

PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

RESEAUX FERROVIAIRES, DIFFEOMORPHISMES PSEUDO-ANOSOV
ET AUTOMORPHISMES SYMPLECTIQUES DE L'HOMOLOGIE
D'UNE SURFACE

par

A. PAPADOPOULOS

83 - 03

Université de Paris-Sud
Département de Mathématique

Bât. 425

91405 ORSAY France

Code matière AMS (1980) : 57 R 25 - 57 R 30 -
58 F 15 - 57 R 50

Mots-clefs : Feuilletages mesurés, difféomorphismes
pseudo-Anosov, réseaux ferroviaires,
automorphismes symplectiques de l'homologie

PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

RESEAUX FERROVIAIRES, DIFFEOMORPHISMES PSEUDO-ANOSOV
ET AUTOMORPHISMES SYMPLECTIQUES DE L'HOMOLOGIE
D'UNE SURFACE

par

A. PAPADOPOULOS

38687



83 - 03

Université de Paris-Sud
Département de Mathématique

Bât. 425

91405 **ORSAY** France

Cette publication comprend la Thèse de 3e cycle de l'auteur suivie de deux appendices dont le premier présente un article d'A. Fathi et F. Laudenbach qui n'a pas été publié et auquel il est fait référence au §II de la Thèse. Le deuxième appendice présente un résultat qui améliore celui du chapitre 2 du tecté principal.

RESEAUX FERROVIAIRES, DIFFEOMORPHISMES PSEUDO-ANOSOV ET
AUTOMORPHISMES SYMPLECTIQUES DE L'HOMOLOGIE D'UNE SURFACE

Chapître 0. NOTATIONS ET RAPPELS CONCERNANT LA CLASSIFI- CATION DES CLASSES D'ISOTOPIE DE DIFFEOMORPHISMES D'UNE SURFACE.....	4
Chapître 1. RESEAUX FERROVIAIRES (Structure PL de $m\mathfrak{F}$).	
I. Généralités sur les réseaux ferroviaires.....	6
II. Propriétés de l'application φ_τ	11
III. L'atlas $(m\mathfrak{F}(\tau), \varphi_\tau)$ et la structure PL de $m\mathfrak{F}$	21
Chapître 2. DIFFEOMORPHISMES PSEUDO-ANOSOV ET AUTOMORPHISMES SYMPLECTIQUES DE L'HOMOLOGIE.	
IV. Réseau ferroviaire invariant par un difféomorphisme pseudo-Anosov.....	38
V. Action d'un difféomorphisme pseudo-Anosov sur $\mathfrak{F} \cup \mathcal{P}m\mathfrak{F}$	43
VI. Propriétés spectrales des matrices préservant un cône.....	47
VII. Structure Lipschitz et métriques sur $\mathcal{P}m\mathfrak{F}$	48
VIII. Théorème de composition et application à l'homologie.....	49
Bibliographie.....	52
<u>APPENDICE 1. THE DYNAMICS OF THE LIFT OF A PSEUDO-ANOSOV DIFEOMORPHISMS TO THE POINCARÉ DISC</u> par A. FATHI et F. LAUDENBACH.....	53
<u>APPENDICE 2. RESEAUX FERROVIAIRES ET COURBES SIMPLES SUR LES SURFACES</u> par A. PAPADOPOULOS.....	64

I N T R O D U C T I O N

L'objet principal de ce travail est de donner une démonstration des deux théorèmes suivants :

THEOREME A. Soit M une surface fermée orientable et f un difféomorphisme de M dont la classe d'isotopie $[f]$ est de type pseudo-Anosov. Soit φ un autre difféomorphisme de M , vérifiant $[\varphi](\tilde{\alpha}^u, \mu^u) \neq [\tilde{\alpha}^s, \mu^s]$, où $[\tilde{\alpha}^s, \mu^s]$ et $[\tilde{\alpha}^u, \mu^u]$ sont respectivement les classes projectives des feuilletages mesurés stable et instable de $[f]$. Il existe alors un entier k_0 tel que, pour tout entier $k \geq k_0$, $[f^k \circ \varphi]$ soit du type pseudo-Anosov.

THEOREME B. Tous les automorphismes symplectiques de $H_1(M, \mathbb{Z})$ sont réalisables par des difféomorphismes pseudo-Anosov.

Le point de départ de ce travail a été un problème que m'a proposé d'étudier F. Laudenbach sur les propriétés homologiques des difféomorphismes pseudo-Anosov.

Le théorème B découle facilement du théorème A et de la construction, due à Thurston, de difféomorphismes pseudo-Anosov induisant l'identité en homologie.

La démonstration du théorème A se fait dans le cadre de la théorie de Thurston pour les surfaces ; elle utilise la classification des difféomorphismes, la topologie de l'espace des feuilletages mesurés et la théorie des réseaux ferroviaires sur les surfaces. La démonstration utilise aussi un peu d'algèbre linéaire du type Perron-Frobenius (propriétés spectrales des matrices préservant un cône). Dans le cas du genre 1, le théorème A se réduit à un énoncé sur les matrices dans $SL_2(\mathbb{Z})$. D'autre part, nous avons été amenés à développer la structure PL de l'espace des feuilletages mesurés à l'aide des réseaux ferroviaires ; ce développement est une adaptation détaillée de l'exposition de Thurston sur la structure PL de l'espace des laminations géodésiques mesurées, comme il apparaît dans les chapitres 8 et 9 de [Th]. Remarquons qu'il existe une autre description de la structure PL de l'espace des feuilletages, à l'aide des cartes données par la décomposition de la surface en pantalons. Ceci découle de la classification des

feuilletages sur le pantalon et des formules décrivant le changement de décomposition (voir l'exposé 6 de [FLP] et le théorème 1.1 de [Re]).

Comme on le verra, la première description, utilisant les réseaux ferroviaires, est plus adaptée que la seconde à l'étude de la dynamique des difféomorphismes pseudo-Anosov, grâce à l'existence de réseaux ferroviaires "invariants" par ces difféomorphismes.

Je remercie F. Bonahon pour avoir attiré mon attention sur ces réseaux ferroviaires invariants, et pour m'avoir aidé à comprendre différents aspects de la théorie de Thurston. Il m'a suivi tout le long de mon travail et les conversations que nous avons eues ensemble ont été pour moi d'une grande utilité. J'ai bénéficié également de discussions avec A. Fathi qui, en particulier, m'a montré que la condition $[\varphi]([\mathfrak{F}^u, \mu^u]) \neq [\mathfrak{F}^s, \mu^s]$ du théorème A est la plus faible possible (voir le § VIII).

Ce travail n'aurait pas eu lieu sans le soutien moral et matériel de mon Professeur, F. Laudenbach, à qui je dois le sujet, ainsi que d'innombrables conseils, surtout au moment de la rédaction, sans lesquels plusieurs des démonstrations apparaissant dans ce texte auraient été incomplètes. Je le remercie pour tout cela, ainsi que de m'avoir soutenu pour une bourse de la DGRST.

Je remercie aussi Madame B. Barbichon qui a assuré la frappe de ce texte.

CHAPITRE 0

NOTATIONS ET RAPPELS CONCERNANT LA CLASSIFICATION DES CLASSES
D'ISOTOPIE DE DIFFÉOMORPHISMES D'UNE SURFACE

On suivra en principe les notations des notes publiées du Séminaire d'Orsay sur les travaux de Thurston sur les surfaces [FLP]. Dans tout ce qui suit, M est une surface fermée orientable connexe munie d'une structure différentiable. On suppose que la caractéristique d'Euler de M est négative. On exclut ainsi la sphère et le tore $S^1 \times S^1$, pour lesquels la théorie ne s'applique pas, mais où les théorèmes correspondants sont bien connus ou même triviaux. g désigne le genre de M .

On rappelle qu'un difféomorphisme pseudo-Anosov f est un difféomorphisme qui préserve deux feuilletages transverses \mathfrak{F}^S et \mathfrak{F}^U dont les singularités sont des selles ayant au moins 3 séparatrices, ces deux feuilletages admettant respectivement des mesures transverses invariantes μ^S et μ^U telles que $f(\mathfrak{F}^S, \mu^S) = (\mathfrak{F}^S, \frac{1}{\lambda} \mu^S)$ et $f(\mathfrak{F}^U, \mu^U) = (\mathfrak{F}^U, \lambda \mu^U)$, où λ est un réel > 1 . Les feuilletages mesurés (\mathfrak{F}^S, μ^S) et (\mathfrak{F}^U, μ^U) sont appelés respectivement feuilletage stable et instable de f et λ le coefficient de dilatation de f . Les points singuliers des feuilletages sont des singularités pour le difféomorphisme f .

Soit φ un difféomorphisme de M . D'après le théorème de classification de Thurston, φ est isotope à un difféomorphisme φ' vérifiant l'une des conditions suivantes :

- (i) φ' est pseudo-Anosov ;
- (ii) φ' est d'ordre fini ;
- (iii) φ' laisse invariante une courbe simple fermée C (non nécessairement connexe). On analyse alors de la même manière φ' sur la surface plus simple $M - U$, où U est un voisinage tubulaire de C invariant par φ' (notons que le théorème est vrai aussi pour les surfaces à bord non vide).

Il découle de la théorie que le cas (i) est le plus intéressant du point de vue géométrique et dynamique. Si φ est isotope à un difféomorphisme pseudo-Anosov,

son action sur $\pi_1(M)$ est à croissance exponentielle. Mais son action sur le groupe d'homologie $H_1(M, \mathbb{Z})$ peut être l'identité. Nous verrons que pour tout difféomorphisme f de M , il existe un difféomorphisme pseudo-Anosov ayant la même action sur $H_1(M, \mathbb{Z})$ et que certains automorphismes symplectiques de l'homologie ne peuvent être réalisés que par des difféomorphismes pseudo-Anosov.

Nous continuons à fixer les notations : $[\varphi]$ désigne la classe d'isotopie du difféomorphisme φ .

\mathcal{S} est l'espace des classes d'isotopie de courbes simples fermées connexes sur M , non homotopes à un point. Il s'injecte par l'opération d'élargissement ([FLP], exposé 5) dans $\mathcal{m}\mathcal{T}$, l'espace des feuilletages mesurés sur M modulo isotopie et mouvements de Whitehead. On dit qu'un élément de $\mathcal{m}\mathcal{T}$ est une classe de Whitehead de feuilletages. L'espace $\mathcal{m}\mathcal{T}$ s'injecte dans l'espace fonctionnel $R_+^{\mathcal{S}}$ et, muni de la topologie induite, il est homéomorphe à $R^{6g-6} - \{0\}$. L'espace \mathcal{S} est dense dans $\mathcal{m}\mathcal{T}$. L'espace R_+^* des réels > 0 agit sur $\mathcal{m}\mathcal{T}$ par multiplication de la mesure, et Thurston démontre que le projectifié $\mathcal{P}\mathcal{m}\mathcal{T}$ est homéomorphe à une sphère qui se trouve être un bord naturel à l'espace de Teichmüller \mathcal{T} de M , c'est-à-dire un bord auquel l'action de $\pi_0(\text{Diff}M)$ admet une extension continue. $\mathcal{T} \cup \mathcal{P}\mathcal{m}\mathcal{T}$ est homéomorphe à une boule fermée et l'action de $\pi_0(\text{Diff}M)$ sur cette boule permet d'obtenir des résultats géométriques sur les éléments de $\pi_0(\text{Diff}M)$. D'ailleurs, c'est en appliquant le théorème du point fixe de Brouwer à cette action et en analysant la nature du point fixe que Thurston démontre son théorème de classification rappelé plus haut.

CHAPITRE 1

STRUCTURE PL DE L'ESPACE m^3 DES FEUILLETAGES MESURES (LES RESEAUX FERROVIAIRES)

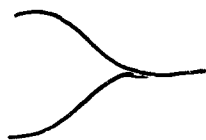
Dans ce chapitre, on développe certains aspects de la théorie des réseaux ferroviaires introduite par Thurston ([Th], chapitres 8 et 9). On rappellera, pour raison de commodité, toutes les définitions. On définira un atlas de m^3 dont chaque ouvert de carte est constitué par des feuilletages portés par un réseau ferroviaire maximal. On montrera que cet atlas munit l'espace m^3 d'une structure de variété linéaire par morceaux (PL). On utilisera largement des idées contenues dans [Th], où une structure analogue est décrite pour l'espace des laminations géodésiques mesurées ([Th], proposition 9.5.8).

I. GENERALITES SUR LES RESEAUX FERROVIAIRES

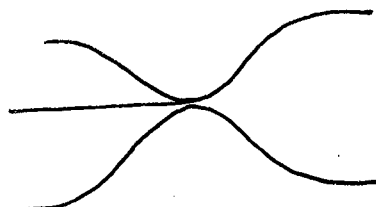
I.1. Définitions.

Un réseau ferroviaire τ sur M est un sous-espace compact de M homéomorphe à un graphe sans bord, dont les arêtes sont des segments différentiables de M tangents entre eux aux sommets. Ainsi, chaque point de τ a un espace tangent bien défini (voir figure 1).

On appelle aiguillage un point de τ qui est un sommet, et le nombre de brins d'un aiguillage est le nombre d'arêtes aboutissant en ce point. On a donc des modèles locaux du type suivant :



aiguillage à 3 brins



aiguillage à 5 brins

Si τ est un réseau ferroviaire sur M , chaque composante connexe de $M - \tau$ possède un bord naturel dans M dont l'espace tangent a un certain nombre de discontinuités. Si donc une de ces composantes est homéomorphe à un disque, on pourra dire que c'est un n-gone, où n est le nombre de pointes du bord, c'est-à-dire de points de discontinuité de l'espace tangent.

Par exemple, dans la figure 1 ci-dessous, A est un monogone, B un bigone et C un triangle.

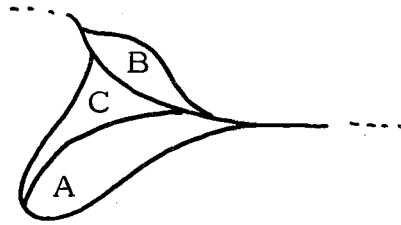


Figure 1

I.2. Mesures sur un réseau ferroviaire et feuilletages portés par un réseau ferroviaire.

Une mesure μ sur un réseau ferroviaire τ est la donnée pour chaque arête de τ d'un nombre réel ≥ 0 (on dira que c'est le poids $\mu(a)$ de l'arête a), la collection de ces nombres devant vérifier la condition de compatibilité suivante : en chaque aiguillage, la somme des poids des arêtes qui y aboutissent d'un même côté est la même que celle des arêtes qui y aboutissent de l'autre. Ainsi, on a par exemple :



$$\mu(a) = \mu(b) + \mu(c) .$$

(τ, μ) désigne un réseau ferroviaire τ muni de la mesure μ . Un tel couple permet de définir (dans le cas où μ n'est pas identiquement nulle) une classe de Whitehead de feuilletages sur M de la manière suivante : on remplace chaque arête a_i de poids non nul par un rectangle feuilleté horizontalement (c'est en quelque sorte un épaississement de l'arête : voir la figure 2 ci-dessous), la longueur des côtés verticaux du rectangle associé à l'arête a_i étant $\mu(a_i)$. Grâce à la condition de compatibilité requise ci-dessus, les rectangles se recollent bien pour fournir un feuilletage mesuré partiel de M . Le support de ce feuilletage partiel est un fermé de

M qui est une sous-variété dont le bord a des pointes, de sorte que l'on admet ici aussi le modèle local suivant :

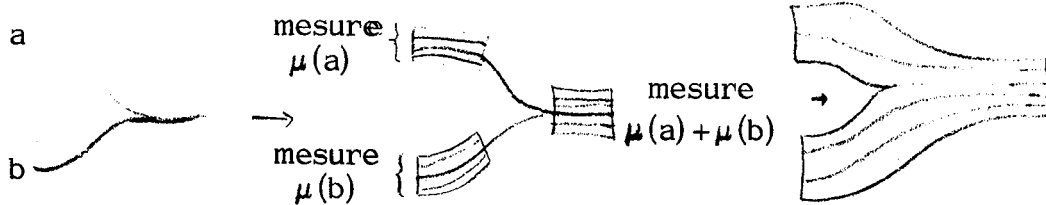


Figure 2

Supposons qu'aucune composante du complémentaire dans M de ce feuilletage mesuré partiel ne soit un monogone ou un disque lisse. En écrasant alors chaque composante de ce complémentaire sur un squelette (spine) (figure 3), on obtient un feuilletage mesuré total de M avec singularités permises (des "selles" à ≥ 3 séparatrices), dont la classe de Whitehead ne dépend que de (τ, μ) . Cette opération est équivalente à l'opération d'élargissement, exposée dans [FLP], exposé 5, §III.

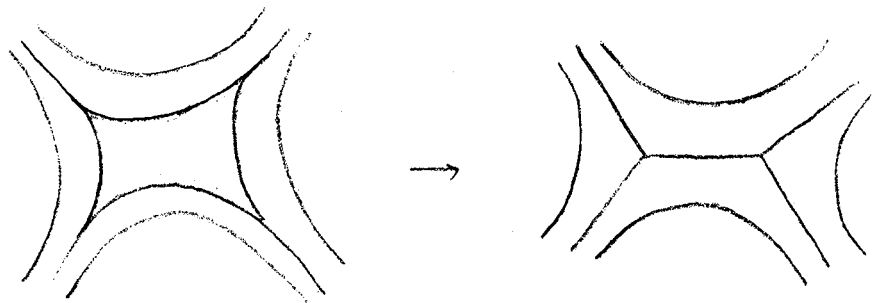


Figure 3

Un feuilletage mesuré sur M obtenu de cette manière est dit porté par τ .

On note $\mathfrak{m}\mathfrak{F}(\tau)$ l'ensemble des classes de Whitehead de feuilletages portés par τ . Considéré dans $\mathbb{R}_+^{\mathbb{S}}$, $\mathfrak{m}\mathfrak{F}(\tau)$ est un cône. $\mathfrak{p}\mathfrak{m}\mathfrak{F}(\tau)$ est son projectifié.

I.3. Réseaux ferroviaires admissibles.

Nous dirons qu'un réseau ferroviaire τ est admissible si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1) $M - \tau$ ne comprend pas de composante égale à un monogone, un bigone, un anneau lisse ou un disque lisse. (L'absence de monogone et de disque lisse implique que les singularités de tout feuilletage mesuré porté par τ sont de type permis par la théorie, i.e. des selles à ≥ 3 séparatrices, et l'absence de bigone et d'anneau lisse implique que si deux feuilletages mesurés portés par τ sont équivalents par isotopie et opérations de Whitehead, les mesures correspondantes sur τ sont les mêmes, cf. II.2 ci-dessous.)

2) On demande qu'il existe un feuilletage mesuré porté par τ dont la mesure correspondante sur τ attribue un poids non nul à chaque arête de τ . Par exemple, le réseau ferroviaire de la figure 4 vérifie la condition 1 mais pas la condition 2. Cette condition est essentielle pour pouvoir décider, d'après les données combinatoires du réseau ferroviaire, la dimension de l'espace des feuilletages portés (voir III.1 ci-dessous).

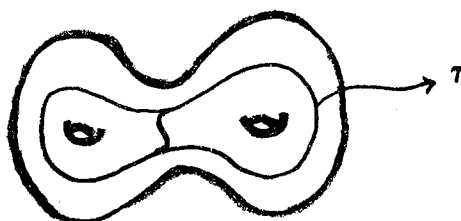


Figure 4

Pour des raisons pratiques, tous les réseaux ferroviaires que nous prendrons en considération seront supposés admissibles. Nous ne rappellerons ce qualificatif que dans les énoncés où l'une des conditions ci-dessus est essentielle.

I.4. Voisinage adapté ; la relation $\tau_1 < \tau_2$.


Un voisinage adapté V de τ est un voisinage tubulaire fermé "lisse" de τ , dont l'espace tangent du bord a éventuellement des discontinuités correspondant aux pointes de $M - \tau$, dont le modèle est le suivant :  (ce sont les discontinuités usuelles de la théorie). On peut penser à V comme étant obtenu en épaississant τ (figure 5). Le voisinage V_τ est muni d'un feuilletage par des segments transverses à τ et au bord de V , appelé feuilletage par les traverses. Au voisinage d'un aiguillage de τ , V et son feuilletage par les traverses ont l'allure suivante :



Figure 5

Le voisinage adapté V et son feuilletage par les traverses sont bien définis à isotopie près.

Soient τ_1 et τ_2 deux réseaux ferroviaires sur M . On dit que τ_1 est porté par τ_2 (et on écrit $\tau_1 \prec \tau_2$) si et seulement si τ_1 est isotope à un réseau ferroviaire τ_1^* contenu dans un voisinage adapté V de τ_2 et transverse au feuilletage de V par les traverses. Si f est un difféomorphisme de M et τ un réseau ferroviaire tel que $f(\tau) \prec \tau$, on dira que τ est invariant par f .

I.5. L'application φ_τ associée à un réseau ferroviaire τ ; réseaux ferroviaires maximaux.

Etant donné un réseau ferroviaire τ , on définit, comme dans [Bo], un paramétrage de $\mathfrak{M}(\tau)$ par un cône convexe dans un espace vectoriel de dimension finie de la manière suivante :

Fixons une numérotation a_1, \dots, a_N des arêtes de τ . Soit R_+^N le cône des vecteurs à coordonnées ≥ 0 dans l'espace vectoriel réel à N dimensions construit sur a_1, \dots, a_N , et soit E le sous-cône de R_+^N défini par les équations de compatibilité provenant des aiguillages de τ . Ainsi, un aiguillage tel que



définit l'équation $a_1 + a_2 = a_3 + a_4$.

L'espace E est un cône convexe fermé dans R_+^N . On définit l'application $\varphi_\tau : E \rightarrow \mathfrak{M}(\tau)$ qui associe à chaque N -uplet de E la classe de feuilletages mesurés correspondante. φ_τ commute avec l'action de R_+ sur les deux facteurs. On verra ci-dessous que sous certaines conditions φ_τ est un homéomorphisme sur son image (II.3) et paramètre un cône d'intérieur (dans $\mathfrak{M}(\tau)$) non vide (III.1).

On dira qu'un réseau ferroviaire admissible est maximal si l'espace $\mathfrak{M}(\tau)$

est d'intérieur non vide dans $m\mathfrak{F}$. On verra dans III.1 que ceci est le cas si et seulement si chaque composante connexe de $M - \tau$ est un triangle.

II. PROPRIETES DE L'APPLICATION φ_τ .

II.1.1. Mesure à l'infini induite par un feuilletage mesuré.

Pour démontrer l'injectivité de l'application φ_τ , nous rappelons d'abord quelques faits classiques, plus ou moins bien connus, concernant le relèvement d'un feuilletage mesuré au revêtement universel de la surface M .

Nous notons D le disque unité ouvert de R^2 , et S^1 son bord. Soit $\pi : D \rightarrow M$ l'application de revêtement universel. (\mathfrak{F}, μ) se relève en un feuilletage $\tilde{\mathfrak{F}}$ de D , muni d'une mesure transverse $\tilde{\mu}$ invariante par l'holonomie, provenant de μ .

Nous associons à $\tilde{\mu}$ une mesure μ_∞ sur un sous-ensemble de $(S^1 \times S^1 - \Delta)/\mathbf{Z}_2$, où Δ est la diagonale et où \mathbf{Z}_2 agit en intervertissant les coordonnées. Pour cela, nous commençons par rappeler que si L est une feuille généralisée de $\tilde{\mathfrak{F}}$ (c'est-à-dire soit une feuille ne passant pas par les singularités, soit un sous-ensemble fermé homéomorphe à R , formé par une union de séparatrices et de singularités), L n'a pas de point d'accumulation dans D et possède exactement deux limites L_+ et L_- sur S^1 (voir [FL], §1).

On définit alors le sous-ensemble E^* de $S^1 \times S^1 - \Delta$ comme l'ensemble des couples $(x, y) \in S^1 \times S^1$ tel qu'il existe une feuille généralisée joignant x à y dans $D \cup S^1$. L'ensemble E est l'image de E^* dans $(S^1 \times S^1 - \Delta)/\mathbf{Z}_2$.

Construction de la mesure μ_∞ sur E .

Soient x et y deux points distincts de S^1 . D'après [FL, lemme 5], il existe deux courbes fermées $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ sur M , quasi-transverses à \mathfrak{F} , admettant des relevés, respectivement $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$, dans D , vérifiant les propriétés suivantes :

1° $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ sont deux courbes simples infinies ayant chacune deux limites bien définies sur S^1 , respectivement A_1, A_2 et B_1, B_2 .

2° $\tilde{\alpha} \cap \tilde{\beta} = \emptyset$.

3° Les extrémités A_1, A_2, B_1 et B_2 délimitent deux segments compacts disjoints I et J sur S^1 , voisinage respectivement de x et de y (voir figure 6).

4° L'ensemble des feuilles allant de $\tilde{\alpha}$ à $\tilde{\beta}$ forme un rectangle compact X entre $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ (voir figure 6).

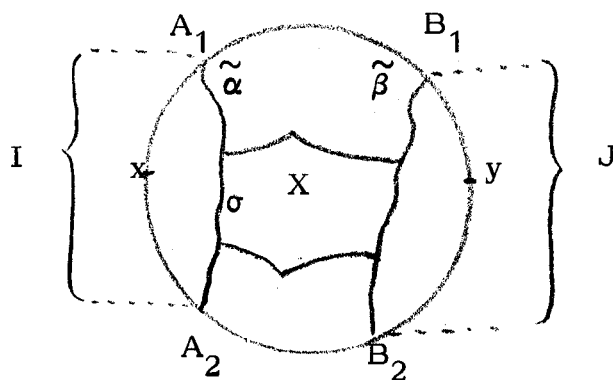


Figure 6

5° C'est une condition technique qui sera utilisée pour la preuve de la proposition ci-dessous : Pour tout $m > 0$, on peut choisir $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ tels que leur distance soit $> m$. L'existence de $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ vérifiant toutes ces propriétés découle de la démonstration du lemme 5 de [FL]. On en déduit en particulier que l'ensemble des feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}$ ayant une extrémité dans I et l'autre dans J admet un segment compact transversal commun σ .

On définit alors la mesure μ_∞ sur $I \times J \cap E$ comme étant l'image sur cet ensemble de la mesure transverse induite sur σ par $\tilde{\mu}$, par l'application qui à un point de σ associe les deux extrémités de la feuille de $\tilde{\mathcal{F}}$ passant par ce point (cette application est continue à droite et à gauche en chaque point, elle est multi-valuée aux points de σ appartenant à des feuilles singulières, mais nous ne nous intéresserons pas à ce problème, l'ensemble de ces points étant dénombrable et, par conséquent, de mesure nulle ; toute cela est expliqué dans [FL], § 1).

Pour montrer que l'on définit bien ainsi une mesure sur E , il faut voir que si I' et J' sont deux autres intervalles disjoints de S^1 contenant respectivement x et y dans leur intérieur, et σ' une transversale commune aux feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}$ ayant une extrémité dans I' et l'autre dans J' , la mesure induite sur l'ensemble $K = (I \cap I' \times J \cap J') \cap E$ par le procédé décrit ci-dessus, à partir de σ et σ' est la même. L'ensemble des feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}$ dont les extrémités sont dans K admet σ et σ' comme segments transverses communs. Soient ζ et ζ' les intersections de cet ensemble de feuilles avec σ et σ' . La propriété d'invariance de $\tilde{\mu}$ par l'holonomie implique que les espaces mesurés ζ et ζ' (chacun d'eux étant donc muni de la mesure induite par $\tilde{\mu}$) sont isomorphes par un isomorphisme qui est une application d'holonomie du feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$. Par conséquent, la mesure déposée par σ sur $I \times J \cap E$, et celle déposée par σ' sur $I' \cap J' \cap E$, coïncident sur l'intersection de ces deux ensembles.

II.1.2. PROPOSITION. L'espace mesuré (E, μ_∞) ne dépend que de la classe d'équivalence du feuilletage $(\tilde{\mathcal{F}}, \mu)$.

Démonstration. Soient (\mathfrak{F}, μ) et (\mathfrak{F}', μ') deux feuilletages mesurés équivalents sur M . On obtient donc l'un de ces feuilletages à partir de l'autre par isotopie et par un certain nombre de glissements de Whitehead. Les sous-ensembles E et E' de $(S^1 \times S^1 - \mathcal{L})/\mathbb{Z}_2$ correspondant aux extrémités de feuilles des feuilletages $\tilde{\mathfrak{F}} = \pi^{-1}(\mathfrak{F})$ et $\tilde{\mathfrak{F}}' = \pi^{-1}(\mathfrak{F}')$ coïncident, car l'isotopie et les glissements de Whitehead sur M ne déplacent une feuille du feuilletage relevé que d'une distance uniformément bornée, et donc ne modifie pas ses extrémités sur S^1 . Il faut voir que les mesures μ_∞ et μ'_∞ sur $E = E'$ construites respectivement à partir de (\mathfrak{F}, μ) et (\mathfrak{F}', μ') coïncident.

Soit (x, y) un point de E , et α et β deux courbes fermées sur M quasi-transverses à (\mathfrak{F}, μ) , admettant des relevés $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ dans D vérifiant les conditions 1 à 4 ci-dessus, et permettant de construire la mesure μ_∞ sur un voisinage $i \times J$ de (x, y) .

Supposons d'abord que les feuilletages mesurés (\mathfrak{F}, μ) et (\mathfrak{F}', μ') soient isotopes et soit $\{\mathfrak{F}_t, \mu_t\}_{t \in [0,1]}$ une isotopie faisant passer de l'un de ces feuilletages à l'autre. Soient $\{\alpha_t\}$ et $\{\beta_t\}$ les images de α et β par la déformation $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \in [0,1]}$. Il leur correspond alors 2 familles de relevés $\{\tilde{\alpha}_t\}$ et $\{\tilde{\beta}_t\}$ tels que pour tout t , $\tilde{\alpha}_t$ et $\tilde{\beta}_t$ soient quasi-transverses à $\tilde{\mathfrak{F}}_t$. La déformation $\{\tilde{\mathfrak{F}}_t\}$, étant le relevé d'une déformation sur M , est bornée. Les extrémités de $\tilde{\alpha}_t$ et $\tilde{\beta}_t$ sont donc toujours ceux respectivement de $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$, et d'après la condition 5 ci-dessus (en choisissant m assez grand), on peut choisir $\tilde{\alpha}_t$ et $\tilde{\beta}_t$ de telle sorte qu'ils soient disjoints pour tout t .

On construit alors la mesure $\mu_\infty^{(t)}$ sur $I \times J \cap E$ induite par $(\tilde{\mathfrak{F}}_t, \mu_t)$ à partir d'un segment transverse σ_t contenu dans le rectangle des feuilles allant de $\tilde{\alpha}_t$ à $\tilde{\beta}_t$ (cf. la construction ci-dessus et la figure 7).

Pour montrer que la mesure déposée sur $I \times J \cap E$ est constante en t , on remarque que cette mesure est définie de la manière suivante. Si $\varphi_{t_0, t}$ est l'isotopie par laquelle on déduit (\mathfrak{F}_t, μ_t) de $(\mathfrak{F}_{t_0}, \mu_{t_0})$, on a $\sigma_t = \varphi_{t_0, t}(\sigma_{t_0})$ et $\tilde{\mu}_t(\sigma_t) = \tilde{\mu}_{t_0}(\sigma_{t_0})$. L'ensemble des feuilles allant de $\tilde{\alpha}_t$ à $\tilde{\beta}_t$ admet σ_t comme segment transverse commun, et si p_{t_0} et p_t sont les applications qui, à un point de σ_{t_0} , resp. σ_t , associent les extrémités de la feuille passant par ce point, on a $p_{t_0} = p_t \circ \varphi_{t_0, t}$.

Les mesures induites par (\mathfrak{F}, μ) et (\mathfrak{F}', μ') sur $I \times J \cap E$ sont donc les mêmes, dans le cas où ces deux feuilletages mesurés sont isotopes.

Il suffit, pour terminer, de considérer le cas où (\mathfrak{F}', μ') est obtenu à partir de (\mathfrak{F}, μ) par une opération de Whitehead élémentaire, c'est-à-dire par l'écrasement en un point d'une arête joignant deux singularités. Or, dans ce cas-là, les ensembles de feuilles sont les mêmes pour les deux feuilletages relevés, et l'image du segment σ par le collapse qui fait passer de (\mathfrak{F}, μ) à (\mathfrak{F}', μ') est un segment qui définit la même mesure que σ sur $I \times J \cap E$. \square

Remarques. 1) Si (\mathfrak{F}, μ) est un feuilletage sans feuilles fermées non singulières, la mesure transverse $\tilde{\mu}$ de $\tilde{\mathfrak{F}}$ se lit directement en fonction de la mesure μ_∞ : si σ est une transversale à $\tilde{\mathfrak{F}}$, soit $E(\sigma)$ le sous-ensemble de E correspondant aux extrémités des feuilles passant par σ ; on a alors $\tilde{\mu}(\sigma) = \mu_\infty(E_\sigma)$. Ceci vient du fait que pour un tel feuilletage, à un couple (x, y) de E il correspond une seule feuille de $\tilde{\mathfrak{F}}$ (voir [FL], lemme 4). Dans le cas où le feuilletage (\mathfrak{F}, μ) contient un anneau feuilleté par des courbes fermées parallèles, on a seulement l'inégalité $\mu_\infty(E(\sigma)) \geq \tilde{\mu}(\sigma)$. Il sera tenu compte de cette remarque dans la démonstration de la proposition II.2.

2) Remarquons enfin que $\pi_1(M)$ agit naturellement sur $(S^1 \times S^1 - \Delta)/\mathbb{Z}_2$ ($\pi_1(M)$ étant considéré comme groupe des transformations hyperboliques de D , cette action est l'action sur l'espace des géodésiques), que E est un fermé de $(S^1 \times S^1 - \Delta)/\mathbb{Z}_2$ ([FL], lemme 5) invariant par cette action, de sorte que la mesure μ_∞ sur E se prolonge en une mesure sur $(S^1 \times S^1 - \Delta)/\mathbb{Z}_2$ invariante par cette action.

II.2. PROPOSITION. Soit τ un réseau ferroviaire admissible. L'application $\varphi_\tau : E \rightarrow \mathfrak{M}(\mathfrak{F}(\tau))$ associée à τ est injective.

Pour la démonstration de la proposition, nous démontrons d'abord le lemme suivant :

LEMME 1. Soit τ un réseau ferroviaire admissible et soit $\tilde{\tau} = \pi^{-1}(\tau)$ le relèvement de τ au revêtement universel D de M . Il n'existe pas alors de disque lisse, de monogone, de bigone, ou d'anneau lisse plongé dans $\tilde{\tau}$.

Démonstration. Si $\tilde{\tau}$ contient un tel objet, alors, pour des raisons d'indice de Poincaré, une des composantes connexes de $D - \tilde{\tau}$ doit être un disque lisse, un monogone ou un bigone. (On a une formule d'Euler-Poincaré pour les réseaux ferroviaires analogue à celle des feuilletages, explicitée dans [FLP], exposé 5 ; la formule pour les réseaux ferroviaires se déduit directement de celle des feuilletages en épaississant le réseau ferroviaire pour obtenir un feuilletage.)

Mais une telle composante de $D - \tilde{\tau}$ couvre une composante de $M - \tau$ de même nature. En effet, si u est une telle composante, l'application de revêtement est injective sur u car sinon il existerait une transformation g du revêtement qui enverrait un point de u sur un autre point de u . Comme g préserve $\tilde{\tau}$, elle aurait un point fixe dans \bar{u} , ce qui est impossible car g n'a pas de point fixe dans D .

Donc $\pi(u)$ sera un monogone, un bigone ou un disque lisse, ce qui n'est pas possible car τ est admissible. \square

Démonstration de la proposition II.2.

Soient (\mathfrak{F}, μ) et (\mathfrak{F}', μ') deux feuilletages mesurés équivalents portés par τ . Nous supposons donc que \mathfrak{F} et \mathfrak{F}' sont deux feuilletages partiels de M , contenus dans un voisinage adapté V de τ , transverses aux traverses de V , le poids associé à chaque arête de τ étant la mesure transverse déposée sur ses traverses. Nous devons montrer que pour chaque arête, ce poids est le même pour \mathfrak{F} et \mathfrak{F}' .

Supposons pour le moment que \mathfrak{F} et \mathfrak{F}' soient sans composante fermée lisse (lisse voulant dire ici ne passant pas par une pointe du support du feuilletage).

$\tilde{\tau} = \pi^{-1}(\tau)$ et $\tilde{V} = \pi^{-1}(V)$ apparaissent dans D comme un réseau ferroviaire infini avec son voisinage adapté. Soient $\tilde{\mathfrak{F}} = \pi^{-1}(\mathfrak{F})$ et $\tilde{\mathfrak{F}}' = \pi^{-1}(\mathfrak{F}')$; E et E' sont les sous-ensembles de $(S^1 \times S^1 - \Delta)/\mathbb{Z}_2$ correspondant aux bouts des feuilles de $\tilde{\mathfrak{F}}$ et $\tilde{\mathfrak{F}}'$. Soient μ_∞ et μ'_∞ les mesures à l'infini induites par les mesures transverses $\tilde{\mu}$ et $\tilde{\mu}'$ de $\tilde{\mathfrak{F}}$ et $\tilde{\mathfrak{F}}'$ (cf. II.1).

Si σ est une traverse de $\tilde{\tau}$, la mesure déposée par $\tilde{\mu}$ et $\tilde{\mu}'$ sur σ est, d'après la remarque 1 de II.1, la mesure $\mu_\infty(E(\sigma))$ (respectivement $\mu'_\infty(E'(\sigma))$), où $E(\sigma)$ (resp. $E'(\sigma)$) est les sous-ensembles de $(S^1 \times S^1 - \Delta)/\mathbb{Z}_2$ correspondant aux extrémités de feuilles de $\tilde{\mathfrak{F}}$ (resp. de $\tilde{\mathfrak{F}}'$) passant par σ .

Comme (\mathfrak{F}, μ) est équivalent à (\mathfrak{F}', μ') , on a (d'après la proposition II.1.2), l'égalité $(E, \mu_\infty) = (E', \mu'_\infty)$.

D'autre part, on a :

LEMME 2. $E'(\sigma) = E(\sigma)$.

Démonstration (F. Bonahon). D'après nos hypothèses sur \mathfrak{F} et \mathfrak{F}' (pas de feuille fermée lisse), un élément de E correspond d'une manière unique à une feuille de $\tilde{\mathfrak{F}}$ et à une feuille de $\tilde{\mathfrak{F}}'$. Pour démontrer le lemme, il suffit donc de montrer que si L et L' sont deux feuilles respectivement de $\tilde{\mathfrak{F}}$ et $\tilde{\mathfrak{F}}'$ dont les extrémités convergent vers les mêmes points x et y de S^1 (figure 7), les deux feuilles longent exactement les mêmes arêtes de $\tilde{\tau}$.

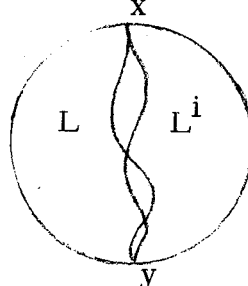


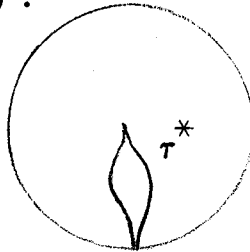
Figure 7

Le voisinage adapté V collapse sur τ le long des traverses. De même, on a un collapse $\tilde{V} \rightarrow \tilde{\tau}$. Une feuille de $\tilde{\mathfrak{F}}$ (ou de $\tilde{\mathfrak{F}}'$) devient par ce collapse, une ligne infinie lisse de $\tilde{\tau}$. Nous dirons que cette ligne de $\tilde{\tau}$ piste la feuille en question.

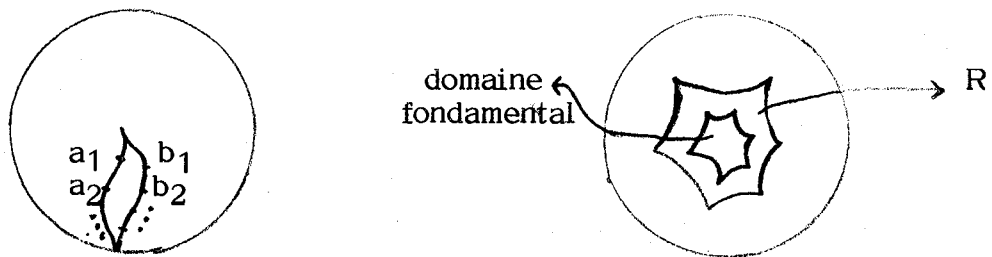
L et L' étant des feuilles de \mathfrak{F} et \mathfrak{F}' qui se correspondent par une déformation permettant de passer de \mathfrak{F} à \mathfrak{F}' , elles sont à une distance bornée uniformément K (c'est-à-dire qu'il existe $K > 0$ tel que pour tout $x \in L$, $\exists y \in L'$ tel que $d(x, y) \leq K$), la distance étant celle de la métrique hyperbolique sur D . Considérons

les deux lignes P et P' de $\tilde{\tau}$ qui pistent respectivement L et L' . Elles ont les mêmes extrémités sur S^1 . Nous devons montrer que ces deux lignes sont confondues.

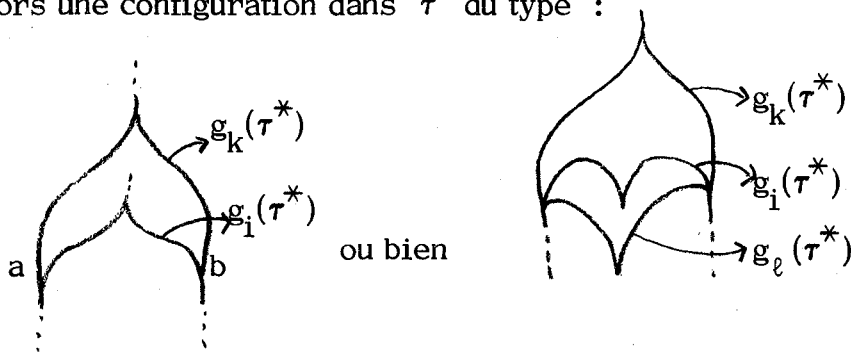
Supposons d'abord que P et P' aient un aiguillage en commun. Si P et P' ne sont pas confondus, on aurait dans D un bigone semi-infini (un des sommets étant sur S^1) τ^* comme sur la figure 8 ci-dessous, car il n'y a pas de bigone ou de monogone fini dans $\tilde{\tau}$ (lemme 1).



Les deux côtés du bigone τ^* sont, comme L et L' , à une distance uniformément bornée (soit K cette distance). Nous montrons que ceci est impossible : pour cela, soit a_1, \dots, a_n, \dots une suite infinie de points sur l'un des côtés du bigone τ^* , tous ces points étant sur des arêtes distinctes de $\tilde{\tau}$, tendant vers l'infini, et b_1, \dots, b_n, \dots une suite de points sur l'autre côté de τ^* , vérifiant les mêmes propriétés, chaque point b_n étant à une distance $\leq K$ du point a_n . Il existe alors une suite de transformations g_n du groupe du revêtement telle que pour tout n , l'application g_n ramène a_n et b_n dans une région compacte R fixe de D (on peut prendre par exemple R comme l'ensemble des points à distance $\leq K$ d'un domaine fondamental de M).



Quitte à prendre des sous-suites, on peut supposer que, pour tout n , g_n envoie a_n sur la même arête a dans R , et b_n sur la même arête b . On obtiendrait alors une configuration dans $\tilde{\tau}$ du type :



De telles configurations sont interdites car elles impliqueraient l'existence dans $\tilde{\tau}$ d'un monogone ou d'un bigone fini.

Supposons maintenant que les lignes P et P' ont seulement leurs extrémités en commun, et soit τ^∞ le bigone infini qu'elles déterminent (figure 9).

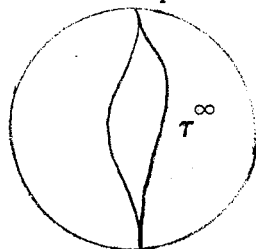


Figure 9

L'intérieur de τ^∞ contient nécessairement d'autres arêtes de $\tilde{\tau}$ car sinon, ou bien π serait injectif sur l'intérieur de τ^* , ou bien il existerait une transformation g du revêtement qui fixe les sommets de τ^* . Les deux possibilités sont interdites à cause de l'hypothèse sur la nature des composantes de τ .

On se ramène ainsi au cas où il y a une arête σ de $\tilde{\tau}$ qui part de l'un des côtés de τ^∞ vers son intérieur, comme sur la figure 10.

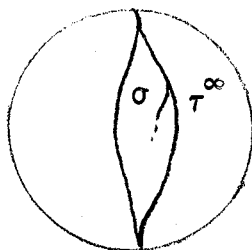


Figure 10

Une ligne infinie de $\tilde{\tau}$ partant de σ vers l'intérieur de τ^∞ rencontre nécessairement l'autre arête de τ^∞ ou bien converge vers l'une des extrémités de τ^∞ . Dans tous les cas, on est ramené au cas précédent (figure 8), ce qui démontre le lemme. \square

La proposition est maintenant démontrée si (\mathfrak{F}, μ) et (\mathfrak{F}', μ') n'ont pas de composante lisse fermée. Les arguments que nous avons utilisés ne s'appliquent pas tels quels dans le cas où les feuilletages ont de telles composantes, notamment parce que la mesure correspondante sur $(S^1 \times S^1 - \Delta)/\mathbb{Z}_2$ a des atomes, et la mesure d'un arc transverse au feuilletage relevé ne se lit pas directement en termes de la mesure à l'infini. Pour traiter le cas général, nous remarquons les faits suivants : Si (\mathfrak{F}, μ) et (\mathfrak{F}', μ') sont deux feuilletages équivalents, il existe dans chacun d'eux des anneaux maximaux formés de courbes parallèles à une courbe simple fermée C dans \mathfrak{F} et C' dans \mathfrak{F}' . L'équivalence des deux feuilletages implique que C et C' sont isotopes et on démontre, par exemple en passant comme plus haut au revêtement universel de M , que ces courbes passent par les mêmes traverses de τ . Les anneaux déposent donc la même mesure transverse sur les traverses de τ . On doit utiliser ici le fait qu'aucune composante de $M - \tau$ n'est un anneau. Les feuilletages partiels

obtenus en enlevant à \mathfrak{F} et \mathfrak{F}' ces anneaux maximaux sont sans composante lisse fermée. Ils déposent donc, d'après ce qui précède, la même mesure transverse sur les arêtes de τ .

On en déduit que (\mathfrak{F}, μ) et (\mathfrak{F}', μ') correspondent à la même mesure sur τ , ce qui démontre la proposition. \square

II.3. Soit τ un réseau ferroviaire admissible et E le cône associé à τ d'après I.5. La condition 2 de I.3 implique que les points de l'intérieur de E , considéré comme variété à bord, sont caractérisés par le fait que toutes leurs coordonnées sont strictement positives. Appelons $\text{int } E$ l'ensemble de ces points. On se limitera, uniquement par simplicité, à étudier la continuité de φ_τ sur $\text{int } E$. Le résultat suivant est suffisant pour la suite :

PROPOSITION. L'application $\varphi_\tau : E \rightarrow \mathbb{m}\mathfrak{F} \subset \mathbb{R}_+^{\mathfrak{S}}$ est continue en chaque point de $\text{int } E$.

Démonstration. Fixons un voisinage adapté V de τ . Soit μ_0 un point de $\text{int } E$. C'est donc un N -uplet de nombres > 0 . On associe à μ_0 , d'après I.2, un feuilletage partiel (\mathfrak{F}_0, μ_0) , représentant $\varphi_\tau(\mu_0)$ et dont le support est V . On rappelle que comme élément de $\mathbb{R}_+^{\mathfrak{S}}$, φ_τ est défini par la formule :

$$\forall [\alpha] \in \mathfrak{S}, (\varphi_\tau(\mu_0), [\alpha]) = \inf_{\gamma \in [\alpha]} \int_\gamma (F, m)$$

où (F, m) est un représentant quelconque de la classe $\varphi_\tau(\mu_0)$, éventuellement partiel (lemme II.2, exposé 5 de [FLP]). Remarquer que pour tenir compte des feuilletages partiels que l'on considère, la relation d'équivalence classique qui définit la classe de Whitehead d'un feuilletage (isotopie + glissements de Whitehead) est remplacée par la relation d'équivalence engendrée par :

- isotopie,
- glissements de Whitehead,
- éclatement d'une singularité ou d'un segment joignant deux singularités (figure 11).

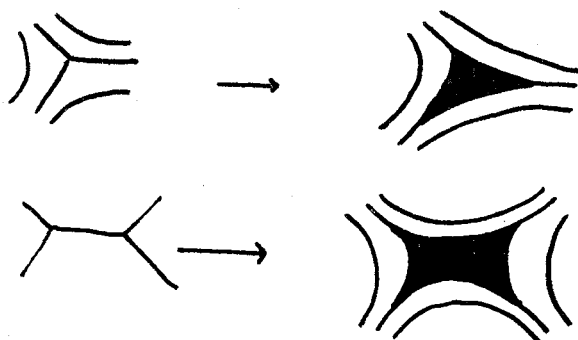


Figure 11

Ceci étant, si (\mathfrak{F}_0, μ_0) est le feuilletage partiel que nous venons de définir, on a :

$$\forall [\alpha] \in \mathfrak{S}, (\varphi_\tau(\mu), [\alpha]) = \inf_{\gamma \in [\alpha]} \int_\gamma (\mathfrak{F}_0, \mu_0) .$$

$[\alpha]$ étant un élément donné de \mathfrak{S} , il existe une courbe fermée immergée γ_0 vérifiant les 3 conditions suivantes :

- $(\varphi_\tau(\mu_0), [\alpha]) = \int_{\gamma_0} (\mathfrak{F}_0, \mu_0)$;
- γ_0 est une limite de plongements d'éléments dans $[\alpha]$;
- γ_0 est une immersion quasi-transversale à (\mathfrak{F}_0, μ_0) .

(\mathfrak{F}_0, μ_0) étant un feuilletage partiel, cette terminologie nécessite les précisions suivantes : $\gamma_0 \cap V$ est formé de segments transverses à (\mathfrak{F}_0, μ_0) ou dans une feuille. De plus, les deux configurations suivantes sont interdites :

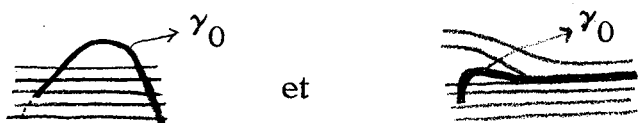


Figure 12

Cette définition correspond à la définition I.7 de l'exposé 5 de [FLP] pour un feuilletage total, et l'existence d'une telle courbe minimisante résulte de la proposition II.6 du même exposé et de la remarque qui suit son énoncé.

On a alors $\gamma_0 = \alpha_1^0 * \beta_1^0 * \alpha_2^0 * \dots$, où les α_i^0 et β_i^0 sont des segments à extrémités dans $M - V$, tels que $\alpha_i^0 \cap V$ soit transverse à \mathfrak{F}_0 et $\beta_i^0 \cap V$ soit dans une feuille (figure 13) :

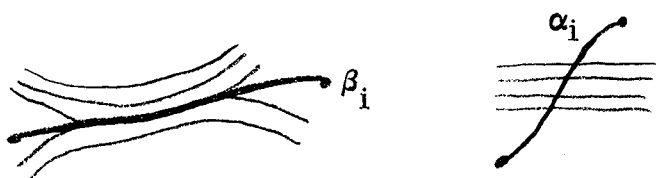


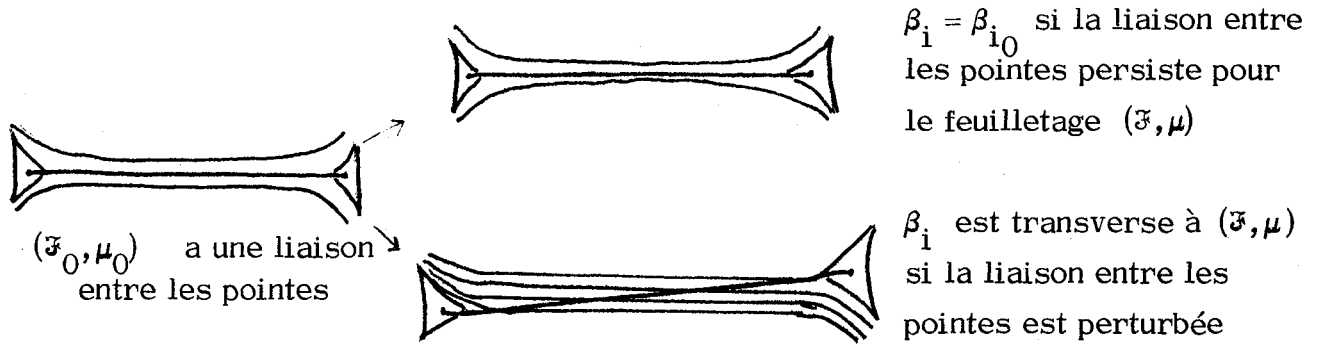
Figure 13

$$\int_{\gamma_0} (\mathfrak{F}_0, \mu_0) = \int_{\alpha_1^0} (\mathfrak{F}_0, \mu_0) + \int_{\beta_1^0} (\mathfrak{F}_0, \mu_0) + \dots \text{ et les termes } \int_{\beta_i^0} (\mathfrak{F}_0, \mu_0) \text{ sont nuls.}$$

Si $\mu \in E$ est voisin de μ_0 , il lui correspond, par φ_τ , un feuilletage partiel, de support V , voisin géométriquement de (\mathfrak{F}_0, μ_0) , c'est-à-dire pour la topologie des champs de droites. Appelons (\mathfrak{F}, μ) ce feuilletage.

Pour μ assez proche de μ_0 , les segments α_i^0 sont transverses à \mathfrak{F} . Les segments β_i^0 sont modifiés, à extrémités fixes, en des segments quasi-transverses à (\mathfrak{F}, μ) et dans la même classe d'homotopie à extrémités fixées.

Si $\beta_i^0 \cap V$ est connexe, le modèle de la modification est le suivant :



Si β_i^0 n'est pas connexe, on a des modèles analogues.

Un segment de la forme $\alpha_i^0 * \beta_i$ ou $\beta_i * \alpha_{i+1}^0$ est toujours quasi-transverse à (\mathfrak{X}, μ) (il suffit de voir que les configurations interdites de la figure 12 n'arrivent pas). On en déduit que la courbe $\gamma = \alpha_1^0 * \beta_1 * \alpha_2^0 * \beta_2 * \dots$ est globalement quasi-transverse à (\mathfrak{X}, μ) et vérifie :

$$(\varphi_\tau(\mu), [\alpha]) = \int_\gamma (\mathfrak{X}, \mu) = \int_{\alpha_1^0} (\mathfrak{X}, \mu) + \int_{\beta_1} (\mathfrak{X}, \mu) + \dots$$

D'autre part, si μ est proche de μ_0 , $|\int_{\alpha_i^0} (\mathfrak{X}, \mu) - \int_{\alpha_i^0} (\mathfrak{X}_0, \mu_0)|$ ainsi que $\int_{\beta_i} (\mathfrak{X}, \mu)$ sont très petits.

La somme $\int_{\alpha_1^0} (\mathfrak{X}, \mu) + \int_{\beta_1} (\mathfrak{X}, \mu) + \int_{\alpha_2^0} (\mathfrak{X}, \mu) + \dots$ est terme à terme proche de la somme $\int_{\alpha_1^0} (\mathfrak{X}_0, \mu_0) + \int_{\beta_1} (\mathfrak{X}_0, \mu_0) + \int_{\alpha_2^0} (\mathfrak{X}_0, \mu_0) + \dots$.

On en déduit que l'application de E dans \mathbb{R} qui, à $\mu \in E$ associe $(\varphi_\tau(\mu), [\alpha]) \in \mathbb{R}$, est continue en μ_0 . L'espace $\mathbb{R}_+^{\mathbb{S}}$ étant muni de la topologie faible, l'application $\varphi_\tau : E \rightarrow \mathbb{R}_+^{\mathbb{S}}$ est continue en tout point de $\text{int } E$.

Remarquons que la situation ci-dessus ressemble à celle qui est étudiée en détail dans [FLP], exposé 6, §V.4. \square

Remarque. On démontrera ailleurs (cf. "Réseaux ferroviaires et courbes simples", note à paraître aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences) que l'application φ_τ est continue sur E tout entier ; en fait, elle est linéaire par morceaux.

On a le corollaire suivant :

COROLLAIRE. L'application φ_τ est un homéomorphisme sur son image.

En effet, elle est continue et injective, et E est projectivement compact.

Remarquer que dans le cas où E est maximal, on peut appliquer le théorème de l'invariance du domaine pour montrer que $\varphi_\tau|_{\text{int } E}$ est un homéomorphisme sur son image.

III. L'ATLAS $(\mathfrak{M}\mathfrak{F}(\tau), \varphi_\tau)$ ET LA STRUCTURE PL DE $\mathfrak{M}\mathfrak{F}$.

III.1. PROPOSITION. Un réseau ferroviaire admissible τ est maximal si et seulement si chaque composante connexe de $M - \tau$ est un triangle.

Démonstration. Supposons d'abord que chaque composante de $M - \tau$ soit un triangle, et montrons que $\mathfrak{M}\mathfrak{F}(\tau)$ est d'intérieur non vide dans $\mathfrak{M}\mathfrak{F}$. Pour cela nous montrons que la dimension du cône $E \subset \mathbb{R}_+^N$ associé à τ , comme dans I.5, est la même que celle de $\mathfrak{M}\mathfrak{F}$, c'est-à-dire $6g - 6$.

En regardant τ comme un graphe combinatoire sur M , il vient de la formule donnant la caractéristique d'Euler de M que $V_2 - V_1 + V_0 = 2 - 2g$, où

V_2 = nombre de faces de la triangulation définie par le graphe,

V_1 = nombre d'arêtes du graphe,

V_0 = nombre de sommets du graphe.

D'autre part, on a :

V_2 = nombre de composantes de $M - \tau$,

$V_1 = N =$ dimension de l'espace \mathbb{R}^N ,

$V_0 =$ nombre d'équations définissant E dans \mathbb{R}_+^N .

Soit \mathfrak{F} un feuilletage porté par τ et attribuant un poids non nul à chaque arête de τ . On a donc :

$V_2 =$ nombre de singularités de \mathfrak{F} .

Ces singularités sont, d'après l'hypothèse sur la nature des composantes de $M - \tau$, toutes à 3 séparatrices. La formule d'Euler-Poincaré pour les feuilletages ([FLP], exposé 5) devient dans ce cas :

$$2\chi = \sum_{x \in \text{Sing}} (2 - 3) = -V_2$$

Donc $V_2 = 4g - 4$, et $V_1 - V_0 = 6g - 6$.

Donc la dimension de E est $\geq 6g - 6$.

L'application φ_τ étant un homéomorphisme sur son image, on a aussi

$$\dim E \leq \dim \mathfrak{M}\mathfrak{F} = 6g - 6,$$

donc $\dim E = 6g - 6$ et τ est maximal.

Réciproquement, si l'une des composantes de $M - \tau$ n'est pas un triangle, τ ne porte pas de feuilletage n'ayant que des singularités à 3 séparatrices et sans liaison entre elles. Or, de tels feuilletages sont denses dans $\mathfrak{M}\mathfrak{F}$ par la minimalité de l'action de $\pi_0 \text{ Diff } M$ sur $\mathcal{P}\mathfrak{M}\mathfrak{F}$ ([FLP], exposé 6). Donc $\mathfrak{M}\mathfrak{F}(\tau)$ ne contient pas d'ouvert de $\mathfrak{M}\mathfrak{F}$. \square



III.2. On dira qu'un ouvert de $\mathcal{M}\mathcal{F}$ de la forme $\text{int}(\mathcal{M}\mathcal{F}(\tau))$ est un ouvert porté par un réseau ferroviaire. On a d'abord la proposition suivante :

PROPOSITION. On peut recouvrir $\mathcal{M}\mathcal{F}$ par un nombre fini d'ouverts portés par des réseaux ferroviaires.

Démonstration. Il faut voir d'abord qu'il existe au moins un réseau ferroviaire maximal admissible. Pour une surface de genre 2, on regardera celui de la figure 14, où l'on a une seule équation à vérifier pour les poids des arêtes, admettant des solutions > 0 (par exemple le poids 1 sur toutes les arêtes). On peut facilement construire de tels exemples pour des surfaces de genre quelconque.

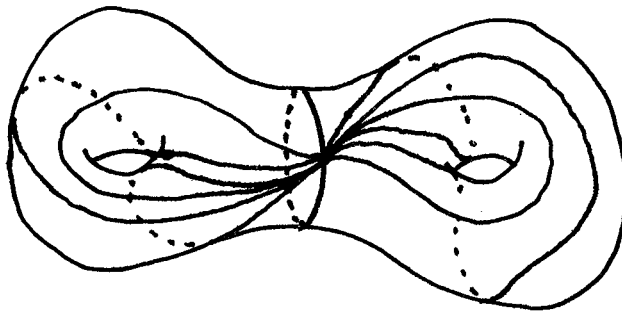


Figure 14

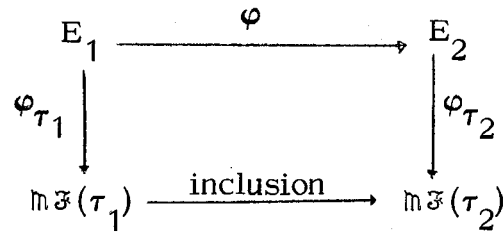
D'un autre côté, on peut partir d'un feuilletage dont toutes les singularités sont à 3 séparatrices et construire, par éclatement des arêtes et en prenant un spine de la surface feuilletée obtenue, un réseau ferroviaire qui sera admissible et maximal (on utilisera une telle construction au chapitre 2). Soit τ un tel réseau ferroviaire.

D'après la minimalité de l'action de $\pi_0 \text{Diff}(M)$ sur $\mathcal{P}\mathcal{M}\mathcal{F}$ et l'invariance de $\mathcal{M}\mathcal{F}(\tau)$ par l'action de R_+ , l'orbite par $\pi_0 \text{Diff}(M)$ de $\mathcal{M}\mathcal{F}(\tau)$ recouvre $\mathcal{M}\mathcal{F}$ tout entier. Pour réduire ces ouverts à un nombre fini, on remarque encore une fois l'invariance d'un ouvert porté par un réseau ferroviaire par l'action de R_+ et on utilise la compacité de la sphère $\mathcal{P}\mathcal{M}\mathcal{F}$. \square

III.3. Etant donné un réseau ferroviaire maximal τ , nous avons défini un cône fermé E et une application $\varphi_\tau : E \rightarrow \mathcal{M}\mathcal{F}$ telle que la restriction de φ_τ à $\text{int} E$ soit un paramétrage d'un ouvert de $\mathcal{M}\mathcal{F}$. L'ensemble des applications ainsi définies forme un atlas de $\mathcal{M}\mathcal{F}$. Nous montrerons que cet atlas munit l'espace $\mathcal{M}\mathcal{F}$ d'une structure PL. On a d'abord le lemme suivant :

LEMME. Soient τ_1 et τ_2 deux réseaux ferroviaires admissibles tels que $\tau_1 \prec \tau_2$. On a alors $\mathcal{M}\mathcal{F}(\tau_1) \subset \mathcal{M}\mathcal{F}(\tau_2)$ et si $\varphi_{\tau_1} : E_1 \rightarrow \mathcal{M}\mathcal{F}(\tau_1)$ et $\varphi_{\tau_2} : E_2 \rightarrow \mathcal{M}\mathcal{F}(\tau_2)$ sont les applications associées à τ_1 et τ_2 , on a une application linéaire φ (pour les

structures polyédrales de E_1 et E_2) et un diagramme commutatif :



Démonstration. Soit V un voisinage adapté de τ_2 , muni de son feuilletage par les traverses. Par définition, τ_1 est isotope à un réseau ferroviaire contenu dans V et transverse aux traverses. Comme $m\mathfrak{F}(\tau_1)$ est invariant par isotopie de τ_1 , on suppose que τ_1 est lui-même contenu dans V et transverse aux traverses.

Pour chaque arête b_i de τ_2 , fixons une traverse T_i correspondant à un point de l'intérieur de cette arête. (Par exemple, on fixe une métrique sur τ_2 et on prend les traverses passant par les milieux des arêtes.) Par position générale, on peut supposer que les aiguillages de τ_1 ne se trouvent sur aucune traverse T_i .

Soient maintenant a_1, \dots, a_{N_1} et b_1, \dots, b_{N_2} les arêtes respectivement de τ_1 et τ_2 , de sorte que E_1 et E_2 soient définis comme des cônes respectivement dans $R_+^{N_1}$ et $R_+^{N_2}$.

Un élément de E_1 s'écrit $\sum_{i=1}^{N_1} \mu(a_i) a_i$ et correspond à un feuilletage \mathfrak{F}_1 porté par τ_1 , obtenu par recollement de rectangles parallèles aux arêtes de τ_1 ; la mesure transverse d'un rectangle parallèle à l'arête a_i de τ_1 est égale à $\mu(a_i)$ (cf. I.2).

On peut supposer que le support de \mathfrak{F}_1 est contenu dans V et que \mathfrak{F}_1 est transverse aux traverses de V . On considère alors le feuilletage partiel \mathfrak{F}_2 de V obtenu à partir de \mathfrak{F}_1 en recollant, au voisinage de chaque traverse T_i , les rectangles qui la coupent :

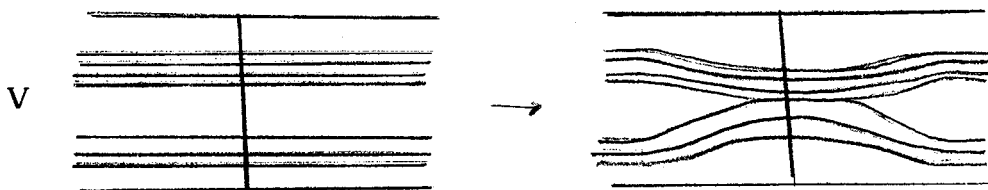


Figure 15

$V - \text{supp } \mathfrak{F}_2$ contient éventuellement des bigones que les traverses de τ_2 permettent d'écraser.

On en déduit facilement que \mathfrak{F}_2 est équivalent à un feuilletage porté par τ_2 et correspondant à une mesure sur τ_2 dont le poids attribué à une arête b_i de τ_2

est égal à $\sum_{j=1}^{N_1} A_{ij} \mu(a_j)$, où A_{ij} désigne le nombre de fois que l'arête a_j coupe la transverse b_i .

Si $\Phi: R^{N_1} \rightarrow R^{N_2}$ est maintenant l'application linéaire qui, à un élément a_i de la base de R^{N_1} associe le vecteur $\sum_{j=1}^{N_2} A_{ji} b_j$ de R^{N_2} , elle induit une application linéaire $\varphi: E_1 \rightarrow E_2$ qui, via φ_{τ_1} et φ_{τ_2} , induit une application de $\mathfrak{M}\mathfrak{F}(\tau_1)$ dans $\mathfrak{M}\mathfrak{F}(\tau_2)$ qui est l'inclusion. \square

III.4. Soit τ un réseau ferroviaire admissible maximal, V_τ un voisinage adapté de τ muni d'un feuilletage \mathfrak{F}_τ par les traverses, et soit (\mathfrak{F}, μ) un élément de $\text{int } \mathfrak{M}\mathfrak{F}(\tau)$. (\mathfrak{F}, μ) admet donc un représentant \mathfrak{F}_τ dont le support est V_τ , tangent au bord de V_τ et transverse à \mathfrak{F}_τ .

Nous fixons encore du vocabulaire, utile pour le reste de ce chapitre.

Pour une telle donnée, on appelle rectangle maximal la donnée d'un rectangle au sens des deux feuilletages transverses, les \mathfrak{F}_τ -côtés étant dans le bord de V_τ et ne contenant pas de pointe de V_τ dans leur intérieur, et les \mathfrak{F} -côtés contenant chacun au moins une pointe de V_τ (figure 17). En d'autres termes, V_τ étant regardé comme un "épaissement" de τ , un rectangle maximal correspond à l'épaissement d'une arête. L'ensemble de ces rectangles maximaux est en correspondance biunivoque avec les arêtes de τ , et V_τ est recouvert par un système fini unique de tels rectangles.

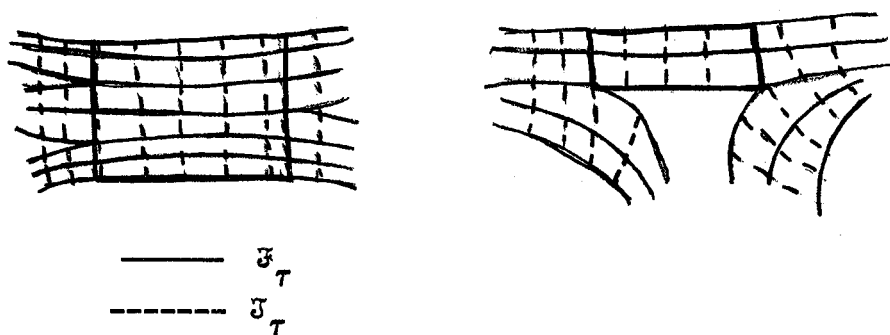


Figure 17

Nous prenons une métrique plate sur V_τ (avec singularités sur le bord) en fixant les longueurs (ou \mathfrak{F}_τ -mesures) des rectangles maximaux, la largeur (ou \mathfrak{F} -mesure) ayant déjà été fixée par la mesure sur τ correspondant à (\mathfrak{F}, μ) (cf. I.2). Le feuilletage \mathfrak{F}_τ devient mesuré.

III.4.1. PROPOSITION. Pour tout $a > 0$ donné, il existe un système $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$

de réseaux ferroviaires admissibles maximaux tel que $\bigcup_{i=1}^k \mathfrak{m}\mathfrak{F}(\sigma_i)$ soit un voisinage de (\mathfrak{F}, μ) dans $\mathfrak{m}\mathfrak{F}$ et tel que $\forall i, \sigma_i$ soit isotope à un réseau ferroviaire plongé dans V_τ transversalement à \mathfrak{F}_τ , et faisant en chaque point un angle $< \alpha$ avec la feuille de \mathfrak{F}_τ passant par ce point.

Démonstration. Soit \mathfrak{F}^* le feuilletage obtenu à partir de \mathfrak{F}_τ en décollant \mathfrak{F}_τ le long de toutes les liaisons entre les pointes. Ce décollement se fait suivant un modèle bien précis dans un voisinage de chaque liaison (figure 18), de sorte que le support de \mathfrak{F}^* est contenu dans V_τ et transverse à \mathfrak{F}_τ ; \mathfrak{F}_τ induit sur \mathfrak{F}^* un feuilletage par segments :

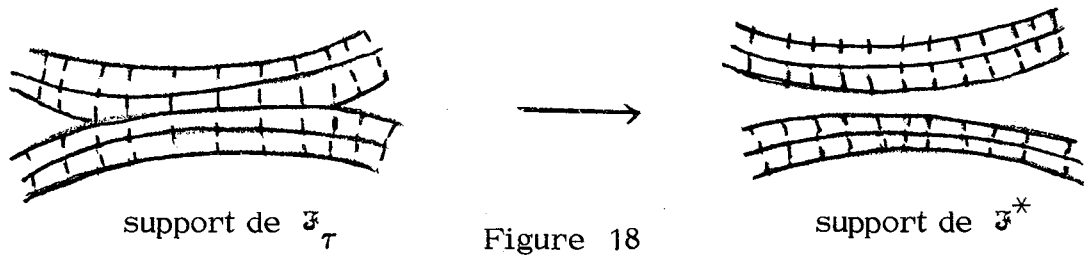


Figure 18

Une composante connexe de \mathfrak{F}^* sera alors de l'un des deux types suivants :

- 1° Soit un anneau lisse, feuilleté par des cercles ;
- 2° Soit une composante minimale, c'est-à-dire sans liaison entre les pointes et où toute demi-feuille n'aboutissant pas sur une pointe est dense.

Soit L un nombre > 0 donné et soit \mathfrak{F}' une composante minimale de \mathfrak{F}^* .

En écartant \mathfrak{F}' suivant ses pointes (la construction précise suit, voir la figure 20), on va définir un feuilletage \mathfrak{F}''' dont le support est contenu dans celui de \mathfrak{F}' , sur lequel \mathfrak{F}_τ induit un feuilletage par des segments transverses, tel que les rectangles maximaux de cette structure soient tous de \mathfrak{F}_τ -mesure $> L$. Un réseau ferroviaire portant \mathfrak{F}''' (et \mathfrak{F}') peut être obtenu comme une réalisation du quotient du collapse de \mathfrak{F}''' le long des traverses ; ce réseau ferroviaire sera une "approximation de \mathfrak{F}' " en ce sens que pour L assez grand, il est isotope à un réseau ferroviaire portant \mathfrak{F}' et faisant un angle très petit avec les feuilles de \mathfrak{F}' .

Plus précisément, pour chaque pointe P de \mathfrak{F}' , soit L_P un segment d'origine P contenu dans la feuille de \mathfrak{F}' issue de P pointant vers l'intérieur de \mathfrak{F}' et dont la \mathfrak{F}_τ -mesure est égale à L . Pour tout P soit R_P un rectangle, au sens des deux feuilletages transverses, d'âme L_P , et tel que ces rectangles soient deux à deux disjoints (voir figure 19).

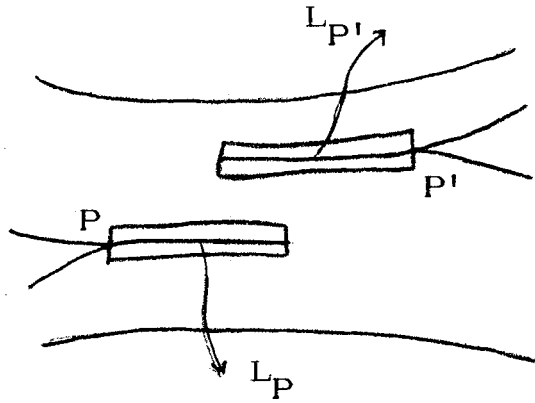


Figure 19

Choisissons une pointe P_1 de \mathfrak{F}' et appelons ℓ_{P_1} la demi-feuille issue de cette pointe. Comme ℓ_{P_1} est dense dans \mathfrak{F}' , il existe un segment M de ℓ_{P_1} , d'origine P_1 , dont l'extrémité Q se trouve à l'extérieur de $\bigcup_P R_P$, sur une traverse correspondant à une pointe de V_τ , et tel que, pour tout rectangle R_P , M rencontre au moins une fois chaque composante connexe de $R_P - L_P$.

Nous écartons le feuilletage \mathfrak{F}' le long de M , pour obtenir un feuilletage mesuré \mathfrak{F}'' , dont le support est contenu dans celui de \mathfrak{F}' , transversal aux traverses de \mathfrak{J}_τ et équivalent à (\mathfrak{F}, μ) comme élément de $\mathfrak{m}\mathfrak{F}$. Le bord de \mathfrak{F}'' contient deux segments qui proviennent du dédoublement de M . Le mouvement d'écartement se fait dans un voisinage de M qui ne touche le bord de \mathfrak{F}' que dans un petit voisinage de P_1 (voir figure 20).

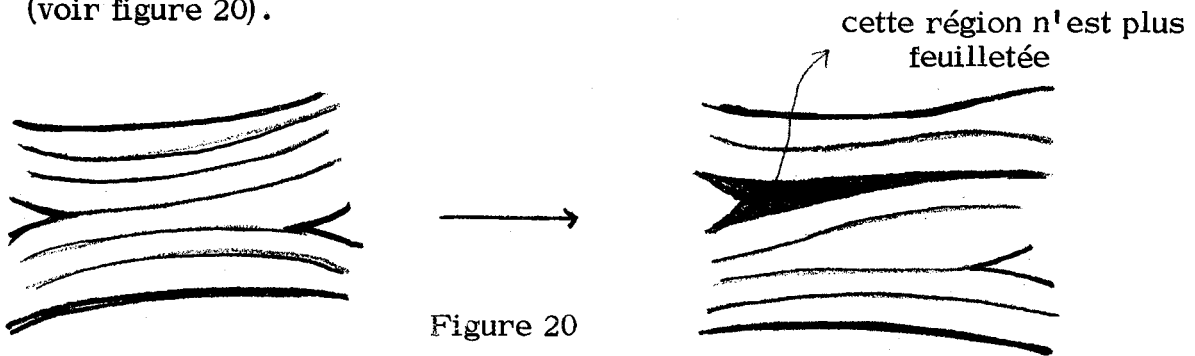
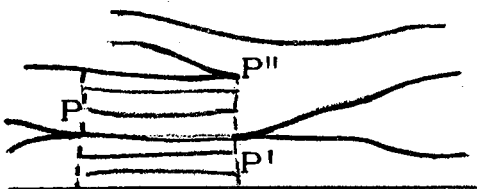


Figure 20

Soit V'' le support de \mathfrak{F}'' et \mathfrak{J}'' le feuilletage par segments induit par \mathfrak{J}_τ sur V'' . Remarquons que les pointes de V'' sont constituées par $\{Q\} \cup \{\text{les pointes de } P\} \setminus \{P_1\}$.

Il existe deux types de rectangles maximaux dans \mathfrak{F}'' :

1er cas. Un tel rectangle contient au moins une pointe P rentrante (voir figure 21) distincte de Q (c'est-à-dire que P est une ancienne pointe de V_τ)



(P et P' sont des pointes rentrantes, et P'' sortante, par rapport au rectangle maximal considéré)

Figure 21

Dans ce cas, le rectangle contient, par construction, le segment L_P associé à P , de mesure transverse L par rapport à \mathfrak{F}_τ . La \mathfrak{F}_τ -mesure de ce rectangle est donc au moins égale à L .

2e cas. Le rectangle maximal ne contient pas de pointe rentrante autre que Q (figure 22).

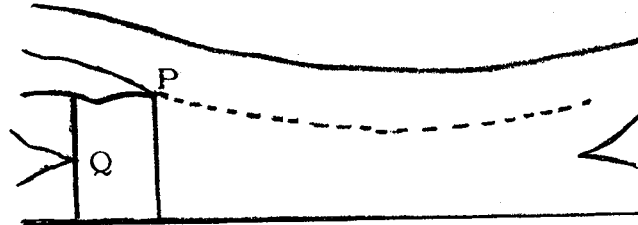


Figure 22

Pour chaque rectangle du 2e cas, on ouvre le feuilletage \mathfrak{F}'' le long d'une pointe sortante différente de Q (figure 23) jusqu'à rencontrer la 1re traverse correspondant à une pointe. Le feuilletage de la figure 22 devient celui de la figure 23.

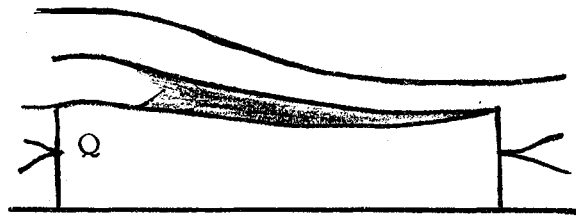


Figure 23

D'après le 1er cas, le rectangle maximal de \mathfrak{F}'' dans lequel rentre P a une \mathfrak{F}_τ -mesure $\geq L$.

On vérifie alors que le feuilletage \mathfrak{F}''' ainsi obtenu a tous ses rectangles maximaux de \mathfrak{F}_τ -mesure $\geq L$.

Sur le bord du support de \mathfrak{F}''' , on a un certain nombre d'arcs $\{L_1, \dots, L_\ell\}$ marqués par la coupure \mathfrak{F}_τ à \mathfrak{F}^* et correspondant donc aux liaisons entre les points de \mathfrak{F}_τ . Ces arcs n'ont pas été affectés par les mouvements d'écartement considérés.

On considère un segment L' du bord de \mathfrak{F}''' qui joint une extrémité d'un arc L_i à une pointe de \mathfrak{F}''' .

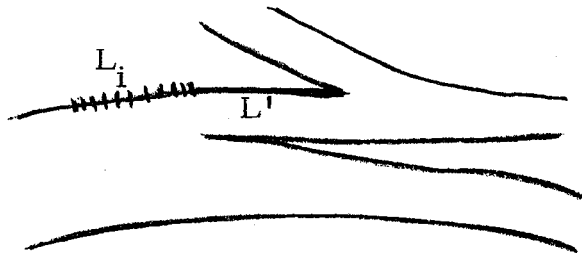
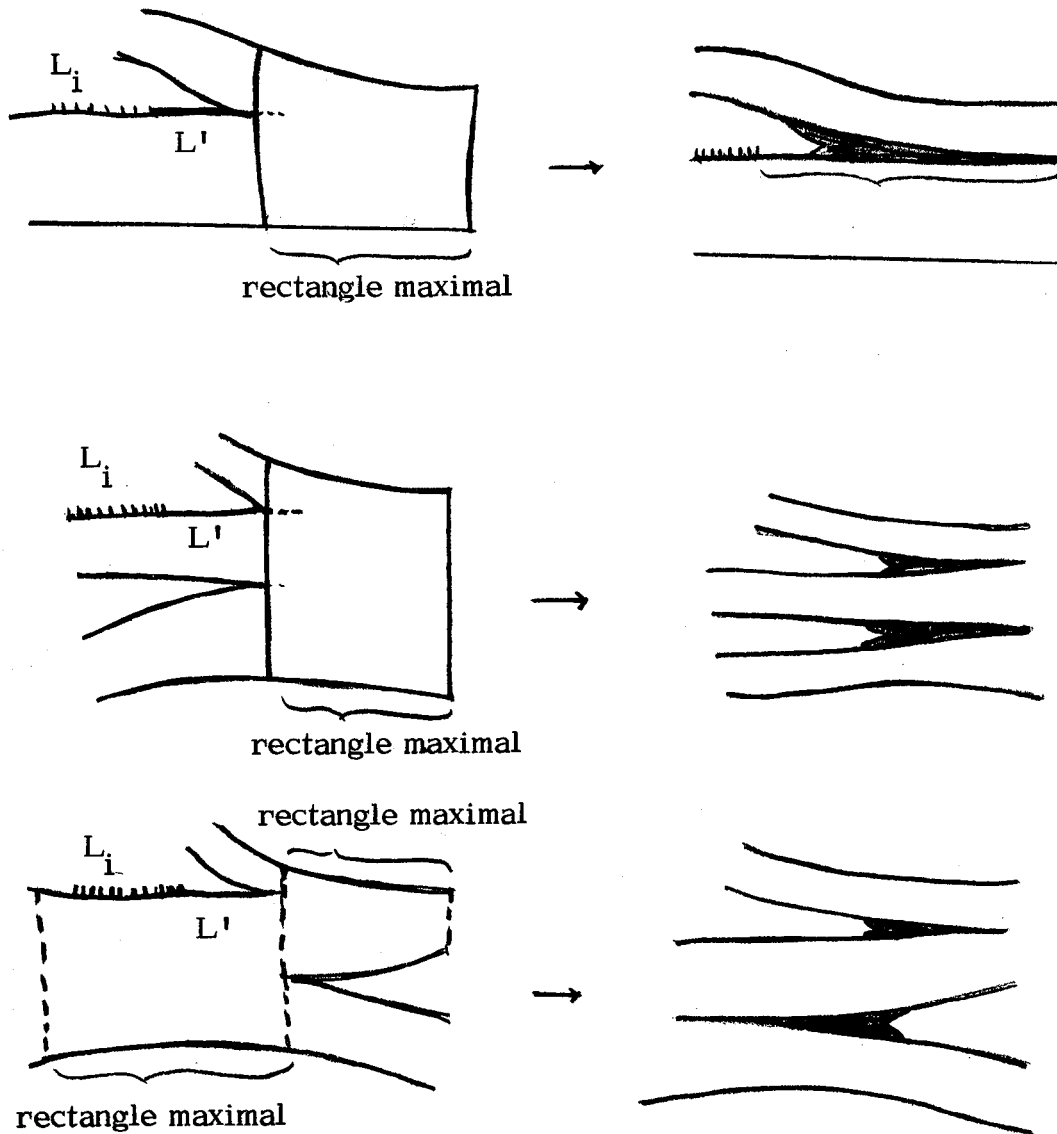


Figure 24

En ouvrant éventuellement sur une ou deux pointes le long d'un arc traversant un rectangle maximal, on se ramène au cas où l'arc L' est le bord d'un rectangle (au sens du couple $(\mathfrak{F}_\tau, \mathfrak{F}''')$), dont l'autre \mathfrak{F}''' -côté est sur le bord du support de

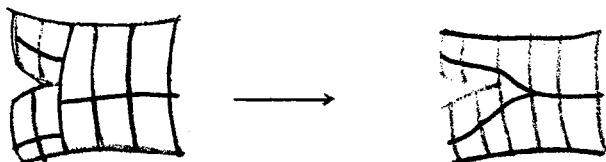
\mathfrak{F}''' et dont la \mathfrak{F}_τ -mesure est $\geq L$.

Les cas de figure sont donnés dans les figures ci-dessous :



On fait une telle opération pour chaque arc du type L' . Ces opérations sont compatibles les unes avec les autres pour nous ramener au cas où \mathfrak{F}''' a les propriétés requises ci-dessus. $\{\mathfrak{F}'_i\}_{i \in I}$ étant l'ensemble des composantes minimales de \mathfrak{F}^* , soient $\{\mathfrak{F}'''_i\}_{i \in I}$ l'ensemble des composantes minimales obtenues comme ci-dessus, \mathfrak{F}'''_i étant obtenu à partir de \mathfrak{F}'_i comme on a obtenu \mathfrak{F}''' à partir de \mathfrak{F}' .

Pour chaque $\mathfrak{F}_i^{\text{III}}$, on considère l'espace K_i quotient de $\text{Supp } \mathfrak{F}_i^{\text{III}}$ par la relation d'équivalence qui identifie en un point chaque segment de $\mathfrak{F}_\tau | \text{Supp } \mathfrak{F}_i^{\text{III}}$. Appelons $\pi_i : \text{Supp } \mathfrak{F}_i^{\text{III}} \rightarrow K_i$ la projection et soit $\sigma_i : K_i \rightarrow \text{Supp } \mathfrak{F}_i^{\text{III}}$ une section de π_i , continue sauf aux points de K_i correspondant aux traverses passant par des pointes. On recolle les morceaux de $\sigma_i(K_i)$ en faisant l'opération suivante pour chaque arête de $\mathfrak{F}_\tau | \text{Supp } \mathfrak{F}_i^{\text{III}}$ correspondant à une pointe :



On obtient un réseau ferroviaire τ_i dans $\text{Supp } \mathfrak{F}_i^{\text{III}}$, transverse à \mathfrak{F}_τ , et $\text{Supp } \mathfrak{F}_i^{\text{III}}$ muni d'un feuilletage par les traverses induit par \mathfrak{F}_τ apparaît comme un voisinage adapté de τ_i .

Soit \mathfrak{F}_τ , le feuilletage obtenu en recollant les $\mathfrak{F}_i^{\text{III}}$ entre eux et avec les composantes annulaires de \mathfrak{F}^* le long des arcs $\{L_1, \dots, L_\ell\}$ marqués sur le bord de leurs supports par la coupure de \mathfrak{F}_τ à \mathfrak{F}^* .

Pour chaque segment recollé, on recolle aussi les réseaux ferroviaires qui se trouvent de part et d'autre de ce segment suivant le modèle de la figure 25. Pour chaque segment du bord recollé, les réseaux ferroviaires correspondants sont recollés en un point (le point P de la figure 25 (ii)). Soit $\mathfrak{n} = \{P_1, \dots, P_N\}$ l'ensemble de ces points.

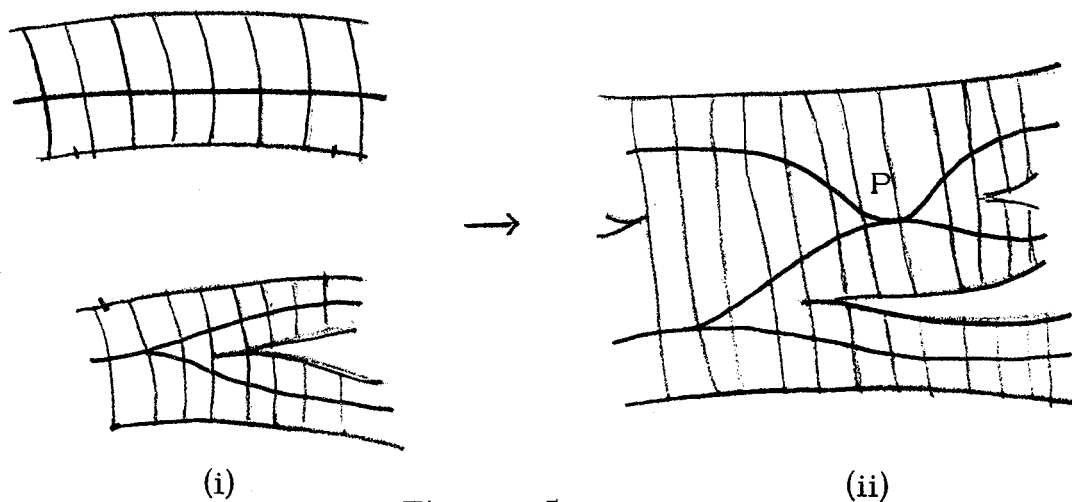



Figure 25

Appelons $V_{\tau'}$ le support de $\mathfrak{F}_{\tau'}$ et τ' le réseau ferroviaire obtenu par ce recollement. $V_{\tau'}$ n'apparaît pas nécessairement comme un voisinage adapté de τ' , mais chaque composante de $M - V_{\tau'}$ est difféomorphe à une composante de $M - \tau'$. Une telle composante est d'autre part difféomorphe à une composante de

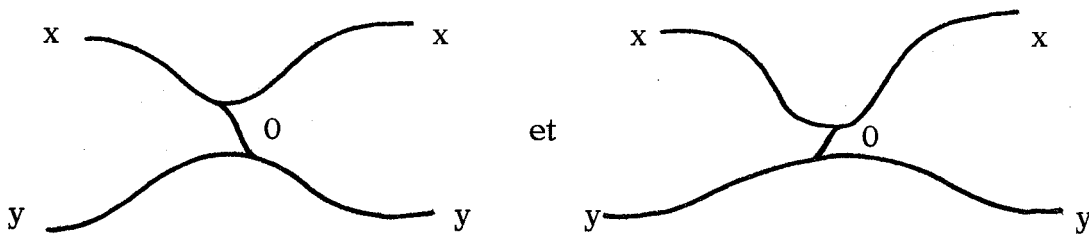
$M - V_{\tau}$ et est donc un triangle. $\mathfrak{F}_{\tau'}$ est porté par τ' en chargeant toutes les arêtes. On en déduit en particulier que τ' est admissible et maximal et que $(\mathfrak{F}, \mu) \in \text{int } \mathfrak{M}(\tau')$.

Par construction, toute arête de τ' dont les deux extrémités ne sont pas dans l'ensemble \mathfrak{h} a une \mathfrak{F}_{τ} -mesure $\geq L$.

On construit maintenant, à partir de τ' , 2^N réseaux ferroviaires $\{\tau_i\}$, où $N = \text{card } \mathfrak{h}$.

On commence par le point $P_1 \in \mathfrak{h}$. Soit  un voisinage de P_1 dans τ' , où x et y représentent les poids des arêtes correspondantes.

On construit à partir de τ' , deux réseaux ferroviaires en remplaçant le voisinage ci-dessus respectivement par :

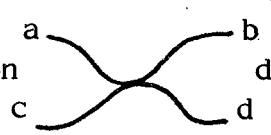




Une telle opération doit se faire de telle sorte qu'un nouveau réseau ferroviaire ainsi obtenu soit encore dans $V_{\tau'}$ et transverse aux traverses.

On refait la même opération pour chacun des nouveaux réseaux ferroviaires obtenus, pour le point P_2 (qu'on retrouve dans chacun de ces deux réseaux ferroviaires). Après N itérations (une pour chaque point $P_i \in \mathfrak{h}$), on obtient $n = 2^N$ réseaux ferroviaires que nous appellerons $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$.

Démontrons d'abord que chaque τ_i est admissible et maximal, et que $(\mathfrak{F}, \mu) \in \text{int } \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{M}(\tau_i)$. Nous donnons la démonstration dans le cas où $n = 2$, le cas général se démontrant de la même manière.

Soient donc τ_1 et τ_2 deux réseaux ferroviaires obtenus à partir de τ'

en remplaçant une configuration  dans τ' respectivement par  et , où a, b, c et d sont ici les noms des arêtes correspondantes.

Si μ' est la mesure de départ sur τ' , on a donc $\mu'(a) = \mu'(b)$. Les composantes de $M - \tau_1$ et de $M - \tau_2$ sont, comme celles de $M - \tau'$, des triangles. Les réseaux ferroviaires τ_1 et τ_2 portent chacun une mesure attribuant un poids non nul à chaque arête. En effet, nous remarquons d'abord que l'équation $a = b$ n'est pas une conséquence des équations définissant l'espace E associé à τ' (voir I.5 pour la définition), car sinon tout feuilletage porté par τ' serait porté par le réseau ferroviaire obtenu

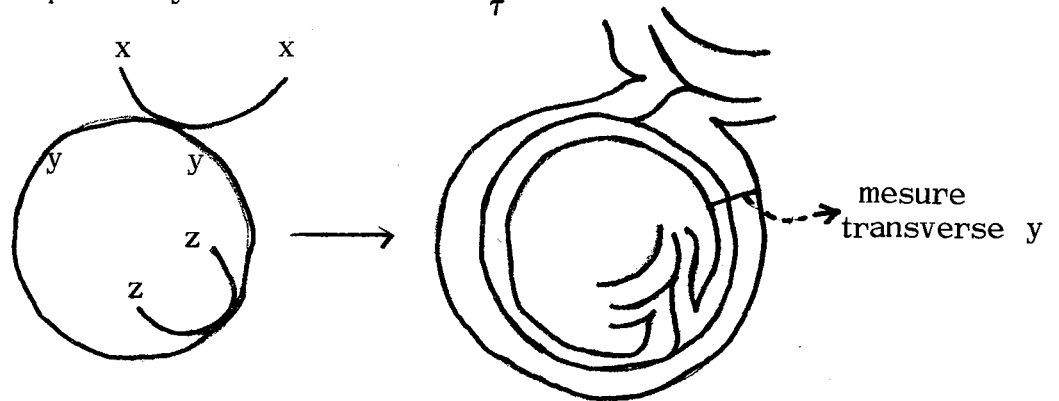
en remplaçant la configuration  par  et ce

nouveau réseau ferroviaire a dans son complémentaire une composante qui n'est pas un triangle ; il ne peut donc pas paramétrer un ouvert de $\mathfrak{M}\mathfrak{F}$ (voir III.1). τ' porte donc des mesures μ'_1 et μ'_2 attribuant chacune un poids non nul à chaque arête et vérifiant respectivement $\mu'_1(a) < \mu'_1(b)$ et $\mu'_2(a) > \mu'_2(b)$.

D'autre part, tout feuilletage porté par τ' et correspondant à une mesure μ telle que $\mu(a) \leq \mu(b)$ (resp. $\mu(a) \geq \mu(b)$) est porté par τ_1 (resp. τ_2). On en déduit que τ_1 et τ_2 sont admissibles et maximaux, et que $\mathfrak{M}\mathfrak{F}(\tau_1) \cup \mathfrak{M}\mathfrak{F}(\tau_2) = \mathfrak{M}\mathfrak{F}(\tau')$ et constitue donc un voisinage de (\mathfrak{F}, μ) dans $\mathfrak{M}\mathfrak{F}$.

L'introduction des arêtes de poids nul nous permet, par isotopie, pour chacun des réseaux $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ de mettre dans les feuilles de \mathfrak{F}_{τ} les arêtes dont les deux extrémités sont des points de \mathfrak{n} .

Il faut vérifier que la mise dans les feuilles des arêtes de ce type est possible pour un cycle de telles arêtes. Or, ceci vient du fait qu'un tel cycle d'arêtes est effectivement pisté par un cycle de feuilles de \mathfrak{F}_{τ} :



(dans la figure ci-dessus, le cycle d'arêtes de poids y correspond à une feuille fermée de \mathfrak{F}_{τ}).

Les réseaux ferroviaires pondérés $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ que nous avons construits vérifient les propriétés suivantes :

- chaque τ_i est admissible et maximal, et $\bigcup_{i=1}^n \mathfrak{M}\mathfrak{F}(\tau_i)$ forme un voisinage de (\mathfrak{F}, μ) dans $\mathfrak{M}\mathfrak{F}$;
- pour tout τ_i , chaque arête vérifie au moins l'une des trois propriétés suivantes :
 - . son poids est nul ;
 - . elle est contenue dans une feuille de \mathfrak{F}_{τ} ;
 - . sa \mathfrak{F}_{τ} -mesure est $\geq L$ (ceci utilise les modifications de \mathfrak{F}''' sur la longueur des segments L' ; cf. ci-dessus, figure 24).

Nous construisons maintenant à partir de $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ des réseaux ferroviaires $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

(A) $\forall i, \sigma_i$ est admissible et maximal, et $\bigcup_{i=1}^k m\mathfrak{F}(\sigma_i)$ est un voisinage de (\mathfrak{F}, μ) dans $m\mathfrak{F}$.

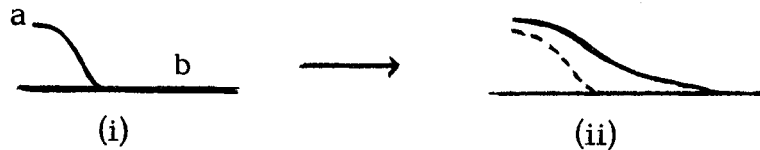
(B) Chaque σ_i est plongé dans V_τ transversalement aux traverses, et $\forall i$, chaque arête de σ_i vérifie l'une des deux conditions suivantes :

- elle est dans une feuille de \mathfrak{F}_τ ;
- sa \mathfrak{F}_τ -mesure est $\geq L$.

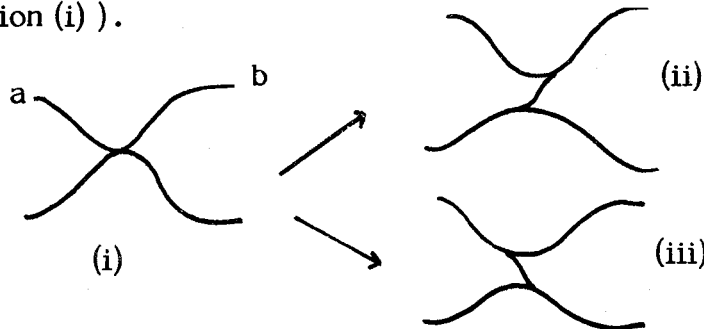
La construction des $\{\sigma_i\}$ se fait par glissement des arêtes de poids nul les unes sur les autres et sur les arêtes de poids non nul.

Plus précisément, nous considérons des opérations des deux types suivants :

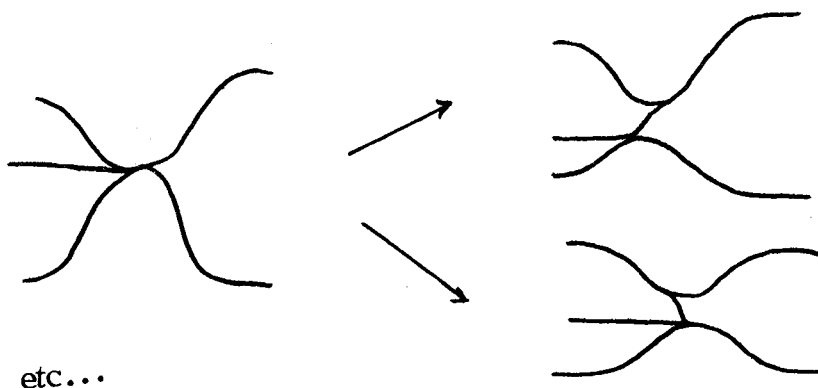
1er type. On remplace la configuration (i) ci-dessous par (ii). L'arête a de poids nul glisse jusqu'à l'extrémité de l'arête b.



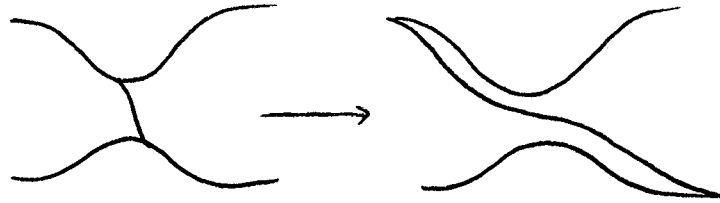
2e type. Dans la configuration (i) ci-dessous, a est toujours une arête de poids nul. On remplace la configuration (i) par la configuration (ii) ou (iii) ou ((ii) et (iii)) (dans ce dernier cas, on augmente d'une unité les réseaux ferroviaires considérés) suivant que l'équation $a \geq b$ ou $a \leq b$ ou aucune des deux est une conséquence des équations définissant le cône associé au réseau ferroviaire considéré (contenant la configuration (i)).



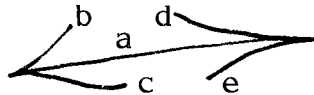
On considère aussi des opérations plus générales que celles du type 2, pour des aiguillages plus compliqués (a est toujours de poids nul) :



Pour définir les $\{\sigma_i\}$, on commence à l'aide d'opérations du type 1 à faire glisser les arêtes de poids nul des τ_i jusqu'aux extrémités des arêtes de poids non nul qu'elles rencontrent.



Je dis qu'après un nombre fini d'opérations du type 1 et 2 ci-dessus, on obtient des réseaux ferroviaires $\{\sigma_i\}$ vérifiant la propriété (B) recherchée. En effet, ces opérations ne font qu'augmenter les \mathfrak{F}_τ -mesures des arêtes ; Les arêtes de poids non nul sont dans les feuilles ou bien ont une \mathfrak{F}_τ -mesure $\geq L$. La seule obstruction pour augmenter, à l'aide de ces deux types d'opérations, la \mathfrak{F}_τ -mesure d'une arête a de poids nul (d'une quantité au moins égale à une quantité > 0 fixée à l'avance, par exemple la plus petite \mathfrak{F}_τ -mesure entre les traverses correspondant aux aiguillages de τ') est le cas où l'arête a est "coincée" entre des arêtes b, c, d, e de poids non nul :



Mais aucune de ces arêtes n'est alors dans les feuilles, et l'arête a a glissé le long d'au moins l'une d'entre elles. Vu la précaution qu'on a pris plus haut (sur les segments du type L' de la figure 24), la mesure de l'arête a est $\geq L$. La condition (B) pour le système $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ est donc vérifiée.

La condition (A) se vérifie de même que pour les réseaux $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$; on ne répètera pas l'argument.

Nous montrons maintenant que les réseaux ferroviaires $\{\sigma_i\}$ vérifient les propriétés de l'énoncé III.4.1. :

Pour chaque i , chaque arête du réseau ferroviaire σ_i traverse un rectangle (au sens des feuilletages \mathfrak{F}_τ et $\mathfrak{F}_{\tau'}$) dans V_τ de \mathfrak{F}_τ -mesure $\geq L$. Pour un choix de L assez grand, chaque σ_i est donc isotope à un réseau ferroviaire faisant en chaque point un angle $< \alpha$ avec la feuille de \mathfrak{F}_τ passant par ce point ; ce qui démontre la proposition. \square

Remarque. La démonstration de la proposition précédente montre que si \mathfrak{F}_τ n'a pas de liaison entre ses singularités, le système $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ de l'énoncé est réduit à un système $\{\sigma_i\}$ à un seul élément.

III.4.2. PROPOSITION. Soient τ_1 et τ_2 deux réseaux ferroviaires maximaux tels que $\text{int } \mathfrak{M}\mathfrak{F}(\tau_1) \cap \text{int } \mathfrak{M}\mathfrak{F}(\tau_2)$ soit non vide, et soit (\mathfrak{F}, μ) un élément de cette intersection. Soit V_1 (resp. V_2) un voisinage adapté de τ_1 (resp. τ_2) muni d'un feuilletage par les traverses, et d'un feuilletage \mathfrak{F}_1 (resp. \mathfrak{F}_2) transverse aux traverses et représentant (\mathfrak{F}, μ) . Soit $\varphi_{\tau_1} : E_1 \rightarrow \mathfrak{M}\mathfrak{F}(\tau_1)$ (resp. $\varphi_{\tau_2} : E_2 \rightarrow \mathfrak{M}\mathfrak{F}(\tau_2)$) l'application de coordonnées associées à τ_1 (resp. τ_2) (voir I.5). Si \mathfrak{F}_1 est isotope à \mathfrak{F}_2 , l'application $\varphi_{\tau_2}^{-1} \circ \varphi_{\tau_1}$ est PL au voisinage de (\mathfrak{F}, μ) , pour les structures polyédrales E_1 et E_2 associées respectivement aux réseaux ferroviaires τ_1 et τ_2 .

Démonstration. Soit φ un difféomorphisme isotope à l'identité qui envoie V_1 difféomorphiquement sur V_2 , en respectant les feuilletages \mathfrak{F}_1 et \mathfrak{F}_2 . Les fermés V_1 et V_2 étant munis de structures conformes comme on l'a expliqué au début de III.4, il vient de la proposition III.4.1. que, pour tout $a > 0$, il existe un système de réseaux ferroviaires $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ maximaux, vérifiant $\forall i, \sigma_i \prec \tau_1$, tel que $(\mathfrak{F}, \mu) \in \bigcup_{i=1}^k \mathfrak{M}\mathfrak{F}(\sigma_i)$ et tel que, pour tout i , σ_i soit dans V_1 et fasse un angle $\leq a$ avec la feuille de \mathfrak{F}_1 passant par ce point.

Le difféomorphisme φ étant à distorsion bornée, et comme il envoie les feuilles de \mathfrak{F}_1 sur celles de \mathfrak{F}_2 , en choisissant a assez petit, l'image de chaque σ_i par φ fait un angle $< \pi/2$ avec les feuilles de \mathfrak{F}_2 , et est donc transverse aux traverses de V_2 . On a donc $\sigma_i \prec \tau_2$.

En passant par les applications $\{\varphi_{\sigma_i}\}$ associées à $\{\sigma_i\}$, définies au voisinage de (\mathfrak{F}, μ) , il vient directement de III.3 que (\mathfrak{F}, μ) est entouré par des polyèdres sur chacun desquels l'application $\varphi_{\tau_2}^{-1} \circ \varphi_{\tau_1}$ est linéaire. Il s'ensuit que l'application $\varphi_{\tau_2}^{-1} \circ \varphi_{\tau_1}$ est PL au voisinage de (\mathfrak{F}, μ) . \square

Remarque. Il vient de la démonstration de la proposition III.4.2 et de la remarque qui la précède que si $(\mathfrak{F}, \mu) \in \text{int } \mathfrak{M}\mathfrak{F}(\tau_1) \cap \text{int } \mathfrak{M}\mathfrak{F}(\tau_2)$ n'admet que des représentants n'ayant pas de liaison entre singularités, l'application $\varphi_{\tau_2}^{-1} \circ \varphi_{\tau_1}$ est linéaire au voisinage de (\mathfrak{F}, μ) .

Ainsi, $\varphi_{\tau_2}^{-1} \circ \varphi_{\tau_1}$ est localement linéaire sur un sous-espace dense de son domaine de définition constitué par les feuilletages n'ayant que des singularités à trois séparatrices et sans liaison entre elles.

III.4.3. Soient encore τ_1 et τ_2 deux réseaux ferroviaires maximaux et V_1 et V_2 des voisinages adaptés respectifs, munis de leurs feuilletages par les traverses \mathfrak{F}_1 et \mathfrak{F}_2 .

\mathfrak{F}_1 et \mathfrak{F}_2 désignent respectivement des feuilletages de support V_1 et V_2 représentant un élément $(\mathfrak{F}, \mu) \in \text{int } \mathfrak{M}\mathfrak{F}(\tau_1) \cap \text{int } \mathfrak{M}\mathfrak{F}(\tau_2)$.

On dira que l'on peut passer de \mathfrak{F}_1 à \mathfrak{F}_2 par un mouvement de Whitehead élémentaire si on peut passer de \mathfrak{F}_1 à \mathfrak{F}_2 par un mouvement du type décrit par la figure 26. Le mouvement induit l'identité en dehors de la région considérée ; la liaison L_1 entre les pointes de \mathfrak{F}_1 est resplacée par la liaison L_2 entre les pointes de \mathfrak{F}_2 .

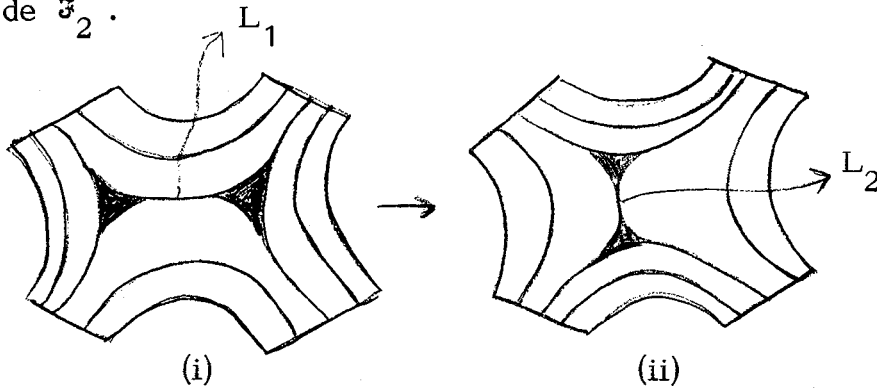


Figure 26

Si \mathfrak{F}_2 est obtenu à partir de \mathfrak{F}_1 par un mouvement de Whitehead élémentaire, on dira que le couple $(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2)$ est dual du couple $(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2)$ par rapport à ce mouvement de Whitehead, si on peut passer de \mathfrak{F}_1 à \mathfrak{F}_2 par un mouvement dont le support coïncide avec celui du mouvement de Whitehead élémentaire, et dont le modèle est décrit par la figure 27.

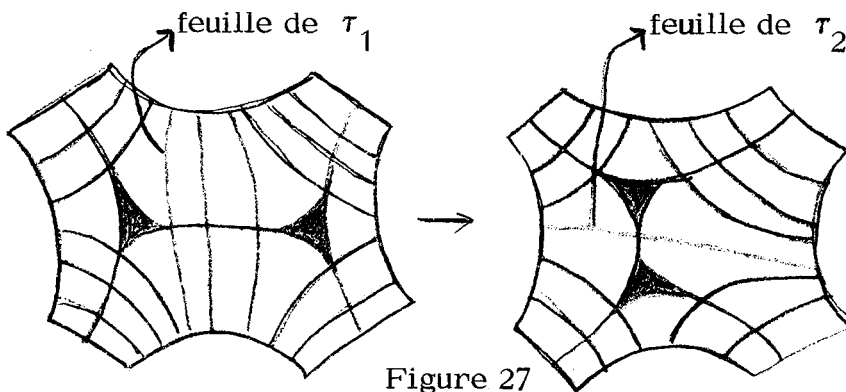
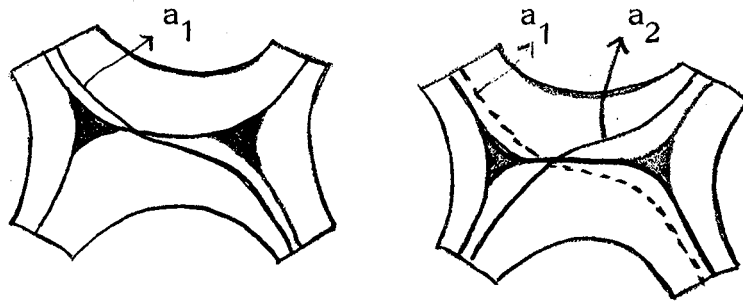


Figure 27

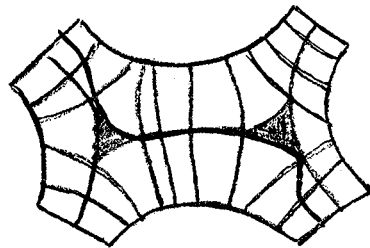
On a alors la proposition suivante :

PROPOSITION. Supposons que les feuilletages \mathfrak{F}_2 et \mathfrak{F}_1 de V_2 et V_1 soient Whitehead élémentairement équivalents et que le couple $(\mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_1)$ soit dual du couple $(\mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_1)$ par rapport à ce mouvement de Whitehead élémentaire. Alors le changement de carte $\varphi_{\tau_2}^{-1} \circ \varphi_{\tau_1}$ est PL au voisinage de (\mathfrak{F}, μ) .

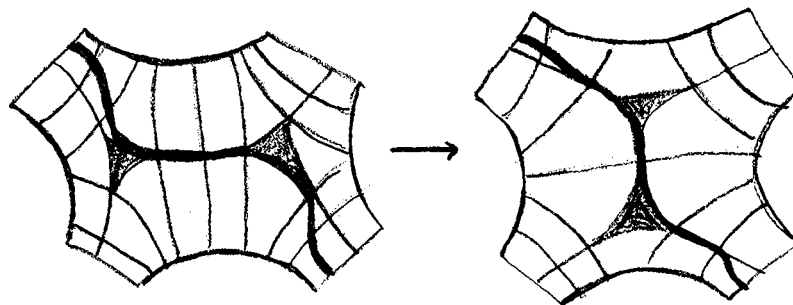
Démonstration. Soit E le support du mouvement de Whitehead élémentaire et L_1 la feuille reliant les 2 pointes en question (figure 26 (i)). En coupant le feuilletage \mathfrak{F}_1 le long de L_1 , on trouve, par une méthode décrite lors de la démonstration de la proposition III.4.1, deux réseaux ferroviaires admissibles maximaux σ_1 et σ_2 , dans V_1 , transverses à \mathfrak{F}_1 , tels que $(\mathfrak{F}, \mu) \in \text{int} \bigcup_{i=1,2} m\mathfrak{F}(\sigma_i)$, et tels que, pour $i = 1$ et 2 , il existe une seule arête a_i de σ_i qui rencontre L_1 , l'intersection des arêtes a_1 et a_2 avec E ayant la configuration suivante :



Remarquons alors que, par isotopie de σ_i , l'arête a_i longe L_1 suivant la figure suivante :



Ceci permet de voir facilement qu'après le mouvement élémentaire de Whitehead considéré, σ_i est isotope (par une isotopie à support dans E) à un réseau ferroviaire transverse à \mathfrak{F}_2 . En effet, l'isotopie pour l'arête a_i est donnée par le schéma suivant :



La trace dans E du complémentaire de a_i dans σ_i est poussée, le long des feuilles de \mathfrak{F}_1 , près du bord de E . Le réseau ferroviaire obtenu est alors transverse à \mathfrak{F}_2 .

On a alors $\sigma_i \prec \tau_1$ et $\sigma_i \prec \tau_2$; la linéarité par morceaux s'en déduit par III.3, comme pour la démonstration de la proposition III.4.2. \square

III.4.4. Les propositions III.4.2 et III.4.3 permettent de démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION. Soient τ_1 et τ_2 deux réseaux ferroviaires maximaux tels que $\text{int } \mathfrak{M}(\tau_1) \cap \text{int } \mathfrak{M}(\tau_2)$ soit non vide, et (\mathfrak{F}, μ) un élément de cette intersection. Alors $\varphi_{\tau_2}^{-1} \circ \varphi_{\tau_1}$ est PL au voisinage de (\mathfrak{F}, μ) , pour les structures polyédrales associées à τ_1 et τ_2 .

Démonstration. Soient \mathfrak{F}_1 et \mathfrak{F}_2 des représentants de (\mathfrak{F}, μ) feuilletant respectivement des voisinages adaptés de τ_1 et τ_2 . On passe de \mathfrak{F}_1 à \mathfrak{F}_2 par un nombre fini de mouvements qui sont alternativement des isotopies et des mouvements de Whitehead élémentaires, ces derniers induisant sur les feuilletages par les traverses des mouvements duaux (définition en III.4.3). La démonstration découle alors de l'application, alternativement, des propositions III.4.2 et III.4.3. \square

COROLLAIRE 1. L'atlas $\{(\text{int } \mathfrak{M}(\tau_i), \varphi_{\tau_i}^{-1} |)\}$ où τ_i parcourt tous les réseaux ferroviaires maximaux, où $\text{int } \mathfrak{M}(\tau_i)$ désigne l'intérieur de l'espace $\mathfrak{M}(\tau_i)$ et $\varphi_{\tau_i}^{-1} |$ la restriction de $\varphi_{\tau_i}^{-1}$ à cet intérieur, munit l'espace \mathfrak{M} d'une structure PL.

COROLLAIRE 2. L'action de $\pi_0(\text{Diff } M)$ sur \mathfrak{M} est PL par rapport à l'atlas décrit ci-dessus.

Démonstration. Un élément $f \in \pi_0 \text{Diff } M$ envoie $\mathfrak{M}(\tau)$ dans $\mathfrak{M}(f(\tau))$ par l'application identité au niveau des espaces des paramètres. \square

CHAPITRE 2

DIFFEOMORPHISMES PSEUDO-ANOSOV

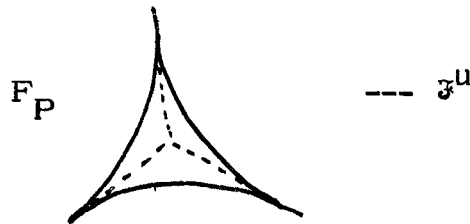
ET AUTOMORPHISMES SYMPLECTIQUES DE L'HOMOLOGIE

IV. DIFFEOMORPHISMES PSEUDO-ANOSOV ET RESEAUX FERROVIAIRES INVARIANTS.

Dans ce paragraphe, on démontre la proposition suivante :

PROPOSITION. Si f est un difféomorphisme pseudo-Anosov, il existe un réseau ferroviaire τ invariant par f (c'est-à-dire tel que $f(\tau) < \tau$) et tel que le feuilletage instable (\mathfrak{F}^u, μ^u) de f soit à l'intérieur de $\mathfrak{m}\mathfrak{F}(\tau)$. De plus, en remplaçant f par l'une de ses puissances, un tel réseau ferroviaire peut être pris maximal.

Démonstration. Pour chaque point singulier P de (\mathfrak{F}^u, μ^u) , on considère un petit voisinage ouvert F_P , difféomorphe à un disque avec des pointes, construit d'après le modèle donné par la figure ci-dessous. F_P est un n -gone (au sens de I.1), où n est le nombre de séparatrices de la singularité P .



$$\text{Posons } u = M - \bigcup_{P \in \text{Sing}} F_P .$$

Le feuilletage stable (\mathfrak{F}^s, μ^s) de f induit sur u un feuilletage transverse au bord (figure 28), et par position générale, on peut supposer que toute demi-feuille qui part d'une pointe du bord de u n'aboutit pas sur une pointe mais à l'intérieur d'un côté. La minimalité du feuilletage \mathfrak{F}^s implique en particulier que toute demi-feuille qui entre dans u en ressort et que $\mathfrak{F}^s|_u$ est un feuilletage par segments compacts.

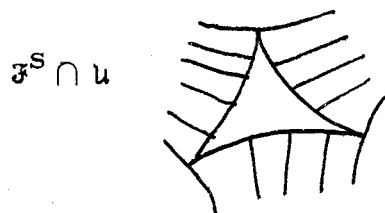


Figure 28

u apparaît ainsi comme le voisinage adapté d'un réseau ferroviaire τ , muni de son feuilletage par les traverses. De façon plus précise, soit K l'espace quotient

de \mathfrak{u} par la relation d'équivalence qui identifie chaque traverse en un point, et $\sigma : K \rightarrow \mathfrak{u}$ une section de la projection de M sur K , continue sur le complémentaire des points de K correspondant aux feuilles passant par les pointes de \mathfrak{u} . On obtient τ à partir de σ en recollant les segments de $\sigma(K)$ suivant le schéma donné par la figure 29 ci-dessous. On fait une telle opération pour chaque pointe de \mathfrak{u} . Une telle construction a déjà été faite au chapitre 1.

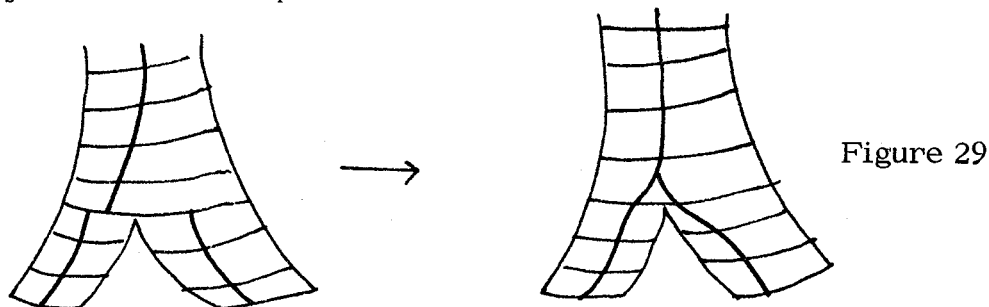


Figure 29

$(\mathfrak{F}^{\mathfrak{u}}, \mu^{\mathfrak{u}})$ est équivalent à un feuilletage mesuré partiel de M , dont le support est \mathfrak{u} , et transverse aux traverses de \mathfrak{u} ; donc $(\mathfrak{F}^{\mathfrak{u}}, \mu^{\mathfrak{u}})$ est porté par τ et correspond à une mesure sur τ dont le poids sur chaque arête est non nul. On a ainsi $(\mathfrak{F}^{\mathfrak{u}}, \mu^{\mathfrak{u}}) \in \text{int } \mathfrak{M}\mathfrak{F}(\tau)$. Comme $f(\mathfrak{F}^{\mathfrak{s}}, \mu^{\mathfrak{s}}) = (\mathfrak{F}^{\mathfrak{s}}, \frac{1}{\lambda} \mu^{\mathfrak{s}})$, $f(\tau)$ est transverse à $\mathfrak{F}^{\mathfrak{s}}$ et évite, dans chaque région F_P , les séparatrices de $\mathfrak{F}^{\mathfrak{u}}$. Par une isotopie le long de $\mathfrak{F}^{\mathfrak{s}}$ dans chaque secteur de F_P (figure 30), $f(\tau)$ est poussé dans \mathfrak{u} , où il devient transverse aux traverses de τ . On a donc $f(\tau) \prec \tau$. Dans la figure 30 ci-dessous, les flèches indiquent les trajectoires de l'isotopie en question.

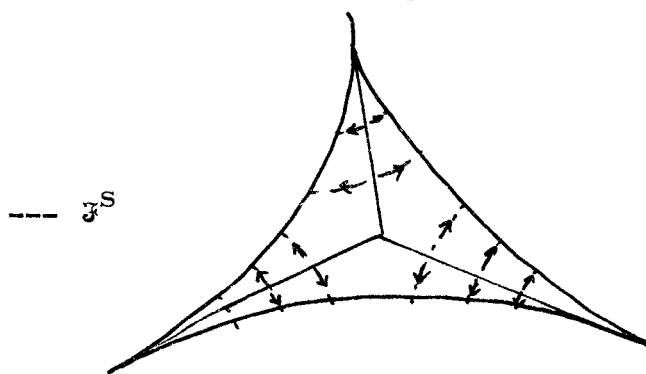


Figure 30

Par construction, les composantes de $M - \tau$ sont des polygones qui sont en correspondance biunivoque avec les singularités de $(\mathfrak{F}^{\mathfrak{u}}, \mu^{\mathfrak{u}})$; le nombre de côtés d'un tel polygone est égal au nombre de séparatrices de la singularité correspondante. On en déduit que si $\mathfrak{F}^{\mathfrak{u}}$ n'a que des singularités à 3 séparatrices, τ est maximal.

Si $\mathfrak{F}^{\mathfrak{u}}$ a des singularités à plus de 3 séparatrices, nous allons trouver un réseau ferroviaire τ' maximal, tel que $(\mathfrak{F}^{\mathfrak{u}}, \mu^{\mathfrak{u}}) \in \text{int } \mathfrak{M}\mathfrak{F}(\tau')$, et une puissance f^n de f telle que $f^n(\tau') \prec \tau'$.

Soit f^n une puissance de f qui fixe chaque singularité et chaque secteur.
 Au voisinage d'une singularité, on a la figure suivante, les flèches indiquant la dynamique sur la séparatrice correspondante :

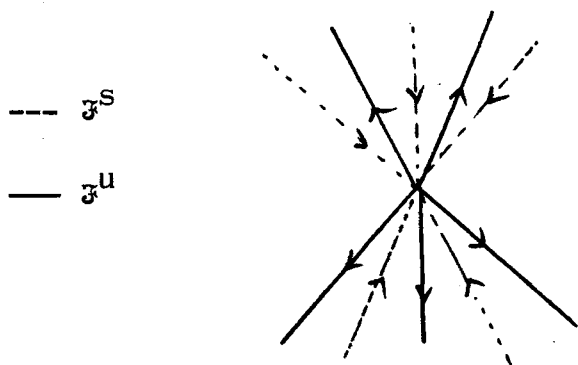


Figure 31



Soit P une singularité de (\mathfrak{F}^u, μ^u) à $n \geq 4$ séparatrices.

Si ℓ_1, \dots, ℓ_n sont, dans un ordre cyclique, les n séparatrices stables de P , considérons pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ différent de 2 et 4, un segment L_i défini de la façon suivante :

$L_i \subset \ell_i$, L_i est d'origine P et d'extrémité un point $P_i \in \tau$, et $L_i \cap \tau$ est réduit à $\{P_i\}$.

Par position générale, on peut supposer qu'aucun des points P_i n'est un aiguillage de τ .

Pour tout P_i , soit s_i un segment de τ , contenant P_i dans son intérieur, ne rencontrant pas d'aiguillage de τ , et vérifiant la condition suivante : $f(s_i) \subset u$ (transversalement à \mathfrak{F}^s) (figure 32). En épaississant éventuellement u , ce choix de s_i peut toujours être réalisé.

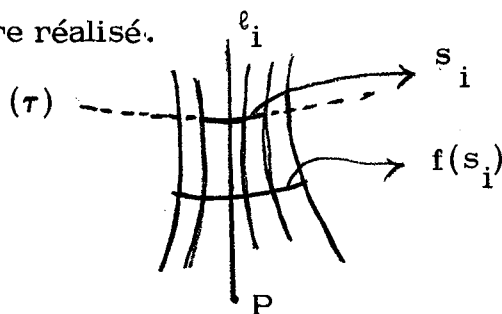


Figure 32

On modifie alors τ au voisinage de $\bigcup_{i \neq 2,4} L_i$ en remplaçant chaque segment s_i par un segment s'_i longeant L_i comme sur la figure 33 ; on recolle entre eux les segments s'_i dans un voisinage de P de telle sorte que le réseau ferroviaire τ' obtenu soit maximal (figure 33).

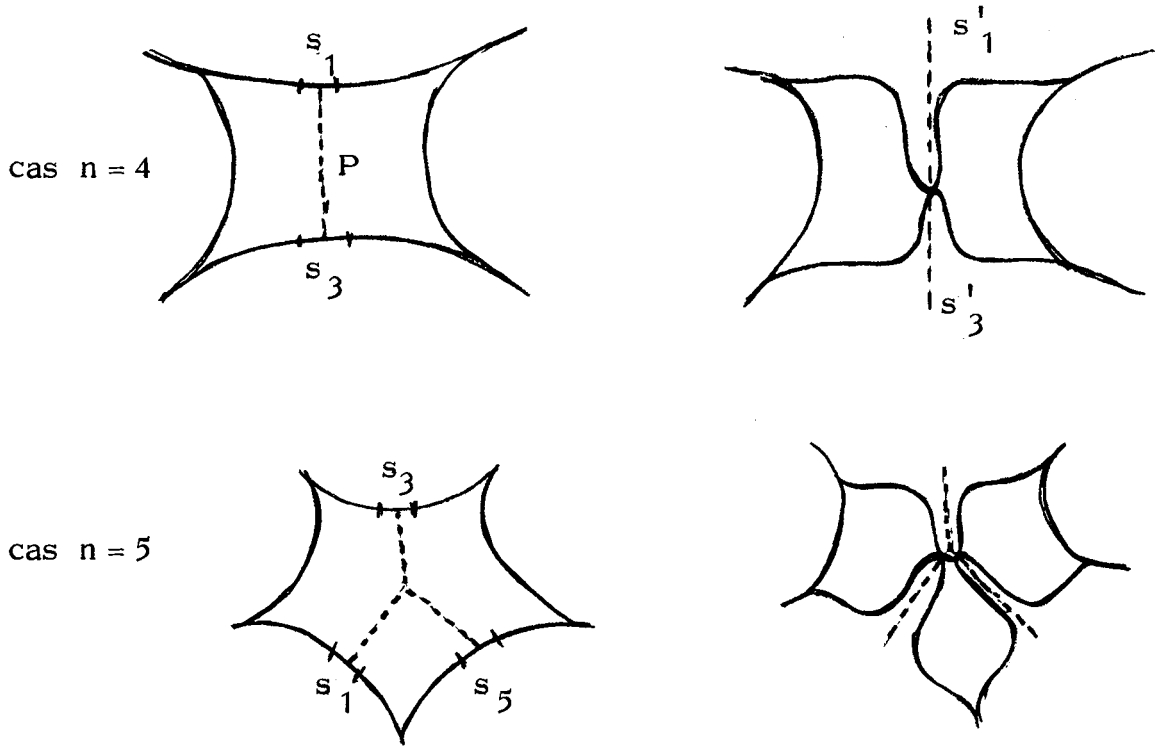


Figure 33

Soit U_P un épaississement de $\cup L_i$ tel que les modifications de τ soient faites à l'intérieur de U_P , et $V_P \supset U_P$ un épaississement plus large (figure 34), tel que $f(U_P) \subset V_P$. De plus, quitte à prendre les segments s_i assez petits, V_P est supposé avoir les propriétés suivantes :

V_P rencontre u suivant $n-2$ figures telles que celles données figure 35 ; dans cette figure, le feuilletage vertical est dans \mathfrak{F}^S , les côtés supérieur et inférieur sont respectivement les projections de $f(s_i)$ sur τ et sur le bord de u , le long des feuilles de \mathfrak{F}^S . Appelons s_i^* le côté supérieur et $s_i'' = s_i^* - s_i$.

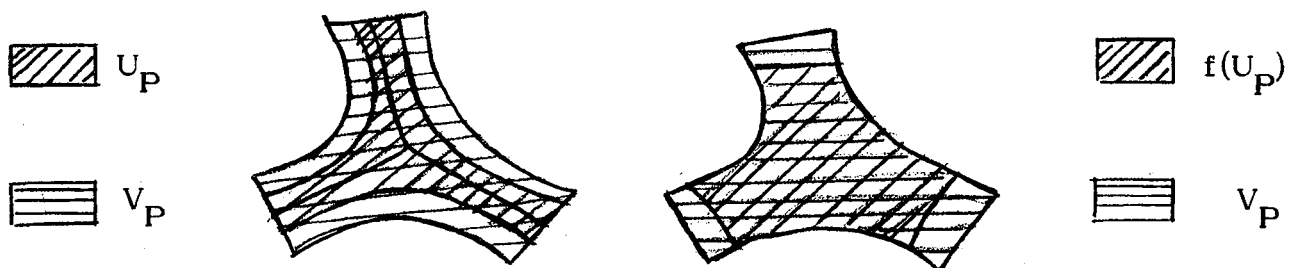


Figure 34

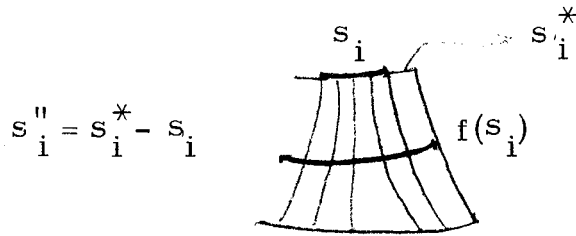


Figure 35

Soit u' un voisinage adapté de τ' muni d'un feuilletage par les traverses. On choisit u' de telle sorte que $u' \supset V_P$, $u' \supset u$ et tel que les traverses de u soient contenues dans les traverses de u' (figure 36).

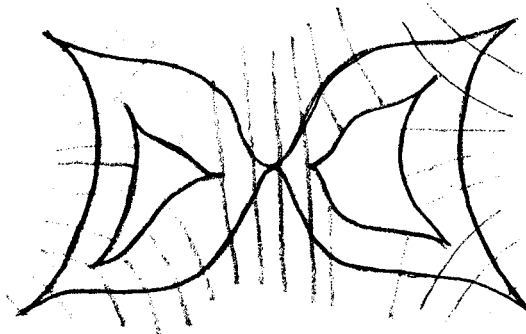


Figure 36

Vérifions que l'on a $f(\tau') \prec \tau'$.

Regardons d'abord les régions telles que celles de la figure 35. Si une branche de $f(\tau')$ traverse cette région entre s_i et $f(s_i)$, elle est transverse à \mathfrak{F}^S car elle est contenue dans $f(\tau)$. On pousse alors toutes ces branches le long de \mathfrak{F}^S , par isotopie, au-delà de s_i .

Remarquons maintenant que s_i' et $f(s_i')$ intersectent une des régions dessinées dans la figure 35, comme dans la figure 37 ci-dessous, et qu'il existe une isotopie g dans V_P qui envoie $f(s_i')$ sur $s_i' \cup s_i''$. Au voisinage des bords verticaux de la figure 37, l'isotopie g se fait le long des feuilles de \mathfrak{F}^S .

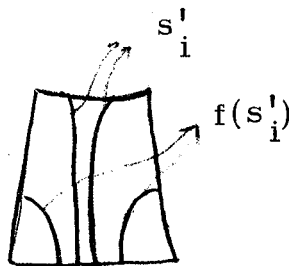


Figure 37

L'isotopie g entre $f(s_i')$ et $s_i' \cup s_i''$ se prolonge en une isotopie de $f(\tau')$ sur un réseau ferroviaire dans u' transverse aux traverses de u' .

En effet, $f(\tau') - \bigcup_i f(s_i')$ est contenu dans $f(\tau)$. Il ne rencontre pas $f(U_P)$ ni les segments des séparatrices de \mathfrak{F}^u contenues dans les régions F_P . On le pousse dans u le long des feuilles de \mathfrak{F}^S , où il devient transverse aux traverses de u , et par conséquent transverse aux traverses de u' . Remarquer que $f(\tau') - \bigcup_i f(s_i')$

ne rencontre pas les segments de \mathcal{F}^S joignant les segments de séparatrices de \mathcal{F}^U à $f(U_P)$ (voir les 4 régions R_i sur la figure 38), car sinon, par transversalité à \mathcal{F}^S , $f(\tau') - \bigcup_i f(s_i')$ rencontrerait $f(U_P)$, ce qui est absurde. On en déduit que l'isotopie de $f(\tau') - \bigcup_i f(s_i')$ est compatible avec l'isotopie g de $\bigcup_i f(s_i')$, ce qui démontre que $f(\tau') \prec \tau'$. \square

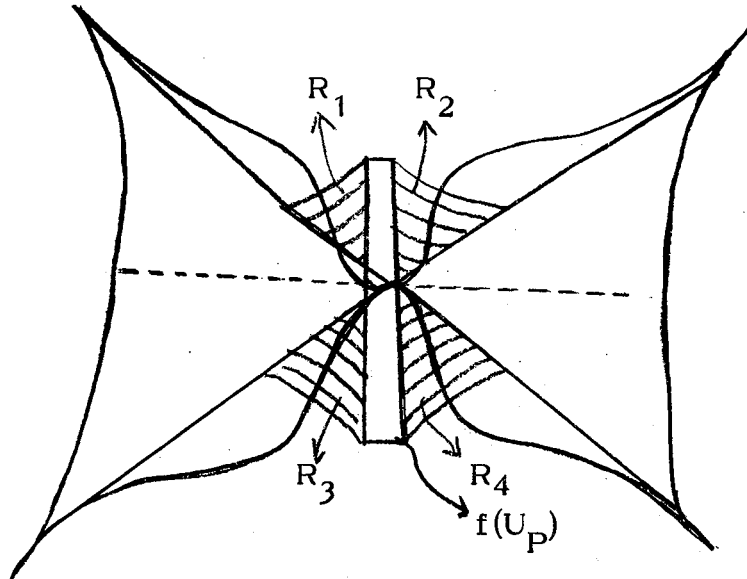


Figure 38

V. ACTION D'UN DIFFEOMORPHISME PSEUDO-ANOSOV SUR $\mathcal{F} \cup \mathcal{Pm}\mathcal{F}$.

Dans ce paragraphe, on étudie certaines propriétés topologiques de l'action d'un difféomorphisme pseudo-Anosov sur l'espace $\mathcal{F} \cup \mathcal{Pm}\mathcal{F}$ et on donne une caractérisation de l'action d'un tel élément sur $\mathcal{Pm}\mathcal{F}$ complétant ainsi la description donnée dans [FLP], exposé XII, §4.

On aura besoin des deux lemmes suivants :

LEMME 1. Soit $\{\beta_n\}$ une suite d'éléments de \mathcal{S} . Si $\forall \alpha \in \mathcal{S}$, il existe une constante C_α vérifiant $l(\beta_n, \alpha) < C_\alpha$, alors $\{\beta_n\}$ est un ensemble fini.

Démonstration. On met sur M une structure hyperbolique. Pour tout élément β de \mathcal{S} , on désigne par $l(\beta)$ la longueur, pour cette métrique, de l'unique géodésique qui le représente.

Si $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{I}}$ est un ensemble infini d'éléments de \mathcal{S} distincts, la suite $l(\beta_n)$ tend vers l'infini car l'ensemble des longueurs des géodésiques simples fermées de M n'a pas de point d'accumulation dans \mathbb{R} .

Soit $\{\alpha_i\}_{i=1, \dots, N}$ un système de courbes simples fermées géodésiques découpant M en cellules ; soit L un majorant du diamètre de ces cellules. On a alors : $\forall n \in I, \ell(\beta_n) < L \cdot (\sum_{j=1}^N i(\alpha_j, \beta_n))$. Donc $\exists j$ tel que $\{i(\alpha_j, \beta_n)\}_{n \in I}$ soit non bornée. \square

LEMME 2. Soit β_n une suite d'éléments de \mathcal{S} convergente dans $PR_+^{\mathcal{S}}$. (Il existe donc une suite de réels $\lambda_n > 0$ telle que la suite λ_n soit convergente dans $R_+^{\mathcal{S}}$.) Alors, soit on a $\lambda_n \rightarrow 0$, soit la suite β_n est une suite finie.

Démonstration. La démonstration du lemme 1 implique que, si β_n est une suite infinie, $\exists \alpha \in \mathcal{S}$ tel que $i(\alpha, \beta_n) \rightarrow \infty$. Comme $\lambda_n i(\alpha, \beta_n)$ est convergente, on a $\lambda_n \rightarrow 0$. \square

PROPOSITION V.1. La fonction intersection géométrique $i(\cdot, \cdot)$, d'abord définie sur $\mathcal{M}\mathcal{F} \times \mathcal{S}$, s'étend en une fonction continue sur $\mathcal{M}\mathcal{F} \times \mathcal{M}\mathcal{F}$. \square

PROPOSITION V.2. Si \mathcal{F} est un feuilletage mesuré uniquement ergodique, et \mathcal{G} un feuilletage mesuré tel que $i(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = 0$, alors $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ dans $\mathcal{P}\mathcal{M}\mathcal{F}$.

Pour la démonstration des deux propositions précédentes, on renvoie à [Ma] et [Re]. On peut maintenant démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION V.3. Soit $[f]$ un élément de $\pi_0(\text{Diff } M)$ de classe pseudo-Anosov et soient $[\mathcal{F}^S, \mu^S]$ et $[\mathcal{F}^U, \mu^U]$ les classes projectives de ses feuilletages respectivement stable et instable. Pour tout élément σ de $\mathcal{F} \cup \mathcal{P}\mathcal{M}\mathcal{F}$ distinct de $[\mathcal{F}^S, \mu^S]$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} [f]^n(\sigma) = [\mathcal{F}^U, \mu^U]$. De plus, la convergence est uniforme sur les compacts de $\mathcal{F} \cup \mathcal{P}\mathcal{M}\mathcal{F} - \{[\mathcal{F}^S, \mu^S]\}$.

Démonstration. Dans [FLP], exposé 12, il est démontré que pour tout $\alpha \in \mathcal{P}\mathcal{M}\mathcal{F}$ provenant d'un élément de \mathcal{S} , on a $\lim_{n \rightarrow \infty} [f^n](\alpha) = [\mathcal{F}^U, \mu^U]$.

Soit $[\mathcal{F}] \neq [\mathcal{F}^S, \mu^S]$ un élément de $\mathcal{P}\mathcal{M}\mathcal{F}$, et regardons la suite $[f]^n([\mathcal{F}])$. Par compacité de $\mathcal{P}\mathcal{M}\mathcal{F}$, on peut trouver une sous-suite $[f]^{n_p}([\mathcal{F}])$ convergente, soit $[\mathcal{G}]$ sa limite. Nous montrons que la limite $[\mathcal{G}]$ est égale à $[\mathcal{F}^U, \mu^U]$ et donc que la suite $[f]^n([\mathcal{F}])$ est elle-même convergente vers $[\mathcal{F}^U, \mu^U]$.

Soit \mathcal{G} un représentant de la classe $[\mathcal{G}]$ et soit $\ell = i(\mathcal{G}, (\mathcal{F}^U, \mu^U))$. Nous montrons que $\ell = 0$. On a :

$$i(\mathcal{G}, (\mathcal{F}^U, \mu^U)) = \lim_{n_p} i\left(\frac{f^{n_p} \mathcal{F}}{C_{n_p}}, (\mathcal{F}^U, \mu^U)\right) \text{ pour une certaine suite } C_{n_p} \text{ de nombres } > 0$$

où \mathcal{F} est un représentant de la classe $[\mathcal{F}]$.

$$\text{Donc : } i(\zeta, (\mathfrak{X}^u, \mu^u)) = \lim_{n_p \rightarrow \infty} i\left(\frac{\mathfrak{X}}{C_{n_p}}, f^{-n_p}(\mathfrak{X}^u, \mu^u)\right) = \lim_{n_p \rightarrow \infty} i\left(\frac{\mathfrak{X}}{C_{n_p}}, \frac{(\mathfrak{X}^u, \mu^u)}{\lambda^{n_p}}\right),$$

où λ est le coefficient de dilatation de f .

Donc :

$$i(\zeta, (\mathfrak{X}^u, \mu^u)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda^{n_p} C_{n_p}} i(\mathfrak{X}, (\mathfrak{X}^u, \mu^u)).$$

D'autre part (en prenant encore une sous-suite) :

$$\begin{aligned} i(\zeta, (\mathfrak{X}^s, \mu^s)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} i\left(\frac{f^{n_p} \mathfrak{X}}{C_{n_p}}, (\mathfrak{X}^s, \mu^s)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} i\left(\frac{\mathfrak{X}}{C_{n_p}}, f^{-n_p}(\mathfrak{X}^s, \mu^s)\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} i\left(\frac{\mathfrak{X}}{C_{n_p}}, \lambda^{n_p}(\mathfrak{X}^s, \mu^s)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^{n_p}}{C_{n_p}} i(\mathfrak{X}, (\mathfrak{X}^s, \mu^s)) = A \geq 0. \end{aligned}$$

Or, on a, par la proposition V.2, $i(\mathfrak{X}, (\mathfrak{X}^s, \mu^s)) \neq 0$.

Il existe donc une constante $B > 0$ telle que :

$$\frac{\lambda^{n_p}}{C_{n_p}} \leq B, \quad \text{donc } \frac{1}{C_{n_p}} \leq \frac{B}{\lambda^{n_p}}$$

Donc :

$$i(\zeta, (\mathfrak{X}^u, \mu^u)) \leq \frac{B}{\lambda^{2n_p}} i(\mathfrak{X}, (\mathfrak{X}^u, \mu^u)) \quad \text{et} \quad i(\zeta, (\mathfrak{X}^u, \mu^u)) = 0.$$

La proposition V.2 implique que $[\zeta] = [\mathfrak{X}^u, \mu^u]$, et la suite $[f]^n[\mathfrak{X}]$ converge.

Soit maintenant σ un élément de \mathfrak{J} , et montrons que l'on a aussi $\lim [f]^n(\sigma) = [\mathfrak{X}^u, \mu^u]$ dans $\text{PR}_+^{\mathfrak{S}}$.

Posons $\sigma_n = [f]^n(\sigma)$ et soit $[\alpha]$ une valeur d'adhérence de σ_n dans $\text{PR}_+^{\mathfrak{S}}$. Soit σ_{n_k} une sous-suite de σ_n convergente vers $[\alpha]$. Par changement de numérotation, nous notons aussi cette sous-suite σ_n . Il existe donc une suite de réels λ_n telle que $\lambda_n \sigma_n$ soit convergente dans $\text{R}_+^{\mathfrak{S}}$ vers un élément α .

Quand $n \rightarrow \infty$, $\lambda_n \rightarrow 0$. En effet, soit γ un élément de \mathfrak{S} et soit $\gamma_n = f^{-n}(\gamma)$. Tous les γ_i sont distincts car f est pseudo-Anosov. Donc la suite $\sigma_n(\gamma) = \sigma(\gamma_n)$ tend vers l'infini, où $\sigma_n(\gamma)$ désigne la longueur hyperbolique de la géodésique représentant γ , pour la métrique σ_n . Comme $\lambda_n \sigma_n(\gamma)$ est convergente, on a $\lambda_n \rightarrow 0$.

D'après [FLP], exposé 8, on peut associer (à partir d'un certain rang), par la projection $q : \mathfrak{J} \rightarrow \mathfrak{M}\mathfrak{J}$ (nous suivons les notations de la référence ci-dessus), une suite de feuilletages mesurés $q(\sigma_n)$ tels que : $\forall \gamma \in \mathfrak{S}$, il existe une constante C vérifiant :

$$(*) \quad i(q(\sigma_n), \gamma) \leq \sigma_n(\gamma) \leq i(q(\sigma_n), \gamma) + C$$

Donc $\lim \lambda_n q(\sigma_n) = \alpha$ dans $R_+^{\mathbb{S}}$.

Soit maintenant β un élément de \mathbb{S} , et appelons β_n l'élément $f^n(\beta)$.

On a donc : $\sigma_n(\beta_n) = \sigma(\beta) = \text{constante}$.

On sait que $[\beta_n] \rightarrow [\mathfrak{z}^u, \mu^u]$ dans $PR_+^{\mathbb{S}}$, quand $n \rightarrow \infty$.

D'après le lemme 2, il existe une suite $k_n \rightarrow 0$ telle que $k_n \beta_n \rightarrow (\mathfrak{z}^u, \mu^u)$ dans $R_+^{\mathbb{S}}$. On a donc :

$$(**) \quad i(\lambda_n \sigma_n, k_n \beta_n) = \lambda_n k_n i(\sigma_n, \beta_n) \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

D'autre part, on a, d'après (*), $i(\lambda_n q(\sigma_n), k_n \beta_n) \leq i(\lambda_n \sigma_n, k_n \beta_n)$. D'après (**), on a donc $i(\lambda_n q(\sigma_n), k_n \beta_n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. L'inégalité (*) implique d'autre part que $\lambda_n q(\sigma_n)$ converge vers α dans $R_+^{\mathbb{S}}$.

Par continuité de $i(,)$ (proposition V.1), on en déduit que $i(\alpha, (\mathfrak{z}^u, \mu^u)) = 0$, et la proposition V.2 implique donc $[\alpha] = [\mathfrak{z}^u, \mu^u]$. On en déduit que la suite $[f]^n(\sigma)$ est convergente et que sa limite est $[\mathfrak{z}^u, \mu^u]$.

L'uniformité de la convergence découle d'un lemme classique sur les homéomorphismes d'un espace compact ayant deux points fixes dont l'un est attractif pour tous les points du complémentaires de l'autre ([Sh], chapitre 2, lemme 6). \square

Remarque. Dans la suite, on n'utilisera l'énoncé de la proposition précédente que pour la convergence des éléments de $\mathcal{P}m\mathfrak{F}$.

PROPOSITION V.4. Un élément $[f] \in \pi_0 \text{Diff } M$ est de classe pseudo-Anosov si et seulement si son action sur $\mathcal{P}m\mathfrak{F}$ a exactement deux points périodiques (qui dans ce cas sont des points fixes).

Démonstration. On utilise le théorème de Thurston sur la classification des classes d'isotopie des difféomorphismes : Si $[f]$ n'est pas de classe pseudo-Anosov, il est soit d'ordre fini, soit "réductible". Dans le premier cas, tous les points de $\mathcal{P}m\mathfrak{F}$ sont périodiques, et il est facile de se convaincre que dans le deuxième cas il y en a au moins trois : la courbe qui "réduit" le difféomorphisme, considérée par l'opération d'élargissement comme un élément de $\mathcal{P}m\mathfrak{F}$, et au moins deux autres feuilletages partiels de M , provenant de la surface réduite, qui également par élargissement donnent des éléments périodiques de $\mathcal{P}m\mathfrak{F}$.

La réciproque est classique. Elle découle d'ailleurs de la proposition V.3.

\square

VI. PROPRIETES SPECTRALES DES MATRICES PRESERVANT UN CONE.

On aura besoin de la proposition suivante sur les matrices préservant un cône.

VI.1. PROPOSITION. Soit K un cône fermé convexe dans un espace vectoriel R^n , K étant d'intérieur non vide (par rapport à l'espace ambiant) et vérifiant $K \cap (-K) = \{0\}$. Soit A une matrice $n \times n$ qui envoie K dans lui-même et qui vérifie les deux conditions suivantes :

1) A possède exactement un vecteur propre (défini à un scalaire près) dans K , et ce vecteur est dans $\text{int } K$.

2) Il existe un entier m tel que $A^m(K - \{0\}) \subset \text{int } K$. Alors, $\rho(A)$, le rayon spectral de A , est une valeur propre simple de A dont le module est strictement plus grand que le module de toute autre valeur propre de A , et le vecteur propre de A dans $\text{int } K$ correspond à la valeur propre $\rho(A)$.

Pour la démonstration, on renvoie à [BP], chapitre 1 (définitions 2.10 et 2.21, théorèmes 3.15, 4.2 et 4.10).

VI.2. PROPOSITION. Soit A une matrice $n \times n$, et soit λ son rayon spectral et X un vecteur propre correspondant à une valeur propre simple égale à son rayon spectral. Nous supposons que λ est strictement plus grand que le module de toute autre valeur propre. Appelons f l'opérateur représenté par A . Il existe alors un disque de dimension $n-1$, transverse aux rayons et passant par le rayon correspondant à X , sur lequel f , agissant via la projection suivant les rayons, induit une application lipschitzienne de rapport < 1 .

Démonstration. L'idée est la suivante : On se ramène, en multipliant A par $1/\lambda$, au cas où le rayon spectral de A vaut 1. En prenant X comme un premier vecteur de base, on obtient une nouvelle matrice qui représente f et qui s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ (0) & B \end{bmatrix}$$

où a est ligne à $(n-1)$ entrées, (0) une colonne à $(n-1)$ entrées, et B une matrice $(n-1) \times (n-1)$.

Soit U un disque de dimension $n-1$ contenu dans la sphère unité de R^n , passant par le point $(1, 0, \dots, 0)$. L'action induite sur ce disque est définie par :

$$f^*(x) = \frac{f(x)}{\|f(x)\|}$$

Le point $(1, 0, \dots, 0)$ est un point fixe pour f^* . Pour un point de U qui s'écrit (u, v) , où u est la première coordonnée et v représente les $(n-1)$ autres, on a :

$$f(u, v) = (u + a.v, B.v)$$

En prenant U assez petit, le terme $a.v$ est négligeable devant 1 et l'action de f^* sur U est très proche de celle de B , qui est une matrice dont le rayon spectral est < 1 . Par un choix convenable de la norme, B est une application linéaire dont la norme est égale à son rayon spectral. Elle est donc lipschitzienne de rapport < 1 . \square

VII. STRUCTURE LIPSCHITZ ET METRIQUES SUR $\mathcal{P}\mathcal{M}\mathcal{F}$.

PROPOSITION. Il existe sur $\mathcal{P}\mathcal{M}\mathcal{F}$ une classe de métriques Lipschitz-équivalentes pour lesquelles l'action de chaque élément de $\pi_0(\text{Diff } M)$ est Lipschitz. De plus, étant donné un difféomorphisme pseudo-Anosov f , on peut choisir une métrique dans cette classe pour laquelle l'action de $[f^\nu]$ sur un voisinage de la classe $[\mathcal{F}^\mu, \mu^\mu]$ du feuilletage mesuré instable soit une contraction (Lipschitz de rapport < 1), pour tout entier ν assez grand.

Démonstration. Nous identifions $\mathcal{P}\mathcal{M}\mathcal{F}$ à une section de $\mathcal{M}\mathcal{F}$ linéaire par morceaux et transverse aux rayons. L'atlas PL de l'espace $\mathcal{M}\mathcal{F}$ définit, via la projection sur les rayons, une structure Lipschitz sur $\mathcal{P}\mathcal{M}\mathcal{F}$ (voir par exemple [LV] pour les éléments de cette théorie).

Soit maintenant f un difféomorphisme pseudo-Anosov. On construit, d'après le paragraphe IV, un réseau ferroviaire maximal τ qui est invariant par une puissance f^n de f .

Soit R^N l'espace vectoriel associé à τ comme dans I.5 et $E \subset R^N_+$ le cône fermé défini par les relations d'incidence entre les arêtes de τ et paramétrant le sous-espace $\mathcal{M}\mathcal{F}(\tau)$ de $\mathcal{M}\mathcal{F}$. On définit comme dans III.3 une application linéaire de R^N dans lui-même à l'aide de la matrice A , où A_{ij} représente le nombre de fois que l'arête $f(a_i)$ "traverse" l'arête a_j (après isotopie et mise en position générale par rapport aux traverses correspondant aux milieux des arêtes ; voir III.3). Par restriction sur E , cette matrice décrit l'action de $[f^n]$ sur $\mathcal{M}\mathcal{F}(\tau)$. Soit R^k le sous-espace vectoriel de R^N engendré par E . L'espace R^k est stable par A , et le cône E , considéré dans R^k , vérifie toutes les conditions de la proposition VI.1. En effet, comme l'action de $[f^n]$ commute avec l'action de R^N_+ sur E et sur

$\mathfrak{m}\mathfrak{F}(\tau)$, un vecteur propre dans E correspond à un feuilletage mesuré dans $\mathfrak{m}\mathfrak{F}(\tau)$ qui est invariant par $[f^n]$. Il est donc unique et égal au feuilletage mesuré instable de $[f^n]$ contenu dans $\mathfrak{m}\mathfrak{F}(\tau)$. La propriété 2 de la proposition VI.1 découle de la convergence uniforme sur $\mathcal{P}\mathfrak{m}\mathfrak{F}$ vers la classe du feuilletage instable, sur tout fermé ne contenant pas le feuilletage mesuré stable (proposition V.3). Remarquons que E ne porte pas le feuilletage mesuré stable car la matrice A à coefficients entiers ne peut pas avoir de valeur propre < 1 .

On prend alors au voisinage de la classe $[\mathfrak{F}^u, \mu^u]$ dans $\mathcal{P}\mathfrak{m}\mathfrak{F}$ la métrique induite par le plongement φ_τ associé à τ , et on complète cette métrique par une métrique dans la classe des métriques Lipschitz-équivalentes définie plus haut. La proposition VI.2 implique la propriété de contraction recherchée, au voisinage de $[\mathfrak{F}^u, \mu^u]$, pour l'application $[f^n]$. Comme les applications $[f], [f^n], \dots, [f^{n-1}]$ sont lipschitziennes sur $\mathcal{P}\mathfrak{m}\mathfrak{F}$ muni de cette métrique, la dernière partie de la proposition est démontrée. \square

VIII. THEOREME DE COMPOSITION ET APPLICATION A L'HOMOLOGIE

THEOREME 1. Soit $[f]$ un élément de $\pi_0(\text{Diff } M)$ de classe pseudo-Anosov, et soit $[\mathfrak{F}^s, \mu^s]$ et $[\mathfrak{F}^u, \mu^u]$ les classes projectives de ses feuilletages stable et instable. Si $[\varphi]$ est un autre élément de $\pi_0(\text{Diff } M)$ vérifiant la condition $[\varphi]([\mathfrak{F}^u, \mu^u]) \neq [\mathfrak{F}^s, \mu^s]$, il existe un entier k_0 tel que, pour tout $k \geq k_0$, $[f^k \circ \varphi]$ soit de classe pseudo-Anosov.

Démonstration.

Soit V un voisinage de $[\mathfrak{F}^u, \mu^u]$ dans $\mathcal{P}\mathfrak{m}\mathfrak{F}$, homéomorphe à un disque fermé, tel que $[\mathfrak{F}^s, \mu^s] \notin [\varphi](V)$. D'après la proposition V.3, pour n assez grand, on a $[\mathfrak{F}^n \circ \varphi](V) \subset V$. D'après la proposition VII et le théorème des applications contractantes, pour n assez grand, $[f^n \circ \varphi]$ a un unique point fixe dans V , qui de plus est attractif pour tous les points de V .

Regardons maintenant $V' = \overline{\mathcal{P}\mathfrak{m}\mathfrak{F} - V}$.

$[f^{-1}]$ est de classe pseudo-Anosov ayant pour point fixe stable et instable respectivement $[\mathfrak{F}^u, \mu^u]$ et $[\mathfrak{F}^s, \mu^s]$. Comme $[\varphi^{-1}]([\mathfrak{F}^s, \mu^s]) \notin V$, il existe un voisinage W de $[\mathfrak{F}^s, \mu^s]$ dont l'image par $[\varphi^{-1}]$ ne rencontre pas V . En appliquant de nouveau la proposition V.3, puis VII, on obtient pour n assez grand : $[f^{-n}](V') \subset W$, donc $[\varphi^{-1} \circ f^{-n}](V') \subset V'$. On applique encore une fois le théorème des applications contractantes qui montre que $[\varphi^{-1} \circ f^{-n}]$ a un seul point fixe dans V' , attractif pour tous les points de V' , pour n assez grand.

Ce qui montre que $[f^n \circ \varphi]^{-1}$ n'a qu'un seul point périodique dans V^1 .

On en déduit finalement que $[f^n \circ \varphi]$ n'a que deux points périodiques dans $\mathcal{P}m\mathcal{F}$. La proposition V.4 montre alors que $[f^n \circ \varphi]$ est pseudo-Anosov. \square

La remarque suivante est due à Albert Fathi.

Remarque. Supposons que l'on ait $[\varphi]([\mathcal{F}^u, \mu^u]) = [\mathcal{F}^s, \mu^s]$. On a alors aussi $[\varphi]([\mathcal{F}^s, \mu^s]) = [\mathcal{F}^u, \mu^u]$.

En effet, $[\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}]$ est du type pseudo-Anosov, et la classe de son feuilletage instable est $[\varphi]([\mathcal{F}^u, \mu^u]) = [\mathcal{F}^s, \mu^s]$. On a le lemme suivant :

LEMME (A. Fathi et P. Arnoux). Si deux difféomorphismes pseudo-Anosov ont le même feuilletage stable, ils ont aussi le même feuilletage instable. \square

On en déduit que la classe du feuilletage stable de $[\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}]$ est $[\mathcal{F}^u, \mu^u]$. Donc $[\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}]([\mathcal{F}^u, \mu^u]) = [\mathcal{F}^u, \mu^u]$ et $[\varphi^{-1}]([\mathcal{F}^u, \mu^u])$ est un point fixe de $[f]$. On a donc :

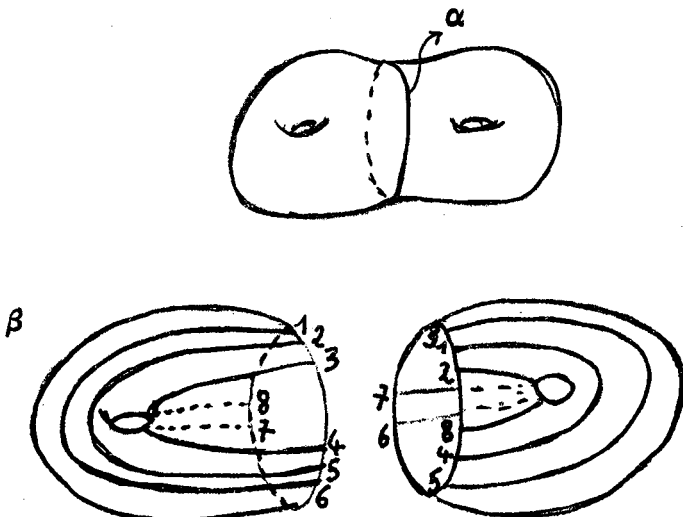
$$[\varphi^{-1}]([\mathcal{F}^u, \mu^u]) = [\mathcal{F}^s, \mu^s].$$

On est ainsi ramené à étudier le cas où $[\varphi]([\mathcal{F}^u, \mu^u]) = [\mathcal{F}^s, \mu^s]$ et $[\varphi]([\mathcal{F}^s, \mu^s]) = [\mathcal{F}^u, \mu^u]$. Dans ce cas, aucun élément de la forme $[f^n \circ \varphi]$ ne peut être de classe pseudo-Anosov, car son action sur $\mathcal{P}m\mathcal{F}$ aura des points périodiques d'ordre 2.

THEOREME 2. Pour tout difféomorphisme φ de M , il existe un difféomorphisme χ pseudo-Anosov ayant la même action que φ sur $H_1(M)$.

Démonstration. Si φ n'est pas homotope à l'identité, on peut trouver deux courbes simples fermées α et β , nulles en homologie, non nulles en homotopie, en position d'intersection géométrique minimale, telles que $M - \{\alpha \cup \beta\}$ soit une réunion de cellules et vérifiant $[\varphi]([\alpha]) \neq [\beta]$.

Pour construire de telles courbes, on peut suivre l'exemple de la figure 39 :



Pour trouver β , on recolle suivant les numéros. Le fait que β soit nulle en homologie se vérifie en regardant l'intersection (algébrique) avec les générateurs standard de $H_1(M)$. Si $\varphi([\alpha]) = [\beta]$, on peut construire de la même manière un β' non homotope à β et qui convient.

Figure 39

Pour tout $n > 0$, le difféomorphisme $f_n = \tau_\alpha^n \circ \tau_\beta^{-n}$ construit avec n twists de Dehn négatifs le long de β et n twists positifs le long de α , est de classe pseudo-Anosov. De plus, quand $n \rightarrow +\infty$, le feuilletage instable de $[f_n]$ tend (dans PR_+^S) vers $[\alpha]$, tandis que son feuilletage stable tend vers $[\beta]$. (Pour voir ceci, on se place dans le α -atlas ([FLP], exposé 13), et on est ramené à étudier les pentes des directions propres d'un difféomorphisme linéaire du plan. On peut alors choisir n de telle sorte que la condition du théorème 1 soit vérifiée, et on trouvera χ de la forme $f_n^k \circ \varphi$. \square

Remarques finales.

1) Un théorème bien connu dit qu'un automorphisme de $H_1(M, \mathbb{Z})$ provient d'un difféomorphisme de la surface si et seulement si il préserve la forme symplectique d'intersection (voir [MKS] et [Zi] pour un historique et une preuve de ce théorème). Notre théorème 2 implique donc que tout automorphisme symplectique de $H_1(M, \mathbb{Z})$ soit réalisé par un difféomorphisme pseudo-Anosov.

2) Certains automorphismes symplectiques de l'homologie ne peuvent être réalisés que par des difféomorphismes pseudo-Anosov. Ainsi, soit M une surface de genre 2. Il découle directement du théorème de classification de Thurston que si un automorphisme A symplectique de $H_1(M, \mathbb{Z})$ vérifie les 2 conditions suivantes :

1° Il n'y a pas de valeur propre racine de l'unité ;

2° L'automorphisme A n'admet pas de décomposition en 2 blocs $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} 0 & A_1 \\ A_2 & 0 \end{bmatrix}$,

alors, un difféomorphisme qui réalise A est nécessairement isotope à un difféomorphisme pseudo-Anosov.

A. Fathi a démontré l'existence de tels automorphismes symplectiques de l'homologie pour tous les genres ≥ 2 . (Remarquer que la condition 2° ci-dessus doit être remplacée par un énoncé analogue pour toutes les puissances A^k de A , si le genre g est > 2 .)

BIBLIOGRAPHIE

- [BP] A. BERMAN & R. PLEMMONS, Nonnegative matrices in the mathematical sciences, Academic Press (1979).
- [Bo] F. BONAHOON, Ribbon fibered knots, cobordism of surface diffeomorphisms and pseudo-Anosov diffeomorphisms, Mat. Proc. Camb. Phil. Soc. (1983).
- [FL] A. FATHI & F. LAUDENBACH, The dynamics of the lift of a pseudo-Anosov diffeomorphism on the Poincaré disc, Publications d'Orsay, 83 03 (1983).
- [FLP] A. FATHI, F. LAUDENBACH et V. POENARU, Travaux de Thurston sur les surfaces, Astérisque 66-67 (1979).
- [LV] J. LUUKAINEN & J. VAISALA, Elements of Lipschitz topology, Ann. Acad. Sci. Fenn., series A.I., Math. vol. 3 (1977), 85-122.
- [Ma] H. MASUR, Two boundaries of Teichmüller space, Duke Math. J. 49 (1982), 183-190.
- [MKS] W. MAGNUS, A. KARRASS & D. SOLITAR, Combinatorial group theory, Wiley & Sons, Inc. 1966.
- [Re] M. REES, An alternative approach to the ergodic theory of measured foliations on surfaces, Erg. th. & din. Syst. 1 (1981), 461-488.
- [Sh] M. SHUB, Stabilité globale des systèmes dynamiques, Astérisque 56 (1978), 2e édition.
- [Th] W. THURSTON, The geometry and topology of 3-manifolds, Notes photocopiées de l'Université de Princeton.
- [Zi] H. ZIESCHANG, E. VOGT, H.D. COLDEWEY, Surfaces and planar discontinuous groups, LNM 835.

THE DYNAMICS OF THE LIFT OF A PSEUDO-ANOSOV
DIFFEOMORPHISM TO THE POINCARÉ DISC

A. FATHI and
F. LAUDENBACH

We consider a closed surface M of negative Euler characteristic, regarded as the quotient of the Poincaré disc $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ by a Fuchsian group F ; this choice of a hyperbolic structure of M will be thought as an auxiliary ingredient, without effect (up to topological conjugacy) on the dynamics we will speak of. Let $\pi: \mathbb{D} \rightarrow M = \mathbb{D}/F$ be the covering map. Let us consider a "pseudo-Anosov diffeomorphism" φ of M ; that is a homeomorphism with two transverse measured foliations, in the sense of Thurston [FLP, exp. 9-10], (\mathfrak{F}^S, μ^S) , (\mathfrak{F}^U, μ^U) and a dilation coefficient $\lambda > 1$ satisfying: $\varphi(\mathfrak{F}^S, \mu^S) = (\mathfrak{F}^S, \frac{\mu^S}{\lambda})$, $\varphi(\mathfrak{F}^U, \mu^U) = (\mathfrak{F}^U, \lambda \mu^U)$. By Euler characteristic considerations, the foliations must have singularities; in analytical coordinates, the foliations are given by taking the real and imaginary parts of the square root of a holomorphic quadratic differential $z^k dz^2$, $k \geq 1$. This definition also contains the idea of transversality near a singularity; Figure 1 shows the picture for $k = 1$. Away from singularities, a measured foliation is given by the absolute value of a closed non vanishing one-form, well defined up to sign; if the foliation is transversally oriented, it is given by a closed differential form of degree 1. Here the picture of two transversal foliations is the usual one.

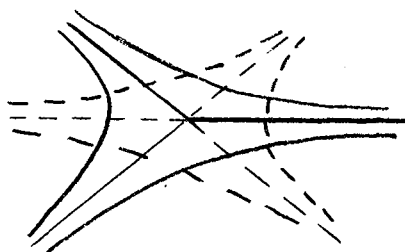


Figure 1

A piece of a leaf of \mathfrak{F}^S is measured using μ^U ; its image by φ is another piece of a leaf of \mathfrak{F}^S , whose measure is the initial one multiplied by $1/\lambda$. For this reason, \mathfrak{F}^S is called the stable invariant foliation of φ (indeed it is unique) and \mathfrak{F}^U is called unstable.

If k is the power appearing in the quadratic differential at a singularity, this singularity contributes $-k/2$ in the Euler characteristic. On the other hand, $k+2$ is the number of leaves of \mathfrak{F}^S (resp. \mathfrak{F}^U) starting from the singularity ; such a leaf is called a separatrix. Thus the total number of separatrices is bounded by $12g - 12$, where g is the genus of M .

The foliations $\pi^{-1}(\mathfrak{F}^S)$ and $\pi^{-1}(\mathfrak{F}^U)$ will be denoted by $\tilde{\mathfrak{F}}^S$ and $\tilde{\mathfrak{F}}^U$ respectively. Any lift $\tilde{\varphi}$ of φ to \mathbb{D} preserves both foliations in the same sense as above ; moreover $\tilde{\varphi}$ extends continuously to the boundary $\partial\mathbb{D}$ (this is a classical fact for which we will provide a proof later). The problem is to understand how both facts fit together. At first, the picture looks very complicated because each point of $\partial\mathbb{D}$ is a limit of a sequence of singularities. However, the following theorem claims that the dynamics of $\tilde{\varphi}$ on $\bar{\mathbb{D}}$ is rather simple.

THEOREM. 1° If $\tilde{\varphi}$ has no fixed point in \mathbb{D} , then $\tilde{\varphi}$ has exactly two fixed points, one attracting and the other repelling ("North-South dynamics").

2° If $\tilde{\varphi}$ has a fixed point $z \in \mathbb{D}$, then the leaves L_1, \dots, L_n of $\tilde{\mathfrak{F}}^S$ starting from z ($n = 2$ if z is a regular point) converge to distinct points of $\partial\mathbb{D}$. Moreover, there exists an integer $k \leq 2n$ such that $\tilde{\varphi}^k$ leaves invariant each leaf L_i . In each component of $\bar{\mathbb{D}} - \bigcup_1^n \bar{L}_i$, $\tilde{\varphi}^k$ has one fixed point on the boundary, which is the ω -limit point of every orbit in the same component.

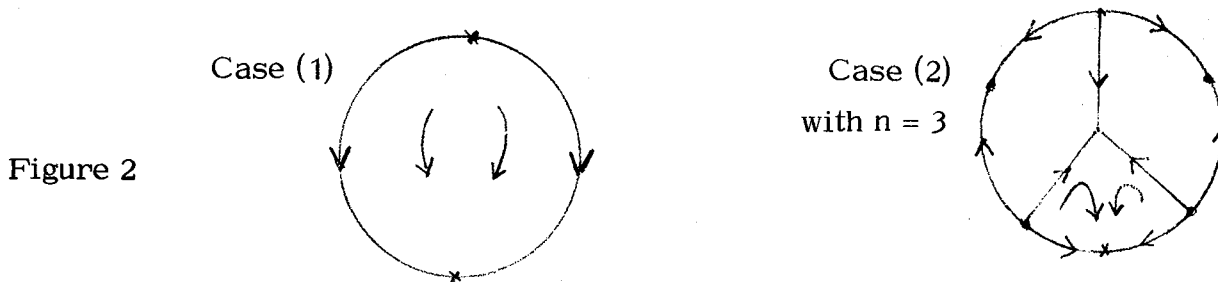


Figure 2

More precise statements will be given later.

Remarks. 1) The first case does occur, as we shall see later.

2) As a consequence of the theorem, $\tilde{\varphi}$ has at most one fixed point in \mathbb{D} . Looking at the foliations, it is easy to prove that each fixed point has an index different from zero. From Nielsen's theory [B, chap. VI], φ has the minimal number of fixed points in its homotopy class.

Here we prove this minimizing property as a corollary of our theorem. There are more direct proofs, by using for instance the fact that any arc α can be deformed with endpoints fixed to an arc which is "quasi-transversal" to \mathfrak{F}^S (compare

with Remarque 1, p. 81 in [FLP]). It is also possible to use the geodesics of the singular "flat" metric $[(\mu^u)^2 + (\mu^s)^2]^{\frac{1}{2}}$, whose curvature is concentrated in the singular points. Indeed, as A. Douady has pointed to us, many other lemmas in the following can be proved using this metric.

3) We recall that $\tilde{\varphi}|_{\partial\mathbb{D}}$ depends only on homotopical properties of φ ; at infinity, the choice of a lift of φ is like the choice of an automorphism of $\pi_1(M, *)$ in its class modulo the inner automorphisms. The properties we can deduce from our theorem at infinity are just the properties which are proved by Nielsen in [N] concerning elements of $\text{Out } \pi_1(M)$ without periodic orbits.

But the way suggested here for deducing dynamics at infinity from homotopy goes through the classification theorem by Thurston [FLP, p. 175]. Therefore it is not the right way to obtain Nielsen's results.

This paper must be considered as an exercise showing the efficiency of measured foliations. It was written while Joan Birman gave lectures on a paper by R. Miller, which builds theory of pseudo-Anosov directly on Nielsen's work [M].

We thank Joan Birman and Adrien Douady for all incitements and conversations.

We learned that a first version of the proofs in this work appeared in notes from Thurston's class at Princeton (on December 12, 1975).

§ 1. PRELIMINARY LEMMAS.

Let α be a closed geodesic on M ; let us consider a lift $\tilde{\alpha}$ of α -i.e. an axis of the fuchsian group- and a component U of $\mathbb{D} - \tilde{\alpha}$. The closure of U in $\bar{\mathbb{D}}$ will be called a half-space associated to α . It is geodesically convex.

LEMMA 1. 1° For a given α and for any infinite decreasing sequence of distinct half-spaces \bar{U}_n associated to α , the intersection of the \bar{U}_n is just one point x_0 lying on $\partial\mathbb{D}$; this sequence is a fundamental system of neighborhoods of x_0 in $\bar{\mathbb{D}}$.

2° For any point x_0 in $\partial\mathbb{D}$, there exists a simple closed geodesic α on M such that x_0 is just the intersection of a decreasing sequence of half-spaces associated to α .

Proof. 1° The hyperbolic distance between two disjoint axes above α is bounded away from zero. Hence, the intersection of the half-spaces is contained in $\partial\mathbb{D}$, and being convex is reduced to a point.

2° Let C_i be a finite system of simple closed geodesics on M cutting M in cells. Let Δ be any geodesic in \mathbb{D} with x_0 as endpoint. Its image $\pi(\Delta)$ must cut one of the C_i , which we shall call C , infinitely many times. Then, going along Δ towards x_0 , we meet a sequence of points z_n with $\pi(z_n) \in C$, which, being discrete in Δ , converges to x_0 . The lifts \tilde{C}_n of C through z_n define the sequence we are looking for. \square

LEMMA 2. Any lift $\tilde{\varphi}$ to \mathbb{D} of a homeomorphism φ of M extends continuously to the boundary.

Proof. Let x be a point in $\partial\mathbb{D}$. Let α be a geodesic given by Lemma 1, 2° and let H_n be a sequence of half-spaces associated to α which decreases to x . The image $\varphi(\alpha)$ is homotopic to a closed simple geodesic α' [FLP, exp. 3]. Lifting this homotopy to \mathbb{D} , we get a sequence of distinct half-spaces H'_n such that $\varphi(H_n)$ is contained in a hyperbolic k -neighborhood of H'_n ; k is a bound depending only on the homotopy between $\varphi(\alpha)$ and α' . Using Lemma 1, 1°, the sequence H'_n converges to a point of $\partial\mathbb{D}$, which is also the limit point of the sequence $\varphi(H_n)$. By definition it is the image of x . \square

Let \mathfrak{F} be a measured foliation on M , with singularities of the allowed type. Let $\tilde{\mathfrak{F}} = \pi^{-1}(\mathfrak{F})$. A half-leaf is the path obtained by starting from a point and going along the leaf in a definite direction.

LEMMA 3. Any half-leaf of $\tilde{\mathfrak{F}}$, which does not go to a singularity, converges to a definite point of $\partial\mathbb{D}$

Proof. Let \tilde{L} be the half-leaf under consideration and L its image in M . Changing \mathfrak{F} by isotopy or Whitehead operations allows us to follow L (the set of infinite half-leaves is not changed) and preserves the behaviour of \tilde{L} at infinity; we recall that the Whitehead operations are obtained either by collapsing to one point a leaf jointing two singularities or by doing the inverse operation [FLP, exp. 5]. With a suitable choice of such operations, we can assume that there exist simple curves K_i , $i = 1, \dots, 3g-3$, transverse to \mathfrak{F} and the union of which cuts M into discs with two holes (pairs of pants) [FLP, exp. 6]. The half-leaf L meets one of the K_i , we call K . Because an isotopy does not change anything, we can assume K geodesic.

Let us look at the components \tilde{K}_n of $\pi^{-1}(K)$ meeting \tilde{L} . Following \tilde{L} to infinity, it is impossible to cut a given \tilde{K}_n twice; for if not, we should have a foliated half-disc Δ , bounded by an arc of \tilde{K}_n , which is transversal to $\tilde{\mathfrak{F}}$, and then, by Euler characteristic considerations, Δ would have a singularity of $\tilde{\mathfrak{F}}$ with a positive index. Therefore it is possible to enumerate the \tilde{K}_n so that \tilde{L} meets them in the natural order.

Let us call U_n the closed half-space of $\bar{\mathbb{D}}$ bounded by \tilde{K}_n . It is decreasing sequence. By Lemma 1, the intersection of all the U_n is reduced to a point, the limit point of \tilde{L} . \square

LEMMA 4. If \mathfrak{F} is minimal, then :

- 1° Two disjoint half-leaves \tilde{L}_0 and \tilde{L}_1 of \mathfrak{F} converge to two distinct points of $\partial\mathbb{D}$;
- 2° The endpoints of leaves are not endpoints of axes .

Proof. 1° As in the previous lemma, we change \mathfrak{F} by Whitehead operations and isotopy until it is transverse to a system \mathcal{K} of simple curves cutting M into pairs of pants. If x_0 is the common limit of \tilde{L}_0 and \tilde{L}_1 , a fundamental system of neighbourhoods of x_0 is given by half-spaces associated to $K \in \mathcal{K}$. Let \mathcal{U}_0 be one of these half-spaces which \tilde{L}_0 and \tilde{L}_1 enter ; $\tilde{K}_0 = \partial\mathcal{U}_0 \subset \pi^{-1}(K)$. Let us denote $z_i = \tilde{L}_i \cap \tilde{K}_0$, $i = 0, 1$; and τ the arc of \tilde{K}_0 joining them. We deform τ by holonomy towards x_0 . By the minimality of \mathfrak{F} , this cannot be done indefinitely without meeting a singularity. In other words, if Δ is the triangle of $\overline{\mathbb{D}}$, bounded by \tilde{L}_0 , \tilde{L}_1 and τ , $\text{int } \Delta$ must contain a singularity s . Furthermore, two of the separatrices \tilde{L}'_0 and \tilde{L}'_1 of s converge to x_0 .

Let \mathcal{U}_1 be another half-space associated to K , which \tilde{L}'_0 and \tilde{L}'_1 enter ; $\tilde{K}_1 = \partial\mathcal{U}_1$. Then we have a foliated disc in \mathbb{D} , bounded by pieces of \tilde{L}'_0 and \tilde{L}'_1 and by an arc of \tilde{K}_1 . The latter being transversal to the foliation, we get a contradiction from Euler characteristic considerations.

2° Let us consider a closed geodesic α on M and suppose it is covered by an axis $\tilde{\alpha}$ with an endpoint x_0 which is the limit point of a leaf \tilde{L} . By [FLP, exp. 5, remarque 1, p. 81], there is a homotopy of α to an immersion α' quasi-transversal to \mathfrak{F} ; "quasi-transversality" is just "transversality" except at the singularities where the configuration is pictured on Figure 3. Again here we use the minimality of \mathfrak{F} , to get rid of the case where α is deformed to a cycle of \mathfrak{F} .

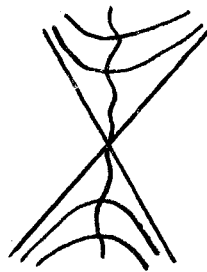


Figure 3

Let $\tilde{\alpha}'$ be the lift of α' obtained by lifting the homotopy from $\tilde{\alpha}$; the endpoint is fixed. Furthermore, [FLP, exp. 12, § IV], $\tilde{\alpha}'$ is a simple line.

As before, we have a triangle Δ in $\overline{\mathbb{D}}$ bounded by pieces of $\tilde{\alpha}'$, \tilde{L} and an arc τ , transversal to the foliation. Any leaf entering Δ through $\tilde{\alpha}'$ must go out through τ , except for a countable set of separatrices ; indeed, by 1°, such a leaf cannot go to x_0 and, because $\tilde{\alpha}'$ is quasi-transverse, it cannot go out through $\tilde{\alpha}'$; this, because it is impossible to have a foliated half-disc with one side as a leaf and the other side quasi-transversal.

By holonomy invariance, the measure of $\tilde{\alpha}' \cap \Delta$ must be less than the measure of τ . But the first one is infinite, because $\tilde{\alpha}'$ covers α' infinitely many times. \square

We define now a set E in $(\partial\mathbb{D})^2$ -diagonal, associated to \mathfrak{F} . A point (x,y) belongs to E if $x \neq y$ and if there is a generalized leaf of $\tilde{\mathfrak{F}} = \pi^{-1}(\mathfrak{F})$ joining them ; a generalized leaf is a leaf or a non bounded closed subset, homeomorphic to \mathbb{R} , which is an union of separatrices and singularities ; as in Lemma 3, any generalized leaf converges to a point of $\partial\mathbb{D}$.

LEMMA 5. The set E is closed in $(\partial\mathbb{D})^2$ -diagonal.

Proof. Although this is true for any measured foliation, we restrict to the case where \mathfrak{F} is minimal. Let (x,y) be a pair of distinct points of $\partial\mathbb{D}$. By Lemma 1, there are closed geodesics α and β giving fundamental systems of neighbourhoods of x and y respectively. Let $\tilde{\alpha}_N$ and $\tilde{\beta}_N$ be the boundaries of the respective half-spaces, the sequence of half-spaces being decreasing. Deform α and β to α', β' quasi-transversal to \mathfrak{F} ; $\tilde{\alpha}_n$ goes to $\tilde{\alpha}'_n \dots$. Because the homotopy is bounded, for big enough n , $\tilde{\alpha}'_n$ and $\tilde{\beta}'_n$ are disjoint simple lines. The integer n now being fixed, we forget it and look at the set of leaves from $\tilde{\alpha}'$ to $\tilde{\beta}'$. Without loss of generality, we can assume that (x,y) is in the closure of E ; in this case there is a leaf from $\tilde{\alpha}'$ to $\tilde{\beta}'$.

Claim. There is a foliated rectangle X in \mathbb{D} , such that a leaf goes from $\tilde{\alpha}'$ to $\tilde{\beta}'$ if and only if it passes through X (figure 4). Furthermore, a leaf in ∂X must contain a singularity.

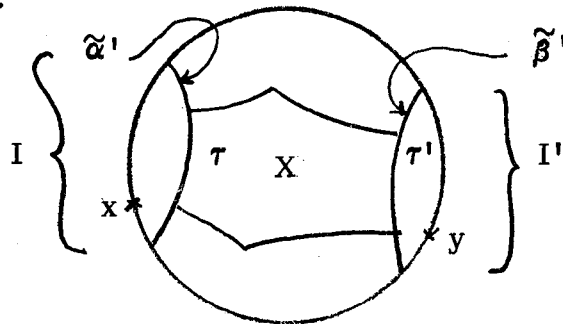


Figure 4

Let L_0, L_1 be two leaves from $\tilde{\alpha}'$ to $\tilde{\beta}'$. Together with arcs of $\tilde{\alpha}'$ and $\tilde{\beta}'$, they bound a rectangle Y . By Euler characteristic considerations, we find that $\text{int } Y$ contains no singularities ; that is, any leaf entering Y through $\tilde{\alpha}'$ goes out through $\tilde{\beta}'$. In other words, the intersections with $\tilde{\alpha}'$ of the leaves going to $\tilde{\beta}'$ form a connected set τ ; let τ' be the corresponding set on $\tilde{\beta}'$.

If τ was non compact, the holonomy map would be defined between two transversal curves in M . This is impossible, because the endpoints of $\tilde{\alpha}'$ and $\tilde{\beta}'$ are distinct and M is not a torus. Moreover [FLP, exp. 5, § II.4], the domain of the holonomy is bounded by a point which belongs to a separatrix. The statement of the claim is now proved.

We return to the proof of the lemma. Let us call I and I' the arcs of $\partial \mathbb{D}$ cut off by the endpoints of $\tilde{\alpha}'$ and $\tilde{\beta}'$ and containing x and y respectively. There is a map $\psi : \tau \rightarrow I$, multivalued at the points which belong to separatrices; for $z \in \tau$, $\psi(z)$ is one of the endpoints of the generalized leaves passing through z . It is an injective correspondence (Lemma 4), "increasing" (two leaves cannot cross); from the continuity of the holonomy map along a finite piece of leaf, one deduces that ψ is right and left-continuous at any point. Thus the image is closed in I , even in $\text{int } I$ (Lemma 4, 2°). Moreover, it is a Cantor set, which we call C ; there is a well-defined continuous map $\varphi : C \rightarrow \tau$, the inverse of ψ . In the same way, there exists a $\varphi' : C' \rightarrow \tau'$ with $C' \subset I'$.

Any leaf from I to I' must meet $\tilde{\alpha}'$ and $\tilde{\beta}'$; by the claim, it crosses τ and τ' . Thus its endpoints a, b belong to C and C' respectively and satisfy the following equation :

$$h \varphi(a) = \varphi'(b) ,$$

where h is the holonomy from τ to τ' . Conversely any pair in $I \times I'$, which satisfies this equation, gives the endpoints of a leaf. Since C and C' are closed the continuity of the maps in the previous equation concludes the proof. \square

We now consider the pair of invariant foliations $\mathfrak{F}^S, \mathfrak{F}^U$ of a pseudo-Anosov homeomorphism φ of M .

LEMMA 6. A leaf of $\tilde{\mathfrak{F}}^S$ and a leaf of $\tilde{\mathfrak{F}}^U$ cannot have a common endpoint in $\partial \mathbb{D}$.

Proof. There exists a closed curve α , which is transversal to both foliations in M . If the foliations are orientable, it is just Haefliger's trick : take a foliated box U and a leaf L of \mathfrak{F}^S which is followed until returning to U and join the endpoints of this arc by a small piece of leaf of \mathfrak{F}^U ; some approximation of this loop has the suitable properties. In the non-orientable case, we achieve this construction in a finite covering space and return to M by projection. The fact that α may be non simple is irrelevant in what follows.

Let us assume that a leaf L_0 of $\tilde{\mathfrak{F}}^S$ and a leaf L_1 of $\tilde{\mathfrak{F}}^U$ converge to the same point x_0 of $\partial \mathbb{D}$. One of the lifts $\tilde{\alpha}$ of α cuts L_0 and L_1 . As in Lemma 4, we get some triangle Δ bounded in $\bar{\mathbb{D}}$ by arcs of L_0, L_1 and $\tilde{\alpha}$; any leaf of $\tilde{\mathfrak{F}}^S$ entering Δ at a point of L_1 must go out through α . But this contradicts the invariance of the measure of $\tilde{\mathfrak{F}}^S$, because the measure of $L_1 \cap \Delta$ is infinite but that of $\tilde{\alpha} \cap \Delta$ is finite. \square

§ 2. - THE DYNAMICS OF A FIXED POINT FREE LIFT.

Let $\tilde{\varphi}$ be a lift of the pseudo-Anosov diffeomorphism φ . Let us assume $\tilde{\varphi}$ has no fixed point in \mathbb{D} . Let L be any leaf of \mathcal{F}^S which is not a separatrix.

THEOREM I. In this case, $\tilde{\varphi}$ has exactly two fixed points, one attractor x_+ and one repeller x_- . Furthermore, there exists a lift \tilde{L} of L separating x_+ and x_- . For any such lift, the images $\tilde{\varphi}^n(\tilde{L})$ tend to x_+ with $n \rightarrow +\infty$.

Proof. Let us start with any lift L_0 of L . Let H_0 be one of the components of $\mathbb{D} - L_0$, and x_0, y_0 the endpoints of L_0 .

1° We first consider the case where $\tilde{\varphi}(H_0) \subset H_0$. Let x_+ be one of the fixed points of $\tilde{\varphi}$ in \bar{H}_0 . We call $x_1 = \tilde{\varphi}(x_0)$ if $\tilde{\varphi}$ is orientation preserving, or $x_1 = \tilde{\varphi}(y_0)$ if not, and so on. This sequence belongs to the arc $[x_+, x_0]$ of $\partial\mathbb{D} \cap \bar{H}_0$ and is monotone; in the same way, we get the sequence y_n in $[x_+, y_0]$ and x_n, y_n are the endpoints of $\tilde{\varphi}^n(L_0)$. Let x_∞, y_∞ be the limits of the previous sequences. If $x_\infty \neq y_\infty$, by Lemma 5, they are endpoints of a leaf L_∞ which is clearly invariant by $\tilde{\varphi}$. Because $\tilde{\varphi}$ is a contraction of L_∞ , there is a fixed point on it.

Thus $x_\infty = y_\infty = x_+$. Hence the leaves $\tilde{\varphi}^n(L_0)$ cannot accumulate in \mathbb{D} , because the leaf of an accumulation point must have its both endpoints at x_+ ; this contradicts Lemma 4 1°. Therefore, $\tilde{\varphi}^n(L_0)$ tends to x_+ for $n \rightarrow +\infty$. In the same way, $\tilde{\varphi}$ has a unique fixed point x_- in $\partial\mathbb{D} - \partial\mathbb{D} \cap \bar{H}_0$ and $\tilde{\varphi}^n(L_0)$ tends to x_- for $n \rightarrow -\infty$.

The dynamics is topologically conjugate to the standard North-South dynamics.

2° If we are not in the previous case, by possibly changing H_0 into $\mathbb{D} - H_0$, we have $\tilde{\varphi}(H_0) \cap H_0 = \emptyset$. With the notations of Figure 5 the interval I contains at least one fixed point x .

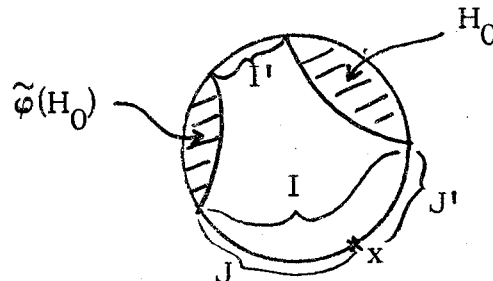


Figure 5

Looking at all the leaves from I' to J' , we find one L_1 , for which the endpoint in J' is the closest to x ^(†); it exists by Lemma 5. It must contain a singularity, a separatrix of which goes to J ; if not, L_1 would not have the previous extremal property.

(†) Remark that there is no leaf of \mathcal{F}^S whose endpoint is x , since by Lemma 4 such a leaf would be invariant by $\tilde{\varphi}$. This fact would imply that $\tilde{\varphi}$ have a fixed point on that leaf, but this is impossible since we assumed that $\tilde{\varphi}$ has no fixed point in \mathbb{D} .

Now, this separatrix followed by the piece of L_1 going to J' makes up a leaf L_2 with endpoints a_2, b_2 in J and J' .

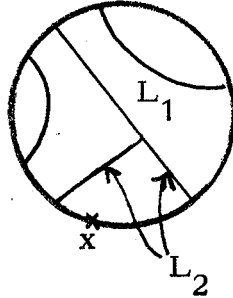


Figure 6

We have $a_2, b_2 \neq x$. Indeed if not, by Lemma 4 1°, L_2 would be $\tilde{\varphi}$ -invariant, and $\tilde{\varphi}$ would have a fixed point in \mathbf{D} . Let H_2 be the half-space bounded by L_2 on the side of x . We have $\tilde{\varphi}(H_2) \subset H_2$ or $\tilde{\varphi}(H_2) \supset H_2$. This is because x is fixed and $\tilde{\varphi}(L_2)$ is a leaf disjoint from L_2 ; therefore, if neither inclusion is satisfied, we have $\mathbf{D} = H_2 \cup \tilde{\varphi}(H_2)$; in particular, $\tilde{\varphi}(H_2) \supset \tilde{\varphi}(H_2)$ -contradiction.

Now we fall into case 1° and the dynamics is North-South. It remains to prove one of the conjugates of L_0 by the Fuchsian group has the property given in the statement. Let τ be a small arc transverse to $\tilde{\mathcal{F}}^S$ and cutting L_2 . The leaf L being dense in M is covered by L'_0 which crosses τ . It is easy to check that L'_0 has the same dynamics as L_2 . \square

§ 3. - THE DYNAMICS OF A LIFT WITH AT LEAST ONE FIXED POINT IN \mathbf{D} .

Let z_0 be a fixed point of $\tilde{\varphi}$ in \mathbf{D} . We are going to study the dynamics by looking at the first power of $\tilde{\varphi}$ leaving each separatrix from z_0 invariant. As we noticed in the introduction, this power is bounded in terms of the genus of M .

For simplicity, let us assume that $\tilde{\varphi}$ itself leaves each separatrix from z_0 invariant. Let A be a separatrix of $\tilde{\mathcal{F}}^u$ starting from z_0 ; let us call B_0 and B_1 the $\tilde{\mathcal{F}}^S$ -separatrices which are adjacent to A with respect to the cyclic order of the separatrices.

Let b_0, b_1 and a be their endpoints. We consider any leaf L of $\tilde{\mathcal{F}}^S$ crossing A which is not a separatrix (figure 7).

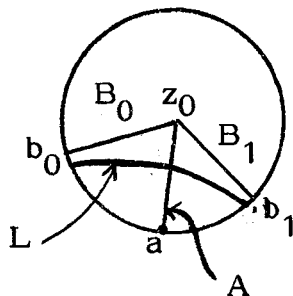


Figure 7

THEOREM II. With the notations as above, $\tilde{\varphi}^n(L)$ tends to a for $n \rightarrow +\infty$ and converges to $\overline{B_0 \cup B_1}$ for $n \rightarrow -\infty$.

Comments. In particular, z_0 is the unique fixed point in \mathbb{D} , of course Lyapounov-unstable; the point a is an attractor for each point in the region limited by $\overline{B_0 \cup B_1}$; b_0 and b_1 are repellers.

Proof. Let x_0 and y_0 be the endpoints of L , $x_0 \in [a, b_0]$, $y_0 \in [a, b_1]$ and $u_0 = L \cap A$. We form the sequence $x_n = \tilde{\varphi}^n(x_0)$, $y_n = \tilde{\varphi}^n(y_0)$, $u_n = \tilde{\varphi}^n(u_0)$; x_n and y_n are the endpoints of $\tilde{\varphi}^n(L)$ and belong respectively to $[a, b_0]$ and $[a, b_1]$. Let x_∞ and y_∞ be the limits of these sequences.. If they are both distinct from a , we get a limit leaf L_∞ joining them and crossing A at a point which is the limit of u_n and that is a contradiction.

If $x_\infty \neq a$ and $y_\infty = a$, then L_∞ is a leaf of $\tilde{\mathfrak{F}}^s$ with an endpoint in common with a leaf of $\tilde{\mathfrak{F}}^u$ and this is forbidden by lemma 6. Thus we have $x_\infty = y_\infty = a$. Therefore $\tilde{\varphi}^n(L) \rightarrow a$ for $n \rightarrow +\infty$, as in the proof of Theorem I.

It remains to see what happens for $n \rightarrow -\infty$. The sequence u_n tends to z_0 . For any neighbourhood U of $\overline{B_0 \cup B_1}$ in $\bar{\mathbb{D}}$, the leaf $\tilde{\varphi}^n(L)$ lies in U for $-n$ big enough; this is just the continuity of the holonomy. \square

To finish this work, we give Nielsen's corresponding statements. He calls $M(\tilde{\varphi})$ the set of fixed points of $\tilde{\varphi} | \partial \mathbb{D}$.

N1 : If $\tilde{\varphi}$ is orientation preserving, $M(\tilde{\varphi})$ consists of a finite and even number of points, which are alternately attracting and repelling.

Indeed, this is clear in the case of Theorem I; in the case of Theorem II, $M(\tilde{\varphi})$ lies in the set of endpoints of the $\tilde{\mathfrak{F}}^u$ and $\tilde{\mathfrak{F}}^s$ separatrices starting from z_0 . With the hypothesis that $\tilde{\varphi}$ is orientation preserving, either $\tilde{\varphi}$ fixes all these endpoints and the statement is clear by Theorem II, or $M(\tilde{\varphi}) = \emptyset$. In either case if $\tilde{\varphi}$ is orientation reversing, $\tilde{\varphi}$ may have periodic points in $\partial \mathbb{D}$.

Let $M^*(\tilde{\varphi})$ be the subset of attracting points in $M(\tilde{\varphi})$. Let $\Omega(\tilde{\varphi})$ be the convex hull of $M^*(\tilde{\varphi})$ in \mathbb{D} .

N2 : For each $f \in F$, $f \neq 1$, $f\Omega(\tilde{\varphi}) \cap \Omega(\tilde{\varphi}) = \emptyset$.

This statement is only related to Theorem II; $M^*(\tilde{\varphi}) = \{\text{endpoints of } \tilde{\mathfrak{F}}^u\text{-separatrices of } z_0\}$. Then $fM^*(\tilde{\varphi}) = \{\text{endpoints of } \tilde{\mathfrak{F}}^u\text{-separatrices of } fz_0\}$ and the statement follows from the fact that the separatrices of fz_0 are disjoint from

those of z_0 . By the same argument, we get :

N3 : $\forall k; f \in F, \forall n, m \in \mathbb{Z}, \Omega(k\tilde{\varphi}^n)$ and $\Omega(f\tilde{\varphi}^m)$ are disjoint or identical.

We notice that $\Omega(\tilde{\varphi})$ has a non-empty interior if and only if z_0 is a singularity of $\tilde{\mathfrak{F}}^n$. Because there is only a finite number of singularities on the surface, we get :

N4 : Among the $\Omega(k\tilde{\varphi}^n)$ there are only a finite number having a non empty interior which are not conjugate by an element of F .

Finally, we will explain how to produce the situation of Theorem I. We start with a lift $\tilde{\varphi}$ fixing a singularity z_0 and its separatrices (figure 8).

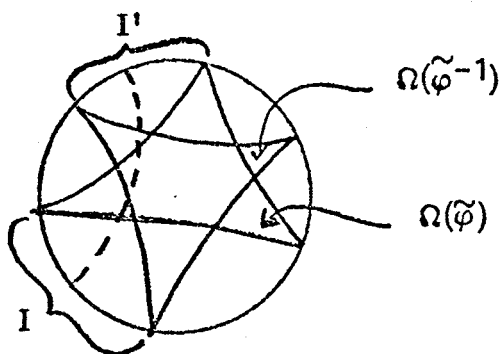


Figure 8

Let $\alpha(f)$ be an axis of F from I to I' [GH, chap. 13]. By taking a high power f^{n_0} , we have $f^{n_0}(\partial D - I) \subset I'$. Then the fixed points of $f^{n_0}\tilde{\varphi}|_{\partial D}$ lie in $I \cup I'$, with at least one in each interval. If there are more than two, I and I' must each contain at least one attractor (or repeller). If this is the case, $\Omega(\tilde{\varphi})$ and $\Omega(f^{n_0}\tilde{\varphi})$ would have a non trivial intersection; contradiction with N3.

REFERENCES

- [B] R.F. BROWN, The Lefschetz fixed point theorem, Scott, Foresman and Company, Glenview (1971).
- [FLP] Travaux de Thurston sur les surfaces, Astérisque 66-67, 1979.
- [GH] W.H. GOTTSCHALK and G.A. HEDLUND, Topological Dynamics, AMS, Providence (1955).
- [M] R. MILLER, Geodesic laminations from Nielsen's viewpoint, Adv. in Math 45 (1982), p. 189-212.
- [N] J. NIELSEN, Untersuchungen zur Topologie des geschlossenen zweiseitigen Flächen, Acta Math., I, vol. 50 (1927), p. 189-358,
 II, vol. 53 (1929), p. 1-76
 III, vol. 58 (1932), p. 87-167.

Surface transformations of algebraically finite type,
 Danske Vid. Selsk, Math.Phys. 21, 2 (1944), p. 1-89.

APPENDICE 2.

RESEAUX FERROVIAIRES ET COURBES SIMPLES SUR LES SURFACES

Athanase PAPADOPOULOS

Résumé. W. Thurston a introduit, dans son étude des difféomorphismes des surfaces, l'espace $\mathfrak{M}_{\mathfrak{F}}$ des classes de feuilletages mesurés et a montré que les réseaux ferroviaires munissent cet espace d'une structure PL. Nous établissons dans cette note des formules algorithmiques linéaires par morceaux pour le nombre d'intersection d'une courbe avec les feuilletages mesurés paramétrés par un réseau ferroviaire, ce qui redémontre l'existence d'une structure PL sur $\mathfrak{M}_{\mathfrak{F}}$ et établit la naturalité de cette structure par rapport au plongement $\mathfrak{M}_{\mathfrak{F}} \subset \mathbb{R}_+^{\mathfrak{S}}$.

Train tracks and simple curves on surfaces.

Abstract. We establish in this note algorithmic PL formulae for the intersection number of simple closed curve with measured foliations parametrized by train tracks. This gives a new proof of the existence of a PL structure on the space $\mathfrak{M}_{\mathfrak{F}}$, the first proof being due to Thurston; our proof shows the naturality of this PL structure with respect to the inclusion $\mathfrak{M}_{\mathfrak{F}} \subset \mathbb{R}_+^{\mathfrak{S}}$.

1. NOTATIONS ET RAPPELS.

Dans ce qui suit, M est une surface fermée orientable de genre ≥ 2 , τ un réseau ferroviaire sur M et V un voisinage adapté de τ muni d'un feuilletage \mathfrak{F} par les traverses.

Pour les éléments de la théorie des réseaux ferroviaires, on renvoie à Thurston [4] qui l'a introduite, ainsi qu'à [1] et [3]. On rappelle cependant qu'aucune composante de $M - \tau$ n'est difféomorphe à un disque ou un anneau lisses, ou à un disque à une ou deux pointes. On associe (classiquement) à τ un espace vectoriel \mathbb{R}^N construit sur l'ensemble de ses arêtes, et un cône $E_{\tau} \subset \mathbb{R}_+^N$ défini par les équations provenant des aiguillages. On ne considèrera que des aiguillages simples (à 3 brins). De plus, pour tout τ , le cône E_{τ} est supposé avoir des points dont les coordonnées sont toutes > 0 . On a une application injective φ_{τ} de E_{τ} dans l'espace $\mathfrak{M}_{\mathfrak{F}}$ des classes de Whitehead de feuilletages mesurés sur M .

Remarquons que les singularités des feuilletages partiels considérés se trouvent sur le bord de leur support et sont du type "pointes", comme les singularités du bord d'un voisinage adapté de réseau ferroviaire. Le couple (\mathcal{F}, μ) désigne ici un feuilletage géométrique (c'est-à-dire sans équivalence) \mathcal{F} , muni de la mesure transverse invariante μ , et $[\gamma]$ désigne un élément de l'espace \mathcal{S} des classes d'isotopie de courbes simples fermées sur M .

2. On introduit les deux définitions suivantes :

Définition 1. Une courbe γ immergée dans M est un représentant de $[\gamma]$ en position normale par rapport à τ si et seulement si γ est une limite de plongements dans $[\gamma]$, n'ayant pas de point double en dehors du support de τ , et tel qu'il n'existe pas de disque plongé dans M dont l'intérieur ne rencontre pas τ et dont le bord est constitué par la réunion d'un segment lisse de τ et d'un segment de γ (à la source de l'immersion).

Définition 2. Etant donné un feuilletage mesuré partiel (\mathcal{F}, μ) sur M , on dira qu'une courbe immergée γ est un représentant de $[\gamma]$ quasi-transverse à (\mathcal{F}, μ) si les 4 conditions suivantes sont réalisées :

1° γ est une limite de plongements dans $[\gamma]$, les points multiples de γ étant contenus dans la réunion des pointes de \mathcal{F} et des feuilles reliant les pointes.

2° Chaque composante connexe de $\gamma \cap \text{supp } \mathcal{F} \setminus \{\text{pointes de } \mathcal{F}\}$ est un segment qui est ou bien dans une feuille, ou bien transverse à \mathcal{F} .

3° Les 3 configurations locales données par la figure 1 sont interdites.

4° Il n'existe pas de disque plongé dans M dont l'intérieur est disjoint du support de \mathcal{F} et dont le bord est formé par la réunion d'un segment lisse du bord de ce support et d'un segment de γ .

On utilisera les deux lemmes suivants :

LEMME 1. Si c est un segment dans M tel qu'il existe un disque plongé dans M dont le bord est constitué par un segment lisse de τ et un sous-segment de c , il existe un disque vérifiant les mêmes propriétés et dont l'intérieur ne rencontre pas τ .

Le lemme 1 se démontre par un argument d'indice d'Euler-Poincaré.

LEMME 2. Si γ est un représentant de $[\gamma]$ quasi-transverse à (\mathfrak{F}, μ) , alors $i((\mathfrak{F}, \mu), [\gamma]) = \int_{\gamma} \mu$. \square

3.

PROPOSITION 1. Pour tout τ et pour tout $[\gamma]$, il existe un représentant γ de $[\gamma]$ en position normale par rapport à τ .

Démonstration (esquisse). Fixons un feuilletage mesuré (\mathfrak{F}, μ) tel que \mathfrak{F} soit de support égal à V , transverse au feuilletage \mathfrak{J} par les traverses et tangent au bord de V , et prenons une immersion γ_0 représentant $[\gamma]$ et quasi-transverse à (\mathfrak{F}, μ) (l'existence d'une telle courbe découle de [2], exposé 5, §II.6). On choisit γ_0 de telle sorte qu'il n'existe pas de configuration du type décrit par la figure 2 (a). Les traverses passant par les pointes découpent V en des rectangles, appelés rectangles maximaux, feuilletés horizontalement (par la trace de \mathfrak{F}) et verticalement (par la trace de \mathfrak{J}).

On remplace γ_0 par une courbe γ_1 vérifiant toutes les propriétés de γ_0 et telle qu'il n'existe pas de disque plongé dans M dont l'intérieur est contenu dans un rectangle maximal et dont le bord est formé par un segment dans γ_1 et un segment AB dans le bord vertical d'un rectangle maximal. Pour cela, si AB contient une pointe dans son intérieur (c'est le cas de la figure 2 (b) par exemple), on introduira la configuration donnée par la figure 3 (a). On obtient ainsi γ_1 par une itération où à chaque pas le nombre de points d'intersection de la courbe avec

les traverses passant par les pointes diminue.

Chaque composante connexe de $\gamma_1 \cap V \setminus \{\text{pointes de } V\}$ passe par un certain nombre de rectangles maximaux, et l'entrée et la sortie d'une telle composante dans un rectangle maximal ne se fait jamais par le même côté. On peut par conséquent remplacer γ_1 par une courbe γ_2 vérifiant les mêmes propriétés et transverse au feuilletage \mathfrak{F} , sauf aux pointes où l'on peut avoir des configurations telles que celle de la figure 3 (a). On remplace alors ces configurations par celles de la figure 3 (b). On a ainsi introduit peut-être des configurations du type décrit par la figure 2 (a), mais avec une condition sur le feuilletage vertical (les angles d'entrée de la courbe dans V sont dans les quadrants indiqués).

On élimine ensuite les configurations 4 (a) comme indiqué par la figure 4 (b), par une itération qui diminue à chaque pas le nombre de composantes connexes de la courbe dans le complémentaire de V .

En formant le quotient de V par l'opération consistant à écraser chaque feuille de \mathfrak{F} en un point, on obtient un réseau ferroviaire isotope à τ (que l'on identifiera à τ), et la courbe γ recherchée. \square

PROPOSITION 2. Pour tout τ , l'application φ_τ est continue, et pour chaque élément $[\gamma]$ de \mathcal{S} , l'application de E_τ dans \mathbb{R} définie par $x \mapsto i(\varphi_\tau(x), [\gamma])$ est donnée par une formule algorithmique linéaire par morceaux.

Remarque. La continuité de φ_τ est facile à démontrer pour les points de l'intérieur du cône E_τ (correspondant donc à des poids partout > 0) car ici, si deux points sont proches, leurs images admettent des représentants géométriquement proches, et des courbes proches réalisant le minimum du nombre d'intersection. La proposition 2 donne la continuité sur l'espace E tout entier (y compris son bord).

Démonstration de la proposition 2. Soit γ un représentant de $[\gamma]$ en position normale par rapport à τ . Nous supposons d'abord que γ n'est pas entièrement contenu dans τ et nous écrivons $\gamma = \gamma_1 * \dots * \gamma_n$, où pour tout i , γ_i est un chemin à extrémités dans $M - \tau$ et $\gamma_i \cap \tau$ est connexe.

Pour tout i , nous définissons une fonction $\mu_i : E_\tau \rightarrow \mathbb{R}$ de la manière suivante : Nous fixons une orientation sur γ_i et nous regardons les arêtes de τ aboutissant sur ce chemin en se limitant à un seul côté de γ_i ; par exemple sur la figure 5, on choisit le côté des arêtes a_1, \dots, a_8 . Un point $x \in E_\tau$ correspond à un poids ≥ 0 sur chaque arête de τ . Nous commençons à parcourir γ_i en partant de son origine et nous appelons x_1 la somme des poids du 1er paquet d'arêtes "entrantes" rencontrées, y_1 la somme des poids du 1er paquet d'arêtes "sortantes", x_2 celle du 2e paquet d'arêtes entrantes et ainsi de suite. (Ainsi, dans la figure 5, x_1 représente la somme des poids des arêtes a_1, a_2 et a_3 ; le nombre y_1 est le poids de a_4 ; le nombre x_2 est la somme des poids de a_5 et a_6 , et le nombre y_2 la somme des poids de a_7 et a_8 .)

Le nombre $\mu_i(x)$ est une somme de termes ≥ 0 calculés de la manière suivante :

- Si $x_1 - y_1 < 0$, le premier terme de cette somme est égal à $|x_1 - y_1|$.
- Si $x_1 - y_1 \geq 0$, on regarde le terme $x_1 - y_1 + x_2 - y_2$. S'il est < 0 , le premier terme de la somme sera $|x_1 - y_1 + x_2 - y_2|$. S'il est ≥ 0 , on regarde le signe de $x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + x_3 - y_3$ et ainsi de suite. Si toutes les sommes ainsi testées sont ≥ 0 , on pose $\mu_i(x) = \sum_i x_i - y_i$. Sinon, le premier terme de $\mu_i(x)$ étant $|x_1 - y_1 + \dots + x_k - y_k|$ (où $x_1 - y_1 + \dots + x_k - y_k$ est donc le premier terme < 0 rencontré ayant cette forme), pour définir le 2e terme on commence par tester le signe de $x_{k+1} - y_{k+1}$ et ainsi de suite. On s'arrête après avoir parcouru tout le chemin γ_i , ce qui définit la fonction μ_i .

Pour tout $x \in E_\tau$, $\mu_i(x)$ représente la mesure transverse, par rapport à un feuilletage mesuré géométrique $(\mathcal{F}(x), \mu(x))$ représentant $\varphi(x)$, d'un

segment γ_i^* pisté par γ_i (c'est-à-dire coupant les mêmes traverses de \mathfrak{F}), quasi-transverse à $\mathfrak{F}(x)$ avec extrémités fixées (définition analogue à la définition 2 ci-dessus). La figure 6 donne l'idée de la construction de la courbe γ_i^* ; la figure 6 (a) correspond au cas où $x_1 - y_1 < 0$, et A_1B_1 est le premier morceau de la courbe γ_i^* . Les figures 6 (b), (c) et (d) montrent que si $x_1 - y_1 \geq 0$ on est bien ramené à étudier le signe de $x_1 - y_1 + x_2 - y_2$.

On a, $\forall x \in E$, $i(\varphi_\tau(x), [\gamma]) = \sum_{i=1}^n \mu_i(x)$. Pour le voir, on vérifie que les chemins γ_i^* se recollent pour donner une courbe quasi-transverse à $\mathfrak{F}(x)$. Le lemme 1 sert à vérifier la condition 4 de la définition 2, et tient compte des poids nuls qui peuvent intervenir dans x . On applique ensuite le lemme 2.

Nous considérons, pour terminer, le cas où γ est entièrement contenu dans τ . Dans ce cas, la construction d'une courbe quasi-transverse pistée par γ montre que $i(\varphi_\tau(x), [\gamma])$ est calculé de la manière suivante : On fixe arbitrairement une origine sur γ , et on définit comme ci-dessus les nombres de x_i et y_i . Par le procédé donné ci-dessus, en parcourant γ , on trouve une somme $\mu(x)$ de la forme $\mu^*(x) + x_k - y_k + \dots + x_n - y_n$ où $\mu^*(x)$ est la somme de tous les termes calculés sauf le dernier. Si le dernier terme, $x_k - y_k + \dots + x_n - y_n$, est < 0 , $i(\varphi_\tau(x), [\gamma])$ est égal à $\mu(x)$. Si ce terme est ≥ 0 , la valeur de $i(\varphi_\tau(x), [\gamma])$ est égale à $|\mu^*(x) - (x_k - y_k + \dots + x_n - y_n)|$. Ainsi, dans tous les cas, μ est une fonction PL à coefficients dans \mathbb{Z} . \square

4. La proposition 2 implique le théorème suivant :

THEOREME. L'espace $m\mathfrak{F}$ est une sous-variété PL de l'espace fonctionnel $R_+^{\mathfrak{S}}$ dont les cartes sont données par les applications φ_τ associées aux réseaux ferroviaires maximaux.

Remarques. 1° Nous savions déjà que l'atlas $(\text{int } E_\tau, \varphi_\tau |_{\text{int } E_\tau})$ (où τ parcourt l'ensemble des réseaux ferroviaires maximaux) définit une structure PL pour l'espace \mathcal{M} (voir [3] et [4] ; dans cette dernière référence, une telle structure est décrite pour l'espace des laminations géodésiques mesurées). Le théorème ci-dessus implique la naturalité de cette structure par rapport au plongement $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+^{\mathbb{S}}$ (et redémontre son existence). Le groupe $\pi_0(\text{Diff } M)$ agissant linéairement sur $\mathbb{R}_+^{\mathbb{S}}$ agit de manière PL sur \mathcal{M} .

2° On a en fait une structure PL à coefficients entiers, ce que Thurston note PIL (piecewise integral linear).

Il m'est agréable de remercier ici A. Fathi et F. Laudenbach pour les discussions que nous avons eues ensemble, qui m'ont aidé à comprendre cette théorie.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] F. BONAHOE, Ribbon fibered knots, cobordism of surface diffeomorphisms and pseudo-Anosov diffeomorphisms, Math. Proc. Cam. Phil. Soc. (1983).
- [2] A. FATHI et al., Travaux de Thurston sur les surfaces, Astérisque 66-67 (1979).
- [3] A. PAPADOPOULOS, Thèse de 3e cycle, dans ce volume.
- [4] W. THURSTON, The geometry and topology of 3-manifolds, Princeton University, cours photocopié.

A. PAPADOPOULOS
G.R. 21 du CNRS
Université de Paris-Sud
Mathématiques, bâtiment 425
F - 91405 ORSAY

Août 1983

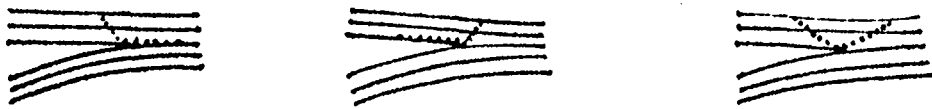


Figure 1
(γ en pointillé)

(a)

(b)

(c)



Figure 2 (a)

(b)

Figure 3 (a)

(b)



Figure 4

(a)

(b)

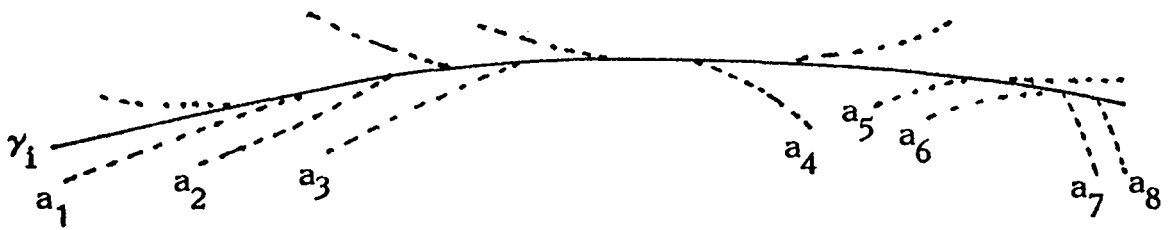


Figure 5

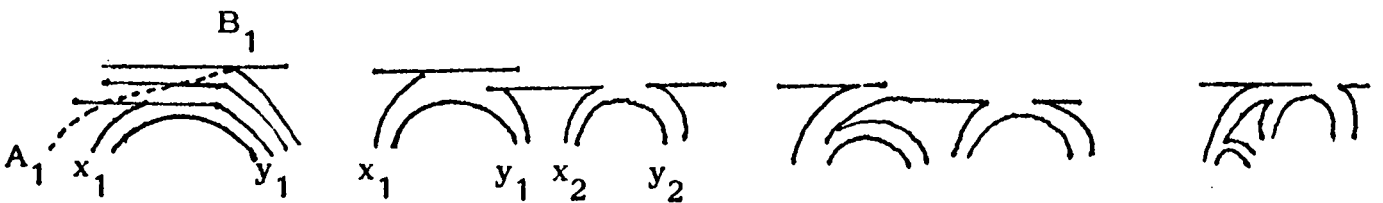


Figure 6 (a)

(b)

(c)

(d)

N° d'impression : 596
4e trimestre 1983