PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

N° 77-77

SEMINAIRE D'ANALYSE HARMONIQUE

1976-1977

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 ORSAY France

PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

N° 77-77

SEMINAIRE D'ANALYSE HARMONIQUE

1976-1977

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 ORSAY France

VIBRATIONS DU TORE $\mathbf{T}^k$ DE CLASSE $\mathcal{C}^{k/2}$

par Jean-Paul Allouche et Marc Laborde

I. INTRODUCTION.

Dans un exposé au Séminaire Delange-Pisot-Poitou ([13]), Y. Meyer a construit une solution de l'équation des ondes sur $\mathbf{T}^2 = (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^2$ qui possède les propriétés suivantes : $u(x_1,x_2,t)$ est, pour tout $\varepsilon > 0$, de classe $\mathcal{C}^{1-\varepsilon}$; l'énergie de $u(x_1,x_2,t)$ est finie mais $u(x_1,x_2,t)$ n'est pas presque-périodique en t. La méthode employée ne permettait pas de construire une solution de classe $\mathcal{C}^1$ qui ne soit pas presque-périodique en t.

R. Coifman ([5]) eut l'idée d'utiliser les séries trigonométriques étudiées par S. Wainger dans ([16]) pour produire un tel contre-exemple.

Dans l'exposé qui suit, les auteurs montrent d'abord comment modifier la série de Wainger pour produire des solutions de l'équation des ondes. Les simplifications apportées dans les démonstrations sont dues à R. Coifman.

L'étude asymptotique $(t \to +\infty)$ des solutions obtenues repose sur le théorème de Kronecker ([8]).

On conclut facilement si $k \geq 4$. Les difficultés apparaissant si $k = 2$ ou $k = 3$ ont été résolues par les auteurs.

II. ENONCE DU THEOREME FONDAMENTAL.

Supposons l'espace euclidien $\mathbb{R}^k$ muni de la norme canonique définie par $|x| = (x_1^2 + \ldots + x_k^2)^{1/2}$ à laquelle est associé le laplacien $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$. Désignons par $\mathbb{Z}^k$ le réseau des $(m_1, \ldots, m_k)$ tels que $m_j \in \mathbb{Z}$. Soit $\mathbb{T}^k = \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$; en identifiant localement $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{T}^k$ nous transportons Δ et $|x|$ sur $\mathbb{T}^k$.

Pour tout nombre réel $\alpha \geq 0$, nous définissons l'espace de Fréchet $\mathscr{C}^\alpha_{loc}(\mathbb{T}^k \times \mathbb{R})$ de la façon suivante. Si $0 \leq \alpha < 1$, $\varphi \in \mathscr{C}^\alpha_{loc}(\mathbb{T}^k \times \mathbb{R})$ si

$$(1) \qquad \lim_{(x,t) \to (x_o,t_o)} \frac{|\varphi(x,t) - \varphi(x_o,t_o)|}{(|x-x_o| + |t-t_o|)^\alpha} = 0$$

uniformément sur tout compact de $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}$.

Si $\alpha \geq 1$, on écrit $\alpha = q + \beta$ où $0 \leq \beta < 1$. On convient que $\varphi \in \mathscr{C}^\alpha_{loc}(\mathbb{T}^k \times \mathbb{R})$ si $\forall (q_1, \ldots, q_k) \in \mathbb{N}^k$ tels que $q_1 + \ldots + q_k \leq q$,

$$\frac{\partial^{q_1+\ldots+q_k}}{\partial x_1^{q_1} \ldots \partial x_k^{q_k}} \varphi \in \mathscr{C}^\beta_{loc}(\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}).$$

Avec ces notations on peut énoncer le théorème suivant :

THEOREME. $\forall k \geq 2$, <u>il existe une solution</u> $u(x_1, \ldots, x_k, t) \in \mathscr{C}^{k/2}_{loc}(\mathbb{T}^k \times \mathbb{R})$ <u>de l'équation des ondes</u> $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$, <u>telle que</u> $\overline{\lim_{t \to +\infty}} |u(0, \ldots, 0, t)| = +\infty$.

En particulier $u(x_1, \ldots x_k, t)$ n'est pas presque-périodique en t. Ce résultat est le plus précis possible ; on montre en effet que, pour tout $\varepsilon > 0$, toute solution $u(x,t) \in \mathcal{C}^{k/2+\varepsilon}_{loc}(\mathbf{T}^k \times \mathbf{R})$ de $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$, est presque périodique en t, uniformément en $x \in \mathbf{T}^k$, (voir [3]).

III LA SERIE DE WAINGER.

Nous pouvons écrire tout de suite la série de Fourier de la solution $u(x,t)$ décrite par le théorème 1. Il s'agit de :

$$(2) \qquad u(x,t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}^k}{}' \; e^{i|n|t} \, e^{2i\pi n.x} \, e^{i|n|\log^d|n|} \, |n|^{-k} (\mathrm{Log}\,|n|)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}$$

La notation Σ' signifie que l'on somme sur $n \in \mathbf{Z}^k$ tel que $|n| > 1$. Montrons que $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, d(\varepsilon) > 0$ tel que, si $0 < d < d(\varepsilon)$, alors $u(x,t) \in \mathcal{C}^{k/2}_{loc}(\mathbf{T}^k \times \mathbf{R})$.

Le comportement asymptotique de $u(0,t)$ sera examiné au § 4. Remarquons que les coefficients de Fourier de $u(x,t)$ ne dépendent que de $|n| = (n_1^2 + \ldots + n_k^2)^{1/2}$.

La convergence du second membre de (2) n'est pas évidente. Cette difficulté sera contournée en introduisant un facteur de sommation.

Pour tout $\varepsilon > 0$, on considèrera la série

$$(3) \qquad u_\varepsilon(x,t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}^k}{}' \frac{\exp\left[i|n|t + 2\pi i n.x + |n|\log^d|n| - \varepsilon|n|\right]}{|n|^k (\log|n|)^{1/2+\varepsilon}} .$$

Nous nous proposons de montrer que, uniformément en $\varepsilon > 0$, $u_\varepsilon(x,t)$ vérifie les propriétés que nous demandons à $u(x,t)$. Enfin l'étude de $u_\varepsilon(x,t)$ se fera en utilisant la formule sommatoire de Poisson. Cela signifie que l'on étudie les intégrales de Fourier avant les séries de Fourier. On est donc amené aux considérations suivantes.

Soit ψ une fonction de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant :

i) $\psi = 0$ sur $]-\infty, \frac{3}{2}]$

ii) $\psi = 1$ sur $[2, +\infty[$

iii) $0 \leq \psi(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$,

et soit Y_ℓ une harmonique sphérique de degré ℓ (voir [4]).

On définit $F_\varepsilon : \mathbb{R}^k \to \mathbb{C}$ par sa transformée de Fourier :

$$\hat{F}_\varepsilon(x) = \psi(|x|)\,|x|^{-b}\,\mathrm{Log}^{-c}|x|\;Y_\ell(x')\exp(-\varepsilon|x| + i|x|\mathrm{Log}^d|x| + i\lambda|x|),$$

où $\lambda, b \in \mathbb{R}$, $c > 0$, $d > 0$, $\varepsilon > 0$, et $x' = \frac{x}{|x|}$.

PROPOSITION 1.

i) $F(x) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} F_\varepsilon(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}^k$, et est une fonction indéfiniment différentiable de x et de λ.

ii) Si $b > \frac{k}{2}$, ou si $b = \frac{k}{2}$ et $c - kd \geq \frac{1}{2}$, $F(x) = O(R^{-k-\frac{1}{2}})$ pour $R = |x| \to +\infty$. En particulier si $b = \frac{k}{2}$ et si $c > \frac{1}{2}$, il existe $d > 0$ tel que $F(x) = O(R^{-k-\frac{1}{2}})$.

Démonstration.

On a tout d'abord [voir par exemple [2]] :

$$F_\varepsilon(x) = 2\pi(-i)^\ell\, Y_\ell(x')\,R^{\frac{1}{2}(2-k)}\,\varphi(R),$$

avec $\varphi(R) = \int_0^\infty J_{\frac{1}{2}(k-2)+\ell}(2\pi Rs)\,\psi(s)\,s^{-b+k/2}\log^{-c}s\,\exp(-\varepsilon s + i\lambda s + is\mathrm{Log}^\alpha s)\,ds$,

où $J_p(x)$ est la fonction de Bessel d'ordre p [17].

Pour étudier $\varphi(R)$, nous allons utiliser le théorème de Cauchy :

- L'intégrale de 0 à 2 ne pose aucun problème, car on intègre sur un compact, et on peut donc appliquer les théorèmes de convergence dominée de Lebesgue.

- Soient M de coordonnées $(2,0)$, N de coordonnées $(T,0)$ et P de coordonnées $(T\ ,\ T-2)$.

Dans le domaine ainsi défini, on a $\mathrm{Re\,Log}\, z \geq \mathrm{Log}\, 2$. On peut donc définir $(\mathrm{Log}\, z)^d$ par une détermination qui donne 1 pour $z = e$, ($\mathrm{Log}\ z$ désignant la valeur principale).

On considère alors la fonction de la variable complexe z :

$$J_{1/2(k-2)+\ell}(2\pi Rz)\,\mathrm{Log}^{-c} z\; z^{-b+\frac{k}{2}} \exp(-\varepsilon z + i\lambda z + iz\,\mathrm{Log}^d z).$$

Si l'on pose $z = \sigma + i\tau$, on a alors dans le domaine d'intégration, $0 \leq \tau \leq \sigma$, et donc :

(3) $$\left|\exp(is\,\mathrm{Log}^d s)\right| \leq B \exp(-A\ \tau\ \mathrm{Log}^d \tau) \quad \text{où} \quad A,B > 0\ ;$$

en effet, quand $|z| \to +\infty$, $\mathrm{Arg\,Log}\, z \to 0^+$, d'où, pour z assez grand, $\mathrm{Im}(\mathrm{Log}^d z) \geq 0$, d'où $\mathrm{Im}(z\,\mathrm{Log}^d z) \geq \tau\ \mathrm{Re}(\mathrm{Log}^d z) \geq A'\tau \left|\mathrm{Log}\, z\right|^d \geq A\tau\,\mathrm{Log}^d |z|$, et donc, pour tout z appartenant au domaine, $\mathrm{Im}(z\,\mathrm{Log}^d z) \geq A\ \tau\,\mathrm{Log}\ \tau - B'$.

D'autre part, l'expression asymptotique des fonctions de Bessel ([17] p. 198-199) pour $|z| \to +\infty$: $J_p(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}\,(ae^{iz} + be^{-iz})(1 + O(\frac{1}{z}))$ et le fait que $\frac{J_p(z)}{z^p} \to C_p$ quand $z \to 0$, permettent d'écrire :

(4) $$\left|J_p(z)\right| \leq C\,|z|^p \exp \tau .$$

L'intégrale sur NP, majorée par

$$\alpha \exp(-\varepsilon T) \int_0^\infty \left|T+i\tau\right|^\eta \exp\left[(2\pi R-\lambda)\ \tau - A\tau\log^d\tau\right] d\tau,$$

tend donc vers zéro quand $T \to \infty$. On a donc $\varphi(R) = \lim\limits_{T\to\infty} \int_{MP}$, d'après le théorème de Cauchy.

Or les estimations (3) et (4) montrent que cette intégrale est absolument convergente, uniformément en ε. D'après le théorème de convergence dominée, φ est donc une fonction continue de R et de λ sur $[0,+\infty[\times \mathbb{R}$.

Soit alors $s = (s_1, \ldots, s_k)$ un multi-entier. Comme $x^s \widehat{F}_\varepsilon$ est intégrable, $(D^s F_\varepsilon)^\wedge$ existe et égale $(2i\pi x)^s \hat{F}_\varepsilon(x)$.

Or $x^s = (x^s . |x|^{-\|s\|}) . |x|^{\|s\|}$ (où $\|s\| = s_1 + \ldots + s_k$).

Comme $x^s . |x|^{-\|s\|}$ est une combinaison linéaire finie d'harmoniques sphériques, et que le produit de deux harmoniques sphériques est une combinaison linéaire finie d'harmoniques sphériques, (c'est une conséquence facile de la proposition 3-b, p. 31 de [4]), on voit que $D^s F_\varepsilon$ est une somme de termes analogues à F_ε mais dans lesquels on a remplacé b par $b - \|s\|$.

En particulier, les dérivées de F au sens des distributions coïncident donc avec des fonctions continues, ce qui montre que F est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ de x. En reprenant le même raisonnement pour des dérivations par rapport à λ, on voit donc que F est $\mathcal{C}^\infty$ en x et en λ, ce qui achève la démonstration du i).

Remarque.

Pour la même raison, les dérivées d'ordre s de F seront aussi des $\mathcal{O}(R^{-k-1/2})$ si $b - \|s\| > \frac{k}{2}$ ou si $b - \|s\| = \frac{k}{2}$ et si $c - kd \geq \frac{1}{2}$.

Etudions maintenant le comportement de F quand $R \to \infty$.

La formule $\frac{d}{dx}\left[x^{p+1} J_{p+1}(x)\right] = x^{p+1} J_p(x)$ ([17], p. 45)

permet d'écrire, si f est identiquement nulle au voisinage de 0 et si f tend vers 0 à l'infini :

$$\int_0^\infty f(t)\, J_p(2\pi Rt)\, dt = \frac{1}{2\pi R} \int_0^\infty \left[(p+1)\, t^{-1} f(t) - f'(t)\right] J_{p+1}(2\pi Rt)\, dt.$$

Après ν intégrations par parties, on obtient donc pour $\varphi(R)$ une somme de termes de la forme

$$R^{-\nu} \int_0^\infty \psi^{(j)}(s)(\log^{-c} s)^{(q)} (s^{-b+\frac{k}{2}})^{(\ell)}\, s^{-m} \left[\exp(-\varepsilon s + i\lambda s + is\log^d s)\right]^{(n)} J_{p+\nu}(2\pi Rs)\, ds$$

où $\nu = j + q + \ell + m + n$.

Les termes où $j \neq 0$ sont triviaux car l'intégration se fait alors sur un compact et on utilise l'expression asymptotique des fonctions de Bessel.

Supposons donc $j = 0$ et fixons-nous $\nu = k$, $\varepsilon = 0$. En développant par la formule du binôme, on obtient donc une somme de termes de la forme

$$I(R) = \int_0^\infty \psi(s) \log^{-c_1} s\; s^{-\eta}\, e^{i(\lambda s + s\log^d s)} J_{p+k}(2\pi Rs)\, ds$$

avec $c_1 \geq c - kd \geq \frac{1}{2}$ et $\eta \geq b - \frac{k}{2} \geq 0$.

Or on a : $J_{p+k}(2\pi Rs) = \alpha(sR)^{-1/2}\, e^{2i\pi Rs} + \beta(sR)^{-\frac{1}{2}}\, e^{-2i\pi Rs} + \mathcal{O}(s^{-3/2} R^{-3/2})$.

La dernière intégrale est absolument convergente et ne pose donc aucun problème. Il en est de même lorsqu'on intègre les deux autres termes entre 0 et e.

Pour montrer que $F(x) = \mathcal{O}(R^{-k-\frac{1}{2}})$, il reste donc à montrer que si $\eta \geq \frac{1}{2}$ et $c_1 \geq \frac{1}{2}$, alors

$$\left| \int_e^\infty \log^{-c_1} s \;\; s^{-\eta}\, e^{i(ts + s\log^d s)}\, ds \right| \leq C$$

où C est une constante qui ne dépend pas de $t = \lambda \pm 2\pi R$. On utilise pour cela le lemme de Van der Corput ([18] p. 226).

Si r est positive et décroissante, si $f'' > 0$ et si r'/f'' est monotone, alors

$$\left|\int_a^b r(s)\, e^{2i\pi f(s)}\, ds\right| \leq 8 \sup_{[a,b]} \left|\frac{r(s)}{\sqrt{f''(s)}}\right| + \sup_{[a,b]} \left|\frac{r'(s)}{f''(s)}\right| .$$

Ici, nous avons :

$$f(s) = \frac{1}{2\pi}(ts + s \log^d s) \qquad \text{et} \qquad r(s) = s^{-\eta} \log^{-c_1} s$$

d'où
$$f''(s) = \frac{1}{2\pi}\ \frac{d}{s} \log^{d-1} s\left(1 + \frac{d-1}{\log s}\right)$$

et
$$r'(s) = -s^{-\eta-1} \log^{-c_1} s\left(\eta + \frac{c_1}{\log s}\right) ;$$

$$\left|\frac{r'}{f''}\right| \quad \text{est donc décroissante si} \quad d < 1,$$

et $\dfrac{r^2}{f''} = \dfrac{2\pi}{d}\, s^{1-2\eta} (\log s)^{-2c_1+1-d} \times \dfrac{1}{1 + \frac{d-1}{\log s}}$ est bornée indépendamment de t, puisque $\eta \geq \frac{1}{2}$ et que $2c_1 + d - 1 \geq d > 0$. Ceci achève la démonstration du théorème 1.

Remarque.

On a de plus $F_\varepsilon(x) = \mathcal{O}(R^{-k-\frac{1}{2}})$ uniformément en ε. En effet, on a, d'une manière générale, si $g(x,t) \in L^1_{loc}(t)$ et si $G(x,t) = \int_e^t g(x,u)\, du$,

$$|G(x,s)| \leq M \Longrightarrow \left|\int_e^\infty e^{-\varepsilon s} g(x,s)\, ds\right| = \frac{1}{\varepsilon}\left|\int_e^\infty e^{-\varepsilon t} G(x,t)\, dt\right| \leq M e^{-\varepsilon e} \leq M.$$

Pour pouvoir transformer ce résultat sur des intégrales en un résultat sur des séries, nous allons maintenant utiliser la formule sommatoire de Poisson.

LEMME 1 (formule de Poisson).

i) Si $G(x) \in L^1(\mathbf{R}^k)$ alors $\sum_{n\in\mathbf{Z}^k} G(x+n)$ converge dans $L^1(T_k)$ vers une fonction $\tilde{G}(x)$, dont la série de Fourier est

$$\sum_n \hat{G}(n)\, e^{2i\pi nx}.$$

ii) Si G est continue, si $\sum_n G(x+n)$ converge uniformément et si $\sum |\hat{G}(n)| < \infty$, alors,

$$\tilde{G}(x) = \sum_n \hat{G}(n)\, e^{2i\pi nx}.$$

Ce lemme est démontré dans [1], p. 30, théorèmes 2.41 et 2.42.

COROLLAIRE.

Soit Φ continue sur $\mathbf{R}^k$ telle que : $\forall\, \varepsilon > 0$, $|\Phi(x)| = 0(\exp \varepsilon |x|)$ quand $|x| \to \infty$, et soit $F_\varepsilon(x)$ telle que $\widehat{F_\varepsilon}(x) = \exp(-\varepsilon |x|)\, \Phi(x)$.

Si $F(x) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(x)$ existe et est continue et si, de plus, $|F_\varepsilon(x)| = \mathcal{O}(|x|^{-k-1/2})$ uniformément en $\varepsilon \geq 0$, alors

i) $f(x) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \sum\limits_n \exp(-\varepsilon n)\, \Phi(n)\, e^{2i\pi nx}$ existe et est continue ;

ii) $f \in L^1(T^k)$, et sa série de Fourier est $\sum\limits_n \Phi(n)\, e^{2i\pi nx}$;

iii) Si $D^s F$ existe, est continue et $\mathcal{O}(|x|^{-k-1/2})$ quand $x \to \infty$, alors $D^s f$ existe et est continue.

Démonstration.

On applique le lemme précédent à $G = F_\varepsilon$ et on prend la limite quand $\varepsilon \to 0$ de $\sum\limits_n F_\varepsilon(x+n)$, ce qui est permis puisque $|F_\varepsilon(x)| = \mathcal{O}(|x|^{-k-\frac{1}{2}})$ uniformément en ε.

Nous allons maintenant pouvoir démontrer la proposition 2.

PROPOSITION 2.

$\forall\, \varepsilon$, $\exists\, d$ tel que
$$\sum_{n \in \mathbf{Z}^k}{}' \frac{e^{i|n|t}\, e^{2i\pi n.x}\, e^{i|n|\log^d |n|}}{|n|^k \log^{1/2+\varepsilon} |n|}$$
soit la série de Fourier d'une fonction $f(x,t) \in \mathcal{C}^{k/2}_{loc}(\mathbf{T}^k \times \mathbf{R})$.

Démonstration.

- Si k est pair, ceci est une conséquence immédiate des résultats précédents.

- Si k est impair, nous allons avoir besoin encore de deux lemmes sur les intégrales fractionnaires.

LEMME 2. Soit $f \in L^1(\mathbf{R}^k)$ et soit f_α l'intégrale fractionnaire d'ordre α de f (avec $0 < \alpha < 1$) : $f_\alpha(x) = \frac{1}{\gamma_k} \int_{\mathbf{R}^k} |x-t|^{\alpha-k} f(t)\, dt$, où $\gamma_k = \Pi^{k/2}\, 2^\alpha\, \Gamma(\alpha/2)\, \Gamma(\frac{k-\alpha}{2})^{-1}$.

Alors si f est uniformément continue, $f_\alpha \in \mathscr{C}^\alpha_{loc}$.

Démonstration. C'est un résultat classique (voir par exemple [14]).

Nous allons maintenant passer à l'intégrale fractionnaire d'une fonction $f \in L^1(T^k)$.

Définition. Soit $f \in L^1(T^k)$ et $\alpha \in]0,1[$. En reprenant la définition de Wainger ([16]), on définit alors f_α comme étant l'unique fonction de $L^1(T^k)$ dont les coefficients de Fourier sont $\begin{cases} c(n)\, |n|^{-\alpha} & \text{si } (n) \neq (0) \\ 0 & \text{si } (n) = (0) \end{cases}$ où les $c(n)$ sont les coefficients de Fourier de f.

LEMME 3.

i) f_α existe si $0 < \alpha < 1$ et on a de plus

$$f_\alpha(x) = \int_{T^k} g_\alpha(x-y)\, f(y)\, dy$$

avec $g_\alpha(x) = C(k,\alpha)\, |x|^{\alpha-k} + E_\alpha(x)$ où $E_\alpha \in \mathscr{C}^\infty(T^k)$.

ii) Si de plus f est continue, alors $f_\alpha \in \mathscr{C}^\alpha_{loc}$.

Démonstration.

La partie i) est démontrée dans l'article de Wainger ; pour la partie ii), il suffit de reprendre la démonstration du théorème 19 de [16] (pages 86 à 90).

Notre proposition se démontre alors en appliquant le lemme précédent, avec $\alpha = \frac{1}{2}$, aux dérivées partielles d'ordre $\left[\frac{k}{2}\right]$ de f, $\left[\frac{k}{2}\right]$ désignant la partie entière de $k/2$.

IV. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE - CONCLUSION.

1°). PROPOSITION 3. Si $f(x,t)$ est donnée par sa série de Fourier

$$f(x,t) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}^k}' \frac{e^{i|n|t}\, e^{in.x}\, e^{i|n|\log^d|n|}}{|n|^k \log^{1/2+\varepsilon}|n|},$$

d étant choisi comme dans la proposition 2, alors, $f(x,t)$ est une vibration du tore qui n'est pas bornée quand $t \to \infty$.

Démonstration. Tout d'abord, f est manifestement une vibration du tore, c'est-à-dire une solution continue de l'équation des ondes dont la série de Fourier ne comporte ni terme constant, ni terme en λt (cf. [7]).

Supposons maintenant que f soit bornée au point $x = 0$ ($|f(0,t)| \leq M$).

Nous allons montrer que ceci est impossible en utilisant la même méthode que Y. Meyer dans [13].

Soit h une fonction positive de $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbf{R})$, à support compact et d'intégrale égale à 1.

On considère alors la fonction régularisée :

$$v(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t-s)\, h(s)\, ds.$$

On a alors :

$$v(t) = v(0,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c(n)\, \hat{h}(\sqrt{n})\, e^{it\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} c_h(n)\, e^{it\sqrt{n}}$$

$$\text{où} \quad f(0,t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c(n)\, e^{it\sqrt{n}},$$

la série de Fourier de v étant absolument convergente.

On peut donc grouper les termes et écrire :

$$v(t) = \sum_{n=1}^{\infty} S_{n,h}(t) \qquad \text{avec} \qquad S_{n,h}(t) = \sum_{a=1}^{\infty} c_h(a^2 q_n)\, e^{ita(\sqrt{q_n})}$$

où q_n désigne le $n^{\text{ième}}$ nombre sans facteur carré (c'est-à-dire $d^2 | q_n \Rightarrow d = \pm 1$) en écrivant de manière unique $m = a^2 q$, $\forall\, m \in \mathbb{N}^*$.

On a alors :

$$\Big\| \sum_{n=1}^{\infty} S_{n,h}(t) \Big\|_{\infty} = \|v(t)\|_{\infty} \leq M \|h\|_1 = M.$$

Comme le montrent les démonstrations des lemmes 1 et 4 de [8], on en déduit que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|S_{n,h}\|_{\infty} \leq 4 \Big\| \sum_{n=1}^{\infty} S_{n,h}(t) \Big\|_{\infty} \leq 4M,$$

puisque les $S_{n,h}$ sont des fonctions continues de t.

$$\text{Or} \qquad \|S_{n,h}\|_{\infty}^2 \geq \|S_{n,h}\|_2^2 = \sum_{a=1}^{\infty} |c(a^2 q_n)\, \hat{h}(a\sqrt{q_n})|^2$$

$$= \sum_{a=1}^{\infty} \left| \frac{\hat{h}(a\sqrt{q_n})\, N(a^2 q_n)}{(a\sqrt{q_n})^k \log^{1/2+\varepsilon}(a\sqrt{q_n})} \right|^2 .$$

$$\text{D'où} \qquad \|S_{n,h}\|_{\infty} \geq \frac{|\hat{h}(\sqrt{q_n})|\, N(q_n)}{q_n^{k/2} \log^{1/2+\varepsilon} \sqrt{q_n}}.$$

$$\text{D'où} \quad \sum_{q} \frac{|\hat{h}(\sqrt{q})|\, N(q)}{q^{k/2} \log^{1/2+\varepsilon} \sqrt{q}} \leq 4M.$$

On fait alors tendre h faiblement vers la mesure de Dirac en 0 et le lemme de Fatou donne, puisque M est indépendant de h,

$$\sum_{q} \frac{N(q)}{q^{k/2} \log^{1/2+\varepsilon} \sqrt{q}} \leq 4M.$$

Pour achever la démonstration de notre théorème, il suffit donc de montrer que cette série est en fait divergente, ce qui résultera de la proposition suivante, car

$$\int_2^{\infty} \frac{dt}{t \log^{1/2+\varepsilon} t} = +\infty \quad \text{pour} \quad \varepsilon \leq \frac{1}{2}.$$

2°). PROPOSITION 4°. Etudes des séries $\displaystyle\sum_{\substack{q\geq 2 \\ q \text{ sfc}}} \frac{N_k(q)}{q^{k/2}} f(q)$.

Introduction. Dans la suite on désigne par $N_k(n)$ le nombre de décompositions de $n \in \mathbb{N}$ en somme de k carrés : $n = n_1^2 + \ldots + n_k^2$ avec $n_j \in \mathbb{Z}$, et par $N_k^+(n)$ le nombre de décompositions : $n = n_1^2 + \ldots n_h^2$ avec $n_j \in \mathbb{N}$ [deux décompositions différant seulement par l'ordre des termes sont considérées comme distinctes].

On se propose d'étudier les séries du type $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{N_k(n)}{n^{k/2}} f(n)$ et $\displaystyle\sum_{\substack{q\geq 2 \\ q \text{ sfc}}} \frac{N_k(q)}{q^{k/2}} f(q)$ où f est une fonction positive décroissante et sfc signifie "sans facteur carré".

a) Enoncé de la proposition.

Soit f une fonction de $[2, +\infty[$ vers $\mathbb{R}^+$, décroissante. Soit $k \in \mathbb{N} - \{0,1\}$.

Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

α) $\displaystyle\sum_{\substack{q\geq 2 \\ q \text{ sfc}}} \frac{N_k(q)}{q^{k/2}} f(q) < +\infty$

β) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{N_k(n)}{n^{k/2}} f(n) < +\infty$

γ) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{f(t)}{t}\, dt < +\infty.$

La démonstration sera faite en plusieurs étapes.

On montrera d'abord que $\forall k \geq 2 \qquad \gamma \Longleftrightarrow \beta \Longrightarrow \alpha$

Puis que pour $k \geq 5$ $\qquad \alpha \Longrightarrow \gamma$

Puis que pour $k = 4$ $\qquad \alpha \Longrightarrow \gamma$

Puis que pour $k = 3$ $\qquad \alpha \Longrightarrow \gamma$

Enfin que pour $k = 2$ $\qquad \alpha \Longrightarrow \beta$.

[La raison de ce découpage est que l'on connaît pour $k \geq 5$ une formule asymptotique pour $N_k(n)$ quand $n \to +\infty$, et pas pour $k \leq 4$. De plus si tout nombre (et donc tout sfc) est somme de k carrés pour $k \geq 4$, il n'en est pas de même pour $k \leq 3$].

b) Démonstration.

1. $\forall\, k \geq 2, \quad \gamma \Longleftrightarrow \beta \Longrightarrow \alpha$:

L'implication $\beta \Longrightarrow \alpha$ est triviale.

Comme on a $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad N_k^+(n) \leq N_k(n) \leq 2^k N_k^+(n)$, il suffit, pour prouver que $\gamma \Longleftrightarrow \beta$, de montrer que :

$$\sum_{n \geq 2} \frac{N_k^+(n)}{n^{k/2}} f(n) < \infty \Longleftrightarrow \int_2^\infty \frac{f(t)}{t}\, dt < +\infty.$$

Or
$$\sum_{n \geq 2} \frac{N_k^+(n)}{n^{k/2}} f(n) = \sum_{\substack{n_1 \ldots n_k \in \mathbb{N} \\ \Sigma n_j^2 \geq 2}} \frac{f\left(\sum_1^k n_j^2\right)}{\left(\Sigma\, n_j^2\right)^{k/2}}.$$

Cette dernière série est de même nature que l'intégrale $I = \displaystyle\int_{\Sigma x_j^2 \geq A} \frac{f(\Sigma\, x_i^2)}{(\Sigma\, x_i^2)^{k/2}}\, dx$

[résultat classique car f est décroissante positive] ;

or cette intégrale vaut, en passant en polaires :

$$I = c_k \int_{\sqrt{A}}^\infty \frac{f(r^2)\, r^{k-1}}{r^k}\, dr = \frac{c_k}{2} \int_2^\infty \frac{f(r)}{r}\, dr.$$

D'où le résultat : $\displaystyle\sum_{n \geq 2} \frac{N_k^+(n)}{n^{k/2}} f(n)$ est de même nature que $\displaystyle\int_2^\infty \frac{f(t)}{t}\, dt$.

Remarque. Pour des résultats plus précis utilisant des méthodes fines on pourra consulter (au moins pour $k = 2$ et 4) [15] p. 109 à 135.

2. $\forall\, k \geq 5 \quad \alpha \Longrightarrow \gamma$:

Pour $k \geq 5$, on sait qu'il existe deux constantes α et $\beta > 0$ telles que $\alpha\, n^{k/2-1} \leq N_k(n) \leq \beta n^{k/2-1}$ (voir par exemple [9] p. 443).

Donc si $\displaystyle\sum_{\substack{q\geq 2\\ q \text{ sfc}}} \frac{N_k(q)}{q^{k/2}} f(q) < +\infty$, alors $\displaystyle\sum_{\substack{q\geq 2\\ q \text{ sfc}}} \frac{f(q)}{q} < +\infty$.

Or les sfc ont une densité positive [d'ailleurs égale à $6/\pi^2$, voir p. ex. [6] vol. 1, p. 328]; d'où $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \operatorname{Card}\{q \text{ sfc } q \leq x\} = \frac{6}{\pi^2}$.

En prenant $x = q_n$, le nième sfc, on obtient $q_n \sim \frac{\pi^2}{6} n$.

En particulier $\exists\, A, B > 0$, $\forall\, n \geq 2$, $An \leq q_n \leq Bn$;

d'où $\displaystyle\sum_{\substack{q\geq 2\\ q \text{ sfc}}} \frac{f(q)}{q} \geq \sum_{n\geq 2} \frac{f(Bn)}{Bn}$, donc $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{f(Bn)}{n} < +\infty$, et donc

$$\int_2^\infty \frac{f(Bt)}{t}\, dt < +\infty, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \int_2^\infty \frac{f(t)}{t}\, dt < +\infty.$$

3. Pour $k = 4 \quad \alpha \Longrightarrow \gamma$:

L'hypothèse est donc que $\displaystyle\sum_{\substack{q\geq 2\\ q \text{ sfc}}} \frac{N_4(q)}{q^2} f(q) < +\infty$.

Or $N_4(q) = 8 \displaystyle\sum_{\substack{d \mid q\\ 4 \nmid d}} d \geq 8q$ (voir par exemple [10] p. 314)

d'où $\displaystyle\sum_{\substack{q\geq 2\\ q \text{ sfc}}} \frac{f(q)}{q} < +\infty$, et on en déduit comme au II, 2. ci-dessus que

$$\int_2^\infty \frac{f(t)}{t}\, dt < +\infty.$$

4. pour $k = 3$ $\quad \alpha \Longrightarrow \gamma$.

L'hypothèse est ici que $\displaystyle\sum_{\substack{q\geq 2 \\ q \text{ sfc}}} \frac{N_3(q)}{q^{3/2}} f(q) < +\infty$.

Or (voir [6] vol. II p. 265) :

$$
\begin{aligned}
N_3(q) &= 12\, G(q) && \text{si } q \equiv 1 \text{ ou } 2 \quad (4)\\
&= 0 && \text{si } q \equiv 7 \quad (8)\\
&= 6\, G(q) && \text{si } q \equiv 3\ (8) \text{ et } q \neq 3\,(2k+1)^2 \quad \forall k\\
&= 6\, G(q)-12 && \text{si } q \equiv 3\ (8) \text{ et } q = 3\,(2k+1)^2,
\end{aligned}
$$

où $G(q)$ représente le nombre de classes de formes quadratiques binaires de déterminant $-q$.

Mais si $H(q)$ représente le nombre de classes de formes quadratiques binaires positives de discriminant $-q$ alors :

$H(q) \sim \sqrt{q} \quad q \to +\infty \qquad$ (voir [12] p. 8).

D'où finalement : $\exists\, c > 0, \quad N_3(q) \geq c\sqrt{q}, \quad \forall\, q \text{ sfc} \not\equiv 7\ (8)$; et donc

$$\sum_{\substack{q\geq 2 \\ q \text{ sfc} \\ q \not\equiv 7\ (8)}} \frac{f(q)}{q} < +\infty.$$

Il suffit donc de montrer l'existence de $D > 0$ telle que $\forall\, n \geq 2,\ \tilde{q}_n \leq Dn$ pour conclure comme au II.2° [ici $\tilde{q}_n$ est le n^e sfc $\not\equiv 7\ (8)$].

$$
\begin{aligned}
\text{Or } \operatorname{Card}\{q \text{ sfc}; q\leq x;\ q \not\equiv 7\ (8)\} &= \operatorname{Card}\{q \text{ sfc};\ q\leq x\} - \operatorname{Card}\{q \text{ sfc}\ \ q \equiv 7\ (8)\ \ q \leq x\}\\
&\geq \operatorname{Card}\{q \text{ sfc};\ q\leq x\} - \operatorname{Card}\{n\ \ n \equiv 7\ (8)\ \ n \leq x\}.
\end{aligned}
$$

Mais $(\operatorname{Card}\{q \text{ sfc} \leq x\} - \operatorname{Card}\{n, n\equiv 7\ (8)\ \ n \leq x\}) \sim (\frac{6}{\pi^2} - \frac{1}{8})x = \theta x$; $\theta > 0$

d'où $\frac{1}{x} \operatorname{Card}\{q \text{ sfc}\ \ q \leq x\ \ q \not\equiv 7\ (8)\} \geq \delta x$ pour un $\delta > 0$

et en faisant $x = \tilde{q}_n$ on trouve $\tilde{q}_n \leq \frac{1}{\delta} n$,

d'où finalement $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{f(t)}{t}\, dt < +\infty$.

5. pour $k = 2 \quad \alpha \Longrightarrow \beta$:

On va montrer que : $\exists\ \gamma > 0$ tel que : $\forall$ f positive décroissante, $\exists\ \gamma_f > 0$ tel que : $\forall\ x > 2$,
$$\sum_{2\leq n\leq x} N_2(n)\,\frac{f(n)}{n} \leq \gamma \sum_{\substack{2\leq q\leq x\\ q \text{ sfc}}} \frac{N_2(q)}{q}\, f(q) + \gamma_f\ ,$$
ce qui montrera bien que $\alpha \Rightarrow \beta$.

a) LEMME 1.

. $N_2(n) \neq 0 \Longleftrightarrow$ les facteurs premiers $\equiv 3\ (4)$ de la décomposition de n sont affectés d'un exposant pair.

. $N_2(n) \neq 0$ et $n = 2^{\alpha} \prod_{p_j\equiv 3(4)} p_j^{2\beta_j} \prod_{p_k\equiv 1(4)} p_k^{\gamma_k} \Longrightarrow N_2(n) = 4\, d\big(\prod_{p_k\equiv 1(4)} p_k^{\gamma_k}\big)$

(où $d(a)$ est le nombre de diviseurs de a, donc $N_2(n) = 4 \prod_{p_k\equiv 1(4)} (\gamma_k+1)$.

. $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $n = a^2q$ $\quad q$ sfc , $N_2(n) \neq 0 \Longleftrightarrow N_2(q) \neq 0$ et

$\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $n = a^2q$ $\quad q$ sfc , $N_2(n) \leq \frac{1}{4} N_2(a^2)\, N_2(q)$.

Les deux premières assertions sont classiques (voir par exemple [10] p. 241-243 et 299-300).

Si q est somme de deux carrés $q = u^2+v^2$, alors $a^2q = (au)^2 + (av)^2$ d'où $N_2(q) \neq 0 \Longrightarrow N_2(n) \neq 0$.

Si $N_2(n) \neq 0$, les seuls facteurs premiers $\equiv 3\ (4)$ qui peuvent intervenir dansla décomposition de n sont affectés d'un exposant pair et ne divisent donc pas q, d'où $N_2(q) \neq 0$.

Si $N_2(n) = 0$, il en est de même pour $N_2(q)$ il suffit donc d'étudier le cas $N_2(n) \neq 0$.

Posons $n = 2^{\alpha} \prod_{p_j\equiv 3(4)} p_j^{2\beta_j} \prod_{p_k\equiv 1(4)} p_k^{2\gamma_k} \prod_{p_\ell\equiv 1(4)} p_\ell^{2\delta_\ell+1} \prod_{p_t\equiv 1(4)} p_t$,

où tous les premiers écrits sont distincts et $\beta_j > 0 \quad \gamma_k > 0 \quad \delta_\ell > 0$.

Alors $n = a^2 q$ q sfc et $a = 2^{\left[\frac{\alpha}{2}\right]} \prod_{p_j \equiv 3(4)} p_j^{\beta_j} \prod_{p_k \equiv 1(4)} p_k^{\gamma_k} \prod_{p_\ell \equiv 1(4)} p_\ell^{\delta_\ell}$.

On a : $\frac{1}{4} N(a^2) = d\left(\prod_{p_k \equiv 1(4)} p_k^{2\gamma_k} \prod_{p_\ell \equiv 1(4)} p_\ell^{2\delta_\ell} \right) = \prod_{p_k \equiv 1(4)} (2\gamma_k + 1) \prod_{p_\ell \equiv 1(4)} (2\delta_\ell + 1)$.

$$\frac{1}{4} N(q) = d\left(\prod_{p_\ell = 1(4)} p_\ell \prod_{p_t = 1(4)} p_t \right) = \prod_{p_\ell = 1(4)} 2 \prod_{p_t = 1(4)} 2 .$$

$$\frac{1}{4} N(n) = d\left(\prod_{p_k \equiv 1(4)} p_k^{2\gamma_k} \prod_{p_\ell \equiv 1(4)} p_\ell^{2\delta_\ell + 1} \prod_{p_t \equiv 1(4)} p_t \right)$$

$$= \prod_{p_k} (2\gamma_k + 1) \prod_{p_\ell} (2\delta_\ell + 2) \prod_{p_t} 2$$

$$= \prod_{p_k} (2\gamma_k + 1) \prod_{p_\ell} 2 \prod_{p_\ell} (\delta_\ell + 1) \prod_{p_t} 2$$

$$\leq \prod_{p_k} (2\gamma_k + 1) \prod_{p_\ell} 2 \prod_{p_\ell} (2\delta_\ell + 1) \prod_{p_t} 2 = \frac{1}{4} N(a^2) \frac{1}{4} N(q) ;$$

d'où dans tous les cas $N_2(n) \leq \frac{1}{4} N_2(a^2) N_2(q)$.

b) LEMME 2.

<u>La série</u> $\sum_{a \geq 1} \frac{N_2(a^2)}{a^2}$ <u>est convergente</u>.

Si on note $\widetilde{N}_2(\alpha)$ le nombre de décompositions de $\alpha = u^2 + v^2$, u et $v \in \mathbb{N}$, et où on considère comme identiques les décompositions $u^2 + v^2$ et $v^2 + u^2$, on a $N_2(\alpha) \leq 4N_2^+(\alpha) \leq 8\widetilde{N}_2(\alpha)$. Il suffit donc de montrer que $\sum_{a \geq 1} \frac{\widetilde{N}_2(a^2)}{a^2}$ converge

Or $a^2 = x^2 + y^2$, $a, x, y \geq 0$, si et seulement si : ($x = a$ et $y = 0$) ou ($y = a$, $x = 0$) ou ($\exists\, u, v > 0$ $u > v$ et $k > 0$ tels que $a = k(u^2 + v^2)$), et alors on a ($x = 2kuv$ et $y = k(u^2 - v^2)$) ou ($x = k(u^2 - v^2)$ et $y = 2kuv$).

$$\text{D'où} \sum_{1 \leq a \leq x} \frac{\widetilde{N}_2(a^2)}{a^2} \leq \sum_{1 \leq a \leq x} \frac{1}{a^2} + \sum_{1 \leq k \leq x} \sum_{1 \leq u \leq \sqrt{\frac{x}{k}}} \sum_{\substack{1 \leq v \leq \sqrt{\frac{x}{k} - u^2} \\ u^2 + v^2 \geq \frac{1}{k}}} \frac{1}{k^2 (u^2 + v^2)^2}$$

$$\leq \sum_1^\infty \frac{1}{a^2} + \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2} \sum_{u,v\geq 1} \frac{1}{(u^2+v^2)^2} < +\infty \; ;$$

d'où le résultat : $\displaystyle\sum_{a\geq 1} \frac{\tilde{N}_2(a^2)}{a^2} < +\infty$.

c) Démonstration du II 5^o).

On a

$$\sum_{2\leq n\leq x} \frac{N_2(n)}{n} f(n) = \sum_{\substack{2\leq n\leq x \\ n=a^2q \\ q \text{ sfc}}} \frac{N_2(a^2q)}{a^2q} f(a^2q)$$

$$= \sum_{1\leq a\leq \sqrt{x}} \sum_{\substack{2/a^2\leq q\leq x/a^2 \\ q \text{ sfc}}} \frac{N_2(a^2q)}{a^2\,q} f(a^2q)$$

$$= \sum_{\substack{2\leq q\leq x \\ q \text{ sfc}}} \frac{N_2(q)}{q} f(q) + \sum_{2\leq a\leq \sqrt{x}} \sum_{\substack{1\leq q\leq x/a^2 \\ q \text{ sfc}}} \frac{N_2(a^2q)}{a^2q} f(a^2q)$$

$$= \sum_{\substack{2\leq q\leq x \\ q \text{ sfc}}} \frac{N_2(q)}{q} f(q) + \sum_{2\leq a\leq \sqrt{x}} \frac{N_2(a^2)}{a^2} f(a^2)$$

$$+ \sum_{2\leq a\leq \sqrt{x}} \sum_{\substack{2\leq q\leq x/a^2 \\ q \text{ sfc}}} \frac{N_2(a^2q)f(a^2q)}{a^2q}$$

Or $\displaystyle\sum_{2\leq a\leq \sqrt{x}} \frac{N_2(a^2)}{a^2} f(a^2) \leq f(4) \sum_{2\leq a\leq \sqrt{x}} \frac{N_2(a^2)}{a^2} \leq f(4) \sum_2^\infty \frac{N_2(a^2)}{a^2} < +\infty$.

Puis $\displaystyle\sum_{2\leq a\leq \sqrt{x}} \sum_{\substack{2\leq q\leq x/a^2 \\ q \text{ sfc}}} \frac{N_2(a^2q)}{a^2q} f(a^2q) \leq \frac{1}{4} \sum_{2\leq a\leq \sqrt{x}} \frac{N_2(a^2)}{a^2} \sum_{\substack{2\leq q\leq x/a^2 \\ q \text{ sfc}}} \frac{N_2(q)}{q} f(q)$

(car f est décroissante).

D'où finalement, $$\sum_{2\leq n\leq x} \frac{N_2(n)}{n} f(n) \leq \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{2\leq q\leq x \\ q \text{ sfc}}} \frac{N_2(q)}{q} f(q) + \sum_2^\infty \frac{N(a^2)}{a^2} f(4) \\ \displaystyle + \frac{1}{4} \sum_{2\leq a\leq \sqrt{x}} \frac{N_2(a^2)}{a^2} \sum_{\substack{2\leq q\leq x \\ q \text{ sfc}}} \frac{N_2(q)}{q} f(q) \end{cases}$$

$$\leq \left(\sum_2^\infty \frac{N(a^2)}{a^2} \right) f(4) + \gamma \sum_{\substack{2\leq q\leq x \\ q \text{ sfc}}} \frac{N_2(q)}{q} f(q),$$

avec $\displaystyle\gamma = 1 + \frac{1}{4} \sum_2^\infty \frac{N(a^2)}{a^2}$.

Bibliographie

[1] BOCHNER, S. Harmonic analysis and the theory of probability. Berkeley and Los Angeles, Univ. Calif. Press (1955).

[2] BOCHNER, S. Theta relations with spherical harmonics. Proc. Nat. Acad. Sc. Washington, vol. 37 (1951).

[3] BOCHNER, S. Review of "On absolute convergence of multiples Fourier series" by Szasz and Minakshisundaram. Mathematical Reviews, 8, 1947, p. 376.

[4] CALDERON, A P. Integrals singulares y sus applicaciones a equaciones diferenciales hiperbolicas. Buenos Aires, Univ. of Buenos Aires (1960).

[5] COIFMAN, R. Communication orale. Washington Univ., St-Louis, Mo.

[6] DICKSON, L. E. History of the number theory. Carnegie Institution. Vol. I et II.

[7] FRISCH, M. Propriétés asymptotiques des vibrations du tore. Analyse Harmonique d'Orsay (1974).

[8] GRAMAIN, F. et MEYER, Y. Ensemble de fréquences et fonctions presque périodiques. Colloquium mathematicum, vol. XXX, fasc. 2 (1974).

[9] HARDY, G. H. Collected papers. vol. 1. Oxford at the Clarendon Press 1966.

[10] HARDY, G. H. and WRIGHT, E. M. Introduction to the number theory. 4 ed., Oxford at the Clarendon Press, 1960.

[11] KAHANE, J.-P. et SALEM, R. Ensembles parfaits et séries trigonométriques. Hermann, 1963.

[12] LANDAU, E. Über einige neuere Fortschritte der additiven Zahlentheorie. Stechert -Hafner service agency, New York and London 1964.

[13] MEYER, Y. Nombres premiers et vibrations. Séminaire Delange-Pisot-Poitou, exposé 15 (1972).

[14] DU PLESSIS, N. Some theorems about the Riesz fractional integral. Trans. Amer. Math. Soc. 80 (1955), 124-134.

[15] SIERPINSKI, W. Oeuvres choisies. Tome I. PWN. Editions scientifiques de Pologne. Varsovie 1974.

[16] WAINGER, S. Special trigonometric series in k-dimensions. Mem. Amer. Math. Soc. 59 (1965).

[17] WATSON, G. N. Theory of Bessel functions. Cambridge Univ. Press 1944.

[18] ZYGMUND, A. Trigonometric series. Cambridge Univ. Press. 1959.

QUELQUES PROBLEMES SUR LES FONCTIONS PRESQUE-PERIODIQUES

par Yves Meyer

Nous commençons par citer quelques résultats connus sur les fonctions presque-périodiques. Ensuite nous rappellerons l'énoncé et la preuve d'un théorème de Gottschalk et Hedlund. Enfin nous montrerons comment cet énoncé s'applique aux problèmes posés au début.

1. QUELQUES PROPOSITIONS.

1.1. Soit Λ un ensemble d'entiers ayant la propriété suivante : il existe une suite $d_1 < d_2 < \ldots < d_k < \ldots$ d'entiers et une suite d'ensembles finis F_k, $k \geq 1$, telles que, pour tout $k \geq 1$, Λ soit contenu dans $F_k \cup d_k\mathbf{Z}$. Alors toute série trigonométrique $\sum\limits_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda e^{i\lambda x}$ représentant une fonction bornée représente une fonction continue.

1.2. Soient $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, $\alpha \notin \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ et $\varphi \in L^\infty(\mathbf{T})$. Supposons que $\varphi(x + \alpha) - \varphi(x) \in \mathscr{C}(\mathbf{T})$. Alors $\varphi \in \mathscr{C}(\mathbf{T})$.

1.3. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ n nombres $\mathbf{Q}$-linéairement indépendants. Toute fonction continue bornée $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ dont le spectre est contenu dans $\alpha_1\mathbf{Z} \cup \ldots \cup \alpha_n\mathbf{Z}$ est presque périodique.

1.4. Soit α un nombre irrationnel. Toute fonction continue et bornée $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ telle que $\varphi(t+1) - \varphi(t)$ et $\varphi(t+\alpha) - \varphi(t)$ soient deux fonctions presque-périodiques est elle-même une fonction presque-périodique.

1.5. Soient G un groupe abélien localement compact et $\varphi : G \to \mathbf{C}$ une fonction continue et bornée telle que, pour tout $h \in G$, $\varphi(x+h) - \varphi(x)$ soit presque-périodique. Alors φ est elle-même presque-périodique.

1.6 (Th. de Bohr). Soit $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction presque-périodique et ψ une primitive de φ. Alors les deux propriétés suivantes de ψ sont équivalentes

(a) ψ est bornée

(b) ψ est presque-périodique.

2. LE THEOREME DE GOTTSCHALK ET HEDLUND.

Théorème. Soit Γ un groupe d'homéomorphismes d'un ensemble compact K. Supposons que toutes les orbites de Γ soient denses dans K et soit $\varphi_\gamma : K \to \mathbf{C}$ une famille, indexée par Γ, de fonctions continues sur K. Les trois propriétés suivantes sont alors équivalentes

(2.1) il existe une fonction continue $\psi : K \to \mathbf{C}$ telle que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\varphi_\gamma(x) = \psi(\gamma x) - \psi(x)$

(2.2) il existe une fonction bornée $\psi_1 : K \to \mathbf{C}$ telle que pour tout $\gamma \in \Gamma$,

$\varphi_\gamma(x) = \psi_1(\gamma x) - \psi_1(x)$

(2.3) <u>il existe une constante</u> C <u>telle que</u> $|\varphi_\gamma(x)| \leq C$ <u>pour tout</u> $x \in K$ <u>et tout</u> $\gamma \in \Gamma$ <u>et l'on a les identités</u>

$$\varphi_{\gamma'\gamma}(x) = \varphi_{\gamma'}(\gamma x) + \varphi_\gamma(x).$$

Preuve. Il est clair que (2.1) $\Rightarrow$ (2.2) $\Rightarrow$ (2.3).

Montrons que (2.3) $\Rightarrow$ (2.1).

On définit $S_\gamma : K \times \mathbb{C} \to K \times \mathbb{C}$ par

(2.4) $$S_\gamma(x,y) = (\gamma x \ , \ y + \varphi_\gamma(x))$$

et (2.3) implique $S_{\gamma'} \circ S_\gamma = S_{\gamma'\gamma}$. On montre alors immédiatement que S_γ est un groupe d'homéomorphisme de $K \times \mathbb{C}$.

Soit $\Omega_o = \left\{\overline{(\gamma x_o \ , \ \varphi_\gamma(x_o) \ ; \ \gamma \in \Gamma}\right\}$ l'orbite (compacte) d'un couple fixé $(x_o \ , \ 0) \in K \times \mathbb{C}$. La compacité vient de $|\varphi_\gamma(x_o)| \leq C$.

Appelons T_γ la restriction de S_γ à Ω_o. On vient de construire un groupe T_γ d'homéomorphismes de l'ensemble compact Ω_o. Un tel groupe admet une partie compacte $\Omega \subset \Omega_o$ invariante et minimale (pour l'inclusion) comme on le voit grâce au théorème de Zorn.

Lemme. <u>Tout compact</u> Ω <u>invariant par les</u> T_γ <u>et minimal est le graphe d'une fonction continue</u> $s : K \to \mathbb{C}$.

Il suffit de montrer les deux propriétés suivantes.

(2.5) La projection de Ω sur K est K.

(2.6) Pour tout nombre complexe $\tau \neq 0$, $\Omega + \tau \cap \Omega = \emptyset$; on désigne par $\Omega + \tau$ l'ensemble des couples $(x, y+\tau)$ où $(x,y) \in \Omega$.

<u>Vérification de</u> (2.5). Soit $(x_1, y_1) \in \Omega$. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, $(\gamma x_1 , y_1 + \varphi_\gamma(x_1)) \in \Omega$. Or $\{\gamma x_1 , \gamma \in \Gamma\}$ est dense dans K. La projection de Ω est compacte et ne peut donc être que K.

<u>Vérification de</u> (2.6). Pour tout $\tau \in \mathbf{C}$, $\Omega + \tau$ est tout aussi invariant que Ω. Donc $\Omega \cap \Omega + \tau$ est invariant et contenu dans Ω. Si $\Omega \cap \Omega + \tau$ est vide, c'est gagné. Sinon $\Omega \cap \Omega + \tau = \Omega$ et donc $\Omega \subset \Omega + \tau$. Cela implique $\Omega - \tau \subset \Omega$. ce qui ne peut être si Ω est compact et $\tau \neq 0$.

Il existe donc une section continue $s : K \to \mathbf{C}$ telle que $s(\gamma x_1) = y_1 + \varphi_\gamma(x_1)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. On applique ceci à $\gamma'\gamma$ au lieu de γ. On obtient $s(\gamma'\gamma\, x_1) = y_1 + \varphi_{\gamma'\gamma}(x_1) = y_1 + \varphi_{\gamma'}(\gamma x_1) + \varphi_\gamma(x_1)$. Par différence

(2.7) $$s(\gamma'\gamma x_1) - s(\gamma x_1) = \varphi_{\gamma'}(\gamma x_1).$$

Puisque les γx_1, $\gamma \in \Gamma$, sont denses dans K, on peut, γ' étant fixé, passer à la limite dans (2.7). On obtient

$$s(\gamma' x) - s(x) = \varphi_{\gamma'}(x) \qquad (\forall\, x \in K , \quad \forall\, \gamma' \in \Gamma).$$

3. APPLICATIONS DU THEOREME DE GOTTSCHALK ET HEDLUND.

Preuve de 1.1. On pose $\psi(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda e^{i\lambda x}$. Alors $\psi(x + \frac{2\pi}{d_k}) - \psi(x) \in \mathscr{C}(\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z})$ puisque tous les termes de la suite Λ, sauf un nombre fini, sont divisibles par d_k. Mais l'ensemble des $\tau \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ tels que $\psi(x+\tau) - \psi(x)$ soit continue est évidemment un sous groupe Γ de $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$. On pose $\varphi_\gamma(x) = \psi(x+\gamma) - \psi(x)$, $\gamma \in \Gamma$ et l'on applique (2.3) $\Rightarrow$ (2.1).

Il existe donc une fonction ψ_o continue telle que $\psi_o(x+\gamma) - \psi_o(x) = \psi(x+\gamma) - \psi(x)$. Alors $\psi = \psi_o + C$ presque partout.

La preuve de 1.2 est identique.

Pour obtenir 1.3 on raisonne par récurrence sur n. C'est trivial si $n = 1$. Pour passer de n à $n+1$, on peut supposer que $1 = \alpha_1$ et poser $\alpha_{n+1} = \alpha$. Grâce à l'hypothèse de récurrence, la fonction $\varphi(x+2\pi) - \varphi(x)$ est presque-périodique et il en est de même de $\varphi(x + \frac{2\pi}{\alpha}) - \varphi(x)$. Soit Γ le groupe $2\pi(\mathbb{Z} + \frac{1}{\alpha}\mathbb{Z})$. On applique encore $(2.3) \Rightarrow (2.1)$. La preuve de (1.4) est identique. De même pour (1.5) et (1.6).

APPENDICE. <u>Il existe une fonction</u> $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ <u>possédant les trois propriétés suivantes</u>

(a) f <u>est continue et bornée sur</u> $\mathbb{R}$

(b) $f(x+1) - f(x)$ <u>est presque périodique sur</u> $\mathbb{R}$

(c) f <u>n'est pas presque périodique sur</u> $\mathbb{R}$.

On construit $f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_k(x-k)$; le support de chaque f_k étant contenu dans $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$.

On pose d'abord

$$f_k(j^{-1}) = e^{2\pi i k j^{-1}} \quad \text{si} \quad j \geq 5$$

$$f_k(0) = 1$$

$$f_k(\pm \tfrac{1}{4}) = 0$$

et l'on impose ensuite à f_k d'être linéaire sur chaque intervalle $\left[\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j}\right]$, $j \geq 4$

et sur $\left[-\frac{1}{4}, 0\right]$.

Il est clair que f est continue sur $\mathbb{R}$ et que $|f(x)| \leq 1$.

On a d'autre part $f(k + \frac{1}{2k}) - f(k) = -2$. Donc f n'est pas uniformément continue et ne peut être presque-périodique.

Enfin

$$g(x) = f(x+1) - f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} g_k(x - k)$$

$$g_k(j^{-1}) = (e^{2\pi ij^{-1}} - 1)\, e^{2\pi ikj^{-1}}$$

$$g_k(0) = 0$$

$$g_k(\pm \tfrac{1}{4}) = 0$$

g_k est linéaire sur les intervalles $\left[-\frac{1}{4}, 0\right]$ et $\left[\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j}\right]$ $(j \geq 4)$.

Pour montrer que $g(x)$ est presque-périodique, on définit

$$\gamma_n(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_{n,k}(x-k) \quad \text{où}$$

$$\gamma_{n,k}(j^{-1}) = (e^{2\pi ij^{-1}} - 1)\, e^{2\pi ikj^{-1}} \quad \text{si} \quad 4 \leq j \leq n+1$$

$$\gamma_{n,k}(0) = 0$$

$$\gamma_{n,k}(\pm \tfrac{1}{4}) = 0$$

$\gamma_{n,k}$ est linéaire sur les intervalles $\left[-\frac{1}{4}, 0\right]$, $\left[\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j}\right]$, $4 \leq j \leq n$ et $\left[0, \frac{1}{n+1}\right]$.

Si T est le plus petit commun multiple de $4, \ldots, n+1$, la fonction γ_n est périodique de période T. Par ailleurs $|g(x) - \gamma_n(x)| \leq \frac{2\pi}{n+1}$. Donc $g(x)$ est une limite uniforme d'une suite de fonctions périodiques ; g est presque-périodique.

Pour terminer signalons que si une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est <u>uniformément continue</u> et bornée alors les deux conditions suivantes sont équivalentes

(a) $f(x)$ est presque-périodique

(b) $f(x+1) - f(x)$ est presque-périodique.

Montrons que (b) implique (a).

On appelle $K(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ une fonction dont la transformée de Fourier a un support compact et vaut 1 en 0. On pose $K_n(x) = nK(nx)$. Alors $f * K_n = f_n$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

On peut donc supposer que le spectre de f_n (que l'on notera f) est compact. Grâce à une partition de l'unité sur ce spectre, on peut se limiter à l'intervalle $[- \;, \;]$. Il suffit alors de remarquer que $\frac{\sin \alpha t}{\sin t}$ est indéfiniment dérivable sur cet intervalle. Il en résulte que $f(x+\alpha) - f(x)$ est presque périodique pour tout α réel. Donc $f(x)$ est presque-périodique.

GOTTSCHALK, W. and HEDLUND, G. A. Topological dynamics. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. vol. XXXVI. Providence R. I. (1955).

OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS ET THEOREME DE CALDERON

par Yves Meyer et R. Coifman

Désignons par $\mathbf{T}$ le groupe $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ et par H la transformation de Hilbert sur $L^2(\mathbf{T})$: $H(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \frac{dt}{2\operatorname{tg} t/2}$. A. P. Calderón a prouvé dans [1] que, pour toute fonction $A : \mathbf{T} \to \mathbf{C}$ vérifiant $|A(x) - A(y)| \leq C\,|x-y|$, l'opérateur $\frac{d}{dx}[HA - AH] = T$ est borné sur L^2 ; $T(f)(x) = \frac{dg}{dx}$, $g(x) = H(Af)(x) - A(x)(Hf)(x)$.

Nous allons donner une démonstration nouvelle de ce résultat. Au § 1, l'estimation $\left\|\frac{dg}{dx}\right\|_r \leq C\left\|\frac{dA}{dx}\right\|_p \|f\|_q$ $\quad (1 < p < +\infty,\quad 1 < q < +\infty,\quad 1 < r < +\infty,\quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q})$ résultera très simplement de la théorie de Paley-Littlewood.

Au § 2 nous étendrons, grâce à une méthode générale, cette inégalité au cas $p = +\infty$, $q = r$.

Au § 3 nous nous libérons des restrictions $A \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{T})$ et $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{T})$ nécessaires aux § 1 et 2.

Au § 4, nous obtiendrons, par la méthode du § 1, de nouvelles inégalités sur les opérateurs pseudo-différentiels classiques.

1. L'INEGALITE FONDAMENTALE.

On pose $a(x) = \frac{dA}{dx}$, $g(x) = H(Af)(x) - A(x)(Hf)(x)$ et $T(a,f)(x) = \frac{dg}{dx}$. On suppose d'abord que a et f appartiennent à $\mathscr{C}^{\infty}(\mathbf{T})$.

PROPOSITION 1. <u>Avec les notations ci-dessus, soient</u> p, q <u>et</u> r <u>trois nombres réels tels que</u> $1 < p < +\infty$, $1 < q < +\infty$, $1 < r < +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$; <u>il existe une constante</u> $C = C(p,q)$ <u>telle que</u>

$$(1) \qquad \|T(a,f)\|_r \leq C\|a\|_p \|f\|_q .$$

La preuve de la proposition 1 est une conséquence très simple des lemmes suivants.

LEMME 1. <u>Soit</u> $\sum_1^{\infty} c_k e^{ikx} = \sum_{n\geq 0} \Delta_n(x) = F(x) \in \mathscr{C}^{\infty}(T)$ <u>où</u> $\Delta_n(x) = \sum_{2^n \leq k < 2} c_k e^{ikx}$. <u>Posons</u> $\Delta_n^*(x) = -i2^{-n} \frac{d}{dx} \Delta_n(x) = \sum_{2^n \leq k < 2^{n+1}} 2^{-n} k\, c_k e^{ikx}$. <u>Alors les normes</u> $\|F\|_p$, $\|(\sum_{n\geq 0} |\Delta_n(x)|^2)^{1/2}\|_p$ <u>et</u> $\|(\sum_{n\geq 0} |\Delta_n^*(x)|^2)^{1/2}\|_p$ <u>sont trois normes équivalentes pour tout</u> $p \in \,]1, +\infty[$. <u>Soient</u> $1 \leq c_1 < C_1$ <u>et</u> $1 < p < +\infty$; <u>il existe deux constantes</u> C_2 <u>et</u> C_3 <u>vérifiant la propriété suivante : pour toute suite</u> $P_n(x) = \sum_{c_1 2^n \leq k \leq C_1 2^n} c(k,n) e^{ikx}$ <u>on a</u>

$$(2) \qquad \|\sum_{n\geq 0} P_n\|_p \leq C_2 \|(\sum_{n\geq 0} |P_n(x)|^2)^{1/2}\|_p \leq C_3 \|(\sum_{n\geq 0} 4^{-n} |P_n'(x)|^2)^{1/2}\|_p .$$

Tout cela résulte immédiatement de la théorie de Paley-Littlewood.

Pour étudier $T(a,f)$, on écrit $a = a_1 + a_2$ et $f = f_1 + f_2 + c$ où a_1 et f_1 sont analytiques sans termes constants (les séries de Fourier de a_1 et f_1 ne comprennent que des fréquences ≥ 1), a_2 et f_2 sont anti-analytiques et c est une constante. Soient A_1 et A_2 les primitives de a_1 et a_2 qui sont respectivement analytiques et anti-analytiques. Alors $A_1 f_1$ est encore analytique et $H(A_1 f_1) = -i\, A_1 f_1 = A_1 H(f_1)$. Il en résulte que $T(a_1, f_1) = 0$.

On vérifie de même que $T(a_2, f_2) = 0$.

Nous allons montrer que

$$(3) \qquad \|T(a_2\,,\, f_1)\|_r \leq C\|a_2\|_p\, \|f_1\|_q$$

où $C = C(p,q)$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, $1 < p < +\infty$, $1 < q < +\infty$, $1 < r < +\infty$.

La même démonstration d'appliquera à $T(a_1\,,\, f_2)$ et les inégalités de R. Riesz : $\|a_2\|_p \leq C\|a\|_p$ et $\|f_1\|_q \leq C\|f\|_q$ termineront la démonstration de la proposition 1.

Pour simplifier les notations, nous écrirons a au lieu de a_2 et f au lieu de f_1 : $f(x) = \sum_{k\geq 1} \gamma_k e^{ikx}$ et $A(x) = \sum_{k\geq 1} \alpha_k e^{-ikx}$ a pour dérivée $a(x)$. On pose

$f_n(x) = \sum_{1\leq k<2^{n-1}} \gamma_k\, e^{ikx}$, $\Delta_n f(x) = \sum_{2^{n-1}\leq k<2^{n+1}} \gamma_k e^{ikx}$ et $R_n = \sum_{k>2^{n+1}} \gamma_k\, e^{ikx}$.

De même $\Delta_n(A)(x) = \sum_{2^n\leq k<2^{n+1}} \alpha_k e^{-ikx}$.

On a ainsi $A(x) = \sum_{n\geq 0} \Delta_n(A)(x)$ et $f(x) = f_n(x) + \Delta_n(f)(x) + R_n(x)$. Pour $n = 0$, on pose $f_o = 0$ et $\Delta_o(f)(x) = \gamma_1 e^{ix} + \gamma_2 e^{i2x}$.

LEMME 2. <u>Avec les notations ci-dessus</u>, $g(x) = H(Af)(x) - A(x)(Hf)(x) = g_1(x) + g_2(x) + g_3(x)$ <u>où</u> $g_1(x) = 2i \sum_{n\geq 0} f_n\, \Delta_n(A)$, $g_2 = -H\left[\sum_{n\geq 0} \Delta_n(f)\, \Delta_n(A)\right]$ <u>et</u> $g_3 = i \sum_{n\geq 0} \Delta_n(f)\, \Delta_n(A)$.

La preuve du lemme 2 est immédiate. On écrit $A = \sum_{n\geq 0} \Delta_n(A)$ et l'on a $g = H(Af) - AH(f) = \sum_{n\geq 0} G_n$; $G_n = H(f\, \Delta_n(A)) - \Delta_n(A)\, H(f)$. On remplace alors f

par $f_n + \Delta_n(f) + R_n$ et l'on remarque que $R_n\Delta_n(A)$ est analytique ;

$H(R_n\ \Delta_n(A)) = -i\ R_n\Delta_n(A) = \Delta_n(A)\ H(R_n)$. Finalement il ne reste que trois termes et

$G_n = 2if_n\ \Delta_n(A) + H(\Delta_n(f)\ \Delta_n(A)) + i\ \Delta_n(f)\ \Delta_n(A)$.

Il faut remarquer que les fréquences du produit $f_n\Delta_n(A)$ appartiennent à l'intervalle $\left]-2^{n+1}, -2^{n-1}\right[$.

Nous allons terminer la preuve de la proposition 1 en majorant successivement $\left\|\frac{dg_1}{dx}\right\|_r$, $\left\|\frac{dg_2}{dx}\right\|_r$ et $\left\|\frac{dg_3}{dx}\right\|_r$.

On a $\frac{dg_1}{dx} = 2i \sum\limits_{n\geq 0} \frac{d}{dx}\left[f_n\ \Delta_n(A)\right]$ et, grâce au lemme 1,

$$\left\|\frac{dg_1}{dx}\right\|_r \leq C\left\|\left(\sum_{n\geq 0} \left|\frac{d}{dx}\left[f_n\ \Delta_n(A)\right]\right|^2\right)^{1/2}\right\|_r \leq$$

$$C'\left\|\left(\sum_{n\geq 0} 4^n\ \left|f_n\ \Delta_n(A)\right|^2\right)^{1/2}\right\|_r \leq$$

$$C''\left\|\sup_{n\geq 0}\ |f_n|\right\|_q \left\|\left(\sum_{n\geq 0} 4^n\left|\Delta_n(A)\right|^2\right)^{1/2}\right\|_p \leq$$

$$C_1\ \|f\|_q\ \left\|\left(\sum_{n\geq 0} \left|\frac{d}{dx}\ \Delta_n(A)\right|^2\right)^{1/2}\right\|_p \leq C_2\|f\|_q\ \|a\|_p.$$

La majoration de $\left\|\frac{dg_2}{dx}\right\|_r$ est analogue. Puisque H et $\frac{d}{dx}$ commutent,

on a $\left\|\frac{dg_2}{dr}\right\|_r \leq C\left\|\frac{d}{dx}\left(\sum\limits_{n\geq 0} \Delta_n(f)\ \Delta_n(A)\right)\right\|_r \leq$

$$C\left\|\sum_{n\geq 0} \frac{d}{dx}\Delta_n(f)\ \ \Delta_n(A)\right\|_r + C\left\|\sum_{n\geq 0}\Delta_n(f)\frac{d}{dx}\ \Delta_n(A)\right\|_r \leq$$

$$C\left\|\left(\sum_{n\geq 0} 4^{-n}\ \left|\frac{d}{dx}\Delta_n(f)\right|^2\right)^{1/2}\right\|_q\ \left\|\left(\sum_{n\geq 0} 4^n\left|\Delta_n(A)\right|^2\right)^{1/2}\right\|_p +$$

$$C\left\|\left(\sum_{n\geq 0}\left|\Delta_n(f)\right|^2\right)^{1/2}\right\|_q\ \left\|\left(\sum_{n\geq 0}\ \left|\frac{d}{dx}\ \Delta_n(A)\right|^2\right)^{1/2}\right\|_p \leq C'\|a\|_p\ \|f\|_q$$

comme ci-dessus. La majoration de $\left\|\frac{dg_3}{dx}\right\|_r$ est identique.

2. METHODES DE VARIABLE REELLE.

Pour aller plus loin, il nous faut maintenant écrire $T(a,f)$ comme une intégrale singulière. Si $A \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{T})$, on vérifie sans peine que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{T})$, $g(x) = H(Af)(x) - A(x)(Hf)(x)$ est dérivable et que

$$\frac{dg}{dx} = -\frac{1}{4\pi}\,\mathrm{v.\,p.} \int_{x-\pi}^{x+\pi} \frac{A(x)-A(y)}{\sin^2 \frac{x-y}{2}}\, f(y)\, dy$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\, a(x)\, \mathrm{v.\,p.} \int_{x-\pi}^{x+\pi} \frac{f(y)}{\operatorname{tg} \frac{x-y}{2}}\, dy.$$

Le noyau K de l'opérateur $f \longrightarrow T(a,f)$ s'écrit donc $K = K_1 + K_2$ où $K_1(x,y) = -\frac{1}{4\pi} \frac{A(x)-A(y)}{\sin^2 \frac{x-y}{2}}$ et où $K_2(x,y) = \frac{1}{2\pi \operatorname{tg} \frac{x-y}{2}}$ est le noyau de la transformation de Hilbert.

DEFINITION. <u>Un noyau de Calderón-Zygmund est une fonction</u> $K(x,y)$ <u>définie sur</u> $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 ,\ y \neq x\right\}$ <u>et ayant les propriétés suivantes</u>

(a) $|K(x,y)| \leq \dfrac{C}{|y-x|}$

(b) $\left|\dfrac{\partial K}{\partial x}(x,y)\right| \leq \dfrac{C}{(y-x)^2}$ <u>et</u> $\left|\dfrac{\partial K}{\partial y}\right| \leq \dfrac{C}{(y-x)^2}$

(c) <u>pour toute fonction</u> $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{T})$, $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|y-x| \geq \varepsilon} K(x,y)\, f(y)\, dy$ <u>existe presque partout. On désigne par</u> $[Tf](x)$ <u>la fonction ainsi définie</u>

(d) <u>on a, pour toute fonction</u> $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{T})$, $\|Tf\|_2 \leq C\|f\|_2$.

THEOREME 1. <u>Pour tout noyau</u> $K(x,y)$ <u>vérifiant les propriétés</u> (a), (b) <u>et</u> (c) <u>ci-dessus</u>, (d) <u>est équivalent à la condition (e) suivante</u>

(e) <u>il existe une constante</u> C, <u>un nombre réel</u> $r \geq 1$ <u>et un nombre réel</u> $q \geq r$,

$q \leq +\infty$ tels que, pour tout intervalle $I \subset \mathbf{T}$ et toute fonction $f \in \mathscr{C}^{\infty}(\mathbf{T})$ portée par I, on ait $\left(\frac{1}{|I|}\int_I |Tf|^r\, dx\right)^{1/r} \leq C\left(\frac{1}{|I|}\int_I |f|^q\, dx\right)^{1/r}$.

Admettons pour l'instant le théorème 1 et montrons le résultat suivant.

PROPOSITION 2. Il existe une constante C telle que pour toute fonction $A \in \mathscr{C}^{\infty}(\mathbf{T})$ vérifiant $|A(x) - A(y)| \leq |x-y|$, la norme de l'opérateur $\frac{d}{dx}\left[HA - AH\right] = T : L^2(\mathbf{T}) \longrightarrow L^2(\mathbf{T})$ ne dépasse pas C.

Il suffit pour cela de vérifier que pour tout intervalle $I \subset \mathbf{T}$ et toute fonction $f \in L^2(\mathbf{T})$ portée par I, on a

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I |Tf|^{4/3}\, dx\right)^{3/4} \leq C\left(\frac{1}{|I|}\int_I |f|^2\, dx\right)^{1/2}. \tag{3}$$

Si la longueur $|I|$ de I dépasse π, (3) résulte immédiatement de la proposition 1. En fait (3) ne précise la proposition 1 que pour les petites valeurs de $|I|$.

On appelle J l'intervalle "double" de I (même centre et longueur double) et l'on écrit $\frac{dA}{dx} = a = a_1 + a_2$ où $a_1 \in \mathscr{C}^{\infty}(\mathbf{T})$, $\|a_1\|_{\infty} \leq 1$, $a_1 = a$ sur I et $a_1 = 0$ sur le complémentaire de J. Appelons A_1 une primitive de a_1. On a donc $\forall x \in I$, $\forall y \in I$, $A_1(x) - A_1(y) = A(x) - A(y)$ de sorte que si f est supportée par I et si $x \in I$, $T(a,f)(x) = T(a_1,f)(x)$.

Dès lors la proposition 1 s'applique avec $p = 4$, $q = 2$ et $r = 4/3$ et donne $\left(\int_I |T(a,f)|^{4/3}\, dx\right)^{3/4} \leq \|T(a_1, f)\|_{4/3} \leq C\|a_1\|_4 \|f\|_2 \leq C' |I|^{1/4} \|f\|_2$ qui est (3).

Il ne reste plus qu'à appliquer le théorème 1.

L'implication d) $\Longrightarrow$ e) résulte essentiellement de la théorie de Calderón-Zygmund. En effet, pour tout $q \in \left]1, +\infty\right[$, T est borné sur L^q et l'on a donc

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I |Tf|^r dx\right)^{1/r} \le \left(\frac{1}{|I|}\int_I |Tf|^q dx\right)^{1/q} \le |I|^{-1/q} \|Tf\|_q \le C |I|^{-1/q}\|f\|_q.$$

L'implication e) $\Longrightarrow$ d) est plus subtile. La preuve suivante est due à J. O. Strömberg [4].

On remplace d'abord le noyau $K(x,y)$ par une suite de noyaux tronqués obtenus par le procédé suivant. On fixe une fonction indéfiniement dérivable $\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow [0,1]$ égale à 1 au voisinage de 0 et nulle quand $|x| \ge \frac{\pi}{2}$ et l'on pose $K_n(x,y) = [1 - \varphi(n(y-x))] K(x,y)$. On vérifie sans difficulté que pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{T})$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \int K_n(x,y) f(y)\, dy = \lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|y-x|\ge\varepsilon} K(x,y) f(y)\, dy$ au sens suivant : quand la seconde limite existe, la première existe aussi et lui est égale. Enfin en écrivant que $\varphi(x) = \Sigma\ \gamma_k e^{ikx}$ où les coefficients de Fourier γ_k ont une décroissance rapide, on a $K_n(x,y) = K(x,y) - \Sigma\ \gamma_k e^{ikny} e^{-iknx} K(x,y)$ et il en résulte immédiatement que les noyaux K_n vérifient uniformément e).

Si nous montrons l'existence d'une constante C telle que, pour tout $n \ge 0$, $\| T_n f\|_2 \le C\|f\|_2$, T_n étant l'opérateur défini par le noyau $K_n(x,y)$, l'inégalité (d) résultera du lemme de Fatou.

Dans tout ce qui suit nous omettrons l'indice n. Définissons d'après Fefferman et Stein, $(Tf)^\#(x_0) = \sup\limits_{I \ni x_0} \left\{ \inf\limits_{c\in\mathbf{C}} \frac{1}{|I|}\int_I |Tf(x) - c|\,dx\right\}$ et nous allons montrer l'existence d'une constante C telle que

$$(4) \qquad (Tf)^\#(x_0) \le C\left[(|f|^q)^*(x_0)\right]^{1/q}$$

(on désigne par g^* la fonction maximale de Hardy et Littlewood de g).

Pour démontrer (4), nous désignerons par I un intervalle contenant x_0, par J l'intervalle "double" et par f_1 le produit de f par la fonction caractéristique de

J ; de sorte que $f = f_1 + f_2$ où $f_2 = 0$ sur J. On écrit que $Tf = Tf_1 + Tf_2$ et l'on a

$$\frac{1}{|J|}\int_J |Tf_1|\,dx \le \Big(\frac{1}{|J|}\int_J |Tf_1|^r\,dx\Big)^{1/r} \le C\Big(\frac{1}{|J|}\int_J |f_1|^q dx\Big)^{1/q} \le$$

$$C\Big[(|f|^q)^*(x_o)\Big]^{1/q}.$$

On a donc $\frac{1}{|I|}\int_I |Tf_1|\,dx \le 2C\,[(|f|^q)^*(x_o)]^{1/q}$.

Nous allons maintenant montrer que $\frac{1}{|I|}\int_I |Tf_2(x) - Tf_2(x_o)|\,dx \le Cf^*(x_o)$ et cela entraînera (4). En fait, on a $|Tf_2(x) - Tf_2(x_o)| = \left|\int_{J^c} [K(x,y) - K(x_o,y)]f(y)\,dy\right| \le$ $C\,|I|\int_{J^c} \frac{|f(y)|}{(x_o-y)^2}\,dy \le C'\,f^*(x_o)$.

Maintenant que (4) est établie, la preuve du théorème 1 ne présente plus de difficultés.

Si $1 \le q < 2$ (ce cas est suffisant pour les applications que nous avions en vue), on remarque que

(5) $$\|[(|f|^q)^*]^{1/q}\|_2 \le C_q\|f\|_2$$

et l'on en déduit $\|(Tf)^{\#}\|_2 \le C\|f\|_2$. Comme nous savons a priori que $Tf \in L^2$ (car le noyau de T a été tronqué), il vient, grâce au théorème de Fefferman et Stein ([2] p. 153, th. 5)

(6) $$\|T(f)\|_2 \le C\left(|\widehat{Tf}(0)| + \|f\|_2\right).$$

Par ailleurs (e) appliqué à $I = [-\pi, \pi]$ donne

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} (Tf)(x)\,dx\right| \le 2\pi\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |Tf|^r(x)\,dx\Big)^{1/r} \le C\,\|f\|_q \le C\,\|f\|_2.$$

Ceci termine la preuve du théorème 1 dans ce cas.

Si $q \ge 2$, on appelle q_1 un nombre réel tel que $q_1 > q$ et l'on obtient par le raisonnement précédent

(7) $$\|T(f)\|_{q_1} \leq C\|f\|_{q_1}.$$

Dès lors on peut appliquer la décomposition de Calderón-Zygmund pour montrer que l'opérateur T envoie L^1 dans L^1 faible (le raisonnement fait pour $q_1 = 2$ dans le livre de Stein s'étend mot pour mot à notre situation). Par interpolation T envoie L^2 dans L^2.

3. LE CAS GENERAL.

Nous supposons maintenant que $|A(x) - A(y)| \leq |x-y|$. Soit $a_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{T})$ une suite vérifiant $\|a_n\|_\infty \leq 1$ et $a_n(x) \longrightarrow a(x) = \frac{dA}{dx}$ presque partout. Désignons par T_n l'opérateur associé à a_n : $T_n(f) = T(a_n , f)$ et par T_n^ε l'opérateur tronqué correspondant défini par

$$T_n^\varepsilon f(x) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\pi\geq|x-y|\geq\varepsilon} \frac{A_n(x) - A_n(y)}{\sin^2\frac{x-y}{2}} f(y)\,dy$$

$$+\frac{1}{2\pi} a_n(x)\int_{\pi\geq|x-y|\geq\varepsilon} \frac{f(y)}{\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}}\,dy.$$

Nous savons d'après M. Cotlar que pour tout noyau $K(x,y)$ de Calderón-Zygmund, $T^*f(x) = \sup\limits_{\varepsilon>0} \left|\int_{|x-y|\geq\varepsilon} K(x,y)\, f(y)\,dy\right|$ vérifie, pour $p \in \left]1 , +\infty\right[$,

$\|T^*f\|_p \leq C_p \|f\|_p$.

On a donc $\|T_n^\varepsilon f\|_2 \leq C\,\|f\|_2$. Or pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, $T_n^\varepsilon f(x) \longrightarrow T^\varepsilon f(x)$ et le lemme de Fatou donne $\|T^\varepsilon f\|_2 \leq C\|f\|_2$.

Or un calcul immédiat montre, par intégration par parties, que $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} T^\varepsilon f$ existe presque-partout quand $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{T})$. Il résulte du lemme de Fatou que $\|Tf\|_2 \leq C\|f\|_2$ ce qui termine la démonstration.

4. APPLICATION DE LA METHODE DU § 1 AUX OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS.

THEOREME 2. Soient n et N deux entiers tels que $n \geq 1$ et $N > n + \left[\frac{n}{2}\right] + 1$. Supposons que $p : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ soit continue et bornée et que

(a) $$\left|\partial_\xi^\alpha p(x,\xi)\right| \leq C(1+|\xi|)^{-|\alpha|} \quad \text{si} \quad |\alpha| \leq N, \quad x \in \mathbf{R}^n \quad \text{et} \quad \xi \in \mathbf{R}^n$$

et qu'il existe un nombre $\delta > 1/2$ pour lequel

(b) $$\left|\partial_\xi^\alpha p(x+h\,,\,\xi) - \partial_\xi^\alpha p(x,\xi)\right| \leq C\left(\log \frac{2}{|h|}\right)^{-\delta}(1+|\xi|)^{-|\alpha|}$$

pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, tout $\xi \in \mathbf{R}^n$ et tout $h \in \mathbf{R}^n$ vérifiant $|h| \leq 1$. Alors l'opérateur pseudo-différentiel défini par

(c) $$T(f)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix.\xi}\, p(x,\xi)\,\hat{f}(\xi)\,d\xi$$

est borné sur L^r quand $1 < r < +\infty$.

La preuve du théorème 2 dépend essentiellement du résultat suivant.

PROPOSITION 3. Pour tout couple $C_2 > C_1 > 0$ et tout $p \in \left]1,+\infty\right[$, il existe un nombre $C_3 = C_3(C_1,C_2,p) > 0$ ayant la propriété suivante

(8) si les fonctions $m_k : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ $(k \in \mathbf{N})$ vérifient

$$|m_k(x)| \leq 1 \quad \text{et} \quad |m_k(x+h) - m_k(x)| \leq \left(\log \frac{2}{|h|}\right)^{-\delta}, \quad |h| \leq 1$$

et

(9) si les fonctions $f_k \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ sont telles que

$$\text{Support } \hat{f}_k(\xi) \subset \left\{C_1 2^k \leq |\xi| \leq C_2 2^k\right\}$$

alors

$$\Big\| \sum_{k\geq 0} m_k(x)\, f_k(x) \Big\|_p \leq C_3 \Big\| \big(\Sigma\, |f_k(x)|^2\big)^{1/2} \Big\|_p .$$

Fixons en effet $c = \frac{1}{2} C_1$ et écrivons $m_k(x) = m_k'(x) + m_k''(x)$ où le support de $m_k'(\xi)$ est contenu dans $|\xi| \leq c2^k$ tandis que $|m_k''(x)| \leq C\, k^{-\delta}$ si $k \geq 1$ et $|m_o''| \leq C$. De plus $|m_k'(x)| \leq C$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Cette décomposition de $m_k(x)$ résulte de la continuité logarithmique.

On a donc $f(x) = \sum\limits_{k\geq 0} m_k(x)\, f_k(x) = f'(x) + f''(x)$.

On a $f'(x) = \sum\limits_{k\geq 0} f_k'(x)$ où $f_k'(x) = m_k'(x)\, f_k(x)$. Le spectre de f_k' est contenu dans $\frac{C_1}{2} 2^k \leq |\xi| \leq (C_2 + \frac{C_1}{2})\, 2^k$. La théorie de Paley-Littlewood peut être appliquée à $\|f'\|_p$ et l'on a

$$\|f'\|_p \leq C_p \Big\| \Big(\sum_{k\geq 0} |m_k' f_k|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_p \leq C_p' \Big\| \Big(\sum_{k\geq 0} |f_k|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_p .$$

On a évidemment $|f''(x)| \leq \Big(\sum\limits_o^\infty |m_k''|^2 \Big)^{1/2} \Big(\sum\limits_o^\infty |f_k(x)|^2 \Big)^{1/2} \leq C \Big(\sum\limits_o^\infty |f_k|^2 \Big)^{1/2}$

ce qui termine la démonstration de la proposition 3.

Pour démontrer le théorème 2, il est commode d'introduire l'algèbre $\mathcal{A}$ des fonctions $p(\xi) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $(1 + |\xi|)^\alpha |\partial^\alpha p(\xi)| \leq C_\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Il est évident que l'espace vectoriel des symboles vérifiant (a) et (b) est stable par multiplication par les fonctions $p(\xi) \in \mathcal{A}$. Par ailleurs on peut trouver quatre fonctions $p_o(\xi)$, $p_1(\xi)$, $p_2(\xi)$ et $p_3(\xi) \in \mathcal{A}$ telles que

$1 = p_o(\xi) + p_1(\xi) + p_2(\xi) + p_3(\xi)$

support $p_o \subset \{|\xi| \leq 2\}$; dans tout ce qui suit $|\xi|$ désignera $\sup\limits_{1\leq j\leq n} |\xi_j|$.

support $p_1 \subset \bigcup\limits_{k\geq 0} R_k$ où $R_k = \{4^k \leq |\xi| \leq 2.4^k\}$

support $p_2 \subset \bigcup\limits_{k\geq 0} \frac{3}{2} R_k$ et support $p_3 \subset \bigcup\limits_{k\geq 0} 2R_k$.

Posons $p_o(x,\xi) = p(x,\xi)\, p_o(\xi)$, $p_1(x,\xi) = p(x,\xi)\, p_1(\xi)$ etc.

On a $p(x,\xi) = p_o(x,\xi) + \ldots + p_3(x,\xi)$.

Montrons (ce cas sera typique), que l'opérateur pseudo-différentiel T_1 associé au symbole $p_1(x\ ,\ \xi)$ est borné. Puisque $T = T_o + T_1 + T_2 + T_3$ il en résultera que T est borné.

Pour montrer que T_1 (qui sera noté désormais T) est borné, nous décomposons $p_1(x,\xi) = \sum\limits_{k\geq 0} q_k(x,\xi)$ où $q_k(x,\xi)$ est nul hors de $\mathbb{R}^n \times R_k$ (et vaut donc $p_1(x,\xi)$ sur $\mathbb{R}^n \times R_k$).

Appelons ψ une fonction indéfiniment dérivable, égale à 1 sur $1 \leq |\xi| \leq 2$ et à 0 hors de $\frac{3}{4} \leq |\xi| \leq \frac{9}{8}$.

Regardons $q_k(x,\xi)$ comme la restriction au cube $Q_k = \left\{ |\xi| \leq 2.4 \right\}^k$ d'une fonction 4^{k+1} périodique (en ξ).

La série de Fourier de cette fonction est

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}^n} m_{k,j}(x)\, \chi_{k,j}(\xi)$$

où

$$\chi_{k,j}(\xi) = \exp(2\pi i 4^{-k-1}\, j.\xi).$$

Si bien que $q_k(x,\xi) = \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}^n} m_{k,j}(x)\, \chi_{k,j}(\xi)\, \psi(4^{-k}\xi)$ sur tout $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Le calcul immédiat des coefficients de Fourier $m_{k,j}$ donne $|m_{k,j}(x)| \leq C(1+|j|)^{-N}$ et $|m_{k,j}(x+h) - m_{k,j}(x)| \leq C(\log \frac{2}{|h|})^{-\delta}(1 + |j|)^{-N}$ si $|h| \leq 1$.

Posons $Q_j(x,\xi) = \sum\limits_{k\geq 0} m_{k,j}(x)\, \chi_{k,j}(\xi)\, \psi(4^{-k}\xi)$ et appelons $\mathcal{T}_j$ l'opérateur associé au symbole $Q_j(x,\xi)$.

Définissons f_k par $\hat{f}_k(\xi) = \psi(4^{-k}\xi)\, \hat{f}(\xi)$,

$g_{k,j}$ par $\hat{g}_{k,j}(\xi) = \chi_{k,j}(\xi)$ et $g_j(x) = \sum\limits_{k\geq 0} g_{k,j}(x)$.

On passe de f à $\sum_{k\geq 0} g_{k,j}$ par le multiplicateur de Hörmander

$\sum_{k\geq 0} \exp(2\pi i\, 4^{-k-1}\, j.\xi)\, \psi(4^{-k}\xi)$. On a donc grâce à cette remarque

$\|\sum_{k\geq 0} g_{k,j}\|_p \leq C_p(1+|j|)^{\frac{n}{2}+\frac{\varepsilon}{2}} \|f\|_p$ où $\varepsilon = 1$ si n est impair et $\varepsilon = 2$ si n est pair ([3], p. 96). Enfin $\mathscr{C}_j(f) = \sum_{k\geq 0} m_{k,j}(x)\, g_{k,j}(x)$. La proposition 3 donne

$\|\mathscr{C}_j(f)\|_p \leq C_p(1+|j|)^{-N+\frac{n}{2}+\frac{\varepsilon}{2}} \|f\|_p$.

Si $N > \frac{3n}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$, $\|T_1(f)\|_p \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}^n} \|\mathscr{C}_j(f)\|_p \leq C_p\|f\|_p$.

La même preuve vaut pour T_o , T_2 et T_4.

[1] CALDERON, A. P. Commutators of singular integral operators. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 53 (1965), 1092-1099.

[2] FEFFERMAN, Ch. and STEIN, E. M. H^p-spaces in several variables. Acta Math. 129 (1972), 137-193.

[3] STEIN, E. M. Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton Univ. Press (1970).

[4] STRÖMBERG, J. O. Communication orale.

UNE CLASSE D'OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS BORNES SUR $L^r(\mathbb{R}^n)$, $1 < r < +\infty$.

Shahkar Mossaheb et Masami Okada

O. INTRODUCTION. Soit $p(x,\xi)$ un symbole appartenant à la classe $S^o_{1,0}$.

C'est-à-dire que

(1) $$|D_x^\beta \partial_\xi^\alpha p(x,\xi)| \le C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{-|\alpha|}$$

Alors l'opérateur T_p défini par

(2) $$T_p f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi}\, p(x,\xi)\,\hat{f}(\xi)\,d\xi$$

est borné sur L^r pour $1 < r < +\infty$.

Nous nous proposons de montrer que les dérivations par rapport à x sont presque inutiles : il suffira pour obtenir (2) d'imposer aux fonctions $(1+|\xi|)^{|\alpha|}\partial_\xi^\alpha p(x,\xi)$ d'avoir (uniformément par rapport à $\xi \in \mathbb{R}^n$), un module de continuité $\omega_\alpha(h)$ en x majoré par $C_\alpha[\log(2+|h|)]^{-1}$.

Nous présentons tous nos remerciements à Yves Meyer pour ses conseils et suggestions.

1. ENONCE DES RESULTATS.

Soit $p(x,\xi) \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Posons

$$|p|_s = \sup_{\substack{x,\xi \\ |\alpha| \le n+2}} |D_\xi^\alpha p(x,\xi)|(1+|\xi|)^{|\alpha|}$$

où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$, $D_\xi^\alpha = \dfrac{\partial^{\alpha_1}}{\partial \xi_1^{\alpha_1}} \cdots \dfrac{\partial^{\alpha_n}}{\partial \xi_n^{\alpha_n}}$.

Nous démontrerons le théorème suivant.

THEOREME 1. On suppose que

(a) $|p|_s \leq M_1 < +\infty$

(b) $|p - p_t|_s \leq M_2 (\log \frac{2}{|t|})^{-1}$, $|t| \leq 1$, $t \in \mathbb{R}^n$

où $p_t(x,\xi) = p(x-t,\xi)$.

Alors on a

$$\|T_p f\|_r \leq C\, M \|f\|_r \quad , \quad 1 < r < +\infty \quad , \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \tag{3}$$

où C ne dépend que de n et r et $M = \max(M_1, M_2)$.

La preuve du théorème sera décomposée en quatre parties. Tout d'abord nous vérifierons au § 2 que T_p est borné sur L^2. Pour ce faire nous écrirons T_p sous la forme d'une série d' "opérateurs élémentaires" auxquels s'appliquera un lemme fondamental.

Pour montrer les estimations où $r \neq 2$, il faut retourner au noyau définissant T_p et appliquer les méthodes de "variable réelle".

Au § 4 nous montrerons que T_p envoie L^1 dans L^1 faible et cela nous donnera la démonstration du cas $1 < r < 2$ grâce au théorème d'interpolation de Marcinkiewicz.

Pour traiter le cas où $2 < r < +\infty$, nous prouverons que T_p envoie L^∞ dans BMO ; nous pourrons alors utiliser le théorème d'interpolation de Fefferman et Stein [4] comme dans [3].

2. LE CAS L^2.

THEOREME 2. Soit $p(x,\xi)$ un symbole vérifiant les propriétés (a) et (b) du théorème 1. Alors T_p est borné sur L^2.

Naturellement on peut par régularisation et troncation se ramener au cas où $p(x,\xi) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Ce qui importe est que les constantes C et M dans (3) ne dépendent respectivement que de n, M_1 et M_2. Toutes les fonctions écrites ci-dessous appartiendront à la classe $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

PROPOSITION 1. (Cas des opérateurs élémentaires). Soit $p_o(x,\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} m_k(x)\, p_k(\xi)$ où $\|m_k\|_\infty \le 1$, $\sup_{x,k} |m_k(x-t) - m_k(x)| \le \dfrac{1}{\log \frac{2}{|t|}}$ $|t| \le 1$, $t \in \mathbb{R}^n$

$$(4) \quad \begin{aligned} &\|p_k\|_\infty \le 1, \ \text{support}\ p_k(\xi) \subset \{\xi\ ;\ 2^k \le |\xi| \le 3.2^k\}, \quad k \ge 1 \\ &\text{support}\ p_o \subseteq \{\xi\ ;\ |\xi| \le 3\}. \end{aligned}$$

Alors T_p est borné sur L^2 quand $p = p_o(x,\xi)$ et l'on a $\|T_p\| \le C_n$ où C_n ne dépend que de la dimension n.

La proposition 1 est un corollaire évident de la proposition 2 suivante.

PROPOSITION 2. Pour tout entier $n \ge 1$, il existe une constante C_n telle que

$$(5) \qquad \Big\| \sum_{k=0}^{\infty} m_k(.)\, f_k(.) \Big\|_2^2 \le C_n \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_2^2$$

lorsque les m_k vérifient les hypothèses de la proposition 1 et lorsque

$$\text{Support}\ \hat{f}_k(\xi) \subset \{\xi\ ;\ 2^k \le |\xi| \le 3.2^k\}.$$

La proposition 2 est en fait un lemme de "presque-orthogonalité". Les hypothèses signifient que les fonctions f_k sont "tellement orthogonales" que multipliées par les fonctions $m_k(x)$ qui sont "uniformément plates", elles restent des fonctions "presque-orthogonales" $m_k(x)\, f_k(x)$.

La preuve de la proposition 2 repose sur le lemme très simple suivant.

LEMME 1. Soient $F(x)$ et $m(x)$ deux fonctions appartenant à $L^1(\mathbb{R}^n)$ et telles que

$$\text{Support } \hat{F} \subset \left\{\xi \; ; \; 2^{k-2} \leq |\xi| \leq 2^{k+2}\right\}$$

pour un certain entier $k \in \mathbb{N}$. Alors on a

$$\left| \int m(x)\, F(x)\, dx \right| \leq C\, \omega(2^{-k})\, \|F\|_1 \tag{6}$$

où $\omega(h) = \sup\limits_{\substack{0 \leq |t| \leq h \\ x \in \mathbb{R}^n}} |m(x-t) - m(x)|$, $0 < h < 1$ et où C ne dépend que de la dimension n.

Preuve du lemme 1. On peut trouver deux fonctions φ et $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telles que

(7) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, φ soit radiale, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx = 0$ et $\hat{\varphi}(\xi) \neq 0$ sur $\left\{\frac{1}{4} \leq |\xi| \leq 4\right\}$;

(8) $\hat{\psi}(\xi)\, \hat{\varphi}(\xi) = 1$ sur $\left\{\frac{1}{4} \leq |\xi| \leq 4\right\}$.

La construction de φ ne pose aucune difficulté. Pour obtenir $\hat{\psi}$, on prolonge $\frac{1}{\hat{\varphi}}$, restreinte à $\frac{1}{4} \leq |\xi| \leq 4$, en une fonction appartenant à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Posons $\varphi_k(x) = 2^{nk}\, \varphi(\frac{x}{2^k})$ et $\psi_k(x) = 2^{nk}\, \psi(\frac{x}{2^k})$.

Avec ces notations on a

$$\int m(x)\,F(x)\,dx = \int m(x)(F * \psi_k * \varphi_k)(x)\,dx$$

$$= \int (m * \varphi_k)(x)(F * \psi_k)(x)\,dx. \quad \text{Donc}$$

$$\left|\int m(x)\,F(x)\,dx\right| \leq \|m * \varphi_k\|_\infty \|F * \psi_k\|_1 \leq C\|m * \varphi_k\|_\infty \|F\|_1 .$$

Comme $\int \varphi(x)\,dx = 0$, on a $(m * \varphi_k)(x) = \int \left[m(x-2^{-k}t) - m(x)\right]\varphi(t)\,dt$.

On peut dans la construction de φ supposer que Support $\varphi \subset \left\{|t| \leq 1\right\}$; sinon on remplace φ par $\varphi(Nx)$, $N \geq 1$ assez grand. On obtient alors $\| m * \varphi_k\|_\infty \leq C\,\omega(2^{-k})$ et la preuve du lemme 1 est terminée.

Preuve de la proposition 2.

On a

$$\left\|\sum_{k=0}^{\infty} m_k f_k\right\|_2^2 = \sum_{j,k} \int m_j(x)\,\overline{m_k(x)}\,f_j(x)\,\overline{f_k(x)}\,dx = \mathrm{Re}(I + 2J) \quad \text{où}$$

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |m_k f_k|^2\,dx + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} m_{k-1}\,\bar{m}_k\,f_{k-1}\,\bar{f}_k\,dx \quad \text{et}$$

$$J = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=0}^{k-2} m_j\,\bar{m}_k\,f_j\,\bar{f}_k\,dx.$$

Le terme I est facilement majoré par $C \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_2^2$. Nous allons appliquer le lemme 1 à la partie J en posant $m(x) = m_j(x)\,\bar{m}_k(x)$ et $F(x) = f_j(x)\,\bar{f}_k(x)$. On a en effet

$$\text{Support } \hat{F} \subset \text{Support } \hat{f}_j + \text{Support } \hat{\bar{f}}_k \subset \left\{2^{k-2} \leq |\xi| \leq 2^{k+2}\right\}$$

et $\quad |m(x-t) - m(x)| \leq \dfrac{C}{\log \frac{2}{|t|}} \quad$ pour $|t| \leq 1$.

Et donc on a

$$|J| \leq C \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=0}^{k-2} \frac{1}{k} \|f_j\,\bar{f}_k\|_1 \leq C \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-2} \|f_j\|_2\right) \|f_k\|_2 .$$

On sait (Hardy et Littlewood) que pour toute suite x_k, $k \in \mathbb{N}$, de carré sommable, la suite $y_k = \frac{x_o + \ldots + x_k}{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, est aussi de carré sommable.

On a donc $|J| \leq C' \sum_{k\geq 0} \|f_k\|_2^2$.

La preuve de la proposition 2 est terminée.

Réduction aux opérateurs élémentaires.

La réduction d'un opérateur pseudo-différentiel défini par un symbole classique en opérateurs pseudo-différentiels élémentaires a été exposée par Y. Meyer [5]. Nous ne pouvons renvoyer le lecteur à ces notes non encore publiées et, pour cette raison, nous allons décrire ci-dessous cette réduction.

Dans cette décomposition, aucune condition de continuité par rapport à x n'est nécessaire.

Soient $\mu, \nu \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$ telles que support $\mu \subset [1,3]$, $\sum_{-\infty}^{+\infty} \mu(2^{-k}x) = 1$ si $x > 0$ support $\nu \subset [1,4]$, $\nu = 1$ sur le support de μ.

Posons $\theta_k(\xi) = \mu(2^{-k}|\xi|)$, $\tau_k(\xi) = \nu(2^{-k}|\xi|)$, $\theta_o(\xi) = 1 - \sum_{-\infty}^{+\infty} \theta_k(\xi)$.

Appelons $\tau_o(\xi)$ une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ égale à 1 sur le support de θ_o.

Alors une première décomposition de $p(x,\xi)$ s'écrit

$$p(x,\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} p(x,\xi)\,\theta_k(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x,\xi).$$

Regardons $p_k(x,\xi)$ comme une fonction définie sur le cube $Q_k = \{\xi \; ; \; |\xi_j| \leq 2^{k+2}, \; j = 1,\ldots,n\}$. Alors $p_k(x,\xi)$ est développable en série de Fourier : $p_k(x,\xi) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}^n} p_{k,\ell}(x)\,\chi_{k,\ell}(\xi)$ où $\chi_{k,\ell}(\xi) = \exp(\frac{2\pi i\,\ell.\xi}{2^{k+3}})$ et

$$p_{k,\ell}(x) = \frac{1}{2^{n(k+3)}} \int_{Q_k} p_k(x,\xi)\,\overline{\chi_{k,\ell}(\xi)}\,d\xi.$$

Comme $\tau_k = 1$ sur le support de $p_k(x,.)$, on a

$$p(x,\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x,\xi)\,\tau_k(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell\in\mathbf{Z}^n} p_{k,\ell}(x)\,\chi_{k,\ell}(\xi)\,\tau_k(\xi).$$

Désignons par $\pi_\ell(x,\xi)$ le symbole élémentaire

$$\pi_\ell(x,\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{k,\ell}(x)(\chi_{k,\ell}\,\tau_k)(\xi)$$

et posons $T_\ell = T_{\pi_\ell}$.

Alors $T_p = \sum_{\ell\in\mathbf{Z}^n} T_\ell$.

Nous allons estimer la norme de l'opérateur T_ℓ . Il suffit de considérer le cas $\ell \neq 0$ car T_o est borné sur L^2 (proposition 1).

De même nous allons appliquer la proposition 1 pour montrer que $\|T_\ell\|_{L^2,L^2} \leq \dfrac{CM}{1+|\ell|^{n+1}}$, $\ell \in \mathbf{Z}^n$ ce qui suffit à prouver le théorème 2.

Pour cela nous allons majorer $\|p_{k,\ell}(x)\|_\infty$. On a

(10) $\qquad \|p_{k,\ell}\|_\infty \leq C\,M_1\,|\ell|^{-2N}$ pour tout $N \geq 1$; $C = C_N$.

De même on a

(11) $\qquad \sup\limits_{x,k} |p_{k,\ell}(x-t) - p_{k,\ell}(x)| \leq \dfrac{CM_2}{|\ell|^{2N}\log\frac{2}{|t|}}$, $|t| \leq 1$.

Pour obtenir (10) on se reporte à la définition des coefficients de Fourier $p_{k,\ell}(x)$ donnée par (9).

On remarque d'abord que pour tout $N \geq 1$, on a

$|(\Delta_\xi)^N p_k(x,\xi)| \leq CM_1\,2^{-2kN}$ puisque $p_k(x,\xi) = p(x,\xi)\,\theta_o(2^{-k}\xi)$

et $\theta_o \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ (les calculs sont immédiats compte tenu des hypothèses sur $\partial_\xi^\alpha p(x,\xi)$). Ensuite un certain nombre d'intégrations par parties dans (9) donnent le résultat désiré. La preuve de (11) est analogue.

La preuve du théorème 2 se termine par la remarque que

$$\|T_p\|_{L^2,L^2} \le \sum_{\ell\in\mathbf{Z}^n} \|T_\ell\|_{L^2,L^2} \le CM.$$

3. METHODES DE VARIABLES REELLES (estimation du noyau).

LEMME 2. Définissons $K(x,x-y) = \int e^{i(x-y).\xi}\, p(x,\xi)\, d\xi$. Alors on a

(12) $$|K(x,z)| \le \frac{CM_1}{|z|^n}$$

(13) $$|\nabla_z K(x,z)| \le \frac{CM_1}{|z|^{n+1}}$$

(14) $$|K(x',z) - K(x'',z)| \le \frac{CM_2}{|z|^n \log \frac{2n}{|x'-x''|}}, \qquad |x' - x''| \le 1$$

et

(15) $$|K(x,z)| \le \frac{C_N M_1}{|z|^N}, \qquad |z| \ge 1.$$

Ceci pour tout entier $N \geq 1$. Les constantes C (et C_N) ne dépendent que de la dimension (et de N).

Le lemme 2 est tout à fait classique et s'obtient en tronquant le symbole compte tenu de la taille de z. Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ une fonction radiale égale à 1 sur $|x| \le 1$ et dont le support est contenu dans $|x| \le 2$.

On a $K(x,z) = I + J$ où $I = \int e^{iz.\xi}\, \chi(|z|\xi)\, p(x,\xi)\, d\xi$ et $J = \int e^{iz.\xi}(1 - \chi(|z|\xi))\, p(x,\xi)\, d\xi$.

Par définition de χ, on a, de façon immédiate

$$|I| \le \int_{|\xi|\le\frac{2}{|z|}} |p(x,\xi)|\, d\xi \le \frac{CM_1}{|z|^n}.$$

Pour traiter J, on fait un certain nombre d'intégrations par parties :

$$J = \int \frac{1}{|z|^{2N}} e^{iz.\xi} (-\Delta_\xi)^N \left\{(1-\chi(|z|\xi))\, p(x,\xi)\right\} d\xi$$

$$= \frac{1}{|z|^{2N}} \sum_{|\alpha|+|\beta|=2N} C_{\alpha,\beta} \int e^{iz.\xi} D_\xi^\alpha (1-\chi(|z|\xi))\, D_\xi^\beta\, p(x,\xi)\, d\xi .$$

Quand $\alpha = 0$, $|\beta| = 2N$ et si $2N > n$, on a

$$\left| \int e^{iz.\xi} (1 - \chi(|z|\xi))\, D_\xi^\beta\, p(x,\xi)\, d\xi \right| \leq$$

$$\int_{|\xi| \geq 1/|z|} M_1 (1+|\xi|)^{-2N}\, d\xi \leq CM_1 |z|^{-n+2N} .$$

Pour $\alpha \neq 0$, on remarque que $|D_\xi^\alpha (1 - \chi(|z|\xi))| \leq C |z|^{|\alpha|}$ si $\frac{1}{|z|} \leq |\xi| \leq \frac{2}{|z|}$ et vaut 0 sinon.

Finalement $\int |D_\xi^\alpha (1 - \chi(|z|\xi))\, D_\xi^\beta\, p(x,\xi)|\, d\xi \leq$

$$\int_{\frac{1}{|z|} \leq |\xi| \leq \frac{2}{|z|}} |z|^{|\alpha|} CM_1 (1 + |\xi|)^{-|\beta|} d\xi \leq CM_1 |z|^{-n+2N} .$$

L'estimation (13) s'obtient de façon analogue. Il en est de même pour (14) et (15).

En écrivant $K(x,x-y) = K(x,x-y)\, \chi(x-y) + K(x,x-y)(1-\chi(x-y))$ on voit tout de suite que le second noyau définit un opérateur borné sur tous les L^p, $1 \leq p \leq +\infty$.

Il suffit donc de s'occuper des noyaux $K(x,z)$ vérifiant (12), (13), (14) et

(16) support $K(x,z) \subset \left\{(x,z)\ ;\ x \in \mathbb{R}^n\ ,\ |z| \leq 1\right\}$

(17) $\|Tf\|_2 \leq M \|f\|_2$ quand

$$(Tf)(x) = \int K(x\ ,\ x-y)\, f(y)\, dy .$$

Dans ces conditions on a le résultat suivant.

THEOREME 3. <u>Si le noyau</u> $K(x,z)$ <u>vérifie les propriétés</u> (12), (13), (14), (16) <u>et</u> (17), <u>alors l'opérateur</u> T <u>correspondant est borné sur</u> L^r <u>pour</u>

$1 < r < +\infty$.

La preuve du théorème 3 occupera les § 4 et 5 ci-dessous.

4. EXAMEN DU CAS $1 < r < 2$.

On a le choix entre deux méthodes.

On peut facilement montrer que (12), (13) et (17) impliquent que T envoie L^1 dans L^1-faible. Il suffit de reprendre mot pour mot la démonstration de [7], p. 30 à 33.

On peut aussi montrer que

(18) $$\|Tf\|_1 \leq C \|f\|_{H^1}.$$

En effet f se décompose en fonctions atomiques

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \varphi_j(x) \qquad , \qquad \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| \leq 2 \|f\|_{H^1}$$

où $\int \varphi_j(x)\,dx = 0$, support $\varphi_j \subset Q_j$ et de plus $\|\varphi_j\|_\infty \leq \frac{1}{|Q_j|}$. Les Q_j sont des cubes et l'existence d'une telle décomposition est prouvée dans [2]. Appelons d_j la longueur du côté de Q_j, y_j son centre, $2Q_j$ le cube "double" de Q_j et enfin $|Q_j|$ la mesure de Q_j. On a $\int_{R^n} |T\varphi_j(x)|\,dx = \int_{2Q_j} |T\varphi_j(x)|\,dx +$ $\int_{[2Q_j]^c} \left|\int K(x,x-y)\,\varphi_j(y)\,dy\right| dx$. Pour estimer le premier terme, on utilise l'inégalité L^2 pour T.

On a $$\int_{2Q_j} |T\varphi_j|\,dx \leq |2Q_j|^{1/2} \|T\varphi_j\|_2 \leq CM.$$

Pour le second terme, on a, pour tout $x \notin 2Q_j$

$$\left|\int K(x,x-y)\,\varphi_j(y)\,dy\right| = \left|\int \left[K(x,x-y) - K(x,x-y_j)\right]\varphi_j(y)\,dy\right|$$

$$\leq C\,d_j\,|x-y_j|^{-n-1}\int_{Q_j}|\varphi_j(y)|\,dy \leq C\,d_j\,|x-y_j|^{-n-1}$$

On remarque enfin que $d_j \int_{|x-y_j|\geq d_j} |x-y_j|^{-n-1}dx \leq C.$

Et donc $\|T f\|_1 \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|\,\|T\varphi_j\|_1 \leq CM \sum_1^{\infty} |a_j| \leq CM\|f\|_{H^1}.$

5. LE CAS $2 < r < +\infty$.

Grâce au théorème d'interpolation de Fefferman et Stein rappelé ci-dessus, il suffit de démontrer que T envoie L^∞ dans BMO.

Soient Q un cube de centre x_o, $\tilde{Q}$ le cube double, $1_{\tilde{Q}}$ la fonction caractéristique de $\tilde{Q}$, $f \in L^\infty$, $f_1 = f1_{\tilde{Q}}$ et $f_2 = f - f_1$. On a évidemment

$$\int_Q |Tf_1|\,dx \leq |Q|^{1/2}\|Tf_1\|_2 \leq |Q|^{1/2} M\|f_1\|_2 \leq CM|Q|\,\|f\|_\infty.$$

Pour montrer que Tf appartient à BMO, il suffit de vérifier que

$$\int_Q |Tf_2(x) - Tf_2(x_o)|\,dx \leq CM|Q|$$

On a

$$\int_Q |Tf_2(x) - Tf_2(x_o)|\,dx = \int_Q \left|\int K(x,x-y) - K(x_o,x_o-y)\,f_2(y)\,dy\right|dx \leq I + J \quad \text{où}$$

$$I = \int_Q \int |K(x,x-y) - K(x,x_o-y)|\,|f_2(y)|\,dy\,dx$$

et $$J = \int_Q \int |K(x,x_o-y) - K(x_o,x_o-y)|\,|f_2(y)|\,dy\,dx.$$

On a, si d désigne le côté du cube Q,

$$I \leq CM_1 d\,|Q|\int \frac{|f_2(y)|}{|x_o-y|^{n+1}}\,dy \leq C'M_1|Q|\,\|f\|_\infty.$$

En ce qui concerne J, on peut supposer $d \leq 1$; sinon $Tf_2(x) = 0$ pour tout $x \in Q$ d'après (16).

On a donc, grâce à (14),

$$J \leq CM_2 \int_Q \int_{|x_o - y| \leq 1} |f_2(y)| \, |x_o - y|^{-n} (\log \frac{2n}{|x - x_o|})^{-1} dy\, dx \leq C' M_2 |Q| .$$ Ceci finit la démonstration du théorème 3.

Remarques. Il est facile de montrer que les conditions $|p|_s < +\infty$, $|p - p_t|_s \leq C(\log \frac{2}{|t|})^{-1/2}$ n'entraînent pas que l'opérateur T_p soit borné sur L^2. Mais nous ne savons pas ce qui se passe si $|p|_s < +\infty$, $|p - p_t|_s < C(\log \frac{2}{|t|})^{-\delta}$, $\frac{1}{2} < \delta < 1$.

Bibliographie

[1] CHING, C.-H. Pseudo-differential operators with non regular symbols. J. Differential Equations 11 (1972), 436-447.

[2] COIFMAN, R. A real variable characterization of H^p. Studia Math 51 (1974), 269-274.

[3] FEFFERMAN, Ch. L^p bounds for pseudo-differential operators. Israël J 14 (1973), 413-417.

[4] FEFFERMAN, Ch. and STEIN, E. M. H^p spaces of several variables. Acta Math. 129 (1972), 137-193.

[5] MEYER, Y. Cours de 3ème cycle (1976-1977) et exposé au séminaire d'Analyse Harmonique d'Orsay 1976.

[6] STEIN, E. M. Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton Univ. Press (1970).

UNE GENERALISATION D'UN THEOREME DE J. DELSARTE

par Alain Yger

I. INTRODUCTION.

Soient μ_1 et μ_2 deux distributions à support compact dans $\mathbb{R}^2$. Un problème ouvert de la théorie des fonctions moyenne-périodiques de deux variables est de savoir si les solutions élémentaires du système $f * \mu_1 = 0$ et $f * \mu_2 = 0$ forment une partie totale dans l'espace vectoriel de toutes les solutions indéfiniment dérivables de ce même système ; une solution élémentaire est, par définition, une solution de la forme $f(x,y) = P(x,y) \exp i(ux + vy)$ où $(u,v) \in \mathbb{C}^2$.

Sous cette forme, le problème posé n'est toujours pas résolu. Dans certains cas particuliers, la réponse est connue. Par exemple Delsarte a prouvé qu'il y a totalité si μ_1 et μ_2 sont toutes deux la somme de quatre masses ponctuelles portées par les sommets d'un carré et d'une densité suffisamment régulière étendue à l'intérieur de ce carré. De plus Delsarte considérait la matrice $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ dont les lignes sont les quatre masses ponctuelles de μ_1 et μ_2 aux quatre sommets A , B , C et D du carré (dont les côtés sont AB, BC, CD et DA) ; il faisait l'hypothèse que les quatre déterminants (associés aux côtés) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} d_1 & a_1 \\ d_2 & a_2 \end{vmatrix}$ sont tous différents de 0.

Notre propos est d'étendre le théorème de Delsarte au cas d'un polygone convexe et compact. Par polygone convexe et compact nous entendons une partie compacte P du plan affine qui soit une intersection finie de demi-plans fermés ; nous supposerons que P n'est pas un segment car dans ce cas les hypothèses faites au théorème 1 entraînent que la seule fonction f vérifiant $f * \mu_1 = f * \mu_2 = 0$ est la fonction nulle.

2. ENONCE DU THEOREME 1.

THEOREME 1. Soit P un polygone convexe et compact du plan affine dont les $n+1$ sommets sont $A_o, A_1, \ldots, A_n$ et les $n+1$ côtés sont $A_oA_1, \ldots, A_{n-1}A_n$ et A_nA_o. Soient μ et ν deux mesures de Radon complexes ayant les propriétés suivantes

(1) les supports de μ et ν sont contenus dans P

(2) en notant a_j (resp. b_j) la masse de μ (resp. ν) en A_j, on a $a_jb_{j+1} - a_{j+1}b_j \neq 0$ pour $0 \leq j \leq n$; avec la convention que l'indice $n+1$ est 0.

(3) μ et ν ne chargent pas les côtés ouverts $]A_j A_{j+1}[$ $(0 \leq j \leq n)$:

$$\int_{]A_j,A_{j+1}[} d|\mu| = \int_{]A_j,A_{j+1}[} d|\nu| = 0.$$

Alors les solutions $f(x,y) = P(x,y)\exp i(ux + vy)$, $P \in \mathbb{C}[X,Y]$, $(u,v) \in \mathbb{C}^2$ du système

$$(4) \qquad f * \mu = f * \nu = 0$$

forment une partie totale dans l'espace vectoriel des solutions continues de (4) ; la topologie étant celle de la convergence uniforme sur tout compact.

Le cas examiné par Delsarte était celui où P est le carré $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$;

alors si D désigne le rectangle $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$; il est facile de prouver ([4]) que toute fonction $g \in L^2(D)$ est la restriction à D d'une fonction $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant (4) presque-partout. Cette observation conduit d'ailleurs à une preuve très simple du théorème de Delsarte. Nous ne savons pas si l'on peut trouver, dans le cadre du théorème 1, un tel domaine fondamental D.

3. UNE PREMIERE REDUCTION ET LE PLAN DE LA DEMONSTRATION.

Traditionnellement, on démontre par dualité les théorèmes de totalité. On peut évidemment ramener une solution continue (ou dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$) de (4) à être indéfiniment dérivable par convolution avec une approximation de l'identité. Nous prouverons la totalité dans l'espace $\mathcal{E}$ des fonctions indéfiniment dérivables (sans conditions de croissance) dont le dual est l'espace $\mathcal{E}'$ des distributions à support compact.

Il est classique d'observer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes pour une distribution $\tau \in \mathcal{E}'$

(5) pour toute solution élémentaire $f(x,y) = P(x,y) \exp i(zx + wy)$ du système (4), $\tau * f = 0$.

(6) pour tout point $p_o = (z_o, w_o) \in \mathbb{C}^2$, il existe deux fonctions holomorphes au voisinage de p_o, $A_{p_o}(z,w)$ et $B_{p_o}(z,w)$, telles qu'au voisinage de p_o, on ait $\hat{\tau}(z,w) = A_{p_o}(z,w)\,\hat{\mu}(z,w) + B_{p_o}(z,w)\,\hat{\nu}(z,w)$; dans tout ce qui suit le signe ^ désigne la transformée de Fourier complexe.

Montrer la totalité des solutions élémentaires revient à démontrer que pour toute distribution $\tau \in \mathcal{E}'$ la condition (6) entraîne que τ appartient à la fermeture (pour la topologie $\sigma(\mathcal{E}',\mathcal{E})$) de l'idéal $\mu * \mathcal{E}' + \nu * \mathcal{E}'$.

Nous allons prouver que cet idéal est fermé.

THEOREME 2. Soient μ et ν deux mesures vérifiant les hypothèses du théorème 1. Alors l'idéal $\mathcal{J} = \mu * \mathcal{E}' + \nu * \mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}'$ est fermé pour la topologie $\sigma(\mathcal{E}',\mathcal{E})$ et les deux propriétés suivantes sont équivalentes pour toute distribution $\tau \in \mathcal{E}'$

(a) $\tau \in \mathcal{J}$

(b) pour tout $p_o = (z_o, w_o) \in \mathbb{C}^2$, $\hat{\tau}(z,w)$ appartient à l'idéal $\mathcal{O}\hat{\mu} + \mathcal{O}\hat{\nu}$; $\mathcal{O}$ désigne l'anneau des germes de fonctions de z et w holomorphes au voisinage de p_o.

Naturellement (a) est équivalent à la propriété

(7) il existe deux fonctions entières $A(z,w)$ et $B(z,w)$, satisfaisant les conditions de croissance du théorème de Paley-Wiener et telles que

$$\hat{\tau}(z,w) = A(z,w)\,\hat{\mu}(z,w) + B(z,w)\,\hat{\nu}(z,w).$$

Il est évident que a) $\Rightarrow$ b).

Pour montrer que b) $\Rightarrow$ a), il faut choisir pour chaque $p_o \in \mathbb{C}^2$ des coefficients $A_{p_o}(z,w)$ et $B_{p_o}(z,w)$ qui puisse se recoller en des fonctions globales $A(z,w)$, $B(z,w)$ entières et vérifiant les conditions de croissance du théorème de Paley-Wiener.

Ce recollement se fera en deux temps.

I. A l'aide du théorème des voisinages privilégiés de A. Douady, nous allons trouver deux nombres réels $r > 0$, $R > 0$, un entier $q \geq 0$ et une constante $C > 0$ tels que, pour tout $p_o \in \mathbb{C}^2$, l'on puisse construire deux fonctions $A_{p_o}(z,w)$ et $B_{p_o}(z,w)$, holomorphes au voisinage de $\left\{|z-z_o| \leq r \ ; \ |w-w_o| \leq R\right\}$ et vérifiant, sur ce voisinage,

(8) $\hat{\tau}(z,w) = A_{p_o}(z,w)\,\hat{\mu}(z,w) + B_{p_o}(z,w)\,\hat{\nu}(z,w)$

et

(9) $$\sup_{|z-z_o|\leq r \text{ et } |w-w_o|\leq R} |A_{p_o}(z,w)| + |B_{p_o}(z,w)| \leq C(1+\|p_o\|)^q\, e^{C(|\Im m\, z_o| + |\Im m\, w_o|)}.$$

II. A l'aide d'une méthode due à Ehrenpreis nous recollerons les décompositions obtenues au I pour obtenir $A(z,w)$ et $B(z,w)$.

4. LOCALISATION DU SPECTRE.

Le spectre Λ associé au couple (μ,ν) est l'ensemble des $(z,w) \in \mathbf{C}^2$ tels que $\hat{\mu}(z,w) = \hat{\nu}(z,w) = 0$. Nous allons montrer que Λ est contenu dans une bande horizontale $|\Im m\, z| \leq C$, $|\Im m\, w| \leq C$.

Cependant, dans la discussion qui précèdera l'application du théorème des voisinages privilégiés de Douady, il sera important d'associer au couple (μ,ν) tous les couples $(\chi\mu, \chi\nu)$ où $\chi \in \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^2, \mathbf{T}) = G$; G est le groupe, isomorphe à $\mathbf{R}^2$, de tous les caractères continus sur $\mathbf{R}^2$.

Pour tout $\chi \in G$, soit Λ_χ l'ensemble des $(z,w) \in \mathbf{C}^2$ tels que $(\chi\mu)^\wedge(z,w) = (\chi\nu)^\wedge(z,w) = 0$. On a alors le résultat suivant.

LEMME 1. <u>Il existe deux constantes</u> T_1 <u>et</u> T_2 <u>telles que, pour tout</u> $\chi \in G$, Λ_χ <u>soit contenu dans</u> $|\Im m\, z| \leq T_1$ <u>et</u> $|\Im m\, w| \leq T_2$.

Nous aurons, en fait, besoin d'un résultat plus précis nécessitant des notations supplémentaires.

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan euclidien. Pour tout vecteur unitaire $\vec{u} = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$ et pour tout $\alpha > 0$, le secteur angulaire ouvert $S_\alpha(\vec{u})$ est défini par $|x\sin\theta - y\cos\theta| < \alpha(x\cos\theta + y\sin\theta)$.

On peut alors énoncer.

LEMME 2. <u>Pour tout vecteur unitaire</u> $\vec{u}$, <u>on peut trouver deux constantes complexes</u> c <u>et</u> d <u>et des nombres réels strictement positifs</u> α, δ, C_1 <u>et</u> C_2 <u>tels que</u> $\forall (z,w) \in \mathbb{C}^2$, <u>les conditions</u> $(\mathfrak{Im}\, z, \mathfrak{Im}\, w) \in S_\alpha(\vec{u})$ <u>et</u> $\mathfrak{Im}\, z\cos\theta + \mathfrak{Im}\, w\sin\theta \geq C_1$ <u>entraînent</u>, $\forall \chi \in G$,

$$(10)\quad |c(\chi\mu)^{\wedge}(z,w) + d(\chi\nu)^{\wedge}(z,w)| \geq \delta\exp\left[-C_2(\mathfrak{Im}\, z\cos\theta + \mathfrak{Im}\, w\sin\theta)\right].$$

Avant de prouver ce résultat nous allons en déduire un corollaire. Posons $|\mathfrak{Im}\, z, \mathfrak{Im}\, w| = \left[(\mathfrak{Im}\, z)^2 + (\mathfrak{Im}\, w)^2\right]^{1/2}$. Le second membre de (10) peut alors être remplacé par $\delta\exp\left[-C_2|\mathfrak{Im}\, z, \mathfrak{Im}\, w|\right]$. Ensuite on peut recouvrir $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ par un nombre fini de secteurs ouverts de la forme $S_\alpha(\vec{u})$. Quitte à replacer C_1 par une constante T plus grande, on a le résultat suivant

COROLLAIRE. <u>Il existe une constante</u> $\delta_1 > 0$, <u>une constante</u> $C_3 > 0$, <u>une constante</u> $T > 0$ <u>et un ensemble fini</u> F <u>de couples</u> $(c,d) \in \mathbb{C}^2$ <u>tels que</u> $\forall (p,q) \in \mathbf{Z}^2$ <u>vérifiant</u> $p^2 + q^2 \geq T^2$, <u>il existe un couple</u> $(c,d) \in F$ <u>ayant la propriété suivante</u> : $\forall \chi \in G$,

$$|\mathfrak{Im}\, z - p| \leq 1 \text{ et } |\mathfrak{Im}\, w - q| \leq 1 \Rightarrow |c(\chi\mu)^{\wedge}(z,w) + d(\chi\nu)^{\wedge}(z,w)|$$
$$\geq \delta_1\exp\left[-C_3|\mathfrak{Im}\, z, \mathfrak{Im}\, w|\right].$$

Pour prouver le lemme 2, on peut évidemment se ramener au cas où $\theta = 0$.

Deux cas se présentent dans la preuve du lemme 2.

Ou bien il y a un seul point de P d'abscisse maxima ; alors ce point est un sommet et, quitte à réordonner les sommets, on pourra supposer que ce sommet est A_o. Si a_o (la masse de μ en A_o) est $\neq 0$, on choisit $c = 1$ et $d = 0$. On a alors, en appelant x_o et y_o les coordonnées de A_o et $\varepsilon > 0$ un nombre qui sera fixé dans un instant,

$$|\hat{\mu}(z,w)| \geq |a_o| \exp(x_o \mathfrak{Im}\, z + y_o \mathfrak{Im}\, w) - I - J$$

où
$$I = \int_{P \cap \{x \leq x_o - \varepsilon\}} \exp(x\, \mathfrak{Im}\, z + y\, \mathfrak{Im}\, w) d|\mu|(x,y) \quad \text{et}$$

$$J = \int_{P \cap \{x_o - \varepsilon < x < x_o\}} \exp(x\, \mathfrak{Im}\, z + y\, \mathfrak{Im}\, w)\, d|\mu|(x,y).$$

On peut trouver $\alpha > 0$ tel que si $|s| \leq \alpha t$ on ait $\forall\, (x,y) \in P$ $tx_o + sy_o \geq tx + sy$. Si $|\mathfrak{Im}\, w| \leq \alpha |\mathfrak{Im}\, z|$, on obtient

$$J \leq \exp(x_o\, \mathfrak{Im}\, z + y_o\, \mathfrak{Im}\, w)\, |\mu|(P \cap \{x_o - \varepsilon < x < x_o\}) \leq$$

$$\frac{1}{3} |a_o| \exp(x_o\, \mathfrak{Im}\, z + y_o \mathfrak{Im}\, w) \; ; \quad \text{si } \varepsilon \text{ est assez petit.}$$

Enfin, quitte à choisir $\alpha > 0$ assez petit, on pzut trouver un $\eta > 0$ tel que, $\forall\, (s,t) \in \mathbb{R}^2$, $|s| \leq \alpha t$ implique $\sup_{P \cap \{x \leq x_o - \varepsilon\}} tx + sy \leq (1-\eta)(tx_o + sy_o)$. On a donc

$$I \leq C \exp\left[(1-\eta)(\mathfrak{Im}\, z\, x_o + \mathfrak{Im}\, w\, y_o)\right] \leq \frac{1}{3} |a_o| \exp(x_o\, \mathfrak{Im}\, z + y_o\, \mathfrak{Im}\, w) \; ; \text{ ceci si}$$

$|\mathfrak{Im}\, w| \leq \alpha\, \mathfrak{Im}\, z$ et $\mathfrak{Im}\, z \geq C_1$.

Le second cas est celui où deux sommets (disons A_o et A_1) ont la même abscisse maxima. On forme alors $b_1\mu - a_1\nu$ qui ne charge plus A_1 mais dont la masse en A_o est $a_o b_1 - a_1 b_o \neq 0$ et l'on applique à cette nouvelle mesure un raisonnement analogue au précédent.

Pour énoncer le lemme 3 ci-dessous, quelques notations supplémentaires sont nécessaires. Ecrivons

$$\mu = \sum_{o}^{n} a_i \delta_{A_i} + \rho$$

$$\nu = \sum_{o}^{n} b_i \delta_{A_i} + \sigma \ ;$$

les hypothèses faites sur μ et ν signifient que ρ et σ sont portées par l'intérieur de P.

LEMME 3. <u>L'ensemble</u> $\mathfrak{F}$ <u>des couples de fonctions entières sur</u> $\mathbf{C}^2$ $\left[(\chi\mu)^\wedge(z,w), (\chi\nu)^\wedge(z,w)\right]$ <u>où</u> $\chi \in \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^2,\mathbf{T})$ <u>est relativement compact pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Soit</u> Γ <u>le sous-groupe de</u> $\mathbf{R}^2$ <u>engendré par</u> $A_o, A_1, \ldots$ <u>et</u> A_n ; Γ <u>n'est pas nécessairement fermé. Soit</u> $\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbf{T})$ <u>le groupe de tous les homomorphismes de</u> Γ <u>dans</u> $\mathbf{T}$. <u>Alors pour tout couple</u> (F,G) <u>appartenant à la fermeture</u> $\mathcal{H}$ <u>de</u> $\mathfrak{F}$, <u>il existe un</u> $\chi_o \in \mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbf{T})$ <u>et deux mesures</u> ρ_o <u>et</u> σ_o, <u>portées par l'intérieur de</u> P <u>et telles que</u>

$$F = \left(\chi_o \sum_{o}^{n} a_i \delta_{A_i}\right)^\wedge + \hat{\rho}_o \qquad \underline{\text{et}} \qquad G = \left(\chi_o \sum_{o}^{n} b_i \delta_{A_i}\right)^\wedge + \hat{\sigma}_o .$$

La première assertion du lemme 3 est immédiate. Puisque $|\chi| = 1$ et que μ et ν ont un support compact, toutes les dérivées de $(\chi\mu)^\wedge$ et $(\chi\nu)^\wedge$ sont majorées, uniformément par rapport à χ. Le théorème d'Ascoli montre que $\mathfrak{F}$ est relativement compact.

Si $(F,G) \in \mathcal{H}$, il existe une suite $\chi_j \in \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^2,\mathbf{T})$ telle que $F = \lim(\chi_j\mu)^\wedge$, $G = \lim(\chi_j\nu)^\wedge$; le groupe $\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbf{T})$ est métrisable et compact et l'on peut extraire une sous suite ξ_j des χ_j convergente sur Γ vers χ_o.

On peut enfin, quitte à extraire des sous-suites, supposer que $\xi_j \rho \to \rho_o$ dans la topologie $\sigma(L^2 d|\rho|, L^2 d|\rho|)$ et faire l'hypothèse correspondante sur $\xi_j \sigma$. Alors $\rho_o \in L^2(d|\rho|)$; cela entraîne que ρ_o soit absolument continue par rapport à la mesure $d|\rho|$ et donc que tout ensemble de mesure nulle pour $d|\rho|$ le soit encore pour $|\rho_o|$. En particulier ρ_o est portée par l'intérieur de P. Le même raisonnement s'applique à σ_o.

LEMME 4. <u>Les couples</u> $(z,w) \in \mathbb{C}^2$ <u>tels que</u> $\hat{\mu}(z,w) = \hat{\nu}(z,w) = 0$ <u>forment un ensemble discret</u>.

Pour tout couple $\omega = (F,G) \in \mathcal{H}$, nous désignerons respectivement par $\mathcal{V}_\omega$ l'ensemble des couples $(z,w) \in \mathbb{C}^2$ tels que $F(z,w) = G(z,w) = 0$ et par $\mathcal{W}_\omega \subset \mathcal{V}_\omega$ l'ensemble des points non isolés dans $\mathcal{V}_\omega$; puisque $\mathcal{V}_\omega$ est fermé, $\mathcal{W}_\omega$ est aussi l'ensemble des points d'accumulation de $\mathcal{V}_\omega$.

Soit $E = \bigcup_{\omega \in \mathcal{H}} \mathcal{W}_\omega$ et soit $\pi(E)$ la projection de E sur la droite complexe des z.

Nous allons successivement montrer que E est fermé dans $\mathbb{C}$ et ensuite que E est ouvert dans $\mathbb{C}$. Soit nous aurons $E = \emptyset$ et le lemme 4 est prouvé ; soit $E = \mathbb{C}$ mais cette dernière assertion est incompatible avec le lemme 1. Il convient ici de remarquer que l'inégalité obtenue ou lemme 2 est encore vérifiée si l'on remplace $\left[(\chi\mu)\hat{}\,,(\chi\nu)\hat{}\right]$ par n'importe quel couple $(F,G) \in \mathcal{H}$. Cela implique que le lemme 1 soit applicable, sans changer T_1 ou T_2 pour tous les $(F,G) \in \mathcal{H}$. En particulier $\pi(E)$ est contenu dans la bande $|\mathfrak{Im}\, z| \leq T_1$.

(α) $\pi(E)$ <u>est fermé dans</u> $\mathbf{C}$.

Soit (z_n , w_n) une suite de points de E telle que $z_n \to \zeta \in \mathbf{C}$. Il existe donc une suite $(F_n , G_n) \in \mathcal{H}$ telle que $F_n(z_n,w_n) = G_n(z_n,w_n) = 0$. Puisque $|\mathfrak{Im}\, w_n| \leq T_2$, on peut écrire $w_n = \sigma_n + i\tau_n$ où $\sigma_n \in \mathbf{R}$ et $|\tau_n| \leq T_2$. Or $(F,G) \in \mathcal{H}$ entraîne, pour tout σ réel, $(F_\sigma , G_\sigma) \in \mathcal{H}$ où $F_\sigma(z,w) = F(z , w+\sigma)$ et de même pour G_σ. En effet, cette translation réelle correspond, avant transformée de Fourier, à la multiplication par $\chi = e^{-i\sigma y}$. On peut donc former une nouvelle suite $(\widetilde{F}_n , \widetilde{G}_n) \in \mathcal{H}$ telle que $\widetilde{F}_n(z_n , i\tau_n) = \widetilde{G}_n(z_n , i\tau_n) = 0$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $\widetilde{F}_n \to \widetilde{F}$ et $\widetilde{G}_n \to \widetilde{G}$ uniformément sur tout compact de $\mathbf{C}^2$ tandis que $(z_n , i\tau_n) \to (\zeta , i\tau)$. Par hypothèse $(z_n , i\tau_n)$ est un zéro isolé du couple $(\widetilde{F}_n , \widetilde{G}_n) \in \mathcal{H}$. Montrons alors que $(\zeta , i\tau)$ est un zéro non isolé de $(\widetilde{F} , \widetilde{G})$. Cela résulte d'une conséquence très simple du théorème des voisinages privilégiés de A. Douady (§ 5 ci-dessous). Soient φ et ψ deux fonctions analytiques au voisinage de $0 \in \mathbf{C}^2$ telles que $\varphi(0,0) = \psi(0,0) = 0$ mais que la multiplicité d'intersection de $\varphi = 0$ et $\psi = 0$ en 0 soit finie et égale à m. Il existe alors un voisinage compact V de 0 dans $\mathbf{C}^2$ et un $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout couple φ_1 , ψ_1 de deux fonctions analytiques au voisinage de V, les conditions $\sup\limits_V |\varphi - \varphi_1| \leq \varepsilon$ et $\sup\limits_V |\psi - \psi_1| \leq \varepsilon$ entraînent que le nombre de points d'intersection de $\varphi_1 = 0$ et de $\psi_1 = 0$ dans V (comptés avec leurs multiplicités) soit exactement m.

En appliquant cette remarque à $\varphi_1 = \widetilde{F}$ et $\psi_1 = \widetilde{G}$, on en déduit que $(\zeta , i\tau)$ ne peut être un zéro isolé de $(\widetilde{F} , \widetilde{G})$; sinon la multiplicité d'intersection en $(\zeta , i\tau)$ de ce couple serait finie et il en serait de même pour le couple voisin $(\widetilde{F}_n , \widetilde{G}_n)$.

$\beta)$ $\pi(E)$ <u>est ouvert dans</u> $\mathbb{C}$.

Supposons que (z_o, w_o) soit un zéro non isolé d'un couple $(F,G) \in \mathcal{H}$.

En vertu du lemme 1, il ne se peut pas que $F(z_o,w) = G(z_o,w) = 0$ pour tout $w \in \mathbb{C}$.

On peut, par exemple, supposer $F(z_o,w)$ non identiquement nulle. Le théorème de préparation de Weierstrass donne une décomposition

$$F(z,w) = \left[(w-w_o)^m + a_1(z)(w-w_o)^{m-1} + \ldots + a_m(z)\right] U(z,w)$$

où $a_j(z_o) = 0$, $1 \leq j \leq m$ et où $U(z,w)$ n'est pas nulle au voisinage de (z_o,w_o).

On a une décomposition analogue pour $G(z,w)$ avec éventuellement un terme en $(z - z_o)^p$ en facteur.

Si (z_o,w_o) n'est pas un zéro isolé du couple (F,G), le discriminant $\Delta(z)$ des deux polynômes de Weierstrass est identiquement nul : $\pi(E)$ est donc ouvert.

5. LE THEOREME DES VOISINAGES PRIVILEGIES DE DOUADY.

Nous l'énoncerons sous la forme d'un lemme.

LEMME 5. <u>Soient</u> a, b, c <u>et</u> d <u>quatre nombres réels strictement positifs</u>, P <u>le pavé de</u> $\mathbb{C}^2$ <u>défini par</u> $|x| \leq a$, $|y| \leq b$, $|\xi| \leq c$ <u>et</u> $|\eta| \leq d$ <u>avec</u> $z = x + iy$, $w = \xi + i\eta$. <u>Soient</u> $a_1 > a$, $b_1 > b$, $c_1 > c$ <u>et</u> $d_1 > d$ <u>et</u> $\tilde{P}$ <u>le pavé "élargi" défini par</u> a_1, b_1, c_1 <u>et</u> d_1.

<u>Soient</u> M <u>et</u> $N \in \mathcal{O}(\tilde{P})$, <u>deux fonctions analytiques au voisinage de</u> $\tilde{P}$, <u>n'ayant qu'un nombre fini de zéros communs sur</u> $\tilde{P}$.

1) <u>Il existe alors un</u> $\varepsilon > 0$ <u>et une constante</u> $C > 0$ <u>tels que</u>

$\forall\, M_1 \in \mathcal{O}(\tilde{P})$, $\forall\, N_1 \in \mathcal{O}(\tilde{P})$, $\forall\, A \in \mathcal{O}(\tilde{P})$, $\forall\, B \in \mathcal{O}(\tilde{P})$, <u>les conditions</u> $\sup_{\tilde{P}} |M_1 - M| \leq \varepsilon$, $\sup_{\tilde{P}} |N_1 - N| \leq \varepsilon$ <u>et</u> $AM_1 + BN_1 = 0$ <u>au voisinage de</u> $\tilde{P}$ <u>impliquent l'existence de</u> $H \in \mathcal{O}(P)$ <u>tel que</u> $\sup_P |H| \leq C \sup_{\tilde{P}}(|A| + |B|)$ <u>et</u> $A = -HN$, $B = HM$ <u>sur</u> P.

2) <u>Les hypothèses sur</u> M_1 <u>et</u> N_1 <u>étant les mêmes que dans la partie</u> 1, $\forall\, F \in M_1\mathcal{O}(\tilde{P}) + N_1 O(\tilde{P})$, $\exists\, A \in \mathcal{O}(P)$, $\exists\, B \in \mathcal{O}(P)$ <u>tels que</u> $F = AM_1 + BN_1$ <u>sur</u> P, $\sup_P |A| \leq C \sup_{\tilde{P}} |F|$ <u>et</u> $\sup_P |B| \leq C \sup_{\tilde{P}} |F|$.

Ce lemme est une conséquence très simple du théorème des voisinages privilégiés de Douady. Il s'obtient en deux temps : une version locale est exactement le théorème des voisinages privilégiés. Ensuite on recolle les décompositions locales obtenues par une méthode canonique.

Soit $S = \{p \in P \;;\; M(p) = N(p) = 0\}$. Pour tout $p \in S$, p est un zéro isolé de M et N, de multiplicité m_p. Il existe donc une base $Q_{1,p}, \ldots, Q_{m_p,p}$, formée de polynômes, de l'espace vectoriel $\mathcal{O}_p/M\mathcal{O}_p + N\mathcal{O}_p$, dont la dimension est m_p ; $\mathcal{O}_p$ désignant l'anneau des germes de fonctions holomorphes en p.

Soit V_p un voisinage privilégié de p, contenu dans $\tilde{P}$. En employant les notations de Douady, appelons pour tout compact $K \subset \mathbf{C}^2$, $B(K)$ la fermeture de $\mathcal{O}(K)$ dans $\mathcal{C}(K)$; une fonction $\varphi \in B(K)$ est par définition la limite uniforme sur K d'une suite de fonctions holomorphes au voisinage de K.

Le théorème des voisinages privilégiés fournit une suite exacte directe

$$0 \longrightarrow B(V_p) \xrightarrow[u_p]{} B(V_p) \oplus B(V_p) \oplus C^{m_p} \xrightarrow[v_p]{} B(V_p) \longrightarrow 0$$

où $u_p(f) = (-Nf\,,\ Mf\,,\ 0,\ \ldots,\ 0)$

$$v_p(f,g,\lambda_1, \ldots, \lambda_{m_p}) = Mf + Ng + \lambda_1 Q_{1,p} + \ldots + \lambda_{m_p} Q_{m_p,p}.$$

Si conservant V_p et donc les espaces de Banach de la suite exacte directe, on remplace M par M_1 et N par N_1, cela revient à changer u_p et v_p en $\tilde{u}_p$ et $\tilde{v}_p$ tels que $\|u_p - \tilde{u}_p\| \leq C\varepsilon$ et $\|v_p - \tilde{v}_p\| \leq C\varepsilon$; les normes sont celles des applications linéaires correspondantes. On conserve, si ε est assez petit, une suite exacte directe. En particulier la dimension de l'espace quotient $B(V_p)/M_1 B(V_p) + N_1 B(V_p)$ reste égale à m_p ; ceci prouve que le nombre de points d'intersection de $M_1 = 0$ et $N_1 = 0$ sur V_p est égal à m_p (V_p est le produit de deux disques tels que $|M| + |N|$ ne s'annule pas sur ∂V_p ; si $\varepsilon > 0$ est assez petit il en est de même pour $|M_1| + |N_1|$). Ceci prouve la remarque dont nous avions besoin au § 4 relativement à l'invariance de la multiplicité d'intersection par petites déformations.

La première partie du lemme 5 est maintenant immédiate. On recouvre P par les intérieurs des voisinages privilégiés $V_1, \ldots, V_N$ contenus dans $\tilde{P}$. Si $AM_1 + BN_1 = 0$ au voisinage de $\tilde{P}$, on peut, pour tout $j = 1, \ldots, N$, trouver H_j tel que $A = -H_j N$, $B = H_j M$ sur V_j avec $\sup_{V_j} |H_j| \leq C \sup_{\tilde{P}} (|A| + |B|)$.

Montrons que les H_j, restreints à $\overset{o}{V}_j$, définissent une fonction holomorphe H. En effet sur $\overset{o}{V}_j \cap \overset{o}{V}_k$, on a $H_j = H_k$ sauf, éventuellement, sur l'ensemble fini des zéros communs à M et N ; cela implique $H_j = H_k$ sur tout $\overset{o}{V}_j \cap \overset{o}{V}_k$.

La seconde partie est un peu plus délicate car l'écriture $F = AM_1 + BN_1$ n'est pas unique. On choisira d'abord sur chaque V_j l'écriture "économique" $F = A_j M_1 + B_j N_1$ telle que $\sup_{V_j} |A_j| + |B_j| \leq C \sup_{\tilde{P}} |F|$; pour ensuite recoller, avec contrôle de normes, les couples (A_j, B_j), $1 \leq j \leq N$.

Bien que cette dernière opération ne présente aucune difficulté sérieuse nous allons la décrire soigneusement car elle sera reprise telle quelle au §6.

Désignons par $R(p,\delta)$, $p \in \mathbf{C}^2$, $\delta > 0$, le polycube défini par $|x-p_o| \leq \delta$, $|y-p_1| \leq \delta$, $|\xi - p_2| \leq \delta$, $|\eta - p_3| \leq \delta$ où $p = (p_o + ip_1\ ,\ p_2 + ip_3) \in \mathbf{C}^2$ et $(z,w) = (x+iy\ ,\ \xi + i\eta)$. On peut, grâce au lemme de Lebesgue, trouver un $\delta > 0$ assez petit pour que, $\forall\, p \in P$, $R(p,\delta)$ soit contenu dans l'un des V_j, $1 \leq j \leq N$. Posons $\varepsilon = 10^{-3}\delta$.

Considérons les points "génériques" $\alpha = (\alpha_o, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, où $\alpha_j \in \mathbf{Z}\varepsilon$, tels que $\alpha \in P$. Pour chacun de ces points, on considère l'hypercube $R(\alpha,\delta)$; sur chacun de ces hypercubes on a une décomposition $F = A^\alpha M_1 + B^\alpha N_1$ où

$$\sup_{R(\alpha,\delta)} |A^\alpha| + |B^\alpha| \leq C \sup_{\widetilde{P}} |F|.$$

Le programme de ce qui suit est de remplacer progressivement les couples (A^α, B^α) qui dépendent des quatre indices α_o, α_1, α_2 et α_3 par des couples $(A_1^\alpha\ ,\ B_1^\alpha)$ tels que $F = A_1^\alpha M_1 + B_1^\alpha N_1$, vérifiant $\sup\limits_{R(\alpha,\delta-\varepsilon)} (|A_1^\alpha| + |B_1^\alpha|) \leq C_1 \sup\limits_{\widetilde{P}} |F|$ mais ne dépendant plus de α_o. On s'affranchit ensuite de la dépendance en α_1, puis de celle en α_2 et enfin de celle en α_3. On a alors une décomposition globale $F = AM_1 + BN_1$ telle que $\sup\limits_P(|A|+|B|) \leq C \sup\limits_{\widetilde{P}} |F|$.

Nous nous contenterons de décrire la façon dont on remplace les couples (A^α, B^α) par des couples $(A_1^\alpha\ ,\ B_1^\alpha)$ ne dépendant plus de α_o. Les autres étapes sont similaires et laissées au lecteur.

Pour tout "point générique" $\alpha = (\alpha_o, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, posons $\alpha' = (\alpha_o+\varepsilon, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Dans $R(\alpha,\delta) \cap R(\alpha',\delta)$, on a $A^{\alpha'} M_1 + B^{\alpha'} N_1 = A^\alpha M_1 + B^\alpha N_1$. Posons $P_\alpha = R(\alpha\ ,\ \delta-\varepsilon) \cap R(\alpha',\delta-\varepsilon)$ et $\widetilde{P}_\alpha = R(\alpha,\delta) \cap R(\alpha',\delta)$. La première partie du lemme

5 peut être appliquée au couple $(P_\alpha, \tilde{P}_\alpha)$ et montre l'existence d'une fonction E^α, holomorphe au voisinage de P_α et telle que $A^{\alpha'} - A^\alpha = -E^\alpha N_1$, $B^{\alpha'} - B^\alpha = E^\alpha M_1$.

Ecrivons le pavé P_α sous la forme $P'_\alpha \times P''_\alpha$ où $z \in P'_\alpha$ et $w \in P''_\alpha$. Désignons par $\partial P'_\alpha$ la frontière de P'_α, par G_α l'intersection de $\partial P'_\alpha$ avec $x \leq \alpha_0$ et par D_α l'intersection de $\partial P'_\alpha$ avec $x \geq \alpha_0$. En fait, P'_α, G_α et D_α ne dépendent que de α_0 et α_1 tandis que P''_α ne dépend que de α_2 et α_3.

Enfin, on désigne par Γ_α l'ensemble des $(z,w) \in P$ tels que $x \leq \alpha_0 + \delta - 2\varepsilon$, $|y - \alpha_1| \leq \delta - 2\varepsilon$, $|\xi - \alpha_2| \leq \delta - \varepsilon$ et $|\eta - \alpha_3| \leq \delta - \varepsilon$; Δ_α est défini de façon analogue à la différence près que $x \geq \alpha_0 - \delta + 3\varepsilon$. On commence par écrire, pour (z,w) appartenant à l'intérieur de P_α, $E^\alpha(z,w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial P_\alpha} \frac{E^\alpha(\zeta,w)}{\zeta - z} d\zeta =$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{D_\alpha} \frac{E^\alpha(\zeta,w)}{\zeta - w} d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{G_\alpha} \frac{E^\alpha(\zeta,w)}{\zeta - z} d\zeta = E^\alpha_g(z,w) - E^\alpha_d(z,w)$$

où E^α_g est holomorphe dans un voisinage de Γ_α et E^α_d au voisinage de Δ_α. Enfin on a

$$\sup_{\Gamma_\alpha} |E^\alpha_g| \leq C \sup_P |F| \quad \text{et} \quad \sup_{\Delta_\alpha} |E^\alpha_d| \leq C \sup_P |F|.$$

On pose alors

$$A^\alpha_1 = A^\alpha + \Big(\sum_{\beta_0 \geq \alpha_0} E^\beta_g - \sum_{\beta_0 < \alpha_0} E^\beta_d\Big) N_1$$

et
$$B^\alpha_1 = B^\alpha - \Big(\sum_{\beta_0 \geq \alpha_0} E^\beta_0 - \sum_{\beta_0 < \alpha_0} E^\beta_d\Big) M_1$$

avec la convention que $\beta = (\beta_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ est un point générique (appartenant à P et dont toutes les coordonnées appartiennent à $Z\varepsilon$) et que la sommation est remplacée par 0 s'il n'existe pas de points génériques β tels que $\beta_0 > \alpha_0$ (ou $\beta_0 < \alpha_0$).

On vérifie sans peine que A^α_1 et B^α_1 ne dépendent plus de α_0 ; il suffit pour cela de s'assurer que $A_1^\alpha = A_1^{\alpha'}$ et $B_1^\alpha = B_1^{\alpha'}$. De plus, on a évidemment $M_1A_1^\alpha + N_1B_1^\alpha = M_1A^\alpha + N_1B^\alpha = F$. Enfin $\sup\limits_{Q_\alpha}(|A_1^\alpha| + |B_1^\alpha|) \leq C \sup\limits_{\tilde{P}} |F|$. Cette dernière propriété tient à ce que P est compact et que toutes les sommes écrites sont finies.

Il reste à itérer le procédé employé en faisant cette fois varier α_1 ; α_2 et α_3 restant fixés et ainsi de suite. Les constructions employées sont semblables à celles que nous venons d'utiliser à cette différence près que dans la définition de $R(\alpha, \delta)$ et de α, il n'y a plus de conditions portant sur $x = \operatorname{Re} z$ et α_o.

Ceci achève la preuve du lemme 5.

6. FIN DE LA DEMONSTRATION DU THEOREME 2.

Soit $F \in E'$, algèbre des transformées de Fourier complexes des distributions $\tau \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^2)$. Supposons que $\forall (z_o, w_o) = p \in \mathbf{C}^2$, F appartienne à l'idéal $\mathcal{O}_p \hat{\mu} + \mathcal{O}_p \hat{\nu}$ de $\mathcal{O}_p$. Nous allons montrer l'existence de deux fonctions A et $B \in E'$ telles que $F = A\hat{\mu} + B\hat{\nu}$.

Pour alléger les notations, posons $M = \hat{\mu}$ et $N = \hat{\nu}$. Nous allons recouvrir $\mathbf{C}^2$ par 5 ouverts $\Omega_1, \ldots, \Omega_5$ définis respectivement par

$$\Omega_1 = \left\{(z,w) \in \mathbf{C}^2 ; \ |\mathfrak{Im}\, z| < T+1 \ \text{ et } \ |\mathfrak{Im}\, w| < T+1\right\}$$

$$\Omega_2 = \left\{(z,w) \in \mathbf{C}^2 ; \ \mathfrak{Im}\, w > T\right\}$$

$$\Omega_3 = \left\{(z,w) \in \mathbf{C}^2 ; \ \mathfrak{Im}\, w < -T\right\}$$

$$\Omega_4 = \left\{(z,w) \in \mathbf{C}^2 ; \ |\mathfrak{Im}\, z| < T \ \text{ et } \ \mathfrak{Im}\, w < -T\right\}$$

et $$\Omega_5 = \left\{(z,w) \in \mathbf{C}^2 ; \ |\mathfrak{Im}\, z| < T \ \text{ et } \ \mathfrak{Im}\, w > T\right\}$$

où T est défini par le corollaire du lemme 2.

Désignons par $E'(\Omega_j)$ l'algèbre des fonctions holomorphes sur Ω_j et y vérifiant une inégalité de la forme $|f(z,w)| \leq C(1+|z|+|w|)^q \exp\left[C(|\mathfrak{Im}\, z|+|\mathfrak{Im}\, w|)\right]$.

Nous nous proposons de construire, pour chaque j, un couple (A_j, B_j) de deux fonctions de $E'(\Omega_j)$ telles que $F = A_j M + B_j N$. Ensuite nous ajusterons ces cinq couples.

Dans la construction du couple (A_j, B_j), les cas $j = 1$ et $j > 1$ sont complètement différents. En effet, à cause du choix de T, Ω_1 contient tous les zéros communs à M et N. De sorte que l'hypothèse $F \in \mathcal{O}_p M + \mathcal{O}_p N$, $\forall\, p \in \Omega_1$, jouera un rôle important.

En revanche pour $j > 1$, seules les propriétés de croissance à l'infini de F sur Ω_j interviendront ; la preuve de $F = A_j M + B_j N$ en sera naturellement simplifiée.

<u>Décomposition</u> $F = A_1 M + B_1 N$ <u>sur</u> Ω_1.

On appelle P^ε l'ensemble des couples (z,w) tels que $|x| \leq \pi + \varepsilon$, $|y| \leq T + \varepsilon$, $|\xi| \leq \pi + \varepsilon$, $|\eta| \leq T + \varepsilon$ et, pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2$, $P^\varepsilon_{k,\ell}$ sera le translaté par $(2k\pi\,,\, 2\ell\pi)$ de P^ε.

Si $0 \leq \varepsilon < \varepsilon'$, posons $P = P^\varepsilon$ et $\tilde{P} = P^{\varepsilon'}$. On peut appliquer le lemme 5 à tout couple $(U,V) \in \mathcal{K}$ et les conclusions seront encore valables pour tout $(U_1, V_1) \in \mathcal{K}$ suffisamment voisin de (U,V). La compacité de $\mathcal{K}$ entraîne le corollaire suivant du lemme 5.

LEMME 6. <u>Si</u> $0 \leq \varepsilon < \varepsilon'$, <u>il existe une constante</u> C <u>ayant la propriété suivante. Pour tout couple</u> $(U,V) \in \mathcal{K}$ <u>et toute fonction</u> $F \in \mathcal{O}(P^{\varepsilon'})U + \mathcal{O}(P^{\varepsilon'})V$, <u>il existe un</u>

couple $(A\ ,\ B)$ de deux fonctions analytiques au voisinage de P^{ε} telles que $F = AU + BV$ au voisinage de P^{ε} et que

$$\sup_{P^{\varepsilon}}(|A|+|B|) \leq C \sup_{P^{\varepsilon'}} |F| .$$

De plus si $A \in \mathcal{O}(P^{\varepsilon'})$, $B \in \mathcal{O}(P^{\varepsilon'})$ et $AU + BV = 0$ pour un certain couple $(U,V) \in \mathcal{H}$, il existe une fonction $H \in \mathcal{O}(P^{\varepsilon})$ telle que $A = -HV$, $B = HU$ au voisinage de P^{ε} et que $\sup_{P^{\varepsilon}} |H| \leq C(\sup_{P^{\varepsilon'}} |A| + \sup_{P^{\varepsilon'}} |B|)$.

Revenons à la preuve de la décomposition $F = A_1M + B_1N$. Tout d'abord nous allons introduire un facteur de convergence pour corriger le comportement à l'infini de F sur Ω_1. On sait que $|F(z,w)| \leq C(1+|z|+|w|)^q \exp\left[C(|\Im m\, z|+|\Im m\, w|)\right]$ et, sur Ω_1, $F(z,w)$ à une croissance polynomiale. Posons $G(z,w) = \dfrac{F(z,w)}{(z+2iT)^m\,(w+2iT)^m}$. La fonction $G(z,w)$ est holomorphe dans la bande $|\Im m\, z| < T$, $|\Im m\, w| < T$ et l'on a si $0 \leq \varepsilon \leq 1$,

$$\sum_{(k,\ell)\in \mathbb{Z}^2} \sup_{P^{\varepsilon}_{k,\ell}} |G(z,w)| < +\infty . \tag{12}$$

On part de la valeur $\varepsilon = 1$. Les applications successives (mais en nombre fini) du lemme 5 nous forcerons à diminuer un certain nombre de fois ε. En dernier lieu, on pourra remplacer ε par 0.

Il est naturellement équivalent d'étudier $G(z,w)$ sur $P^{\varepsilon}_{k,\ell}$ ou $G(z+2k\pi\ ,\ w+2\ell\pi)$ sur le pavé fixe P^{ε}. Grâce à cette remarque, le lemme 6 montre qu'il y a une constante C telle que $\forall\,(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2$, il existe deux fonctions $A_{k,\ell}(z,w)$ et $B_{k,\ell}(z,w)$, holomorphes au voisinage de $P^{\eta}_{k,\ell}$, $\eta = \varepsilon/2$, et telles que

$$G = A_{k,\ell}M + B_{k,\ell}N \quad \text{au voisinage de} \quad P^{\eta}_{k,\ell}$$

$$\sup_{P^{\eta}_{k,\ell}} (|A_{k,\ell}|+|B_{k,\ell}|) \leq C \sup_{P^{\varepsilon}_{k,\ell}} |G| = \omega_{k,\ell}.$$

Nous allons d'abord modifier $A_{k,\ell}$ et $B_{k,\ell}$ pour que ces fonctions ne dépendent plus de k (quitte à remplacer η par $\eta/2$).

Posons $Q^{\eta}_{k,\ell} = P^{\eta}_{k,\ell} \cap P^{\eta}_{k+1,\ell}$. On a, au voisinage de $Q^{\eta}_{k,\ell}$, $A_{k,\ell} M + B_{k,\ell} N = A_{k+1,\ell} M + B_{k+1,\ell}$. Posons $\varepsilon = \eta/2$. Le lemme 6 entraîne

$$A_{k+1,\ell} - A_{k,\ell} = H_{k,\ell} N$$

$$- B_{k+1,\ell} + B_{k,\ell} = H_{k,\ell} M$$

avec $\sup_{Q^{\varepsilon}_{k,\ell}} |H_{k,\ell}| \leq C \sup_{P^{\eta}_{k,\ell} \cup P^{\eta}_{k+1,\ell}} |G| \leq C\,\omega_{k,\ell} + C\,\omega_{k+1,\ell} = \tilde{\omega}_{k,\ell}$.

Quitte à remplacer de nouveau ε par $\varepsilon/2$, on peut écrire $H_{k,\ell} = H^{q}_{k,\ell} - H^{d}_{k,\ell}$ où $H^{q}_{k,\ell}$ est holomorphe au voisinage de la réunion des $P^{\varepsilon}_{k',\ell}$, $k' \leq k$ et $H^{d}_{k,\ell}$ est holomorphe au voisinage de la réunion des $P^{\varepsilon}_{k',\ell}$, $k' \geq k+1$. De plus

$$\sup_{P^{\varepsilon}_{k',\ell}} |H^{q}_{k,\ell}| \leq C\,\tilde{\omega}_{k,\ell} \quad , \quad \sup_{P^{\varepsilon}_{k',\ell}} |H^{d}_{k,\ell}| \leq C\,\tilde{\omega}_{k,\ell}$$

pour respectivement $k' \leq k$ ou $k' \geq k+1$.

Enfin on pose

$$a_{\ell} = A_{k,\ell} + N\Big(\sum_{k' \geq k} H_{k',\ell} - \sum_{k' < k} H^{d}_{k',\ell}\Big)$$

et

$$b_{\ell} = B_{k,\ell} - M\Big(\sum_{k' \geq k} H_{k',\ell} - \sum_{k' < k} H^{d}_{k',\ell}\Big).$$

Les sommes écrites ont un sens grâce à la convergence de $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \omega_{k,\ell}$. On vérifie sans peine que les fonctions a_{ℓ} et b_{ℓ} obtenues ne dépendent pas de k ; si $\varepsilon > 0$ est assez petit, ces fonctions sont holomorphes sur $\bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} P^{\varepsilon}_{k,\ell}$. Enfin, on a, sur cet ensemble, $G = a_{\ell} M + b_{\ell} N$ et $\sup_{P^{\varepsilon}_{k,\ell}} (|a_{\ell}|+|b_{\ell}|) \leq C \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \omega_{k,\ell}$.

Il ne reste plus qu'à échanger les rôles de z et w et de recoller les divers couples (a_ℓ, b_ℓ), $\ell \in \mathbf{Z}$. On obtient ainsi une décomposition globale $G = aM + bN$ dans laquelle a et b sont holomorphes et bornées sur Ω_1. Il en résulte que $F = A_1M + B_1N$ où A_1 et B_1 appartiennent à $E'(\Omega_1)$.

<u>Décomposition.</u> $F = A_jM + B_jN$, $j \geq 2$, <u>dans</u> Ω_j.

Nous nous bornerons à examiner le cas $j = 2$ qui est typique.

Appelons "points génériques" de Ω_2 les points $\alpha = (\alpha_0 + i\alpha_1 , \alpha_2 + i\alpha_3)$ tels que $\alpha_j \in \mathbf{Z}$, $0 \leq j \leq 3$ et $\alpha_3 > T$. On désignera par R_α l'hypercube $|x-\alpha_0| \leq 1$, $|y - \alpha_1| \leq 1$, $|\xi - \alpha_2| \leq 1$, $|\eta - \alpha_3| \leq 1$. Le corollaire du lemme 2 entraîne l'existence de deux constantes c_α et d_α telles que $|c_\alpha M + d_\alpha N| \geq \rho_1 \exp\left[-\rho_2(|\mathfrak{I}m\, z| + |\mathfrak{I}m\, w|)\right]$ sur R_α ; ρ_1 et ρ_2 ne dépendent pas de α et $\rho_1 > 0$.

On a alors, sur R_α, la décomposition suivante

$$F(z,w) = \frac{F(z)\,(c_\alpha M + d_\alpha N)}{(c_\alpha M + d_\alpha N)} = A^\alpha M + B^\alpha N$$

et l'on a

$$(13) \quad |A^\alpha(z,w)| + |B^\alpha(z,w)| \leq C_1(1+|z|+|w|)^{q_1} \exp\left[C_1(|\mathfrak{I}m\, z|+|\mathfrak{I}m\, w|)\right].$$

Le programme de la construction de A_2 et de B_2 est de rendre progressivement (A^α , B^α) indépendants de α_0 puis de α_1, puis de α_2 et enfin de α_3. A chaque étape nous serons obligés de remplacer C_1 et q_1 dans (13) par des constantes plus grandes. Au bout des six étapes nécessaires (il faudra distinguer $\alpha_1 \geq 0$ et $\alpha_1 \leq 0$ etc), on aura $A_2 \in E'(\Omega_2)$ et $B_2 \in E'(\Omega_2)$.

Nous ne décrirons que les deux premières étapes de ce programme.

Première étape. On fixe $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in Z^3$, $\alpha_3 > T$, et l'on veut rendre indépendants de α_o les couples (A^α, B^α), tout en conservant (13) et $F = A^\alpha M + B^\alpha N$.

La méthode est semblable à celle utilisée pour la construction de A_1 et B_1.

Supposons que $\alpha = (\alpha_o, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ et $\alpha' = (\alpha_o+1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Sur $R_\alpha \cap R_{\alpha'}$, on a $A^\alpha M + B^\alpha N = A^{\alpha'} M + B^{\alpha'} N$; d'où

$$H^\alpha = \frac{A^\alpha - A^{\alpha'}}{N} = \frac{B^{\alpha'} - B^\alpha}{M} = \frac{c_\alpha(B^{\alpha'} - B^\alpha) + d_\alpha(A^\alpha - A^{\alpha'})}{c_\alpha M + d_\alpha N}.$$

Cette dernière expression montre que $|H^\alpha|$ vérifie une inégalité du type (13) mais où figurent les constantes C_2 et q_2 (au lieu de C_1 et q_1).

Comme dans la preuve du lemme 5, nous poserons $P_\alpha = R_\alpha \cap R'_\alpha = P'_\alpha \times P''_\alpha$; $(z,w) \in P_\alpha$ si et seulement si $z \in P'_\alpha$ et $w \in P''_\alpha$. Nous définissons G_α comme l'intersection du bord de P'_α et de $x \leq \alpha_o + 1/2$; D_α est l'intersection de $\partial P'_\alpha$ et de $x \geq \alpha_o + 1/2$. Les contours G_α et D_α sont contenus dans le plan complexe des z.

Posons $m = q_2 + 2$ et $\varphi(z) = (z - i(\alpha_1+2))^m$. Définissons si $x \leq \alpha_o+1-\varepsilon$, $|y-\alpha_1| \leq 1-\varepsilon$, $|\xi - \alpha_2| \leq 1$ et $|\eta - \alpha_3| \leq 1$,

$$H_g^\alpha(z,w) = \frac{\varphi(z)}{2\pi i} \int_{D_\alpha} \frac{H^\alpha(\zeta,w)}{(\zeta - z)\varphi(\zeta)} d\zeta$$

et, de même si $x \geq \alpha_o + \varepsilon$, les autres conditions étant les mêmes,

$$H_d^\alpha(z,w) = \frac{\varphi(z)}{2\pi i} \int_{G_\alpha} \frac{H^\alpha(\zeta,w)}{(\zeta - z)\varphi(\zeta)} d\zeta.$$

Grâce au choix de m, on peut poser

$$(14) \quad \begin{aligned} a^\alpha(z,w) &= A^\alpha(z,w) + \Big(\sum_{\beta_o \geq \alpha_o} H_g^\beta - \sum_{\beta_o < \alpha_o} H_d^\beta\Big) N \\ b^\alpha(z,w) &= B^\alpha(z,w) - \Big(\sum_{\beta_o \geq \alpha_o} H_g^\beta - \sum_{\beta_o < \alpha_o} H_d^\beta\Big) M ; \end{aligned}$$

les sommes figurant aux seconds membres de (14) portent sur $\beta = (\beta_o, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ où $\beta_o \in \mathbf{Z}$. La convergence des seconds membres de (14) est assurée par le choix de m. Enfin $|a^\alpha(z,w)| + |b^\alpha(z,w)| \leq C_3(1+|z|+|w|)^{q_3} \exp\left[C_3(|\mathfrak{Im}\, z| + |\mathfrak{Im}\, w|)\right]$. En outre a^α et b^α ne dépendent plus de α_o et $F = a^\alpha M + b^\alpha N$ sur la réunion des R^ε_β, $\beta = (\beta_o, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbf{Z}^4$.

<u>Seconde étape</u>. Il s'agit de transformer les couples (a^α, b^α) construits précédemment pour supprimer la dépendance en α_1, tout en conservant les autres propriétés.

La méthode est une transcription de celle utilisée dans la première étape. On s'occupe d'abord des $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbf{Z}^3$ tels que $\alpha_1 \geq 0$. Le pavé R^ε_α est remplacé par la bande B^ε_α définie par $|y - \alpha_1| \leq 1 - \varepsilon$, $|\xi - \alpha_2| \leq 1 - \varepsilon$ et $|\eta - \alpha_3| \leq 1 - \varepsilon$. Enfin on introduit un facteur de convergence du type $e^{imz}(i+z)^{-m}$ où $m \in \mathbf{N}$ est assez grand.

Les contours G_α et D_α sont remplacés par les droites $y = \alpha_1 + 1 - \varepsilon$ et $y = \alpha_1 + \varepsilon$. On pose $\alpha' = (\alpha_1 + 1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Dans $B^\varepsilon_\alpha \cap B^\varepsilon_{\alpha'}$, on a, si $(z,w) \in R_\beta$, $\beta = (\beta_o, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,

$$H^\alpha = \frac{a^\alpha - a^{\alpha'}}{N} = \frac{b^{\alpha'} - b^\alpha}{M} = \frac{c_\beta(b^{\alpha'} - b^\alpha) + d_\beta(a^\alpha - a^{\alpha'})}{c_\beta M + d_\beta N}.$$

Cette dernière égalité entraîne pour $|H^\alpha(z,w)|$ une majoration de la forme

$$(15) \qquad |H^\alpha(z,w)| \leq C_4(1+|z|+|w|)^{q_4} \exp\left[C_4(|\mathfrak{Im}\, z| + |\mathfrak{Im}\, w|)\right].$$

On écrit alors, avec $\varphi(z) = e^{-imz}(i+z)^m$, $m \in \mathbf{N}$, $m \geq C_4 + q_4 + 2$,

$$H^\alpha(z,w) = \frac{\varphi(z)}{2\pi i} \int_{y=\alpha_1+\varepsilon} \frac{H^\alpha(\zeta,w)}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\varphi(\zeta)}$$

$$- \frac{\varphi(z)}{2\pi i} \int_{y=\alpha_1+1-\varepsilon} \frac{H^\alpha(\zeta,w)}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\varphi(\zeta)} = H^\alpha_+(z,w) - H^\alpha_-(z,w).$$

Les fonctions $H_+^{\alpha}(z,w)$ (resp. $H_-^{\alpha}(z,w)$) sont holomorphes au voisinage de $y \geq \alpha_1 + 2\varepsilon$, $|\xi - \alpha_2| \leq 1$, $|\eta - \alpha_3| \leq 1$ (resp. $y \leq \alpha_1 + 1 - 2\varepsilon$, $|\xi - \alpha_2| \leq 1$, $|\eta - \alpha_3| \leq 1$). On termine alors comme dans la première étape.

Les étapes successives sont semblables et nous ne les décrirons pas. Le lecteur souhaitant plus de détails est invité à consulter le livre d'Ehrenpreis ([3]).

Bibliographie

[1] DELSARTE, J. Théorie des fonctions moyenne-périodiques de deux variables. Ann. Math. 72 (1960), 121-178.

[2] DOUADY, A. Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné. Ann. Inst. Fourier 16 (1966), 1-95.

[3] EHRENPREIS, L. Fourier analysis in several complex variables. Tracts in Math. 17. Wiley-Intersc. (1970).

[4] MEYER, Y. Remarques sur un théorème de J. Delsarte.

N° d'impression 252
2ème trimestre 1977