PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

81-08

ANALYSE HARMONIQUE

GROUPE DE TRAVAIL SUR LES

ESPACES DE BANACH INVARIANTS PAR TRANSLATION

M. Déchamps, F. Piquard, H. Queffelec

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 **ORSAY** France

Code matière AMS (1980) : 43A15 - 43A25 - 43A46
46B20 - 46E30

PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

81-08

ANALYSE HARMONIQUE
GROUPE DE TRAVAIL SUR LES
ESPACES DE BANACH INVARIANTS PAR TRANSLATION

M. Déchamps, F. Piquard, H. Queffelec

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 ORSAY France

Table des matières

Myriam Déchamps

SOUS-ESPACES L^p INVARIANTS PAR TRANSLATION SUR LE CANTOR

d'après J. BOURGAIN.

Résumé.- On caractérise les parties Λ du groupe dual de $D^\infty = \{-1,1\}^N$ telles que $L^p(D^\infty)$ soit isomorphe à un sous-espace de L^p_Λ, le sous-espace fermé de $L^p(D^\infty)$ engendré par Λ, lorsque $2 < p < \infty$.

I. NOTATIONS ET RESULTATS.

Nous utiliserons quelques notations usuelles en géométrie des espaces de Banach. Soient X et Y deux espaces de Banach : $X \sim Y$ signifie que X est isomorphe à Y et $X \hookrightarrow Y$ signifie que X est isomorphe à un sous-espace fermé de Y. Si $X_1 \subset X$, on dira que X_1 est complémenté dans X s'il existe une projection linéaire continue P de X sur X_1, et si X_2 est le noyau de P, on écrira $X = X_1 \oplus X_2$.

Notre point de départ est le résultat suivant, établi dans [6] (la preuve pour $p > 2$ se trouve p. 258), dans le cadre plus général des espaces de fonctions invariants par réarrangement :

THEOREME 1. Soit $1 < p < \infty$ et X un sous-espace de $L^p = L^p([0,1])$ tel que $L^p \hookrightarrow X$. Alors il existe un sous-espace X_1 de X tel que $X_1 \sim L^p$ et X_1 complémenté dans L^p.

Le problème qui nous concerne est l'analogue du théorème 1 lorsqu'on considère des sous-espaces invariants par translation. Nous rappelons quelques notations et résultats fondamentaux dans ce cadre (ceux non explicités se trouvent dans [11]) et renvoyons le lecteur à l'exposé no. 2 pour un résumé des résultats connus sur les sous-espaces complémentés de L^p dans le cas général et à l'exposé no. 3 pour le cas invariant.

Soit G un groupe abélien compact, Γ son dual et $\Lambda \subset \Gamma$. Pour tout sous-ensemble B de $L^1(G)$ on note

$$B_\Lambda = \left\{ f \in B \ ; \ \hat{f}(\gamma) = 0 \quad \text{si} \quad \gamma \in \Gamma \setminus \Lambda \right\}$$

(pour $1 \leq p \leq \infty$, $L^\infty(G) = L^p(G,m)$, où m est la mesure de Haar de G normalisée $(m(G) = 1)$).

Soit $1 \leq p < \infty$. Alors tout sous-espace fermé invariant par translation de $L^p(G)$ est de la forme L^p_Λ pour un $\Lambda \subset \Gamma$ [10]. Soit $\Lambda \subset \Gamma$, si le sous-espace L^p_Λ de $L^p(G)$ est complémenté, alors il existe une projection de $L^p(G)$ sur L^p_Λ qui commute avec les translations, soit, la projection orthogonale de $L^p(G)$ sur L^p_Λ est continue sur L^p et $L^p = L^p_\Lambda \oplus L^p_{C\Lambda}$ [10].

Nous pouvons maintenant énoncer notre problème.

PROBLEME. Soit $1 < p < \infty$, $p \neq 2$ et $\Lambda \subset \Gamma$. On suppose que $L^p(G) \hookrightarrow L^p_\Lambda$. Existe-t-il $\Lambda' \subset \Lambda$ tel que $L^p \sim L^p_{\Lambda'}$ et $L^p_{\Lambda'}$ soit complémenté dans $L^p(G)$?

J. Bourgain [1] démontre que la réponse au problème est positive, lorsque $2 < p < \infty$ et $G = \{-1,1\}^N$, en caractérisant dans ce cas les parties Λ de Γ telles que $L^p \hookrightarrow L^p_\Lambda$ de la façon suivante.

THEOREME 2. <u>Soit</u> $G = \{-1,1\}^N$, Γ <u>son dual</u>, $\Lambda \subset \Gamma$ <u>et</u> $2 < p < \infty$. <u>Alors</u> $L^p \hookrightarrow L^p_\Lambda$ <u>si et seulement s'il existe une suite</u> $(\delta_k)_{k\geq 1}$ <u>d'éléments de</u> Λ <u>et une suite</u> $(\gamma_k)_{k\geq 1}$ <u>d'éléments de</u> Γ <u>telles que :</u>

2.1. $\gamma_k = \prod_{n \in A_k} r_n$, <u>où</u> $(A_k)_{k\geq 1}$ <u>est une suite de parties finies de</u> N <u>deux à deux disjointes et</u> $(r_n)_{n\geq 0}$ <u>est la suite de fonctions de Rademacher</u>.

2.2. $\bigcup_{k\geq 1} \delta_k \Theta_k \subset \Lambda$, <u>où</u> Θ_k <u>désigne le sous-groupe de</u> Γ <u>engendré par</u> $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\}$ <u>pour</u> $k \geq 1$.

COROLLAIRE. <u>Soit</u> $G = \{-1,1\}^N$, Γ <u>son dual,</u> $\Lambda \subset \Gamma$ <u>et</u> $2 < p < \infty$. <u>Si</u> $L^p \hookrightarrow L^p_\Lambda$, <u>il existe</u> $\Lambda' \subset \Lambda$ <u>tel que</u> $L^p \sim L^p_{\Lambda'}$ <u>et</u> $L^p_{\Lambda'}$ <u>soit complémenté</u> <u>dans</u> $L^p(G)$.

En fait les résultats de J. Bourgain donnent des informations partielles sur les parties Λ de Γ telles que $L^p \hookrightarrow L^p_\Lambda$ dans d'autres cas, que nous allons expliciter. La démonstration de la condition suffisante du théorème 1, lorsque $G = \{-1,1\}^N$, utilise des techniques d'analyse harmonique et est valable pour $1 < p < \infty$. La démonstration de la condition nécessaire emploie des techniques d'espaces de Banach, et est valable pour tout groupe abélien compact et métrisable, lorsque $p > 2$, sous la forme suivante.

THEOREME 3. <u>Soit</u> G <u>un groupe abélien compact et métrisable</u>, Γ <u>son dual</u>, $\Lambda \subset \Gamma$ <u>et</u> $p > 2$. <u>Si</u> $L^p \hookrightarrow L^p_\Lambda$, <u>alors il existe deux suites</u> $(\delta_k)_{k\geq 1}$ <u>et</u> $(\gamma_k)_{k\geq 1}$ <u>d'éléments de</u> Γ, <u>telles que</u> :

3.1. $\gamma_k \neq 1$ <u>et</u> $\gamma_k \neq \gamma_{k'}$ <u>pour</u> $k \geq 1$, $k' \geq 1$, $k \neq k'$

3.2. <u>Si</u> $\Theta_k = \left\{\prod_{n\in B} \gamma_n , B \subset \{1,2,\ldots,k\}\right\}$, <u>alors</u> $\bigcup_{k\geq 1} \delta_k \Theta_k \subset \Lambda$ (<u>si</u> $B = \emptyset$, $\prod_{n\in\Phi} \gamma_n = 1$).

<u>Remarque</u> 1. Le fait de supposer G métrisable n'est pas une vraie restriction. Supposons que $T : L^p \longrightarrow L^p_\Lambda$ est un isomorphisme de L^p sur un espace fermé X de L^p_Λ. Si $(f_n)_{n\geq 1}$ est une base de L^p, $(T(f_n))_{n\geq 1}$ est une base de X et $X \subset L^p_{\Lambda_1} \subset L^p_\Lambda$, où $\Lambda_1 = \bigcup_{n\geq 1} sp(f_n)$ est dénombrable, car $\hat{f}_n \in c_o(\Gamma)$ donc $sp(f_n) = \{\gamma \in \Gamma , \hat{f}_n(\gamma) \neq 0\}$ est dénombrable, $n \geq 1$. Soit Γ_1 le sous-groupe de Γ

engendré par Λ_1, alors Γ_1 est dénombrable, son dual $G/\Gamma_1^{\perp}$ est métrisable et $L^p_{\Lambda_1}(G) \sim L^p_{\Lambda_1}(G/\Gamma_1^{\perp})$ [11]. On a donc que $L^p \hookrightarrow L^p_{\Lambda_1}(G/\Gamma_1^{\perp})$.

Remarque 2. Pour tout groupe G abélien compact et métrisable, $L^p(G) \sim L^p([0,1]) = L^p$. En effet, tout espace de probabilité (Ω,μ) sans atome et séparable est isomorphe à $([0,1],\lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ ([5], p. 173). Il nous suffit donc de vérifier que (G,m) où m est la mesure de Haar de G, ne possède pas d'atome. Soit A un atome de (G,m). D'après la régularité de la mesure de Haar, on peut supposer A fermé, et il existe un voisinage ouvert V de l'origine dans G tel que $0 < m(V) < m(A)$; A étant compact, il existe $x_1, \dots, x_n$ dans G tels que $\bigcup_{1\leq i\leq n} (x_i + V) \supset A$. Il existe alors i_o tel que $0 < m((x_{i_o} + V)\cap A) \leq m(x_{i_o} + V) = m(V) < m(A)$, contre l'hypothèse.

Remarque 3. Soit $G = \{-1,1\}^{N}$ et $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ des éléments du dual Γ de G qui s'écrivent $\gamma_i = \prod_{n\in A_i} r_n$, où $A_1,\dots,A_k$ sont des parties de N deux à deux disjointes. Soit Θ_k le sous-groupe de Γ engendré par $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ et $\mathcal{A}_k$ la plus petite tribu rendant mesurables $\gamma_1, \dots, \gamma_k$. On vérifie alors, par un calcul élémentaire, que si $\gamma \in \Gamma \setminus \Theta_k$, γ est indépendant de $\mathcal{A}_k$. Par conséquent, $E_{\mathcal{A}_k}(\gamma) = 0$ pour tout $\gamma \in \Gamma \setminus \Theta_k$, où $E_{\mathcal{A}_k}$ désigne l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{A}_k$. Soient maintenant G un groupe abélien compact, Γ son dual, $\gamma_1 \dots \gamma_k$ éléments de Γ, Θ_k et $\mathcal{A}_k$ comme ci-dessus. Alors si $\gamma \in \Gamma \setminus \Theta_k$, γ n'est pas $\mathcal{A}_k$ mesurable, mais γ n'est pas en général indépendant de $\mathcal{A}_k$. Ceci constitue une des raisons de se limiter à $G = \{-1,1\}^{N}$ dans le théorème 2, l'autre étant que les Θ_k définis par la condition 2 du théorème 3 ne sont plus de sous-groupes de Γ, ainsi que $\Theta = \bigcup_{k\geq 1} \Theta_k$. Même dans le cas où $G = T$, $\Gamma = \mathbb{Z}$ et $\gamma_k = 4^k$, $k \geq 1$, il est probablement faux que $L^p \hookrightarrow L^p_{\Theta}$, mais on ne sait guère le justifier.

II. DEMONSTRATION DE LA CONDITION SUFFISANTE.

Soit $(\Gamma_n)_{n\geq 1}$ la décomposition dyadique de Γ, c'est-à-dire, si $(r_n)_{n\geq 0}$ note la suite de fonctions de Rademacher

$$r_o \equiv 1 \quad , \quad r_n((\omega_k)_{k\geq 1}) = \omega_n \quad \text{pour} \quad \omega = (\omega_k)_{k\geq 1} \in \{-1,1\}^N$$

$$\Gamma_o = \{r_o\}, \quad \Gamma_n = \{r_{n_1} r_{n_2} \ldots r_{n_k}, \quad 1 \leq k \leq n \quad , \quad \max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\} = n\}.$$

D'après [9], pour $1 < p < \infty$, il existe $B_p > 0$ telle que pour toute fonction $f \in L^p(\{-1,1\}^{\mathbb{N}})$, $f = \sum_{n\geq 0} f_n$ où $\hat{f}_n = \hat{f}.1_{\Gamma_n}$ et

$$(1) \qquad B_p^{-1}\|(\sum_{n\geq 0} |f_n|^2)^{1/2}\|_p \leq \|f\|_p \leq B_p\|(\sum_{n\geq 0} |f_n|^2)^{1/2}\|_p .$$

Montrons que, quitte à extraire des sous-suites de $(\delta_k)_{k\geq 1}$ et $(\gamma_k)_{k\geq 1}$ respectivement, on peut supposer qu'il existe deux suites strictement croissantes d'entiers $(n_k)_{k\geq 1}$ et $(n'_k)_{k\geq 1}$ telles que

$$(2) \qquad \delta_k \,\Theta_k \subset \Gamma_{n_k} \quad \text{et} \quad \gamma_{k+1}\, \Theta_k \subset \Gamma_{n'_k} \quad \text{pour} \quad k \geq 1.$$

Etant donnée la condition 1, il existe une suite croissante d'entiers $(k_j)_{j\geq 1}$ telle que $(\max(A_{k_j}))_{j\geq 1}$ soit strictement croissante ; en posant $n'_j = \max(A_{k_{j+1}})$, $\gamma'_j = \gamma_{k_j}$ et en notant Θ'_j le sous-groupe de Γ engendré par $\{\gamma'_1, \ldots, \gamma'_j\}$, on a $\gamma'_j\, \Theta'_j \subset \Gamma_{n'_j}$ pour $j \geq 1$. Pour simplifier les notations, on supposera $k_j = j$ pour $j \geq 1$. Posons $\delta_k = \prod_{n\in B_k} r_n$. Puisque $(\max(B_k))_{k\geq 1}$ est une suite d'entiers, si elle n'est pas bornée, on peut en extraire une sous-suite $(\max(B_{\ell_j}))_{j\geq 1}$ strictement croissante. Soit n_1 tel que $\delta_1\gamma_1 \in \Gamma_{n_1}$. Pour $i \geq 2$, on choisit ℓ_{j_i} tel que $n_i = \max(B_{\ell_{j_i}}) > \max\{n_{i-1}, \max(A_i)\}$, et alors $\delta_{\ell_{j_i}}\, \Theta_i \subset \Gamma_{n_i}$. Si $((\max B_k))_{k\geq 1}$ est bornée, il existe une suite croissante d'entiers $(\ell_j)_{j\geq 1}$ telle que $\max(B_{\ell_j}) = n_o$ pour $j \geq 1$, donc $\delta_{\ell_j} \in \Gamma_{n_o}$ pour $j \geq 1$ et il existe $\psi_o \in \Gamma_{n_o}$ et une sous-suite $(\ell_{j_i})_{i\geq 1}$ tels que $\delta_{\ell_{j_i}} = \psi_o$ pour $i \geq 1$. On rappelle que l'on a supposé $(\max(A_k))_{k\geq 1}$ strictement croissante, on peut supposer de plus que $\min(A_k) > n_o$ pour

$k \geq 1$, alors si Θ_i' est le sous-groupe de Γ engendré par $\left\{\gamma_{\ell_{j_1}}, \ldots, \gamma_{\ell_{j_i}}\right\}$, on a bien $\delta_{\ell_{j_i}} \Theta_i' \subset \Gamma_{\max(A_{\ell_{j_i}})}$ pour $i \geq 1$. Mais on peut remarquer que dans ce dernier cas la suite de la démonstration n'est pas utile : $\Lambda'' = \bigcup_{i \geq 1} \Theta_i'$ est un sous-groupe de Γ et $\Lambda' = \psi_o \Lambda'' \subset \Lambda$. D'une part

$$L^p_{\Lambda'} \sim L^p_{\Lambda''} \sim L^p(G/(\Lambda'')^{\perp}) \sim L^p$$

où $(\Lambda'')^{\perp}$ désigne l'orthogonal de Λ'' ([11]) (le dernier isomorphisme a été justifié dans la remarque 2). D'autre part, l'application P de $L^p(G)$ sur $L^p_{\Lambda'}$ définie par

$$(Pf)(x) = \int_{(\Lambda'')^{\perp}} \psi_o^{-1}(y)\, f(x+y)\, dm_{(\Lambda'')^{\perp}}(y) \qquad x \in G$$

où $m_{(\Lambda'')^{\perp}}$ désigne la mesure de Haar de $(\Lambda'')^{\perp}$ est une projection linéaire et continue, donc $L^p_{\Lambda'}$ est un sous-espace complémenté de $L^p(G)$.

Revenons au cas général et supposons que les conditions (2) sont vérifiées. Notons $\Lambda' = \bigcup_{k \geq 1} \delta_k \Theta_k$, nous allons montrer que $L^p_{\Lambda'} \sim L^p$ et que $L^p_{\Lambda'}$ est complémenté dans $L^p(G)$.

Notons Θ le sous-groupe de Γ engendré par $\left\{\gamma_k, k \geq 1\right\}$. Soit $T : \Lambda' \longrightarrow \Theta \setminus \left\{\gamma_1\right\}$ l'application définie sur Λ' par $T(\delta_k \gamma) = \gamma_{k+1}\gamma$ si $\gamma \in \Theta_k$, $k \geq 1$. Alors pour tout polynôme trigonométrique f à spectre dans Λ', $f = \sum_{k \geq 1} f_{n_k}$ où $\hat{f}_{n_k} = \hat{f}.1_{\Gamma_{n_k}}$ et $T(f) = \sum_{k \geq 1} \delta_k \gamma_{k+1} f_{n_k}$, où $\delta_k \gamma_{k+1} f_{n_k}$ a son spectre contenu dans $\Gamma_{n_k'}$ pour $k \geq 1$. D'après le théorème de Paley (1),

$$\|f\|_p \leq B_p \Big\|\Big(\sum_{k \geq 1} |f_{n_k}|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p \leq B_p^2 \|T(f)\|_p \leq B_p^3 \Big\|\Big(\sum_{k \geq 1} |f_{n_k}|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p \leq B_p^4 \|f\|_p$$

ce qui montre que T s'étend à une application linéaire continue de $L^p_{\Lambda'}$ dans $L^p_{\Theta \setminus \{\gamma_1\}}$; on vérifie facilement que T est bijective, donc $L^p_{\Lambda'} \sim L^p_{\Theta \setminus \{\gamma_1\}}$. D'autre part, $L^p_{\Theta} \sim L^p(G/\Theta^{\perp}) \sim L^p$ (remarque 2), donc $L^p_{\Lambda'} \sim L^p$.

Pour montrer que $L^p_{\Lambda'}$ est complémenté dans $L^p(G)$, on aura besoin d'une inégalité établie par E. Stein [12] (une démonstration élémentaire se trouve dans [2]) :

LEMME. Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ un espace de probabilité, $(\mathfrak{A}_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de sous-tribus de $\mathfrak{A}$ et $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables. Alors pour $1 < p < \infty$ il existe une constante $K_p > 0$ telle que

$$\left\|\left(\sum_{n\geq 1}\left|E_{\mathfrak{A}_n} f_n\right|^2\right)^{1/2}\right\|_p \leq K_p \left\|\left(\sum_{n\geq 1}\left|f_n\right|^2\right)^{1/2}\right\|_p$$

où $E_{\mathfrak{A}_n}$ note l'espérance conditionnelle de f_n par rapport à $\mathfrak{A}_n$.

Notons P la projection orthogonale de L^p sur $L^p_{\Lambda'}$. Soit $f \in L^p(G)$, $f = \sum_{n\geq 0} f_n$ où $\hat{f}_n = \hat{f}.1_{\Gamma_n}$ pour $n \geq 0$. Alors

$$P(f_n) = 0 \quad \text{si} \quad n \neq n_k \;, \quad k \geq 1 \quad \text{et} \quad P(f_{r_k}) = \sum_{\gamma\in\Theta_k} \hat{f}_{n_k}(\delta_k\gamma)\,\delta_k\gamma .$$

Notons E_k l'espérance conditionnelle par rapport à la plus petite tribu $\mathfrak{A}_k$ rendant mesurables $\gamma_1, \dots, \gamma_k$. Puisque tout caractère $\gamma \in \Gamma \setminus \Theta_k$ est indépendant de $\mathfrak{A}_k$ (remarque 3), on a

$$E_k(\gamma) = \gamma \quad \text{si} \quad \gamma\in\Theta_k \quad \text{et} \quad E_k(\gamma) = 0 \quad \text{si} \quad \gamma\in\Gamma\setminus\Theta_k .$$

Si on remarque que pour tout $\gamma' \in \Gamma_{n_k}$, $\delta_k\gamma' \in \Theta_k$ si et seulement si $\gamma'\in\delta_k\Theta_k$, on peut conclure que

$$E_k(\delta_k f_{n_k}) = \sum_{\gamma\in\Theta_k} \hat{f}_{n_k}(\delta_k\gamma)\gamma \quad \text{et} \quad P(f_{n_k}) = \delta_k E_k(\delta_k f_{n_k}) , \qquad k \geq 1 .$$

D'après (1) et le lemme précédent,

$$\|Pf\|_p \leq B_p \left\|\left(\sum_{k\geq 1}(E_k(\delta_k f_{n_k})|^2\right)^{1/2}\right\|_p \leq B_p K_p \left\|\left(\sum_{k\geq 1}\left|f_{n_k}\right|^2\right)^{1/2}\right\|_p \leq$$

$$\leq B_p K_p \left\|\left(\sum_{n\geq 0}\left|f_n\right|^2\right)^{1/2}\right\|_p \leq B_p^2 K_p \|f\|_p$$

ce qui montre que $L^p_{\Lambda'}$ est complémenté dans L^p.

III. DEMONSTRATION DE LA CONDITION NECESSAIRE.

Nous allons démontrer la condition nécessaire sous sa forme générale (théorème 3). Nous aurons besoin de quelques définitions, certaines nouvelles (définitions 6, 7, 8 et 9), d'autres que nous rappelons (réf. [7], I et II) pour faciliter la tâche du lecteur. Dans toute la suite, on notera

$$\mathcal{A} = \{(i,j),\ i = 0,\ 1,\ 2, \dots,\ 1 \le j \le 2^i\}.$$

DEFINITION 1. Une suite $(x_i)_{i\geq 1}$ d'éléments d'un espace de Banach X est une base si pour tout $x \in X$, il existe une suite unique de scalaires $(a_n)_{n\geq 1}$ telle que $x = \sum_{n\geq 1} a_n x_n$; une base $(x_n)_{n\geq 1}$ de X est une base inconditionnelle si pour tout $x \in X$, $x = \sum_{n\geq 1} a_n x_n$, la série $\sum_{n\geq 1} a_{\pi(n)} x_{\pi(n)}$ converge (vers x) pour toute permutation π des entiers.

DEFINITION 2. Le système de Haar $(\chi_{ij})_{(i,j)\in\mathcal{A}}$ de $L^p = L^p([0,1])$, normalisé dans L^∞, est défini par : $\chi_{0,1} \equiv 1$ et pour $i > 0$, $1 \le j \le 2^i$,

$$\chi_{ij}(t) = \begin{cases} 1 & t \in \left[\frac{2j-2}{2^{i+1}}, \frac{2j-1}{2^{i+1}}\right[\\ -1 & t \in \left[\frac{2j-1}{2^{i+1}}, \frac{2j}{2^{i+1}}\right[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$(\chi_{ij})_{(i,j)\in\mathcal{A}}$ est une base inconditionnelle de L^p, $1 < p < \infty$ ([7], II, p. 155).

DEFINITION 3. Soient X et Y deux espaces de Banach, les bases $(x_n)_{n\geq 1}$ de X et $(y_n)_{n\geq 1}$ de Y sont équivalentes (plus précisément, K-équivalentes) si pour toute suite finie $(a_n)_{1\le n\le k}$ de scalaires, $K^{-1}\|\sum_{1\le n\le k} a_n y_n\|_Y \le \|\sum_{1\le n\le k} a_n x_n\|_X \le K\|\sum_{1\le n\le k} a_n y_n\|_Y$.

DEFINITION 4. Soit X' le dual de l'espace de Banach X. On dit que les suites $(x_n)_{n\geq 1}$ de X et $(x'_n)_{n\geq 1}$ de X' forment un système biorthogonal si $x'_m(x_n) = \delta_{n,m}$, $m \geq 1$, $n \geq 1$.

DEFINITION 5 . Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ un espace de probabilité. Un C-arbre sur Ω (ou arbre si $C = 1$) est une famille $(A_{ij})_{(i,j)\in\mathcal{A}}$ de parties mesurables de Ω telle que :

a) $A_{i,j} = A_{i+1,2j-1} \cup A_{i+1,2j}$ pour $(i,j) \in \mathcal{A}$

b) $A_{ij} \cap A_{ik} = \emptyset$ pour $(i,j) \in \mathcal{A}$, $(i,k) \in \mathcal{A}$, $j \neq k$

c) $C^{-1}\, 2^{-i} \leq \mu(A_{ij}) \leq C\, 2^{-i}$ pour $(i,j) \in \mathcal{A}$.

DEFINITION 6. Un <u>C-arbre de fonctions</u> sur Ω est une famille $(\varphi_{ij})_{(ij)\in\mathcal{A}}$ de fonctions définies sur Ω telles que

i) Si $A_{ij} = \operatorname{supp} \varphi_{ij} = \left\{\omega\in\Omega\ ,\ \varphi_{ij}(\omega) \neq 0\right\}$, alors $(A_{ij})_{(i,j)\in\mathcal{A}}$ est un C-arbre sur Ω.

ii) φ_{ij} est mesurable réelle et $|\varphi_{ij}(\omega)| = 1$ pour $\omega \in A_{ij}$ et $(i,j) \in \mathcal{A}$.

DEFINITION 7. Etant donné un C-arbre de fonctions $(A_{i,j})_{(i,j)\in\mathcal{A}}$, une fonction φ définie sur Ω est <u>(φ_{ij})-élémentaire</u> si

j) le support de φ est $A_{0,1}$, le support de $\varphi_{0,1}$

jj) il existe $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ tel que $A_\alpha \cap A_{\alpha'} = \emptyset$ si $\alpha\in\mathcal{A}'$, $\alpha \neq \alpha'$, et une suite $(\varepsilon_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}'}$, $\varepsilon_\alpha = \pm 1$ pour $\alpha\in\mathcal{A}'$ tels que

$$\varphi = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}'} \varepsilon_\alpha\, \varphi_\alpha .$$

La démonstration du théorème 3 se présente comme une chaîne de résultats permettant de passer de la condition "abstraite" $L^p \hookrightarrow L^p_\Lambda$ a une condition "concrète" sur Λ. Le premier pas est le théorème suivant, de géométrie des espaces de Banach, dont la démonstration peut se déduire des résultats et des techniques de [6], § 9 (il existe dans ce cas précis une démonstration plus directe [3]).

THEOREME 4. <u>Soit</u> $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, <u>et</u> $(\Omega, \mathcal{a}, \mu)$ <u>un espace de probabilité séparable et sans atome. Soit</u> X <u>un sous-espace de</u> $L^p(\mu)$, $X \sim L^p$. <u>Alors il existe un système</u> $(h_{ij})_{(i,j)\in\mathcal{A}}$ <u>d'éléments de</u> X <u>équivalent au système de Haar usuel et un C-arbre de fonctions</u> $(\varphi_{ij})_{(i,j)\in\mathcal{A}}$ <u>tels que</u> $(h_{ij})_{(i,j)\in\mathcal{A}}$ <u>et</u> $(2^i \varphi_{ij})_{(i,j)\in\mathcal{A}}$ <u>forment un système biorthogonal.</u>

Afin de revenir au cas invariant, introduisons la propriété suivante concernant les parties Λ de Γ :

DEFINITION 8. Soit G un groupe abélien compact, Γ son dual et $\Lambda \subset \Gamma$. On dit que Λ vérifie la condition $*$ si pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout C-arbre de fonctions $(\varphi_{ij})_{(i,j)\in\mathcal{A}}$ sur (G,m), où m désigne la mesure de Haar de G, il existe une fonction φ (φ_{ij})-élémentaire telle que pour toute fonction f de L^2_Λ,

$$\left|\int f\,\varphi\,dm\right| \leq \varepsilon\,\|f\|_2 .$$

PROPOSITION 5. <u>Soit</u> G <u>un groupe abélien compact et métrisable,</u> Γ <u>son dual,</u> $\Lambda \subset \Gamma$ <u>et</u> $2 < p < \infty$. <u>Si</u> $L^p \hookrightarrow L^p_\Lambda$, <u>alors</u> Λ <u>ne vérifie pas la propriété</u> $*$ (définition 8).

<u>Démonstration</u>. Si $L^p \hookrightarrow L^p_\Lambda$, comme les hypothèses du théorème 4 sont satisfaites, il existe un système $(h_{ij})_{(i,j)\in\mathcal{A}}$ d'éléments de L^p_Λ K-équivalent au système de Haar usuel $(\chi_{ij})_{(i,j)\in\mathcal{A}}$ de L^p (définitions 2 et 3) et un C-arbre de fonctions $(\varphi_{ij})_{(i,j)\in\mathcal{A}}$ (définition 6) tel que $(h_{ij})_{(i,j)\in\mathcal{A}}$ et $(2^i\varphi_{ij})_{(i,j)\in\mathcal{A}}$ soient biorthogonaux. Soit $\varphi = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}'} \varepsilon_\alpha \varphi_\alpha$ une fonction (φ_{ij})-élémentaire (définition 7). Posons $f = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}'} \varepsilon_\alpha h_\alpha$, alors

$$\|f\|_2 \leq \|f\|_p \leq K\Big\|\sum_{\alpha\in\mathcal{A}'} \varepsilon_\alpha \chi_\alpha\Big\|_p \leq K$$

donc $f \in L^2_\Lambda$. D'autre part

$$\int f\,\varphi\,dm = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}'} \varepsilon_\alpha^2 (h_\alpha, \varphi_\alpha) = \sum_{\{i;(i,j)\in\mathcal{A}'\}} 2^{-i} = 1$$

ce qui montre que Λ ne satisfait pas la propriété $*$.

Ce dernier résultat nous mène à l'étude de la propriété $*$:

PROPOSITION 6. <u>Soit</u> G <u>un groupe abélien compact et</u> Γ <u>son dual.</u>

6.1. <u>La classe des parties</u> Λ <u>de</u> Γ <u>vérifiant</u> $*$ <u>est stable par réunion finie</u>.

6.2. <u>Soit</u> $\Lambda \subset \Gamma$ <u>telle que pour toute partie finie</u> Γ_o <u>de</u> Γ <u>il existe</u> $\Lambda_o \subset \Lambda$ <u>vérifiant</u> $*$ <u>et telle que si</u> γ <u>et</u> δ <u>sont dans</u> $\Lambda \setminus \Lambda_o$, $\gamma \neq \delta$, <u>alors</u>

$\gamma\delta^{-1} \notin \Gamma_o$. Alors Λ vérifie $*$.

Démonstration.6.1. Soient Λ et Λ' deux parties disjointes de Γ satisfaisant $*$, $(\varphi_{ij})_{(i,j)\in\mathcal{A}}$ un C-arbre de fonctions sur G et $\varepsilon > 0$. Sur $\mathcal{A}$ on considère l'ordre dyadique, c'est-à-dire,

$$(i,j) \prec (i',j') \quad \text{si} \quad i \le i' \quad \text{et} \quad 2^k(j-1)+1 \le j' \le 2^k j \quad , \quad 1 \le k \le i'-i.$$

Pour tout $(i,j) \in \mathcal{A}$, on considère le sous-arbre $(\varphi_\alpha)_{\alpha\succ(i,j)}$. Puisque Λ satisfait $*$, on peut trouver une fonction $\psi_{i,j}$ $(\varphi_\alpha)_{\alpha\succ(i,j)}$-élémentaire telle que pour toute fonction $f_1 \in L^2_\Lambda$,

$$\left|\int_G f_1\, \psi_{ij}\, dm\right| \le \varepsilon\, 4^{-i-1} \|f_1\|_2 .$$

On vérifie facilement que $(\psi_{ij})_{(i,j)\in\mathcal{A}}$ est un C-arbre de fonctions (le support de ψ_{ij} est $A_{i,j}$ et $|\psi_{ij}(x)| = 1$ pour $x\in A_{i,j}$ d'après la définition 7). Puisque Λ' satisfait $*$, il existe ψ $(\psi_{ij})_{(i,j)\in\mathcal{A}}$-élémentaire telle que pour toute $f_2\in L^2_{\Lambda'}$,

$$\left|\int_G f_2\, \psi\, dm\right| \le \frac{\varepsilon}{2} \|f_2\|_2 .$$

Soit $f \in L^2_{\Lambda\cup\Lambda'}$, alors $f = f_1 + f_2$ où $f_1 \in L^2_\Lambda$ et $f_2 \in L^2_{\Lambda'}$. On remarque que ψ est aussi $(\varphi_{i,j})_{(i,j)\in\mathcal{A}}$-élémentaire et

$$\left|\int_G f\,\psi\, dm\right| \le \left|\int_G f_1\, \psi\, dm\right| + \left|\int_G f_2\, \psi\, dm\right| \le \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} \left|\int_G f_1\, \psi_{ij}\, dm\right| + \frac{\varepsilon}{2}\|f_2\|_2 \le$$

$$\le \varepsilon\Big(\sum_{i\ge 0} \frac{1}{2^{i+2}}\Big)\|f_1\|_2 + \frac{\varepsilon}{2}\|f_2\|_2 \le \varepsilon\|f\|_2$$

ce qui montre que $\Lambda\cup\Lambda'$ satisfait $*$.

6.2. Soit Λ vérifiant les conditions de 6.2, $(\varphi_{ij})_{(i,j)\in\mathcal{A}}$ un C-arbre de fonctions sur G et $\varepsilon > 0$. Soit $i \ge 0$ tel que $C\, 2^{\frac{3-i}{2}} < \varepsilon$.

Notons $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{2^i}$ les fonctions caractéristiques des ensembles $A_{i,1}, \dots$ $\dots, A_{i,2^i}$ ($A_{ij} = \sup(\varphi_{i,j})$, $(i,j)\in\mathcal{A}$). Soient $R_1, \dots, R_{2^i}$ des polynômes trigonométriques à valeurs réelles positives tels que

$$\|\chi_j - R_j\|_2 < 4^{-i-1} . \tag{6.3}$$

On pose $\Gamma_o = \bigcup_{1\le j\le 2^i} sp(R_j)$, Γ_o est fini et symétrique $(\Gamma_o = \Gamma_o^{-1})$. D'après la condition 2, il existe $\Lambda_o \subset \Lambda$ vérifiant $*$ et telle que si γ et δ sont dans $\Lambda \setminus \Lambda_o$, $\gamma \neq \delta$, alors $\gamma\delta^{-1} \notin \Gamma_o$. Considérons les sous-arbres

$$(\varphi_\alpha)_{\alpha \succ (i,j)}, (\varphi_\alpha)_{\alpha \succ (i,2)}, \ldots\ldots, (\varphi_\alpha)_{\alpha \succ (i,2^i)} .$$

Puisque Λ_o satisfait $*$, il existe des fonctions $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{2^i}$ élémentaires par rapports à ces arbres et telles que

$$(6.4) \qquad \left|\int_G f\,\psi_j\,dm\right| \le 4^{-i}\,\|f\|_2 \;,\quad f \in L^2_{\Lambda_o} \;,\quad j = 1, 2, \ldots, 2^i.$$

En raisonnant par récurrence, on peut déterminer une suite $Q_1, \ldots, Q_{2^i}$ de polynômes trigonométriques telle que :

$$(6.5) \qquad \begin{aligned} &sp(Q_j) = \Phi_j \;,\quad \Phi_j = \Phi_j^{-1} \;,\quad \Phi_j \cap \Phi_{j'} = \emptyset \;,\quad j \neq j' \\ &\|\psi_j - Q_j\|_2 < 4^{-i-1} \quad,\quad 1 \le j \le 2^i \quad,\quad 1 \le j' \le 2^i. \end{aligned}$$

En effet, ψ_1 étant choisie, il existe un polynôme trigonométrique Q_1 à valeurs réelles tel que

$$\|\psi_1 - Q_1\|_2 \le 4^{-i-1} .$$

Posons $\Phi_1 = sp(Q_1)$, alors $\Phi_1^{-1} = \Phi_1$. D'après la condition 6.1 et le fait que tout $\gamma \in \Gamma$ vérifie $*$ (voir la proposition 7), $\Lambda_o \cup \Phi_1$ a la propriété $*$, donc il existe ψ_2 $(\varphi_{ij})_{(i,j)\succ(i,2)}$-élémentaire telle que pour toute $f \in L^2_{\Lambda_o \cup \Phi_1}$

$$\left|\int f\,\psi_2\,dm\right| \le |\Phi_1|^{-1/2}\, 4^{-i-\frac{3}{2}}\, \|f\|_2$$

où $|\Phi_1|$ désigne le cardinal de Φ_1. En prenant $f_1 = \sum_{\gamma\in\Phi_1} \hat{\psi}_2(\gamma)\,\gamma$

$$\sum_{\gamma\in\Phi_1} |\hat{\psi}_2(\gamma)|^2 = \int f_1\,\psi_2\,dm \le |\Phi_1|^{-1/2}\, 4^{-i-\frac{3}{2}} \Big(\sum_{\gamma\in\Phi_1} |\hat{\psi}_2(\gamma)|^2\Big)^{1/2}$$

soit, $\|f_1\|_2 \le 4^{-i-\frac{3}{2}} |\Phi_1|^{-\frac{1}{2}}$. Il existe un polynôme trigonométrique Q_2 à valeurs réelles tel que $sp(Q_2) \subset sp(\psi_2 - f_1)$ et

$$\|\psi_2 - f_1 - Q_2\|_2 \le 4^{-i-\frac{3}{2}} .$$

Alors $\|\psi_2 - Q_2\|_2 \leq 4^{-i-\frac{3}{2}} + \|f_1\|_2 \leq 4^{-i-1}$.

On pose $\Phi_2 = sp(Q_2)$, alors $\Phi_2 = \Phi_2^{-1}$ et $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \emptyset$. On voit facilement que l'on peut, étant choisis $\psi_1, \ldots, \psi_j$, prendre $\Lambda_o \cup \Phi_1 \cup \ldots \cup \Phi_j$ et utiliser le même procédé pour construire Q_{j+1} et Φ_{j+1}.

Notons P_j la projection orthogonale sur le sous-espace de $L^2(G)$ engendré par Φ_j. Posons $\psi = \sum_{1 \leq j \leq 2^i} \psi_j$, alors ψ est une fonction $(\varphi_{ij})_{(i,j)\in\mathcal{A}}$-élémentaire. Soit $f \in L^2_\Lambda$, alors $f = f_o + f_1$ où $f_o \in L^2_{\Lambda_o}$ et $f_1 \in L^2_{\Lambda \setminus \Lambda_o}$, et

$$\left|\int_G f\,\psi\,dm\right| \leq \left|\int f_o\,\psi\,dm\right| + \left|\int f_1\,\psi\,dm\right|.$$

D'après (6.4), on a

$$\left|\int_G f_o\,\psi\,dm\right| \leq \sum_{1 \leq j \leq 2^i} \left|\int_G f_o\,\psi_j\,dm\right| \leq 2^{-i}\|f_o\|_2.$$

D'après (6.5), on a

$$\left|\int_G f_1\,\psi\,dm\right| \leq \left|\int_G f_1\Big(\sum_{1\leq j\leq 2^i} Q_j\Big)\,dm\right| + 2^{-i-2}\|f_1\|_2 \leq \sum_{1\leq j\leq 2^i}\left|\int P_j(f_1)\,Q_j\,dm\right| + 2^{-i-2}\|f_1\|_2.$$

D'après (6.5), on a pour $1 \leq j \leq 2^i$,

$$\left|\int_G P_j(f_1)\,Q_j\,dm\right| \leq \int_G |P_j(f_1)\,Q_j|\,dm \leq \int_G |P_j(f_1)\,\psi_j|\,dm + \|P_j(f_1)\|_2\|\psi_j - Q_j\|_2 \leq$$
$$\int_G |P_j(f_1)|\,\chi_j\,dm + 4^{-i-1}\|P_j(f_1)\|_2.$$

D'après (6.3), on a pour $1 \leq j \leq 2^i$,

$$\int_G |P_j(f_1)|\,\chi_j\,dm \leq \int_G |P_j(f_1)|\,R_j\,dm + 4^{-i-1}\|P_j(f_1)\|_2 \leq$$

$$\Big(\int_G |P_j(f_3)|^2\,R_j\,dm\Big)^{1/2}\Big(\int_G R_j\,dm\Big)^{1/2} + 4^{-i-1}\|P_j(f_1)\|_2.$$

Puisque $|P_j(f_1)|^2 = P_j(f_1)\,\overline{P_j(f_1)} = \sum_{\gamma,\delta\in\Gamma} \widehat{P_j(f_1)}(\gamma)\,\overline{\hat{P_j}(f_1)(\delta)}\,\gamma\,\delta^{-1}$ on a

$$\int_G |P_j(f_1)|^2\,R_j\,dm = \Big(\sum_{\gamma\in\Gamma} |\widehat{P_j(f_1)}(\gamma)|^2 \int_G R_j\,dm +$$

$$+ \sum_{\gamma\neq\delta} \widehat{P_j(f_1)}(\gamma)\,\overline{\hat{P_j}(f_1)(\delta)}\,\hat{R}_j(\gamma\delta^{-1}) = \|P_j(f_1)\|_2^2 \int_G R_j\,dm$$

car si γ ou δ sont dans Λ_o, $\widehat{P_j(f_1)}(\gamma)\overline{\widehat{P_j(f_1)}(\delta)} = 0$ et si γ et δ sont dans $\Lambda \setminus \Lambda_o$, $\gamma \neq \delta$, alors $\gamma\delta^{-1} \notin \Gamma_o$ et $\hat{R}_j(\gamma\delta^{-1}) = 0$.

On a donc

$$\left|\int_G f_1 \psi \, dm\right| \le \sum_{1\le j\le 2^i} \|P_j(f_1)\|_2 \left(\int R_j \, dm\right) + 4^{-i-\frac{1}{2}} \sum_{1\le j\le 2^i} \|P_j(f_1)\|_2 + 2^{-i-2}\|f_1\|_2$$

$$\le \sum_{1\le j\le 2^i} \|P_j(f_1)\|_2 \int_G \chi_j \, dm + 3.4^{-i-1} \sum_{1\le j\le 2^i} \|P_j(f_1)\|_2 + 2^{-i-2}\|f_1\|_2 \le$$

$$\le 2^{i/2}\left(\sum_{1\le j\le 2^i} \|P_j(f_1)\|_2^2\right)^{1/2} C\, 2^{-i} + 3.2^{-\frac{3}{2}i-2}\left(\sum_{1\le j\le 2^i} \|P_j(f_1)\|_2^2\right)^{1/2} + 2^{-i-2}\|f_1\|_2$$

$$\le C\, 2^{-i/2+1} \|f_1\|_2 .$$

On conclut que

$$\left|\int_G f \psi \, dm\right| \le 2^{-i}\|f_o\|_2 + C\, 2^{-\frac{i}{2}+1}\|f_1\|_2 \le C\, 2^{\frac{-i+3}{2}}\|f\|_2$$

ce qui montre que Λ satisfait $*$.

<u>Remarque</u> 4. On aurait pu, dans la définition 8, remplacer la condition $f \in L^2_\Lambda$ par $f \in L^p_\Lambda$, où $1 < p < \infty$. La proposition 5 serait encore valable, mais par contre nous ne savons pas si la proposition 6 serait encore vraie, car lorsque Λ_o est un sous-ensemble de Λ, on n'a plus nécessairement une projection de L^p_Λ sur $L^p_{\Lambda_o}$.

La proposition 6 nous conduit à définir une certaine famille de parties de Γ :

DEFINITION 9. Soit ω_1 le cardinal de $\mathbb{R}$. On définit par récurrence transfinie une famille $(\mathcal{S}_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ de parties du groupe discret Γ de la façon suivante :

$$\mathcal{S}_o = \left\{\{\gamma\}, \gamma\in\Gamma\right\}.$$

On suppose $\alpha < \omega_1$ et que $\mathcal{S}_\beta$ a été définie pour tout ordinal $\beta < \alpha$. Alors $\mathcal{S}_\alpha$ est l'ensemble des parties Λ de Γ telles que pour toute partie finie Γ_o de Γ, il existe $\Lambda_o \subset \Lambda$ telle que :

1. Λ_o est réunion finie d'éléments de $\mathcal{S}_\beta$ pour $\beta < \alpha$
2. Si γ et δ sont dans $\Lambda \setminus \Lambda_o$, $\gamma \neq \delta$, alors $\gamma\delta^{-1} \notin \Gamma_o$.

Pour démontrer le résultat suivant, nous aurons besoin d'un lemme élémentaire :

LEMME. Soient $a_1, \ldots, a_n$, n nombres complexes. Alors il existe une suite $(\varepsilon_i)_{1\le i\le n}$, $\varepsilon_i = \pm 1$ pour $1 \le i \le n$ telle que

$$\left| \sum_{1\le i\le n} \varepsilon_i a_i \right| \le \sqrt{n} \sup_{1\le i\le n} |a_i| .$$

Démonstration. On peut supposer $|a_i| \le 1$, $1 \le i \le n$. Pour $p = 1$, on prend $\varepsilon_1 = 1$. Supposons que pour un p, $1 \le p < n$, l'assertion est vraie. Soient $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p$ valant ± 1 tel que si $x_p = \varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_p a_p$, alors $|x_p| \le \sqrt{p}$. Soit D_p la droite orthogonale à x_p passant par l'origine. Posons $\varepsilon_{p+1} = -1$ si a_{p+1} est dans le même demi-plan ouvert défini par D_p que x_p, $\varepsilon_{p+1} = +1$ dans le cas contraire. On a alors $|x_p + \varepsilon_{p+1} a_{p+1}| \le (|x_p|^2 + |a_{p+1}|^2)^{1/2} \le \sqrt{p+1}$.

Remarque 5. Si les a_i sont réels, on vérifie facilement que $\inf_{\varepsilon_i = \pm 1} \left| \sum_{1\le i\le n} \varepsilon_i a_i \right| \le \sup_{1\le i\le n} |a_i|$.

PROPOSITION 7. Soit G un groupe abélien compact et Γ son dual. Toute partie $\Lambda \subset \Gamma$ telle que $\Lambda \in \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{S}_\alpha$ satisfait la condition $*$.

Démonstration. Soit $\Lambda \in \mathcal{S}_0$, alors $\Lambda = \{\gamma_0\}$, $\gamma_0 \in \Gamma$. Soit $(\varphi_{ij})_{(i,j)\in\mathcal{A}}$ un C-arbre de fonctions sur (G,m) et $\varepsilon > 0$. Soit i un entier tel que $C\, 2^{-i/2} < \varepsilon$. Il existe, d'après le lemme, une suite $(\varepsilon_j)_{1\le j\le n}$, $\varepsilon_j = \pm 1$ pour $1 \le j \le n$ telle que

$$\left| \sum_{1\le j\le 2^i} \varepsilon_j \hat{\varphi}_{ij}(\gamma_0^{-1}) \right| \le 2^{i/2} \sup |\hat{\varphi}_{ij}(\gamma_0^{-1})| \le C\, 2^{-i/2} < \varepsilon.$$

Si on pose $\varphi = \sum_{1\le j\le n} \varepsilon_j \varphi_{ij}$, φ est une fonction (φ_{ij})-élémentaire et

$$\left| \int_G \gamma_0 \varphi \, dm \right| = \left| \sum_{1\le j\le 2^i} \varepsilon_j \hat{\varphi}_{ij}(\gamma_0^{-1}) \right| < \varepsilon \, \|\gamma_0\|_2$$

donc $\{\gamma_0\}$ satisfait $*$.

Soit $\alpha < \omega_1$, supposons que pour tout ordinal $\beta < \alpha$, toute partie $\Lambda \subset \Gamma$ telle que $\Lambda \in \mathcal{S}_\beta$ satisfait $*$. Soit $\Lambda \subset \Gamma$ telle que $\Lambda \in \mathcal{S}_\alpha$, alors par définition de $\mathcal{S}_\alpha$ et d'après les conditions 6.1 et 6.2 de la proposition 6, Λ vérifie $*$. La proposition 7 est donc démontrée, par récurrence transfinie.

PROPOSITION 8. Soit G un groupe abélien compact et métrisable et Γ son dual. Soit Λ une partie de Γ telle que $\Lambda \notin \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{S}_\alpha$. Alors il existe une suite $(\delta_k)_{k\geq 1}$ d'élements de Λ et une suite $(\gamma_k)_{k\geq 1}$ d'éléments de Γ satisfaisant aux conditions suivantes :

8.1. $\gamma_k \notin \Theta'_{k-1}$, où Θ'_{k-1} désigne le sous-groupe de Γ engendré par les éléments d'ordre fini de l'ensemble $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\}$ ($\Theta'_0 = \{1\}$ et $\Theta'_{k-1} = \{1\}$ si $\gamma_1, \ldots, \gamma_{k-1}$ sont tous d'ordre infini) pour $k \geq 1$.

8.2. Si on pose $\Theta_k = \left\{ \prod_{n\in B} \gamma_n , B \subset \{1, 2, \ldots, k\}\right\}$ pour $k \geq 1$, alors $\bigcup_{k\geq 1} \delta_k \Theta_k \subset \Lambda$.

Nous dégageons sous forme d'un lemme la première étape de la démonstration de la proposition 8 :

LEMME 2. Soit G un groupe abélien compact et métrisable et Γ son dual. Soit $\Lambda \subset \Gamma$ telle que $\Lambda \notin \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{S}_\alpha$. Alors il existe $\gamma_1 \in \Gamma \setminus \{1\}$ tel que

$$\Lambda_1 = \Lambda \cap (\bar{\gamma}_1 \Lambda) = \bigcap_{\gamma\in\Theta_1} \bar{\gamma}\Lambda \notin \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{S}_\alpha. \tag{8.3}$$

Démonstration. Supposons que pour tout $\gamma' \in \Gamma \setminus \{1\}$ il existe un ordinal $\alpha_{\gamma'} < \omega_1$ tel que $\Lambda' = \Lambda \cap (\bar{\gamma}' \Lambda) \in \mathcal{S}_{\alpha_{\gamma'}}$. Soit $\beta = \sup_{\gamma' \in \Gamma \setminus \{1\}} \{\alpha_{\gamma'}\}$, alors $\beta < \omega_1$ ([4], Ch. 20). Par hypothèse, $\Lambda \notin \mathcal{S}_{\beta+2}$, donc il existe $\Gamma_0 \subset \Gamma$ fini tel que pour toute partie $\Lambda_0 \subset \Lambda$, soit $\Lambda_0 \notin \mathcal{S}_{\beta+1}$, soit il existe γ_0 et δ_0 distincts dans $\Lambda \setminus \Lambda_0$ tels que $\gamma_0 \delta_0^{-1} \in \Gamma_0$. Notons $\Gamma_0 = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_d\}$, posons $\Lambda^i = \Lambda \cap (\bar{\lambda}_i \Lambda)$ si $\lambda_i \neq 1$, $\Lambda^i = \emptyset$ si $\lambda_i = 1$, $1 \leq i \leq d$, et $\Lambda_0 = \Lambda^1 \cup \ldots \cup \Lambda^d$. Alors $\Lambda^i \in \mathcal{S}_{\alpha_{\lambda_i}} \subset \mathcal{S}_\beta$, $1 \leq i \leq d$, Λ_0 est réunion finie d'éléments de $\mathcal{S}_\beta$, donc

$\Lambda_o \in \mathcal{S}_{\beta+1}$. Il existe alors γ_o et δ_o distincts dans $\Lambda \setminus \Lambda_o$ et $1 \le i_o \le d$ tels que $\gamma_o \delta_o^{-1} = \lambda_{i_o} \neq 1$. Or $\delta_o \in \Lambda$ et $\delta_o = \bar{\lambda}_{i_o} \gamma_o$, donc $\delta_o \in \Lambda^{i_o}$ contre l'hypothèse. Ceci montre qu'il existe $\gamma_1 \in \Gamma \setminus \{1\}$ vérifiant (8.3).

<u>Démonstration de la proposition 8.</u> D'après le lemme 2, il existe $\gamma_1 \in \Gamma \setminus \{1\}$ vérifiant (8.3). Supposons que l'on a déterminé $\gamma_1, \dots, \gamma_i$ vérifiant 8.1 et

(8.4) $$\Lambda_k = \Lambda_{k-1} \cap \bar{\gamma}_k \Lambda_{k-1} = \bigcap_{\gamma \in \Theta_k} \bar{\gamma} \Lambda \notin \bigcup_{\alpha < \omega_1} \mathcal{S}_\alpha$$

pour $1 \le k \le i$ (dans (8.4) on pose $\Lambda_o = \Lambda$). Soit $\Gamma' = \{\lambda_j , j \in J\}$ un système de représentants des classes d'équivalence de Γ/Θ_i'. Alors $\Gamma = \bigcup_{\gamma \in \Theta_i'} \gamma \Gamma'$ et pour $\gamma \in \Theta_i' \setminus \{1\}$, $\Gamma' \cap \bar{\gamma} \Gamma' = \emptyset$. Comme les classes $\mathcal{S}_\alpha$ sont invariantes par translation et $\bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{S}_\alpha$ est stable par réunion finie (on remarque que Θ_i' est fini),

$$\Lambda_i' = \Lambda_i \cap \Gamma' \notin \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{S}_\alpha .$$

D'après le lemme 2, il existe $\gamma_{i+1} \in \Gamma \setminus \{1\}$ tel que

$$\Lambda_{i+1}' = \Lambda_i' \cap (\bar{\gamma}_{i+1} \Lambda_i') \notin \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{S}_\alpha .$$

Nécessairement $\gamma_{i+1}' \notin \Theta_i'$ car $\Lambda_{i+1}' \subset \Gamma' \cap (\gamma\Gamma') = \emptyset \in \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{S}_\alpha$ pour tout $\gamma \in \Theta_i' \setminus \{1\}$. Si on pose

$$\Lambda_{i+1} = \Lambda_i \cap (\bar{\gamma}_{i+1} \Lambda_i) = \bigcup_{\gamma \in \Theta_i} \bar{\gamma} \Lambda$$

alors $\Lambda_{i+1} \supset \Lambda_{i+1}'$ donc $\Lambda_{i+1} \notin \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{S}_\alpha$. D'après l'hypothèse de récurrence

$$\Lambda_{i+1} = (\bigcap_{\gamma \in \Theta_i} \bar{\gamma} \Lambda) \cap (\bigcap_{\gamma \in \Theta_i} \bar{\gamma}_{i+1} \bar{\gamma} \Lambda) = \bigcap_{\gamma \in \Theta_{i+1}} \bar{\gamma} \Lambda$$

puisque $\Theta_{i+1} = \Theta_i \cup (\gamma_{i+1} \Theta_i)$. On conclut qu'il existe une suite $(\gamma_k)_{k \ge 1}$ d'éléments de Γ satisfaisant (8.1) et (8.4) pour $k \ge 1$.

Montrons que pour $\delta \in \Lambda_k$, $\delta \Theta_k \subset \Lambda$ pour $k \ge 1$. Pour $k = 1$, c'est la définition de Λ_1. Supposons que c'est vrai pour $1 \le k \le i$. Soit $\delta \in \Lambda_{i+1}$. D'après la définition de Λ_{i+1}, $\delta \in \Lambda_i$ et $\gamma_{i+1} \delta \in \Lambda_i$. D'après l'hypothèse de récurrence, $\delta\Theta_i \subset \Lambda$ et $\gamma_{k+1}\delta\Theta_i \subset \Lambda$, donc $\delta\Theta_{i+1} \subset \Lambda$.

La condition (8.4) montre en particulier que $\Lambda_k \neq \emptyset$ pour $k \geq 1$. Si on choisit $\delta_k \in \Lambda_k$ pour $k \geq 1$, les suites $(\delta_k)_{k\geq 1}$ et $(\gamma_k)_{k\geq 1}$ satisfont aux conditions (8.1) et (8.2) de l'énoncé.

<u>Démonstration du théorème 3</u>. Si $L^p \hookrightarrow L^p_\Lambda$, d'après la proposition 5, Λ ne satisfait pas $*$. D'après la proposition 7, $\Lambda \not\in \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{S}_\alpha$. Soient alors $(\delta_k)_{k\geq 1}$ et $(\gamma_k)_{k\geq 1}$ les deux suites fournies par la proposition 8. Soit il existe une sous-suite $(\gamma_{k_j})_{j\geq 1}$ de $(\gamma_k)_{k\geq 1}$ satisfaisant à la condition 3.1, soit il existe k_o tel que $\gamma_k = \gamma_{k_o}$ pour $k \geq k_o$. Dans le premier cas, si on pose pour $j \geq 1$,

$$\delta'_j = \delta_{k_j} \quad , \quad \gamma'_j = \gamma_{k_j} \quad , \quad \Theta''_j = \left\{ \prod_{n\in B} \gamma'_n \ , \ B \subset \{1, 2, \dots j\}\right\}$$

les conditions 3.1 et 3.2 sont satisfaites par $(\delta'_j)_{j\geq 1}$ et $(\gamma'_j)_{j\geq 1}$ (avec Θ_k remplacé par Θ''_k). Dans le second cas, si on pose pour $j \geq 1$,

$$\delta'_j = \delta_{h_o - 1 + \frac{j(j+1)}{2}} \quad , \quad \gamma'_j = \gamma^j_{k_o} \quad , \quad \Theta''_j = \left\{ \prod_{n\in B} \gamma'_j \ , \ B \subset \{1,2,\dots,j\}\right\}$$

les conditions 3.1 et 3.2 sont satisfaites par $(\delta'_j)_{j\geq 1}$ et $(\gamma'_j)_{j\geq 1}$ (on remarquera que dans ce cas γ_{k_o} est un élément d'ordre infini). Le théorème 3 est donc démontré.

<u>Remarque 6</u>. Dans tous les cas où $\{\gamma^2_k \ ; \ k\geq 1\}$ ou $\{\gamma_k \ ; \ \gamma^2_k = 1 \text{ et } k\geq 1\}$ est infini, on peut supposer, quitte à passer à une sous-suite, que $(\gamma_k)_{k\geq 1}$ est dissociée ([8], pp. 19 et 21).

<u>Démonstration de la condition nécessaire du théorème</u> 2. Si $G = \{-1,1\}^N$ et $L^p \hookrightarrow L^p_\Lambda$, on conclut comme dans la démonstration du théorème 3 à l'existence des deux suites $(\delta_k)_{k\geq 1}$ et $(\gamma_k)_{k\geq 1}$ satisfaisant aux conditions (8.1) et (8.2). Mais dans ce cas $\Theta'_{k-1} = \Theta_{k-1}$ pour $k \geq 1$, et il nous reste à vérifier que l'on peut obtenir deux suites $(\delta'_k)_{k\geq 1}$ et $(\gamma'_k)_{k\geq 1}$ satisfaisant aux conditions (2.1) et (2.2). Posons $\delta'_1 = \delta_1$ et $\gamma'_1 = \gamma_1 = \prod_{n\in A_1} r_n$, $A_1 = \{n_1, \dots, n_s\}$, $n_1 < n_2 < \dots < n_s$.

Alors soit il existe une sous-suite $(\gamma_{k_j})_{j\geq 1}$ de $(\gamma_k)_{k\geq 1}$ telle que $\gamma_{k_j} = \prod_{n\in A_{k_j}} r_n$ et $n_1 \notin A_{k_j}$, soit $\gamma_n = \prod_{n\in A_n} r_n$ où $n_1 \in A_n$ pour $n \geq n_1'$. Dans ce dernier cas posons

$$\gamma_1^1 = \gamma_1 \ , \ \gamma_2^1 = \gamma_{n_1'} \gamma_{n_1'+1} \ , \ \gamma_2^1 = \gamma_{n_1'+2} \gamma_{n_1'+3} , \dots$$

Alors $\gamma_k^1 = \prod_{n\in A_k^1} r_n$ où $n_1 \notin A_k^1$ pour $k \geq 2$. On remarquera que la condition (8.1) entraîne la condition équivalente pour les γ_k^1, $k \geq 1$. En raisonnant par récurrence, on obtient une suite $(\gamma_k^s)_{k\geq 1}$ où $\gamma_1^s = \gamma_1$, chaque γ_k^s est le produit d'au plus $2^{\mathrm{card}(A_1)}$ éléments de la suite $(\gamma_k)_{k\geq 1}$, γ_k^s n'appartient pas au sous-groupe de Γ engendré par $\gamma_1^s, \dots, \gamma_{k-1}^s$ et $\gamma_k^s = \prod_{n\in A_k^s} r_n$ où $A_1 \cap A_k^s = \emptyset$, $k\geq 2$. On pose $\gamma_2' = \gamma_2^s$ et, ainsi de suite, on construit par récurrence une suite $(\gamma_k')_{k\geq 1}$ telle que :

(2.1) $\gamma_k' = \prod_{n\in A_k'} r_n$ où $(A_k)_{k\geq 1}$ est une suite de parties finies de $\mathbb{N}$ deux à deux disjointes

(2.1)'' chaque γ_k' est un produit fini d'éléments de la suite $(\gamma_k)_{k\geq 1}$, $\gamma_k' = \prod_{n\in B_k} \gamma_n$, et $\max(B_k) < \min(B_{k+1})$, $k \geq 1$.

Si on pose $\delta_k' = \delta_{\max(B_k)}$ pour $k \geq 1$, la condition (2.1)'' plus le fait que $(\delta_k)_{k\geq 1}$ et $(\gamma_k)_{k\geq 1}$ satisfont la condition (2.2) entrainent que $\bigcup_{k\geq 1} \delta_k' \Theta_k' \subset \Lambda$, où Θ_k' est le sous-groupe de Γ engendré par $\{\gamma_1', \dots, \gamma_k'\}$. Les suites $(\delta_k')_{k\geq 1}$ et $(\gamma_k')_{k\geq 1}$ satisfont donc aux conditions (2.1) et (2.2).

<u>Démonstration du corollaire</u>. Si $L^p \hookrightarrow L^p_\Lambda$, d'après le théorème 2 il existe deux suites $(\delta_k)_{k\geq 1}$ et $(\gamma_k)_{k\geq 1}$ d'éléments de Γ satisfaisant aux conditions 2.1 et 2.2. D'après la démonstration de la condition suffisante, quitte à prendre des sous-suites convenables, il existe deux suites strictement croissantes d'entiers $(n_k)_{k\geq 1}$ et $(n_k')_{k\geq 1}$ telles que les conditions (2) soient vérifiées. Si on pose $\Lambda' = \bigcup_{k\geq 1} \delta_k \Theta_k$ on a alors démontré que $L^p \sim L^p_{\Lambda'}$ et $L^p_{\Lambda'}$ est complémenté dans $L^p(G)$.

Cette rédaction fait suite à trois exposés faits au Groupe de Travail sur les espaces de Banach invariants par translation et un exposé fait au Séminaire d'Analyse Harmonique d'Orsay. Une séance de discussion et un échange de lettres avec J. Bourgain, que je remercie, a permis d'expliciter les idées de la démonstration de la proposition 8, qui n'est pas détaillée dans [1].

Bibliographie

[1] BOURGAIN, J. Sous-espaces L^p invariants par translation sur le Cantor. C. R. Acad. Sc. Paris 291 (1980), p. 39.

[2] BOURGAIN, J., ROSENTHAL, H. P., SCHECHTMAN, G. An ordinal L^p-index for Banach spaces, with application to complemented subspaces of L^p. Preprint 1979.

[3] BOURGAIN, J. Communication orale.

[4] HALMOS, P. R. Introduction à la théorie des ensembles. Paris, Gauthier-Villars, 1965.

[5] HALMOS, P. R. Measure theory. D. V. Nostrand C, 1950.

[6] JOHNSON, W. B., MAUREY, B., SCHECHTMAN, G. and TZAFRIRI, L. Symetric structures in Banach spaces. Mem. Amer. Math. Soc. 217 (1979).

[7] LINDENSTRAUSS, J., TZAFRIRI, L. Classical Banach spaces. I et II. Springer-Verlag 1979.

[8] LOPEZ, J. M., ROSS, K. A. Sidon sets. Lecture Notes in P. and Appl. Math. 13 (1975).

[9] PALEY, R. A remarkable series of orthogonal functions. Proc. London Math. Soc. 34 (1932), 2ème sér., p. 241.

[10] RUDIN, W. Projections on invariant subspaces. Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962), 429-432.

[11] RUDIN, W. Fourier analysis on groups. Inters. Pub., New York 1962.

[12] STEIN, E. Topics in harmonic analysis related to the Littlewood-Paley theory. Ann. Math. St., no. 63, Princeton, 1970.

Myriam Déchamps et Hervé Queffelec

SOUS-ESPACES COMPLEMENTES DE $L^p(0,1)$ ET DE $C(0,1)$.

Résumé.- Nous passons en revue quelques résultats fondamentaux de la géométrie des espaces de Banach sur les sous-espaces complémentés de $L^p(0,1)$ pour $1 \leq p \leq \infty$ et de $C(0,1)$. Nous donnons des références précises mais pas des démonstrations.

Nous allons nous limiter aux définitions et résultats essentiels et renvoyons le lecteur intéressé à l'exposé de synthèse [20], que nous reprenons en partie, et à [26] et [27]. Pour $1 < p < \infty$, la notion de sous-espace complémenté de L^p est liée à celle des $\mathcal{L}^p$-espaces que nous étudions d'abord.

Dans toute la suite, on note $L^p(\mu) = L^p(\Omega,\mu) = L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$, l'espace de Banach des classes d'équivalence de fonctions mesurables sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrable (respectivement essentiellement bornées si $p = +\infty$). Si $\Omega = [0,1]$ et μ est la mesure de Lebesgue, on note $L^p(\mu) = L^p(0,1) = L^p$. Si $\Omega = \mathbb{N}$ et $\mu(\{n\}) = 1$ pour $n \geq 1$, on note $L^p(\mu) = \ell^p$, si $\Omega' = \{1, 2, \ldots, n\}$, on note ℓ_n^p l'espace $L^p(\Omega', \mu)$.

1. LES ESPACES ^{p}. DEFINITIONS ET PROPRIETES.

DEFINITION 1.1. Soient X et Y deux espaces de Banach isomorphes, leur distance $d(X,Y)$ (de Banach-Mazur) est

$$d(X,Y) = \inf\left\{\|T\|\,\|T^{-1}\| \;,\; T \text{ isomorphisme entre } X \text{ et } Y\right\}.$$

Si X et Y ne sont pas isomorphes, on pose $d(X,Y) = +\infty$.

Les espaces $\mathcal{L}^p$ ont été introduits dans [12].

DEFINITION 1.2. Soient X un espace de Banach et $1 \leq p \leq \infty$. X est un $\mathcal{L}^p$-espace (plus précisément, un $\mathcal{L}^p_\lambda$-espace) s'il existe $\lambda \geq 1$ tel que pour tout sous-espace de dimension finie F de X, il existe un sous-espace de dimension finie E de X, contenant F et tel que $d(E\,,\,\ell^p_{\dim E}) \leq \lambda$.

Exemples. $L^p(\mu)$ est un $\mathcal{L}^p_{1+\varepsilon}$-espace pour tout $\varepsilon > 0$ et $1 \leq p \leq \infty$. L'espace $C(K)$ des fonctions continues sur le compact K est un $\mathcal{L}^\infty_{1+\varepsilon}$ espace pour tout $\varepsilon > 0$.

THEOREME 1.1 [11]. Le dual d'un espace $\mathcal{L}^p$ est un espace $\mathcal{L}^q$, $1 \leq p \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

THEOREME 1.2 [12]. Si X est un $\mathcal{L}^p$-espace, $1 \leq p \leq \infty$, alors le bidual X'' de X est isomorphe à un sous-espace complémenté d'un $L^p(\mu)$. Pour $1<p<\infty$, X est réflexif. Les espaces $\mathcal{L}^2$ sont exactement ceux qui sont isomorphes à des espaces de Hilbert.

THEOREME 1.3 [11]. Tout sous-espace complémenté d'un $\mathcal{L}^p$-espace (en particulier de $L^p(\mu)$), $1 \leq p \leq \infty$, est soit un espace $\mathcal{L}^p$, soit un espace $\mathcal{L}^2$.

On rappelle que si $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ est un espace de probabilité séparable et sans atome, $L^p(\mu)$ est isométrique à $L^p(0,1)$ ([26] ou exposé no. 1, [5]). D'après les énoncés précédents, on a une caractérisation des $\mathcal{L}^p$-espaces, $1 < p < \infty$:

PROPOSITION 1.4. Soit $1 < p < \infty$. X est un $\mathcal{L}^p$-espace (resp. $\mathcal{L}^p$-espace séparable) ou un $\mathcal{L}^2$-espace (resp. $\mathcal{L}^2$-espace séparable) si et seulement si X est

<u>isomorphe à un sous-espace complémenté d'un</u> $L^p(\mu)$ <u>(resp. de</u> $L^p(0,1)$).

2. SOUS-ESPACE COMPLEMENTES DE $L^p = L^p(0,1)$, $1 < p < \infty$.

D'après 1.4 les sous-espaces complémentés de L^p sont soit isomorphes à ℓ^2, soit des $\mathcal{L}^p$-espaces séparables. Les premiers cinq exemples connus de sous-espaces complémentés de L^p, à un isomorphisme près, ont été L^p, ℓ^p, ℓ^2, $\ell^2 \oplus \ell^p$ et $(\ell^2 \oplus \ell^2 \oplus \ldots)_p$ (ce dernier étant l'espace des suites $(x_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de ℓ^2 telles que $\|x\| = (\sum_{n\geq 1} \|x_n\|_2^p)^{1/p} < \infty$). Ensuite H. P. Rosenthal [15] a montré que le sous-espace fermé X_p engendré dans L^p par une suite de variables aléatoires symétriques, indépendantes et ne prenant que trois valeurs, n'est isomorphe à aucun des espaces déjà cités. A partir de X_p, G. Schechtman [16] a construit une suite d'espaces $\mathcal{L}^p$ séparables, deux à deux non isomorphes entre eux. Finallement, dans [18] les auteurs construisent une infinité non dénombrable de sous-espaces complémentés non isomorphes de L^p, qui s'identifient à des sous-espaces invariants par translation de $L^p(\{-1,1\}^N)$.

Nous citons quelques résultats concernant les sous-espaces de L^p et renvoyons le lecteur à [26], II.3, pour des renseignements plus complets. Sauf indication contraire, $1 < p < \infty$ dans les énoncés qui suivent.

THEOREME 2.1 [5]. <u>Les</u> $\mathcal{L}^p$<u>-espaces séparables</u>, $1 < p \leq \infty$, <u>possèdent une base</u>.

THEOREME 2.2 [6]. <u>Tout</u> $\mathcal{L}^p$<u>-espace isomorphe à un sous-espace fermé de</u> ℓ^p <u>est isomorphe à</u> ℓ^p.

THEOREME 2.3 [14]. <u>Si un sous-espace de</u> L^p <u>contient un sous-espace isomorphe à</u> ℓ^2, <u>il contient un sous-espace complémenté isomorphe à</u> ℓ^2.

THEOREME 2.4 ([4] et [14]). Tout sous-espace complémenté de L^p qui ne contient aucun isomorphe à ℓ^2 est isomorphe à ℓ^p.

THEOREME 2.5 [7]. Soit X un sous-espace complémenté de L^p. Ou bien X est isomorphe à ℓ^2, ou X contient un sous-espace isomorphe à ℓ^p et complémenté dans X.

Pour $p > 2$, il y a des résultats plus précis :

THEOREME 2.6 ([26], p. 136). Soit $2 < p < \infty$.

a) Un sous-espace fermé de dimension infinie de L^p est soit isomorphe à ℓ^2, soit il contient un sous-espace fermé qui est isomorphe à ℓ^p et complémenté dans L^p.

b) Tout sous-espace fermé de L^p qui est isomorphe à ℓ^2 est complémenté dans L^p.

THEOREME 2.7 ([2], [7] et [15]). Soit $\mathcal{B}$ la classe des espaces de Banach X qui sont isomorphes à un sous-espace fermé de L^p et tels que pour tout isomorphisme T de X sur un sous-espace de L^p, $T(X)$ soit complémenté. Alors $\mathcal{B} = \emptyset$ si $1 < p < 2$ et $\mathcal{B}$ se réduit aux espaces de Hilbert si $2 \leq p < \infty$.

On peut se demander si, dans L^p, un sous-espace suffisamment proche de L^p n'est pas complémenté dans L^p. La réponse est la suivante :

THEOREME 2.8. Il existe une constante λ_p telle que si X est un sous-espace fermé de L^p vérifiant $d(X, L^p) \leq \lambda_p$ alors X est complémenté dans L^p ([31], [32]). Il existe un sous-espace fermé Y de L^p isomorphe à L^p et non complémenté dans L^p ([2], [15]).

Pour la dernière assertion, le problème invariant correspondant est résolu pour $1 < p < \frac{4}{3}$ (réf. [30] et exposé no. 3).

Nous rappelons une propriété fondamentale de L^p.

THEOREME 2.9 [1]. L^p est un espace primaire pour $1 \leq p \leq \infty$, c'est-à-dire, pour toute décomposition de L^p en somme directe de deux sous-espaces, $L^p = X \oplus Y$, soit X soit Y est isomorphe à L^p.

Voici deux résultats récents qui se trouvent dans [23], dans un cadre plus général (réf. exposé no. 1 pour le cas invariant).

THEOREME 2.10 [23]. Soit X un sous-espace fermé de L^p. Si L^p est isomorphe à un sous-espace de X, alors il existe $X_1 \subset X$, X_1 isomorphe à L^p et complémenté dans L^p.

COROLLAIRE [23]. Soit X un sous-espace complémenté de L^p. Si L^p est isomorphe à un sous-espace de X, alors X est isomorphe à L^p.

Finalement nous citons un résultat fondamental concernant la structure des sous-espaces fermés de L^p pour $1 \leq p < 2$:

THEOREME 2.11 [29]. Soit X un sous-espace de dimension infinie de L^p, $1 \leq p < 2$. Alors ou X est isomorphe à un sous-espace fermé de L^r pour un $r > p$, ou il existe un sous-espace Y de X qui est isomorphe à ℓ^p et complémenté dans L^p. En particulier, tout sous-espace réflexif de L^1 est isomorphe à un sous-espace de L^r pour un $r > 1$.

3. SOUS-ESPACES COMPLEMENTES DE $L^1 = L^1(0,1)$.

Pour étudier le cas $p = 1$, qui ne se ramène pas au cas des $\mathcal{L}^1$-espaces séparables, nous aurons besoin de deux propriétés des espaces de Banach.

DEFINITION 3.1 ([26] , p. 181). Un espace de Banach X a <u>la propriété de Dunford-Pettis</u> si pour tout opérateur faiblement compact T de X dans un espace de Banach Y, et pour toute suite $(x_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de X tendant faiblement vers zéro, $\|T x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

L'espace L^1 et leurs préduaux ont la propriété de Dunford-Pettis [22]. On vérifie facilement qu'un espace de Banach réflexif de dimension infinie n'a pas la propriété de Dunford-Pettis. Par conséquent, L^1 n'a pas de sous-espace complémenté réflexif de dimension infinie et d'après le théorème 1.3, tout sous-espace complémenté de L^1 est un $\mathcal{L}^1$-espace. Mais la récirpoque est fausse [9]. Jusqu'à présent on ne connait que deux exemples, à un isomorphisme près, de sous-espace complémenté de L^1: L^1 et ℓ^1. Par contre, il a été démontré récemment qu'il existe une infinité non dénombrable d'espaces $\mathcal{L}^1$ séparables de dimension infinie non isomorphes [24].

Signalons quelques propriétés des sous-espaces complémentés de L^1.

THEOREME 3.1 [7]. <u>Tout sous-espace complémenté de</u> L^1 <u>contient un sous-espace complémenté isomorphe à</u> ℓ^1.

DEFINITION 3.2 [21]. Un espace de Banach X a <u>la propriété de Radon-Nikodym</u> si pour toute application linéaire bornée T à valeurs dans X et définie sur $L^1(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$, où $(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ est un espace de probabilité, il existe une fonction F définie sur Ω, fortement mesurable et bornée, à valeurs dans X, telle que pour tout $\varphi \in L^1(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$,

$$T(\varphi) = \int_\Omega \varphi(\omega)\, F(\omega)\, d\mu(x).$$

L^1 n'a pas la propriété de Radon-Nikodym, par contre ℓ^1 a cette propriété [21].

THEOREME 3.2 [8]. <u>Tout sous-espace complémenté de</u> L^1 <u>qui possède la propriété de Radon-Nikodym est isomorphe à</u> ℓ^1.

Le théorème 2.8 reste valable pour $p = 1$, sa deuxième partie ayant été établie très récemment par J. Bourgain :

THEOREME 3.3. Il existe une constante $\lambda \geq \sqrt{2}$ telle que si X est un sous-espace de L^1 vérifiant $d(X, L^1) \leq \lambda$, alors X est complémenté dans L^1 [3]. Il existe un sous-espace Y de L^1 isomorphe à L^1 et non complémenté dans L^1 [17].

Le problème invariant correspondant à 3.3 est ouvert.

4. SOUS-ESPACES COMPLEMENTES DE $L^\infty = L^\infty(0,1)$.

Le cas $p = \infty$ se présente de façon très précise. Tout d'abord

THEOREME 4.1 [28]. L^∞ est isomorphe à ℓ^∞.

L'espace ℓ^∞ a deux propriétés remarquables :

THEOREME 4.2 [25]. ℓ^∞ est un espace premier, c'est-à-dire, tout sous-espace complémenté de dimension infinie de ℓ^∞ est isomorphe à ℓ^∞.

THEOREME 4.3 ([27], I, p. 105). ℓ^∞ est un espace injectif, c'est-à-dire, pour tout espace de Banach X contenant ℓ^∞ comme un sous-espace fermé, il existe une projection linéaire et continue de X sur ℓ^∞.

Les énoncés précédents permettent de conclure :

PROPOSITION 4.4. Un sous-espace fermé de L^∞ est complémenté si et seulement s'il est isomorphe à L^∞.

Signalons qu'un des principaux problèmes ouverts sur ℓ^∞ concerne l'analogue fini-dimensionnel du théorème 4.2 : existe-t-il une fonction f définie sur $]1, +\infty[$ telle que si E est un sous-espace complémenté de ℓ^∞ tel qu'il existe une projection de ℓ^∞ sur E de norme inférieure ou égale à λ, alors $d(E, \ell^\infty_{\dim(E)}) < f(\lambda)$?

D'autre part, les résultats les plus récents et les plus frappants sur $\mathcal{L}^\infty$ se trouvent dans [19].

5. SOUS-ESPACES COMPLEMENTES DE $C(0,1)$.

Nous avons déjà signalé que l'espace $C(K)$ des fonctions continues sur le compact K est un $\mathcal{L}^\infty$-espace. Malgré cela la théorie des $C(K)$-espaces est assez différente de celle de L^∞. Nous en donnons quelques résultats, en renvoyant le lecteur à [26], II, 4, pour des références précises.

THEOREME 5.1. Soit K un espace compact métrique non dénombrable. Alors $C(K)$ est isomorphe à $C(0,1)$.

Les résultats les plus importants sur les sous-espaces complémentés de $C(0,1)$ sont les suivants ([26], p. 185) :

THEOREME 5.2. Tout sous-espace complémenté de dimension infinie de $C(0,1)$ contient un sous-espace fermé isomorphe à c_o.

THEOREME 5.3. Tout sous-espace complémenté de $C(0,1)$ qui a un dual non séparable est isomorphe à $C(0,1)$.

THEOREME 5.4. Soit X un sous-espace de $C(0,1)$ isomorphe à $C(0,1)$. Alors il existe un sous-espace X_1 de X isomorphe à $C(0,1)$ et complémenté dans $C(0,1)$.

Nous avons vu que L^∞ est injectif. Par contre, un espace de Banach séparable injectif est de dimension finie ([26], p. 188). Un espace de Banach séparable de dimension infinie qui est complémenté dans tout espace de Banach séparable le contenant (comme un sous-espace fermé) est isomorphe à c_o, et c_o a cette propriété ([27], I, p. 106).

Pour la collaboration à cet exposé nous remercions M. Capon qui nous a communiqué et commenté [20] et G. Pisier qui nous a signalé quelques résultats récents et problèmes ouverts après lecture de notre première version.

Bibliographie

Pour la commodité du lecteur, nous reproduisons, de [1] à [16], la bibliographie de [20].

[1] ALSPACH, D., ENFLO, P. and ODELL, E. On the structure of $\mathcal{L}_p$-spaces $(1 < p < \infty)$. Studia Math. 60 (1977), 79-80.

[2] BENNET, G., DOR, L. E., GOODMAN, V., JOHNSON, W. B. and NEWMAN, C. M. On uncomplemented subspaces of L_p, $1 < p < 2$. Israël J. Math. 26 (1977), 178-187.

[3] DOR, L. E. On projections on L_1. Ann. Math. 102 (1975), 463-474.

[4] JOHNSON, W. B. and ODELL, E. Subspaces of L_p which imbed into ℓ_p. Compos. Math. 28 (1974), 37-49.

[5] JOHNSON, W. B., ROSENTHAL, H. P. and ZIPPIN, M. On bases, finite dimensional decompositions and weaker structures in Banach spaces. Israël J. Math. 9 (1971), 488-506.

[6] JOHNSON, W. B. and ZIPPIN, M. On subspaces of quotients of $(\Sigma G_n)_{\ell_p}$ and $(\Sigma G_n)_{c_o}$. Israël

[7] KADEC, M. I. and PELCZYNSKI, A. Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces L_p. Studia Math. 21 (1962), 161-176.

[8] LEWIS, D. R. and STEGALL, C. Banach spaces whose duals are isomorphic to $\ell_1(\Gamma)$. J. Funct. Anal. 12 (1973), 177-187.

[9] LINDENSTRAUSS, J. On a certain subspace of ℓ_1. Bull. Acad. Pol. Sc. 3e série, 19 (1964), 539-542.

[10] LINDENSTRAUSS, J. Extension of compact operators. Amer. Math. Soc. Memoirs 48 (1964).

[11] LINDENSTRAUSS, J. and ROSENTHAL, H. P. The L_p-spaces. Israël J. Math. 7 (1969), 325-349.

[12] LINDENSTRAUSS, J. and PELCZYNNSKI, A. Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$-spaces and their applications. Studia Math. 29 (1967), 275-326.

[13] PELCZYNSKI, A. Projections in certain Banach spaces. Studia Math. 19 (1960), 209-228.

[14] PELCZYNSKI, A. and ROSENTHAL, H. P. Localization techniques in L^p spaces. Studia Math. 52 (1974/75), 263-289.

[15] ROSENTHAL, H. P. On the subspaces of L^p $(p > 2)$ spanned by sequences of independent Random variables. Israël J. Math. 8 (1970), 273-303.

[16] SCHECHTMAN, G. Examples of $\mathcal{L}_p$-spaces $(1 < p \neq 2 < \infty)$. Israël J. Math. 22 (1975), 138-147.

[17] BOURGAIN, J. Complémentation de sous-espaces L^1 dans les espaces L^1. Exposé no. XXVII, Sém. Anal. Fonct. 1979-1980, Ecole Polytechnique.

[18] BOURGAIN, J., ROSENTHAL, H. P., SCHECHTMAN, G. An ordinal L^p-index for Banach spaces, with application to complemented subspaces of L^p. Preprint 1979.

[19] BOURGAIN, J. and DELBAEN, F. A special class of $\mathcal{L}_\infty$ spaces. Acta Math., à paraître.

[20] CAPON, N. Sous-espaces complémentés de $L^p(0,1)$. Sém. Choquet d'Initiation à l'Analyse, 1977/78, no. 16.

[21] DIESTEL, J. et UHL, J. J. Amer. Math. Soc. Math. Surveys 15, 1977.

[22] DUNFORD, N. and PETTIS, B. J. Linear operators on summable functions. Trans. Amer. Math. Soc. 47, 1940, 323-392.

[23] JOHNSON, W. B., MAREY, B., SCHECHTMAN, G. et TZAFRIRI, L. Symetric structures in Banach spaces. Memoirs Amer. Math. Soc. 217 (1979).

[24] JOHNSON, W. B. and LINDENSTRAUSS, J. Examples of $\mathcal{L}^1$-spaces. Arkiv för Mat. 18 (1980), 101-106.

[25] LINDENSTRAUSS, J. On complemented subspaces of m. Israël J. Math. 5 (1967), 153-156.

[26] LINDENSTRAUSS, J., TZAFRIRI, L. Classical Banach spaces. Lecture Notes in Math. 338. Springer-Verlag 1973.

[27] LINDENSTRAUSS, J., TZAFRIRI, L. Classical Banach spaces I et II. Springer-Verlag 1979.

[28] PELCZYNSKI, A. On the isomorphism of the spaces m and M. Bull. Acad. Pol. Sci. 6 (1958), 695-696.

[29] ROSENTHAL, H. P. On subspaces of L^p. Ann. Math. 97 (1973), 344-373.

[30] ROSENTHAL, H. P. Projections onto translation invariant subspaces of $L_p(G)$. Memoirs Amer. Math. Soc. 63 (1966).

[31] SCHECHTMAN, G. A disjointness property of ℓ_p^n sequences in L^p. Exp. no. XXI, Sém. Anal. Fonct. 1978-1979, Ecole Polytechnique.

[32] SCHECHTMAN, G. Almost isometric L^p-subspaces of $L^p(0,1)$. J. London Math. Soc. 20 (1979), 516-528.

Myriam Déchamps

SOUS-ESPACES INVARIANTS DE $L^p(G)$, G GROUPE ABELIEN COMPACT.

Résumé. Il s'agit d'une synthèse de résultats d'analyse harmonique concernant les sous-espaces fermés invariants par translation de $L^p(G)$, G groupe abélien compact et $1 \leq p \leq \infty$, ou $C(G)$, en vue de l'étude du problème de la complémentation.

1. NOTATIONS ET DEFINITIONS.

Dans toute la suite G désigne un groupe abélien compact, Γ son dual et Λ une partie de Γ. $L^p(G)$, $1 \leq p \leq \infty$ désigne $L^p(G,m)$ où m est la mesure de Haar de G, normalisée par $m(G) = 1$. $C(G)$ désigne l'espace de fonctions continues sur G, muni de la norme uniforme. On note $M(G)$ l'espace des mesures sur G à valeurs complexes régulières et bornées. Les notations sont en général celles de [10] et [15] et nous renvoyons souvent le lecteur à l'un ou l'autre de ces livres plutôt qu'aux références originelles, qui s'y trouvent.

L'anneau $\mathcal{A}$ des cosets de Γ est l'anneau des parties de Γ engendré par les cosets, c'est-à-dire les translatés des sous-groupes de Γ (un anneau de parties de Γ est une classe fermée par complémentation et par réunion finie).

Pour $f \in M(G)$ on appelle spectre de f l'ensemble $sp(f) = \{\gamma \in \Gamma\ ,\ \hat{f}(\gamma) \neq 0\}$; si $sp(f)$ est fini, on appelle f un polynôme trigonométrique. On note $\mathcal{P}$ l'espace des polynômes trigonométriques définis sur G. $\mathcal{P}$ est dense dans $C(G)$ et dans $L^p(G)$ pour $1 \leq p < \infty$ [15]. Pour $E \subset M(G)$ et $\Lambda \subset \Gamma$ on note

$$B_\Lambda = \{f \in B\ ,\ sp(f) \subset \Lambda\}.$$

On dit qu'un espace vectoriel A de fonctions définies sur G est un espace invariant par translation (ou simplement invariant) si pour tous $f \in A$ et $x \in G$, la fonction f_x définie sur G par $f_x(y) = f(y - x)$ appartient à A.

Si A est un espace vectoriel invariant de fonctions définies sur G, une application $T : A \longrightarrow A$ est invariante si pour tous $f \in A$ et $x \in G$, $T(f_x) = (T(f))_x$, c'est-à-dire, si T commute avec les translations.

Si A est un sous-espace invariant complémenté de $L^p(G)$, $1 \leq p \leq \infty$ (resp. $C(G)$) on dira que A est complémenté de façon invariante s'il existe une projection linéaire continue et invariante de $L^p(G)$ (resp. $C(G)$) sur A. Il est équivalent de dire qu'il existe un sous-espace fermé invariant B de $L^p(G)$ (resp. $C(G)$) tel que $L^p(G) = A \oplus B$, $1 \leq p \leq \infty$ (resp. $C(G) = A \oplus B$).

On notera ω^* la topologie $\sigma(L^\infty(G), L^1(G))$ sur $L^\infty(G)$.

2. RESULTATS FONDAMENTAUX.

Notre premier énoncé traduit le fait bien connu que tout sous-ensemble d'un groupe discret est un ensemble de synthèse spectrale. Les références sont variées ([15], page 159, par exemple).

THEOREME 2.1. (a) Soit Λ une partie du dual Γ du groupe abélien compact G. Alors $L^p_\Lambda = L^p_\Lambda(G)$, $1 \leq p < \infty$ (resp. $C_\Lambda = C_\Lambda(G)$) est le sous-espace fermé de $L^p(G)$, $1 \leq p < \infty$ (resp. $C(G)$) engendré par Λ, c'est-à-dire, l'adhérence de $\mathcal{P}_\Lambda . L^\infty_\Lambda = L^\infty_\Lambda(G)$ est l'adhérence ω^* de $\mathcal{P}_\Lambda$ dans $L^\infty(G)$.

(b) Soit A un sous-espace fermé invariant de $L^p(G)$, $1 \leq p < \infty$ (resp. $C(G)$). Alors $A = L^p_\Lambda$ (resp. $A = C_\Lambda$) où $\Lambda = \bigcup_{f \in A} sp(f)$. Si A est un sous-espace invariant ω^*-fermé de $L^\infty(G)$ alors $A = L^\infty_\Lambda$, où $\Lambda = \bigcup_{f \in A} sp(f)$.

On en déduit facilement l'énoncé suivant :

PROPOSITION 2.2 [12]. Soit $\Lambda \subset \Gamma$. Alors L^p_Λ, $1 \leq p < \infty$ (resp. C_Λ)

est complémenté de façon invariante si et seulement si pour toute fonction $f \in L^p(G)$ (resp. $C(G)$), $\sum_{\gamma\in\Lambda} \hat{f}(\gamma)\gamma$ est la série de Fourier d'un élément de $L^p(G)$ (resp. $C(G)$). Dans ce cas $f \longrightarrow \sum_{\gamma\in\Lambda} \hat{f}(\gamma)\gamma$ est la seule projection invariante de $L^p(G)$ (resp. $C(G)$) sur L^p_Λ (resp. C_Λ) et $L^p(G) = L^p_\Lambda \oplus L^p_{C\Lambda}$, $1 \leq p < \infty$ (resp. $C(G) = C_\Lambda \oplus C_{C\Lambda}$).

Pour les sous-espaces fermés invariants de $L^p(G)$, $1 \leq p \leq \infty$, ou $C(G)$, les notions de complémenté de façon invariante et de complémenté coïncident, comme le montre le théorème suivant.

THEOREME 2.3. Soit $\Lambda \subset \Gamma$.

(a) [13]. Si L^p_Λ, $1 \leq p < \infty$ (resp. C_Λ) est complémenté dans $L^p(G)$ (resp. $C(G)$) alors L^p_Λ (resp. C_Λ) est complémenté de façon invariante.

(b) ([13] pour $p = 1$ et $C(G)$, [12] pour $p = \infty$). L^p_Λ, $p = 1$ ou ∞ (resp. C_Λ) est complémenté dans $L^p(G)$ (resp. $C(G)$) si et seulement s'il est complémenté de façon invariante, ou encore, si et seulement si Λ appartient à l'anneau de cosets de Γ.

REMARQUE 1. Le lecteur intéressé par le cas où G est un groupe abélien localement compact non compact pourra consulter [12] et [8].

3. EXEMPLES DE SOUS-ESPACES COMPLEMENTES INVARIANTS DE $L^p(G)$ OU $C(G)$. COMPLEMENTATION ET LACUNARITE.

Dans toute la suite on note $T = \{z \in \mathbb{C}\ ,\ |z| = 1\}$ et on identifie $[0,2\pi[$ à $\mathbb{R}/2\pi Z$ et à T par les applications $x \longrightarrow \dot{x}$ et $x \longrightarrow e^{ix}$, où $\dot{x}$ désigne la classe de x modulo $2\pi Z$. $L^p(T)$, $1 \leq p \leq \infty$, s'identifie à $L^p([0,2\pi[, \frac{dt}{2\pi})$ (dt désigne la mesure de Lebesgue de $[0,2\pi[$) ou à $L^p = L^p(0,1)$. Lorsqu'on parlera de sous-espace fermé invariant de L^p, il s'agira de sous-espaces de la forme $L^p_\Lambda(T) = L^p_\Lambda$, où Λ est une partie de Z, le groupe dual de T.

Un des résultats fondamentaux de l'analyse harmonique, dû à M. Riesz et prouvé dans la plupart des traités classiques (par exemple [15], Ch. 8, pour les groupes ordonnés) est le suivant.

THEOREME 3.1. <u>Le système trigonométrique</u> $(e^{inx})_{n\in Z}$ <u>est une base</u> ([9] <u>ou</u> [6], III, <u>déf.</u> 1) <u>de</u> L^p, $1 < p < \infty$.

Ce théorème est une conséquence immédiate ([9]) du fait que l'opérateur Q défini sur l'ensemble $\mathcal{P}$ des polynômes trigonométriques par

$$Q\Big(\sum_{-n\le k\le n} a_k e^{ikx}\Big) = \sum_{0\le k\le n} a_k e^{ikx}$$

est un opérateur borné sur L^p pour $1 < p < \infty$. Une autre conséquence du fait que Q est borné est la suivante.

THEOREME 3.2. [3] <u>Soit</u> H^p, $1 \le p < \infty$, <u>le sous-espace fermé de</u> L^p (<u>resp. le sous-espace</u> ω^*-<u>fermé de</u> L^∞, <u>lorsque</u> $p = \infty$) <u>engendré par</u> $\{e^{inx}, n \ge 0\}$, <u>c'est-à-dire</u>, $H^p = L^p_N$, <u>où</u> $N = Z^+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$. <u>Pour</u> $1 < p < \infty$, H^p <u>est isomorphe à</u> L^p.

D'après ces résultats nous avons :

EXEMPLE 1. Soit $1 < p < \infty$. Alors $H^p = L^p_N$ est un sous-espace invariant complémenté de L^p, qui est isomorphe à L^p.

On rappelle que le système trigonométrique n'est pas une base inconditionnelle ([9] ou [6]) de L^p, pour $p \neq 2$, ce qui est à l'origine de beaucoup de difficultés de l'analyse harmonique, en particulier du problème des multiplicateurs de L^p ([17]). Par contre, le système de Haar ([9] ou [6], def. 2) est une base inconditionnelle de L^p pour $1 < p < \infty$.

EXEMPLE 2. Soit $1 \le p \le \infty$ et G un groupe abélien compact. Alors pour tout sous-ensemble Λ de Γ appartenant à l'anneau $\mathcal{A}$ des cosets de Γ, L^p_Λ est complémenté dans $L^p(G)$. Si de plus Λ est dénombrable et infini alors L^p_Λ est isomorphe à $L^p = L^p(0,1)$.

Pour vérifier que si $\Lambda \in \mathcal{A}$ alors L^p_Λ est complémenté on considère la mesure $u \in M(G)$ idempotente (c'est-à-dire, $\mu * \mu = \mu$) telle que $\Lambda = \{\gamma \in \Gamma \ ; \hat{\mu}(\gamma) = 1\}$ ([15], p. 60).

Alors l'application $f \longrightarrow \mu * f$ définit une projection linéaire continue et invariante de $L^p(G)$ sur L^p_Λ.

Si Λ est dénombrable, on peut supposer G métrisable, car si H est le sous-groupe de G orthogonal à Λ, alors G/H est métrisable et $L^p_\Lambda(G)$ s'identifie à $L^p_\Lambda(G/H)$ ([15]). Notons qu'alors $L^p(G)$ est isomorphe à $L^p = L^p(0,1)$ ([6], remarque 2). D'autre part, si Λ est infini, il existe un sous-groupe infini Λ_o de Γ, $\gamma_o \in \Gamma$ et un sous-ensemble fini F de Γ tels que $\Lambda \supset (\gamma_o\Lambda_o \setminus F)$ ([12], p. 71). Puisque $\gamma_o\Lambda_o \setminus F \in \mathcal{A}$, $L^p_{\gamma_o\Lambda_o\setminus F}$ est un sous-espace complémenté de L^p_Λ, et $L^p_{\gamma_o\Lambda_o\setminus F}$ est isomorphe à L^p, car $L^p_{\gamma_o\Lambda_o\setminus F} \sim L^p_{\Lambda_o} \sim L^p(G/\Lambda_o^\perp) \sim L^{p'}$, où $\Lambda_o^\perp$ est le sous-groupe de G orthogonal à Λ_o ([6], remarque 2). On est donc dans les conditions de l'application de la méthode de décomposition de Pelczynski ([9], I, p. 54) et on conclut que L^p_Λ est isomorphe à L^p.

Cette démonstration introduit la méthode de décomposition de Pelczynski, qui est souvent utile dans ce genre de problèmes : soient X et Y deux espaces de Banach, si X et Y sont isomorphes à des sous-espaces complémentés de Y et X, respectivement, et si X est isomorphe à une somme directe infinie de soi-même avec une norme convenable, alors X et Y sont isomorphes ([9], I, p. 54). Une justification directe de l'exemple 2, utilisant la structure des ensembles de $\mathcal{A}$ ne semble guère plus simple ou plus courte.

EXEMPLE 3. Soit z l'anneau de cosets de $\mathbf{Z}$. Pour tout $\Lambda \in z$, posons $\Lambda^+ = \Lambda \cap \mathbf{N}$. Alors pour tout $\Lambda \in z$, $L^p_{\Lambda^+}$ est un sous-espace complémenté de L^p

isomorphe à L^p, pour $1 < p < \infty$.

C'est une conséquence des résultats précédents.

Dans nos trois premiers exemples, les sous-espaces invariants complémentés cités, ainsi que leurs complémentaires invariants, sont isomorphes à L^p [voir l'additif]. Avant de passer à une autre classe d'exemples, formée par des sous-espaces invariants isomorphes à ℓ^2, nous rappelons une notion d'ensemble lacunaire bien étudiée en analyse harmonique ([10], Ch. 5).

DEFINITION 3.1. Une partie Λ de Γ est un ensemble $\Lambda(p)$, $1 < p < \infty$, s'il existe une constante $K_p > 0$ telle que pour tout $P \in \mathcal{P}_\Lambda$,

$$\|P\|_p \leq K_p \|P\|_1 .$$

EXEMPLE 4. Si $\Lambda \subset \Gamma$ est un ensemble $\Lambda(p)$ infini pour un $p \geq 2$, L^p_Λ est un sous-espace complémenté de $L^p(G)$ isomorphe à ℓ^2 et $L^p_{C\Lambda}$ est un sous-espace complémenté de $L^p(G)$ isomorphe à $L^p(G)$.

En effet, si Λ est un ensemble $\Lambda(p)$ pour un $p \geq 2$, L^p_Λ est complémenté dans $L^p(G)$, d'après le théorème 2.6 de [7]. Puisque $L^p(G)$ est primaire (théorème 2.9 de [7]) on peut conclure que $L^p_{C\Lambda} \sim L^p(G)$, mais on peut aussi le démontrer directement par un argument semblable à la méthode de décomposition de Pelczynski : $C\Lambda$ est infini, donc contient un ensemble Λ_1 qui est $\Lambda(2)$ ([10], p. 21). Alors

$$L^p = L^p_\Lambda \oplus L^p_{C\Lambda} \sim L^p_\Lambda \oplus (L^p_{\Lambda_1} \oplus L^p_{C\Lambda \setminus \Lambda_1}) \sim (\ell^2 \oplus \ell^2) \oplus L^p_{C\Lambda\setminus\Lambda_1} \sim \ell^2 \oplus L^p_{C\Lambda\setminus\Lambda_1} \sim L^p_{\Lambda_1} \oplus L^p_{C\Lambda\setminus\Lambda_1} = L^p_{C\Lambda} .$$

Il est intéressant de remarquer que pour $p < 2$ l'exemple 4 n'est plus valable. Pour cela nous aurons besoin du théorème suivant.

THEOREME 3.3 ([12]). Soit $1 < p < \infty$ et $\Lambda \subset \Gamma$.

(a) L^p_Λ est isomorphe à ℓ^2 si et seulement si Λ est un ensemble $\Lambda(s)$ pour $s = \max(2 , p)$.

(b) L^p_Λ <u>est isomorphe à</u> ℓ^2 <u>et complémenté dans</u> $L^p(G)$ <u>si et seulement si</u> Λ <u>est un ensemble</u> $\Lambda(s)$ <u>pour</u> $s = \max\{p,q\}$, <u>où</u> $p \neq 2$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$.

EXEMPLE 5. Pour $1 < p < \frac{4}{3}$ il existe un ensemble $\Lambda_o \subset Z$ tel que $L^p_{\Lambda_o}$ soit isomorphe à ℓ^2 et non complémenté dans L^p.

En effet, dans [14] on a l'exemple d'un ensemble Λ_o d'entiers positifs qui est $\Lambda(4)$ et non $\Lambda(4+\varepsilon)$, pour tout $\varepsilon > 0$. Alors Λ_o est un ensemble $\Lambda(2)$, donc isomorphe à ℓ^2, mais si $1 < p < \frac{4}{3}$, Λ_o n'est pas $\Lambda(\frac{p}{p-1})$, donc n'est pas complémenté dans L^p, d'après le théorème 3.3.

On remarque que pour $1 \leq p < 2$ tout ensemble $\Lambda(p)$ est un ensemble $\Lambda(p+\varepsilon)$ pour un $\varepsilon > 0$ ([1]). Mais on ne sait pas s'il existe un ensemble $\Lambda(2)$ qui ne soit pas $\Lambda(4)$.

Il est facile de construire à partir de Λ_o un exemple, pour $1 < p < \frac{4}{3}$, au problème invariant correspondant au théorème 2.8 de [7].

EXEMPLE 6. Pour $1 < p < \frac{4}{3}$, il existe un ensemble $\Lambda_1 \subset Z$ tel que $L^p_{\Lambda_1}$ soit isomorphe à L^p et non complémenté dans L^p.

En effet, posons $\Lambda_1 = \Lambda_o \cup Z^-$. D'après l'exemple 1, $L^p_{Z^-}$ est un sous-espace complémenté de $L^p_{\Lambda_1}$, isomorphe à L^p. Soit Λ_2 un sous-ensemble de Z qui soit $\Lambda(p)$ pour tout $p > 1$ ([10], p. 59 et 21). Alors

$$L^p_{\Lambda_1} = L^p_{\Lambda_o} \oplus L^p_{Z^-} \sim \ell^2 \oplus L^p \sim L^p_{\Lambda_2} \oplus L^p_{C\Lambda_2} = L^p.$$

Il est possible de caractériser les sous-espaces fermés et invariants A de $L^p(G)$ ou $C(G)$ qui ont la propriété que tout sous-espace fermé invariant de A soit complémenté dans A. Pour cela nous avons besoin d'une autre condition de lacunarité bien connue ([10]).

DEFINITION 3.2. Une partie Λ de Γ est un <u>ensemble de Sidon</u> s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $P \in \mathcal{P}_\Lambda$,

$$\sum_{\gamma\in\Lambda} |\hat{P}(\gamma)| \le C \sup_{x\in G} |P(x)| .$$

THEOREME 3.4 [12]. Soit $\Lambda \in \Gamma$.

(a) Tout sous-espace fermé invariant de L^p_Λ, $1 \le p < \infty$, $p \neq 2$, est complémenté dans L^p_Λ si et seulement si L^p_Λ est isomorphe à ℓ^2, c'est-à-dire, si Λ est $\Lambda(s)$ pour $s = \max(2,p)$.

(b) Tout sous-espace fermé (resp. ω^*-fermé) et invariant de $C_\Lambda(G)$ (resp. L^∞_Λ) est complémenté dans cet espace si et seulement si Λ est un ensemble de Sidon.

REMARQUE. Le problème des sous-espaces fermés invariants de $L^p(G)$, $1 \le p < \infty$, isomorphes à ℓ^2 ne se pose que dans le cas des groupes G compacts. En effet, si G est localement compact non compact, tout sous-espace fermé invariant de dimension infinie de $L^p(G)$ contient un sous-espace fermé isomorphe à ℓ^p ([12]).

Pour compléter notre liste d'exemples, signalons qu'il existe une infinité non dénombrable de sous-espaces complémentés de L^p deux à deux non isomorphes [5]. Ces sous-espaces peuvent être décrits comme des sous-espaces invariants de $L^p(\{-1,1\}^{\mathbb{N}})$:

EXEMPLE 7 ([5]). Un ensemble T dénombrable et partiellement ordonné est un arbre si l'ensemble des prédécesseurs de chaque élément est fini et totalement ordonné. Soit T un arbre et $\beta : N \to T$ une bijection. Soit $(r_n)_{n\ge 1}$ la suite de fonctions de Rademacher $(r_n((\omega_k)_{k\ge 1}) = \omega_n$ pour $(\omega_k)_{k\ge 1} \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$, $n \ge 1)$. Posons $W_T = \{r_{n_1} r_{n_2} \dots r_{n_k} ; \beta(n_1) < \beta(n_2) < \dots < \beta(n_k), \ k \ge 1\} \cup \{1\}$. Alors pour $1 < p < \infty$ $L^p_{W_T}(\{-1,1\}^{\mathbb{N}})$ est un sous-espace complémenté de $L^p(\{-1,1\}^{\mathbb{N}})$. Si $p \neq 2$ et α_1 désigne le premier ordinal non dénombrable, il existe une famille $(T_\alpha)_{\alpha<\alpha_1}$ d'arbres telle que les espaces $L^p_{W_{T_\alpha}}(\{-1,1\}^{\mathbb{N}})$, $\alpha < \alpha_1$, soient deux à deux non isomorphes.

D'autres descriptions de $L^p_{W_T}(\{-1,1\}^N)$ et les démonstrations concernant l'exemple 7, qui font appel aux inégalités de martingale de Stein, Gundy et Burkholder, se trouvent dans [5]. D'autre part, on ne sait pas s'il existe une infinité non dénombrable de sous-espaces invariants par translation de $L^p(T)$, $1 < p < \infty$, $p \neq 2$ ([5]).

4. UN EXEMPLE DE SOUS-ESPACE INVARIANT NON COMPLEMENTE DE $L^p(T)$.

Nous avons établi au cours de la démonstration du Théorème 2 de [6] (p. 5, condition (2)) que si $(\gamma_k)_{k\geq 1}$ est une suite du dual de $G = \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ suffisamment indépendante et que si on note Λ l'ensemble de tous les produits finis des γ_k alors $L^p_\Lambda(G)$ est un sous-espace complémenté de $L^p(G)$ isomorphe à $L^p(G)$, pour $p > 1$. Nous allons voir que si on considère l'exemple analogue dans $L^p(T)$, le sous-espace correspondant n'est pas complémenté (théorème 4.2 ci-dessous). Il est probable que dans ce cas $L^p_\Lambda(T)$ n'est pas isomorphe à $L^p(T)$ mais on ne sait pas le démontrer.

La démonstration du théorème 4.2 réunit des idées proposées par J. Bourgain et A. Bonami (communications orales). Le calcul qui conclut cette démonstration (en montrant que 4.3 est impossible) s'inspire de la méthode analogue employée dans [4] et nous a été signalé par H. Queffelec. (voir l'additif).

Nous aurons besoin tout d'abord d'un théorème de transfert (théorème 4.1) qui nous permettra de travailler dans le groupe $T^{\mathbb{N}}$. La démonstration du théorème 4.1 dans un cas particulier et sous des hypothèses plus restrictives se trouve dans [11], pp. 559 et 563 ; un énoncé davantage général se trouve dans [2], et le calcul permettant d'utiliser la condition (2) à la place de la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1} a_n \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}$ est fait dans [14].

LEMME 4.1. <u>Soient</u> ℓ, N <u>et</u> s <u>trois entiers positifs tels que</u> $N > \pi\ell$. <u>Si</u> $P, Q_1, \dots, Q_s, R_1, \dots, R_s$ <u>sont des polynômes trigonométriques de degré au plus</u> ℓ, <u>alors</u>

$$\left(1 - \frac{\pi^2\ell^2}{2N^2}\right)\left\|P(x)+ \sum_{1\leq j\leq s} e^{ijy}Q_j(x) + \sum_{1\leq j\leq s} e^{-ijy}R_j(x)\right\|_{L^\infty(T^2)} \leq \left\|P(x) + \sum_{1\leq j\leq s} e^{ijNx}\, Q_j(x) + \sum_{1\leq j\leq s} e^{-ijNx}\, R_j(x)\right\|_{L^\infty(T)}.$$

Démonstration. Pour simplifier l'écriture nous allons traiter le cas où $s = 1$, le cas général étant analogue. Posons

$$f(x,y) = P(y) + e^{iNx}Q_1(y) + e^{-iNx} R_1(y).$$

Alors

$$a = \|f(x,y)\|_{L^\infty(T^2)} = \|f(x,y)\|_{L^\infty((R/2\pi N^{-1}\mathbf{Z})\times T)} = \sup_{(x,y)\in A} |f(x,y)|$$

où $A = \left\{(x,y)\in T^2 \ , \ |x-y| = \inf_{k\in Z} |x-y+2k\pi| \leq \frac{\pi}{N}\right\}$. Soit $(x_o,y_o) \in A$ tel que $|f(x_o,y_o)| = a$. Alors si on note Re f et Im f les parties réelle et imaginaire de f, $|f|^2 = (\mathrm{Re}\, f)^2 + (\mathrm{Im}\, f)^2$ a un maximum au point (x_o , y_o) et

$$(4.1) \qquad \frac{\partial |f|^2}{\partial y}(x_o,y_o) = \left(2\, \mathrm{Re}\, f\, \frac{\partial \mathrm{Re}\, f}{\partial y} + 2\, \mathrm{Im}\, f\, \frac{\partial \mathrm{Im}\, f}{\partial y}\right)(x_o,y_o) = 0.$$

On a

$$f(x_o,x_o) = f(x_o,y_o) + (x_o-y_o)\frac{\partial f}{\partial y}(x_o,y_o) + \int_{y_o}^{x_o} (x_o - t)\frac{\partial f^2}{\partial y^2}(x_o,t)\, dt.$$

Or, d'après (4.1), $\frac{\partial f}{\partial y}(x_o,y_o)/f(x_o,y_o)$ est un nombre imaginaire pur, donc

$$\left|\frac{f(x_o,x_o)}{f(x_o,y_o)}\right| \geq 1 - \frac{(x_o-y_o)^2}{2a} \max_{(x,y)\in A}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right|.$$

D'après le théorème de Bernstein ([17]) $\max_{(x,y)\in T^2}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right| \leq \ell^2 a$ donc

$$|f(x_o,x_o)/f(x_o,y_o)| \geq 1 - \frac{\pi^2 \ell^2}{2N^2} \quad \text{et}$$

$$\left(1 - \frac{\pi^2 \ell^2}{2N^2}\right) a \leq |f(x_o,x_o)| \leq \|P(x) + e^{iNx}Q_1(x) + e^{-iNx}R_1(x)\|_{L^\infty(T)}$$

ce qui achève la démonstration.

THEOREME 4.1. Soient $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ et $(a_n)_{n\geq 1}$ deux suites d'entiers positifs. Soit F le sous-ensemble du dual ΣZ de T^N défini par

$$F = \left\{(\nu_n)_{n\geq 1} \in \Sigma \mathbf{Z} \ ; \ |\nu_n| \leq a_n, \ n \geq 1\right\}.$$

Soit E le sous-ensemble de $\mathbf{Z}$, $E = \left\{\sum_{n\geq 1} \nu_n \lambda_n \ ; \ (\nu_n)_{n\geq 1} \in F\right\}$.

Supposons vérifiées les conditions suivantes :

(1) $\lambda_{n+1}^2 > \frac{1}{2}(\pi(a_n+1)\lambda_n)^2, \quad n\geq 1$ (2) $\sum_{n\geq 1} (\frac{a_n \lambda_n}{\lambda_{n+1}})^2 < \infty.$

Soit $1 \leq p \leq \infty$. L'application $T : L^p_E(\mathbb{T}) \longrightarrow L^p_F(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})$ qui à $f \in L^p_E$ fait correspondre la fonction $T(f)$ définie pour $x = (x_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{T}^{\mathbb{N}}$ par

$$T(f)(x) = \sum_{(\nu_n)_{n\geq 1}\in F} \hat{f}(\sum_{n\geq 1} \nu_n \lambda_n)\, e^{i(\sum_{n\geq 1} x_n \nu_n)}$$

est un isomorphisme, c'est-à-dire, il existe $K_p > 0$ telle que pour tout $f \in L^p_E(\mathbb{T})$,

(4.2) $$K_p^{-1}\|T(f)\|_p \leq \|f\|_p \leq \|T(f)\|_p.$$

Démonstration. Considérons d'abord le cas $p = \infty$. Soit P un polynôme trigonométrique à spectre dans E, il existe $k \geq 1$ tel que P s'écrive

$$P(t) = P^k(t) + \sum_{1\leq j\leq a_k} e^{ij\lambda_k t} Q^k_j(t) + \sum_{1\leq j\leq a_k} e^{-ij\lambda_k t} R^k_j(t)$$

où P^k, Q^k_j et R^k_j, $1 \leq j \leq a_k$, ont des degrés au plus $a_{k-1}\lambda_{k-1} + a_{k-2}\lambda_{k-2} + \dots$ $\dots a_1\lambda_1 < (a_{k-1}+1)\lambda_{k-1}$. Posons pour $(t, x_k) \in \mathbb{T}^2$,

$$f_1(t, x_k) = P^k(t) + \sum_{1\leq j\leq a_k} e^{ijx_k} Q^k_j(t) + \sum_{1\leq j\leq a_k} e^{-ijx_k} R^k_j(t).$$

D'après le lemme 4.1,

$$\left(1 - \frac{\pi^2(a_{k-1}+1)^2\lambda_{k-1}^2}{2\lambda_k^2}\right)\|f_1(t, x_k)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} \leq \|P\|_{L^\infty(\mathbb{T})}.$$

On reprend le même raisonnement pour montrer que si $f_{k-1}(x_1, \dots, x_k) = T(P)((x_n)_{n\geq 1})$, alors

$$\prod_{2\leq k\leq n} \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi(a_{k-1}+1)\lambda_{k-1}}{\lambda_k}\right)^2\right)\|T(P)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})} \leq \|P\|_{L^\infty(\mathbb{T})}.$$

La condition (2) assure la convergence du produit infini $\prod_{n\geq 1}\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi(a_{n-1}+1)\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right)^2\right)$ donc il existe $K > 0$ telle que pour tout $P \in L^\infty_E(\mathbb{T})$; $\|T(P)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})} \leq K\|P\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$.

Puisque la deuxième inégalité de (4.2) est évidente, le théorème 4.1 est démontré pour $p = \infty$.

Le cas $p \geq 1$ s'ensuit, par des méthodes classiques. En effet, d'après le cas précédent, pour tout $x = (x_n)_{n\geq 1} \in \mathbf{T}^N$, $\mu_x : f \longrightarrow T(f)(x)$ définit une forme linéaire continue sur $C_E(\mathbf{T})$, donc une mesure sur $\mathbf{T}$, telle que $T(f)(x) = (f * \mu_x)(0)$ et $\|\mu_x\| \leq K$. Supposons que f est un polynôme trigonométrique, alors on peut supposer que μ_x est aussi un polynôme trigonométrique (quitte à convoler μ_x avec un polynôme trigonométrique convenable). On a, en notant q l'exposant conjugué de p $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$:

$$\|Tf\|_p^p = \int_{\mathbf{T}^N} |(f * \mu_x)(0)|^p \, dx \leq \int_{\mathbf{T}^N} \left|\int_{\mathbf{T}} f(-t)\,\mu_x(t)\,dt\right|^p dx \leq$$

$$\int_{\mathbf{T}^N} \left(\int_{\mathbf{T}} |f(-t)|^p\,|\mu_x(t)|\,dt\right) \|\mu_x\|^{p/q}\,dx \leq K^{p/q} \int_{\mathbf{T}} |f(-t)|^p \left(\int_{\mathbf{T}^N} |\mu_x(t)|\,dx\right) dt$$

$$\leq K^{p/q} \int_{\mathbf{T}} |f(-t)|^p \, dt = K^{p/q} \|f\|_p^p$$

car pour tout t fixé, l'application $g \in C(\mathbf{T}^N) \longrightarrow g((\lambda_n t))_{n\geq 1}) = \int_{\mathbf{T}^N} g(-x)\,\mu_x(t)\,dx$ est une mesure de norme ≤ 1. On a donc $\|T(f)\|_p \leq K^{1/q}\,\|f\|_p$ pour tout $f \in L^p_E(\mathbf{T})$. Le même raisonnement s'applique à T^{-1} et montre que $\|f\|_p \leq K^{1/p}\|T(f)\|_p$ pour tout $f \in L^p_E(\mathbf{T})$. Ceci achève la démonstration du théorème (et on peut prendre $K_p = K^{(p-1)/p}$ si $p \geq 2$, $K_p = K^{1/p}$ si $1 \leq p \leq 2$).

THEOREME 4.2. <u>Soit</u> $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ <u>une suite d'entiers positifs telle que</u> $\gamma_{n+1}/\gamma_n \geq 3$. <u>Soit</u>

$$\Lambda = \left\{\gamma_{j_1} + \gamma_{j_2} + \ldots + \gamma_{j_s} \quad \text{où} \quad 1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_s, \quad s \geq 1\right\}.$$

<u>Alors</u> $L^p_\Lambda(\mathbf{T})$ <u>n'est pas complémenté dans</u> $L^p(\mathbf{T})$ <u>pour</u> $p \geq 1$, $p \neq 2$.

<u>Démonstration.</u> Prenons $\lambda_n = \gamma_{2^n}$ et $a_n = 2$ pour $n \geq 1$ et conservons les notations du théorème 4.1. Pour $(u,v) \in \mathbf{R}^2$, k entier positif et $t \in \mathbf{R}$, posons

$$P_k(t) = \prod_{1\leq n\leq k} (1 + ue^{i\lambda_n t} + uve^{i2\lambda_n t}).$$

Alors P_k est un polynôme à spectre dans E et puisque les conditions (1) et (2) sont vérifiées on a

$$K_p^{-1} \|T(P_k)\|_{L^p(T^{\mathbb{N}})} \leq \|P_k\|_{L^p(T)} \leq \|T(P)\|_{L^p(T^{\mathbb{N}})} .$$

Calculons

$$\|T(P_k)\|_p^p = \int_{T^{\mathbb{N}}} \Big| \prod_{1\leq n\leq k} (1 + ue^{ix_n} + uve^{2ix_n}) \Big|^p dx = \Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |1+ue^{iy}+uve^{2iy}|^p\, dy\Big)^k.$$

Notons $\mathbb{P}$ la projection orthogonale de $L^2(T)$ sur $L^2_\Lambda(T)$. On vérifie facilement que

$$\mathbb{P}(P_k) = \prod_{1\leq n\leq k} (1 + ue^{i\lambda_n t})$$

compte-tenu de la propriété suivante de $(\gamma_n)_{n\geq 1}$: si $\sum_{1\leq j\leq s} \varepsilon_j \gamma_{n_j} = 0$ où $\varepsilon_j \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $1 \leq j \leq s$, alors $\varepsilon_j = 0$, $1 \leq j \leq s$. Or $\mathbb{P}(P_k)$ a aussi son spectre dans E, donc si $\mathbb{P}$ est continue sur $L^p(T)$ on doit avoir

$$\Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |1+ue^{iy}|^p\, dy\Big)^{k/p} = \|T(\mathbb{P}(P_k))\|_{L^p(T^N)} \leq K_p \|\mathbb{P}(P_k)\|_{L^p(T)} \leq$$

$$\leq K_p \|\mathbb{P}\|\, \|P_k\|_{L^p(T)} \leq K_p \|\mathbb{P}\|\, \|T(P_k)\|_{L^p(T^N)}$$

soit

$$\frac{1}{2\pi}\int |1 + ue^{iy}|^p\, dy \leq (K_p\|\mathbb{P}\|)^{p/k} \Big(\frac{1}{2\pi}\int |1 + ue^{iy} + uve^{2iy}|^p\, dy\Big).$$

Ceci étant valable pour $k \geq 1$, il s'ensuit que pour $(u,v) \in \mathbb{R}^2$

$$\int_0^{2\pi} |1 + ue^{iy}|^p\, dy \leq \int_0^{2\pi} |1 + ue^{iy} + uve^{2iy}|^p\, dy. \tag{4.3}$$

Montrons que (4.3) est impossible. Soit z un nombre complexe, si $|z|$ est assez petit, $G(z) = 1 + z$ et $F(z) = 1 + z + vz^2$ ne s'annulent pas et on peut obtenir des branches analytiques de $(F(z))^{p/2}$ et $(G(z))^{p/2}$ satisfaisant

$$(G(z))^{p/2} = 1 + \frac{p}{2} z + \frac{p}{4}\Big(\frac{p}{2} - 1\Big) z^2 + o(|z|^2)$$

$$(F(z))^{p/2} = 1 + \frac{p}{2}(z + vz^2) + \frac{p}{4}\Big(\frac{p}{2} - 1\Big)(z + vz^2)^2 + o(|z|^2)$$

$$= 1 + \frac{p}{2} z + \frac{p}{2}\Big(v + \frac{1}{2}\Big(\frac{p}{2} - 1\Big)\Big) z^2 + o(|z|^2)$$

(où $o(|z|^2)$ désigne une fonction h telle que $\lim_{z\to 0} |z|^{-2}h(z) = 0$).

Posons $v = \frac{1}{2}(1 - \frac{p}{2})$. Alors si $|u|$ est suffisamment petit,

$$\int_0^{2\pi} |1 + ue^{iy}|^p \, dy = \int_0^{2\pi} |G(ue^{iy})|^p \, dy = 1 + \frac{p^2}{4} u^2 + (\frac{p}{4}(\frac{p}{2} - 1))^2 u^4 + o(r^4)$$

$$\int_0^{2\pi} |1 + ue^{iy} + uve^{2iy}|^p \, dy = \int_0^{2\pi} |F(ue^{iy})|^p \, dy = 1 + \frac{p^2}{4} u^2 + o(r^4).$$

Ceci montre que si $p \neq 2$, l'inégalité 4.3 ne peut pas être satisfaite pour tout couple $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, ce qui conclut la démonstration.

Bibliographie

[1] BACHELIS, G. F. and EBENSTEIN, S. E. On $\Lambda(p)$ sets. Pacific J. Math. 54 (1974).

[2] BONAMI, A. Etude des coefficients de Fourier des fonctions de $L^p(G)$. Ann. Inst. Fourier 20 (1970), 335-402.

[3] BOAS, C. Isomorphism between H_p and L_p. Amer. J. Math. 77 (1955), 655-656.

[4] BOAS, C. Majorant problems for Fourier series. J. Anal. Math. 10 (1962-63), 253-271.

[5] BOURGAIN, J., ROSENTHAL, H. P., SCHECHTMAN, G. An ordinal $_pL^p$-index for Banach spaces, with application to complemented subspaces of L^p. A paraître.

[6] DECHAMPS, M. Sous-espaces L^p invariants par translation sur le Cantor. Exposé no. 1. Anal. Harm. Publ. Math. Orsay (1980-81).

[7] DECHAMPS, M. Sous-espaces complémentés de $L^p(0,1)$ et de $C(0,1)$. Exposé no. 2. Anal. Harm. Publ. Math. d'Orsay (1980-81).

[8] GILBERT, J. E. On projections of $L^\infty(G)$ onto translation-invariant subspaces. Proc. London Math. Soc. (3) 19 (1969), 69-88.

[9] LINDENSTRAUSS, J., TZAFRIRI, L. Classical Banach spaces I and II. Pringer-Verlag (1970).

[10] LOPEZ, J. M., ROSS, K. A. Sidon sets. Lecture Notes in P. and Appl. Math. 13 (1975).

[11] MEYER, Y. Endomorphismes des idéaux fermés de $L^1(G)$, classes de Hardy et séries de Fourier lacunaires. Ann. Sc. Ec. Norm. 1 (4) (1968).

[12] ROSENTHAL, H. P. Projections onto translation-invariant subspaces of $L^p(G)$. Memoirs Amer. Math. Soc. 63 (1966).

[13] RUDIN, W. Projections on invariant subspaces. Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962), 429-43.

[14] RUDIN, W. Trigonometric series with gaps. J. Math. and Mech. 9 (1960).

[15] RUDIN, W. Fourier analysis on groups. Inters. Publ. N. Y. 1962.

[16] SCHNEIDER, R. Some theorems in Fourier analysis on symmetric sets. Pac. J. Math. 31 (1969).

[17] ZYGMUND, A. Trigonometric series. Cambridge Univ. Press (1959), T. 1 et 2.

[18] BOURGAIN, J. Translation invariant complemented subspaces of L^p. Preprint.

ADDITIF. Après avoir rédigé cet exposé, j'ai reçu le preprint [18]. Dans ce travail, J. Bourgain détermine des conditions nécessaires et suffisantes sur Λ, lorsque L^p_Λ est complémenté dans $L^p(G)$, pour que L^p_Λ soit isomorphe à $L^p(G)$, ainsi qu'une condition suffisante sur Λ pour que $L^p(G)$ soit isomorphe à un sous-espace fermé de L^p_Λ, pour $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, et G groupe abélien compact. Ces résultats poursuivent le travail exposé dans [6], mais le problème invariant résolu pour le groupe de Cantor dans [6] reste ouvert lorsque $G = T$.

On peut déduire le théorème 4.2 des lemmes 3 et 4 de [18], dont la démonstration utilise aussi l'impossibilité de (4.3). On évite ainsi le théorème de transfert 4.1 et on peut donc énoncer le théorème 4.2 pour tout groupe abélien compact G et pour toute suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de Γ qui soit 2-dissociée ([18]), si on suppose que les éléments de G sont d'ordre au moins 3.

Hervé Queffelec

L'INEGALITE DE VINOGRADOV ET SES CONSEQUENCES.

Résumé. Dans la première partie, on établit une inégalité de type faible due à S. A. Vinogradov, qui découle d'une reformulation du théorème de Carleson-Hunt ; dans la deuxième partie, on montre comment cette inégalité permet d'améliorer un certain nombre de résultats connus.

I. INTRODUCTION ET NOTATIONS.

T désigne le cercle $\{z\in\mathbf{C}/ |z|=1\}$, σ sa mesure de Haar normalisée, $\mathcal{B}$ sa tribu de Lebesgue ; si E est un espace de Banach séparable et $1 \leq p < \infty$, on désigne par $L^p(T, \mathcal{B},\sigma ;E)$ (en abrégé $L^p(E)$) l'espace des classes d'applications mesurables $f : T \longrightarrow E$ telles que $\int \|f(z)\|_E^p \, d\sigma(z) < \infty$; si $E = \mathbf{C}$, on note en abrégé L^p.

$L^{1\infty}$ désigne l'ensemble des classes d'applications mesurables $f : T \longrightarrow \mathbf{C}$ par lesquelles il existe une constante $A > 0$ telle que :

$$\sigma\left\{ |f| > t\right\} \leq \frac{A}{t} \qquad \forall\, t > 0.$$

Par abus de notations, la meilleure constante A dans l'inégalité précédente se note $\|f\|_{1\infty}$, bien qu'il ne s'agisse pas d'une norme ($\sqrt{\|f-g\|_{1\infty}} = d(f,g)$ est une métrique complète invariante par translation sur $L^{1\infty}$, qui sera supposé muni de la topologie associée à cette métrique).

$H^2 = \left\{f\in L^2/\hat{f}(n) = 0 \quad \text{si} \quad n < 0\right\}$. Si $f \in L^2$, $f^+(z) = \sum_{0}^{\infty} \hat{f}(j)\, z^j \in H^2$ et on a : $\|f^+\|_2 \leq \|f\|_2$.

$C = C(T)$ est l'ensemble des fonctions complexes continues sur T, avec la norme uniforme.

$A = \{f \in C(T)/\hat{f}(n) = 0, \quad n < 0\}$ = "algèbre du disque".

Par $f \in L^1$, on notera dans toute la suite :

$$\begin{cases} S_n(f,z) = \sum_{-(n-1)}^{n-1} \hat{f}(j)\, z^j \quad (n \geq 1) \quad \text{et} \quad S_o(f,z) = 0 \\ R_n(f,z) = f(z) - S_n(f,z) \quad (n \geq 0). \end{cases}$$

$U = U(T) = \{f \in C(T)/S_n(f) \longrightarrow f \text{ dans } C(T)\}$

$V = V(T) = \{f \in U(T)/\hat{f}(n) = 0 \text{ si } n < 0\}$.

Pour $f \in U(T)$, on pose $[f] = \sup_{n\geq 0} \|R_n(f)\|_{C(T)}$; on définit ainsi sur $U(T)$ (et de façon induite sur $V(T)$) une norme d'espace de Banach. Remarquons que si $f \in V(T)$ on peut écrire, anticipant sur les notations suivantes :

$$S_n(f,z) = (f * D_n)(z), \quad \text{avec} \quad D_n(z) = \frac{1 - z^n}{1 - z} \quad \text{si} \quad n \geq 1 \quad \text{et} \quad D_o(z) = 0.$$

Si $1 \leq p,\ p' \leq \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, on convient d'écrire la dualité entre un élément f de L^p et un élément g de $L^{p'}$ par :

$$\langle f,g\rangle = \int f(z)\, g(\bar{z})\, d\sigma(z) = \int f(\bar{z})\, g(z)\, d\sigma(z) = (f * g)(0)$$

où on pose de façon générale :

$$(f * g)(z) = \int f(z\bar{w})\, g(w)\, d\sigma(w) = \int g(z\bar{w})\, f(w)\, d\sigma(w).$$

Un élément f de H^2 sera considéré comme un élément du dual V^* de V en accord avec la formule précédente

$$\langle f,v\rangle = \int f(z)\, v(\bar{z})\, d\sigma(z) \quad \text{et} \quad |\langle f,v\rangle| \leq \|f\|_2\, \|v\|_V.$$

En 1932, Paley [1] avait montré que si une suite $(c_n)_{n\in Z}$ vérifie $\Sigma |c_n \hat{f}(n)| < \infty$ pour toute $f \in C(T)$, alors $(c_n) \in \ell^2$; puis utilisant les propriétés de la transformée de Hilbert : $L^p \longrightarrow H^p$ par $1 < p < \infty$, il avait montré que la résultat subsiste en remplaçant $(c_n)_{n\in Z}$ par $(c_n)_{n\geq 0}$ et $C(T)$ par A ; en 1976, Vinogradov [6] a démontré une inégalité de type faible qui permet avec des modifications mineures de la preuve de Paley, d'obtenir le résultat suivant :

$$\text{Si} \quad \sum_{0}^{\infty} |c_n \hat{f}(n)| < \infty \quad \text{pour toute} \quad f \in V(T), \quad \text{alors} \quad \sum_{0}^{\infty} |c_n|^2 < \infty.$$

Puis en 1977, Kahane-Katznelson-deLeeuw [5] ont amélioré le résultat initial de Paley en obtenant un résultat "coefficient par coefficient" :

$$\forall\, (a_n) \in \ell^2, \quad \exists\, f \in C(T) / |\hat{f}(n)| \geq |a_n| \qquad \forall\, n \in Z.$$

En 1978, C. B. Kisliakov [7] a combiné les méthodes de [5] et l'inégalité de [6] pour obtenir notamment le résultat suivant :

$$\forall\, (a_n) \in \ell^2(N), \quad \exists\, f \in V(T) / |\hat{f}(n)| \geq |a_n| \qquad \forall\, n \in N.$$

Ce sont l'inégalité de [6] et les méthodes de [5] et [7] que nous allons exposer ci-dessous, avec quelques simplifications.

II. INEGALITE DE VINOGRADOV.

Le résultat fondamental de ce paragraphe est le suivant.

THEOREME 1 (Inégalité de Vinogradov). Il existe une constante absolue $\gamma > 0$ telle que l'on ait

$$\|f\|_{1\infty} \leq \gamma\, \|f\|_{V^*} \quad \text{pour toute} \quad f \quad \text{de} \quad H^2.$$

Démonstration. Le théorème de Carleson-Hunt ([2], [3]) dit qualitativement et quantitativement les deux choses suivantes .

Soit $f \in H^2$. Alors

i) $R_n(f,z) \longrightarrow 0$ pour $d\sigma$-presque tout z de T

ii) $\displaystyle\int_T \sup_{n\geq 0} |R_n(f,z)|^2\, d\sigma(z) \leq C^2 \int_T |f(z)|^2\, d\sigma(z)$

où C désigne une constante absolue.

i) et ii) peuvent se reformuler en disant que $f \longrightarrow (R_n(f))_{n\geq 0}$ définit un opérateur S de H^2 dans $L^2(c_o)$, de même norme $\leq C$.

L'opérateur adjoint $S^* : L^2(\ell^1) \longrightarrow H^2$ se calcule facilement

$$S^*((g_n)) = (\sum_0^\infty g_n)^+ - \sum_0^\infty g_n * D_n .$$

Soit encore, puisque $g^+(z) = \int \frac{g(w)}{1-\bar{w}z}\, d\sigma(w)$, pour $g \in L^2$:

$$S^*((g_n))(z) = \int \Sigma\, g_n(w) \frac{\bar{w}^n z^n}{1-\bar{w}z}\, d\sigma(w).$$

(Comme il s'agit dans tout ce qui suit d'inégalités a priori, on peut si l'on veut supposer qu'il n'y a qu'un nombre fini de g_n non nuls).

Changeant (g_n) en (φ_n) avec $\varphi_n(w) = g_n(w)\, w^n$, on voit que R, défini par

$$R((g_n))(z) = \int \Sigma\, g_n(w) \frac{z^n}{1-\bar{w}z}\, d\sigma(w)$$

envoie $L^2(\ell^1)$ dans H^2 avec norme $\leq C$. On va en déduire que R envoie $L^1(\ell^1)$ dans $L^{1\infty}$, en faisant un découpage à la Calderón-Zygmund ([8]) de T associé à la fonction $G = \Sigma\, |g_n| \in L^1$, si on s'est donné $g = (g_n) \in L^1(\ell^1)$ et $\alpha > 0$. Soit $\alpha > 0$. Suivant [8], on a une décomposition

$T = P \cup Q$, $P \cap Q = \emptyset$ et de plus

$G(x) \leq \alpha$ $d\sigma$-pp sur P

$Q = \bigcup_j Q_j$ Q_j arcs d'intérieurs 2 à 2 disjoints

$|Q| \leq \frac{1}{\alpha} \|G\|_1$

$C_j = \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} G(z)\, d\sigma(z) \leq 2\alpha.$

(On a posé pour abréger $|A| = \sigma(A)$ si $A \in \mathfrak{B}$).

On décompose chaque g_n en une bonne et une mauvaise fonctions b_n et m_n

$$b_n = \begin{cases} g_n & \text{sur } P \\ \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} g_n(w)\, d\sigma(w) = c_{jn} & \text{sur } Q_j \end{cases} \qquad m_n = \begin{cases} 0 & \text{sur } P \\ g_n - c_{jn} & \text{sur } Q_j \end{cases}$$

On a $g_n = b_n + m_n$ et $\int_{Q_j} m_n = 0$ par définition.

<u>1er point</u>. $b = (b_n) \in L^2(\ell^1)$ et $\|b\|^2_{L^2(\ell^1)} \le 5\alpha\|G\|_1 = 5\alpha\|g\|_{L^1(\ell^1)}$.
En effet, soit $B = \Sigma\,|b_n|$, nous avons

$$\int B^2 = \int_P B^2 + \int_Q B^2$$

(1) $$\int_P B^2 = \int_P G^2 \le \alpha \int_P G \le \alpha\|G\|_1 .$$

D'autre part, sur Q_j, $B = \sum_n |c_{jn}|$ et $|c_{jn}| \le \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} |g_n(w)|\,d\sigma(w)$, donc sur Q_j, $B \le \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} G \le 2\alpha$ et par conséquent

(2) $$\int_Q B^2 \le 4\alpha^2\,|Q| \le 4\alpha\|G\|_1 .$$

En additionnant (1) et (2), on obtient le premier point annoncé.

<u>2ème point</u>. $m = (m_n) \in L^1(\ell^1)$ et $\|m\|_{L^1(\ell^1)} \le 2\|G\|_1 = 2\|g\|_{L^1(\ell^1)}$.
En effet, soit $M = \Sigma\,|m_n|$; nous avons $|m_n| \le |g_n| + |c_{jn}|$ sur Q_j, d'où :
$\int |m_n| \le \int |g_n| + \sum_j |c_{jn}|\,|Q_j|$, d'où en sommant par rapport à n :

$$\int M \le \int G + \sum_j |Q_j| \sum_n |c_{jn}| \le \int G + \sum_j |Q_j|\,c_j = \int G + \sum_j \int_{Q_j} G \le 2\int G ,$$

d'où le deuxième point annoncé.

<u>3ème point</u>. $\sigma\left\{|R(b)| > \frac{\alpha}{2}\right\} \le \frac{20\,C^2}{\alpha}\|g\|_{L^1(\ell^1)}$.

En effet, $\sigma\left\{|R(b)| > \frac{4}{\alpha^2}\,\|R(b)\|_2^2 \le \frac{4C^2}{\alpha^2}\|b\|_2^2 \le \frac{4C^2}{\alpha^2}5\alpha\|g\|\right.$ d'après le 1er point.

<u>4ème point</u>. $\sigma\left\{|R(m)| > \frac{\alpha}{2}\right\} \le \frac{C_1}{\alpha}\|g\|_{L^1(\ell^1)}$ où C_1 est une constante absolue.

En effet, soit w_j le centre de l'arc Q_j, $\tilde{Q}_j$ l'arc de centre w_j et de longueur triple de celle de Q_j, $Q' = \cup\,\tilde{Q}_j$ et $P' = T \setminus Q'$. Nous avons

(3) $$\sigma\left\{|R(m)| > \frac{\alpha}{2}\right\} \le \sigma\left\{|R(m)| > \frac{\alpha}{2} \cap P'\right\} + \sigma(Q') \le \frac{2}{\alpha}\int_{P'} |R(m)(z)|\,d\sigma(z) + \frac{3}{\alpha}\|g\| .$$

D'autre part, si l'on pose $K(u) = \dfrac{1}{1-u}$ et $\mu_n(z) = \int_T m_n(w) \dfrac{z^n}{1-\bar{w}z} d\sigma(w)$

$= \int_T m_n(w) z^n K(z\bar{w}) d\sigma(w)$, on a, compte tenu du fait que m_n est nulle sur P et à moyenne nulle sur Q_j :

$$\mu_n(z) = \sum_j \int_{Q_j} m_n(w) z^n \left[K(z\bar{w}) - K(z\bar{w}_j)\right] d\sigma(w) ;$$

appliquons le théorème de Fubini et remarquons qu'il existe une constante absolue C_1' telle que $\int_{\complement\tilde{Q}_j} |K(z\bar{w}) - K(z\bar{w}_j)| d\sigma(z) \leq C_1'$ d'après un calcul simple et classique ([8]) nous obtenons

$$\int_{P'} |\mu_n(z)| d\sigma(z) \leq \sum_j \int_{Q_j} |m_n(w)| \left[\int_{P'} |K(z\bar{w}) - K(z\bar{w}_j)| d\sigma(z)\right] d\sigma(w)$$

$$\leq C_1' \sum_j \int_{Q_j} |m_n(w)| d\sigma(w) \leq C_1' \|m_n\|_1 ,$$

car $P' \subset \complement\tilde{Q}_j$ pour tout j.

En sommant sur n les inégalités précédentes, on a donc, si $\|g\|$ désigne $\|g\|_{L^1(\ell^1)}$ $\int_{P'} |R(m)z)| d\sigma(z) \leq C_1' \sum_n \|m_n\|_1 \leq 2\, C_1'\|g\|$ d'après le 2ème point, et (3) donne donc

$$\sigma\left\{ |R(m)| > \frac{\alpha}{2}\right\} \leq \frac{4C_1'+3}{\alpha} \|g\| = \frac{C_1}{\alpha}\|g\|.$$

<u>5ème point</u>. $\|R(g)\|_{L^{1\infty}} \leq (20\, C^2 + C_1)\|g\| = \gamma\|g\|$.

En effet, $\sigma\left\{|R(g)| > \alpha\right\} \leq \sigma\left\{ |R(b)| > \frac{\alpha}{2}\right\} + \sigma\left\{|R(m)| > \frac{\alpha}{2}\right\} \leq \frac{20C^2}{\alpha} \|g\| + \frac{C_1}{\alpha}\|g\|$.

Changeant (g_n) en (ψ_n) avec $\psi_n(w) = g_n(w)\, \bar{w}^{\,n}$, on obtient

(4) $\|S^*(g)\|_{1\infty} \leq \gamma\|g\|$ pour tout $g = (g_n) \in L^1(\ell^1)$.

Considérons maintenant l'opérateur $\tilde{S} : V \longrightarrow C_0\left[C(T)\right]$ défini formellement comme S, c'est-à-dire : $\tilde{S}(v) = (R_n(v))_{n\geq 0}$. Par dualité, on obtient

$$(\tilde{S})^* : \ell^1\left[M(T)\right] \longrightarrow V^* \quad \text{et si} \quad \mu = (\mu_n) \in \ell^1\left[M(T)\right],$$

un calcul simple donne :

(5) $$\langle (\tilde{S})^*(\mu), v\rangle = \Sigma(\mu_n * v)(0) - \Sigma(\mu_n * D_n * v)(0).$$

Par définition des normes dans V et dans $C_o[C(T)]$, $\tilde{S}$ est une isométrie, en particulier est injective d'image fermée ; $(\tilde{S})^*$ est donc surjectif et de plus, $\forall \ell \in V^*$, $\forall \varepsilon > 0$, il existe $(\mu_n) = \mu \in \ell^1[M(T)]$ telle que

(6) $$\ell = (\tilde{S})^*(\mu) \quad \text{et} \quad \|\mu\| = \Sigma\|\mu_n\| \leq (1+\varepsilon)\|\ell\|_{V^*} .$$

Si ℓ est un polynôme trigonométrique de H^2, en l'écrivant comme dans (6) et en utilisant (5), on obtient :

(7) $$\ell = \Sigma\,\mu_n - \Sigma\,\mu_n * D_n \quad \text{et} \quad \Sigma\|\mu_n\| \leq (1+\varepsilon)\|\ell\|_{V^*} .$$

Soit Δ un noyau de de la Vallée-Poussin tel que $\hat{\Delta} = 1$ sur $\operatorname{supp}\hat{\ell}$ et $\|\Delta\|_1 \leq 1+\varepsilon$. Posant $f_n = \mu_n * \Delta$, on déduit de (7)

(8) $$\ell = \ell * \Delta = \Sigma\, f_n - \Sigma\, f_n * D_n$$

et de plus

$$f_n \in L^1 \qquad \Sigma\|f_n\|_1 \leq (1+\varepsilon)^2\|\ell\|_{V^*} .$$

S'il n'y a qu'un nombre fini de f_n non nuls, comme $\ell \in H^2$ et $f_n * D_n \in H^2$ on déduit de (8) que $\Sigma\, f_n \in H^2$, donc $\Sigma\, f_n = (\Sigma\, f_n)^+$ et (8) peut s'écrire

$$\ell = (\Sigma\, f_n)^+ - \Sigma\, f_n * D_n = S^*((f_n))$$

d'où d'après (4)

$$\|\ell\|_{1\infty} \leq \gamma\|(f_n)\|_{L^1(\ell^1)} \leq \gamma(1+\varepsilon)^2\|\ell\|_{V^*} .$$

Par un argument de densité, et en laissant ε tendre vers zéro, on obtient :

(9) $$\|\ell\|_{1\infty} \leq \gamma\|\ell\|_{V^*}$$

si ℓ est un polynôme trigonométrique de H^2.

Si ℓ est un élément quelconque de H^2, et K_n le noyau de Féjer d'ordre n, (9) entraîne

(10) $$\|\ell * K_n\|_{1\infty} \leq \gamma\|\ell * K_n\|_{V^*} \leq \gamma\|\ell\|_{V^*} .$$

(Si $v \in V$, $\|v * K_n\|_V = \sup_{j\geq 0} \|K_n * v * (\delta_o - D_j)\|_\infty \leq \sup_{j\geq 0} \|v * (\delta_o - D_j)\|_\infty = \|v\|_V$; par dualité, on obtient la même inégalité dans V^*). Quand $n \longrightarrow \infty$, $\ell * K_n$ tend vers ℓ dans L^2, a fortiori dans $L^{1\infty}$, donc le passage à la limite dans (10) donne

(11) $$\|\ell\|_{1\infty} \leq \gamma \|\ell\|_{V^*} \quad \text{si} \quad \ell \in H^2.$$

Ceci achève la démonstration du théorème 1.

III. APPLICATIONS DE L'INEGALITE DE VINOGRADOV.

Au préalable, nous avons besoin de deux lemmes techniques, dont le premier généralise un lemme de [7].

LEMME 1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité, $F \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $\|F\|_2 \leq R$ et $P(|F|>t) \leq \frac{\delta}{t}$ si $t > 0$ (autrement dit $\|F\|_{1\infty} \leq \delta$), avec $\delta \leq R$

a) Si $1 < p < 2$, on a : $\|F\|_p \leq K_p \delta^{1-2/p'} R^{2/p'}$

où K_p est une constante ne dépendant que de p.

b) Si $p = 1$, on a : $\|F\|_1 \leq 2\delta(1 + \log \frac{R}{\delta})$.

Démonstration.

a) Pour tous a,b tels que $0 < a \leq b$, on a :

$$\int_\Omega |F|^p dP = \int_o^\infty p\, t^{p-1} P(|f|>t)\, dt \leq \int_o^a p\, t^{p-1} dt + \int_a^b \delta p\, t^{p-2} dt + \int_b^\infty R^2 p\, t^{p-3}\, dt ,$$

soit :

$$\int_\Omega |F|^p\, dP \leq a^p + \frac{\delta p}{p-1} \left[b^{p-1} - a^{p-1}\right] + \frac{R^2 p}{2-p}\, b^{p-2} .$$

On minimise le second membre en a et b, ce qui donne $a = \delta$, $b = \frac{R^2}{\delta}$ (et on a bien ainsi $a \leq b$ puisque $\delta \leq R$), ce qui donne

$$\int_\Omega |F|^p\, dP \leq \delta^{2-p} R^{2(p-1)} \left[\frac{p}{p-1} + \frac{p}{2-p}\right] + \delta^p \left[1 - \frac{p}{p-1}\right] ,$$

soit :

$$\int_\Omega |F|^p \, dP \leq \delta^{2-p} R^{2(p-1)} \frac{p}{(p-1)(2-p)} .$$

En prenant les racines p-ièmes, on obtient le a), avec $\quad _p = \left[\frac{p}{(p-1)(2-p)}\right]^{1/p}$.

b) est prouvé dans [7], la méthode est rigoureusement la même.

LEMME 2 ([9]). Soit $(a_n) \in \ell^2(N)$ telle que $\sum_0^\infty |a_n|^2 \leq 1$ et q un exposant tel que $2 < q < \infty$. Alors, il existe un choix de signes $\sigma_n = \pm 1$ tel que si $\varphi(z) = \sum_0^\infty a_n \sigma_n z^n$, on ait : $\varphi \in L^q$ et $\|\varphi\|_q \leq C_q$, où C_q est une constante ne dépendant que de q.

La première application du théorème 1 est la suivante.

THEOREME 2 (Vinogradov). Soit $E = (\lambda_n)_{n \geq 0}$ un ensemble infini de type $\Lambda(2)$ inclus dans Z^+ ; alors pour toute suite $(a_n)_{n\geq 0}$ dans $\ell^2(N)$, il existe $v \in V$ tel que l'on ait :

$$\hat{v}(\lambda_n) = a_n \qquad \text{pour tout} \quad n \geq 0.$$

Démonstration. Remarquons d'abord que le résultat était bien connu avec $f \in C(T)$ au lieu de $v \in V$ ([11]). Cela dit, définissons un opérateur $R : V \longrightarrow \ell^2$ par $R(v) = (\hat{v}(\lambda_n))$. Le problème est de montrer que R est surjectif, ou encore que son adjoint R^* est injectif d'image fermée, autrement dit qu'il existe une constante $\rho > 0$ telle que :

$$\|R^* a\|_{V^*} \geq \rho \|a\|_{\ell^2} \quad \text{pour tout} \quad a = (a_n) \in \ell^2. \tag{13}$$

On voit aisément que $R^* a(z) = \sum_0^\infty a_n z^{\lambda_n}$; supposons que (13) soit en défaut, alors il existe une suite $(a^p) \in \ell^2$ telle que :

$$\|a^p\| = 1 \quad \text{et} \quad \|R^*(a^p)\|_{V^*} \leq \frac{1}{p} , \qquad p = 1, 2.$$

D'après le théorème 1, $\|R^*(a^p)\|_{1\infty} \leq \frac{\gamma}{p}$ et pour $p \geq \gamma$, le lemme 1 b) donne : $\|R^*(a^p)\|_1 \leq 2 \frac{\gamma}{p} (1 + \log \frac{p}{\gamma})$, quantité qui tend vers zéro quand $p \longrightarrow \infty$. Comme $\|R^*(a^p)\|_2 = 1$ et que $R^*(a^p) \in L^2_E$, ceci contredit le fait que, par définition, les normes L^1 et L^2 soient équivalentes sur L^2_E, et achève la démonstration.

Avant d'en venir à l'application essentielle du théorème 1, signalée dans l'introduction, nous avons besoin d'un dernier lemme technique.

LEMME 3 ([7]).

i) Soit $\eta > 0$ et soit $(a_n) \in \ell^2(N)$ telle que $\sum_0^\infty |a_n|^2 \leq 1$; alors il existe un choix de signes $\sigma_n = \pm 1$ tel que si $\varphi(z) = \sum_0^\infty \sigma_n a_n z^n$, on ait la décomposition

$$\varphi = g + h, \quad g \in V, \quad h \in H^2, \quad \|g\|_V \leq \eta \quad \text{et} \quad \|h\|_{H^2} \leq \frac{k_1}{\eta},$$

où k_1 est une constante absolue.

ii) Si $\left(\sum_0^\infty |a_n|^2\right)^{1/2} \leq \varepsilon$, on a la même conclusion, mais avec

$$\|g\|_V \leq \eta \quad \text{et} \quad \|h\|_{H^2} \leq \varepsilon^2 \frac{k_1}{\eta}.$$

Démonstration. i) Montrons d'abord que pour h assez grand et pour un bon choix de σ_n, on a la décomposition

$$\varphi = g + h \quad \text{avec} \quad \|g\|_V \leq \eta \quad , \quad \|h\|_{H^2} \leq \frac{1}{\eta}.$$

Soit q un exposant tel que $4 < q < \infty$, et soit p l'exposant conjugué, si bien que $1 < p < \frac{4}{3}$. Faisons un choix de signes σ_n comme dans le lemme 2 ; il s'agit de montrer que

(14) $$\varphi \in \eta B_V + \frac{1}{\eta} B_{H^2} = \mathcal{C}$$

(B_V et B_{H^2} désignant les boules unité fermées respectives de V et H^2). $\mathcal{C}$ est un corps convexe équilibré dans H^2, donc d'après le théorème de séparation "sans topologie" de Hahn-Banach ([12]), il suffit, pour avoir (14), de montrer que si L est un élément de H^2 tel que

(15) $$\|L\|_{V^*} \leq \frac{1}{\eta} \quad \text{et} \quad \|L\|_{H^2} \leq \eta$$

alors $|L(\varphi)| < 1$.

Or, (15) et le théorème 1 entraînent $\|L\|_{1\infty} \leq \frac{\gamma}{\eta}$. Si $\eta^2 \geq \gamma$, (15) et le lemme 1 a) entraînent

(16) $$\|L\|_p \leq K_p\, \eta^{\frac{2}{q}-1}\, \eta^{2/q} = K_p\, \eta^{4/q-1}.$$

On a alors, par dualité (L^p , L^q) et par (16)

(17) $$|L(\varphi)| = \left|\int \bar{L}\, \varphi\, d\sigma\right| \leq \|L\|_p \|\varphi\|_q \leq k_p\, C_q\, \eta^{4/q-1}.$$

Et puisque $q > 4$, (17) montre bien que $|L(\varphi)| < 1$ pour h assez grand, disons $h > \alpha$. Posons $k_1 = \mathrm{Max}(1,\alpha)$, il y a deux cas possibles :

<u>1er cas</u> : si $h > \alpha$, on vient de voir qu'on peut trouver une décomposition

$\varphi = g + h$ $$\|g\| \leq \eta \quad , \quad \|h\| \leq \frac{1}{\eta} \leq \frac{k_1}{\eta}.$$

<u>2ème cas</u> : $0 < h \leq \alpha$; on prend alors une décomposition "triviale" $\sigma_n \equiv 1$, $g = 0$, $h = \varphi$. On a :

$$\|g\| = 0 \leq \eta \quad \text{et} \quad \|h\| \leq 1 \leq \frac{k_1}{\alpha} \leq \frac{k_1}{\eta}.$$

Ceci achève le i) du lemme 3.

ii) D'après le i) appliqué avec $(\frac{a_n}{\varepsilon})$ et $\frac{\eta}{\varepsilon}$, il existe des signes $\sigma_n = \pm 1$ tels que $\frac{1}{\varepsilon} \Sigma\, \sigma_n a_n z^n = g' + h'$, avec $\|g'\|_V \leq \frac{\eta}{\varepsilon}$ et $\|h'\|_{H^2} \leq k_1 \frac{\varepsilon}{\eta}$.

D'où $\Sigma\, \sigma_n a_n z^n = (\varepsilon g') + \varepsilon h') = (g) + (h)$, $\|g\|_V \leq \eta$, $\|h\|_{H^2} \leq k_1 \frac{\varepsilon^2}{\eta}$.

Ceci achève la preuve du lemme 3.

L'application essentielle du théorème 1 est la suivante.

THEOREME 3 (Kisliakov, [7]).

<u>Soit</u> $(a_n)_{n\geq 0} \in \ell^2(N)$; <u>il existe</u> $v \in V$ <u>telle que</u>

a) $|\hat{v}(n)| \geq |a_n|$ <u>pour tout</u> $n \geq 0$

b) $\|v\|_V \leq K(\sum_0^\infty |a_n|^2)^{1/2}$, <u>où</u> K <u>est une constante absolue</u>.

<u>Démonstration</u>. Pour des raisons d'homogénéité, il suffit de trouver v quand

$$(\sum_0^\infty |a_n|^2)^{1/2} \leq \frac{1}{2\, c_0} = \varepsilon_0 ,$$

où l'on pose : $c_j = k_1 2^{j+4}$, k_1 étant comme dans le lemme 3. Définissons par récurrence cinq suites (F_j), (G_j), (R_j), (g_j), (h_j) de fonctions et deux suites (ε_j) et (η_j) de nombres positifs avec les propriétés suivantes $(j \geq 0)$:

1. $|\hat{F}_j(n)| \geq |a_n|(1 - \eta_o - \ldots - \eta_j)$ et $F_j = G_j + R_j$
2. $G_j = g_o + \ldots + g_j$ et $\|g_j\|_V \leq \eta_j$
3. $\|R_j\|_{H^2} \leq \varepsilon_j$
4. $R_j = g_{j+1} + h_{j+1}$ et $\|h_{j+1}\|_{H^2} \leq k_1 \dfrac{\varepsilon_j^2}{\eta_{j+1}}$
5. $\varepsilon_{j+1} = k_1 \left(\dfrac{\varepsilon_j}{\eta_{j+1}}\right)^2$
6. $\sum_o^\infty \eta_j = \ell < 1$ et $\varepsilon_j \longrightarrow 0$ quand $j \longrightarrow +\infty$.

Les conditions 5. et 6. sont indépendantes des précédentes ; elles sont imposées pour des raisons techniques qui apparaîtront par la suite ; une réalisation de ces conditions est donnée par :

$$\eta_o = 0, \quad \eta_1 = \frac{1}{2}, \quad \eta_j = k_1 \frac{c_{j-1}}{c_{j-2}^2} \quad \text{si} \quad j \geq 2, \quad (c_j) \text{ étant comme dans (18),}$$

(on a alors $\sum_o^\infty \eta_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$)

$\varepsilon_o = \dfrac{1}{2\, c_o}$, $\varepsilon_{j+1} = \dfrac{k_1}{c_j^2}$, $j \geq 0$. C'est ce choix de (ε_j), (η_j) qu'on adoptera.

<u>Point de départ $(j = 0)$</u>. On prend $g_o = G_o = 0$, $F_o = R_o = \Sigma\, \sigma_n a_n z^n$ où les $\sigma_n = \pm 1$ sont choisis comme dans le lemme 3 ii) pour permettre de décomposer R_o en $g_1 + \eta_1$, avec $\|g_1\|_V \leq \eta_1$, $\|h_1\|_{H^2} \leq k_1 \dfrac{\varepsilon_o^2}{\eta_1}$. 1. est réalisé car $|\hat{F}_o(n)| = |\sigma_n a_n| = |a_n| \geq |a_n|(1 - \eta_o)$. 3. est réalisé à cause du choix de norme convenu au départ pour (a_n).

<u>Passage de j à $j+1$</u>. Posons $G_{j+1} = g_o + \ldots + g_{j+1}$ et définissons deux ensembles B et M (dépendant de j) de bons et de mauvais entiers par :

(19) $\quad n \in B \iff |\widehat{G_{j+1}}(n)| \geq |a_n|(1 - \eta_o - \ldots - \eta_{j+1})$

(20) $\quad n \in M \iff |\widehat{G_{j+1}}(n)| < |a_n|(1 - \eta_o - \ldots - \eta_{j+1})$.

Remarquons que si $n \in M$, nous avons :

$$|\hat{F}_j(n) - \widehat{G_{j+1}}(n)| = |\widehat{h_{j+1}}(n)| \geq \eta_{j+1} |a_n| ,$$

d'où

(21) $$\left(\sum_{n\in M} |a_n|^2\right)^{1/2} \leq \frac{1}{\eta_{j+1}} \|h_{j+1}\|_{H^2} \leq \frac{\varepsilon_j^2}{\eta_{j+1}} = \varepsilon_{j+1} \qquad \text{par } 5.$$

Définissons alors un "regonflement" R_{j+1} de G_{j+1} par

(22) $$R_{j+1} = \sum_{n\in M} 2\sigma_n a_n (1 - \eta_o - \ldots - \eta_{j+1}) z^n$$

où les $\sigma_n = \pm 1$ sont des signes pour le moment arbitraires, et une fonction "regonflée" $F_{j+1} = G_{j+1} + R_{j+1}$, la terminologie étant justifiée par le fait (évident d'après (19), (20), (22)) que l'on a

$$|\widehat{F_{j+1}}(n)| \geq |a_n| (1-\eta_o - \ldots - \eta_{j+1}) \quad \text{pour tout} \quad n \in Z .$$

Revenant à (22), remarquons que :

$$\left(\sum_{n\in M} |2a_n(1 - \eta_o - \ldots - \eta_{j+1})|^2\right)^{1/2} = 2(1 - \eta_o - \ldots - \eta_{j+1})\left(\sum_{n\in M} |a_n|^2\right)^{1/2}$$

$$\leq 2(1 - \eta_1)\, \varepsilon_{j+1} = \varepsilon_{j+1} \quad \text{par (21)} \;;$$

on choisit alors les signes σ_n dans R_{j+1} en accord avec le lemme 3, pour avoir une décomposition

$$R_{j+1} = g_{j+2} + h_{j+2} \quad , \quad \|g_{j+2}\|_V \leq \eta_{j+2} \quad , \quad \|h_{j+2}\| \leq \varepsilon_{j+1}^2 \frac{k_1}{\eta_{j+2}} .$$

Ceci achève la récurrence ; posons alors $G = \sum_o^\infty g_j = \lim G_j$ (série normalement convergente dans V). Nous voyons que :

$$\|G\| \leq \sum_o^\infty \eta_j = \frac{3}{4} .$$

3. et 6. montrent que $\widehat{R_j}(n) \longrightarrow 0$ quand $j \longrightarrow +\infty$, pour $n \in Z$ fixé. Le passage à la limite dans $|\hat{F}_j(n)| = |\hat{G}_j(n) + \hat{R}_j(n)| \geq |a_n| (1 - \eta_o - \ldots - \eta_j)$ donne alors :

$$|\hat{G}(n)| \geq |a_n| \left(1 - \sum_o^\infty \eta_j\right) = \frac{1}{4} |a_n| .$$

Si $v = 4G$, $|\hat{v}(n)| \geq |a_n| \quad \forall n$ et $\|v\| \leq 3$.

Comme on était parti de $(\Sigma |a_n|^2)^{1/2} \leq \frac{1}{2 c_o} = \frac{1}{k_1 . 2^5}$, on en déduit le a) du théorème 3 avec $K = 3k_1 . 2^5 = 96\, k_1$.

IV. REMARQUES.

1. Si on remplace V par "l'algèbre du disque" A, on a une version simplifiée du théorème 1 : il existe une constante absolue M telle que :

(24) $$\|f\|_{1\infty} \leq M \|f\|_{A*} \qquad \text{pour toute } f \text{ de } H^2.$$

En effet, par définition $\|f\|_{A*} = \inf\limits_{\substack{\mu \in M(T) \\ \hat{\mu}(n)=0 \\ \text{si } n \geq 0}} \|f + \mu\|_{M(T)}$.

En utilisant une approximation de l'identité (et sans utiliser le théorème de F. M. Riesz), on voit qu'en fait :

$$\|f\|_{A*} = \inf_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ \hat{P}(n)=0 \\ \text{si } n \geq 0}} \|f + P\|_1$$

où $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des polynômes trigonométriques sur T ; pour $P \in \mathcal{P}$ tel que $\hat{P}(n) = 0$ si $n \geq 0$, on a : $f = (f + P)^+$ et d'après les propriétés classiques de la transformée de Hilbert :

(25) $$\|f\|_{1\infty} = \|(f+P)^+\|_{1\infty} \leq M \|f+P\|_1 , \quad M \text{ constante absolue.}$$

En passant à l'infinum sur P dans (25), on obtient (24).

2. Dans un papier récent ([10]), Oberlin a obtenu une nouvelle application de l'inégalité de Vinogradov : "Si F est un fermé de σ-mesure nulle sur T, F est pic-interpolation pour V", ce qui améliore un résultat antérieur de Rudin-Carleson ([13]) : "Si F est un fermé de σ-mesure nulle sur T, F est pic-interpolation pour A".

3. Les difficultés pour généraliser le théorème 3 à plus d'une variable proviennent du fait que dans ce cas la transformée de Hilbert n'est plus un opérateur

de type faible (1,1). Kisliakov ([7]) a néanmoins obtenu le résultat suivant en deux variables :

Si $(a_{mn}) \in \ell^2(\mathbb{N}^2)$, $\exists\, f \in C(T^2)$, de type analytique (c'est-à-dire $\hat{f}(m,n) = 0$ si $\inf(m,n) < 0$) telle que :

a) $|\hat{f}(m,n)| \geq |a_{mn}| \qquad \forall\,(m,n) \in \mathbb{N}^2$

b) $\|f\|_{C(T^2)} \leq K \|(a_{mn})\|_{\ell^2(\mathbb{N}^2)}$, où K est une constante absolue.

En p variables $(p \geq 3)$, l'analogue du théorème 3 est un problème ouvert, même sous la forme faible "à la Paley" suivante :

Supposons que l'on ait :

(26)
$$\sum_{\substack{n_i \geq 0 \\ i=1..,p}} |c_{n_1\ldots n_p} \hat{f}(n_1,\ldots,n_p)| < \infty$$

pour toute $f \in C(T^p)$, de type analytique ; s'ensuit-il que $\sum_{\substack{n \geq 0 \\ i=1,..,p}} |c_{n_1\ldots n_p}|^2 < \infty$.

Sous l'hypothèse (26), Kisliakov ([7]) obtient le résultat affaibli suivant

(27)
$$\Big(\sum_{\substack{0 \leq n_i \leq N \\ i=1,\ldots,p}} |c_{n_1\ldots n_p}|^2\Big)^{1/2} \leq CK\big[p \operatorname{Log}(Np)\big]^{1/2}.$$

Ce résultat découle en fait immédiatement d'une estimation probabiliste de [14] , comme le lecteur s'en convaincra aisément.

Bibliographie

[1] PALEY, R.E.A.C. A note on power series. J. London Math. Soc. 7 (1932), 122-130.

[2] CARLESON, L. On the convergence and growth of partial sums of Fourier series. Acta Math. 116 (1966), 135-157.

[3] HUNT, R. A. On the convergence of Fourier series in orthogonal expansions and their continuous analogues. Southern Illinois Univ. Press (1968), 235-256.

[4] HÖRMANDER, L. Estimates for translation invariant operators in L^p spaces. Acta Math. 104 (1960), 93-140.

[5] DE LEEUW, K., KATZNELSON, Y., KAHANE, J.-P. Sur les coefficients de Fourier des fonctions continues. C. R. Acad. Sc. Paris 285 (1977), 1001-1003.

[6] VINOGRADOV, S. A. Convergence almost everywhere of Fourier series of functions in L^2 and the behavior of the coefficients of uniformly convergent Fourier series. Soviet Math. Dokl. 17 (1976), 1323-1327.

[7] KISLIAKOV, C. B. Fourier coefficients of boundary values of analytic functions. Preprint E-3-78, Leningrad (Akad Nauk SSSR).

[8] STEIN, E. Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton Univ. Press (1970), 30-40.

[9] ZYGMUND, A. Trigonometric series. Cambridge Univ. Press (1959), t. 1, Chap. V, 212-215.

[10] OBERLIN, D. M. A Rudin-Carleson theorem for uniformly convergent Taylor series. Michigan Math. J. 27 (1980), 309-313.

[11] RUDIN, W. Trigonometric series with gaps. J. Math. and Mech. 9 (1960), 203-228.

[12] DUNFORD-SCHWARTZ, N. Linear operators. Interscience Publ., Inc. New-York (1958), t. 1, 412-418.

[13] HOFFMAN, K. Banach spaces of analytic functions. Prentice-Hall, Inc. (1962), 81-82.

[14] KAHANE, J.-P. Some random series of functions. Heath mathematical monographs (1968), th. 4, p. 57.

Myriam Déchamps, Françoise Piquard,
Hervé Queffelec.

LA PROPRIETE DU MAJORANT DANS LES ESPACES DE BANACH.

Résumé.- Soient B un espace de Banach et $(y_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments du dual B' de B. On dit que B a la propriété du majorant relativement à $(y_n)_{n\geq 1}$ si pour tout élément $b \in B$ il existe $\theta \in B$ vérifiant $|\langle b, y_n\rangle| \leq \langle \theta, y_n \rangle$ pour $n \geq 1$. Nous déterminons, sous certaines hypothèses sur B, la propriété de B' duale de la propriété du majorant, en généralisant des résultats connus dans le cas où $B = L^p(G)$, G groupe abélien compact et $p \geq 1$.

I. INTRODUCTION.

Soient G un groupe abélien compact et $\hat{G}$ son dual. Pour $f \in L^1(G)$ on note $\hat{f}$ sa transformée de Fourier définie par

$$\hat{f}(\gamma) = \int_G f(x)(-x,\gamma)\,dx, \qquad \gamma \in \hat{G}.$$

Soient $1 \leq p < \infty$ et p' l'exposant conjugué, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Il est connu ([4], [1]) que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(a) Pour toute $f \in L^p(G)$ il existe $g \in L^p(G)$ telle que $|\hat{f}(\gamma)| \leq \hat{g}(\gamma)$ pour $\gamma \in \hat{G}$.

(b) Pour toute $f \in L^{p'}(G)$ telle que $\hat{f} \geq 0$ et tout $(\varepsilon(\gamma))_{\gamma\in\hat{G}} \in \ell^\infty(\hat{G})$, il existe $g \in L^{p'}(G)$ telle que $\varepsilon(\gamma)\hat{f}(\gamma) = \hat{g}(\gamma)$ pour $\gamma \in \hat{G}$.

De plus, lorsque G est infini, ces conditions sont satisfaites si et seulement si p' est un entier pair ou $p' = +\infty$ [1].

Nous allons étudier ces propriétés dans un cadre plus général, poursuivant ainsi les travaux de [4], [1] et [6]. Ce cadre (conditions (1), (2), (3) et (4)) est proche de celui de [6]. Notre premier résultat est le théorème 1. L'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) de ce théorème est démontrée dans [6] sous une hypothèse apparemment plus forte que (4). L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i) est démontrée pour des cas particuliers dans [4], [1] et [6] en utilisant une hypothèse de Cateaux différentiabilité de la norme dans B' qui disparaît ici. Le théorème 2 répond à une question de [6]. D'ailleurs il est possible d'en déduire le théorème 1, mais la démonstration directe du théorème 1 que nous donnons éclaire davantage le problème.

Dans le théorème 3, nous établissons le cadre invariant par translation qui nous paraît le plus adapté à la recherche d'exemples et qui est réalisé dans le cas des sous-espaces fermés invariants par translation et les espaces quotients de $L^p(G)$, où G est un groupe abélien compact et $p \geq 1$. On n'a pas de caractérisations, autres que celle fournie par le théorème 1, des sous-ensembles Λ de $\hat{G}$ tels que $L^p_\Lambda(G) = \left\{ f \in L^p(G) \; ; \; \hat{f}(\gamma) = 0 \quad \text{pour} \quad \gamma \in \hat{G} \setminus \Lambda \right\}$ ait la propriété du majorant et les exemples connus sont peu nombreux (réf. [6] et [8]). Dans le cas où $G = T$ est le cercle unité et $\Lambda = N$, $L^1_N(T) = H^1$ a la propriété du majorant [3] et le théorème 4 fournit une démonstration simple du fait que $S(H^1)$ (définition 2) est un dual séparable non réflexif.

Nous signalons que les définitions et les théorèmes 1, 2 et 3 sont valables dans le cas où le système biorthogonal $\left\{ (x_n)_{n\geq 1} \, , \, (y_n)_{n\geq 1} \right\}$ est remplacé par un système biorthogonal généralisé $\left\{ (x_\gamma)_{\gamma\in\Lambda} \, , \, (y_\gamma)_{\gamma\in\Lambda} \right\}$ (où l'ensemble Λ n'est pas nécessairement dénombrable). Dans le théorème 3, l'hypothèse de métrisabilité du groupe G n'est donc pas essentielle.

Les résultats développés ici ont fait l'objet de [2].

II. NOTATIONS ET DEFINITIONS.

Dans toute la suite, B désigne un espace de Banach vérifiant la condition suivante :

(1) Il existe une suite $(y_n)_{n\geq 1}$ de formes linéaires continues sur B telle que si $b\in B$ et $\langle b,y_n\rangle = \hat{b}(n) = 0$ pour $n\geq 1$ alors $b=0$.

On notera j l'injection canonique de B dans $\mathbb{C}^N$ définie par $b\mapsto \hat{b} = (\hat{b}(n))_{n\geq 1} = (\langle b,y_n\rangle)_{n\geq 1}$ et on munira $\hat{B} = j(B)$ de la norme de B. La notation $\hat{B}$ rappelle que dans la plupart des exemples étudiés j est la transformation de Fourier.

On notera $$B^+ = \left\{b\in B \ , \ \hat{b}\geq 0\right\}.$$

DEFINITION 1. Soit B un espace de Banach vérifiant la condition (1). B a la propriété du majorant (relativement à $(y_n)_{n\geq 1}$ si pour tout $b\in B$ il existe $\theta\in B$ vérifiant $|\hat{b}(n)|\leq \hat{\theta}(n)$ pour $n\geq 1$.

DEFINITION 2. Soit B un espace de Banach vérifiant la condition (1). B a la propriété du minorant (relativement à $(y_n)_{n\geq 1}$) si pour tout $b\in B^+$ et toute suite $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ de nombres complexes vérifiant $|\varepsilon_n|\leq 1$ pour $n\geq 1$, il existe $c\in B$ tel que $\hat{c}(n) = \varepsilon_n \hat{b}(n)$ pour $n\geq 1$.

Par exemple, si G est un groupe abélien compact et métrisable muni de la mesure de Haar, $B = L^1(G)$ a la propriété du majorant relativement à la suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ des caractères de G, tandis que $L^\infty(G)$ a la propriété du minorant relativement à la même suite.

Introduisons comme dans [1] et [6] un espace de Banach auxiliaire.

DEFINITION 3. Soit B un espace de Banach vérifiant la condition (1). On note $S(B)$ l'espace vectoriel des suites $s = (s_n)_{n\geq 1}\in \mathbb{C}^N$ telles qu'il existe $\theta\in B^+$ vérifiant $|s_n|\leq \hat{\theta}(n)$ pour $n\geq 1$. On munit $S(B)$ de la norme

$$\|s\| = \inf\left\{\|\theta\| \ ; \ \theta\in B \ \text{ et } \ |s_n|\leq \hat{\theta}(n) \ \text{ pour } \ n\geq 1\right\}.$$

On vérifie facilement que $S(B)$, muni de cette norme, est un espace de Banach.

REMARQUE 1. Il est clair que B satisfaisant (1) a pour la propriété du majorant si et seulement si $\hat{B} \subset S(B)$. Dans ce cas, d'après le théorème du graphe fermé, l'inclusion est continue et il existe une constante K telle que pour tout $b \in B$, $\|\hat{b}\|_{S(B)} \leq K\|b\|$.

REMARQUE 2. De même, B a la propriété du minorant si et seulement si $S(B) \subset \hat{B}$ et dans ce cas il existe une constante K telle que pour tout $b \in B^+$ et $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\geq 1} \in \ell^{\infty}$,

$$\|\varepsilon\,\hat{b}\|_{\hat{B}} \leq K\|\varepsilon\,\hat{b}\|_{S(B)} \leq K\|\varepsilon\|_{\infty}\,\|b\|.$$

En particulier, sur $\widehat{B^+}$ les normes induites par $\hat{B}$ et $S(B)$ sont équivalentes.

Dans la suite, étant donné un espace de Banach B satisfaisant (1), nous aurons besoin de considérer les propriétés suivantes.

(2) Il existe une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de B telle que si $b' \in B'$ et $\langle x_n, b'\rangle = 0$ pour $n \geq 1$ alors $b'=0$. On suppose que $\{(x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1}\}$ est un système biorthogonal, c'est-à-dire $\langle x_n, y_n\rangle = \delta_n^m$ pour $n\geq 1$ et $m \geq 1$.

(3) B est auto-adjoint (relativement à $(y_n)_{n\geq 1}$), c'est-à-dire que pour tout $b \in B$, il existe $\check{b} \in B$ satisfaisant $\|\check{b}\| = \|b\|$ et $\hat{\check{b}} = \bar{\hat{b}}$.

(4) Si $x \in B^+$ et $y \in B'^+ = \{b' \in B' \;;\; \widehat{b'} \geq 0\}$, alors $\langle x, y\rangle \geq 0$.

On remarque que si B satisfait (1), (2) et (3) alors B' vérifie (1) et est auto-adjoint (relativement à $(x_n)_{n\geq 1}$). On note alors j' l'inclusion canonique de B' dans $\mathbb{C}^N$ définie par $b' \longrightarrow (\langle x_n, b'\rangle)_{n\geq 1} = (\widehat{b'}(n))_{n\geq 1}$.

Dans la suite, pour tout B satisfaisant (1) et (2) on note $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{P}'$) le sous-espace vectoriel de B (resp. B') engendré par $\{x_n, n\geq 1\}$ (resp. $\{y_n, n\geq 1\}$). On désigne par c_{oo} l'espace des suites complexes à support fini et $(e_n)_{n\geq 1}$ la base canonique de c_{oo} $(e_n = (\delta_m^n)_{m\geq 1})$. On a $c_{oo} = j(\mathcal{P}) = j'(\mathcal{P}')$.

On note $S_o(B)$ l'adhérence de c_{oo} dans $S(B)$. On remarque que $(e_n)_{n\geq 1}$ est une base inconditionnelle ([5]) de $S_o(B)$.

Le rôle de la condition (4) est éclairé par la proposition ci-dessous.

PROPOSITION 1. Soit B un espace de Banach vérifiant les conditions (1) et (2). La condition (4) est équivalente à chacune des conditions suivantes :

(4') Tout $b \in B^+$ est limite d'une suite $(P_k)_{k\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{P} \cap B^+$.

(4") Tout $b' \in B'^+$ est limite pour la topologie $\sigma(B',B)$ d'une famille filtrante $(P'_\alpha)_{\alpha \in A}$ d'éléments de $\mathcal{P}' \cap B'^+$.

Si l'une de ces conditions équivalentes est satisfaite, pour tout $b \in B^+$ et tout $b' \in B'^+$ on a

$$\sum_{n\geq 1} \hat{b}(n)\,\hat{b}'(n) \leq \langle b\,,\,b'\rangle .$$

Si de plus $\hat{b} \in S_o(B)$, alors $\Sigma\, \hat{b}(n)\,\hat{b}'(n) = \langle b,b'\rangle$.

Démonstration. Pour montrer que (4) entraine (4') ou (4") il suffit d'appliquer le théorème de Hahn-Banach au cône convexe $\mathcal{P}^+$ de B (pour (4')) ou au cône convexe $\mathcal{P}'^+$ de B' (pour (4")). Les réciproques sont immédiates.

Supposons (4') satisfaite. Soient $b \in B^+$ et $b' \in B'^+$. Si $(P_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{P} \cap B^+$ convergeant vers b, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \hat{P}_n(k) = \hat{b}(k)$ pour $k \geq 1$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k\geq 1} \hat{P}_n(k)\,\hat{b}'(k) = \lim\limits_{n\to\infty} b'(P_n) = b'(b)$. D'après le lemme de Fatou, $\sum\limits_{n\geq 1} \hat{b}(n)\,\hat{b}'(n) \leq b'(b)$.

Si de plus $b \in S_o(B)$, montrons que pour tout $b' \in B'^+$, $\langle b,b'\rangle \geq \sum\limits_{n\geq 1} \hat{b}(n)\,\hat{b}'(n)$. Puisque $(e_n)_{n\geq 1}$ est une base inconditionnelle de $S_o(B)$ on a $\lim\limits_{m\to\infty} \Big\|\hat{b} - \sum\limits_{1\leq n\leq m} \hat{b}(n)\,e_n\Big\|_{S(B)} = 0$. Il existe donc une suite $(f_m)_{m\geq 1}$ d'éléments de B^+ telle que $\lim\limits_{m\to\infty} \|f_m\| = 0$ et $\hat{b}(n) \leq \hat{f}_m(n)$ pour $n > m$. Alors $f_m - b + \sum\limits_{1\leq n\leq m} \hat{b}(n)x_n \in B^+$ pour $m \geq 1$, et pour tout $b' \in B'^+$, $\langle f_m - b + \sum\limits_{1\leq n\leq m} \hat{b}(n)\,x_n, b'\rangle \geq 0$. Or $\lim\limits_{m\to\infty} \langle f_m,b'\rangle = 0$ et $\lim\limits_{m\to\infty} \langle \sum\limits_{1\leq n\leq m} \hat{b}(n)x_n, b'\rangle = \sum\limits_{1\leq n\leq m} \hat{b}(n)\,\hat{b}'(n)$, donc $\langle b,b'\rangle \geq \sum\limits_{n\geq 1} \hat{b}(n)\,\hat{b}'(n)$, ce qui conclut la démonstration.

Par la suite, nous aurons l'occasion d'utiliser le renforcement suivant de la condition (4) :

(5) Tout $b \in B^+$ est limite d'une suite $(P_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{P} \cap B^+$ telle que $b - P_n \in B^+$ pour $n \geq 1$.

Mais dans beaucoup d'exemples, les conditions (4) ou (5) sont conséquence de la propriété plus forte suivante.

DEFINITION 4. Un espace de Banach vérifiant (1) et (2) possède une approximation de l'identité si :

(6) Il existe une suite $(u_k)_{k\geq 1}$ d'éléments de $\mathbb{C}^N$ à support fini satisfaisant $0 \leq u_k(n) \leq 1$ pour $k \geq 1$ et $n \geq 1$ et telle que pour tout $b \in B$, $\lim_{k\to\infty} \left\| b - \sum_{n\geq 1} u_k(n) \langle b, y_n \rangle x_n \right\| = 0$.

III. ENONCES ET DEMONSTRATIONS.

THEOREME 1. Soit B un espace de Banach vérifiant les conditions (1), (2), (3) et (4). Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) B a la propriété du majorant

(ii) B' a la propriété du minorant.

Démonstration. Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Si $s' = (s'_n)_{n\geq 1} \in S(B')$, il existe $\theta' \in B'$ tel que $|s'_n| \leq \hat{\theta}'(n)$ pour $n \geq 1$. D'après (i) et la remarque 1 il existe K tel que pour tout $\delta > 0$ et tout $b \in B$, il existe $\theta \in B^+$ satisfaisant $|\hat{b}(n)| \leq \hat{\theta}(n)$ pour $n \geq 1$ et $\|\theta\| \leq K(1+\delta)\|b\|$. D'après la proposition 1, $\sum_{n\geq 1} \hat{\theta}(n)\hat{\theta}'(n) \leq \theta'(\theta)$ et $\sum_{n\geq 1} |\hat{b}(n) s'_n| \leq \sum_{n\geq 1} \hat{\theta}(n)\hat{\theta}'(n) \leq K(1+\delta)\|\theta\| \|\theta'\|$. On conclut que $s' \in \hat{B}'$ et $\|s'\|_{\hat{B}'} \leq K\|s'\|_{S(B')}$.

Montrons l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i). Si (ii) est vérifiée, d'après la remarque (2) il existe K' tel que pour tout $s' \in S(B')$, $\|s'\|_{\hat{B}'} \leq K'\|s'\|_{S(B')}$. Considérons d'abord $b \in \mathcal{P}$, $b \neq 0$, et montrons que $\hat{b} \in S(B)$. Posons

$$\mathcal{C} = \left\{ b' \in B'^{+} \ ; \ \sum_{n\geq 1} |\hat{b}(n)|\, \hat{b}'(n) \geq 1 \right\}.$$

Alors $\mathcal{C}$ est un cône convexe de B' fermé pour la topologie $\sigma(B',B)$. Evaluons $\|b'\|$ lorsque $b'\in\mathcal{C}$. Pour $n \geq 1$, posons $\varepsilon_n = |\hat{b}(n)|(\hat{b}(n))^{-1}$ si $\hat{b}(n) \neq 0$, $\varepsilon_n = 1$ sinon. Si $b'\in\mathcal{C}$, $1 \leq \sum_{n\geq 1} |\hat{b}(n)|\,\hat{b}'(n) = \sum_{n\geq 1} \hat{b}(n)\, \varepsilon_n \hat{b}'(n) \leq \|b\|\, \|\varepsilon \hat{b}'\|_{\hat{B}'}$ $\leq K\, \|b\|\, \|\hat{b}'\|_{S(B')} \leq K\|b\|\,\|b'\|$ et $\|b'\| \geq (K\|b\|)^{-1}$.

On en déduit que pour tout $\delta > 0$, $\mathcal{C}$ est disjoint de la boule fermée B'_δ de centre l'origine et rayon $((1+\delta)K\|b\|)^{-1}$ de B', qui est compacte pour la topologie $\sigma(B',B)$. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe $\theta_o\in B$ tel que

$$1 = \inf_{b'\in\mathcal{C}} \operatorname{Re}\langle \theta_o, b'\rangle > \sup_{b'\in B'_\delta} \operatorname{Re}\langle \theta_o, b'\rangle = \sup_{b'\in B'_\delta} |\langle \theta_o, b'\rangle|$$

où pour $z\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z$ désigne la partie réelle de z. On a donc $\|\theta_o\| \leq (1+\delta)\, K\|b\|$ et $\operatorname{Re}\langle \theta_o, b'\rangle \geq 1$ pour $b'\in\mathcal{C}$. En particulier, si $n \geq 1$ et $\hat{b}(n) \neq 0$, $|\hat{b}(n)|^{-1} y_n \in \mathcal{C}$ donc $\operatorname{Re} \hat{\theta}_o(n) \geq |\hat{b}(n)|$. Si $n \geq 1$ et $\hat{b}(n) = 0$, soit n_o tel que $\hat{b}(n_o) \neq 0$; alors pour tout $t \geq 0$, $t\, y_n + |\hat{b}(n_o)|^{-1} y_{n_o} \in \mathcal{C}$, donc $t \operatorname{Re} \hat{\theta}_o(n) + |\hat{b}(n_o)|^{-1} \operatorname{Re} \hat{\theta}_o(n_o) \geq 1$ pour $t \geq 0$ et on en déduit que $\operatorname{Re} \hat{\theta}_o(n) \geq 0$. D'après la condition (3), $\theta = (\theta_o + \check{\theta}_o)/2 \in B$, $\|\theta\| \leq (1+\delta)\, K\|b\|$ et $\hat{\theta}(n) \geq |\hat{b}(n)|$ pour $n \geq 1$.

Soit maintenant $b\in B$ quelconque. Il existe une suite $(b_k)_{k\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{P}$ telle que $b = \sum_{k\geq 1} b_k$ et $\sum_{k\geq 1} \|b_k\| \leq (1+\delta)\|b\|$. D'après ce qui précède, il existe une suite $(\theta_k)_{k\geq 1}$ d'éléments de B^+ normalement convergente telle que si $\theta = \sum_{k\geq 1} \theta_k$, alors $\|\theta\| \leq \sum_{k\geq 1} \|\theta_k\| \leq (1+\delta)^2 K\, \|b\|$ et $\hat{\theta}(n) \geq |\hat{b}(n)|$ pour $n \geq 1$. Ceci montre que $\hat{B} \subset S(B)$ et que $\|\hat{b}\|_{S(B)} \leq K\|b\|$ pour tout $b\in B$, ce qui achève la démonstration.

REMARQUE 3. La condition (3) (resp. (4)) n'intervient pas pour l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) (resp. (ii) $\Longrightarrow$ (i)). D'autre part, il résulte de la démonstration que les normes des inclusions $\hat{B} \subset S(B)$ et $S(B') \subset \hat{B}'$ sont les mêmes.

COROLLAIRE 1. Soit G un groupe abélien compact et métrisable.

(i) ([4], [1], [6]) L'espace $L^p(G)$ a la propriété du majorant relativement à la suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ des caractères de G lorsque $p = 2k/2k-1$, k entier positif.

(ii) Soit $\varphi_q(x) = |x|(1+\mathrm{Log}(1+|x|))^{1/q}$ pour x réel positif. L'espace d'Orliz $L^{\varphi_q}(G)$ a la propriété du majorant (relativement à $(\gamma_n)_{n\geq 1}$).

Démonstration. Il est immédiat que $L^p(G)$, $p \geq 1$, et $L^{\varphi_q}(G)$ possèdent les propriétés (1) à (4). $L^{2k}(G)$, k entier positif, a la propriété du minorant [4], ainsi que le dual de $L^{\varphi_q}(G)$ (lemme 4.6 de [8]).

THEOREME 2. Soit B un espace de Banach vérifiant les conditions (1), (2), (3) et (4). Alors $S(B')$ s'identifie isométriquement au dual de $S_o(B)$, le sous-espace de $S(B)$ engendré par c_{oo}. Pour $s \in S_o(B)$ et $s' \in S(B')$ on a

$$(s,s') = \sum_{n\geq 1} s_n s'_n \quad \text{où} \quad \sum_{n\geq 1} |s_n s'_n| < \infty.$$

Démonstration. L'inclusion $S(B') \subset S_o(B))'$ se vérifie facilement, comme dans l'implication i) $\Longrightarrow$ ii) du théorème 1 ainsi que l'inégalité $\|s\|_{(S_o(B))'} \leq \|s\|_{S(B')}$ pour $s \in S(B')$ et l'égalité donnant (s,s').

L'inclusion réciproque se démontre de façon analogue à celle de l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) du théorème 1, à l'aide d'un théorème de séparation appliqué cette fois dans B muni de sa norme. Soit $\varphi \in (S_o(B))'$, définissons $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ par $|\varphi(e_n)|(\varphi(e_n))^{-1}$ si $\varphi(e_n) \neq 0$, $\varepsilon_n = 1$ sinon. Notons $b = \{b \in \mathcal{P} \cap B^+ , \sum_{n\geq 1} |\varphi(e_n)|\hat{b}(n) \geq 1\}$. Alors $\mathcal{C}$ est un cône convexe disjoint de la boule ouverte de rayon $\|\varphi\|^{-1}_{(S_o(B))'}$ de B. Le théorème de Hahn-Banach permet de conclure qu'il existe $b' \in B'$, $\|b'\| \leq \|\varphi\|_{(S_o(B))'}$ tel que $|\varphi(e_n)| \leq \hat{b}'(n)$ pour $n \geq 1$. C'est dire que $(\varphi(e_n))_{n\geq 1} \in S(B')$ et $\|(\varphi(e_n))_{n\geq 1}\|_{S(B')} \leq \|\varphi\|_{(S_o(B))'}$, ce qui achève la démonstration. On remarquera que la condition (4) n'intervient pas dans cette preuve.

REMARQUE 4. Dans le cas où B est réflexif et de plus pour tous $b \in B$ et $b' \in B'^+$, $\langle \check{b} , b' \rangle = \overline{\langle b,b' \rangle}$, on peut préciser la démonstration précédente de façon à obtenir des informations sur l'ensemble $\{n\geq 1 \; ; \; \hat\theta(n) = |\hat b(n)|\}$, comme dans le cas où $B = L^p(G)$, $p\geq 1$ [1]. En effet, soit $b \in \mathcal{P}$, $b \neq 0$. Soit $\mathcal{C} = \{b'\in B'^{+},\ \Sigma |\hat b(n)| \hat b'(n) \geq 1\}$ et $b'_1 \in \mathcal{C}$ tel que $\|b'_1\| = \inf_{b'\in\mathcal{C}} \|b'\| \geq (K\|b\|)^{-1}$. Soit B'_1 la boule ouverte de rayon $\|b'_1\|$ et centre l'origine de B', alors $B'_1 \cap \mathcal{C} = \emptyset$ et $\overline{B'_1} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$. Le théorème de Hahn-Banach permet d'exhiber $\theta_o \in B$ tel que

$$1 = \inf_{b'\in\mathcal{C}} \mathrm{Re}\langle \theta_o, b'\rangle = \sup_{b'\in B'_1} \mathrm{Re}\langle\theta_o,b'\rangle = \sup_{b'\in B'_1} |\langle\theta_o,b'\rangle| \quad \text{et} \quad \mathrm{Re}\langle\theta_o,b'_1\rangle = 1.$$

Si on pose $\theta = (\theta_o + \check\theta_o)/2$, on a $\|\theta\| \leq K\|b\|$, $\hat\theta(n) \geq |\hat b(n)|$ pour $n\geq 1$ et

$$\sum_{n\geq 1} |\hat b(n)| \hat b'_1(n) \geq 1 = \mathrm{Re}\langle\theta_o,b'_1\rangle = \frac{\langle\theta_o,b'_1\rangle + \overline{\langle\theta_o,b'_1\rangle}}{2} = \langle\theta,b'_1\rangle \geq \sum_{n\geq 1} \hat\theta(n)\hat b'_1(n).$$

On conclut que $\hat\theta(n) = |\hat b(n)|$ pour tout n tel que $\hat b'_1(n) \neq 0$.

REMARQUE 5. On peut démontrer l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i) du théorème 1 à partir du théorème 2, si l'on remarque que l'inclusion $(S_o(B))' \subset \widehat{B'}$ entraîne que $\hat B \subset S_o(B)$ (lemme 2 de [6]).

Notons que si l'espace de Banach B vérifie les conditions (1) et (5) alors $S(B) = S_o(B)$. La condition (a) du corollaire qui suit éclaire la condition exigée dans [6] pour l'obtention du théorème 1.

COROLLAIRE 2. <u>Soit</u> B <u>un espace de Banach vérifiant les conditions</u> (1), (2), (3) <u>et</u> (4).

(a) $S(B') = S(B)'$ <u>si et seulement si</u> $S(B) = S_o(B)$.

(b) <u>Si</u> B <u>est le dual du sous-espace fermé</u> B'_o <u>de</u> B' <u>engendré par</u> $\{y_n \; ; \; n\geq 1\}$ <u>alors</u> $S(B)$ <u>est le dual de</u> $S_o(B'_o)$.

(c) <u>Si</u> B <u>est réflexif et</u> B <u>et</u> B' <u>satisfont la condition</u> (5), <u>alors</u> $S(B)$ <u>est réflexif</u>.

<u>Démonstration</u>. (a) et (b) sont des conséquences immédiates du théorème 2. (c) Si B et B' satisfont (5), $S(B) = S_o(B)$ et $S(B') = S_o(B')$. Si B est réflexif, $B' = B'_o$ et B' satisfait aussi aux conditions (1), (2), (3) et (4). D'après le théorème 2 on a alors $S(B) = (S(B'))' = (S(B)')'$.

La plupart des exemples connus d'espaces de Banach ayant la propriété du majorant s'inscrivent dans le cadre d'analyse harmonique suivant.

THEOREME 3. Soient G un groupe abélien compact et métrisable et $\hat{G}$ son dual. Soit B un espace de Banach sur lequel G opère isométriquement. On suppose qu'il existe $\Lambda = \left\{\gamma_n, n\geq 1\right\} \subset \hat{G}$ et deux injections $i : \Lambda \longrightarrow B$ et $i' : \Lambda \longrightarrow B'$ telles que B vérifie les conditions (1), (2) et (3), relativement à $(y_n)_{n\geq 1} = (i'(\gamma_n))_{n\geq 1}$ et $(x_n)_{n\geq 1} = (i(\gamma_n))_{n\geq 1}$. Les conditions suivantes sont alors équivalentes :

(i) B a la propriété du majorant

(ii) B' a la propriété du minorant

(iii) Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $P' \in B'^{+} \in \mathcal{P}'$ et pour toute suite $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ telle que $|\varepsilon_n| = 1$ pour $n \geq 1$, $\left\|\sum_{n\geq 1} \varepsilon_n \hat{P}'(n)\, y_n\right\| \leq C\|P'\|$.

Démonstration. D'après le théorème 1, (ii) $\Longrightarrow$ (i), et pour avoir l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii), il suffit que B vérifie la condition (4). Or, B vérifie la condition plus forte (6). En effet, il existe une suite $(\varphi_k)_{k\geq 1}$ d'éléments de $L^1(G)$ de norme 1 telle que les transformées de Fourier $\hat{\varphi}_k$ vérifient les conditions suivantes : $0 \leq \hat{\varphi}_k \leq 1$, $\hat{\varphi}_k$ à support fini et $\lim_{k\to\infty} \hat{\varphi}_k(\gamma) = 1$ pour $k \geq 1$ et $\gamma \in \hat{G}$ [9]. Comme G opère isométriquement sur B, alors $(\hat{\varphi}_k)_{k\geq 1}$ définit une approximation de l'identité dans B (définition 4). De plus, pour $b \in B$ et $b' \in B'$, $\|\hat{b}\, \hat{\varphi}_k\|_{j(B)} \leq \|b\|$ et $\|\hat{b}'\, \varphi_k\|_{j'(B')} \leq \|b'\|$ pour $k \geq 1$.

L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (iii) est triviale. Montrons que (iii) $\Longrightarrow$ (ii). Soit $b' \in B'^{+}$, alors $(\hat{b}'\, \hat{\varphi}_k)_{k\geq 1}$ a pour limite $\hat{b}'$ pour la topologie $\sigma(\hat{B}', \hat{B})$ et $\|\hat{b}'\varphi_k\|_{\hat{B}'} \leq \|b'\|$ pour $k \geq 1$. Puisque pour toute suite $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ telle que $|\varepsilon_n| = 1$ pour $n \geq 1$, $\|\varepsilon\, \hat{b}'\, \varphi_k\|_{\hat{B}'} \leq C\|b'\|$ pour $k \geq 1$, la suite $(\varepsilon\, \hat{b}'\, \hat{\varphi}_k)_{k\geq 1}$ a une valeur d'adhérence dans $\hat{B}'$ pour la topologie $\sigma(\hat{B}', \hat{B})$ qui est $\varepsilon\, \hat{b}'$. Il existe donc $c \in B'$ tel que $\hat{c}(n) = \varepsilon_n \hat{b}'(n)$ pour $n \geq 1$. Toute suite $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ de nombres complexes vérifiant $|\varepsilon_n| \leq 1$ pour $n \geq 1$ étant un barycentre de suites de nombres complexes de module 1, on conclut que (ii) est vérifiée.

Pour $1 \leq p < \infty$ et $\Lambda \subset \hat{G}$, $L^p_\Lambda(G) = \{f \in L^p(G),\ \hat{f}(\gamma) = 0 \text{ pour } \gamma \in \hat{G} \setminus \Lambda\}$ et $L^p(G)/L^p{}_\Lambda(G)$ sont des exemples d'espaces de Banach B satisfaisant aux hypothèses du théorème 3.

Soit T le groupe $\mathbb{R}/2\pi z$. Il est bien connu que $S(L^1(T)) = c_o(z)$, lorsque $(y_n)_{n\geq 1}$ est la suite des caractères de T. Soit $B = H^1 = L^1_{Z^+}(T) = \{f \in L^1(T)\ ;\ \hat{f}(n) = 0$ si $n < 0\}$. Alors si $(x_n)_{n\geq 1} = (e^{i(n-1)t})_{n\geq 1}$, H^1 a la propriété du majorant [2]. Si on note Z^- l'ensemble des entiers strictement négatifs, le dual B' de H^1 est $L^\infty(T)/L^\infty_{Z^-}(T)$ et H^1 est le dual de $B'_o = C(T)/C_{Z^-}(T)$. Que peut-on dire de l'espace $S(H^1)$?

THEOREME 4. L'espace $S(H^1)$ est un dual séparable non réflexif.

Démonstration. Il résulte du corollaire 2 que $S(H^1)$ est séparable, est le dual de $S(B'_o)$ et a pour dual $S(B')$. Comme H^1 a la propriété du majorant, B' a la propriété du minorant et d'après la remarque 2, les normes induites sur $\hat{B}'^+$ par $\hat{B}'$ et $S(B')$ sont équivalentes. Pour montrer que $S(B'_o) \neq S(B')$ il suffit de montrer que $B'^+_o \neq B'^+$. Soit F définie sur T par $F(e^{it}) = 2i \sum_1^\infty \frac{\sin nt}{n}$, cette fonction est dans $L^\infty(T)$ et $\hat{F}(n) \geq 0$ pour $n \geq 0$. Vérifions que son image dans B' ne peut être dans B'_o. Pour tout $N \geq 1$, soit $D_N(e^{it}) = \sum_0^N e^{int}$. On sait que $\lim_{N\to\infty} \|D_N\|_1/\log N = 4\pi^{-2}$ et que la suite $(\|D_N\|_1^{-1} D_N)_{N\geq 1}$ tend vers zéro pour la topologie $\sigma(H^1, B'_o)$. Par ailleurs $\lim_{N\to\infty} \langle F, \|D_N\|^{-1} D_N \rangle = \frac{\pi^2}{4}$, ce qui achève la démonstration.

REMARQUE 6. Lorsqu'un espace de Banach B vérifiant les conditions (1) et (2) a la propriété du majorant, l'espace $S(B')$ peut être décrit comme un espace de multiplicateurs entre des espaces de Banach convenables. Cette identification et des exemples d'espaces de Banach ayant la propriété du majorant seront étudiés dans l'exposé no. 7 qui suit.

Bibliographie

[1] BACHELIS, G. P. On the upper and lower majorant properties in $L^p(G)$. Quat. J. Math. Oxford (2), 24 (1973), 119-128.

[2] DECHAMPS-GONDIM, M., LUST-PIQUARD, F. et QUEFFELEC, H. La propriété du majorant dans les espaces de Banach. A paraître.

[3] DUREN, P. L. Theory of H^p spaces. Acad. Press (1970), Ch. 6.

[4] HARDY, G. H. and LITTLEWOOD, J. E. Notes on the theory of series (XIX). A problem concerning majorants of Fourier series. Quart. J. Math. Oxford 6 (1935), 304-315.

[5] LINDENSTRAUSS, J., TZAFRIRI, L. Classical Banach spaces I. Springer-Verlag 1977.

[6] OBERLIN, D. M. The majorant problem for sequence spaces. Quart. J. Math. Oxford (2) 27 (1976), 227-240.

[7] PIQUARD, F. Enveloppes inconditionnelles d'espaces de Banach. Exposé no. 7. Anal. Harm. Publ. Math. d'Orsay 1980-81.

[8] PISIER, G. De nouvelles caractérisations des ensembles de Sidon. Advances in Math. (supp. studies) (1981).

[9] RUDIN, W. Fourier analysis on groups. Inters. Publ., N. Y., 1962.

Exposé no. 6
Françoise Lust-Piquard Année 1980-81

ENVELOPPE INCONDITIONNELLE D'UN ESPACE DE BANACH ET FACTORISATION DE MULTIPLICATEURS.

Résumé. Le but de cet exposé est de relier entre eux certains résultats connus en analyse harmonique, en montrant qu'ils se rattachent à un même problème. Dans une première partie, nous énonçons des résultats préliminaires sur les multiplicateurs entre espaces de Banach. Dans la deuxième partie, nous formulons les problèmes de factorisation et donnons quelques résultats. Dans la troisième partie, nous nous plaçons dans le cadre de l'analyse harmonique. Enfin dans la quatrième nous donnons des exemples, c'est la partie principale.

I. DEFINITIONS ET PRELIMINAIRES SUR LES MULTIPLICATEURS.

Ces résultats font partie du folklore de l'analyse harmonique, mais il est plus simple de les démontrer que de chercher trop de références !

Nous travaillons dans le même cadre qu'à l'exposé no. 5 de [16].

Tous les espaces de Banach considérés sont des espaces sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

DEFINITION I.1. Soient B un espace de Banach, $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite dans B. Nous dirons que $(B,(x_n))$ vérifie $\mathscr{C}$ si

(1) il existe dans le dual B' une suite $(y_n)_{n\geq 1}$ biorthogonale à $(x_n)_{n\geq 1}$

(2) si $b\in B$ et $\langle b,y_n\rangle = 0$ pour tout n, alors $b = 0$

si $b'\in B'$ et $\langle b',x_n\rangle = 0$ pour tout n, alors $b' = 0$.

Notons j l'injection canonique de B dans l'espace des suites complexes $\mathbb{C}^{N}$ définie par

$$b \in B \rightsquigarrow (\langle b , y_n \rangle)_{n\geq 1}$$

et j' l'injection canonique de B' dans $\mathbb{C}^{N}$ définie par

$$b' \in B' \rightsquigarrow (\langle x_n , b' \rangle)_{n\geq 1}.$$

Les espaces $j(B)$ et $j'(B')$ seront munis des normes de B et B' respectivement.

Notons B'_o le sous-espace fermé de B' engendré par $(y_n)_{n\geq 1}$, et $\tilde{B}$ son dual.

Alors B'_o vérifie (1) et (2) relativement à (y_n) et (x_n).

Désignons par c_{oo} l'espace des suites complexes à support fini

c_o l'espace des suites complexes tendant vers 0, muni de la norme $\|(\alpha_n)\| = \sup_{n\geq 1} |\alpha_n|$

ℓ^{∞} l'espace des suites complexes bornées, muni de la norme $\|(\alpha_n)\| = \sup_{n\geq 1} |\alpha_n|$

ℓ^1 l'espace des suites complexes $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ telles que $\sum_{n\geq 1} |\alpha_n| < +\infty$, muni de la norme $\|(\alpha_n)\| = \sum_{n\geq 1} |\alpha_n|$.

DEFINITION I.2. On dira qu'un espace de Banach F est un espace de suites s'il est inclus dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ au sens ensembliste et si les projections (1_n) sur les coordonnées sont des formes linéaires continues $(1_n(k) = \delta_{n,k}$ pour tous $n,k \in \mathbb{N})$.

DEFINITION I.3. Soient E , F deux espaces de suites. Un multiplicateur de E dans F est une suite $\alpha = (\alpha_n)_{n\geq 1}$ telle que

$$\forall\, e = (e_n)_{n\geq 1} \in E \qquad \alpha e = (\alpha_n e_n)_{n\geq 1} \in F.$$

REMARQUE I.1. Un tel multiplicateur est continu, d'après le théorème du graphe fermé. L'opérateur transposé d'un multiplicateur de E dans F est un multiplicateur de F'_o dans E'_o, sous-espaces fermés de F' et E' respectivement, engendrés par c_{oo}.

Notons $\mathfrak{M}(E,F)$ l'espace des multiplicateurs de E dans F, muni de la norme d'opérateur, $\mathfrak{M}_c(E,F)$ le sous-espace des opérateurs compacts, $\mathfrak{M}_{fc}(E,F)$ le sous-espace des opérateurs faiblement compacts.

PROPOSITION I.1. <u>Soient</u> E, F <u>deux espaces de suites</u>, <u>vérifiant</u> $\mathcal{C}$ <u>relativement à la suite</u> (1_n). <u>Alors</u> $\mathfrak{M}(E,F) = \mathfrak{M}(F',E')$.

Démonstration. Par hypothèse, E' et F' sont aussi des espaces de suites, c_{oo} est dense dans E et F. D'après la remarque I.1, la transposition des opérateurs définit une isométrie de $\mathfrak{M}(F',E')$ dans $\mathfrak{M}(E,F)$. Inversement, la transposition des opérateurs définit une isométrie de $\mathfrak{M}(E,F)$ dans $\mathfrak{M}(F',E')$.

Si $(B,(x_n))$ vérifie $\mathcal{C}$ et si F est un espace de suites, nous noterons pour simplifier $\mathfrak{M}(B,F)$ au lieu de $\mathfrak{M}(j(B),F)$; $\mathfrak{M}(F,B')$ au lieu de $\mathfrak{M}(F,j(B'))$ etc...

De la proposition I.1 et de la remarque I.1 nous déduisons le

COROLLAIRE I.1. <u>Soit</u> $(B,(x_n))$ <u>vérifiant</u> $\mathcal{C}$. <u>Les espaces suivants sont égaux</u> :

$$\mathfrak{M}(c_o,B') = \mathfrak{M}(B,\ell^1) = \mathfrak{M}(\ell^\infty,B')$$
$$\mathfrak{M}(c_o,B') = \mathfrak{M}(c_o,B'_o) = \mathfrak{M}(\tilde{B},\ell^1).$$

<u>Ils sont inclus dans</u> $j'(B')$.

PROPOSITION I.2. (i) <u>Soit</u> $(B,(x_n))$ <u>vérifiant</u> $\mathcal{C}$. <u>Les espaces suivants sont égaux</u> : $\mathfrak{M}_{fc}(c_o,B) = \mathfrak{M}_c(c_o,B) = \mathfrak{M}(\ell^\infty,B)$. <u>Ils sont inclus dans</u> $j(B)$.

(ii) <u>Ils coïncident avec le sous-espace fermé de</u> $\mathfrak{M}(c_o,B)$ <u>engendré par</u> c_{oo}.

Démonstration. (i) Les multiplicateurs faiblement compacts de B' dans ℓ^1 sont compacts puisque toute partie $\sigma(\ell^1,\ell^\infty)$ compacte de ℓ^1 est compacte ; par transposition tout multiplicateur faiblement compact de c_o dans B est compact, ce qui donne la première égalité.

Il est clair que tout multiplicateur faiblement compact de c_o dans B est un multiplicateur de ℓ^∞ dans B. Réciproquement soit $\alpha \in \mathfrak{M}(\ell^\infty,B)$ et supposons que son transposé ${}^t\alpha$ appartienne à $\mathfrak{M}(B', \ell^1)$. Alors ${}^t\alpha$ est continu pour les topologies $\sigma(B',B)$ et $\sigma(\ell^1, \ell^\infty)$ donc est faiblement compact. Il en est de même pour α. Il reste à vérifier que ${}^t\alpha \in \mathfrak{M}(B', \ell^1)$. Comme B'_o est dense dans B' pour $\sigma(B',B)$, il existe pour tout $b' \in B'$ une suite $(b'_k)_{k\geq 1}$ telle que $j(b'_k)$ soit dans c_{oo} pour tout k et telle que

$$b'_k \longrightarrow b' \quad \text{pour} \quad \sigma(B',B).$$

Pour toute $f \in \ell^\infty$, et tout $b' \in B'$

$$\langle \alpha f , b' \rangle = \lim_{k\to+\infty} \langle \alpha f , b'_k \rangle = \lim_{k\to+\infty} \langle f , {}^t\alpha(b'_k) \rangle .$$

La suite ${}^t\alpha(b'_k)$ est dans ℓ^1 d'après la remarque I.1, elle est de Cauchy pour $\sigma(\ell^1, \ell^\infty)$, donc elle converge en norme dans ℓ^1, nécessairement vers ${}^t\alpha(b')$.

(ii) Comme $\mathfrak{M}_c(c_o,B) = \mathfrak{M}_c(B', \ell^1)$, il suffit de montrer que c'est le sous-espace fermé de $\mathfrak{M}(B', \ell^1)$ engendré par c_{oo}. Cela résulte du fait que pour tout compact K dans ℓ^1 et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que

$$\forall\, k \geq N \qquad \forall\, f = (f_n) \in K \; \|f - f\, 1_{[1\ k]}\|_{\ell^1} \leq \varepsilon$$

(où $f\, 1_{[1,k]}(n) = f_n$ si $k \geq n$

$= 0$ si $k < n$).

DEFINITION I.4. Soit $\mathfrak{J}$ la classe des espaces de suites E, vérifiant

(i) c_{oo} est dense dans E

(ii) pour tout $t = (t_n)_{n\geq 1} \in \ell^\infty$ et tout $\alpha = (\alpha_n)_{n\geq 1} \in c_{oo}$,

$$\|(t_n\, \alpha_n)\|_E \leq \sup_n |t_n| \, \|(\alpha_n)\|_E .$$

Les conditions (i) et (ii) signifient que la suite canonique (1_n) est une base inconditionnelle de E avec constante 1.

Notons que si E est dans la classe $\mathfrak{J}$, on a l'égalité $E = \mathfrak{M}(\ell^\infty, E)$, et d'après la proposition I.2, $\mathfrak{M}(\ell^\infty, E) = \mathfrak{M}_c(c_o, E)$.

PROPOSITION I.3. Soit $(B,(x_n))$ vérifiant $\mathcal{C}$. Alors l'espace $\mathfrak{M}(c_o, B')$ est le dual d'un espace E de la classe $\mathfrak{J}$. L'espace E admet les trois descriptions suivantes :

(i) E est l'ensemble des suites $g = (g_n)_{n\geq 1}$ pour lesquelles il existe des suites $(b_k)_{k\geq 1}$ dans B et $(\varepsilon_k)_{k\geq 1}$ dans c_o, telles que $\sum_{k\geq 1} \|b_k\| \, \|\varepsilon_k\| < +\infty$ et telles que, pour tout n, $g_n = \sum_{k\geq 1} \langle b_k , y_n \rangle \, \varepsilon_k(n)$. L'espace E est muni de la norme $\|g\| = \inf \sum_{k\geq 1} \|b_k\| \, \|\varepsilon_k\|$, l'infimum étant pris sur toutes les représentations de g de cette forme.

(ii) on peut remplacer c_o par ℓ^∞ dans la description de E.

(iii) on peut remplacer B par $\widetilde{B}$ dans la description de E.

Notons qu'on ne peut pas en général remplacer simultanément c_o par ℓ^∞ et B par $\widetilde{B}$!

Démonstration. D'après [14] l'espace d'opérateurs $\mathcal{L}(c_o, j'(B'))$ est le dual de l'espace $j(B) \hat{\otimes} c_o$ défini de la façon suivante :

un opérateur x de ℓ^1 dans $j(B)$ est dans $j(B) \hat{\otimes} c_o$ s'il existe des suites (b_k) dans B et (ε_k) dans c_o telles que $\sum_{k\geq 1} \|b_k\| \, \|\varepsilon_k\| < +\infty$ et telles que $\forall f \in \ell^1$ $x(f) = \sum_{k\geq 1} j(b_k) \langle \varepsilon_k, f \rangle$ dans $j(B)$ ou encore telles que

$\forall n \ \forall m \quad \langle x(1_n) , 1_m \rangle = \sum_{k\geq 1} \langle b_k, y_m \rangle \, \varepsilon_k(n)$. Alors $\|x\|_{j(B)} = \inf \sum_{k\geq 1} \|b_k\| \, \|\varepsilon_k\|$, l'infimum étant pris sur toutes les représentations de x de cette forme.

L'espace $\mathfrak{M}(c_o , B')$ est fermé dans $\mathcal{L}(c_o , j'(B'))$ pour la norme et pour la topologie de la convergence simple sur $j(B) \hat{\otimes} c_o$. Cette topologie coïncide d'ailleurs sur les parties bornées de $\mathfrak{M}(c_o , j'(B'))$ avec la topologie produit de $\mathbb{C}^N$.

L'espace $\mathfrak{M}(c_o , j'(B'))$ est donc le dual d'un quotient de $j(B) \hat{\otimes} c_o$, que nous appellerons E, défini comme dans l'énoncé (i) de la proposition. Il est clair sur cette définition que E est dans la classe $\mathfrak{J}$.

Pour obtenir (ii) et (iii) on procède de façon analogue en utilisant l'égalité du corollaire I.1, $\mathcal{M}(c_o,B') = \mathcal{M}(\ell^\infty,B') = \mathcal{M}(\widetilde{B}, \ell^1)$. L'espace $\mathcal{L}(\ell^\infty,j'(B'))$ est le dual de $j(B)\hat{\otimes}\ell^\infty$, espace défini comme précédemment en remplaçant c_o par ℓ^∞. $\mathcal{M}(\ell^\infty,j'(B'))$ est fermé dans $\mathcal{L}(\ell^\infty,j'(B'))$ pour la topologie de la convergence simple sur $j(B)\hat{\otimes}\ell^\infty$. C'est le dual d'un quotient E_1 de $j(B)\hat{\otimes}\ell^\infty$, défini de façon analogue à E. L'espace c_{oo} est dense dans E et E_1, E et E_1 ont le même dual, donc ils coïncident.

De même $\mathcal{L}(j(\widetilde{B}),\ell^1)$ est le dual de $j(\widetilde{B})\hat{\otimes} c_o$, $\mathcal{M}(\widetilde{B},\ell^1)$ en est un sous-espace fermé pour la topologie de la convergence simple sur $j(\widetilde{B})\hat{\otimes} c_o$.

DEFINITION I.5. Soit $(B,(x_n))$ vérifiant $\mathcal{C}$. L'espace B est dit <u>auto-adjoint (relativement à</u> $(x_n),(y_n))$ si pour tout $b\in B$ il existe $\check{b}\in B$, de même norme que b, tel que $j(b) = j(\check{b})$.

DEFINITION I.6. Soit $(B,(x_n))$ vérifiant $\mathcal{C}$. L'espace B a <u>une approximation de l'identité (relativement à</u> $(x_n),(y_n))$ s'il existe une suite $(u_k)_{k\geq 1}$ dans $\mathcal{M}(j(B),j(B))$ telle que $u_k\in c_{oo}$, $\|u_k\|\leq 1$ pour tout k, et pour tout $b\in B$ $\|u_k\, j(b) - j(b)\| \longrightarrow 0$ si $k \longrightarrow +\infty$.

Il est facile de voir que si B a une approximation de l'identité, alors B est un sous-espace fermé de $\widetilde{B}$.

Nous terminons la première partie avec le résultat suivant (l'idée de la démonstration se trouve dans [3]) :

PROPOSITION I.4. <u>Soit</u> B <u>un espace de suites tel que</u> $(B,(1_n))$ <u>vérifie</u>

(i) <u>Soit</u> $f = (f_n)\in B'$; <u>supposons que pour tout choix de signe</u> $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\geq 1} = (\pm 1)$ <u>l'élément</u> $f\varepsilon = (f_n\,\varepsilon_n)$ <u>soit dans</u> B'. <u>Alors pour tout</u> $c = (c_n)\in\ell^\infty$, <u>l'élément</u> $fc = (f_n\, c_n)$ <u>appartient à</u> B'. (<u>Autrement dit</u>, f <u>est dans</u> $\mathcal{M}(\ell^\infty,B')$).

(ii) <u>on peut dans (i) remplacer</u> B' <u>par</u> B'_o.

(iii) <u>on peut dans (i) remplacer</u> B' <u>par</u> B, <u>si</u> B <u>admet une approximation de l'identité</u>.

Démonstration. (i) Soit $f \in B'$. S'il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\forall\, \varepsilon \in \{-1,1\}^N \qquad \|f\varepsilon\|_{B'} \leq K$$

il est évident que f définit un multiplicateur de ℓ^∞ dans B', de norme $\leq 2K$, parce que la boule unité de l'espace $\ell^\infty_{\mathbf{R}}$ des suites réelles bornées est l'adhérence pour la norme de l'enveloppe convexe des suites $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\geq 1}$, et que $\ell^\infty = \ell^\infty_{\mathbf{R}} + i\,\ell^\infty_{\mathbf{R}}$. L'existence de la constante K se démontre à l'aide du théorème de Baire : l'ensemble $\{f\varepsilon\}_{\varepsilon\in\{-1,1\}^{\mathbf{N}}}$ est compact dans $\mathbf{C}^N$ muni de la topologie produit ; par hypothèse, il est inclus dans la réunion des boules de rayon N de B' $(N \in \mathbf{N})$, qui sont compactes pour la topologie de $\mathbf{C}^N$. D'après le théorème de Baire, il existe $N_o \in \mathbf{N}$ tel que la boule de rayon N_o de B' contienne un ouvert non vide $\mathcal{O}$ de $\{f\varepsilon\}$; donc il existe $\varepsilon^o \in \{-1,1\}^{\mathbf{N}}$ et un ensemble fini $A \subset \mathbf{N}$ tel que si $\varepsilon \in \{-1,1\}^{\mathbf{N}}$ vérifie $\varepsilon_n = \varepsilon_n^o$ pour tout $n \in A$, alors $\|f\varepsilon\|_{B'} \leq N_o$. Alors si $\varepsilon = \{-1,1\}^{\mathbf{N}}$,
$f\varepsilon = \sum_{n\in A} f_n(\varepsilon_n - \varepsilon_n^o)\, 1_n + g$ où g est dans $\mathcal{O}$, donc

$$\|f\varepsilon\|_{B'} \leq 2 \sum_{n\in A} |f_n|\, \|1_n\|_{B'} + N_o = K.$$

(ii) est évident, à partir de la démonstration de (i).

(iii) découle de (ii) en remplaçant B' par $\tilde{B}$ et B'_o par B, puisque B est alors le sous-espace fermé de $\tilde{B}$ engendré par c_{oo}.

II. LE PROBLEME : FACTORISATION DE MULTIPLICATEURS ; NOTION D'ENVELOPPE INCONDITIONNELLE.

A. Soit $(B,(x_n))$ vérifiant $\mathcal{C}$.

Le premier problème est le suivant : quel est l'espace $H \in \mathfrak{J}$, inclus dans $j(B)$, tel que, pour tout Banach F de la classe $\mathfrak{J}$, tout multiplicateur de F dans $j(B)$ soit en fait un multiplicateur de même norme de F dans H ? Nous appellerons H le sous-espace inconditionnel de B (relativement à (x_n)), nous prouverons au théorème I.1 sont existence et son unicité. L'espace H apparaît aussi comme le plus gros espace de la classe $\mathfrak{J}$ inclus dans $j(B)$. En effet, si F est dans la classe $\mathfrak{J}$ et inclus dans $j(B)$, l'identité est un multiplicateur de F dans $j(B)$, donc de F dans H.

Le deuxième problème est le problème dual : quel est l'espace $E \in \mathfrak{J}$, contenant $j(B)$, tel que, pour tout Banach F de la classe $\mathfrak{J}$, tout multiplicateur de $j(B)$ dans F se prolonge en un multiplicateur de même norme de E dans F ? Nous appellerons E l'enveloppe inconditionnelle de B (relativement à (x_n)), nous prouverons au theorème II.1 son existence et son unicité. L'espace E apparaît aussi comme le plus petit espace de la classe $\mathfrak{J}$ contenant $j(B)$. En effet, si F est dans la classe $\mathfrak{J}$ et contient $j(B)$, l'identité est un multiplicateur de $j(B)$ dans F, donc de E dans F.

Nous établirons ensuite des relations entre certaines propriétés de B et de son enveloppe E. Il restera à déterminer E de façon plus explicite quand on connaît B, ce qui sera fait pour certains cas dans la quatrième partie.

THEOREME II.1. Soit $(B,(x_n))$ vérifiant $\mathcal{C}$.

(i) le sous-espace inconditionnel H de B s'identifie à l'espace $\mathfrak{M}_c(c_o,B)$.

(ii) soit E l'enveloppe inconditionnelle de B. Son dual E' est l'espace $\mathfrak{M}(c_o,B')$. E est l'espace des suites $\left\{g = (g_n)_{n\geq 1} = \left(\sum_{k\geq 1} \langle b_k,y_n\rangle\, \varepsilon_k(n)\right)_{n\geq 1} \;\middle|\; \sum \|b_k\|_B \|\varepsilon_k\|_{c_o} < +\infty\right\}$ muni de la norme $\inf \sum_{k\geq 1} \|b_k\| \|\varepsilon_k\|$, l'infimum étant pris sur toutes les représentations de g de cette forme.

Démonstration. (i) Soient $F \in \mathfrak{J}$, $\alpha \in \mathfrak{M}(F,B)$, $f \in F$. Alors αf est un multiplicateur de c_o dans B, avec $\|\alpha f\|_{\mathfrak{M}(c_o,B)} \leq \|\alpha\|_{\mathfrak{M}(F,B)} \|f\|_F$. Comme f est adhérent à c_{oo}, il en est de même pour αf. D'après la proposition I2, αf est dans $\mathfrak{M}_c(c_o,B) = \mathfrak{M}(\ell^\infty,B)$; en particulier $\|\alpha f\|_{\mathfrak{M}(c_o,B)} = \|\alpha f\|_{j(B)}$. L'espace $H = \mathfrak{M}_c(c_o,B)$ est dans la classe $\mathfrak{J}$, la norme de α dans $\mathfrak{M}(F,H)$ est égale à sa norme dans $\mathfrak{M}(F,B)$. Enfin en posant $F = H$, l'identité est dans $\mathfrak{M}(H,B)$, elle ne peut se factoriser que par H. L'espace H vérifie les propriétés demandées.

(ii) Soit $F \in \mathfrak{J}$. D'après la proposition I.1, $\mathfrak{M}(B,F) = \mathfrak{M}(F',B')$. Tout multiplicateur de F' dans B' envoie en fait F' dans $\mathfrak{M}(c_o,B')$, donc envoie E, le prédual de $\mathfrak{M}(c_o,B')$ défini à la proposition I.3, dans F. On vérifie facilement que E a les propriétés imposées à l'enveloppe inconditionnelle de B.

B. Lorsque l'enveloppe inconditionnelle de B est déterminée, on peut se demander si la propriété suivante est réalisée.

DEFINITION II.1. Soient $(B,(x_n))$ vérifiant $\mathcal{C}$, E son enveloppe inconditionnelle. L'espace B a <u>la propriété</u> K s'il existe une constante $C > 0$ vérifiant : pour tout $g = (g_n) \in E$, il existe $b \in B$ avec $\|b\|_B \leq C\|g\|_E$ et $\varepsilon \in \ell^\infty$ avec $\|\varepsilon\| \leq 1$ tels que

$$\forall\, n \geq 1 \qquad g_n = \langle b\ ,\ y_n \rangle \varepsilon_n .$$

(En d'autres termes, tout élément de E s'écrit à l'aide d'un seul atome).

Nous verrons des exemples dans la quatrième partie.

La propriété K est vérifiée en particulier lorsque B a la propriété du majorant relativement à (x_n), (y_n), propriété étudiée dans l'exposé no. 5 de [16]. Rappelons la définition.

DEFINITION II.2. Soit $(B,(x_n))$ vérifiant $\mathscr{C}$. L'espace B a la <u>propriété du majorant</u> (relativement à $(x_n),(y_n)$) si pour tout $b \in B$ il existe $\theta \in B$ tel que

$$\forall\, n \geq 1 \qquad |\langle b\ ,\ y_n \rangle| \leq \langle \theta\ , y_n \rangle .$$

Si B a la propriété du majorant, il existe en outre une constante C telle que $\|\theta\| \leq C\|b\|$. (exposé no. 5 de [16]). Alors tout $g = (g_n) \in E$ vérifie $\forall\, n \geq 1$, $|g_n| = |\sum_{n\geq 1} \langle b_k, y_n \rangle\, \varepsilon_k(n)| \leq \sum_{k\geq 1} \langle \theta_k, y_n \rangle \|\varepsilon_k\|$, avec $\sum_{k\geq 1} \|\theta_k\|\|\varepsilon_k\| \leq C \sum_{k\geq 1} \|b_k\|\,\|\varepsilon_k\|$.

En posant $\theta = \sum_{k\geq 1} \theta_k \|\varepsilon_k\|$, qui est dans B, on obtient $g_n = \langle \theta\ , y_n \rangle C_n$ pour tout n, avec $\|(C_n)\|_{\ell^\infty} \leq 1$.

C. <u>Relations entre des propriétés de</u> B <u>et de son enveloppe inconditionnelle</u>.

Rappelons [9] que pour un espace E de la classe $\mathfrak{J}$ les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) E n'a pas de sous-espace fermé isomorphe à c_o

(ii) E est faiblement séquentiellement complet

(iii) E est isomorphe à un espace dual

(iv) E est le dual de E'_o

(v) E'_o n'a pas de sous-espace fermé isomorphe à ℓ^1

(vi) E'_o a un dual séparable.

Quand l'enveloppe inconditionnelle E de B possède-t-elle ces propriétés ? D'après le théorème II.1, le dual de E est $\mathcal{M}(c_o,B') = \mathcal{M}(c_o,B'_o)$. D'après la proposition I.2 appliquée à B'_o au lieu de B, $E'_o = \mathcal{M}_c(c_o,B'_o) = \mathcal{M}_c(c_o,B')$.

PROPOSITION II.1. <u>Soit</u> $(B,(x_n))$ <u>vérifiant</u> $\mathcal{C}$. <u>L'enveloppe inconditionnelle</u> E <u>est isomorphe à un dual si et seulement si elle contient</u> $j(\widetilde{B})$; <u>dans ce cas</u> E <u>est</u> <u>le dual de</u> $\mathcal{M}_c(c_o,B')$.

Démonstration. L'équivalence entre (iii) et (iv) ci-dessus signifie que E est isomorphe à un dual si et seulement si E est le dual de $\mathcal{M}_c(c_o,B'_o)$. Supposons que E est le dual de $\mathcal{M}_c(c_o,B'_o)$. D'après la proposition I.2, $\mathcal{M}_c(c_o,B'_o)$ est inclus dans $j'(B'_o)$. Par dualité $j(\widetilde{B})$ est inclus dans E. Réciproquement, supposons que E contient $j(\widetilde{B})$ et vérifions la condition (v) ci-dessus. Pour cela, il suffit de vérifier que de toute suite bornée $(u_k)_{k\geq 1}$ dans $\mathcal{M}_c(c_o,B'_o)$ on peut extraire une suite de Cauchy faible. Or $\mathcal{M}_c(c_o,B'_o) = \mathcal{M}_c(\ell^\infty,B'_o)$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{L}_c(\ell^\infty,B'_o)$, lui-même sous-espace fermé de l'espace des fonctions continues sur $B_1(\ell^\infty)\times B_1(j(B))$, muni de la topologie produit de $\sigma(\ell^\infty,\ell^1)$ et $\sigma(j(\widetilde{B}),j'(B'_o))$. Une suite $(v_k)_{k\geq 1}$ bornée dans $\mathcal{M}_c(\ell^\infty,B'_o)$ est donc de Cauchy faible si et seulement si $(\langle v_k(\varepsilon),j(f)\rangle)_{k\geq 1} = (\langle v_k(1),\varepsilon j(f)\rangle)_{k\geq 1}$ converge pour tout $\varepsilon\in\ell^\infty$ et tout $f\in\widetilde{B}$. Par hypothèse $\varepsilon j(f)$ est dans E, qui est séparable et en dualité avec $\mathcal{M}_c(\ell^\infty,B'_o)$. De toute suite bornée $(u_k)_{k\geq 1}$ dans $\mathcal{M}_c(\ell^\infty,B'_o)$ on peut extraire une suite convergeant sur E, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE II.1. <u>Soit</u> $(B,(x_n))$ <u>vérifiant</u> $\mathcal{C}$. <u>Si</u> $B=\widetilde{B}$, <u>l'enveloppe inconditionnelle de</u> B <u>est le dual de</u> $\mathcal{M}_c(c_o,B')$.

COROLLAIRE II.2. <u>Soit</u> $(B,(x_n))$ <u>vérifiant</u> $\mathcal{C}$. <u>Si</u> B <u>est réflexif</u>, <u>l'enveloppe inconditionnelle</u> E <u>de</u> B <u>est réflexive</u>.

Démonstration. Si B est réflexif, $B=\widetilde{B}$, donc E est le dual de $\mathcal{M}_c(c_o,B')$ et a pour dual $\mathcal{M}(c_o,B')$. Mais ici $\mathcal{M}(c_o,B') = \mathcal{M}_{fc}(c_o,B'_o) = \mathcal{M}_c(c_o,B'_o)$ d'après la proposition I.2.

Par contre, nous verrons dans la quatrième partie des exemples où E est réflexif sans que B le soit.

Bien entendu, si E est réflexif, on a $\mathfrak{M}_c(c_o, B') = \mathfrak{M}(c_o, B')$. La réciproque est fausse:

Soit $\mathbf{T}$ le groupe compact abélien $R/2\pi\mathbf{Z}$, muni de sa mesure de Haar. Soit $B = L^1(\mathbf{T})$ muni de la suite des caractères $(e^{int})_{n\in\mathbf{Z}}$. Alors il est bien connu (nous le reverrons dans la quatrième partie) que $\ell^1 = \mathfrak{M}(L^1(\mathbf{T}), \ell^1) = \mathfrak{M}(c_o, L^\infty(\mathbf{T}) = \mathfrak{M}_c(c_o, L^\infty(\mathbf{T}))$. L'enveloppe inconditionnelle de $L^1(\mathbf{T})$ est c_o, elle n'est pas réflexive.

PROPOSITION II.2. <u>Soit</u> $(B,(x_n))$ <u>vérifiant</u> $\mathcal{C}$. <u>Si</u> B'_o <u>n'a pas de sous-espace fermé isomorphe à</u> c_o, <u>alors</u> $\mathfrak{M}_c(c_o, B'_o) = \mathfrak{M}(c_o, B'_o)$.

Démonstration. Supposons qu'il existe un multiplicateur non compact α de c_o dans B'_o. Il existe donc une suite bornée (f_k), de Cauchy pour $\sigma(c_o, \ell^1)$, telle que (αf_k) ne soit pas de Cauchy dans B'_o. Selon un procédé standard, on construit une nouvelle suite (φ_k) dans c_o, chaque φ_k étant différence d'éléments de la suite (f_k), telle que (φ_k) converge vers 0 pour $\sigma(c_o, \ell^1)$, et telle que $(\alpha\,\varphi_k)$ ne soit pas de Cauchy dans B'_o. De la suite (φ_k) on peut extraire une sous suite $(\varphi_{k'})$ équivalente à la base canonique de c_o, dont l'image $(\alpha\,\varphi_{k'})$ est équivalente à la base canonique de c_o dans B'_o.

III. Tous les exemples que nous allons donner se situeront dans le cadre de l'analyse harmonique. Dans ce qui suit, G désigne un groupe abélien compact, métrisable, Γ son dual, $\Lambda = (\gamma_1, \ldots \gamma_n \ldots)$ une partie de Γ, Λ^c son complémentaire dans Γ.

Les notations $L^1(G)$, $L^\infty(G)$, $C(G)$, $M(G)$, $L^p(G)$ $(1 < p < \infty)$ ont le même sens que dans l'exposé no. 5 de [16]. Nous reprenons ici une définition de l'exposé no. 5 de [16] en l'explicitant un peu plus.

DEFINITION III.1. Soient G un groupe abélien compact métrisable, $\Lambda = (\gamma_1 \dots \gamma_n \dots)$ une partie de son dual Γ. Nous dirons qu'un espace de Banach B <u>appartient à</u> $\mathcal{B}_\Lambda(G)$ si

(i) il existe des injections $i : \Lambda \to B$, $i' : \Lambda \to B'$ telles que B vérifie $\mathcal{C}$ relativement à $(x_n) = (i(\gamma_n))$ et $(y_n) = (i'(\gamma_n))$.

(ii) le groupe G opère isométriquement sur B, de façon que

$$\forall \gamma_n \in \Lambda \quad \forall g \in G \qquad [i(\gamma_n)]_g = \gamma_n(-g)\, i(\gamma_n) = \langle \delta_g, \gamma_n \rangle i(\gamma_n)$$

si $\Lambda = \Gamma$ et si B contient (γ_n), l'application j de la première partie est la transformation de Fourier (si $b \in B$, $\langle b, y_n \rangle = \int_G b\, \check{\gamma}_n\, dg$ pour tout n).

D'après la condition (ii), à tout $g \in G$ est associé un multiplicateur $\alpha_g = (\langle \delta_g, \gamma_n \rangle)_{n \geq 1}$ de $j(B)$ dans $j(B)$, et ce multiplicateur est une isométrie. Notons $j^{-1} \alpha_g\, j(b) = b_g$ pour tout $b \in B$ et tout $g \in G$.

Comme $(i(\gamma_n))$ engendre B, pour tout $b \in B$, l'application

$$g \rightsquigarrow b_g$$

est continue de G dans B. Donc $\{b_g\}_{g \in G}$ est compact dans B. Son enveloppe convexe est relativement compacte dans B. Toute mesure ν positive, de norme 1, à support fini sur G définit un opérateur sur B de norme ≤ 1. Si $\nu = \sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i \delta_{g_i}$, posons $b_\nu = \sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i b_{g_i}$, pour tout $b \in B$; b_ν est dans $\mathrm{Conv}(b_g)_{g \in G}$. De plus $\langle b_\nu, i'(\gamma_n) \rangle = \langle \nu, \gamma_n \rangle \langle b, i'(\gamma_n) \rangle$ pour tout $\gamma_n \in \Lambda$. Si une suite (ν_k) de telles mesures est de Cauchy pour $\sigma(M(G), C(G))$, b_{ν_k} est de Cauchy dans B. Toute mesure positive μ de norme $1 \in M(G)$ définit donc un opérateur sur B de norme ≤ 1, tel que $\langle b_\mu, i(\gamma_n) \rangle = \langle \mu, \gamma_n \rangle \langle b, i'(\gamma_n) \rangle$ pour tout $\gamma_n \in \Lambda$. De plus pour toute suite bornée (μ_k) de mesures positives sur G, convergeant vers μ pour $\sigma(M(G), C(G))$, pour tout $b \in B$, b_{μ_k} converge en norme vers b_μ.

En particulier, soit (φ_k) une approximation de l'identité dans $L^1(G)$, c'est-à-dire une suite de fonctions positives de norme 1 dans $L^1(G)$, telles que $j(\varphi_k) \in c_{oo}$, convergeant vers δ_o pour $\sigma(M(G), C(G))$. Alors $((\langle \varphi_k, \gamma_n \rangle)_{n \geq 1})_{k \geq 1}$ est une approximation de l'identité pour B, relativement à $(i(\gamma_n))$.

Dans le cadre des espaces de $\mathcal{B}_\Lambda(G)$, vérifions qu'on a l'identification habituelle entre convoluteurs et multiplicateurs.

Soient $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_\Lambda(G)$. Un opérateur linéaire de B_1 dans B_2 est un convoluteur s'il commute à l'action de G, c'est-à-dire si

$$\forall\, g\in B \quad \forall b\in B\ , \quad T(b_g) = (T(b))_g .$$

A tout multiplicateur $\alpha = (\alpha_n)$ de $j_1(B_1)$ dans $j_2(B_2)$ est associé un opérateur linéaire $T = j_2^{-1}\, \alpha j_1$ de B_1 dans B_2 qui est un convoluteur de même norme. En effet $\forall\, g\in G \quad \forall\, \gamma_n\in\Lambda \quad T(i_1(\gamma_n))_g) = \langle \gamma_n, g\rangle\ \alpha_n\, i_2(\gamma_n) = (T(i_1(\gamma_n)))_g$.

Réciproquement à tout convoluteur T de B_1 dans B_2 est associé un multiplicateur. En effet,

$$\forall\, g\in G \quad \forall\, \gamma_n\in\Lambda \qquad T((i_1(\gamma_n))_g) = \langle \gamma_n, g\rangle T(i_1(\gamma_n)) = \left\{T(i_1(\gamma_n))\right\}_g$$

$$\forall\, \gamma_k\in\Lambda \qquad \langle \gamma_n, g\rangle \langle T(i_1(\gamma_n)), i_2'(\gamma_k)\rangle = \langle \gamma_k, g\rangle \langle T(i_1(\gamma_n), i_2'(\gamma_k)\rangle .$$

Il en résulte que $\langle T(i_1(\gamma_n)), i_2'(\gamma_k)\rangle$ est nul si $n\neq k$, donc que $T(i_1(\gamma_n))$ est proportionnel à $i_2(\gamma_n)$ pour tout $\gamma_n\in\Lambda$.

Nous noterons $CV(B_1, B_2)$ l'espace des convoluteurs de B_1 dans B_2. Si $B\in\mathcal{B}_\Gamma(G)$, si Λ est une partie de Γ, nous noterons B_Λ le sous-espace fermé de B engendré par $\left\{i(\gamma)\right\}_{\gamma\in\Lambda}$.

DEFINITION III.2. Soit B un Banach dans $\mathcal{B}_\Lambda(G)$. C'est une algèbre si pour tout $b\in B$ $j(b)$ est un multiplicateur de $j(B)$, de norme inférieure ou égale à celle de b dans B.

Nous avons vu que toute fonction $\varphi\in L^1(G)$ définit un multiplicateur de $j(B)$, ne dépendant que de l'image de φ dans l'espace quotient $L^1(G)/L^1_{\Lambda^c}(G)$. Dès que $j(B)$ est inclus dans l'image par j de cet espace, B est une algèbre.

IV. Dans les principaux exemples de la quatrième partie, B sera sous espace fermé ou espace quotient de $L^p(G)$ $(1\le p\le\infty)$ ou de certains espaces d'Orlicz. Les applications i ou i' seront respectivement l'identité et la restriction aux caractères de Λ de l'application quotient. Nous écrirons "γ" au lieu de "$i(\gamma)$" ou "$i'(\gamma)$".

Nous aborderons trois types de problèmes.

1. Dans quels cas l'enveloppe inconditionnelle de B est-elle canoniquement isomorphe à un espace naturel de la classe $\mathcal{J}$, comme c_o, ℓ^2 ?

2. Dans les autres cas nous chercherons des propriétés de l'enveloppe inconditionnelle, du type : est-ce un dual ? est-ce un espace réflexif ?

3. L'enveloppe inconditionnelle est-elle incluse dans un espace naturel de la classe $\mathcal{J}$, comme c_o, ℓ^p $(1 \leq p < \infty)$?

Dans les paragraphes A et B, nous traiterons du premier problème. Dans le paragraphe C, nous aborderons les trois problèmes pour les espaces $B = C_\Lambda(G)$.

A. THEOREME IV.1. Soit B un Banach de $\mathcal{B}_\Lambda(G)$. On suppose que B est une algèbre et que B est autoadjoint. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) L'enveloppe inconditionnelle E de B est canoniquement isomorphe à c_o.

(ii) $\mathfrak{M}(B, \ell^1)$ est canoniquement isomorphe à ℓ^1

(iii) $\mathfrak{M}(B, \ell^2)$ est canoniquement isomorphe à ℓ^2

(iv) il existe $m \in B$ tel que $\langle m, i'(\gamma_n)\rangle \geq 1$ pour tout $\gamma_n \in \Lambda$.

Si ces conditions sont vérifiées, B a la propriété du majorant.

Les principales idées de la démonstration sont dans [8], pour le cas où $B = L^1_\Lambda(G)$ avec $\mathfrak{M}(L^1_\Lambda, \ell^2)$ canoniquement isomorphe à ℓ^2. Notons le lien entre cette démonstration et celle du théorème 1 de l'exposé no. 5 de [16].

Démonstration : (i)$\Longleftrightarrow$(ii) provient du théorème II.1 et de l'égalité $\mathfrak{M}(b, \ell^1) = \mathfrak{M}(c_o, B')$.

(i) $\Longrightarrow$ (iii) : d'après la définition de E et l'hypothèse,

$\mathfrak{M}(B, \ell^2) = \mathfrak{M}(E, \ell^2)$ est canoniquement isomorphe à $\mathfrak{M}(c_o, \ell^2) = \ell^2$.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) : première étape : montrons que si $b' \in B'$, si $j'(b')$ est positif ou nul, alors $j'(b')$ est dans ℓ^1.

Soit $c = (c_n) \in c_{oo}$. Comme B est une algèbre, $\|(c_n^2)\|_{j(B)} \leq \|(c_n)\|^2_{j(B)}$.
Soit $d = (d_n) \in \mathbb{C}^N$ tel que $d_n^2 = \langle b', i(\gamma_n)\rangle$ pour tout $\gamma_n \in \Lambda$. Alors

$0 \leq \sum_{n\geq 1} \langle b', i(\gamma_n)\rangle c_n^2 = \sum_{n\geq 1} d_n^2 c_n^2 \leq \|b'\| \, \|(c_n)\|_{j(B)}^2$ donc $d \in \mathcal{M}(B, \ell^2)$, avec $\|d\|_{\mathcal{M}(B,\ell^2)} \leq \|b'\|^{1/2}$. Par hypothèse il existe une constante K telle que $\|d\|_{\ell^2} \leq K\|d\|_{\mathcal{M}(B,\ell^2)} \leq K\|b'\|^{1/2}$. Donc $j'(b') = (d_n^2)_{n\geq 1}$ est dans ℓ^1, avec $\|(d_n^2)\|_{\ell^1} \leq K^2\|b'\|$.

Deuxième étape. Il faut exhiber m. Considérons la fonction $1 = (1_n) \in \ell^\infty$ et le convexe $C = \left\{c = (c_n) \in c_{oo} \,\middle|\, \langle c, 1\rangle = \sum_{n\geq 1} c_n \geq 1 \; ; \; c_n \geq 0 \;\; \forall n\right\}$ dont la distance à l'origine dans ℓ^1 est 1. D'après ce qui précède, C est l'image par j' d'un convexe C_1 dans B'_o, dont la distance à l'origine dans B'_o est $\geq \frac{1}{K^2}$. D'après le théorème de Hahn Banach, il existe $\tilde{m} \in \tilde{B}$ tel que $\|\tilde{m}\|_{\tilde{B}} \leq K^2$ et tel que $\mathrm{Re}\langle \tilde{m}, b'\rangle \geq 1$ pour tout $b' \in C_1$; en particulier $\mathrm{Re}\langle \tilde{m}, i'(\gamma_n)\rangle \geq 1$ pour tout $\gamma_n \in \Lambda$. Comme B, donc $\tilde{B}$, est auto-adjoint, $m = \frac{1}{2}(\tilde{m} + \check{\tilde{m}})$ répond à la question.

(iv) $\Longrightarrow$ (ii). Soit $\alpha \in \mathcal{M}(B, \ell^1) = \mathcal{M}(\tilde{B}, \ell^1)$ (d'après le corollaire I.1). Alors αm est dans ℓ^1, donc α est dans ℓ^1.

Si ces conditions sont réalisées, montrons que B a la propriété du majorant : d'après la condition (i), il existe une constante K telle que pour tout $b \in B$ $\sup_n |\langle b, i'(\gamma_n)\rangle| \leq K\|j(B)\|_E \leq K\|b\|$. Soit (φ_k) une approximation de l'identité dans $L^1(G)$. Si $j(b) \in c_{oo}$ et si k est assez grand, $|j(b)|$ est majoré par $2 \sup_n |\langle b, i'(\gamma_n)\rangle| \times j(\varphi_k)$, donc, d'après la condition (iv) par $2K\|b\| \times j(\varphi_k) \times j(m)$. L'élément $\theta = m_{\varphi_k}$ est dans B avec $\|\theta\| \leq \|m\|_{\tilde{B}}$. Si b est un élément quelconque de B, il s'écrit $b = \sum_{k\geq} b_k$ avec $j(b_k) \in c_{oo}$ pour tout k, et la série convergeant normalement dans B. En majorant les $j(b_k)$ nous obtenons un majorant pour $j(b)$.

<u>Applications</u>. <u>Exemples d'espaces dont l'enveloppe inconditionnelle est canoniquement isomorphe à</u> c_o.

. $B = L^1(G)$: la condition (iv) est vérifiée par $m = \delta_o \in M(G) = \tilde{B}$. Seule intervient la partie facile de la démonstration du théorème 1. L'égalité $\mathcal{M}(\ell^\infty, L^\infty(G)) = \ell^1$ de la condition (ii) est due à [5].

. $B = L^1(G)/L^1_{\Lambda^c}(G)$ pour tout $\Lambda \subset \Gamma$: la condition (iv) est vérifiée par l'image de $\tilde{\delta}_o$ dans $M(G)/M_{\Lambda^c}(G) = \tilde{B}$.

. $B = L^1_\Lambda(G)$ s'il vérifie la condition (iv) ; dans ce cas $\tilde{B} = M_\Lambda(G)$.

DEFINITION IV.1 [8] Une partie Λ de Γ est un <u>ensemble de quasi-Cohen</u> s'il existe $m \in M_\Lambda(G)$ telle que $\langle m, \gamma_n \rangle \geq 1$ pour tout $\gamma_n \in \Lambda$.

<u>Exemples d'espaces dont l'enveloppe inconditionnelle n'est pas canoniquement isomorphe à</u> c_o.

. $B = H^1(\mathbf{T}) = L^1_{\mathbf{Z}^+}(\mathbf{T})$: en effet $H^1(\mathbf{T})$ est le dual de $C(T)/C_{\mathbf{Z}^-}(\mathbf{T})$, son enveloppe inconditionnelle est un dual, d'après le corollaire II.1.

Cependant $H^1(\mathbf{T})$ a la propriété du majorant (exposé no. 5 de [16]).

. $B = L \log L(G)$: la condition (iii) n'est pas vérifiée d'après [12], nous en reparlerons au paragraphe C.

Pour tout $\Lambda \subset \Gamma$, l'espace $L^1_\Lambda(G)$ peut s'interpréter comme l'algèbre des convoluteurs compacts de $L^1(G)/L^1_{\Lambda^c}(G)$ dans $L^1_\Lambda(G)$. Le théorème IV.1 suggère de s'intéresser à l'algèbre B des convoluteurs compacts de $L^p(G)/L^p_{\Lambda^c}(G)$ dans $L^p_\Lambda(G)$ pour $1 < p < 2$. L'espace $\tilde{B}$ est alors l'espace $CV(L^p(G)/L^p_{\Lambda^c}, L^p_\Lambda(G))$. Quels sont les ensembles $\Lambda \subset \Gamma$ tels que la condition (iv) soit vérifiée ? Il y en a d'autres que les quasi-Cohen ; en effet si $G = \mathbf{T}$ et $\Lambda = \mathbf{Z}^+$, la transformée de Hilbert répond à la question.

B. Considérons maintenant des cas où l'enveloppe inconditionnelle est canoniquement isomorphe à ℓ^2.

DEFINITION IV.2 [11]. Un espace de Banach B est <u>de type 2</u> s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall N \quad \forall b_1,\ldots,b_N \in B \quad \int_{\Omega=\{-1,1\}^N} \Big\| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n(\omega)\, b_n \Big\|_B \, d\omega \leq C \Big(\sum_{n=1}^{N} \|b_n\|^2 \Big)^{1/2}$$

où (ε_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes, prenant les valeurs ± 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$, et $d\omega$ la mesure de Haar de $\Omega = \{-1,1\}^{\mathbf{N}}$.

Un espace de Banach B est <u>de cotype</u> 2 s'il existe une constante $C > 0$

telle que $\forall\ n\ \ \forall\ b_1,\dots b_N \in B\quad (\sum_{n=1}^{N} \|b_n\|^2)^{1/2} \leq C \int_\Omega \| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n(\omega)\, b_n\|_B \, d\omega.$

D'après [11] si B' est de type 2, B est de cotype 2 ; d'autre part

$L^{p'}(G)$ est de type 2 pour $2 \leq p' < +\infty$, avec $C_{p'} = C\sqrt{p'}$

$L^{p}(G)$ est de cotype 2 pour $0 < p \leq 2$.

(Bien entendu si $0 < p < 1$, $L^p(G)$ n'est pas un Banach ; $\|f\|_{L^p(G)}$ désigne toujours $(\int_G |f|^p d\ )^{1/p}$, ce n'est plus une norme).

THEOREME IV.2. <u>Soit</u> B <u>un Banach appartenant à</u> $\mathcal{B}_\Lambda(G)$, <u>tel que</u> $j(B)$ <u>soit inclus dans</u> ℓ^2, <u>et tel que la suite</u> $(\|i(\gamma_n)\|_B)_{n\geq 1}$ <u>soit bornée par</u> M.

(i) <u>Si</u> B <u>est de type</u> 2, <u>son enveloppe inconditionnelle</u> E <u>est canoniquement isomorphe à</u> ℓ^2 ; <u>de plus</u> B <u>a la propriété</u> K, <u>sous la forme : il existe une constante</u> $C > 0$ <u>telle que pour tout</u> $a = (a_n) \in \ell^2$ <u>il existe</u> $f \in B$ <u>avec</u> $\|f\| \leq C\|a\|_{\ell^2}$ <u>et pour tout</u> $\gamma_n \in \Lambda$ $|a_n| = |\langle f\ ,\ i'(\gamma_n)\rangle|$.

(ii) <u>Si</u> B'_o <u>est de cotype</u> 2, <u>ou s'il existe un espace</u> D <u>de cotype</u> 2 <u>vérifiant</u> $\|\gamma_n\|_D \geq \varepsilon > 0$ <u>pour tout</u> $\gamma_n \in \Lambda$, <u>et un opérateur continu de</u> B'_o <u>dans</u> D <u>vérifiant</u> $T(i(\gamma_n)) = u_n\, \gamma_n$ <u>avec</u> $|u_n| \geq 1$ <u>pour tout</u> n, <u>l'enveloppe inconditionnelle de</u> B <u>est canoniquement isomorphe à</u> ℓ^2.

Démonstration. (i) Par hypothèse, si $a = (a_n) \in c_{oo}$,

$$\inf_{\omega \in \{\pm 1\}^N} \|\sum_1^N \varepsilon_n(\omega)\, a_n\, i(\gamma_n)\|_B \leq \int_\Omega \|\sum_{n=1}^N \varepsilon_n(\omega)\, a_n\, i(\gamma_n)\|_B \, d\omega \leq C(\sum_{n=1}^N |a_n|^2 \|i(\gamma_n)\|_B^2)^{1/2}$$

$$\leq CM\|a\|_{\ell^2}.$$

Donc il existe un choix de signes $\pm$, soit $(\varepsilon_n)_{1\leq n\leq N}$, tel que $f = \sum_{n=1}^N \varepsilon_n\, a_n\, i(\gamma_n)$ vérifie $\|f\|_B \leq CM\|a\|_{\ell^2}$.

Un élément quelconque $a = (a_n) \in \ell^2$ est somme d'une série normalement convergente dans ℓ^2 d'éléments de c_{oo}, à supports disjoints, $a = \sum_{k\geq 1} a_k$. L'élément $f = \sum_{k\geq 1} f_k$, où f_k est défini comme précédemment à partir de a_k répond à la question.

Ceci et l'hypothèse $j(B) \subset \ell^2$ prouvent que E est canoniquement isomorphe à ℓ^2.

(ii) Il suffit de montrer que $\mathfrak{M}(c_o, B')$ est canoniquement isomorphe à ℓ^2, et même qu'il est inclus dans ℓ^2. Soit $\alpha = (\alpha_n) \in \mathfrak{M}(c_o, B')$. Soient K la norme de T, et C la constante de cotype 2 pour D. Alors, pour tout N,

$$\|\alpha\| \geq \sup_{(\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^N} \Big\|\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n \alpha_n i'(\gamma_n)\Big\|_{B'} \geq \int_\Omega \Big\|\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n(\omega)\alpha_n i'(\gamma_n)\Big\|_{B'_o} d\omega$$

$$\geq \frac{1}{K}\int_\Omega \Big\|\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n(\omega)\alpha_n u_n \gamma_n\Big\|_D d\omega \geq \frac{1}{KC}\Big(\sum_{n=1}^{N} |\alpha_n|^2 |u_n|^2 \|\gamma_n\|_D^2\Big)^{1/2} \geq \frac{\varepsilon}{KC}\Big(\sum_{n=1}^{N} |\alpha_n|^2\Big)^{1/2},$$

ce qui achève la démonstration.

Notons que si B'_o est lui-même de cotype 2, nous pouvons prendre $\varepsilon = \frac{1}{M}$.

<u>Applications</u> : <u>les espaces suivants ont une enveloppe inconditionnelle canoniquement isomorphe à</u> ℓ^2 :

- $B = L^{p'}_\Lambda(G)$ si $2 \leq p' < +\infty$, si $\Lambda \subset \Gamma$: en effet cet espace est de type 2. En ce cas B a même la propriété K.
- $B = L^{p'}(G)/L^p_{\Lambda^c}$ si $2 \leq p' < +\infty$, si $\Lambda \subset \Gamma$: en effet cet espace a pour dual $L^p_\Lambda(G)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, qui est de cotype 2.
- $B = C(G)$, $B = C(G)/C_{\Lambda^c}(G)$ si $\Lambda \subset \Gamma$: en effet dans ce cas $B'_o = L^1_\Lambda(G)$ est de cotype 2. La première démonstration du fait que $\mathfrak{M}(\ell^\infty, L^p(G)) = \ell^2$ pour $1 \leq p < 2$ est dans [5].
- $B = C_\Lambda(G)$ si Λ est un ensemble quasi-Marcinkiewicz, au sens suivant :

DEFINITION IV.3 [8]. Un ensemble $\Lambda \subset \Gamma$ est <u>un quasi-Marcinkiewicz</u> s'il existe un opérateur continu T de $B'_o = L^1(G)/L^1_{\Lambda^c}(G)$ dans $D = L^p(G)$ pour p tel que $0 < p < 1$, vérifiant $T(i'(\gamma_n)) = u_n \gamma_n$ avec $|u_n| \geq 1$ pour tout $\gamma_n \in \Lambda$.

Ici D n'est pas un Banach, mais la démonstration du théorème IV (ii) reste valable.

La première démonstration du fait que $\mathfrak{M}(C_\Lambda(G), \ell^1) = \ell^2$ si Λ est un quasi-Marcinkiewicz est dans [8]. Un exemple est $\Lambda = \mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{Z}$.

$$B = U(\mathbf{T}) = \left\{ f \in C(\mathbf{T}) \;\middle|\; \Big\| f - \sum_{-N}^{+N} \hat{f}(n)\, e^{int} \Big\|_{C(\mathbf{T})} \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad N \longrightarrow +\infty \right\}$$

$$B = U^+(\mathbf{T}) = U_{Z^+}(\mathbf{T})$$

En effet l'application identité envoie $B'_o(T)$ dans $L^p(T)$ pour $0 < p < 1$ ([15] et exposé no. 4 de [16]).

En outre les espaces suivants ont la propriété K :

$B = C(G)$ [6] , $B = A(D) = C_{\mathbf{Z}^+}(\mathbf{T})$, $B = U^+(\mathbf{T})$ [7].

Ces résultats sont démontrés par une technique d'extrapolation. La méthode est exposée en détail dans l'exposé no. 4 de [15] pour le cas $B = U^+(\mathbf{T})$. En voici les idées, dans un cadre plus général : soient $B \in \mathcal{B}_\Lambda(G)$, E son enveloppe inconditionnelle, $F \in \mathcal{B}_\Lambda(G)$ un espace "intermédiaire" tel que l'identité soit continue de B dans F et de $j(F)$ dans E (si $B = U^+(\mathbf{T})$, $E = \ell^2$, $F = L^4(\mathbf{T})$). Supposons que F a la propriété K (l'enveloppe inconditionnelle de F est évidemment E) ; supposons aussi que F'_o est un "interpolé" entre B'_o et E'_o, au sens suivant : il existe une fonction $\varphi(x,y)$, définie sur $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$, croissante par rapport à chaque variable, telle que $\varphi(x, \frac{1}{x}) \to 0$ si $x \longrightarrow +\infty$, et telle que si $j(f) \in c_{oo}$,

$$\|f\|_{F'_o} \leq \varphi(\|f\|_{E'_o}, \|f\|_{B'_o}).$$

Alors, avec la méthode de [6] et [7], on peut montrer que B a la propriété K.

Si $B = L^p(G)$ avec $1 < p < 2$, le théorème IV.2 ne s'applique pas. L'enveloppe inconditionnelle E_p de $L^p(G)$ est un espace réflexif [1] d'après le corollaire II.2. D'après l'inégalité de Young, E_p est incluse dans $\ell^{p'}$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$, mais strictement. En effet soit $\Lambda \subset \Gamma$ un ensemble $\Lambda(p')$, c'est-à-dire tel que $L^{p'}_\Lambda(G)$ soit canoniquement isomorphe à $L^2_\Lambda(G)$. Alors $L^p_\Lambda(G)$ est complémenté dans $L^p(G)$ et canoniquement isomorphe à L^2_Λ. Donc $\mathfrak{M}(L^p_\Lambda(G), \ell^1)$ est canoniquement isomorphe à ℓ^2 et complémenté dans $\mathfrak{M}(L^p(G), \ell^1)$. Il est donc impossible que $\mathfrak{M}(L^p(G), \ell^1) = E'_p$ soit isomorphe à ℓ^p.

Par ailleurs nous avons vu que $L^{p'}(G)$ $(2 \leq p' < \infty)$ a la propriété K.

Il en est de même pour $L^1(G)$ et $L^p(G)$ si $\frac{1}{p} + \frac{1}{2k} = 1$ (k un entier positif), car ces espaces ont la propriété du majorant ([1] et exposé no. 5, de [16]). Le problème de savoir si $L^p(G)$ $(1 < p < 2,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{2k} \neq 1)$ a la propriété K relativement à E_p reste ouvert [1].

. Soit $B = A_p(G)$, le dual de l'espace des convoluteurs compacts de $L^p(G)$ (pour $1 < p < \infty$). Montrons que son enveloppe inconditionnelle E est le dual de $\mathfrak{M}_c(L^p(G), \ell^2)$: d'après le corollaire II.1, E est le dual de $\mathfrak{M}_c(c_o, \mathfrak{M}_c(j(L^p), j(L^p))$ $= \mathfrak{M}_c(j(L^p), \mathfrak{M}_c(c_o, j(L^p)))$. Comme l'enveloppe de $L^{p'}(G)$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$ est canoniquement isomorphe à ℓ^2, $\mathfrak{M}_c(c_o, j(L^p))$ l'est aussi.

C. Les espaces $B = C_\Lambda(G)$.

Nous avons déjà vu dans la section B que si $\Lambda = \Gamma$ ou si Λ est un quasi-Marcinkiewicz, l'enveloppe E de C_Λ est canoniquement isomorphe à ℓ^2. Si Λ est une partie quelconque de Γ, E est toujours incluse dans ℓ^2 et elle contient toujours ℓ^1. Rappelons que pour tout $\alpha = (\alpha_n) \in E' = \mathfrak{M}(c_o, L^1(G)/L^1_{\Lambda^c}(G)) =$ $\mathfrak{M}(\ell^\infty, M(G)/M_{\Lambda^c}(G)) = \mathfrak{M}(C_\Lambda(G), \ell^1)$, il existe $\mu \in M(G)$ telle que $\langle \mu, -\gamma_n \rangle = \alpha_n$ pour tout $\gamma_n \in \Lambda$.

PROPOSITION IV.1. (i) Un multiplicateur (α_n) de $C_\Lambda(G)$ dans ℓ^1 est compact si et seulement si pour tout $\varepsilon = (\varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^N$ il existe $\varphi \in L^1(G)$ telle que $\langle \varphi, \gamma_n \rangle = \alpha_n \varepsilon_n$ pour tout $\gamma_n \in \Lambda$.

(ii) Les espaces $\mathfrak{M}_c(C_\Lambda(G), \ell^1)$ et $\mathfrak{M}(C_\Lambda(G), \ell^1)$ coïncident si et seulement si pour tout $\alpha = (\alpha_n) \in \mathfrak{M}(C_\Lambda(G), \ell^1)$ il existe $\varphi \in L^1(G)$ telle que $\langle \varphi, \gamma_n \rangle = \alpha_n$ pour tout $\gamma_n \in \Lambda$.

Démonstration. (i) résulte des propositions I.2 et I.4, car $C_\Lambda(G)$ est autoadjoint. (ii) se déduit immédiatement de (i) en remarquant que si $(\alpha_n) \in \mathfrak{M}(C_\Lambda(G), \ell^1)$, et si $(\varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^N$, $(\alpha_n\, \varepsilon_n) \in \mathfrak{M}(C_\Lambda(G), \ell^1)$.

DEFINITION IV.4. Un ensemble $\Lambda \subset \Gamma$ est un ensemble de Riesz si

$L^1_\Lambda(G) = M_\Lambda(G)$. Par exemple si $G = \mathbf{T}$ et $\Lambda = \mathbf{Z}^+$, Λ est complémentaire d'un ensemble de Riesz, en même temps qu'un quasi-Marcinkiewicz. Dans le cas général où Λ^c est un ensemble de Riesz, nous ignorons si l'enveloppe de $C_\Lambda(G)$ est isomorphe à ℓ^2, et même si elle est réflexive.

Nous avons cependant

PROPOSITION IV.2. Si $\Lambda \subset \Gamma$ est complémentaire d'un ensemble de Riesz, tous les multiplicateurs de $C_\Lambda(G)$ dans ℓ^1 sont compacts.

Démonstration. Soit $\alpha = (\alpha_n) \in \mathfrak{M}(C_\Lambda(G), \ell^1)$. Il existe $\mu \in M(G)$ telle que $\langle \mu, \gamma_n \rangle = \alpha_n$ pour tout $\gamma_n \in \Lambda$, et μ se décompose en $\mu = \varphi + \mu_s$, où $\varphi \in L^1(G)$ et μ_s est singulière. D'après la proposition IV.1, il suffit de montrer que μ_s est nulle pour obtenir la proposition IV.2.

Supposons μ_s non nulle. Alors il existe un fermé $H \subset G$, de mesure de Haar nulle, et une fonction f continue sur H, nulle en dehors de H, telle que $\langle \mu_s, f \rangle$ ne soit pas nul. Comme Λ est complémentaire d'un ensemble de Riesz, f, qui est dans $M(G)'$, est aussi dans $(L^1_{\Lambda^c})^\perp = (M_{\Lambda^c})^\perp$, c'est-à-dire dans le sous-espace $C_\Lambda^{\perp\perp}(G)$ de $C''(G)$. Comme f est de première classe de Baire dans $C''(G)$, il existe d'après [10] une suite $(f_k) \in C_\Lambda(G)$ telle que $\|f_k\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ pour tout k, et $f_k \to f$ pour $\sigma(C_\Lambda^{\perp\perp}(G), M(G)/M_{\Lambda^c}(G))$. On peut même supposer que $j(f_k) \in c_{oo}$. Alors pour tout $\gamma_n \in \Lambda$, $\langle f_k, \gamma_n \rangle \to 0$ et $\langle f_k, \mu \rangle \longrightarrow \langle f, \mu \rangle = \langle f, \mu_s \rangle$ si $k \to +\infty$. La suite $(\alpha j(f_k))_{k\geq 1}$ est une suite dans ℓ^1, de Cauchy pour $\sigma(\ell^1, \ell^\infty)$, donc convergente pour la norme de ℓ^1. Soit $y = (y_n)$ sa limite. Pour tout $\gamma_n \in \Lambda$,

$y_n = \lim_{k \to +\infty} \alpha_n \langle f_k, \gamma_n \rangle = 0$. Or

$$\langle \alpha j(f_k), 1 \rangle = \sum_{n\geq 1} \alpha_n \langle f_k, \gamma_n \rangle = \sum_{n \geq 1} \langle \mu, \gamma_n \rangle \langle f_k, \gamma_n \rangle = \langle f_k, \mu \rangle \to \langle y, 1 \rangle = 0 = \langle f, \mu \rangle = \langle f, \mu_s \rangle$$

ce qui contredit l'hypothèse.

Nous avons jusqu'ici considéré des ensembles Λ relativement "gros". Que se passe-t-il pour des ensembles "minces" ? Le cas extrême est celui des ensembles de Sidon, c'est-à-dire des ensembles Λ tels que $C_\Lambda(G)$ soit canoniquement isomorphe à ℓ^1.

Bien que $C_\Lambda(G)$ ne soit jamais de type 2 lorsque Λ est infini (puisque Λ contient toujours un sous-ensemble Λ' de Sidon), la technique du théorème IV.2 peut s'appliquer. Nous rappelons maintenant des idées et résultats de [12] :

DEFINITION IV.5 [12]. Appelons $C^{ps}(G)$ l'espace

$$\left\{f\in L^2(G) \,\middle|\, \sup_{N\in\mathbb{N}} \int_{\Omega=\{-1,1\}^N} \left\|\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n(\omega)\langle f,\gamma_n\rangle\gamma_n\right\|_{C(G)} d\omega < +\infty\right\}$$

muni de la norme évidente.

Il est clair que $C^{ps}(G)\in \mathcal{B}_\Gamma(G)$ et que $j(C^{ps}(G))$ est dans la classe $\mathcal{J}$.

DEFINITION IV.6 [12]. Un ensemble $\Lambda\subset\Gamma$ est dit stationnaire si l'application identité est continue de $C_\Lambda(G)$ dans $C^{ps}(G)$.

Par exemple [12] si $\Lambda = \left\{3^{n_1}+5^{n_2} \,\middle|\, (n_1,n_2)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\right\}\subset\mathbb{Z}$, Λ est un ensemble stationnaire.

PROPOSITION IV.3. (i) Pour tout $\Lambda\subset\Gamma$, l'application j envoie $C^{ps}_\Lambda(G)$ dans l'enveloppe inconditionnelle de $C_\Lambda(G)$.

(ii) L'ensemble Λ est stationnaire si et seulement si $C_\Lambda(G)$ a pour enveloppe inconditionnelle l'image par j de $C^{ps}_\Lambda(G)$.

Démonstration. (i) D'après la proposition I.1 et le corollaire I.1, il suffit de montrer que $\mathfrak{M}(C_\Lambda(G),\ell^1)$ est inclus dans l'image par j' du dual de $C^{ps}_\Lambda(G)$. Or pour tout $\alpha\in\mathfrak{M}(C_\Lambda(G),\ell^1)$ et tout $f\in c_{oo}$,

$$\|\alpha f\|_{\ell^1}\le\|\alpha\| \inf_{\varepsilon=(\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^{\mathbb{N}}} \|\varepsilon f\|_{j(C_\Lambda(G))}\le\|\alpha\|\,\|f\|_{j(C^{ps}_\Lambda(G))}.$$

(ii) L'enveloppe inconditionnelle de $C_\Lambda(G)$ contient toujours $j(C_\Lambda(G))$. Si elle est égale à $j(C^{ps}_\Lambda(G))$, c'est que $C_\Lambda(G)$ est inclus dans $C^{ps}_\Lambda(G)$. Réciproquement si $C_\Lambda(G)$ est inclus dans $C^{ps}_\Lambda(G)$, son enveloppe inconditionnelle est incluse dans $j(C^{ps}_\Lambda(G))$. D'après (i) elle lui est égale.

Notons que si Λ est stationnaire, $C_\Lambda(G)$ a la propriété K, par le même argument qu'au théorème IV.2.

PROPOSITION IV.4 [2]. Si $\Lambda \subset \Gamma$ est un ensemble stationnaire,
$M_\Lambda(G) \xrightarrow{j} c_o$.

Démonstration. Nous allons démontrer en fait un résultat plus fort : pour tout $\Lambda' \subset \Lambda$, tel que Λ' soit un ensemble de Sidon, (toute partie infinie de Λ contient un tel ensemble), et toute $\mu \in M_\Lambda(G)$

$$\sum_{\gamma \in \Lambda'} |\langle \mu, \gamma \rangle|^2 < +\infty.$$

En effet, si Λ est stationnaire et si $\mu \in M_\Lambda(G), \mu$ définit un convoluteur de $C(G)/C_{\Lambda'^c}(G)$ dans $C_{\Lambda'}(G)$. Donc $j(\mu)$ définit un multiplicateur de l'enveloppe de $C(G)/C_{\Lambda'^c}(G)$, canoniquement isomorphe à ℓ^2, dans ℓ^1.

Dans certains cas, l'enveloppe inconditionnelle de $C_\Lambda(G)$ n'est pas connue explicitement, mais nous connaissons un espace plus grand, ce qui donne certains renseignements. Examinons le cas des ensembles p-Sidon.

DEFINITION IV.7 [4]. Soit $1 < p < 2$. Un ensemble $\Lambda \subset \Gamma$ est p-Sidon si

$$C_\Lambda(G) \xrightarrow{j} \ell^p.$$

Appelons $\|j\|$ la constante de p-sidonicité de Λ.

Nous ignorons en général quelle est l'enveloppe inconditionnelle de $C_\Lambda(G)$ si Λ est un p-Sidon. Elle est évidemment incluse dans ℓ^p. Peut-elle être égale à ℓ^p ? L'ensemble $\Lambda = \{3^{n_1} + 5^{n_2} \mid (n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$ est à la fois stationnaire et $\frac{4}{3}$-Sidon [12], [4]. D'après la proposition IV.3, son enveloppe inconditionnelle est l'image par j de $C_\Lambda^{ps}(G)$. D'après [12], c'est $\{f = (f_{n_1+n_2}) \mid f_{n_1+n_2} = \varphi_{n_1,n_2} \ \forall\, n_1, n_2 \in N ;\ \varphi = (\varphi_{n_1,n_2}) \in \ell^1(\ell^2) \cap \ell^2(\ell^1)\}$ qui est inclus dans $\ell^{4/3}$.

Voici quelques propriétés des ensembles p-Sidon, qui peuvent être liées à la notion d'enveloppe inconditionnelle.

PROPOSITION IV.5 [3]. Soit $\Lambda \subset \Gamma$ un ensemble p-Sidon. Soit $r' > 2$ tel que $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{r'}$. Alors

$$M_\Lambda(G) \xrightarrow{j} \ell^{r'} .$$

Démonstration. Toute mesure $\mu \in M_\Lambda(G)$ définit un convoluteur de $C(G)/C_{\Lambda^c}(G)$ dans $C_\Lambda(G)$. Alors $j(\mu)$ est un multiplicateur de l'enveloppe de $C(G)/C_{\Lambda^c}(G)$, canoniquement isomorphe à ℓ^2, dans l'enveloppe de $C_\Lambda(G)$, donc dans ℓ^p.

PROPOSITION IV.6 [4]. Soit $\Lambda \subset \Gamma$ un ensemble p-Sidon avec constante C. Soient p' tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $r < 2$ tel que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{p}$, et $q > 2$. Alors ℓ^r est inclus dans l'image par j de $L^q_\Lambda(G)$. La norme de l'inclusion est majorée par $C\sqrt{q}$.

Démonstration. Par hypothèse, $C_\Lambda(G) \xrightarrow{j} \ell^p$, et par dualité,

$$CV(L^q_\Lambda , L^q_\Lambda) \longleftarrow M(G)/M_{\Lambda^c}(G) \xleftarrow{{}^t j} \ell^{p'} .$$

Nous en déduisons que $\ell^{p'}$ est inclus dans $\mathfrak{M}(E , j(L^q_\Lambda(G)))$ où E est l'enveloppe inconditionnelle de L^q_Λ. Par le théorème IV.2, E est canoniquement isomorphe à ℓ^2 avec $\|g\|_E \le c_o\sqrt{q}\,\|g\|_2$ pour tout $g \in E$. Toute fonction f de ℓ^r, qui est produit d'une fonction g de ℓ^2 par une fonction h de $\ell^{p'}$ appartient donc à $j(L^q_\Lambda(G))$ avec

$$\|f\|_{j(L^q(G))} \le \|g\|_E\, \|h\|_{\mathfrak{M}(E,j(L^q_\Lambda))} \le \sqrt{q}\; c_o C \|g\|_{\ell^2}\, \|h\|_{\ell^{p'}} = \sqrt{q}\; c_o C \|f\|_{\ell^r} .$$

Améliorons cette proposition.

Soit $L^\psi(G)$ l'espace d'Orlicz défini par $\psi(x) = \exp x^2 - 1$. C'est le dual de $L^{\tilde\psi}(G)$ où $\tilde\psi(x) = |x|(\log(e+|x|))^{1/2}$. De plus [12] il existe des constantes K_1, K_2 telles que

$$\forall f \in L^\psi(G) \quad K_1 \sup_{q>2} q^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{L^q(G)} \le \|f\|_{L^\psi(G)} \le K_2 \sup_{q>2} q^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{L^q(G)} .$$

Un des principaux résultats de [12] est le suivant :

Le dual de $C^{ps}(G)$ est l'espace des convoluteurs de $L^2(G)$ dans $L^\psi(G)$.

La partie difficile de la démonstration est l'inclusion :

$$CV(L^2(G), L^{\psi}(G)) \longrightarrow (C^{ps})'.$$

PROPOSITION IV.6. (i) Soit $\Lambda \subset \Gamma$ un ensemble p-Sidon ; soit r tel que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{2}$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Alors ℓ^r est inclus dans l'image par j de $L^{\psi}_{\Lambda}(G)$.

(ii) [2] Si ℓ^r est inclus dans l'image par j de $L^{\psi}_{\Lambda}(G)$ et si Λ est stationnaire, alors Λ est un ensemble p-Sidon, pour p tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{2}$.

Démonstration. (i) est immédiat à partir de la proposition IV.5 et de la remarque sur la norme de $L^{\psi}(G)$. Voici une autre démonstration : par hypothèse et d'après la proposition IV.3, l'image par j de $C^{ps}_{\Lambda}(G)$ est dans ℓ^p. Par dualité, en utilisant la partie facile du résultat de G. Pisier ci-dessus, $\ell^{p'}$ est inclus dans $\mathfrak{M}(\ell^2, j(L^{\psi}_{\Lambda}))$. Donc ℓ^r est inclus dans $j(L^{\psi}_{\Lambda})$.

(ii) Supposons ℓ^r inclus dans $j(L^{\psi}_{\Lambda}(G))$, alors $\ell^{p'} = \mathfrak{M}(\ell^2, \ell^r)$ est inclus dans $\mathfrak{M}(\ell^2, j(L^{\psi}_{\Lambda}))$, donc dans le dual de $j(C^{ps}_{\Lambda})$, par la partie difficile du résultat de G. Pisier. Donc $C^{ps}_{\Lambda}(G) \xrightarrow{j} \ell^p$. Si Λ est stationnaire, Λ est p-Sidon.

On peut imaginer d'autres espaces F de la classe $\mathfrak{J}$ tels que $\ell^1 \subset F \subset \ell^2$ et se demander s'il est possible de trouver un ensemble Λ dans Γ, autre qu'un ensemble de Sidon, tel que $C_{\Lambda}(G) \xrightarrow{j} F$. On a déjà considéré les cas $F = \ell^2$, prédual de $\mathfrak{M}(\ell^2, \ell^1)$; $F = \ell^p$, prédual de $\mathfrak{M}(\ell^2, \ell^r)$ pour $\frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{p'}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$; $F = j(C^{ps}_{\Lambda}(G))$, prédual de $\mathfrak{M}(\ell^2, L^{\psi}_{\Lambda}(G))$. Considérons le cas où F est prédual de $\mathfrak{M}(\ell^2, L^{p'}_{\Lambda}(G))$ pour $p' > 2$. Rappelons que $A^p_{\Lambda}(G)$ est le dual de l'espace des convoluteurs compacts de $L^p(G)/L^p_{\Lambda^c}(G)$ dans $L^p_{\Lambda}(G)$ (section B de cette partie).

PROPOSITION IV.7. (i) [13] Soit F l'espace de la classe $\mathfrak{J}$ dont le dual est $\mathfrak{M}(\ell^2, L^{p'}_{\Lambda}(G))$ pour $p' > 2$. Soit $\Lambda \subset \Gamma$; supposons que

$$C_{\Lambda}(G) \xrightarrow{j} F.$$

Alors Λ est un ensemble de Sidon.

(ii) <u>Si</u> $C_\Lambda(G) = A^p_\Lambda(G)$ <u>alors</u> Λ <u>est un ensemble de Sidon</u>.

Démonstration. (i) L'hypothèse et la proposition IV.3 entraînent que Λ est un ensemble stationnaire. Les espaces $\mathfrak{M}_c(\ell^2, L^{p'}_\Lambda(G))$ et $\mathfrak{M}_c(\ell^2, L^\psi_\Lambda(G))$ sont canoniquement isomorphes. Utilisons un argument d'extrapolation, dû à G. Pisier, pour montrer qu'ils sont isomorphes à $\mathfrak{M}_c(\ell^2, L^2_\Lambda(G)) = c_o$; par dualité, F sera canoniquement isomorphe à ℓ^1, Λ sera donc un ensemble de Sidon.

L'espace $L^{p'}(G)$ est interpolé entre $L^2(G)$ et $L^q(G)$ si q est $\geqslant p'$. Si $j(f) \in c_{oo}$, si $\frac{1}{p'} = \frac{1-\theta}{q} + \frac{\theta}{2}$,

$$\|f\|_{L^{p'}(G)} \leq \|f\|^{1-\theta}_{L^q(G)} \|f\|^\theta_{L^2(G)} \leq C\|f\|^{1-\theta}_{L^\psi(G)} \|f\|_{L^2(G)}.$$

On en déduit, pour $\alpha \in c_{oo}$:

$$\|\alpha\|_{\mathfrak{M}(\ell^2, L^{p'}_\Lambda(G))} \leq C\|\alpha\|^{1-\theta}_{\mathfrak{M}(\ell^2, L^\psi_\Lambda(G))} \|\alpha\|^\theta_{\mathfrak{M}(\ell^2, \ell^2)}.$$

Cette inégalité et l'hypothèse entraînent l'existence d'une constante C_1 telle que

$$\|\alpha\|_{c_o} \leq \|\alpha\|_{\mathfrak{M}_c(\ell^2, L^\psi_\Lambda(G))} \leq C_1\|\alpha\|_{c_o}.$$

(ii) Supposons que $C_\Lambda(G) = A^p_\Lambda(G)$. L'application j envoie $C_\Lambda(G)$ dans le sous-espace complémenté E_Λ de l'enveloppe inconditionnelle E de $A^p(G)$. Nous avons vu à la section B que le dual de E est $\mathfrak{M}(\ell^2, L^{p'}(G))$. Le dual de E_Λ est $\mathfrak{M}(\ell^2, L^{p'}_\Lambda(G))$. D'après (i) appliqué à $F = E_\Lambda$, Λ est un ensemble de Sidon.

On peut encore considérer le cas où $F = \mathfrak{M}_c(c_o, L^\psi_\Lambda(G))$ ou bien $F = \mathfrak{M}_c(c_o, L^q_\Lambda(G))$ pour $p > 2$. Alors $C_\Lambda(G) \xrightarrow{j} F$ si Λ est un p-Sidon pour $p \leq \frac{4}{3}$. En effet si $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, si $\frac{1}{r} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{2}$, d'après l'hypothèse et les propositions IV.5 et IV.6,

$$C_\Lambda(G) \xrightarrow{j} \ell^p \longrightarrow \ell^r \longrightarrow \mathfrak{M}_c(c_o, L^\psi_\Lambda(G)) \longrightarrow \mathfrak{M}_c(c_o, L^q_\Lambda(G)).$$

Bibliographie

[1] BACHELIS, G. F. On the upper and lower majorant properties in $L^p(G)$. Quat. J. Math. Oxford 24 (1973), 119-128.

[2] DECHAMPS, M. Communication verbale.

[3] EDWARDS, R. E. Changing signs of Fourier coefficients. Pacific J. Math. vol. 15 (1965), 463-475.

[4] EDWARDS, R. E. and ROSS, K. A. P-Sidon sets. J. Funct. Anal. 15 (1974), 404-427.

[5] HELGASON, S. Multipliers of Banach algebras. Ann. Math. 54 (1956), 240-254.

[6] KAHANE, J.-P., KATZNELSON, Y., DeLEEUW, K. Sur les coefficients de Fourier des fonctions continues. C. R. Acad. Sc. Paris 285 (1977), 1001-1003.

[7] KISLIAKOV, C. B. Fourier coefficients of boundary values of analytic functions. Preprint E.3.78 Leningrad (Akad. Nauk SSSR).

[8] KWAPIEN, S. and PELCZYNSKI, A. Absolutely summing operators and translation invariant spaces of functions on compact abelian groups. Paragr. 2 and 4.

[9] MARTI, J. T. Introduction to the theory of bases. Springer Tracts. Chap. III, paragr. 4.

[10] ODELL, E. and ROSENTHAL, H. P. A double dual characterization of separable Banach spaces containing ℓ^1 (lemma 1). Israël J. Math. 20 (1975), 375-383.

[11] PISIER, G. Séminaire Maurey-Schwartz. Ecole Polytechnique. Exp. no. 3, 1972-1973 ; exposé no. 7, 1973-1974.

[12] PISIER, G. Séminaire sur la géométrie des espaces de Banach. Ecole Polytechnique. Exposés no. 17, 18. 1977-1978.

[13] PISIER, G. Communication verbale.

[14] SCHAEFFER, H. H. Topological vector spaces. Macmillan series. Chapitre III, paragr. 6, 7, 9.

[15] VINOGRADOV, S. A. Convergence almost everywhere of Fourier coefficients of functions in L^2. Soviet Math. Doklady, vol. 17 (1976), no. 5, 1323-1327.

[16] ANALYSE Harmonique et géométrie des espaces de Banach (Groupe de travail M. Déchamps, F. Piquard, H. Queffelec). Publ. Math. Orsay 1980-1981.

B. Virot

EXTENSIONS VECTORIELLES D'OPERATEURS LINEAIRES BORNES SUR L^p.

Résumé. Un espace de Banach E étant donné, on étudie les normes des extensions naturelles à $L^p(E)$ de certains opérateurs linéaires bornés sur L^p.

INTRODUCTION.

Dans toute la suite, on fixe un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, et on désigne par E un espace de Banach. Pour tout nombre réel $p \in [1, +\infty]$, on note $L^p(E)$ l'espace $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, E)$, et $\|f\|_p$ la norme de f dans $L^p(E)$. Si $E = \mathbf{R}$, on écrit simplement L^p au lieu de $L^p(\mathbf{R})$.

Soit $\mathcal{L}(L^p)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés sur L^p. On note $\mathcal{L}_E(L^p)$ l'ensemble des opérateurs $T \in \mathcal{L}(L^p)$, tels que l'application $Id_E \otimes T$ (définie a priori seulement sur $E \otimes L^p$), s'étende en un opérateur borné sur $L^p(E)$, noté T_E. Kwapien ([6], th. 2) a démontré que $\mathcal{L}_E(L^p) = \mathcal{L}(L^p)$ si et seulement si E est du type $S\,Q\,L^p$ (c'est-à-dire s'il est isomorphe à un sous-espace d'un quotient d'un espace $L^p(\Omega', \mathcal{A}', \mu'))$. Quand E n'est pas de ce type, il se pose donc le problème de la caractérisation des éléments de $\mathcal{L}_E(L^p)$. Dans le § 1, on répond à cette question sous l'hypothèse E contient des ℓ^1_n uniformément.

Soit maintenant $T \in \mathcal{L}(L^p)$ un opérateur particulier. On aimerait savoir quels sont les espaces de Banach E pour lesquels $T \in \mathcal{L}_E(L^p)$. Ce problème a été résolu par Pisier ([10]) dans le cas où T est la projection sur l'espace des séries de Rademacher, et par Burkholder ([1]), dans le cas où T est une transformation de martingales. Nous nous sommes intéressés au cas où T est la transformation de Hilbert. Sans arriver à donner de caractérisation, nous avons montré comment diverses méthodes classiques développées à l'origine par Burkholder et Gundy, puis par Coifman, Fefferman, Lépingle et Meyer, donnent l'équivalence de plusieurs conditions, avec contrôle des normes.

Un autre problème est d'obtenir des estimations précises, en fonction de n, de la norme des opérateurs T_E pour E espace de Banach quelconque de dimension finie n. Pisier ([11], proposition 7) a obtenu une telle estimation dans le cas où T est la projection sur l'espace des séries de Rademacher. En ce qui concerne la transformation de Hilbert, nous n'avons obtenu une estimation non triviale que dans le cas où E est égal à ℓ_n^1 ou ℓ_n^∞. Afin de préciser ces résultats, introduisons quelques notations. On désigne par $L_w^1(E)$ l'espace (des classes) des fonctions $\mathcal{A}$-mesurables f à valeurs dans E, pour lesquelles

$$\|f\|_w = \sup_{\lambda>0} \lambda\mu\left\{\omega\in\Omega \; ; \; \|f(\omega)\| > \lambda\right\} < +\infty .$$

Soit A un opérateur défini sur un sous-espace partout dense M de $L^p(E)$; on pose

$$\text{si} \quad 1 < p < +\infty, \quad \|A\|_{(p,p)} = \|A\|_{M\to L^p(E)} ,$$

$$\text{et si} \quad p = 1, \quad \|A\|_{(1,1)} = \|A\|_{M\to L_w^1(E)} .$$

On désigne par $C, C', \dots$ des constantes indépendantes du nombre p et de l'espace de Banach E, et par $C_p, C'_p, \dots$ des constantes ne dépendant que de p, et non de E.

Dans le § 2, on démontre que la transformation de Hilbert T appartient à $\mathcal{L}_E(L^p)$, (où $1 < p < +\infty$), si et seulement si l'opérateur maximal associé T_E^* est de type faible $(1,1)$. De plus, avec les notations introduites ci-dessus, on a alors

$$\|T_E^*\|_{(1,1)} \le C \quad \|T_E\|_{(p,p)} , \tag{1}$$

et

(2) $$\|T_E\|_{(p,p)} \leq C_p \|T_E^*\|_{(1,1)} .$$

On en déduit, pour tout entier $n \geq 2$,

$$\|T_{\ell_n^1}\|_{(p,p)} \leq C_p \operatorname{Log} n , \quad \text{et} \quad \|T_{\ell_n^\infty}\|_{(p,p)} \leq C'_p \operatorname{Log} n.$$

Dans le § 3, précisant un résultat dû à Burkholder ([1], th. 1.1), on démontre une inégalité analogue à (1), pour les transformées de martingales à valeurs vectorielles.

Les suggestions et les remarques de Mme Aline Bonami ont joué un rôle capital dans l'élaboration des § 2 et 3.

Je remercie également M. Gilles Pisier d'avoir bien voulu m'initier à ces problèmes, au cours de plusieurs conversations fructueuses.

1. LE CAS DES ESPACES DE BANACH CONTENANT DES ℓ_n^1 UNIFORMEMENT.

Dans tout le § 1, on suppose $1 < p < +\infty$.

1.1. RAPPEL. Les espaces de Banach E et F dont dits λ-isomorphes, s'il existe un isomorphisme Φ de E sur F tel que $\|\Phi\| \, \|\Phi^{-1}\| \leq \lambda$.

On dit que E contient des ℓ_n^1 uniformément, s'il existe $\lambda < +\infty$ et une suite $(E_n \, ; n \in \mathbb{N})$ de sous-espaces de E, telle que E_n soit λ-isomorphe à ℓ_n^1.

1.2. Si l'espace E contient des ℓ_n^1 uniformément, alors $\mathcal{L}_E(L^p) = \mathcal{L}_{\ell^1}(L^p)$. Ce résultat découle de la proposition suivante.

PROPOSITION 1. <u>Soit</u> M <u>un sous-espace vectoriel fermé de</u> E, <u>et soit</u> $T \in \mathcal{L}_E(L^p)$. <u>Alors</u>

$$T \in \mathcal{L}_M(L^p) \cap \mathcal{L}_{E/M}(L^p) \; ;$$

<u>de plus</u>

$$\|T_M\|_{(p,p)} \leq \|T_E\|_{(p,p)} , \quad \text{et} \quad \|T_{E/M}\|_{(p,p)} \leq \|T_E\|_{(p,p)}.$$

<u>Démonstration</u>. Puisque $L^p(M)$ s'identifie à un sous-espace de $L^p(E)$, on voit que $T \in \mathcal{L}_M(L^p)$ et que $\|T_M\|_{(p,p)} \leq \|T_E\|_{(p,p)}$.

Notons π la surjection canonique de E sur E/M. Soit $f \in L^p(E/M)$ une fonction étagée. Il existe une famille finie $(A_1, \dots, A_n)$ d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{A}$, et des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ de E, tels que f s'écrive sous la forme

$$f = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{[\mu(A_i)]^{1/p}} \pi(x_i) \otimes 1_{A_i} .$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, choisissons $y_i \in E$ tel que $\pi(y_i) = \pi(x_i)$ et

$$\|y_i\| \leq \left(\|\pi(x_i)\|^p + \frac{\varepsilon}{n}\right)^{1/p} .$$

Posons

$$g = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{[\mu(A_i)]^{1/p}} y_i \otimes 1_{A_i} .$$

On a

$$\|g\|_p^p \leq \|f\|_p^p + \varepsilon ,$$

et, comme $\|\pi\| \leq 1$,

$$\|(Id_{E/M} \otimes T) f\|_p \leq \|T_E\, g\|_p \leq \|T_E\|_{(p,p)} \|g\|_p .$$

On en déduit

$$\|(Id_{E/M} \otimes T) f\|_p \leq \|T_E\|_{(p,p)} \|f\|_p .$$

ce qui démontre le résultat voulu, compte tenu de la densité de l'espace des fonctions étagées dans $E \otimes L^p$.

COROLLAIRE 1.

(i) Pour tout espace de Banach E

$$\mathcal{L}_{\ell^1}(L^p) \subset \mathcal{L}_E(L^p) ,$$

et, si $T \in \mathcal{L}_{\ell^1}(L^p)$, alors $\|T_E\|_{(p,p)} \leq \|T_{\ell^1}\|_{(p,p)}$.

(ii) Si E contient des ℓ^1_n uniformément, alors

$$\mathcal{L}_{\ell^1}(L^p) = \mathcal{L}_E(L^p).$$

Démonstration.

(i) Soit $T \in \mathcal{L}_{\ell^1}(L^p)$, et soit $f \in E \otimes L^p$. La fonction f prend ses valeurs dans un sous-espace de dimension finie E_1 de E. On a évidemment

$$\|(Id_E \otimes T)f\|_p = \|(Id_{E_1} \otimes T)f\|_p ;$$

mais E_1 étant isométrique à un quotient de ℓ^1, la proposition 1 entraîne

$$\|(Id_{E_1} \otimes T)\, f\|_p \leq \|T_{\ell^1}\|_{(p,p)} \|f\|_p .$$

(ii) Si E contient des ℓ^1_n uniformément, en utilisant la partie triviale de la proposition 1, on voit que $\mathcal{L}_E(L^p)$ est inclus dans $\mathcal{L}_{\ell^1}(L^p)$.

1.3. Il nous reste à déterminer l'ensemble $\mathcal{L}_{\ell^1}(L^p)$. Pour cela, nous aurons besoin de la notion d'opérateur régulier ([12], p. 228). On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(L^p)$ est régulier, s'il s'écrit sous la forme

$$T = T_1 - T_2 \quad ,$$

où T_1 et T_2 sont des opérateurs linéaires positifs sur L^p. (Rappelons que tout opérateur linéaire positif sur L^p est borné). Les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) T est régulier ;

(ii) T transforme toute partie de L^p bornée pour l'ordre, en une partie bornée pour l'ordre ;

(iii) Il existe un opérateur linéaire $S \geq 0$ sur L^p tel que $|Tf| \leq Sf$ pour tout $f \in L^p_+$;

(iv) Le module de T est un opérateur borné sur L^p.

Si l'opérateur T est régulier, on note $|T|$ son module.

PROPOSITION 2. <u>L'ensemble</u> $\mathcal{L}_{\ell^1}(L^p)$ <u>est égal à l'espace des opérateurs linéaires réguliers sur</u> L^p ; <u>de plus, si</u> $T \in \mathcal{L}_{\ell^1}(L^p)$, <u>alors</u> $\|T_{\ell^1}\|_{(p,p)} = \|\,|T|\,\|_{(p,p)}$

<u>Démonstration</u>. Supposons T régulier sur L^p. Soit S un opérateur linéaire positif sur L^p, vérifiant pour tout $f \in L^p_+$, la condition

$$|T f| \leq S f.$$

Si $f_1, \ldots, f_n$ est une famille finie de fonctions de L^p, on a alors

$$\sum_{i=1}^{n} |T f_i| \leq \sum_{i=1}^{n} S |f_i| = S \sum_{i=1}^{n} |f_i|,$$

d'où l'on déduit

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} |T f_i| \right\|_p \leq \|S\|_{(p,p)} \left\| \sum_{i=1}^{n} |f_i| \right\|_p .$$

Donc, $T \in \mathscr{L}_{\ell^1}(L^p)$, et $\|T_{\ell^1}\|_{(p,p)} \leq \|S\|_{(p,p)}$.

Réciproquement, considérons $T \in \mathscr{L}_{\ell^1}(L^p)$. Si on pose $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on voit que l'opérateur transposé ${}^tT$ appartient à $\mathscr{L}_{\ell^\infty}(L^q)$ et $\|{}^tT_{\ell^\infty}\|_{(q,q)} = \|T_{\ell^1}\|_{(p,p)}$. Donc, si $f_1, \ldots, f_n$ est une famille finie de fonctions de L^q, on a

(1) $$\left\| \sup_{1\leq i\leq n} |{}^tT f_i| \right\|_q \leq \|T_{\ell^1}\|_{(p,p)} \left\| \sup_{1\leq i\leq n} |f_i| \right\|_q .$$

Désignons par $\mathfrak{B}$ une partie de L^q bornée pour l'ordre, et par $\mathfrak{F}$ l'ensemble des parties finies de $\mathfrak{B}$. On pose

$$g = \sup_{f\in\mathfrak{B}} |f|,$$

et, si $B \in \mathfrak{F}$,

$$\varphi_B = \sup_{f\in B} |{}^tT f|.$$

L'inégalité (1) entraîne

(2) $$\|\varphi_B\|_q \leq \|T_{\ell^1}\|_{(p,p)} \|g\|_q .$$

Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre raffinant le filtre des sections de $\mathfrak{F}$, et $\varphi = \lim_{\mathcal{U}} \varphi_B$, pour la topologie faible $\sigma(L^q, L^p)$. De l'inégalité (2), on déduit

(3) $$\|\varphi\|_q \leq \|T_{\ell^1}\|_{(p,p)} \|g\|_q .$$

D'autre part, $B_o \in \mathfrak{F}$ étant fixé, on a pour tout $B \in \mathfrak{F}$ contenant B_o,

$$\varphi_B - \varphi_{B_o} \geq 0 ,$$

d'où

$$\lim_{\mathfrak{U}} (\varphi_B - \varphi_{B_o}) = \varphi - \varphi_{B_o} \geq 0.$$

Donc, l'image de $\mathcal{B}$ par l'opérateur ${}^tT$ est contenue dans l'intervalle $[-\varphi , \varphi]$, ce qui prouve la régularité de ${}^tT$, et de plus, compte tenu de l'inégalité (3),

$$|||{}^tT|||_{(p,p)} \leq \|T_{\ell^1}\|_{(p,p)}.$$

Alors, l'opérateur ${}^{tt}T = T$ est régulier, et on a

$$|||T|||_{(p,p)} \leq |||{}^tT|||_{(p,p)} \leq \|T_{\ell^1}\|_{(p,p)}.$$

1.4. <u>Remarques et exemples</u>.

1) Si T est régulier, alors pour tout espace de Banach E

$$\|T_E\|_{(p,p)} \leq \|T_{\ell^1}\|_{(p,p)} = |||T|||_{(p,p)}.$$

2) Supposons que Ω soit un groupe localement compact commutatif, et μ la mesure de Haar sur Ω. Si T est régulier sur L^p et invariant par translation, alors T est l'opérateur de convolution par une mesure bornée. Donc $T \in \mathcal{L}_E(L^r)$ pour tout espace de Banach E et tout nombre $r \in [1,+\infty]$.

3) L'étude des espaces de Banach K-convexes due à Pisier ([10]), montre que si E ne contient pas de ℓ^1_n uniformément, il existe un espace mesuré $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ pour lequel $\mathcal{L}_E(L^p) \neq \mathcal{L}_{\ell^1}(L^p)$.

4) Prenons pour espace mesuré $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ l'intervalle $]0,+\infty[$ muni de la mesure de Lebesgue, et pour opérateur T l'intégrale de Hilbert, donnée par la relation

$$T\, f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{f(y)}{x+y}\, dy.$$

On voit que l'on définit ainsi un opérateur linéaire $T \geq 0$ sur L^p (cf. [14], p. 271). Donc, $T \in \mathcal{L}_E(L^p)$ pour tout espace de Banach E.

5) Prenons pour espace mesuré $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ le disque unité Δ du plan complexe,

muni de la mesure de Lebesgue, $(\Delta = \{z \in \mathbb{C} \; ; \; |z| < 1\})$. Soit $\mathcal{B}_p$ le sous-espace de $L^p(\mathbb{C})$ formé par les fonctions $f \in L^p(\mathbb{C})$ qui sont holomorphes sur Δ. On définit une projection bornée T de $L^p(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{B}_p$ en posant

$$T\, f(z) = \frac{1}{\pi} \int_\Delta \frac{f(\zeta)}{(1 - z\bar{\zeta})^2} d\zeta .$$

On voit (cf. [4]) que la restriction T_1 de T à L^p se met sous la forme

$$T_1 = U + iV ,$$

où U et V sont des opérateurs réguliers sur L^p. Donc, $T \in \mathcal{L}_E(L^p)$ pour tout espace de Banach E. On en déduit que l'ensemble

$$\mathcal{B}_p(E) = \{f \in L^p(E) \; ; \; f \text{ holomorphe sur } \Delta\}$$

est un sous-espace complémenté de $L^p(E)$.

2. LA TRANSFORMATION DE HILBERT.

2.1. Dans tout le § 2, l'espace mesuré considéré sera $\mathbb{R}$, muni de la mesure de Lebesgue, notée m. On désignera par T la transformation de Hilbert sur $\mathbb{R}$. Rappelons (cf. [14], chap. 2), que si $f \in L^p$, $(1 \leq p < +\infty)$, on a pour presque tout $x \in \mathbb{R}$

$$T\, f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-y| > \varepsilon} \frac{f(y)}{x - y} dy.$$

La transformation de Hilbert est de type faible $(1,1)$, et elle définit pour tout $p \in]1, +\infty[$ un opérateur borné sur L^p.

Soit maintenant $f \in L^p(E)$, $(1 \leq p < +\infty)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose

$$T_{E,\varepsilon}\, f(x) = \int_{|x-y| > \varepsilon} \frac{f(y)}{x-y} dy \quad ,$$

et on définit l'opérateur maximal T_E^* par la relation

$$T_E^*\, f(x) = \sup_{\varepsilon > 0} \|T_{E,\varepsilon}\, f(x)\|.$$

Notons que si $f \in E \otimes L^p$, on a encore pour presque tout $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|(Id_E \otimes T) f(x) - T_{E,\varepsilon} f(x)\| = 0,$$

ce qui entraîne

$$(1) \qquad \|(Id_E \otimes T) f(x)\| \leq T_E^* f(x).$$

Le théorème suivant résume les résultats principaux du § 2.

THEOREME 1. Pour tout espace de Banach E, et tout nombre $p \in]1,+\infty[$, les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) L'opérateur $Id_E \otimes T$ s'étend en un opérateur borné sur $L^p(E)$;

(ii) L'opérateur $Id_E \otimes T$ s'étend en un opérateur de type faible $(1,1)$ de $L^1(E)$ dans $L^1_w(E)$;

(iii) L'opérateur maximal T_E^* est de type faible $(1,1)$, de $L^1(E)$ dans $L^1_w(E)$;

(iv) L'opérateur maximal T_E^* est borné sur $L^p(E)$.

De plus, si ces conditions sont vérifiées, alors

$$(2) \qquad C_p\|T_E^*\|_{(p,p)} \leq \|T_E^*\|_{(1,1)} \leq C\|Id_E \otimes T\|_{(1,1)} \leq C'\|Id_E \otimes T\|_{(p,p)}$$

Compte-tenu de l'inégalité (1), l'implication (iv) $\Longrightarrow$ (i) est triviale. Les implications (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv), ainsi que les inégalités (2), découlent des propositions 3, 5 et 7 ci-dessous. Avant d'aborder leurs démonstrations, indiquons quelques corollaires du théorème 1. (Pour abréger, dans toute la suite du § 2,

on notera T_E l'opérateur $Id_E \otimes T$ et ses extensions données par les conditions (i) et (ii) du théorème précédents).

COROLLAIRE 1. La classe $\mathcal{C}$ des espaces de Banach E pour lesquels la transformation de Hilbert appartient à $\mathcal{L}_E(L^p)$, ne dépend pas du nombre $p \in]1,+\infty[$.

REMARQUES.

a) L'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) du théorème 1 et le corollaire 1 découlent également des résultats de [13].

b) Tout espace de la classe $\mathcal{C}$ précédente est superréflexif. En effet ([9], lemme 1), si E n'est pas réflexif, il existe pour chaque entier $n \geq 1$, des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ de E tels que, pour tout $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\sup_{1\leq k\leq n} \left| \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \right| \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\| \leq 2 \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| .$$

Alors, si on pose $\varphi_i = 1_{\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]}$, et $f = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes \varphi_i$, on a

$$\|f\|_2 \leq 2.$$

Montrons que par contre

$$\left\| \sup_{1\leq k\leq n} \left| \sum_{i=1}^{k} T\varphi_i \right| \right\|_2 \geq \frac{c}{n} \operatorname{Log} n! \ ,$$

ce qui implique

$$\|T_E f\|_2 \geq \frac{c}{n} \operatorname{Log} n!$$

Il suffit de minorer, sur $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, $\sum_{i=1}^{k-1} T\varphi_i$ par $c \operatorname{Log} k$, ce qui découle de l'inégalité :

$$T\varphi_i(x) = \int_{\frac{i-1}{n}}^{i/n} \frac{dy}{x-y} \geq \frac{1}{k-i+1}.$$

COROLLAIRE 2. <u>On conserve les notations du corollaire</u> 1. <u>Soient</u> $E \in \mathcal{C}$ <u>et</u> $f \in L^r(E)$, (<u>où</u> $1 \leq r < +\infty$). <u>Pour presque tout</u> $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|T_{E,\varepsilon} f(x) - T_E f(x)\| = 0.$$

<u>Démonstration</u>. Considérons d'abord le cas où $1 < r < +\infty$. On pose

$$\varphi(x) = \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \|T_{E,\varepsilon} f(x) - T_E f(x)\| ,$$

et $f = g + h$ avec $g \in E \otimes L^r$. Alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|T_{E,\varepsilon}\, g(x) - T_E\, g(x)\| = 0 ,$$

d'où

$$\varphi(x) \leq \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \|T_{E,\varepsilon}\, h(x) - T_E\, h(x)\| .$$

On en déduit

$$\|\varphi\|_r \leq \|T_E^* h\|_r + \|T_E h\|_r ,$$

et par suite, compte-tenu du théorème 1,

$$\|\varphi\|_r \leq \left(\|T_E^*\|_{(r,r)} + \|T_E\|_{(r,r)}\right)\|h\|_r .$$

Mais, on peut choisir $\|h\|_r$ arbitrairement petit, ce qui montre que $\|\varphi\|_r = 0$.

Dans le cas où $r = 1$, on procède de manière analogue, en utilisant les normes du type faible $(1,1)$ des opérateurs T_E^* et T_E.

COROLLAIRE 3. <u>Pour tout entier</u> $n \geq 2$ <u>on a</u> $\|T_{\ell_n^1}\|_{(1,1)} \leq C \operatorname{Log} n$, <u>et, si</u> $1 < p < +\infty$, $\|T_{\ell_n^1}\|_{(p,p)} \leq C_p \operatorname{Log} n$ <u>et</u> $\|T_{\ell_n^\infty}\|_{(p,p)} \leq C_p \operatorname{Log} n$.

<u>Démonstration</u>. La seconde inégalité découle de la première et du théorème 1 ; la troisième découle de la seconde et du fait que ${}^tT = -T$.

Donc, il nous suffit de majorer $\|T_{\ell_n^1}\|_{(1,1)}$. Soit $1 < r < 2$; on a ([14], chap. II, § 6.2, p. 48),

$$\|T\|_{(r,r)} \leq \frac{c}{r-1} .$$

D'autre part, on voit que

$$\|T_{\ell^r}\|_{(r,r)} = \|T\|_{(r,r)} .$$

Appliquant le théorème 1, on en déduit

$$\|T_{\ell^r}\|_{(1,1)} \leq \frac{c}{(r-1)} . \tag{1}$$

Soient $f_1, \ldots, f_n$, n fonctions de L^1, et soit $\lambda > 0$. Utilisant l'inégalité de Hölder et la majoration (1), on obtient, (avec $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$),

$$m\left\{x \in \mathbf{R} ;\ \sum_{i=1}^n |T f_i(x)| > \lambda\right\} \leq \frac{n^{\frac{1}{s}}}{\lambda} \frac{c}{(r-1)} \left\| \sum_{i=1}^n |f_i| \right\|_1 .$$

D'où, en choisissant $s = \operatorname{Log} n$

$$m\left\{x\in\mathbf{R}\ ;\ \sum_{i=1}^{n} |T f_i(x)| > \lambda\right\} \leq C \operatorname{Log} n \left\| \sum_{i=1}^{n} |f_i| \right\|_1 .$$

REMARQUE. Les inégalités du corollaire 3 sont optimales. En effet, si l'on reprend les fonctions φ_i de la remarque suivant le corollaire 1, on voit que $\left\| \sum_{i=1}^{n} |T\varphi_i| \right\|_p \geq \frac{c}{n} \operatorname{Log} n!$, tandis que $\left\| \sum_{i=1}^{n} |\varphi_i| \right\|_p \leq 1$, ce qui entraîne $\frac{c}{n} \operatorname{Log} n! \leq \|T_{\ell^1_n}\|_{(p,p)}$.

2.2. Venons en aux démonstrations des résultats résumés par le théorème 1. Nous aurons besoin de la notion de fonction maximale d'une fonction à valeurs vectorielles.

DEFINITION 1. Soit f une application mesurable de $\mathbf{R}$ dans E. On appelle fonction maximale de f, l'application f^* de $\mathbf{R}$ dans $\overline{\mathbf{R}}_+$, définie par la relation

$$f^*(x) = \sup_{I \ni x} \frac{1}{m(I)} \int_I \|f(y)\|\, dy ,$$

la borne supérieure étant prise sur l'ensemble des intervalles I (bornés, non réduits à un point) qui contiennent x.

On voit que $f^* = \|f\|^*$; donc, les deux propositions suivantes découlent des propriétés de la fonction maximale d'une fonction numérique (cf. [14], chap. 1).

PROPOSITION 1.

(i) <u>Soit</u> $p \in [1,+\infty]$. <u>Si</u> $f \in L^p(E)$, <u>alors pour presque tout</u> $x\in\mathbf{R}$

$$\|f(x)\| \leq f^*(x) \ ;$$

(ii) <u>Si</u> $f \in L^1(E)$, <u>alors pour tout</u> $\lambda > 0$

$$m\left\{x\in\mathbf{R}\ ;\ f^*(x) > \lambda\right\} \leq \frac{c}{\lambda} \|f\|_1 \ ;$$

(iii) <u>Soit</u> $p \in]1,+\infty[$. <u>Si</u> $f \in L^p(E)$, <u>alors</u>

$$\|f^*\|_p \leq C_p \|f\|_p .$$

PROPOSITION 2. Soient $f \in L^1(E)$, et $\lambda > 0$. Désignons par $\mathcal{O}_\lambda$ l'ouvert

$$\mathcal{O}_\lambda = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ f^*(x) > \lambda\},$$

et posons $\mathcal{O}_\lambda = \bigcup_j I_j$, où (I_j) est une suite (finie ou infinie) d'intervalles ouverts deux à deux disjoints. Alors,

(i) pour presque tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{O}_\lambda$,

$$\|f(x)\| \leq \lambda \ ;$$

(ii) pour tout j,

$$\frac{1}{m(I_j)} \int_{I_j} \|f(x)\| \, dx \leq \lambda .$$

La proposition 2 permet d'étendre la décomposition de Calderón-Zygmund aux fonctions à valeurs vectorielles. Grâce à cette décomposition, on montre comme dans le cas scalaire, que si $T \in \mathcal{L}_E(L^p)$ pour un $p \in]1,+\infty[$, alors, l'opérateur T_E est de type faible $(1,1)$. Plus précisément, on a la

PROPOSITION 3. Supposons qu'il existe $p \in]1,+\infty[$ tel que $T \in \mathcal{L}_E(L^p)$. Alors, pour tout $f \in L^1(E) \cap L^p(E)$, et tout $\lambda > 0$

$$m\{x \in \mathbb{R} \ ; \ \|T_E \, f(x)\| > \lambda\} \leq \frac{c}{\lambda} \|T_E\|_{(p,p)} \|f\|_1 .$$

Démonstration. Reprenons les notations de la proposition 2. On pose $f = g + b$, la fonction g étant définie par les relations

$$g(x) = f(x) \quad , \quad \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{O}_\lambda ,$$

$$g(x) = \frac{1}{m(I_j)} \int_{I_j} f(y) \, dy \quad , \quad \text{si} \quad x \in I_j .$$

Alors

(1) $$\|g\|_\infty \leq \lambda \quad , \quad \|g\|_1 \leq \|f\|_1 ,$$

et, si on pose $b = \sum_j b_j$, la fonction b_j étant portée par I_j,

(2) $$\int_{I_j} b_j(y)\,dy = 0\ ,$$

(3) $$\int_{I_j} \|b_j(y)\|\,dy \le 2\int_{I_j} \|f(y)\|\,dy.$$

Les inégalités (1) ci-dessus entraînent

$$\|g\|_p^p \le \lambda^{p-1}\|f\|_1\ ,$$

d'où, pour tout $\rho > 0$, en appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebitcheff

(4) $$m\{x\in\mathbb{R}\ ;\ \|\rho\, T_E\, g(x)\| > \tfrac{\lambda}{2}\} \le \frac{(2\rho)}{\lambda}\|T_E\|^p_{(p,p)}\|f\|_1\ .$$

Posons d'autre part

$$\Lambda = \{x\in\mathbb{R}\ ;\ \|\rho T_E\, b(x)\| > \tfrac{\lambda}{2}\},$$

et désignons par $\tilde{I}_j$ l'intervalle double de I_j ($\tilde{I}_j$ a le même centre que I_j, et $m(\tilde{I}_j) = 2m(I_j)$). On a évidemment

(5) $$m(\Lambda) \le m\Big(\bigcup_j \tilde{I}_j\Big) + m\Big(\Lambda\setminus \bigcup_j \tilde{I}_j\Big).$$

Mais

$$m\Big(\bigcup_j \tilde{I}_j\Big) \le 2\sum_j m(I_j) = 2m(\mathcal{O}_\lambda)\ ,$$

d'où, en appliquant (prop. 1, (ii)),

(6) $$m\Big(\bigcup_j \tilde{I}_j\Big) \le \frac{2c}{\lambda}\|f\|_1\ .$$

Reste à majorer $m(\Lambda\setminus \bigcup_j \tilde{I}_j)$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebitcheff entraîne

$$m(\Lambda\setminus \bigcup_j \tilde{I}_j) \le \frac{2\rho}{\lambda}\sum_j \int_{\mathbb{R}\setminus\tilde{I}_j} \|T_E\, b_j(x)\|\,dx.$$

Fixons $y_j \in I_j$. Compte-tenu de (2), on peut écrire, pour presque tout $x\in\mathbb{R}\setminus\tilde{I}_j$

$$T_E\, b_j(x) = \int_{I_j} \frac{b_j(y)}{x-y}\,dy - \frac{1}{x-y_j}\int_{I_j} b_j(y)\,dy.$$

Remarquant que si $y \in I_j$, alors

$$\left| \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x-y_j} \right| \leq \frac{3m(I_j)}{(x-y_j)^2},$$

on en déduit

$$\|T_E . b_j(x)\| \leq \frac{3m(I_j)}{(x-y_j)^2} \int_{I_j} \|b_j(y)\| \, dy .$$

Mais, on a

$$\int_{\mathbb{R} \setminus \tilde{I}_j} \frac{dx}{(x-y_j)^2} \leq \frac{4}{m(I_j)},$$

d'où

$$\int_{\mathbb{R} \setminus \tilde{I}_j} \|T_E \, b_j(x)\| \, dx \leq 12 \int_{I_j} \|b_j(y)\| \, dy.$$

Donc, compte tenu de (3), on obtient finalement

(7) $$m(\Lambda \setminus \bigcup_j \tilde{I}_j) \leq \frac{48\rho}{\lambda} \|f\|_1 .$$

Les inégalités (5), (6) et (7) entraînent

(8) $$m(\Lambda) \leq \frac{2C + 48\rho}{\lambda} \|f\|_1 .$$

Enfin, on déduit des inégalités (4) et (8)

$$m\left\{x \in \mathbb{R} \, ; \|T_E f(x)\| > \lambda\right\} \leq \frac{\|f\|_1}{\lambda} (2^p \rho^{p-1} \|T_E\|^p_{(p,p)} + \frac{2C}{\rho} + 48),$$

d'où le résultat voulu, en choisissant $\rho = \frac{1}{2\|T_E\|_{(p,p)}}$ et en notant que $\|T_E\|_{(p,p)} \geq \|T\|_{(p,p)} \geq 1$.

Il nous faut maintenant démontrer que T_E de type faible (1,1) implique T_E^* de type faible (1,1). Nous suivons la méthode développée par R. Coifman et Y. Meyer ([3], p. 95 à 101), et qui repose sur l'inégalité de Cotlar.

Soit $\delta \in]0,1]$. Si f est une application mesurable de $\mathbb{R}$ dans E, on pose pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$M_\delta f(x) = \sup\left(\frac{1}{m(I)} \int_I \|f(y)\|^\delta \, dy\right)^{1/\delta},$$

la borne supérieure étant prise sur l'ensemble des intervalles (bornés non réduits à un point), contenant x.

Notons que $M_1 f = f^*$.

Comme $M_\delta f = M_\delta \|f\|$, le lemme suivant découle du cas particulier où $E = \mathbf{R}$ ([3], lemme 6, page 99).

LEMME 1. Soit f une application mesurable de $\mathbf{R}$ dans E, et soit $\lambda > 0$. Si on pose $\mathcal{O}_\lambda = \{x \in \mathbf{R} ; M_1 f(x) > \lambda\}$, alors

$$m(\mathcal{O}_\lambda) \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathcal{O}_\lambda} \|f(x)\| \, dx .$$

PROPOSITION 4 (Inégalité de Cotlar). Supposons que l'application $Id_E \otimes T$ se prolonge en un opérateur de type faible $(1,1)$, noté T_E, de $L^1(E)$ dans $L^1_w(E)$. Alors, pour tout $\delta \in]0,1[$, il existe une constante $C(\delta)$, indépendante de E, ayant la propriété suivante. Pour tout $f \in E \otimes (L^1 \cap L^2)$ et tout $a \in \mathbf{R}$

$$T_E^* f(a) \leq C(\delta) \left[M_\delta \, T_E f(a) + \|T_E\|_{(1,1)} f^*(a) \right].$$

Démonstration. Grâce à l'invariance de la transformation de Hilbert par translation, on peut se limiter au cas où $a = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Posons

$$I =]-\varepsilon , \varepsilon[, \quad f_1 = 1_I f \quad , \quad f_2 = f - f_1 .$$

Alors, on a $T_{E,\varepsilon} f(0) = T_E f_2(0)$, d'où, pour presque tout $x \in \mathbf{R}$

(1) $$\|T_{E,\varepsilon} f(0)\| \leq \|T_E f_2(0) - T_E f_2(x)\| + \|T_E f(x)\| + \|T_E f_1(x)\| .$$

Si l'on suppose $|x| < \frac{\varepsilon}{2}$, il vient

$$T_E f_2(0) - T_E f_2(x) = \int_{|y| > \varepsilon} \left(\frac{1}{y-x} - \frac{1}{y}\right) f(y) \, dy ,$$

mais la condition $|y| \geq 2|x|$ entraîne

$$\left|\frac{1}{y-x} - \frac{1}{y}\right| \leq \frac{2|x|}{y^2} ,$$

d'où

$$\|T_E f_2(0) - T_E f_2(x)\| \leq \varepsilon \int_{|y| > \varepsilon} \frac{\|f(y)\|}{y^2} \, dy.$$

Effectuant une intégration par parties, on en déduit

$$\|T_E f_2(0) - T_E f_2(x)\| \leq 4 f^*(0).$$

Alors, l'inégalité (1) entraîne, pour presque tout $x \in J =]-\frac{\varepsilon}{2} , \frac{\varepsilon}{2}[$

$$(2) \qquad \|T_{E,\varepsilon} f(0)\| \leq 4 f^*(0) + \|T_E f(x)\| + \|T_E f_1(x)\|.$$

Désignons par μ la mesure de probabilité $\frac{1}{\varepsilon} 1_J m$. En prenant la quasi-norme des deux membres de (2) dans l'espace $L^{\delta}(J,\mu)$, on obtient l'inégalité

$$(3) \qquad \|T_{E,\varepsilon} f(0)\| \leq c_1(\delta)\left[4 f^*(0) + M_\delta T_E f(0) + \left(\frac{1}{\varepsilon}\int_J \|T_E f_1(x)\|^\delta dx\right)^{1/\delta}\right],$$

où la constante $c_1(\delta)$ ne dépend que de δ, et non de E. Il nous reste à majorer le troisième terme du membre de droite de (3). Désignons par λ la norme dans l'espace L^1-faible de la fonction $x \longrightarrow \|T_E f_1(x)\|$. L'inégalité de Kolmogoroff ([3], lemme 7, p. 99) montre que l'on a

$$(4) \qquad \int_J \|T_E f_1(x)\|^\delta dx \leq c_2(\delta)\, \lambda^\delta\, \varepsilon^{1-\delta}.$$

Enfin, puisque T_E est de type faible (1,1)

$$(5) \qquad \lambda \leq \|T_E\|_{(1,1)} \|f_1\|_1 \leq \|T_E\|_{(1,1)}\, 2\varepsilon f^*(0).$$

Les inégalités (3), (4) et (5) entraînent

$$\|T_{E,\varepsilon} f(0)\| \leq c_3(\delta)\left[M_\delta\, T_E f(0) + \|T_E\|_{(1,1)} f^*(0)\right]$$

(en notant que $\|T_E\|_{(1,1)} \geq \|T_{\mathbf{R}}\|_{(1,1)} \geq 1$).

<u>Remarque</u>. L'inégalité de Cotlar reste vraie si $\delta = 1$ (cf. [3], prop. 2, p. 95).

PROPOSITION 5. <u>On conserve les hypothèses et les notations de la proposition 4. Alors, pour tout</u> $f \in L^1(E)$ <u>et tout</u> $\lambda > 0$,

$$m\left\{x \in \mathbf{R} \;;\; T_E^* f(x) > \lambda\right\} \leq \frac{C}{\lambda} \|T_E\|_{(1,1)} \|f\|_1 .$$

<u>Démonstration</u>. Notons $\mathcal{C}_c^1$ l'espace des applications continûment dérivables de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, à support compact. Considérons tout d'abord le cas où $f \in E \otimes \mathcal{C}_c^1$. Soit $\delta \in]0,1[$. On pose

$$\mathcal{O}_\lambda = \left\{x \in \mathbf{R} \;;\; M_\delta\, T_E f(x) > \lambda\right\}.$$

Le lemme 1 entraîne

$$m(\mathcal{O}_\lambda) \le \frac{C}{\lambda^\delta} \int_{\mathcal{O}_\lambda} \|T_E f(x)\|^\delta \, dx .$$

On majore cette dernière intégrale en appliquant l'inégalité de Kolmogoroff à la fonction $x \longrightarrow \|T_E f(x)\|$. Il vient

$$\text{(1)} \qquad m(\mathcal{O}_\lambda) \le \frac{C_1(\delta)}{\lambda^\delta} \left[m(\mathcal{O}_\lambda)\right]^{1-\delta} \|T_E\|^\delta_{(1,1)} \|f\|_1^\delta .$$

Puisque $f \in E \otimes \mathcal{C}_c^1$, on voit que $m(\mathcal{O}_\lambda) < +\infty$. Donc, si $m(\mathcal{O}_\lambda) \neq 0$, on peut diviser les deux membres de (1) par $\left[m(\mathcal{O}_\lambda)\right]^{1-\delta}$; on obtient alors

$$\text{(2)} \qquad m(\mathcal{O}_\lambda) \le \frac{C_2(\delta)}{\lambda} \|T_E\|_{(1,1)} \|f\|_1 .$$

(cette dernière inégalité restant évidemment vraie si $m(\mathcal{O}_\lambda) = 0$).

Compte-tenu de (prop. 1, (ii)) et de (prop. 4), l'inégalité (2) entraîne

$$m\left\{x\in\mathbf{R} \ ; \ T_E^* f(x) > \lambda\right\} \le \frac{C_3(\delta)}{\lambda} \|T_E\|_{(1,1)} \|f\|_1 .$$

Le passage au cas où f est une fonction quelconque de $L^1(E)$ se fait en écrivant $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$, avec $f_n \in E \otimes \mathcal{C}_c^1$ et $\|f_n\|_1 \le \frac{10}{4^n} \|f\|_1$. On voit que

$$\left\{x\in\mathbf{R} \ ; \ T_E^* f(x) > \lambda\right\} \subset \bigcup_{n\ge1} \left\{x\in\mathbf{R} \ ; \ T_E^* f_n(x) > \frac{\lambda}{2^n}\right\},$$

d'où

$$m\left\{x\in\mathbf{R} \ ; \ T_E^* f(x) > \lambda\right\} \le \frac{10 C_3(\delta)}{\lambda} \|T_E\|_{(1,1)} \|f\|_1 .$$

Il nous reste à démontrer que la condition T_E^* de type faible $(1,1)$ implique T_E^* borné sur $L^p(E)$. Nous suivrons la méthode utilisée par Coifman et Fefferman ([2], th. 3). La clé de la démonstration est l'inégalité dite des bons λ, donnée par la

PROPOSITION 6. <u>Supposons</u> T_E^* <u>de type faible</u> $(1,1)$. <u>Alors, pour tout</u> $f \in L^1(E)$, <u>tout</u> $\lambda > 0$, <u>et tout</u> $\gamma > 0$,

$$m\left\{x\in\mathbf{R} \ ; \ T_E^* f(x) > 2\lambda \ \text{ et } \ f^*(x) \le \gamma\lambda\right\} \le C\gamma \|T_E^*\|_{(1,1)} \, m\left\{x\in\mathbf{R} \ ; \ T_E^* f(x) > \lambda\right\} .$$

<u>Démonstration</u>. Désignons par $\mathcal{O}_\lambda$ l'ouvert

$$\mathcal{O}_\lambda = \left\{x\in\mathbf{R} \;;\; T_E^* f(x) > \lambda\right\}.$$

Posons $\mathcal{O}_\lambda = \bigcup_j I_j$, où (I_j) est une suite (finie ou infinie) d'intervalles ouverts deux à deux disjoints. Il nous suffit de démontrer, pour tout j,

$$(1) \qquad m\left\{x\in I_j \;;\; T_E^* f(x) > 2\lambda \quad \text{et} \quad f^*(x) \leq \gamma\lambda\right\} \leq C\gamma \|T_E^*\|_{(1,1)}\, m(I_j).$$

On peut supposer qu'il existe un point $\zeta_j \in I_j$ pour lequel $f^*(\zeta_j) \leq \gamma\lambda$ (sinon, l'inégalité (1) est triviale). Désignons par $\tilde{I}_j$ l'intervalle ouvert de longueur $12m(I_j)$ centré en l'une des extrémités a_j de I_j, et posons

$$f_1 = 1_{\tilde{I}_j} f \qquad , \qquad f_2 = f - f_1.$$

Alors

$$\frac{1}{m(\tilde{I}_j)} \|f_1\|_1 = \frac{1}{m(\tilde{I}_j)} \int_{\tilde{I}_j} \|f(y)\|\, dy \leq 2f^*(\zeta_j) \leq 2\gamma\lambda \;,$$

d'où, puisque l'opérateur maximal T_E^* est de type faible $(1,1)$

$$(2) \qquad m\left\{x\in I_j \;;\; T_E^* f_1(x) > \frac{\lambda}{2}\right\} \leq 48\,\gamma\, m(I_j)\|T_E^*\|_{(1,1)}\,.$$

Montrons maintenant que l'on a, pour tout $x\in I_j$,

$$T_E^* f_2(x) \leq \lambda + 26\gamma\lambda$$

ce qui terminera la démonstration de l'inégalité (1), dans le cas où $\gamma \leq \frac{1}{52}$, donc dans tous les cas puisqu'elle est évidente si $c\gamma \geq 1$.

Soit J un intervalle de centre x, et soit $\tilde{J}$ l'intervalle de même longueur centré en a_j. On a

$$\left\|\int_{\mathbf{R}\setminus J} \frac{f_2(y)}{x-y}\, dy\right\| \leq A_1 + A_2 + A_3 \;,$$

avec

$$A_1 = \left\|\int_{\mathbf{R}\setminus\tilde{J}} \frac{f_2(y)}{a_j-y}\, dy\right\| \quad ,$$

$$A_2 = \left\|\int_{\mathbf{R}\setminus\tilde{J}} \left(\frac{1}{x-y} - \frac{1}{a_j-y}\right) f_2(y)\, dy\right\| \,,$$

et

$$A_3 = \int_{J\Delta\tilde{J}} \left\|\frac{f_2(y)}{x-y}\right\|\, dy.$$

Puisque $\tilde{J} \cup \tilde{I}_j$ est un intervalle de centre $a_j \notin \mathcal{O}_\lambda$, on a

(4) $$A_1 \leq T_E^* f(a_j) \leq \lambda .$$

D'autre part

$$A_2 \leq \int_{\mathbf{R} \setminus \tilde{I}_j} \|f(y)\| \left| \frac{1}{x-y} - \frac{1}{a_j - y} \right| dy \ ,$$

et, si $y \notin \tilde{I}_j$

$$\left| \frac{1}{x-y} - \frac{1}{a_j - y} \right| \leq \frac{2\, m(I_j)}{(a_j - y)^2} ,$$

d'où, en effectuant une intégration par parties

(5) $$A_2 \leq 2\, f^*(\zeta_j) \leq 2\gamma\lambda .$$

Enfin, pour majorer A_3, on peut supposer

$$m(J) \geq 10\, m(I_j) ,$$

(en effet, sinon $(J \Delta \tilde{J}) \setminus \tilde{I}_j = \emptyset$). Alors,

$$A_3 \leq \frac{4}{m(J)} \int_{J \Delta \tilde{J}} \|f(y)\| \, dy \ ,$$

d'où, en notant que $J \cup \tilde{J} \cup I_j$ est un intervalle contenant ζ_j, et de mesure majorée par $3m(J)$,

(6) $$A_3 \leq 24\, f^*(\zeta_j) \leq 24\, \gamma\lambda .$$

Les inégalités (4), (5) et (6) entraînent

(7) $$T_E^* f_2(x) \leq \lambda + 26\, \gamma\lambda .$$

PROPOSITION 7. <u>On conserve les hypothèses de la proposition 6. Alors, pour tout</u> $p \in]1,+\infty[$, <u>l'opérateur maximal</u> T_E^* <u>est borné sur</u> $L^p(E)$ <u>et</u>

$$\|T_E^*\|_{(p,p)} \leq C_p \, \|T_E^*\|_{(1,1)} .$$

<u>Démonstration.</u> Soit $f \in E \otimes L^p$. Alors, $T_E^* f \in L^p$. Donc, on a

$$\|T_E^* f\|_p^p = 2^p . p \int_0^{+\infty} \lambda^{p-1} \, m\left\{ x \in \mathbf{R} \ ; \ T_E^* f(x) > 2\lambda \right\} d\lambda .$$

La proposition 6 entraîne alors pour tout $\gamma > 0$,

$$\|T_E^* f\|_p^p \leq 2^p \cdot p \int_o^{+\infty} \lambda^{p-1} m\{x\in\mathbb{R} \ ; \ f^*(x) > \gamma\lambda\} \, d\lambda$$

$$+ C\gamma \, 2^p . p \|T_E^*\|_{(1,1)} \int_o^{+\infty} \lambda^{p-1} m\{x\in\mathbb{R} \ ; \ T_E^* f(x) > \lambda\} d\lambda .$$

On en déduit

$$\|T_E^* f\|_p^p \leq (\tfrac{2}{\gamma})^p \|f^*\|_p^p + C\gamma 2^p \|T_E^*\|_{(1,1)} \|T_E^* f\|_p^p ,$$

d'où, en choisissant $\gamma = \frac{1}{2}\left(C\, 2^p \|T_E^*\|_{(1,1)}\right)^{-1}$,

$$\|T_E^* f\|_p \leq C\, 2^{p+3} \|T_E^*\|_{(1,1)} \|f^*\|_p .$$

Appliquant (prop. 1, (iii)), on obtient

$$\|T_E^* f\|_p \leq C_p \|T_E^*\|_{(1,1)} \|f\|_p .$$

On passe au cas où f est une fonction quelconque de $L^p(E)$ par la méthode déjà utilisée à la fin de la démonstration de la proposition 5.

2.3. Remarques.

a) Les résultats précédents s'étendent sans difficulté au cas où T est un noyau de Calderón-Zygmund quelconque sur $\mathbb{R}^n$.

b) Il est vraisemblable que si la transformation de Hilbert T_E est bornée sur $L^p(E)$, alors l'espace $\mathcal{L}_E(L^p)$ contient une large classe de noyaux de Calderón-Zygmund.

c) Sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, considérons le noyau K défini par

$$K(t) = \frac{\omega(t)}{\|t\|^n} ,$$

où ω est une fonction impaire, homogène de degré 0 et intégrable sur la sphère unité Σ_{n-1} de $\mathbb{R}^n$. Supposons la transformation de Hilbert T_E bornée sur $L^p(E)$. Alors, en suivant la méthode de ([15], chap. VI, § 2), on voit que l'intégrale singulière

$$S\, f(x) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0 \\ \delta\to+\infty}} \int_{\varepsilon<\|t\|<\delta} f(x-t)\, K(t)\, dt$$

définit un opérateur borné sur $L^p(\mathbf{R}^n, E)$. En particulier, les transformations de Riesz sont bornées sur $L^p(\mathbf{R}^n, E)$.

d) La proposition 6 peut être élargie à d'autres inégalités : si l'espace E est tel que T_E soit borné sur $L^p(E)$, toutes les inégalités à poids ou pour les espaces d'Orlicz sont satisfaites.

e) Soit $\mathcal{H}$ la transformation de Hilbert sur le tore ; rappelons que si f est une fonction numérique de période 2π, intégrable sur $[-\pi, \pi]$, on a pour presque tout $x \in \mathbf{R}$

$$\mathcal{H} f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon<|y|<\pi} f(x-y) \operatorname{cotg} \frac{y}{2}\, dy.$$

En remarquant que la fonction $x \longrightarrow \frac{2}{x} - \operatorname{cotg} \frac{x}{2}$ est intégrable sur $[-\pi, \pi]$, et en utilisant l'invariance de T par translation et par dilatation, on vérifie facilement les inégalités suivantes (où $1 \leq p < +\infty$),

$$C_p \|T_E\|_{(p,p)} \leq \|\mathcal{H}_E\|_{(p,p)} \leq C'_p \|T_E\|_{(p,p)},$$

et les inégalités analogues pour les opérateurs maximaux. Donc, si $1 < p < +\infty$ la classe des espaces de Banach E pour lesquels $\mathcal{H} \in \mathcal{L}_E(L^p)$ est identique à celle des espaces E pour lesquels $T \in \mathcal{L}_E(L^p)$.

2.4. Problème ouvert. Avec les notations de la remarque 2.3, e), posons, pour tout entier $n \geq 1$

$$\alpha_n(\mathcal{H}) = \sup\left\{ \|\mathcal{H}_E\|_{(2,2)} \; ; \; \dim E \leq n \right\} .$$

A-t-on
$$\alpha_n(\mathcal{H}) \leq C \, \|\mathcal{H}_{\ell^1_n}\|_{(2,2)} ,$$

c'est-à-dire, compte-tenu de la remarque 2 et du corollaire 3, a-t-on pour tout entier $n \geq 2$

(1)
$$\alpha_n(\mathcal{H}) \leq C \log n \quad ?$$

On peut démontrer que $\alpha_n(\mathcal{H})$ est la plus petite des constantes $\alpha > 0$ vérifiant, pour tout sous-espace F de dimension n de L^2, et pour toute famille finie $f_1, \ldots, f_m$ de fonctions de F

(2)
$$\Big\| \sup_{1\leq i\leq m} |\mathcal{H} f_i| \Big\|_2 \leq \alpha \Big\| \sup_{1\leq i\leq m} |f_i| \Big\|_2 .$$

Soit alors $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ tel que $\operatorname{card} \Lambda = n$. Appliquant l'inégalité (2) à une famille finie quelconque de translatées d'une même fonction $f \in L^2_\Lambda$, on obtient

$$\|\mathcal{H}\|_{L^\infty_\Lambda \to L^\infty_\Lambda} \leq \alpha_n(\mathcal{H}) .$$

Mais, par dualité

$$\|\mathcal{H}\|_{L^\infty_\Lambda \to L^\infty_\Lambda} = \inf\left\{ \|f\|_1 \; ; \; \hat{f}(n) = 1 \text{ si } n \in \Lambda_+ \text{ et } \hat{f}(n) = -1 \text{ si } n \in \Lambda_- \right\} .$$

Donc, un corollaire de l'inégalité (1) est qu'étant donné $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ tel que $\operatorname{card} \Lambda = n \geq 2$, il existe une fonction numérique f, intégrable sur le tore, vérifiant les deux conditions

$$\|f\|_1 \leq C \log n ,$$

$$\hat{f}(n) = 1 \quad \text{si} \quad n \in \Lambda_+ \quad \text{et} \quad \hat{f}(n) = -1 \quad \text{si} \quad n \in \Lambda_- .$$

3. TRANSFORMEES DE MARTINGALES A VALEURS VECTORIELLES.

3.1. Dans ce paragraphe, on se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, muni d'une suite croissante $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_n\ , n\geq 0)$ de sous-tribus de $\mathcal{A}$. On note $\mathbb{E}_n$ l'opérateur d'espérance conditionnelle par rapport à la tribu $\mathcal{B}_n$.

Si $f = (f_n\ , n\geq 0)$ est une $\mathcal{B}$-martingale à valeurs dans E, on pose $\|f\|_p = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_p$, et on désigne par f^* la fonction maximale de la sous-martingale positive $(\|f_n\|\ , \ n \geq 0)$:

$$f^*(\omega) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n(\omega)\|.$$

Rappelons les deux principales propriétés de l'opérateur $f \longrightarrow f^*$, (cf. [8], exp. 1).

1. Pour tout $p \in]1,+\infty[$

$$\|f^*\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p \quad ;$$

2. Pour tout $\lambda > 0$

$$\mu\{f^* > \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_1 .$$

Nous utiliserons également une décomposition de martingales, due à Gundy ([5]), analogue à la décomposition de Calderón-Zygmund. Elle a été étendue aux martingales vectorielles par D. Lépingle ([7], prop. 9).

PROPOSITION 1. Soit $f = (f_n\ , n\geq 0)$ une $\mathcal{B}$-martingale à valeurs dans E, et soit $\lambda > 0$. Alors, il existe trois $\mathcal{B}$-martingales g, h et k à valeurs dans E, vérifiant les quatre conditions suivantes.

(i) $f = g + h + k$;

(ii) $\|k\|_\infty \leq C\,\lambda$, et $\|k\|_1 \leq C\|f\|_1$;

(iii) $\|h_0\|_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \|h_n - h_{n-1}\|_1 \leq C\|f\|_1$;

(iv) $\mu\{g^* > 0\} \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1$.

Démonstration. On pose

$$d_o = f_o \quad ; \quad d_j = f_j - f_{j-1} \quad , \quad (j \geq 1).$$

$$\tau = \inf\left\{ n \geq 0 \quad ; \quad \|f_n\| > \lambda \right\} ;$$

$$\sigma = \inf\left\{ n \geq 0 \quad ; \quad \sum_{j=1}^{n+1} \mathbf{E}_{j-1}\left[\|d_j\| \, 1_{\{\tau=j\}}\right] > \lambda \right\} ;$$

$$k_n = d_o \, 1_{\{\tau>0\}} + \sum_{j=1}^{n\wedge\sigma} \left[d_j \, 1_{\{\tau>j\}} - \mathbf{E}_{j-1}(d_j \, 1_{\{\tau>j\}}) \right] ;$$

$$h_n = d_o \, 1_{\{\tau=0\}} + \sum_{j=1}^{n\wedge\sigma} \left[d_j \, 1_{\{\tau=j\}} - \mathbf{E}_{j-1}(d_j \, 1_{\{\tau=j\}}) \right] ;$$

$$g_n = f_n - f_{n \wedge \tau\wedge\sigma} .$$

On vérifie facilement que $g = (g_n \, , \, n\geq 0)$, $h = (h_n \, , \, n\geq 0)$ et $k = (k_n \, , \, n\geq 0)$ sont des $\mathcal{B}$-martingales et que $f = g + h + k$.

Pour tout $j \geq 1$, on a

$$\mathbf{E}_{j-1}(d_j \, 1_{\{\tau>j\}}) + \mathbf{E}_{j-1}(d_j \, 1_{\{\tau=j\}}) = 0 ,$$

d'où

(1) $$\|k_n\| \leq \|f_{n\wedge\sigma\wedge(\tau-1)}\| + \sum_{j=1}^{n\wedge\sigma} \mathbf{E}_{j-1}(\|d_j\| \, 1_{\{\tau=j\}}) ,$$

ce qui entraîne

$$\|k\|_\infty \leq 2\lambda .$$

D'autre part, sur l'ensemble $\left\{0 < \tau < +\infty\right\}$

$$\|f_{n\wedge(\tau-1)\wedge\sigma}\| \leq \lambda < \|f_\tau\| ,$$

donc, l'inégalité (1) entraîne aussi

$$\|k_n\| \leq \|f_\tau \, 1_{\{\tau<+\infty\}}\| + \|f_n \, 1_{\{\tau=+\infty\}}\| + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}_{j-1}(\|d_j\| \, 1_{\{\tau=j\}}).$$

Prenant l'espérance des deux membres, on en déduit

$$\|k\|_1 \leq 4\|f\|_1 .$$

Pour la martingale h, on utilise l'inégalité

$$\|h_o\| + \sum_{n=1}^{+\infty} \|h_n - h_{n-1}\| \leq \|f_o\| + \sum_{n=1}^{+\infty} \|d_n\| 1_{\{\tau=n\}}$$

$$+ \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{E}_{n-1}(\|d_n\| 1_{\{\tau=n\}}) ,$$

qui entraîne

$$\|h_o\|_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \|h_n - h_{n-1}\|_1 \leq 5\|f\|_1 .$$

Enfin, on a

$$\mu\left\{g^* > 0\right\} \leq \mu(\tau < +\infty) + \mu(\sigma < +\infty) ,$$

d'où

$$\mu\left\{g^*>0\right\} \leq \mu\left\{f^* > \lambda\right\} + \mu\left\{ \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbf{E}_{j-1}(\|d_j\| 1_{\{\tau=j\}}) > \lambda \right\},$$

et, par suite

$$\mu\left\{g^* > 0\right\} \leq \frac{3}{\lambda} \|f\|_1 .$$

3.2. Soit $v = (v_n , n \geq 0)$ une suite $\mathcal{B}$-prévisible (pour tout $n \geq 1$, v_n est $\mathcal{B}_{n-1}$ mesurable) de fonctions à valeurs réelles. On appelle transformée de f par v la martingale $f^v = (t_n , n\geq 0)$ définie par

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} v_k d_k .$$

La proposition suivante précise un résultat dû à Burkholder ([1], th. 1.1).

PROPOSITION 2. <u>Soit</u> $v = (v_n , n\geq 0)$ <u>une suite</u> $\mathcal{B}$<u>-prévisible de fonctions à valeurs réelles, uniformément bornées par</u> 1, <u>et soit</u> $p \in]1,+\infty[$. <u>Supposons qu'il existe une constante</u> $K \geq 1$ <u>vérifiant, pour toute</u> $\mathcal{B}$<u>-martingale</u> f <u>à valeurs dans</u> E

$$\|f^v\|_p \leq K\|f\|_p .$$

Alors, pour tout $\lambda > 0$

$$\mu\left\{(f^v)^* > \lambda\right\} \leq C_p K \|f\|_1 .$$

<u>Démonstration</u>. Reprenons les notations introduites dans la proposition 1 ; étant donné $\rho > 0$, posons $w = (\rho v_n , n\geq 0)$ et

$$A_1 = \mu\left\{(g^W)^* > \lambda\right\}$$

$$A_2 = \mu\left\{(h^W)^* > \lambda\right\}$$

$$A_3 = \mu\left\{(k^W)^* > \lambda\right\}.$$

Alors

$$\mu\left\{(f^W)^* > 3\lambda\right\} \leq A_1 + A_2 + A_3 ,$$

$$A_1 \leq \mu\left\{g^* > 0\right\} \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1 ,$$

et

$$A_2 \leq \mu\left\{\|h_o\| + \sum_{n=1}^{+\infty} \|h_n - h_{n-1}\| \geq \frac{\lambda}{\rho}\right\},$$

d'où

$$A_2 \leq \frac{\rho}{\lambda}(\|h_o\|_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \|h_n - h_{n-1}\|_1) \leq \frac{C\rho}{\lambda} \|f\|_1.$$

Enfin

$$A_3 \leq \frac{1}{\lambda^p} \|(k^W)^*\|_p^p \leq \frac{1}{\lambda^p} (\frac{p}{p-1})^p \|k^W\|_p^p$$

ce qui entraîne

$$A_3 \leq \frac{1}{\lambda^p} (\frac{p}{p-1})^p (\rho K)^p \|k\|_p^p \leq \frac{1}{\lambda}(\frac{p}{p-1})^p(\rho K)^p C^p\|f\|_1 .$$

Le résultat voulu découle, en prenant $\rho = \frac{1}{KC} \frac{p-1}{p}$.

Remarque. On voit que l'on peut choisir

$$C_p = C \frac{p}{p-1} \quad ;$$

mais il est vraisemblable que la meilleure des constantes C_p de la proposition 2 ne dépend pas du nombre $p \in]1,+\infty[$. A ce propos, signalons que la méthode utilisée pour démontrer la proposition 2 permet d'obtenir également le résultat suivant.

PROPOSITION 3. *On conserve les notations de la proposition* 2. *Supposons qu'il existe une constante* $K \geq 1$, *vérifiant pour toute* $\mathcal{B}$-*martingale* f *à valeurs dans* E

$$\|(f^V)^*\|_p \leq K \|f\|_p.$$

Alors, pour tout $\lambda > 0$

$$\mu\left\{(f^V)^* > \lambda\right\} \leq C\, K\|f\|_1 .$$

COROLLAIRE. <u>On conserve les notations de la proposition</u> 2. <u>Si</u> $E = \ell_n^1$, <u>alors</u>

$$\mu\left\{(f^V)^* > \lambda\right\} \leq \frac{C}{\lambda}\, \|f\|_1 \text{ Log } n .$$

Démonstration. Soit $1 < r \leq 2$. Pour toute martingale g à valeurs dans ℓ^r,

$$\|(g^V)^*\|_r \leq \frac{C}{r-1}\, \|g\|_r .$$

Appliquant la proposition 3, on en déduit par un raisonnement analogue à celui de (§ 2.1, corol. 3), pour toute martingale f à valeurs dans ℓ_n^1

$$\mu\left\{(f^V)^* > \lambda\right\} \leq \frac{C}{\lambda}\, \frac{n^{1/s}}{r-1}\, \|f\|_1 ,$$

(avec $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$), ce qui implique

$$\mu\left\{(f^V)^* > \lambda\right\} \leq \frac{C}{\lambda}\, \|f\|_1 \text{ Log } n .$$

3.3. <u>Remarques</u>.

a) Conservons les notations de la proposition 2. Burkholder ([1]) a démontré l'équivalence des conditions suivantes, pour tout espace de Banach E, et tout nombre $p \in]1,+\infty[$.

i) Il existe une constante γ_p telle que pour tout espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$

$$\|f^V\|_p \leq \gamma_p\, \|f\|_p$$

ii) Il existe une constante γ telle que pour tout espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$

$$\lambda\, \mu\left\{(f^V)^* \geqslant \lambda\right\} \leq \gamma\|f\|_1 \quad ;$$

iii) Il existe une fonction symétrique biconvexe ζ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\zeta(0,0) > 0$ et $\zeta(x,y) \leq \|x+y\|$ si $\|x\| \leq 1 \leq \|y\|$.

Dans [1], Burkholder démontre qu'on peut choisir $\gamma = \dfrac{4}{\zeta(0,0)}$. La proposition 2 prouve qu'on peut aussi prendre $\gamma = C_p\, \gamma_p$, où $C_p = C\, \frac{p}{p-1}$.

b) Maurey ([8], exp. II) a démontré que les constantes d'inconditionnalité du système de Haar majorent les constantes correspondantes associées à une suite quelconque de différences de martingales. Donc, dans les propositions 1 et 2 il aurait été possible de se limiter aux martingales à tailles d'accroissements prévisibles.

Bibliographie

[1] BURKHOLDER, D. L. A geometrical characterization of Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional. (A paraître).

[2] COIFMAN, R. R. and FEFFERMAN, C. Weighted norm inequalites for maximal functions and singular integrals. Studia Math. 51 (1974), 241-250.

[3] COIFMAN, R. R. et MEYER, Y. Au delà des opérateurs pseudo-différentiels. Astéristique 57, Soc. Math. France (1978).

[4] FORELLI, F. and RUDIN, W. Projections on spaces of holomorphic functions in balls. Indiana Univ. Math. J. 24 (1974), 593-602.

[5] GUNDY, R. F. A decomposition for L^1-bounded martingales. Ann. Math. Statist. 39 (1968), 134-138.

[6] KWAPIEN, S. On operators factorizable through L_p space. Bull. Soc. Math. France, Mémoire 31-32 (1972), 215-225.

[7] LEPINGLE, D. Quelques inégalités concernant les martingales. Studia Math. 54 (1976), 63-83.

[8] MAUREY, B. Système de Haar, Séminaire Maurey-Schwartz 1974-75, exp. 1 et 2, Ecole Polytechnique, Paris.

[9] PISIER, G. Un exemple concernant la super-réflexivité. Séminaire Maurey-Schwartz 1974-75, Annexe 2, Ecole Polytechnique, Paris.

[10] PISIER, G. Semi-groupes holomorphes et K-convexité. Sém. Anal. Fonct. 1980-81, exp. 2, Ecole Polytechnique, Palaiseau.

[11] PISIER, G. Remarques sur un résultat non publié de B. Maurey. Sém. Anal. Fonct. 1980-81, exp. 5, Ecole Polytechnique, Palaiseau.

[12] SCHAEFER, H. H. Banach lattices and positive operators. Springer-Verlag, 1974.

[13] SCHWARTZ, J. A remark on inequalities of Calderon-Zygmund type for vector-valued functions. Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961), 785-799.

[14] STEIN, E. M. Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton Univ. Press (1970).

[15] STEIN, E. M. and WEISS, G. Introduction to Fourier analysis on euclidean spaces. Princeton Univ. Press (1971)

Département de Mathématiques
Université d'Orléans
Campus La Source
45046 ORLEANS CEDEX

No. d'impression 506
4ème trimestre 1981