV_n\|_1 \leq 2\epsilon\} \in \mathcal{D}$. Il existe donc $n \in D$ tel que $\|U\Phi_n - UV_n\|_1 \leq 2\epsilon$, d'où le résultat cherché avec $\Psi = \Phi_n$. <u>C.Q.F.D.</u>

Démonstration du théorème II.1. : puisque $U \neq 0$ et intégrable, on peut évidemment supposer $\|U\|_1 = 1$.

Soit Φ_k une suite de fonctions étagées, V-mesurables, telles que $\|\Phi_k - V\|_1 \leq \frac{1}{2^{k+2}}$.

Nous allons définir par récurrence sur k un entier $n_k > 0$ et une variable Ψ_k, $\mathcal{B}_o$-étagée de même loi que Φ_k, telle que $\Psi_o, \Psi_1, \ldots, \Psi_k, \ldots$ soient indépendantes et $\|Z_{n_k} - U\Psi_k\|_1 \leq \frac{1}{2^k}$.

Supposons donc définis $n_o, n_1, \ldots, n_{k-1}$, $\Psi_o, \ldots, \Psi_{k-1}$ avec ces propriétés. Comme U est $\mathcal{B}_o$-mesurable et que V (donc aussi Φ_k qui est V-mesurable) est indépendante de $\mathcal{B}_o$, on a $\|U\Phi_k - UV\| = \|U\|\ \|\Phi_k - V\| = \|\Phi_k - V\|$

et donc $\|U\Phi_k - UV\| \leq \frac{1}{2^{k+2}}$.

On applique le lemme II.2 en prenant $\Phi = \Phi_k$, $\mathcal{A}$ est la σ-algèbre engendrée par $\Psi_o, \Psi_1, \dots, \Psi_{k-1}$, $D = \{n \in \mathbb{N} \,;\, \|Z_n - UV_n\|_1 \leq \frac{1}{2^{k+1}}\}$ ($D \in \mathcal{D}$ puisque $\|Z_n - UV_n\|_1 \underset{\mathcal{D}}{\to} 0$). Il existe donc un entier $n_k \in D$ et une variable Ψ_o $\mathcal{B}_o$-étagée de même loi que Φ_k, indépendante de $\mathcal{A}$ telle que $\|U\Psi_k - UV_{n_k}\|_1 \leq \frac{1}{2^{k+1}}$; comme $n_k \in D$, on a $\|Z_{n_k} - UV_{n_k}\|_1 \leq \frac{1}{2^{k+1}}$ et donc $\|Z_{n_k} - U\Psi_k\| \leq \frac{1}{2^k}$; cela donne exactement le résultat cherché.

On pose $Y_k = Z_{n_k}$. Donc $Y_k \in F$ et $\|Y_k - U\Psi_k\|_1 \leq \frac{1}{2^k}$.

<u>Lemme II.3</u>.

$$\underline{(\gamma_p - \frac{1}{2^{k+1}})\,(\sum_{i=k}^{k+n} |\lambda_i|)^{\frac{1}{p}} \leq \|\sum_{i=k}^{k+n} \lambda_i \Psi_i\|_1 \leq (\gamma_p + \frac{1}{2^{k+1}})\,(\sum_{i=k}^{k+n} |\lambda_i|^p)^{\frac{1}{p}}}.$$

$\Psi_o, \Psi_1, \dots, \Psi_k, \dots$ sont des variables étagées, indépendantes, Ψ_k a la même loi que Φ_k, $\|\Phi_k - V\|_1 \leq \frac{1}{2^{k+2}}$, V étant une variable p-stable et Φ_k étant V-mesurable. Par suite il existe une suite $S_o, S_1, \dots, S_k, \dots$ de variables p-stables indépendantes telle que Ψ_k soit S_k-mesurable et $\|\Psi_k - S_k\|_1 \leq \frac{1}{2^{k+2}}$.

On a alors

$$\left|\,\|\sum_{i=k}^{k+n} \lambda_i \Psi_i\|_1 - \|\sum_{i=k}^{k+n} \lambda_i S_i\|_1\right| \leq \sum_{i=k}^{k+n} |\lambda_i|\,\|\Psi_i - S_i\|_1 \leq \sum_{i=k}^{k+n} |\lambda_i|\, 2^{-i-2}$$

$$\leq 2^{-k-1} \sup_{i=k}^{k+n} |\lambda_i| \leq 2^{-k-1} (\sum_{i=k}^{k+n} |\lambda_i|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Cela donne immédiatement le résultat cherché puisque

$$\|\sum_{i=k}^{k+n} \lambda_i S_i\|_1 = \gamma_p (\sum_{i=k}^{k+n} |\lambda_i|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

<u>C.Q.F.D.</u>

Lemme II.4. Soit $u \in L^1(\mathcal{B}_o, P_o)$, $\|u\|_1 = 1$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier $k \geq 0$ tel que $\|uX\|_1 \geq (1-\epsilon)\|X\|_1$ pour toute variable X de la forme $\sum_{i=k}^{k+n} \lambda_i \Psi_i$. Si de plus u est bornée, il existe un entier k tel que $(1-\epsilon)\|X\|_1 \leq \|u X\|_1 \leq (1+\epsilon)\|X\|_1$ pour toute variable X de la forme indiquée.

Soient $\mathcal{C}_o$ la σ-algèbre engendrée par les variables indépendantes $\Psi_o, \Psi_1, \ldots, \Psi_k, \ldots$ et $\mathcal{E}_k$ l'espace vectoriel engendré par $\Psi_k, \Psi_{k+1}, \ldots$ Pour tout $X \in \mathcal{E}_o$, on a $\|u X\|_1 = \|(E^{\mathcal{C}_o} u) X\|_1$; comme $\|u\|_1 = \|E^{\mathcal{C}_o} u\|_1 = 1$ et que $\|E^{\mathcal{C}_o} u\|_\infty \leq \|u\|_\infty$, on voit qu'en remplaçant u par $E^{\mathcal{C}_o} u$, on peut supposer que u est $\mathcal{C}_o$-mesurable.

D'après le lemme II.3, l'espace $\mathcal{E}_o$ (muni de la norme de $L^1(\mathcal{B}_o, P_o)$) est isomorphe à ℓ^p donc est réflexif $(p > 1)$. Sa boule unité est donc équi-intégrable ; il existe donc $N \geq 1$, tel que, pour tout $X \in \mathcal{E}_o$, $\|X\| = 1$, on ait $\|X - X_N\| \leq \frac{\epsilon}{3}$, avec $X_N = X \cdot 1_{\{|X| \leq N\}}$.

Par ailleurs, u étant $\mathcal{C}_o$-mesurable, il existe un entier k, et $u' \in L^1(\mathcal{C}_o, P_o)$, u' ne dépendant que de $\Psi_o, \ldots, \Psi_{k-1}$ tels que $\|u - u'\|_1 \leq \epsilon/3N$.

On a alors $\left| \int |u X_N| \, dP_o - \int |u' X_N| \, dP_o \right| \leq \int |X_N| \, |u - u'| \, dP_o \leq \frac{\epsilon}{3}$ puisque $|X_N| \leq N$.

Or, si $X \in \mathcal{E}_k$, X est indépendant de u', donc X_N aussi. Il en résulte que $\int |u' X_N| \, dP = \|u'\|_1 \|X_N\|_1$ et on a donc $\left| \|u X_N\|_1 - \|u'\|_1 \|X_N\|_1 \right| \leq \frac{\epsilon}{3}$. Comme $\left| \|u\|_1 - \|u'\|_1 \right| \leq \|u - u'\|_1 \leq \frac{\epsilon}{3}$ et que $\left| \|X_N\| - \|X\|_1 \right| \leq \frac{\epsilon}{3}$, on a $(1 - \frac{\epsilon}{3})^2 \leq \|u'\|_1 \|X_N\|_1 \leq (1 + \frac{\epsilon}{3})^2$. Donc $(1 - \frac{\epsilon}{3})^2 - \frac{\epsilon}{3} \leq \|u X_N\|_1 \leq (1 + \frac{\epsilon}{3})^2 + \frac{\epsilon}{3}$ quel que soit $X \in \mathcal{E}_k$, $\|X\| = 1$.

On a $\|u X\|_1 = \int |u| \, |X| \, dP \geq \int |u| \, |X_N| \, dP$ puisque $|X| \geq |X_N|$.

On en déduit $\|u X\|_1 \geq (1 - \frac{\epsilon}{3})^2 - \frac{\epsilon}{3} \geq 1 - \epsilon$ pour tout $X \in \mathcal{E}_k$, $\|X\| = 1$ ce qui est le premier résultat cherché .

Si u est bornée on a $| \, \|u X\|_1 - \|u X_N\|_1 \, | \leq \|u (X - X_N)\|_1 \leq \|u\|_\infty \|X - X_N\|_1 \leq \frac{\epsilon}{3} \|u\|_\infty$. Il en résulte que $\|u X\|_1 \leq (1 + \frac{\epsilon}{3})^2 + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \|u\|_\infty$ pour tout $X \in \mathcal{E}_k$ tel que $\|X\| = 1$. Autrement dit, si $\delta = \epsilon \, (1 + \frac{\|u\|_\infty}{3}) + \frac{\epsilon^2}{9}$, on a $\|u X\|_1 \leq (1 + \delta) \|X\|_1$ pour tout $X \in \mathcal{E}_k$. C'est bien le second résultat annoncé puisque δ peut-être rendu arbitrairement petit en choisissant ϵ convenablement

C.Q.F.D.

Lemme II.5. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier k tel les sous-espaces de $L^1(\mathcal{B}_o, P_o)$ respectivement engendrés par les Y_i $(i \geq k)$ et les $U \Psi_i$ $(i \geq k)$ soient $(1 + \epsilon)$-isomorphes.

Soit δ un réel > 0 ; on choisit k de façon que $2^{-k} \leq \delta$, et que $\|UX\|_1 \geq (1 - \delta) \|X\|_1$ pour tout X de la forme $\sum_{i=k}^{k+n} \lambda_i \Psi_i$ (lemme II.4). On a alors

$$\| \sum_{i=k}^{k+n} \lambda_i Y_i - \sum_{i=k}^{k+n} \lambda_i U \Psi_i \|_1 \leq \sum_{i=k}^{k+n} |\lambda_i| \, \|Y_i - U \Psi_i\|_1 \leq \sum_{i=k}^{k+n} |\lambda_i| \, 2^{-i}$$

$$\leq 2^{-k+1} \sup_{i=k}^{k+n} |\lambda_i| \leq 2 \, \delta \left(\sum_{i=k}^{k+n} |\lambda_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \frac{2 \, \delta}{\gamma_p - 2^{-k-1}} \| \sum_{i=k}^{k+n} \lambda_i \Psi_i \|_1 \quad \text{(lemme II.3)}$$

$$\leq \frac{2 \, \delta}{(1 - \delta)(\gamma_p - 2^{-k-1})} \| \sum_{i=k}^{k+n} \lambda_i U \Psi_i \|_1$$

(Cette dernière inégalité résultant du choix de l'entier k d'après le lemme II.4).
Comme $2^{-k-1} \leq \delta/2$ on a donc

$$\|\sum_{i=k}^{k+n} \lambda_i Y_i - \sum_{i=k}^{k+n} \lambda_i U \Psi_i\|_1 \leq \frac{4\delta}{(1-\delta)(2\gamma_p - \delta)} \|\sum_{i=k}^{k+n} \lambda_i U \Psi_i\|_1 .$$

Il ne reste plus qu'à choisir δ assez petit pour que $\dfrac{4\delta}{(1-\delta)(2\gamma_p - \delta)} \leq \epsilon$ pour obtenir le résultat cherché. C.Q.F.D.

Lemme II.6. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier k tel que le sous-espace de $L^1(\mathcal{B}_o, P_o)$ engendré par les $U\Psi_i$ $(i \geq k)$ soit $(1+\epsilon)$-isomorphe à ℓ^p.

Les Y_i $(i \geq k_o)$ engendrent un sous-espace réflexif de $L^1(\mathcal{B}_o, P_o)$ c'est un sous-espace de F qui est réflexif). Il en est donc de même des $U\Psi_i$ $(i \geq k_o)$ d'après le lemme II.5, donc aussi des $U\Psi_i$ $(i \geq 0)$ puisque l'espace $\mathfrak{F}$ qu'ils engendrent ne diffère du précédent que par un espace de dimension finie. Il en résulte que la boule unité de $\mathfrak{F}$ est équi-intégrable.

Comme $\|U\|_1 = 1$ on a $P_o\{|U| > N\} \leq \frac{1}{N}$. Pour N assez grand et pour tout $X \in \mathcal{E}_o$ (espace engendré par $\Psi_o, \dots, \Psi_k, \dots$) tel que $\|UX\|_1 = 1$ on a donc $\int_{\{|U|>N\}} |UX| \, dP_o \leq \delta$ (δ réel > 0 fixé) ; on peut aussi prendre N assez grand pour que $\int_{\{|U|>N\}} |U| \, dP_o \leq \delta$. Si on pose $U_N = U \cdot 1_{\{|U| \leq N\}}$ on a donc $\|U_N X - UX\|_1 \leq \delta$ si $\|UX\|_1 = 1$. Autrement dit
$\|U_N X - UX\|_1 \leq \delta \|UX\|_1$ pour tout $X \in \mathcal{E}_o$. De plus $1 - \delta \leq \|U_N\|_1 \leq 1 = \|U\|_1$.

En appliquant le lemme II.4 avec $u = \dfrac{U_N}{\|U_N\|_1}$ qui est une fonction bornée, on voit qu'il existe un entier k tel que, pour tout $X \in \mathcal{E}_k$ on ait :
$(1-\delta)\|X\|_1 \|U_N\|_1 \leq \|U_N X\|_1 \leq (1+\delta) \|X\|_1 \|U_N\|_1$.

D'où $(1-\delta)^2 \|X\|_1 \leq \|U_N X\|_1 \leq (1+\delta) \|X\|_1$.

Comme $\|U_N X - UX\|_1 \leq \delta \|UX\|_1$, d'où

$(1-\delta)\|UX\|_1 \leq \|U_N X\|_1 \leq (1+\delta)\|UX\|_1$, on a donc

$\frac{(1-\delta)^2}{1+\delta} \|X\|_1 \leq \|UX\|_1 \leq \frac{1+\delta}{1-\delta} \|X\|_1$, pour tout $X \in \mathscr{E}_k$. En prenant

$X = \sum_{i=k}^{k+n} \lambda_i \Psi_i$ et en appliquant le lemme II.3 on trouve

$$\frac{(1-\delta)^2}{1+\delta}(\gamma_p - 2^{-k-1})\left(\sum_{i=k}^{k+n} |\lambda_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left\|\sum_{i=k}^{k+n} \lambda_i U \Psi_i\right\|_1 \leq$$

$$\leq \frac{1+\delta}{1-\delta}(\gamma_p + 2^{-k-1})\left(\sum_{i=k}^{k+n} |\lambda_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} .$$

Il ne reste plus qu'à choisir δ assez petit et k assez grand pour que $\frac{(1-\delta)^2}{1+\delta}(\gamma_p - 2^{-k-1}) \geq \gamma_p(1-\epsilon)$ et $\frac{1+\delta}{1-\delta}(\gamma_p + 2^{-k-1}) \leq \gamma_p(1+\epsilon)$ pour obtenir le résultat cherché. C.Q.F.D.

D'après les lemmes II.5 et II.6, pour tout $\epsilon > 0$ il existe un entier k tel que le sous-espace de $L^1(\mathscr{B}_o, P_o)$ engendré par les Y_i $(i \geq k)$ soit $(1+\epsilon)$-isomorphe à ℓ^p . Comme c'est un sous-espace de F, la démonstration du théorème II.1 est achevée.

D'autre part, comme $\|Y_k - U\psi_k\|_1 \to 0$ quand $k \to \infty$, et que les variables Ψ_k sont indépendantes, la suite Y_k est finalement $\mathscr{B}'_o$-mesurable, $\mathscr{B}'_o$ étant la sous-σ-algèbre de $\mathscr{B}_o$ engendrée par U. On en déduit immédiatement l'implication $4 \Rightarrow 1$ du théorème principal.

III. CONSTRUCTION DE VARIABLES ALEATOIRES p-STABLES A PARTIR d'UN ESPACE ISOMORPHE A ℓ^p ENGENDRE PAR DES VARIABLES ECHANGEABLES ET SYMETRIQUES.

Théorème III.1. Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite échangeable symétrique dans $L^1(\mathcal{B}_1, P_1)$ engendrant un sous-espace fermé Γ isomorphe à ℓ^p $(1 < p \leq 2)$. On suppose que

$$M^{-1}(|\lambda_o|^p + \ldots + |\lambda_n|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \|\lambda_o X_o + \ldots + \lambda_n X_n\|_1 \leq M(|\lambda_o|^p + \ldots + |\lambda_n|^p)^{\frac{1}{p}}, \ M \geq 1 .$$

Alors il existe un ultrafiltre $\mathcal{D}_2$ sur $\mathbb{N}$, et, dans $\Gamma^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}_2$ (sous-espace de $L^1(\mathcal{B}_2, P_2)$ avec $(\mathcal{B}_2, P_2) = (\mathcal{B}_1, P_1)^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}_2$) une suite $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ symétrique échangeable, $\|Z_k\|_1 = 1$ ayant les propriétés suivantes :

1) $Z_k = UV_k$, $U, V_o, V_1, \ldots, V_k, \ldots$ étant des variables indépendantes dans $L^1(\mathcal{B}_2, P_2)$, $V_o, V_1, \ldots, V_k, \ldots$ étant p-stables, et $U \geq 0$.

2) $Z_k = (z_k^n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $z_k^n \in \Gamma$, $\|z_k^n\| = 1$, les z_k^n étant des paquets disjoints formés avec les X_i (pour n, k variant dans $\mathbb{N}$).

Rappelons qu'un "paquet formé avec les X_i" est simplement une combinaison linéaire finie à coefficients réels des X_i.

Nous montrerons d'abord le

Théorème III.2. Sous les hypothèses de l'énoncé du théorème III.1. il existe un ultrafiltre $\mathcal{D}_2$ sur $\mathbb{N}$ et, dans $\Gamma^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}_2$ une suite symétrique échangeable $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $\|Z_k\|_1 = 1$ telle que

1) quels que soient les réels a, $b > 0$ et $c = (a^p + b^p)^{\frac{1}{p}}$, les trois couples de variables aléatoires (cZ_o, cZ_1), $(aZ_o + bZ_1, cZ_2)$, $(aZ_o + bZ_1, aZ_2 + bZ_3)$ ont la même distribution.

2) $Z_k = (z_k^n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $z_k^n \in \Gamma$, $\|z_k^n\| = 1$, les z_k^n étant des paquets formés avec les X_i, deux à deux disjoints pour n fixé (c'est-à-dire que z_o^n , z_1^n ,..., z_k^n , ... sont des paquets disjoints).

Soit $\mathcal{D}$ un ultrafiltre non trivial sur $\mathbb{N}$. On définit une application linéaire $\varphi \to X_\varphi$ de $L^p(\mathbb{R}_+)$ dans $\Gamma_1 = \Gamma^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}$ telle que $M^{-1} \|\varphi\|_p \leq \|X_\varphi\|_1 \leq M \|\varphi\|_p$.

Pour cela, appelons pour abréger "intervalle de $\mathbb{R}_+$" un intervalle semi-ouvert $[a, b[$ avec $0 \leq a < b$.

Lorsque $I = [a, b[$, a, b étant des rationnels dyadiques, on définit $X_I \in \Gamma^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}$ en posant $X_I = (\xi_I^n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec

$$\xi_I^n = 2^{-\frac{n}{p}} \sum_{k=a.2^n}^{b.2^n-1} X_k \quad \text{si } n \text{ est assez grand pour que } a.2^n,\ b.2^n \in \mathbb{N},$$

$$\xi_I^n = 0 \quad \text{sinon.}$$

Soient $I_1, \ldots, I_k$ des intervalles disjoints de $\mathbb{R}_+$, $I_j = [a_j, b_j[$, à extrémités dyadiques. Pour n assez grand, on a

$$\lambda_1 \xi^n_{I_1} + \ldots + \lambda_k \xi^n_{I_k} = 2^{-\frac{n}{p}} \sum_{j=0}^{k} \lambda_j \sum_{i=a_j.2^n}^{b_j.2^n-1} X_i$$

D'après l'hypothèse faite sur les X_i, on a alors :

$$M^{-1} \quad 2^{-\frac{n}{p}} [\sum_{j=0}^{k} |\lambda_j|^p \,.\, 2^n (b_j - a_j)]^{\frac{1}{p}} \leq \|\lambda_1 \xi^n_{I_1} + \ldots + \lambda_k \xi^n_{I_k}\|_1$$

$$\leq M \; 2^{-\frac{n}{p}} [\sum_{j=0}^{k} |\lambda_j|^p \; 2^n (b_j - a_j)]^{\frac{1}{p}}$$

Il en résulte, en passant à la limite suivant $\mathcal{B}$ que l'on a

$$(1) \quad M^{-1} (|\lambda_1|^p \mu(I_1) + \ldots + |\lambda_k|^p \mu(I_k))^{\frac{1}{p}} \leq \|\lambda_1 X_{I_1} + \ldots + \lambda_k X_{I_K}\|_1$$

$$\leq M (|\lambda_1|^p \mu(I_1) + \ldots + |\lambda_k|^p \mu(I_k))^{\frac{1}{p}} \quad ;$$

μ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$. Pour chaque fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ en escalier sur des intervalles à extrémités dyadiques, $\varphi = \lambda_1 1_{I_1} + \ldots + \lambda_k 1_{I_k}$, on pose $X_\varphi = \lambda_1 X_{I_1} + \ldots + \lambda_k X_{I_k}$ (cette définition ne dépend pas de la représentation que l'on choisit pour φ ; cela résulte aisément du fait que si I, J sont deux intervalles consécutifs, $X_{I \cup J} = X_I + X_J$). L'application $\varphi \to X_\varphi$ est donc linéaire, et d'après (1), on a $M^{-1} \|\varphi\|_p \leq \|X_\varphi\|_1 \leq M \|\varphi\|_p$. Elle se prolonge donc en une application linéaire de $L^p(\mathbb{R}_+)$ dans $\Gamma^{\mathbb{N}}/\mathcal{B}$, notée aussi $\varphi \to X_\varphi$, satisfaisant la même inégalité.

Lemme III.1. Si $I_1, \dots, I_k$ sont des intervalles disjoints de $\mathbb{R}_+$, la distribution de $(X_{I_1}, \dots, X_{I_k})$ est symétrique et ne dépend que de la suite $(\mu(I_1), \dots, \mu(I_k))$.

(Autrement dit : si $J_1, \dots, J_k$ sont des intervalles disjoints de $\mathbb{R}_+$, $\mu(J_1) = \mu(I_1)$ $\mu(J_1) = \mu(I_1), \dots, \mu(J_k) = \mu(I_k)$, alors $(\epsilon_1 X_{J_1}, \dots, \epsilon_k X_{J_k})$ a même distribution que $(X_{I_1}, \dots, X_{I_k})$, $\epsilon_1, \dots, \epsilon_k$ étant ± 1).

Supposons d'abord $I_1, \dots, I_k, J_1, \dots, J_k$ à extrémités dyadiques. Il est alors clair que, pour n assez grand, $(\xi^n_{I_1}, \dots, \xi^n_{I_k})$ et $(\epsilon_1 \xi^n_{J_1}, \dots, \epsilon_k \xi^n_{J_k})$ ont même distribution (car les X_i forment une suite échangeable symétrique). Or la distribution de $(X_{I_1}, \dots, X_{I_k})$ (resp. $(\epsilon_1 X_{J_1}, \dots, \epsilon_k X_{J_k})$) est la limite suivant $\mathcal{B}$ de celle de $(\xi^n_{I_1}, \dots, \xi^n_{I_k})$ (resp. $(\epsilon_1 \xi^n_{J_1}, \dots, \epsilon_k \xi^n_{J_K})$) d'après la proposition I.3. D'où le résultat.

Dans le cas général, on choisit des intervalles à extrémités dyadiques $I_1^n, \dots, I^n_k, J^n_1, \dots, J^n_k$ respectivement inclus dans $I_1, \dots, I_k, J_1, \dots, J_k$, tels que $\mu(I_i - I^n_i)$, $\mu(J_i - J^n_i) \leq \frac{1}{n}$ et $\mu(I^n_i) = \mu(J^n_i)$ $(1 \leq i \leq k)$. D'après l'inégalité (1) on a $\|X_{I_i} - X_{I^n_i}\|_1 \leq M\, n^{-\frac{1}{p}}$, $\|X_{J_i} - X_{J^n_i}\|_1 \leq M\, n^{-\frac{1}{p}}$

Il en résulte que $X_{I_i^n} \to X_{I_i}$, $X_{J_i^n} \to X_{J_i}$ au sens de L^1. Par suite la distribution de $(X_{I_1^n}, \dots, X_{I_k^n})$ (resp. $(\epsilon_1 X_{J_1^n}, \dots, \epsilon_k X_{J_k^n})$) tend vers celle de $(X_{I_1}, \dots, X_{I_k})$ (resp. $(\epsilon_1 X_{J_1}, \dots, \epsilon_k X_{J_k})$). D'où le résultat puisque, comme on vient de le voir, $(X_{I_1^n}, \dots, X_{I_k^n})$ et $(\epsilon_1 Y_{J_1^n}, \dots, \epsilon_k Y_{J_k^n})$ ont même distribution. C.Q.F.D.

Lemme III.2. Soit J un intervalle de $\mathbb{R}_+$, $J_n \subset J$ une suite croissante d'intervalle, $\bigcup_n J_n = J$, les extrémités de J_n étant des rationnels de dénominateur 2^n. Alors $X_J = (\xi^n_{J_n})_{n \in \mathbb{N}}$.

$1_{J_k} \to 1_J$ dans $L^p(\mathbb{R}_+)$ et donc $X_{J_k} \to X_J$ dans L^1 (inégalité (1)).

Posons $Y = (\xi^n_{J_n})_{n \in \mathbb{N}} \in \Gamma^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}$ (sous-espace de $L^1[(\mathcal{B}_1, P_1)^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}]$).

Comme $X_{J_k} = (\xi^n_{J_k})_{n \in \mathbb{N}}$ on a $\|Y - X_{J_k}\|_1 = \lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ \mathcal{D}}} \|\xi^n_{J_n} - \xi^n_{J_k}\|_1$. Or, pour $n \geq k$, les extrémités de J_n, J_k sont des rationnels de dénominateur 2^n. Par définition de $\xi^n_{J_n}$, $\xi^n_{J_k}$, et en utilisant l'hypothèse faite sur les X_i, on trouve aisément $\|\xi^n_{J_n} - \xi^n_{J_k}\| \leq M\,\mu\,(J_n - J_k)^{\frac{1}{p}}$. En passant à la limite suivant $\mathcal{D}$, on a $\|Y - X_{J_k}\|_1 \leq M\,\mu\,(J - J_k)^{\frac{1}{p}}$. Comme $\mu\,(J - J_k) \to 0$ quand $k \to \infty$, on voit que $X_{J_k} \to Y$ dans L^1 et donc $Y = X_J$. <u>C.Q.F.D.</u>

<u>Lemme III.3.</u> <u>Soient $I_o, I_1, \ldots, I_k, \ldots$ une suite d'intervalles de $\mathbb{R}_+$ disjoints deux à deux. On a alors $X_{I_k} = (\eta^n_k)_{n \in \mathbb{N}}$, où $\eta^n_o, \eta^n_1, \ldots, \eta^n_k, \ldots$ sont des paquets disjoints formés avec les X_i.</u>

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, soit I^n_k une suite croissante d'intervalles contenus dans I_k, telle que $\bigcup\limits_n I^n_k = I_k$, les extrémités de I^n_k étant des rationnels de dénominateur 2^n. D'après le lemme III.2, on a $X_{I_k} = (\xi^n_{I^n_k})_{n \in \mathbb{N}}$. Il suffit de poser $\eta^n_k = (\xi^n_{I^n_k})_{n \in \mathbb{N}}$. <u>C.Q.F.D.</u>

<u>Lemme III.4.</u> <u>Soit $\varphi_o, \varphi_1, \ldots, \varphi_k, \ldots$ une suite de fonctions en escalier sur $\mathbb{R}_+$, deux à deux étrangères. Alors on a $X_{\varphi_k} = (\eta^n_k)_{n \in \mathbb{N}}$, les η^n_k étant des paquets formés avec les X_i ; pour n fixé, $\eta^n_o, \eta^n_1, \ldots, \eta^n_k, \ldots$ sont des paquets disjoints.</u>

On écrit $\varphi_k = \sum\limits_{j=0}^{r_k} \lambda_{kj}\, 1_{I_{kj}}$, les I_{kj} $(k \in \mathbb{N},\ 0 \leq j \leq r_k)$ étant des intervalles de $\mathbb{R}_+$ deux à deux disjoints. On a donc (lemme III.3) $X_{I_{kj}} = (\zeta^n_{kj})_{n \in \mathbb{N}}$, les ζ^n_{kj} étant, pour chaque n fixé, des paquets disjoints en les X_i. On a donc $X_{\varphi_k} = \sum\limits_{j=0}^{r_k} \lambda_{kj}\, X_{I_{kj}} = (\eta^n_k)_{n \in \mathbb{N}}$ avec

$\eta^n_k = \sum_{j=0}^{r_k} \lambda_{kj}\, \zeta^n_{kj}$. Pour n fixé, les η^n_k sont donc des paquets disjoints en les X_i . <u>C.Q.F.D.</u>

Soit ρ un réel >1 ; si $I = [a, b[$, $0 \leq a < b$, on pose

$\Delta_I^{j,n,\rho} = [j + \frac{a}{n\rho^j} , j + \frac{b}{n\rho^j}[$ si $\frac{b}{n} < 1$, $\Delta_I^{j,n,\rho} = \emptyset$ si $\frac{b}{n} \geq 1$.

Donc $\Delta_I^{0,n,\rho}$, $\Delta_I^{1,n,\rho}, \ldots, \Delta_I^{n-1,n,\rho}$ sont des intervalles disjoints (respectivement contenus dans $[0, 1[$, $[1, 2[$, ... $[n-1\ n[$) . On pose

$$Y_I^{\rho,n} = \sum_{j=0}^{n-1} \rho^{\frac{j}{p}} X_{\Delta_I^{j,n,\rho}} = X_{\varphi_I^{\rho,n}} \qquad \text{avec}$$

$$\varphi_I^{\rho,n} = \sum_{j=0}^{n-1} \rho^{\frac{j}{p}}\, 1_{\Delta_I^{j,n,\rho}}$$

Notons que si $I_o, I_1, \ldots, I_k, \ldots$ sont des intervalles disjoints, $\varphi_{I_o}^{\rho,n}$, $\varphi_{I_1}^{\rho,n}$, ... , $\varphi_{I_k}^{\rho,n}$, ... sont des fonctions en escalier deux à deux étrangères.

On désigne par Γ_1 l'espace $\Gamma^{\mathbb{N}}/\mathcal{B}$, et par Γ_2 l'espace $\Gamma_1{}^{\mathbb{N}}/\mathcal{B}$. On définit $Y_I^\rho \in \Gamma_2$ en posant $Y_I^\rho = (Y_I^{\rho,n})_{n \in \mathbb{N}}$.

<u>Lemme III.5.</u> <u>Si $I_1, \ldots, I_k$ sont des intervalles de $\mathbb{R}_+$ deux à deux disjoints on a</u>
<u>$M^{-1} (|\lambda_1|^\rho\ \mu(I_1) + \ldots + |\lambda_k|^\rho\ \mu(I_k))^{\frac{1}{\rho}} \leq \|\lambda_1 Y_{I_1}^\rho + \ldots + \lambda_k Y_{I_K}^\rho\|_1$</u>
<u>$\leq M (|\lambda_1|^p\ \mu(I_1) + \ldots + |\lambda_k|^p\ \mu(I_k))^{\frac{1}{p}}$.</u>

Posons $I_i = [a_i , b_i[$ $(1 \leq i \leq k)$ et soit n un entier assez grand pour que $\frac{b_i}{n} < 1$ pour $1 \leq i \leq k$. On a alors

$$\varphi_{I_i}^{\rho,n} = \sum_{j=0}^{n-1} \rho^{\frac{j}{p}}\, 1_{[j + \frac{a_i}{n\rho^j} , j + \frac{b_i}{n\rho^j}[} \quad \text{d'où } \|\varphi_{I_i}^{\rho,n}\|_p = (b_i - a_i)^{\frac{1}{p}} = \mu(I_i)^{\frac{1}{p}} .$$

Comme les $\varphi_{I_i}^{\rho,n}$ $(1 \le i \le k)$ sont étrangères , si

$\Phi_n = \lambda_1 \varphi_{I_1}^{\rho,n} + \ldots + \lambda_k \varphi_{I_k}^{\rho,n}$, on a $\|\Phi_n\|_p = [\,|\lambda_1|^p \mu(I_1) + \ldots + |\lambda_k|^p \mu(I_k)]^{\frac{1}{p}}$.

Or $\lambda_1 Y_{I_1}^{\rho,n} + \ldots + \lambda_k Y_{I_k}^{\rho,n} = X_{\Phi_n}$, d'où il résulte que

$M^{-1} \|\Phi_n\|_p \le \|\lambda_1 Y_{I_1}^{\rho,n} + \ldots + \lambda_k Y_{I_k}^{\rho,n}\|_1 \le M \|\Phi_n\|_p$.

En faisant tendre n vers l'infini suivant l'ultrafiltre $\mathcal{B}$ on obtient le résultat cherché.

C.Q.F.D.

<u>Lemme III.6.</u> <u>Si $I_1, \ldots, I_k$ sont des intervalles disjoints dans $\mathbb{R}_+$, la distribution de $(Y_{I_1}^{\rho}, \ldots, Y_{I_k}^{\rho})$ est symétrique et ne dépend que de la suite $(\mu(I_1), \ldots, \mu(I_k))$:</u>

(Autrement dit, si $J_1, \ldots, J_k$ sont des intervalles disjoints dans $\mathbb{R}_+$, $\mu(J_1) = \mu(I_1)$, ..., $\mu(J_k) = \mu(I_k)$, alors $(\epsilon_1 Y_{J_1}^{\rho}, \ldots, \epsilon_k Y_{J_k}^{\rho})$ a même distribution que $(Y_{J_1}^{\rho}, \ldots, Y_{I_k}^{\rho})$, $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k$ étant ± 1).

Posons $I_i = [a_i, b_i[$, $J_i = [c_i, d_i[$ $(1 \le i \le k)$ avec $b_i - a_i = d_i - c_i$. Soit n un entier assez grand pour que $\frac{b_i}{n} < 1$, $\frac{d_i}{n} < 1$ $(1 \le i \le k)$. On a alors

$$Y_{I_i}^{\rho,n} = \sum_{j=0}^{n-1} \rho^{\frac{j}{p}} X_{[j + \frac{a_i}{n\rho^j},\, j + \frac{b_i}{n\rho^j}[} \quad ;$$

$$\epsilon_i Y_{J_i}^{\rho,n} = \sum_{j=0}^{n-1} \epsilon_i \rho^{\frac{j}{p}} X_{[j + \frac{c_i}{n\rho^j},\, j + \frac{d_i}{n\rho^j}[}$$

D'après le lemme III.1 les deux nk-uplets de variables aléatoires

$$\left(X_{[j + \frac{a_i}{n\rho^j},\, j + \frac{b_i}{n\rho^j}[}\right)_{\substack{0 \le j \le n-1 \\ 1 \le i \le k}} \quad \text{et} \quad \left(\epsilon_i X_{[j + \frac{c_i}{n\rho^j},\, j + \frac{d_i}{n\rho^j}[}\right)_{\substack{0 \le j \le n-1 \\ 1 \le i \le k}}$$

ont la même distribution Il en résulte immédiatement que les k-uplets de variables aléatoires $(Y_{I_i}^{\rho,n})_{1\leq i\leq k}$ et $(\epsilon_i Y_{I_i}^{\rho,n})_{1\leq i\leq k}$ ont la même distribution.

En faisant tendre n vers l'infini suivant $\mathcal{B}$ et en appliquant la proposition I.3, on en déduit que les k-uplets $(Y_{I_i}^{\rho})_{1\leq i\leq k}$ et $(\epsilon_i\ Y_{I_i}^{\rho})_{1\leq i\leq k}$ ont la même distribution. <u>C.Q.F.D.</u>

<u>Lemme III.7.</u> <u>Soient $I_1, \dots, I_k$, I, J des intervalles de $\mathbb{R}_+$, $I_1, \dots, I_k$, I étant deux à deux disjoints ainsi que $I_1, \dots, I_k$, J, et $\mu(I) = \rho\,\mu(J)$. Alors les (k+1)-uplets de variables aléatoires $(Y_{I_1}^{\rho}, \dots, Y_{I_k}^{\rho}, Y_I^{\rho})$ et $(Y_{I_1}^{\rho}, \dots, Y_{I_k}^{\rho}, \rho^{\frac{1}{p}}\, Y_J^{\rho})$ ont la même distribution.</u>

On a $I_i = [a_i, b_i[$ $(1\leq i\leq k)$, $I = [a, b[$, $J = [c, d[$, $b - a = \rho(d-c)$.
Soit n un entier assez grand pour que $\frac{b_i}{n} < 1$ $(1\leq i\leq k)$, $\frac{b}{n} < 1$, $\frac{d}{n} < 1$.

On a alors :

$$Y_{I_i}^{\rho,n} = \sum_{j=0}^{n-1} \rho^{\frac{j}{p}}\, X_{[j+\frac{a_i}{n\rho^j}\,,\, j+\frac{b_i}{n\rho^j}[}$$

$$Y_{I}^{\rho,n} = \sum_{j=0}^{n-1} \rho^{\frac{j}{p}}\, X_{[j+\frac{a}{n\rho^j}\,,\, j+\frac{b}{n\rho^j}[}$$

$$\rho^{\frac{1}{p}}\, Y_{J}^{\rho,n} = \sum_{j=0}^{n-1} \rho^{\frac{j+1}{p}}\, X_{[j+\frac{c}{n\rho^j}\,,\, j+\frac{d}{n\rho^j}[}$$

Posons alors $Y^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} \rho^{\frac{j+1}{p}}\, X_{[j+1+\frac{a}{n\rho^{j+1}}\,,\, j+1+\frac{b}{n\rho^{j+1}}[}$.

On a immédiatement $Y^{(n)} - Y_I^{\rho,n} = \rho^{\frac{n}{p}}\, X_{[n+\frac{a}{n\rho^n}\,,\, n+\frac{b}{n\rho^n}[} - X_{[\frac{a}{n}\,,\,\frac{b}{n}[}$

et donc $\|Y^{(n)} - Y_I^{\rho,n}\|_1 \leq M\,[\frac{2}{n}(b-a)]^{\frac{1}{p}}$. Donc $\|Y^{(n)} - Y_I^{\rho,n}\|_1 \to 0$ quand $n \to \infty$, d'où il résulte que $Y_I^{\rho} = (Y^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$.

Par ailleurs, d'après le lemme III.1 les deux $(nk+n)$-uplets de variables aléatoires :

$$(X_{[j+\frac{a_i}{n\rho^j},\, j+\frac{b_i}{n\rho^j}[})_{\substack{0\leq j\leq n-1\\ 1\leq i\leq k}} \quad (X_{[j+1+\frac{a}{n\rho^{j+1}},\, j+1+\frac{b}{n\rho^{j+1}}[})_{0\leq j\leq n-1}$$

et

$$(X_{[j+\frac{a_i}{n\rho^j},\, j+\frac{b_i}{n\rho^j}[})_{\substack{0\leq j\leq n-1\\ 1\leq i\leq k}} \quad (X_{[j+\frac{c}{n\rho^j},\, j+\frac{d}{n\rho^j}[})_{0\leq j\leq n-1}$$

ont la même distribution (les intervalles $[j+\frac{c}{n\rho^j}, j+\frac{d}{n\rho^j}[$ et $[j+1+\frac{a}{n\rho^{j+1}}, j+1+\frac{b}{n\rho^{j+1}}[$ ayant la même longueur).

Il en résulte que les deux $(k+1)$-uplets de variables aléatoires

$$[(Y_{I_i}^{\rho,n})_{1\leq i\leq k},\, Y^{(n)}] \text{ et } [(Y_{I_i}^{\rho,n})_{1\leq i\leq k},\, \rho^{\frac{1}{p}}\, Y_J^{\rho,n}]$$

ont la même distribution. En faisant tendre n vers l'infini suivant $\mathcal{D}$ et en appliquant la proposition I.3, on obtient le résultat cherché (puisque $Y_I^{\rho} = (Y^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$) .

C.Q.F.D.

<u>Lemme III.8.</u> <u>Si $0 \leq a < b < c$ alors $Y^{\rho}_{[a,c[} = Y^{\rho}_{[a,b[} + Y^{\rho}_{[b,c[}$.</u>

Si n est assez grand pour que $\frac{c}{n} < 1$, on a immédiatement $Y^{\rho,n}_{[a,c[} = Y^{\rho,n}_{[a,b[} + Y^{\rho,n}_{[b,c[}$. C.Q.F.D.

Choisissons maintenant une suite de réels $(\rho_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ qui tend vers 1 en décroissant. Pour fixer les idées, et simplifier un peu le calcul, nous prendrons $\rho_\nu = e^{(2^{-\nu})}$. Pour chaque intervalle I de $\mathbb{R}_+$, on définit dans $(\Gamma_2)^{\mathbb{N}}/\mathcal{B}$: $Y_I = (Y_I^{\rho_\nu})_{\nu \in \mathbb{N}}$.

On a $M^{-1} \mu(I)^{\frac{1}{p}} \leq \|Y_I\|_1 \leq M \mu(I)^{\frac{1}{p}}$ (car les mêmes inégalités sont vraies pour $Y_I^{\rho_\nu}$). Si $I_1, \ldots, I_k$, sont des intervalles disjoints dans $\mathbb{R}_+$, la distribution de $(Y_{I_1}, \ldots, Y_{I_k})$ est symétrique et ne dépend que de la suite $(\mu(I_1), \ldots, \mu(I_k))$ (car cette propriété est vraie pour $(Y_{I_1}^{\rho_\nu}, \ldots, Y_{I_k}^{\rho_\nu})$ d'après le lemme III.6 et il suffit d'appliquer la proposition I.3). Enfin $Y_{[a,c[} = Y_{[a,b[} + Y_{[b,c[}$ si $0 \leq a < b < c$ (lemme III.8).

<u>Lemme III.9.</u> <u>Soient $I_1, \ldots, I_k$, I, J des intervalles de $\mathbb{R}_+$, $I_1, \ldots, I_k$, I d'une part, $I_1, \ldots, I_k$, J, d'autre part étant deux à deux disjoints et $\mu(I) = \sigma\, \mu(J)$ (σ réel > 0). Alors les $(k+1)$-uplets de variables aléatoires $(Y_{I_1}, \ldots, Y_{I_k}, Y_I)$ et $(Y_{I_1}, \ldots, Y_{I_k}, \sigma^{\frac{1}{p}} Y_J)$ ont la même distribution.</u>

On peut supposer $\sigma > 1$ (si $\sigma = 1$, le résultat est déjà vu ; si $\sigma < 1$, échanger les rôles de I et de J).

Supposons d'abord que $\sigma = e^{\frac{r}{2^s}}$, $r, s \in \mathbb{N}$, $r > 0$.

Lorsque $\nu \geq s$, les deux $(k+1)$-uplets $(Y_{I_1}^{\rho_\nu}, \ldots, Y_{I_k}^{\rho_\nu}, Y_I^{\rho_\nu})$ et $(Y_{I_1}^{\rho,\nu}, \ldots, Y_{I_k}^{\rho,\nu}, \sigma^{\frac{1}{p}} Y_J^{\rho_\nu})$ ont la même distribution : car alors $\sigma = \rho_\nu^N$ avec $N = r \cdot 2^{\nu - s}$, et il suffit d'appliquer N fois le lemme III.7.

On obtient alors le résultat en faisant tendre ν vers l'infini suivant l'ultrafiltre $\mathcal{B}$, et en appliquant la proposition I.3.

Dans le cas général, soit σ_n une suite de réels de la forme $e^{\frac{r}{2^s}}$ $(r, s \in \mathbb{N},\ r > 0)$ qui tend en croissant vers σ, et soit $I'_n \subset I$ une suite croissante d'intervalles, $\mu(I'_n) = \sigma_n \mu(J)$, tels que $I - I'_n$ soit aussi un intervalle I''_n (dont la mesure tend vers 0) . On a alors $Y_I - Y_{I'_n} = Y_{I''_n}$ donc $\|Y_I - Y_{I'_n}\| \leq M \mu(I''_n)^{\frac{1}{p}}$ donc $Y_{I_n} \to Y_I$ au sens de L^1 . D'autre part, $\sigma_n^{\frac{1}{p}} Y_J \to \sigma^{\frac{1}{p}} Y_J$. Comme $Y_{I_1}, \dots, Y_{I_k}, Y_{I'_n})$ et $(Y_{I_1}, \dots, Y_{I_k}, \sigma_n^{\frac{1}{p}} Y_J)$ ont la même distribution, on voit, quand $n \to \infty$, que $(Y_{I_1}, \dots, Y_{I_k}, Y_I)$ et $(Y_{I_1}, \dots, Y_{I_k}, \sigma^{\frac{1}{p}} Y_J)$ ont la même distribution <u>C.Q.F.D.</u>

On pose alors $Z_k = Y_{[k, k+1[}$; $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est donc une suite échangeable symétrique de variables aléatoires, et on a $M^{-1} \leq \|Z_k\|_1 \leq M$. Vérifions que cette suite a les propriétés 1, 2 annoncées dans le théorème III.2 .

Soient a, b > 0, $c = (a^p + b^p)^{\frac{1}{p}}$. Posons $I_o = [0, 1[$, $I_1 = [1, 2[$,

$$J_1 = [K_1, K_1 + a^p[\quad , \quad J'_1 = [K_1 + a^p, K_1 + a^p + b^p[$$

$$J_2 = [K_2, K_2 + a^p[\quad , \quad J'_2 = [K_2 + a^p, K_2 + a^p + b^p[$$

avec $K_1 \geq 2$, $K_2 \geq K_1 + a^p + b^p$ (ce qui donne 6 intervalles disjoints).

D'après le lemme III.9 (appliqué 4 fois) les trois quadruplets (aZ_o, bZ_1, aZ_2, bZ_3), $(aZ_o, bZ_1, Y_{J_2}, Y_{J'_2})$ et $(Y_{J_1}, Y_{J'_1}, Y_{J_2}, Y_{J'_2})$ ont la même distribution. Il en résulte que les deux triplets (aZ_o, bZ_1, aZ_2, bZ_3) et $(aZ_o, bZ_1, Y_{J_2} + Y_{J'_2})$ ont la même distribution ; et également les deux couples $(aZ_o + bZ_1, aZ_2 + bZ_3)$ et $(Y_{J_1} + Y_{J'_1}, Y_{J_2} + Y_{J'_2})$.

Or $Y_{J_1} + Y_{J'_1} = Y_{J_1 \cup J'_1}$, $Y_{J_2} + Y_{J'_2} = Y_{J_2 \cup J'_2}$, $J_1 \cup J'_1$ et $J_2 \cup J'_2$ étant deux intervalles de longueur c^p, disjoints de I_o, I_1 et disjoints entre eux. En appliquant de nouveau le lemme III.9 on voit que les deux triplets $(aZ_o, bZ_1, Y_{J_2 \cup J'_2})$ et (aZ_o, bZ_1, cZ_2) ont la même distribution ; et également les deux couples $(Y_{J_1 \cup J'_1}, Y_{J_2 \cup J'_2})$ et (cZ_o, cZ_1). On en déduit que $(aZ_o + bZ_1, aZ_2 + bZ_3)$ et (cZ_o, cZ_1) ont la même distribution ; et aussi $(aZ_o, bZ_1, aZ_2 + bZ_3)$ et (aZ_o, bZ_1, cZ_2). Donc les deux couples $(aZ_o + bZ_1, aZ_2 + bZ_3)$ et $(aZ_o + bZ_1, cZ_2)$ ont la même distribution, ce qui démontre la propriété 1.

Pour la propriété 2, comme $Z_k \in \Gamma_2{}^{\mathbb{N}}/\mathcal{B}$, il reste à montrer que $\Gamma_2{}^{\mathbb{N}}/\mathcal{B} = \Gamma^A/\mathcal{U}$, A étant un ensemble dénombrable et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur A, et que l'on a $Z_k = (z_k{}^{\alpha})_{\alpha \in A}$, les $z_k{}^{\alpha}$ étant des paquets formés avec les X_i, deux à deux disjoints pour α fixé.

D'après la proposition I.6 (puisque $\Gamma_2 = \Gamma_1{}^{\mathbb{N}}/\mathcal{B}$ et $\Gamma_1 = \Gamma^{\mathbb{N}}/\mathcal{B}$) on a en fait $\Gamma_2{}^{\mathbb{N}}/\mathcal{B} = \Gamma^{\mathbb{N}^3}/\mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ étant un ultrafiltre sur $\mathbb{N}^3$

Or, si $I_k = [k, k+1[$, on a $Z_k = Y_{I_k} = (Y_{I_k}{}^{\rho_\nu})_{\nu \in \mathbb{N}}$; on a $Y_{I_k}{}^{\rho_\nu} = (X_{\varphi_{I_k}^{\rho_\nu}, n})_{n \in \mathbb{N}}$

Soient ν, n deux entiers fixés : alors $\varphi_{I_o}^{\rho_\nu, n}, \varphi_{I_1}^{\rho_\nu, n}, \dots, \varphi_{I_k}^{\rho_\nu, n}, \dots$ est une suite de fonctions en escalier, deux à deux étrangères (en fait, $\varphi_{I_k}^{\rho_\nu, n} = 0$ pour k assez grand). D'après le lemme III.4 on a donc

$X_{\varphi_{I_k}^{\rho_\nu, n}} = (\eta_k{}^{r,n,\nu})_{r \in \mathbb{N}}$, les $\eta_k{}^{r,n,\nu}$ étant des paquets formés avec les X_i deux à deux disjoints pour r fixé (n, ν sont déjà fixés) et k variant dans $\mathbb{N}$.

Dans $\Gamma^{\mathbb{N}^3}/\mathcal{U}$, on a donc $Z_k = (\eta_k{}^{r,n,\nu})_{(r,n,\nu) \in \mathbb{N}^3}$, et les $\eta_k{}^{r,n,\nu}$ sont des paquets formés avec les X_i deux à deux disjoints pour r, n, ν fixés.

Enfin, pour avoir $\|Z_k\|_1 = 1$, il suffit de remplacer Z_k par $Z_k/\|Z_k\|_1$

(noter qu'on avait $M^{-1} \leq \|Z_k\|_1 \leq M$) . Le théorème III.2. est donc démontré.

Le lemme suivant montre qu'on a en fait $Z_k = U\,V_k$, U étant intégrable ≥ 0 , $V_o, \ldots, V_k, \ldots$ étant p-stables, indépendantes et indépendantes de U.

Lemme III.10. Soient p un réel $1 < p \leq 2$ et $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite échangeable symétrique de variables aléatoires réelles dans $L^1(\mathcal{B}, P)$ ayant la propriété suivante : si $a, b, c \in \mathbb{R}_+$, $c = (a^p + b^p)^{\frac{1}{p}}$, les trois couples (cZ_o, cZ_1) $(aZ_o + bZ_1, cZ_2)$, $(aZ_o + bZ_1, aZ_2 + bZ_3)$ ont la même distribution. On a alors $Z_k = UV_k$, $U, V_o, V_1, \ldots, V_k, \ldots$ étant des variables indépendantes dans $L^1(\mathcal{B}, P)$, $U \geq 0$, $V_o, V_1, \ldots, V_k$, étant p-stables.

Soit $\mathcal{B}^{\infty}$ la σ-algèbre de queue de la suite $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Alors les variables Z_k sont conditionnellement indépendantes et équidistribuées sur $\mathcal{B}^{\infty}$, c'est-à-dire :

$$(\ast) \qquad E^{\mathcal{B}^{\infty}} \left[\prod_{k=0}^{n} f_k(Z_k) \right] = \prod_{k=0}^{n} E^{\mathcal{B}^{\infty}} \left[f_k(Z_o) \right] \qquad \text{où} \qquad f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

est continue bornée $(0 \leq k \leq n)$.

Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, désignons par C_t la variable aléatoire $E^{\mathcal{B}_\infty} e^{itZ_o}$. On a donc $|C_t| \leq 1$ et $C_{-t} = \overline{C_t}$.

En fait C_t est réel, donc $C_t = C_{-t}$: en effet on a $2\,i\,\mathrm{Im}\,(C_t) = C_t - C_{-t}$ et il suffit de montrer que $E\,(C_t - C_{-t})^2 = 0$. Or

$E\,(C_t - C_{-t}) = E\,(C_t^2 + C^2_{-t} - 2\,C_t \,.\, C_{-t})$. Mais

$C_t^2 = (E^{\mathcal{B}_\infty} . e^{itZ_o})^2 = E^{\mathcal{B}_\infty} (e^{it(Z_o+Z_1)})$, d'après $(\ast)$. De même

$C^2_{-t} = E^{\mathcal{B}_\infty} e^{-it(Z_o+Z_1)}$ et $C_t \,.\, C_{-t} = E^{\mathcal{B}_\infty} e^{it(Z_o-Z_1)}$. Donc

$$E\,(C_t - C_{-t})^2 = E\,(e^{it(Z_o+Z_1)}) + E\,(e^{-it(Z_o+Z_1)}) - 2\,E\,(e^{it(Z_o-Z_1)}) = 0$$

puisque par hypothèse $Z_o + Z_1$, $-(Z_o + Z_1)$ et $Z_o - Z_1$ ont même distribution.

<u>L'application $t \to C_t$ de $\mathbb{R}$ dans $L^2(\mathcal{B}, P)$ est continue</u> : si $t, u \in \mathbb{R}$ on a

$$\|C_t - C_u\|_2^2 = E(C_t^2 + C_u^2 - 2C_t C_u) = E[e^{it(Z_o+Z_1)} + e^{iu(Z_o+Z_1)} - 2e^{i(tZ_o+uZ_1)}]$$

d'après (∗) . Si u décrit une suite tendant vers t cette expression tend bien vers 0 (théorème de Lebesgue).

Si $t, u \in \mathbb{R}_+$ et $v = (t^p + u^p)^{\frac{1}{p}}$ alors $C_t C_u = C_v$; en effet, on a

$$E(C_t C_u - C_v)^2 = E(C_t^2 C_u^2 + C_v^2 - 2C_t C_u C_v) = E[e^{i(tZ_o+uZ_1) + i(tZ_2+uZ_3)}]$$

$$+ E[e^{i(vZ_o+vZ_1)}] - 2E[e^{i(tZ_o+uZ_1+vZ_2)}] \quad \text{d'après } (*) .$$

Cette dernière expression vaut 0 puisque, par hypothèse, les couples $(tZ_o + uZ_1, tZ_2 + uZ_3)$, (vZ_o, vZ_1), $(tZ_o + uZ_1, vZ_2)$ ont la même distribution.

En particulier $C_t \geq 0$ (puisque $C_t = (C_{t.2^{-\frac{1}{p}}})^2$), on a donc $0 \leq C_t \leq 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

<u>$C_t > 0$ presque sûrement</u> : soit $A = \{C_t = 0\}$, comme $C_t = (C_{t.2^{-\frac{1}{p}}})^2$, on voit que $C_{t.2^{-\frac{1}{p}}}, \ldots, C_{t.2^{-\frac{n}{p}}}, \ldots$ sont nuls sur A. Donc

$E(C_{t.2^{-\frac{n}{p}}} \cdot 1_A) = 0$. Comme $C_{t.2^{-\frac{n}{p}}} \to C_o = 1$ dans $L^2(\mathcal{B}, P)$ on en déduit que

$P(A) = 0$.

On peut alors poser $C_1 = e^{-U^p}$, U étant une variable aléatoire réelle ≥ 0. Si on pose $C'_t = C_{t^{\frac{1}{p}}}$, on a $C'_t \cdot C'_u = C'_{t+u}$ pour t, u dans $\mathbb{R}_+$. On en déduit que $C'_t = (C'_1)^t = e^{-t\,U^p}$ pour tout $t \in \mathbb{Q}_+$. Si maintenant $t \in \mathbb{R}_+$, soit t_n une suite de rationnels ≥ 0 tendant vers t. Alors $C'_{t_n} \to C'_t$ Dans $L^2(\mathcal{B}, P)$ et

$C'_{t_n} \to e^{-t\,U^p}$ presque sûrement. On a donc $C'_t = e^{-t\,U^p}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et par suite $C_t = e^{-t^p\,U^p}$. Comme $C_t = C_{-t}$ on a finalement montré que $E^{\mathcal{B}^\infty} e^{itZ_o} = e^{-|t|^p\,U^p}$ pour $t \in \mathbb{R}$. D'après (*) on a

$$E^{\mathcal{B}^\infty} e^{i(t_oZ_o+\ldots+t_kZ_k)} = E^{\mathcal{B}^\infty}(e^{it_oZ_o})\ldots E^{\mathcal{B}^\infty}(e^{it_kZ_o}) = e^{-(|t_o|^p+\ldots+|t_k|^p)\,U^p}$$

En prenant l'intégrale des deux membres, on trouve

$$E\,(e^{i(t_o\,Z_o+\ldots+t_k\,Z_k)}) = E\,(e^{-(|t_o|^p+\ldots+|t_k|^p)\,U^p}) .$$

Soient alors $V_o, V_1, \ldots, V_k, \ldots$ des variables p-stables indépendantes et indépendantes de U. Un calcul immédiat montre que

$$E\,[\,e^{i\,(t_o\,UV_o+\ldots+t_k\,UV_k)}\,] = E\,[\,e^{-(|t_o|^p+\ldots+|t_k|^p)\,U^p}\,] .$$

Il en résulte que les deux suites de variables aléatoires $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(UV_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ont la même distribution (probabilité sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$). Il existe donc une suite de variables U', $V'_o, \ldots, V'_k, \ldots$ ayant la même distribution que la suite $U, V_o, \ldots, V_k, \ldots$ telle que $Z_k = U'V'_k$. U' est bien intégrable car Z_k est intégrable et U', V'_k sont indépendantes. <u>C.Q.F.D.</u>

On peut maintenant montrer le théorème III.1 : d'après le théorème III.2 et le lemme III.10 on a dans $\Gamma^{\mathbb{N}}/\mathcal{B}_2$ une suite $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ échangeable symétrique, avec $Z_k = UV_k$, $U, V_o, \ldots, V_k, \ldots$ étant indépendantes, $U \geq 0$ et $V_o, \ldots, V_k, \ldots$ étant p-stables, de plus $Z_k = (z_k^{\,n})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $z_k^{\,n} \in \Gamma$, $\|z_k^{\,n}\| = 1$, les $z_k^{\,n}$ étant <u>pour n fixé</u> des paquets disjoints formés avec les X_i.

On a donc $z_k^{\,n} = \sum_{i=0}^{\infty} a_k^{\,n}(i)\;X_i$ où $a_k^{\,n}(i) \in \mathbb{R}$ (la somme ne comportant qu'un nombre fini de termes $\neq 0$).

Soit $\tau : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ une application bijective, on pose $\tilde{z}_k^{\,n} = \sum_{i=0}^{\infty} a_k^{\,n}(i)\, X_{\tau(n,i)}$

On a évidemment $\|\tilde{z}_k^{\,n}\| = \|z_k^{\,n}\| = 1$ (d'après le fait que la suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est échangeable). Par ailleurs les $\tilde{z}_k^{\,n}$ sont des paquets formés avec les X_i, deux à deux disjoints pour n, k variant dans $\mathbb{N}$: en effet, si $X_{\tau(n,i)}$ a un coefficient $\neq 0$ dans $\tilde{z}_k^{\,n}$ et $\tilde{z}_\ell^{\,m}$, on a $a_k^{\,n}(i) \neq 0$, $a_\ell^{\,m}(j) \neq 0$ et $\tau(n, i) = \tau(m, j)$; τ étant bijective, on a $m = n$ et $i = j$, donc $a_k^{\,n}(i) \neq 0$, $a_\ell^{\,n}(i) \neq 0$, ce qui montre que X_i a un coefficient non nul à la fois dans $z_k^{\,n}$ et $z_\ell^{\,n}$; d'où $k = \ell$ (sinon $z_k^{\,n}$ et $z_\ell^{\,n}$ sont des paquets disjoints).

On définit alors $\tilde{Z}_k \in \Gamma^{\mathbb{N}}/\mathcal{B}_2$ en posant $\tilde{Z}_k = (\tilde{z}_k^{\,n})_{n \in \mathbb{N}}$. Il reste à montrer que la suite $(\tilde{Z}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est symétrique, échangeable et satisfait la propriété 1) du théorème III.1. Pour cela, il suffit de montrer que les deux suites $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\tilde{Z}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ont la même distribution (probabilité sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$), c'est-à-dire que pour chaque $k \in \mathbb{N}$, les $(k+1)$-uplets $(Z_o, \dots, Z_k)$ et $(\tilde{Z}_o, \dots, \tilde{Z}_k)$ ont la même distribution.

Or, d'après la proposition I.3, la distribution de $(Z_o, \dots, Z_k)$ (resp. $(\tilde{Z}_o, \dots, \tilde{Z}_k)$) est la limite quand $n \to \infty$ suivant l'ultrafiltre $\mathcal{B}_2$ de la distribution de $(z_o^{\,n}, \dots, z_k^{\,n})$ (resp. $(\tilde{z}_o^{\,n}, \dots, \tilde{z}_k^{\,n})$). Il suffit donc de voir que $(z_o^{\,n}, \dots, z_k^{\,n})$ et $(\tilde{z}_o^{\,n}, \dots, \tilde{z}_k^{\,n})$ ont la même distribution ; mais cela résulte immédiatement de la définition de $\tilde{z}_o^{\,n}, \dots, \tilde{z}_k^{\,n}$, de l'échangeabilité de la suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et du fait que $z_o^{\,n}, \dots, z_k^{\,n}$ sont des paquets disjoints, et aussi $\tilde{z}_o^{\,n}, \dots, \tilde{z}_k^{\,n}$: C.Q.F.D.

IV. PREUVE DE 3 $\Rightarrow$ 4 DANS LE THEOREME PRINCIPAL.

Considérons un sous-espace réflexif F de $L^1(\mathcal{B}_o, P_o)$ et supposons que, dans une ultrapuissance $F^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}_1$ de F, ($F^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}_1$ est donc un sous-espace de $L^1(\mathcal{B}_1, P_1)$ avec $(\mathcal{B}_1, P_1) = (\mathcal{B}_o, P_o)^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}_1$) il existe une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ayant les trois propriétés suivantes :

1) <u>la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires est échangeable et symétrique</u> ;

2) <u>Elle engendre dans $L^1(\mathcal{B}_1, P_1)$ un espace Γ isomorphe à ℓ^p et, plus précisément, il existe $M > 0$ tel que</u>

$$M^{-1}(|\lambda_o|^p + \ldots + |\lambda_n|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \|\lambda_o X_o + \ldots + \lambda_n X_n\|_1 \leq M(|\lambda_o|^p + \ldots + |\lambda_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

3) <u>la σ-algèbre de queue de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est contenue dans $\mathcal{B}_o$</u> .

On a alors :

Lemme IV.1. Il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur $\mathbb{N}$ et une variable aléatoire $Z \in \Gamma^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ (sous espace de $L^1(\mathcal{B}, P)$ avec $(\mathcal{B}, P) = (\mathcal{B}_1, P_1)^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$) ayant les propriétés suivantes :

1) $Z = UV$, $U \in L^1(\mathcal{B}, P)$, $U \geq 0$, V étant p-stable et indépendante de la σ-algèbre engendrée par $\mathcal{B}_1$ et U ;

2) $Z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $z_n \in \Gamma$, $\|z_n\| = 1$; les z_n étant des paquets disjoints formés avec les X_i .

A l'aide du théorème III.1, on construit dans $L^1(\mathcal{B}_2, P_2)$ (avec $(\mathcal{B}_2, P_2) = (\mathcal{B}_1, P_1)^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}_2$) une suite $Z_k = UV_k$ de variables aléatoires ayant les propriétés indiquées dans ce théorème. Soit $\Gamma_2 = \Gamma^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}_2$, d'où $Z_k \in \Gamma_2$.

Soit $\mathcal{D}$ un ultrafiltre non trivial sur $\mathbb{N}$, d'où $\Gamma_2^{\mathbb{N}}/\mathcal{D} \subset L^1(\mathcal{B}, P)$ avec $(\mathcal{B}, P) = (\mathcal{B}_2, P_2)^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}$. On définit $Z \in \Gamma_2^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}$ et $V \in L^1(\mathcal{B}, P)$ en posant $Z = (Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $V = (V_k)_{k \in \mathbb{N}}$. D'après la proposition I.5.1., V est une variable p-stable indépendante de $\mathcal{B}_2$, donc de la σ-algèbre engendrée par $\mathcal{B}_1$ et U (puisque $U \in L^1(\mathcal{B}_2, P_2)$). D'autre part, on a $Z = UV$: en effet la distribution du triplet (Z_k, U, V_k) converge suivant $\mathcal{D}$ vers celle de (Z, U, V) (proposition I.3); or la distribution de (Z_k, U, V_k) est toujours la même et $Z_k = UV_k$, d'où $Z = UV$.

Il reste à montrer que $(\mathcal{B}, P) = (\mathcal{B}_1, P_1)^A/\mathcal{U}$, A étant un ensemble dénombrable et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur A, et que $Z = (z_\alpha)_{\alpha \in A}$, $\|z_\alpha\| = 1$, les z_α étant des paquets disjoints formés avec les X_i. Or, d'après la proposition I.6, on a $(\mathcal{B}, P) = ((\mathcal{B}_1, P_1)^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}_2)^{\mathbb{N}}/\mathcal{D} = (\mathcal{B}_1, P_1)^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}/\mathcal{D}_2 \times \mathcal{D}_2$. On prend donc $A = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ et $\mathcal{U} = \mathcal{D}_2 \times \mathcal{D}$. D'après le théorème III.1 on a $Z_k = (z_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\|z_k^n\| = 1$, les z_k^n étant des paquets disjoints formés avec les X_i. Donc $Z = (z_k^n)_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$. <u>C.Q.F.D.</u>

Le lemme suivant est un exercice de calcul de probabilités.

<u>Lemme IV.2.</u> <u>Soit f une variable aléatoire ≥ 0, $\mathcal{B}_o$ une σ-algèbre. Alors $(E^{\mathcal{B}_o} e^{-\frac{f}{n}})^n$ converge presque sûrement vers $e^{-E^{\mathcal{B}_o} f}$ quand $n \to +\infty$.</u>

- Noter qu'on ne suppose pas f intégrable ; donc $E^{\mathcal{B}_o} f$ est une variable aléatoire ≥ 0 finie ou infinie ; nous la définissons ici comme la limite quand $N \to +\infty$ de la suite croissante $E^{\mathcal{B}_o} f_N$ avec $f_N = f \cdot 1_{\{f \leq N\}}$.

- Notons aussi que $(E^{\mathcal{B}_o} e^{-\frac{f}{n}})^n$ est une suite décroissante de variables aléatoires ≥ 0 ; en effet, on a $E^{\mathcal{B}_o} e^{-\frac{f}{n}} = E^{\mathcal{B}_o}[(e^{-\frac{f}{n+1}})^{\frac{n+1}{n}}] \geq (E^{\mathcal{B}_o} e^{-\frac{f}{n+1}})^{\frac{n+1}{n}}$ (d'après l'inégalité $E^{\mathcal{B}_o}(|h|^r) \geq (E^{\mathcal{B}_o}(|h|)^r$ si $r \geq 1$) et donc

$(E^{\mathcal{B}_o} e^{-\frac{f}{n}})^n \geq (E^{\mathcal{B}_o} e^{-\frac{f}{n+1}})^{n+1}$

- Supposons d'abord f bornée. On a alors $1 - \frac{f}{n} \leq e^{-\frac{f}{n}} \leq 1 - \frac{f}{n} + \frac{f^2}{2n^2}$ dès que $n > \|f\|_\infty$.

$$\text{Donc } (1 - \frac{1}{n} E^{\mathcal{B}_o} f)^n \leq (E^{\mathcal{B}_o} e^{-\frac{f}{n}})^n \leq (1 - \frac{1}{n} E^{\mathcal{B}_o} f + \frac{1}{2n^2} E^{\mathcal{B}_o} f^2)^n .$$

Quand $n \to \infty$ les deux membres extrêmes tendent vers $e^{-E^{\mathcal{B}_o} f}$ d'où le résultat.

Dans le cas général, posons $g_n = (E^{\mathcal{B}_o} e^{-\frac{f}{n}})^n$, $g_{n,N} = (E^{\mathcal{B}_o} e^{-\frac{f_N}{n}})^n$. Quand $n \to \infty$, g_n tend en décroissant vers une variable g ; quand $N \to \infty$, $g_{n,N}$ tend en décroissant vers g_n. Il en résulte que $g = \inf_{n,N} g_{n,N} = \inf_N (\inf_n g_{n,N}) = \inf_N e^{-E^{\mathcal{B}_o} f_N}$ (d'après ce qu'on vient de montrer) $= e^{-E^{\mathcal{B}_o} f}$. C.Q.F.D.

Considérons dans Γ , sous-espace réflexif de $L^1(\mathcal{B}_1, P_1)$ une suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et un ultrafiltre $\mathcal{U}$ ayant les propriétés énoncées dans le lemme IV.1. En appliquant le théorème I.1 avec ces données, on construit, dans une ultrapuissance $\Gamma^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}'$ de Γ , une suite $(T_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires échangeables au-dessus de $\mathcal{B}_1$. Démontrons un certain nombre de propriétés de cette suite :

1°) $$M^{-2} (|\lambda_1|^p + \ldots + |\lambda_k|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \|\lambda_1 T_1 + \ldots + \lambda_k T_k\| \leq M^2 (|\lambda_1|^p + \ldots + |\lambda_k|^p)^{\frac{1}{p}} .$$

En effet soit θ l'isomorphisme de Γ sur ℓ^p défini par $\theta(X_i) = e_i \ (i \in \mathbb{N})$, les e_i formant la base canonique de ℓ^p ; on a $\|\theta\| \leq M$, $\|\theta^{-1}\| \leq M$. Comme $\|z_n\| = 1$, et que les z_n sont des paquets disjoints formés avec les X_i, on a $M^{-1} \leq \|\theta z_n\| \leq M$ et les θz_n sont deux à deux étrangers : par suite, si $\mu_o, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$ on a

$$\|\mu_o \theta z_o + \ldots + \mu_n \theta z_n\| = \left(\sum_{i=0}^{n} |\mu_i|^p \|\theta z_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} ,$$

d'où

$$M^{-1} (|\mu_o|^p + \ldots + |\mu_n|^p) \leq \|\theta(\mu_o z_o + \ldots + \mu_n z_n)\| \leq M (|\mu_o|^p + \ldots + |\mu_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

d'où

$$M^{-2} (|\mu_o|^p + \ldots + |\mu_n|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \|\mu_o z_o + \ldots + \mu_n z_n\| \leq M^2 (|\mu_o|^p + \ldots + |\mu_n|^p)^{\frac{1}{p}} .$$

On montre alors, par récurrence sur k, que l'on a

$$M^{-2}\,(|\mu_o|^p+\ldots+|\mu_n|^p+|\lambda_1|^p+\ldots+|\lambda_k|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \|\mu_o z_o+\ldots+\mu_n z_n+\lambda_1 T_1+\ldots+\lambda_k T_k\|$$

$$\leq M^2\,(|\mu_o|^p+\ldots+|\mu_n|^p+|\lambda_1|^p+\ldots+|\lambda_k|^p)^{\frac{1}{p}} \quad ,$$

ce qui est immédiat d'après le théorème I.1. D'où en particulier le résultat cherché.

2°) la σ-algèbre de queue $\mathcal{B}^\infty$ de la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ est contenue dans $\mathcal{B}_o$.

En effet, d'après le théorème I.1, $\mathcal{B}^\infty$ est contenue dans la σ-algèbre de queue de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donc dans celle de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (puisque les z_n sont des paquets disjoints formés avec les X_i) et par suite dans $\mathcal{B}_o$.

3°) Si $f_j : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est continue bornée ($1\leq j\leq k$), on a

$$E^{\mathcal{B}_o}\left[\prod_{j=1}^{k} f_j(T_j)\right] = \prod_{j=1}^{k} E^{\mathcal{B}_o} f_j(T_1)$$

En effet, d'après le théorème I.1, la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ est conditionnellement indépendante et équidistribuée sur $\mathcal{B}_1$ et on a donc

$$E^{\mathcal{B}_1}\left[\prod_{j=1}^{k} f_j(T_j)\right] = \prod_{j=1}^{k} E^{\mathcal{B}_1} f_j(T_1)$$

Or, si $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est continue bornée, on a, en particulier

$E^{\mathcal{B}_1} f(T_1) = E^{\mathcal{B}_1} f(T_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et par suite

$E^{\mathcal{B}_1} f(T_1) = E^{\mathcal{B}_1} \frac{1}{n}\,[f(T_1)+\ldots+f(T_n)]$

Mais les variables T_n étant échangeables, $\frac{1}{n}[f(T_1)+\ldots+f(T_n)]$ converge dans L^1 vers $E^{\mathcal{B}^\infty} f(T_1)$ (voir [5]). Donc

$E^{\mathcal{B}_1} f(T_1) = E^{\mathcal{B}_1}(E^{\mathcal{B}^\infty} f(T_1)) = E^{\mathcal{B}^\infty} f(T_1)$ puisque $\mathcal{B}^\infty \subset \mathcal{B}_1$. Or on a vu que $\mathcal{B}^\infty \subset \mathcal{B}_o \subset \mathcal{B}_1$. Il en résulte que $E^{\mathcal{B}_1} f(T_1) = E^{\mathcal{B}_o} f(T_1)$ et par suite $E^{\mathcal{B}_1}[\prod_{j=1}^{k} f_j(T_j)] = \prod_{j=1}^{k} E^{\mathcal{B}_o} f_j(T_1)$. Le premier membre est donc $\mathcal{B}_o$-mesurable (puisque le deuxième l'est) et par suite est égal à $E^{\mathcal{B}_o}[\prod_{j=1}^{k} f_j(T_j)]$. <u>C.Q.F.D.</u>

4°) <u>Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue bornée, $E^{\mathcal{B}_o} f(T_1) = E^{\mathcal{B}_o} f(UV)$</u>, (UV étant les variables définies dans l'énoncé du lemme IV.1). En effet, si Φ est une variable $\mathcal{B}_o$-mesurable bornée, on a $E(f(T_1) . \Phi) = \lim_{\mathcal{U}} E[f(z_n) . \Phi]$ (théorème I.1) $= E(f(Z) . \Phi)$ (proposition I.3, puisque $Z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\Gamma^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$) et $Z = UV$.

<u>C.Q.F.D.</u>

En particulier, on a $E^{\mathcal{B}_o} e^{i\lambda T_1} = E^{\mathcal{B}_o} e^{i\lambda UV}$. Mais, d'après le lemme I.4, V est une variable p-stable, indépendante de la σ-algèbre engendrée par $\mathcal{B}_o$ et U, d'où il résulte immédiatement que $E^{\mathcal{B}_o} e^{i\lambda UV} = E^{\mathcal{B}_o} e^{-|\lambda|^p U^p}$ (noter que $U \geq 0$). D'après la propriété 3°) ci-dessus, on a donc

5°) $E^{\mathcal{B}_o} e^{i(\lambda_1 T_1 + \ldots + \lambda_k T_k)} = \prod_{j=1}^{k} E^{\mathcal{B}_o} e^{-|\lambda|^p U^p}$.

On pose alors $S_n = n^{-\frac{1}{p}}(T_1 + T_2 + \ldots + T_n)$; donc $M^{-2} \leq \|S_n\| \leq M^2$ (propriété 1°) ci-dessus) ; $\mathcal{D}$ étant un ultrafiltre non trivial sur $\mathbb{N}$, on définit $S \in \Gamma'^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}$ (où $\Gamma' = \Gamma^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}'$) en posant $S = (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Notons que $\Gamma'^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}$ est une ultrapuissance de Γ (proposition I.6). Or Γ est lui-même un sous-espace de $F^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}_1$, ce qui montre que S appartient à une ultrapuissance de F.

D'après la propriété 5°) ci-dessus, on a

$$E^{\mathcal{B}_o} e^{i\lambda S_n} = (E^{\mathcal{B}_o} e^{-|\lambda|^p U^p/n})^n$$

D'après le lemme IV.2, quand $n \to \infty$, $E^{\mathcal{B}_o} e^{i\lambda S_n}$ converge donc presque sûrement vers $e^{-E^{\mathcal{B}_o} |\lambda|^p U^p}$.

Posons $\tilde{U}^p = E^{\mathcal{B}_o} U^p$; $\tilde{U}$ est donc une variable aléatoire ≥ 0 finie ou infinie, $\mathcal{B}_o$- mesurable. On a $E^{\mathcal{B}_o} |\lambda|^p U^p = |\lambda|^p \tilde{U}^p$ pour $\lambda \neq 0$ (et $E^{\mathcal{B}_o} |\lambda|^p U^p = 0$ pour $\lambda = 0$) .

Soit X une variable aléatoire bornée, $\mathcal{B}_o$-mesurable quelconque. On a $E(e^{i\lambda S_n} . X) = E(X . E^{\mathcal{B}_o} e^{i\lambda S_n})$; donc quand $n \to \infty$, $E(e^{i\lambda S_n} . X) \to E(e^{-|\lambda|^p \tilde{U}^p} X)$ si $\lambda \neq 0$; mais, par ailleurs $E(e^{i\lambda S_n} . X)$ converge suivant $\mathcal{D}$ vers $E(e^{i\lambda S} . X)$ (proposition I.6). Donc

$$E(e^{i\lambda S} . X) = E(e^{-|\lambda|^p \tilde{U}^p} . X) \quad \text{pour } \lambda \neq 0 \quad .$$

On en déduit d'abord que $\tilde{U}$ est presque sûrement fini : car, si $A = \{\tilde{U} = +\infty\}$ et si on pose $X = 1_A$, on a pour $\lambda \neq 0$: $E(e^{-|\lambda|^p \tilde{U}^p} . 1_A) = 0$, donc $E(e^{i\lambda S} . 1_A) = 0$; quand $\lambda \to 0$, $E(e^{i\lambda S} . 1_A) \to E(1_A)$, d'où $P_o(A) = 0$.

Soit alors $\hat{V}$ une variable p-stable indépendante de $\mathcal{B}_o$, on a immédiatement $E(e^{i\lambda \tilde{U} \hat{V}} . X) = E(e^{-|\lambda|^p \tilde{U}^p} . X) = E(e^{i\lambda S} . X)$. Donc, si $Y_1, \ldots, Y_n$ sont des variables aléatoires $\mathcal{B}_o$-mesurables, on a

$$E[e^{i(\lambda \tilde{U} \hat{V} + \lambda_1 Y_1 + \ldots + \lambda_n Y_n)}] = E[e^{i(\lambda S + \lambda_1 Y_1 + \ldots + \lambda_n Y_n)}] .$$

Donc les (n+1)-uplets $(\tilde{U} \hat{V}, Y_1, \ldots, Y_n)$ et $(S; Y_1, \ldots, Y_n)$ ont la même distribution. Cela montre que $S = \tilde{U} \tilde{V}$, où $\tilde{V}$ est une variable p-stable indépendante de $\mathcal{B}_o$. Comme S appartient à une ultrapuissance de F, on a obtenu l'implication $3 \Rightarrow 4$ du théorème principal.

V. DEMONSTRATION DU THEOREME PRINCIPAL ET DE L'EQUIVALENCE DES CONJECTURES (C) et (C').

$1 \Rightarrow 2$ est évident ; $3 \Rightarrow 4$ a été prouvé dans la partie IV et $4 \Rightarrow 1$ dans la partie II. Il reste à voir que $2 \Rightarrow 3$: Soit donc $F \subset L^1(\mathcal{B}_o, P_o)$ une ultrapuissance de E contenant un espace isomorphe à ℓ^p dont la base $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit finalement $\mathcal{B}$-mesurable ($\mathcal{B}$ est une sous-σ-algèbre de $\mathcal{B}_o$). Il existe donc une suite $(X'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dans $L^1(\mathcal{B}_o, P_o)$, dont la σ-algèbre de queue est contenue dans $\mathcal{B}$ et telle que $\|X_n - X'_n\|_1 \to \infty$.

Soit $\mathcal{D}$ un ultrafiltre non trivial sur $\mathbb{N}$; en appliquant le théorème I.1. à la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on obtient une suite échangeable $Y_1, \ldots, Y_k, \ldots$ d'éléments de $F^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}'$. D'après la construction de la suite Y_k et le fait que $\|X_n - X'_n\| \to 0$ il est clair qu'on obtient la même suite de variables aléatoires en partant de la suite $(X'_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Il en résulte que la σ-algèbre de queue de la suite Y_k est contenue dans celle de la suite $(X'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ c'est-à-dire dans $\mathcal{B}$.

D'autre part, d'après le théorème I.1. et le fait que l'on a :

$$M^{-1} \left(\sum_{i=0}^{n} |\lambda_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left\| \sum_{i=0}^{n} \lambda_i X_i \right\| \leq M \left(\sum_{i=0}^{n} |\lambda_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

pour une certaine constante $M > 0$, on en déduit la même inégalité pour les Y_i (d'après le théorème I.1., 2), on a immédiatement, par récurrence sur k l'inégalité

$$M^{-1} \left(\sum_{i=0}^{n} |\lambda_i|^p + \sum_{j=1}^{k} |\mu_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left\| \sum_{i=0}^{n} \lambda_i X_i + \sum_{j=1}^{k} \mu_j Y_j \right\| \leq M \left(\sum_{i=0}^{n} |\lambda_i|^p + \sum_{j=1}^{k} |\mu_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Il en résulte que les Y_i engendrent un espace isomorphe à ℓ^p ; si on pose $Y'_n = Y_{2n+1} - Y_{2n}$, la suite Y'_n est échangeable, symétrique et engendre un espace isomorphe à ℓ^p , d'où le résultat cherché puisque les Y'_n sont dans une ultrapuissance de F, donc de E.

Preuve du théorème 0.3. :

$a \Rightarrow b$ est immédiat d'après $2 \Rightarrow 4$ dans le théorème principal.

$b \Rightarrow a$: on a $UV = (Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $Z_n \in E$, $UV \in E^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}$; en appliquant le théorème I.1. avec l'ultrafiltre $\mathcal{D}$ et la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on obtient dans $E^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}'$ une suite échangeable $Y_1, \ldots, Y_k, \ldots$ Il est clair qu'on a $Y_k = UV_k$, V_k étant une suite de variables aléatoires indépendantes et indépendantes de $\mathcal{A}$, de même distribution que V_k (donc symétriques). La σ-algèbre de queue de la suite UV_k est évidemment contenue dans la σ-algèbre engendrée par U, donc contenue dans $\mathcal{B}$. On a par ailleurs

$$E \left| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i U V_i \right| = E |U| E \left| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i V_i \right|$$

Dans [1], il est montré que les variables $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ engendrent un espace Λ_1 isomorphe à un espace d'Orlicz ℓ_f de suites, l'isomorphisme étant tel que l'image de V_n soit l'élément e_n de la base canonique de ℓ_f. Les variables UV_n engendrent donc aussi un espace Λ isomorphe à ℓ_f avec la même correspondance des bases. D'après un théorème de [4], ℓ_f contient un sous-espace Γ' isomorphe à ℓ^p, pour un $p \geq 1$, dont la base est formée de paquets disjoints d'éléments de la base canonique de ℓ_f. Par isomorphisme, Λ contient un sous-espace Γ, isomorphe à ℓ^p, dont la base est formée de paquets disjoints des $(UV_n)_{n \in \mathbb{N}}$. La σ-algèbre de queue de la base de Γ est donc incluse dans $\mathcal{B}$: comme Λ est réflexif (sous-espace d'une ultrapuissance de E) on a $p > 1$. La condition 2 du théorème principal est donc satisfaite, donc aussi la condition 1, ce qui donne le résultat cherché.

Equivalence des conjectures C et C'.

On montre d'abord le

Lemme V.1. Soit E un espace de Banach ayant une base inconditionnelle $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et contenant un espace isomorphe à ℓ^p $(1 \leq p < \infty)$. Alors il contient un espace isomorphe à ℓ^p dont la base est formée de paquets disjoints en les X_n.

Soit P_n l'opérateur de projection de E sur le sous-espace engendré par $X_o, \ldots, X_n$ ($P_n X_i = X_i$ si $i \leq n$, $P_n X_i = 0$ si $i > n$) et soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E formant la base d'un sous-espace isomorphe à ℓ^p. Pour chaque entier n fixé, il existe une sous-suite Y_{k_ν} de la suite Y_k telle que $P_n Y_{k_\nu}$ converge quand $\nu \to \infty$ (l'image de P_n étant de dimension finie). Par diagonalisation, il existe donc une sous-suite Z_k de la suite Y_k telle que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $P_n Z_k$ converge quand $k \to \infty$, donc, si $U_k = Z_{2k+1} - Z_{2k}$, les U_k forment la base d'un espace K-isomorphe à ℓ^p (K réel ≥ 1), et, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ $P_n U_k \to 0$ quand $k \to \infty$.

Fixons $\epsilon > 0$; on choisit n_o assez grand pour que $\|P_{n_o} U_o - U_o\| \leq \epsilon$; puis k_1 assez grand pour que $\|P_{n_o} U_{k_1}\| \leq \epsilon/4$, puis $n_1 > n_o$ assez grand tel que $\|P_{n_1} U_{k_1} - U_{k_1}\| \leq \epsilon/4$; ayant défini $n_o < n_1 < \ldots < n_i$, $k_1 < \ldots < k_i$, on choisit $k_{i+1} > k_i$ assez grand pour que $\|P_{n_i} U_{k_{i+1}}\| \leq \epsilon/2^{i+2}$ puis n_{i+1} assez grand pour que $\|P_{n_{i+1}} U_{k_{i+1}}\| \leq \epsilon/2^{i+2}$.

On pose alors $V_o = P_{n_o} U_o$, $V_{i+1} = (P_{n_{i+1}} - P_{n_i}) U_{k_{i+1}}$ $(i \geq 0)$ et par suite $\|V_{i+1} - U_{k_{i+1}}\| \leq \|P_{n_i} U_{k_{i+1}}\| + \|P_{n_{i+1}} U_{k_{i+1}} - U_{k_{i+1}}\| \leq \epsilon/2^{i+1}$

Il est clair que les V_i sont des paquets disjoints en les X_n. On montre qu'ils forment la base d'un espace isomorphe à ℓ^p, si ϵ est assez petit. On a en effet :

$$\| \sum_{i=0}^{n} \lambda_i V_i - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i U_{k_i} \| \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \, \|V_i - U_{k_i}\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \, . \, \epsilon / 2^i$$

$$\leq 2\,\epsilon \sup_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leq 2\,\epsilon \, (\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq 2\,K\,\epsilon \, \| \sum_{i=0}^{n} \lambda_i U_{k_i} \|$$

Si $2\,K\,\epsilon < 1$, cette inégalité montre que l'espace engendré par les V_i est isomorphe à celui qui est engendré par les U_{k_i}. C.Q.F.D.

On montre alors que (C') $\Rightarrow$ (C) : soit E un sous-espace réflexif de dimension infinie de $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$; E contient donc une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, telle que $\|X_n\| = 1$, qui ne possède aucune sous-suite convergente. Soit $\mathcal{B}$ un ultrafiltre non trivial sur $\mathbb{N}$ et $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite échangeable obtenue à l'aide du théorème I.1 avec ces données ; $Y_k \in E^{\mathbb{N}}/\mathcal{B}'$. Alors les Y_k sont distincts : si $Y_k = Y_\ell$ et $k \neq \ell$, alors $Y_1 = Y_2$ (d'après l'échangeabilité), soit $\|Y_1 - Y_2\| = 0$ et donc $\lim_{n \to \infty} \|Y_1 - X_n\| = 0$, ce qui donne une sous-suite convergente des $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contrairement à l'hypothèse. On pose alors $Z_k = Y_{2k+1} - Y_{2k}$; la suite Z_k est échangeable, symétrique et non nulle ; d'après (C') l'espace qu'elle engendre contient un sous-espace isomorphe à ℓ^p, et d'après le lemme précédent, on peut supposer que la base de ce sous-espace est une suite U_k formée de paquets disjoints en les Z_k ; on a $U_k \in E^{\mathbb{N}}/\mathcal{B}'$, et la σ-algèbre de queue de la suite U_k est contenue dans celle de la suite Z_k, donc dans celle de la suite Y_k, et finalement dans $\mathcal{A}$ d'après le théorème I.1. La condition 2 du théorème principal est donc vérifiée, et E contient donc un espace isomorphe à ℓ^p .

Bibliographique :

[1] D. DACUNHA-CASTELLE
Variables échangeables et espaces d'Orlicz
Séminaire Maurey-Schwartz, 1974-75
Ecole Polytechnique, Paris.

[2] D. DACUNHA-CASTELLE et J.L. KRIVINE
Applications des ultraproduits aux espaces de Banach
Studia Math. t. 41, 1972, p. 315-334

[3] J.L. KRIVINE
Sous-espaces de dimension finie des espaces de Banach réticulés
(à paraître)

[4] J. LINDENSTRAUSS et L. TZAFRIRI
On Orlicz sequences spaces. I.
Israël Journal of Math., vol . 10, n° 3, p. 379-390

[5] J. NEVEU
Bases mathématiques du calcul des probabilités
Masson, Paris.

[6] M. KADEC et A. PELCZYNSKI
Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces L^p
Studia Math. 21 (1962), p. 161-176

[7] D. DACUNHA-CASTELLE et J.L. KRIVINE
Sur les sous-espaces de L^1 .
Comptes-rendus Acad. des Sciences , Paris, t. 280 (1975), p. 645-648.