

UNIVERSITE DE PARIS SUD

Centre d'ORSAY

2^e année de la Maîtrise
des
SCIENCES MATHÉMATIQUES

Fin du cours de M. CARTAN

(1970-71)

Secrétariat mathématiques 2^e cycle.

Table des matières

- - - - -

	<u>Pages</u>
<u>Repère mobile dans $\mathbb{R}^n$</u>	
I - Repère à un paramètre	1
Repère de Frenét d'une courbe orientée de $\mathbb{R}^3$	2
Repère de Darboux d'une courbe sur une surface de $\mathbb{R}^3$	3
II - Repère à plusieurs paramètres	6
Conditions d'intégrabilité	8
Repères de Darboux d'une surface de $\mathbb{R}^3$	9
Première forme quadratique d'une surface	11
Deuxième forme quadratique d'une surface	13
Directions principales d'une surface	18
Courbure totale	19
Forme de courbure géodésique	19
Invariants par difféomorphisme isométrique	20
Calcul de la courbure totale en fonction du ds^2	23
Recherche des géodésiques	25
 <u>Théorie abrégée des formes différentielles et des variétés différentielles.</u>	
I - Formes différentielles dans un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$	30
Multiplication extérieure	37
Différentiation extérieure	37
Ecriture canonique d'une forme différentielle	42
Changement de variable	44
Formes différentielles quadratiques	46
II - Variétés différentielles	48
Sous-variétés	50
Fibré tangent	53
Champs de vecteurs	56
Application linéaire tangente	56
Différentielle d'une fonction numérique	58
Formes différentielles sur une variété différentielle	59
Espace tangent à une sous-variété	62
Variétés riemanniennes	64
III - Variétés riemanniennes de dimension 2	68
La forme de courbure géodésique ω_{12}	68
Géodésiques	70
Courbure totale	72
Transport parallèle	74
Formule de Gauss-Bonnet	76
Applications de la formule de G-B au cas d'une variété riemannienne compacte	79

- - -

THEORIE DU REPERE MOBILE DANS $\mathbb{R}^n$.

APPLICATION AUX SURFACES PLONGEES DANS $\mathbb{R}^3$.

Bibliographie : H. Cartan, Formes différentielles, chap. III (Hermann, collection Méthodes).

Rappelons que dans l'espace $\mathbb{R}^n$ un repère affine est défini par un point $M \in \mathbb{R}^n$ et n vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^n : (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$. Dans l'ensemble de ces repères le groupe linéaire-affine $GLA(n, \mathbb{R})$ opère de façon simplement transitive.

I - Repère dépendant d'un paramètre.

Supposons que le repère $(M, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ soit fonction de classe C^1 d'un paramètre réel t ; alors à chaque instant t chacun des $n+1$ vecteurs $\frac{d\vec{M}}{dt}, \frac{d\vec{e}_1}{dt}, \dots, \frac{d\vec{e}_n}{dt}$ peut être écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{e}_1(t), \dots, \vec{e}_n(t)$:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d\vec{M}}{dt} = \sum_{i=1}^n a_i(t) \vec{e}_i(t) \\ \frac{d\vec{e}_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) \vec{e}_j(t) \end{cases}.$$

Le repère étant de classe C^1 , les fonctions a_i et a_{ij} sont continues.

Inversement donnons-nous $n(n+1)$ fonctions numériques continues $a_i(t)$, $a_{ij}(t)$, et considérons le système différentiel (1) à $n+1$ fonctions vectorielles inconnues $\vec{M}(t), \vec{e}_1(t), \dots, \vec{e}_n(t)$. C'est un système différentiel linéaire homogène ; il admet donc une solution et une seule si on se donne des valeurs initiales $\vec{M}(t_0), \vec{e}_1(t_0), \dots, \vec{e}_n(t_0)$. Si $\vec{e}_1(t_0), \dots, \vec{e}_n(t_0)$ sont linéairement indépendants, $\vec{e}_1(t), \dots, \vec{e}_n(t)$ seront linéairement indépendants pour t assez voisin de t_0 , et on aura un repère affine $(M(t), \vec{e}_1(t), \dots, \vec{e}_n(t))$ fonction de classe C^1 du paramètre t (voisin de t_0).

Considérons maintenant un repère affine euclidien (i.e. : $\langle \vec{e}_i(t), \vec{e}_j(t) \rangle = \delta_{ij}$) ; en dérivant on obtient les relations $a_{ij}(t) + a_{ji}(t) = 0$ et en particulier

$$a_{ii}(t) = 0.$$

Réciproquement, si ces relations ont lieu, toute solution du système différentiel (1) satisfait à :

$$\left\langle \frac{d\vec{e}_i}{dt}, \vec{e}_j \right\rangle + \left\langle \vec{e}_i, \frac{d\vec{e}_j}{dt} \right\rangle = 0,$$

donc $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \text{cte.}$

Si à l'instant initial t_0 le repère est euclidien, on a $\langle \vec{e}_i(t), \vec{e}_j(t) \rangle = \delta_{ij}$ quel que soit t , donc le repère sera euclidien à chaque instant.

Remarque. Un intervalle étant connexe, le déterminant de la base $(\vec{e}_1(t), \dots, \vec{e}_n(t))$, qui est une fonction continue égale à ± 1 , reste constant. Donc, si le repère est direct à l'instant initial, il le restera à tout instant t .

Premier exemple : repère de Frenêt d'une courbe orientée de $\mathbb{R}^3$.

Soit C une courbe dans $\mathbb{R}^3$, paramétrée par t , et orientée dans le sens de t croissant. On suppose que la fonction $t \mapsto M(t)$ est autant de fois différentiable qu'il est nécessaire, et que les vecteurs $\frac{d\vec{M}}{dt}$ et $\frac{d^2\vec{M}}{dt^2}$ sont linéairement indépendants pour chaque t .

En tout point nous définissons un repère euclidien direct, dit repère de Frenêt, de la façon suivante :

$M(t)$ sera le point de la courbe C à l'instant t ;
 $\vec{e}_1(t)$ sera défini par la relation : $\frac{d\vec{M}}{dt} = a_1(t)\vec{e}_1(t)$, avec $a_1(t) > 0$;
 $\frac{d\vec{e}_1}{dt} = a_{12}(t)\vec{e}_2$ (où $a_{12}(t)$ est de signe quelconque ; il est non nul car sinon $\frac{d\vec{M}}{dt}$ et $\frac{d^2\vec{M}}{dt^2}$ seraient colinéaires), soit $a_{13} = 0$;
alors $\vec{e}_3$ est défini par la condition que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ soit orthonormé direct.

Les coefficients a_i et a_{ij} vérifient donc : $a_1 > 0$, $a_2 = a_3 = a_{13} = 0$.

Considérons la forme différentielle d'une variable : $a(t)dt$; c'est la différentielle d'une fonction s de t , définie à une constante additive près ; si $s(t_0) = 0$, s s'appelle la longueur de l'arc de C d'origine $M(t_0)$ et d'extrémité $M(t)$.

Prenons s comme paramètre sur C (au lieu de t) ; alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{M}}{ds} = \vec{e}_1 \\ \frac{d\vec{e}_1}{ds} = a_{12} \vec{e}_2 \\ \frac{d\vec{e}_2}{ds} = -a_{12} \vec{e}_1 + a_{23} \vec{e}_3 \\ \frac{d\vec{e}_3}{ds} = -a_{23} \vec{e}_2 \end{array} \right.$$

Définitions. a_{12} est la courbure de C au point M , notée $\frac{1}{\rho}$.

a_{23} est la torsion de C au point M , notée $\frac{1}{\tau}$;

(ρ et τ sont les rayons de courbure et de torsion en M) ; la direction de $\vec{e}_2$ est celle de la normale principale à C , celle de $\vec{e}_3$ est celle de la binormale.

Deuxième exemple : repère de Darboux d'une courbe C orientée sur une surface orientée S plongée dans $\mathbb{R}^3$:

l'orientation de la surface est définie par le choix, en chaque point M , d'un vecteur $\vec{e}_3$ unitaire et normal à S , qui varie continûment avec M .

Pour chaque $M \in C$, le vecteur $\vec{e}_1$ est le vecteur unitaire tangent en M à la courbe orientée C , et $\vec{e}_2$ est choisi de façon que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ soit orthonormé et direct ; les formules générales deviennent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{M}}{ds} = \vec{e}_1 \\ \frac{d\vec{e}_1}{ds} = a_{12} \vec{e}_2 + a_{13} \vec{e}_3 \\ \frac{d\vec{e}_2}{ds} = -a_{12} \vec{e}_1 + a_{23} \vec{e}_3 \\ \frac{d\vec{e}_3}{ds} = -a_{13} \vec{e}_1 - a_{23} \vec{e}_2 \end{array} \right.$$

Définitions. $\left\{ \begin{array}{l} a_{12} \text{ est la } \underline{\text{courbure géodésique de } C} \text{ , tracée sur } S \text{ , en } M \\ a_{13} \text{ " " } \underline{\text{courbure normale}} \text{ " " " " " " " " " " } \\ a_{23} \text{ " " } \underline{\text{torsion géodésique}} \text{ " " " " " " " " " " } \end{array} \right.$

Soit un changement d'orientation de C , S gardant son orientation :

$$\vec{e}_1 \mapsto -\vec{e}_1, \quad ds \mapsto -ds ;$$

comme $\vec{e}_3$ ne change pas, $\vec{e}_2$ est remplacé par $-\vec{e}_2$, d'où :

$$a_{12} \mapsto -a_{12}, a_{13} \mapsto a_{13}, a_{23} \mapsto a_{23}.$$

Ainsi un changement d'orientation de C (mais pas de S) conserve la courbure normale et la torsion géodésique ; en revanche la courbure géodésique est multipliée par -1 .

Faisons maintenant un changement d'orientation de S , C gardant son orientation :

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &\mapsto \vec{e}_1, ds \mapsto ds, \\ \vec{e}_3 &\mapsto -\vec{e}_3, \vec{e}_2 \mapsto -\vec{e}_2 \end{aligned}$$

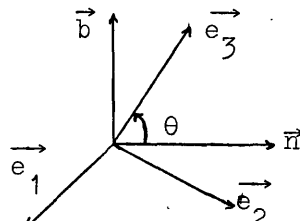
d'où $a_{12} \mapsto -a_{12}, a_{13} \mapsto -a_{13}, a_{23} \mapsto a_{23}$.

Donc la torsion géodésique ne change pas.

Calcul de la courbure géodésique, de la courbure normale et de la torsion géodésique en fonction de la courbure et de la torsion de la courbe C .

Appelons désormais $(\vec{e}_1, \vec{n}, \vec{b})$ le repère de Frenêt de la courbe C ($\vec{n}$ est le vecteur "normale principale", $\vec{b}$ est le vecteur "binormale").

Soit θ l'angle que fait $\vec{e}_3$ avec $\vec{n}$. On a :



$$\begin{cases} \vec{n} = \vec{e}_2 \sin \theta + \vec{e}_3 \cos \theta \\ \vec{b} = -\vec{e}_2 \cos \theta + \vec{e}_3 \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{e}_1}{ds} &= \frac{1}{\rho} \vec{n} = \vec{e}_2 \frac{\sin \theta}{\rho} + \vec{e}_3 \frac{\cos \theta}{\rho} \\ &= \vec{e}_2 a_{12} + \vec{e}_3 a_{13} \end{aligned}$$

D'où : $a_{12} = \frac{\sin \theta}{\rho}$, $a_{13} = \frac{\cos \theta}{\rho}$. De plus : $a_{23} = \left\langle \frac{d\vec{e}_2}{ds}, \vec{e}_3 \right\rangle$. Or :

$$\begin{aligned} \vec{e}_2 &= \vec{n} \sin \theta - \vec{b} \cos \theta \quad \text{et} \quad \vec{e}_3 = \vec{n} \cos \theta + \vec{b} \sin \theta \\ \frac{d\vec{e}_2}{ds} &= \frac{d\vec{n}}{ds} \sin \theta - \frac{d\vec{b}}{ds} \cos \theta + (\vec{n} \cos \theta + \vec{b} \sin \theta) \frac{d\theta}{ds} \\ &= \left(-\frac{1}{\rho} \vec{e}_1 + \frac{1}{\tau} \vec{b} \right) \sin \theta + \frac{\vec{n}}{\tau} \cos \theta + \vec{e}_3 \frac{d\theta}{ds} \\ &= -\frac{\sin \theta}{\rho} \vec{e}_1 + \left(\frac{1}{\tau} + \frac{d\theta}{ds} \right) \vec{e}_3 \end{aligned}$$

D'où : $a_{23} = \frac{1}{\tau} + \frac{d\theta}{ds}$, on a donc :

courbure géodésique	$= \frac{\sin \theta}{\rho}$
courbure normale	$= \frac{\cos \theta}{\rho}$
torsion géodésique	$= \frac{1}{\tau} + \frac{d\theta}{ds}$

$\vec{e}_3$ ne dépend que de M , et $\frac{d\vec{e}_3}{ds}$ ne dépend que du vecteur unitaire tangent à C ; donc pour deux courbes tangentes en M , $\frac{d\vec{e}_3}{ds}$ est le même ; or $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ sont les mêmes. Donc a_{13} et a_{23} sont les mêmes pour deux courbes tangentes. D'où :

Théorème.— La courbure normale et la torsion géodésique sont les mêmes pour deux courbes tangentes en M (et elles sont indépendantes de l'orientation de la courbe). Ce sont donc des fonctions de la direction de la tangente au point M .

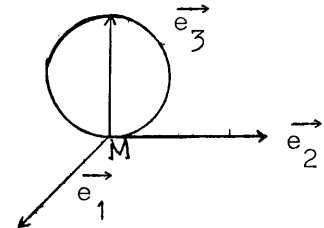
En revanche, les courbures géodésiques de deux courbes tangentes peuvent différer (cf. les courbures de deux courbes planes tangentes).

Théorème de Meusnier.— On vient de voir que pour deux courbes tangentes, $\frac{\cos \theta}{\rho}$ est le même. Donc :

(1) si le plan osculateur est le même pour deux courbes tangentes elles ont même courbure $\frac{1}{\rho}$.

(2) dans le plan orthogonal à $\vec{e}_1$, $\frac{\cos \theta}{\rho} = a$ (constante) est l'équation polaire d'un cercle tangent à $\vec{e}_2$ en M .

Le lieu des centres de courbure (au point M) des courbes, sections de S par des plans contenant $\vec{e}_1$, est donc un cercle passant par M (th. de Meusnier).



Justification des terminologies.

Pour $\theta = 0$, $\cos \theta = 1$, $a_{13} = \frac{1}{\rho}$. Donc la courbure normale au point M dans la direction $\vec{e}_1$ est la courbure de la section de S par le plan normal à S au point M et passant par $\vec{e}_1$.

Définition. Une courbe C est géodésique si $\theta = 0$ le long de la courbe (i.e. : le plan osculateur à C est normal à S en tout point M de C).

Nous admettons ici (cf. plus loin) :

M étant fixé et une direction de tangente en M étant donnée, il existe une unique géodésique admettant en M la direction donnée comme direction tangente. Ceci étant admis, on voit que pour cette géodésique, la torsion géodésique est $\frac{1}{\tau}$ (puisque $\frac{d\theta}{ds} = 0$). Donc :

la torsion géodésique en M dans une direction donnée est égale à la torsion de la géodésique tangente en M à cette direction.

La courbure géodésique sera interprétée plus tard.

II - Repère euclidien de $\mathbb{R}^n$ dépendant de plusieurs paramètres.

$M, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ sont des fonctions différentiables de paramètres réels $t_1, \dots, t_k$. Alors

$$d\vec{M} = \sum_{j=1}^k \frac{\partial \vec{M}}{\partial t_j} dt_j,$$

où

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^n \lambda_{ij}(t_1, \dots, t_k) \vec{e}_i.$$

Nous écrirons donc : $d\vec{M} = \sum_{i=1}^n \omega_i \vec{e}_i$ où $\omega_i = \sum_{j=1}^k \lambda_{ij} dt_j$.

ω_i est une forme différentielle du premier degré en $t_1, \dots, t_k$.

De même les éléments différentiels vectoriels $d\vec{e}_i$ s'écrivent

$$d\vec{e}_i = \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \vec{e}_j \quad (\omega_{ij} = \sum_{h=1}^k \lambda_{ijh} dt_h).$$

Si nous désirons que $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ soit orthonormé pour chaque système de valeurs $t_1, \dots, t_k$, il faut que $d\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = 0$.

On trouve $\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0$: la matrice des ω_{ij} est antisymétrique. Cette condition nécessaire est aussi suffisante si pour les valeurs initiales des paramètres le repère est orthonormé.

Rappel sur les formes différentielles (Voir aussi plus loin, un exposé plus systématique).

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une forme différentielle de degré 1 dans U s'écrit $\omega = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx^i$, où les a_i sont des fonctions numériques de $x \in U$; les x^i désignent les coordonnées dans $\mathbb{R}^n$.

A ω on associe, pour chaque $x \in U$, la forme linéaire $\vec{\xi} \mapsto \sum_i a_i(x) \xi^i$, ξ^i désignant les coordonnées du vecteur $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$.

Lorsque f est une fonction différentiable, on lui associe une forme différentielle de degré 1 notée df (différentielle de f), définie par :

$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$; donc pour $x \in U$, df définit la forme linéaire :

$$\vec{\xi} \mapsto \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) \xi^i,$$

qui n'est autre que la valeur, sur le vecteur $\vec{\xi}$, de la dérivée $f'(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Définition. Une forme différentielle de degré 2 est une application qui à tout x de U associe une forme bilinéaire alternée sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$\omega : x \in U \mapsto \omega(x; \vec{\xi}, \vec{\eta}) = \sum_{i < j} c_{ij}(x) (\xi^i \eta^j - \xi^j \eta^i).$$

Exemple. Soient f et g deux formes linéaires; on leur associe une forme (notée $f \wedge g$ et appelée produit extérieur de f et g) au moyen de la formule :

$$(f \wedge g)(\xi, \eta) = f(\xi) g(\eta) - f(\eta) g(\xi).$$

Définition. Ceci conduit à définir le produit extérieur de deux formes différentielles de degré 1 :

$$\omega_1 = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx^i, \quad \omega_2 = \sum_{j=1}^n b_j(x) dx^j;$$

on pose :

$$\begin{aligned} (\omega_1 \wedge \omega_2)(x; \xi, \eta) &= \left(\sum_i a_i(x) \xi^i \right) \left(\sum_j b_j(x) \eta^j \right) - \left(\sum_i a_i(x) \eta^i \right) \left(\sum_j b_j(x) \xi^j \right) \\ &= \sum_{i < j} (a_i(x) b_j(x) - a_j(x) b_i(x)) (\xi^i \eta^j - \xi^j \eta^i) \end{aligned}$$

ainsi $c_{ij}(x) = (a_i b_j - a_j b_i)$.

$$\text{Observons que : } \begin{cases} \omega_2 \wedge \omega_1 = -\omega_1 \wedge \omega_2 \\ \omega_1 \wedge \omega_1 = 0 \end{cases}.$$

Dans le cas particulier où $\omega_1 = dx^i$, $\omega_2 = dx^j$, nous trouvons que $dx^i \wedge dx^j$

associe au couple (ξ, η) le scalaire $(\xi^i \eta^j - \xi^j \eta^i)$. Ceci conduit à écrire, dans le cas général, toute forme différentielle de degré deux :

$$\omega = \sum_{i < j} c_{ij} dx^i \wedge dx^j ,$$

avec des coefficients c_{ij} fonctions de $x \in U$.

Définition. La différentielle extérieure d'une forme différentielle

$\omega = \sum_i a_i(x) dx^i$ de degré 1 est :

$$d\omega = \sum_{i=1}^n da_i \wedge dx^i \quad (\text{où } da_i = \sum_j \frac{\partial a_i}{\partial x^j} dx^j) .$$

Pour le calcul on développe :

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i,j} \frac{\partial a_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i \\ &= \sum_{i < j} \left(\frac{\partial a_j}{\partial x^i} - \frac{\partial a_i}{\partial x^j} \right) dx^i \wedge dx^j . \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où $\omega = df$ (f de classe C^2), on a $d\omega = 0$, car

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} \quad (\text{Théorème de Schwarz}). \text{ Ainsi :}$$

$$d(df) = 0$$

Propriété :

$$d(f\omega) = (df) \wedge \omega + f(d\omega) ; \quad \text{en effet :}$$

$$\begin{aligned} f\omega &= \sum_i (fa_i)(x) dx^i , \text{ et} \\ d(f\omega) &= \sum_{i,j} \frac{\partial (fa_i)}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i \\ &= \sum_{i,j} \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} a_i + f \frac{\partial a_i}{\partial x^j} \right) dx^j \wedge dx^i \\ &= \sum_{i,j} \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} a_i \right) dx^j \wedge dx^i + \sum_{i,j} f \frac{\partial a_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i \\ &= df \wedge \omega + f(d\omega) . \end{aligned}$$

Conditions d'intégrabilité du déplacement infinitésimal d'un repère euclidien de $\mathbb{R}^n$.

$\vec{M}$, $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ sont des fonctions à valeurs vectorielles. On va écrire :

$$d(d\vec{M}) = 0 , \quad d(d\vec{e}_i) = 0 .$$

Calculons $d(\vec{dM})$:

$$\begin{aligned}
 d(\vec{dM}) &= \sum_i d(\vec{e}_i \omega_i) = \sum_i d\vec{e}_i \wedge \omega_i + \vec{e}_i (d\omega_i) \\
 &= \sum_i (d\omega_i) \vec{e}_i - \sum_i \omega_i \wedge d\vec{e}_i \\
 &= \sum_i (d\omega_i) \vec{e}_i - \sum_i \omega_i \wedge \left(\sum_j \omega_{ij} \vec{e}_j \right) \\
 &= \sum_i (d\omega_i) \vec{e}_i - \sum_{j,i} (\omega_j \wedge \omega_{ji}) \vec{e}_i .
 \end{aligned}$$

Dire que c'est 0 , c'est dire que le coefficient de $\vec{e}_i$ est nul pour tout i , d'où :

$$d\omega_i = \sum_j \omega_j \wedge \omega_{ji} .$$

Un calcul analogue pour $d(\vec{de}_i)$ donne :

$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} .$$

Application : repères de Darboux d'une surface orientée S plongée dans $\mathbb{R}^3$.

Considérons l'ensemble $\mathcal{R}(S)$ des repères orientés de Darboux de la surface S : ce sont les repères euclidiens directs dont l'origine M est sur S , le troisième vecteur $\vec{e}_3$ est normal à S avec le sens fixé par l'orientation de S .

En tout point M il existe une infinité de tels repères. Ils se déduisent les uns des autres par rotation autour de $\vec{e}_3$. Autrement dit, le groupe $SO(2)$ opère dans $\mathcal{R}(S)$; l'orbite d'un point $r \in \mathcal{R}(S)$ se compose de tous les repères ayant même origine que le repère r .

On a une application $p : \mathcal{R}(S) \rightarrow S$ qui à chaque repère associe son origine ; les fibres de cette application sont les orbites du groupe $SO(2)$. On a ici un exemple d'espace fibré à groupe structural (le groupe $SO(2)$).

Chaque point de S possède un voisinage ouvert U tel qu'il existe une "section" $s : U \rightarrow \mathcal{R}(S)$, c'est-à-dire une application s telle que $p \circ s$ soit l'identité de U ; cela revient à dire qu'à chaque point M de U on a associé un repère d'origine M , repère qui est défini par son vecteur unitaire $\vec{e}_1$ tangent à S . Et l'on veut que l'application $M \rightarrow \vec{e}_1(M)$ qui associe à chaque $M \in U$

un vecteur unitaire $\vec{e}_1(M)$ (tangent à S au point M) soit suffisamment différentiable. Voici comment on peut procéder pour définir une telle section (ou champ de repères) : si U est assez petit, il existe un paramétrage de U : les coordonnées x, y, z d'un point de U sont des fonctions différentiables de deux paramètres u et v telles que les vecteurs $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}$ et $\frac{\partial \vec{M}}{\partial v}$ ne soient pas proportionnels. Alors le vecteur $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}$ est proportionnel à un vecteur tangent unitaire $\vec{e}_1$, avec coefficient de proportionnalité positif. On obtient ainsi dans U un champ de vecteurs unitaires tangents à S , d'où un champ de repères.

Soit $\vec{e}_1(M)$ le vecteur du champ au point M ; pour tout repère r tel que $p(r) = M$, il existe un unique $\theta \in SO(2)$ tel que le repère r se déduise du repère $r(M)$ par la rotation θ . L'ouvert $p^{-1}(U)$ de l'espace $\mathcal{R}(S)$ se représente donc comme un espace-produit : $U \times SO(2)$. Un repère $r \in p^{-1}(U)$ est alors décrit par les paramètres (u, v) fixant un point $M \in U$ et par l'angle $\theta \in SO(2)$. Les formes différentielles $\omega_1, \omega_2, \omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23}$ deviennent des formes différentielles à 3 variables u, v, θ .

Les conditions d'intégrabilité donnent alors, puisque $\omega_3 = 0$:

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= \omega_2 \wedge \omega_{21} = -\omega_2 \wedge \omega_{12} \\ d\omega_2 &= \omega_1 \wedge \omega_{12} \\ 0 = d\omega_3 &= \omega_1 \wedge \omega_{13} + \omega_2 \wedge \omega_{23} \\ d\omega_{12} &= -\omega_{13} \wedge \omega_{23} \\ &\text{et d'autres relations.} \end{aligned}$$

INTERPRETATION DES FORMES DIFFERENTIELLES ω_1 ET ω_2 .

La valeur (vectorielle) de la forme différentielle

$$d\vec{M} = \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2$$

sur un vecteur $\vec{\xi}$ tangent à S au point $M \in S$ est précisément $\vec{\xi}$. Si on appelle φ l'angle que $\vec{\xi}$ fait avec le vecteur $\vec{e}_1$ du repère r , les composantes de $\vec{\xi}$ suivant $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ sont $|\vec{\xi}| \cos \varphi$ et $|\vec{\xi}| \sin \varphi$. Donc les formes ω_1 et ω_2 s'interprètent comme suit : pour un repère r , on a

$$\omega_1(r, \vec{\xi}) = |\vec{\xi}| \cos \varphi, \quad \omega_2(r, \vec{\xi}) = |\vec{\xi}| \sin \varphi.$$

Considérons alors la fonction $(\omega_1)^2 + (\omega_2)^2$; sa valeur, pour un repère r et un vecteur $\vec{\xi}$ tangent à S au point M (origine du repère r), est $|\vec{\xi}|^2$, carré de la longueur euclidienne du vecteur $\vec{\xi}$. Nous voyons que la valeur de $(\omega_1)^2 + (\omega_2)^2$ pour $(r, \vec{\xi})$ ne dépend pas vraiment de r , mais seulement de M et $\vec{\xi}$ (tangent à S au point M).

Pour M donné, c'est une forme quadratique sur l'espace vectoriel des vecteurs $\vec{\xi}$ tangents à S au point M (l'espace vectoriel tangent en M à S) ; en fait, c'est la forme quadratique induite sur l'espace tangent par la forme quadratique de $\mathbb{R}^3$ (somme des carrés des coordonnées).

$(\omega_1)^2 + (\omega_2)^2$ est ainsi un exemple de ce qu'on appelle une forme différentielle quadratique sur S (c'est une fonction qui à chaque point $M \in S$ associe une forme quadratique sur l'espace vectoriel tangent à S au point M). $(\omega_1)^2 + (\omega_2)^2$ s'appelle la première forme quadratique fondamentale de la surface S . Sa racine carrée > 0 est l'élément d'arc de S , noté ds ; on note donc aussi ds^2 la première forme quadratique fondamentale.

Calcul : avec une représentation paramétrique (M fonction de u et v),

$$\begin{aligned} \text{on a} \quad ds^2 &= \langle d\vec{M}, d\vec{M} \rangle = \left\langle \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} dv, \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} dv \right\rangle \\ &= E(u, v) du^2 + 2 F du \cdot dv + G dv^2, \end{aligned}$$

$$\text{avec } E = \left| \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \right|^2, \quad F = \left\langle \frac{\partial \vec{M}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \right\rangle, \quad G = \left| \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \right|^2.$$

On observera que du^2 est le carré de la forme différentielle du (i.e. : sa valeur pour un vecteur tangent $\vec{\xi}$ est égale au carré de la valeur de du pour ξ) ; de même pour dv^2 . Enfin, $du \cdot dv$ désigne le produit des formes différentielles du et dv : sa valeur pour ξ est égale au produit des valeurs de du pour ξ et de dv pour ξ . [Ne pas confondre le produit $du \cdot dv$ avec le produit extérieur $du \wedge dv$ défini plus haut !]

Définition. L'élément d'aire (orienté) de la surface S est la forme différentielle extérieure de degré 2, qui à un couple de vecteurs $\vec{\xi}$ et $\vec{\eta}$ tangents à S en un point $M \in S$, associe $\det(\vec{\xi}, \vec{\eta})$, ce déterminant étant pris par rapport à une base orthonormée directe de l'espace tangent en M . Il est clair que $\det(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ est bien une fonction bilinéaire alternée du couple $(\vec{\xi}, \vec{\eta})$.

Proposition.- L'élément d'aire de S est égal à la forme différentielle $\omega_1 \wedge \omega_2$.

En effet, soit

$$\begin{cases} \vec{\xi} = \omega_1(r, \vec{\xi}) \vec{e}_1 + \omega_2(r, \vec{\xi}) \vec{e}_2, \\ \vec{\eta} = \omega_1(r, \vec{\eta}) \vec{e}_1 + \omega_2(r, \vec{\eta}) \vec{e}_2. \end{cases}$$

On a

$$\det(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \omega_1(r, \vec{\xi}) \omega_2(r, \vec{\eta}) - \omega_1(r, \vec{\eta}) \omega_2(r, \vec{\xi}),$$

ce qui est bien la valeur de $\omega_1 \wedge \omega_2$, au point r , sur le couple $(\vec{\xi}, \vec{\eta})$.

Utilisons une représentation paramétrique $M(u, v)$, telle que le repère (non nécessairement orthonormé) $(\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}, \vec{e}_3)$ soit direct. La valeur de $\omega_1 \wedge \omega_2$ sur un couple de vecteurs tangents $\vec{\xi}, \vec{\eta}$ est

$$\det(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \det(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \vec{e}_3). \text{ Soit}$$

$$\begin{cases} \vec{\xi} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \alpha_1 + \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \beta_1, \\ \vec{\eta} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \alpha_2 + \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \beta_2. \end{cases}$$

On a

$$\det(\vec{\xi}, \vec{\eta}, \vec{e}_3) = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \cdot \det(\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}, \vec{e}_3).$$

Ceci signifie que

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \det\left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}, \vec{e}_3\right) du \wedge dv.$$

Puisque le repère $\left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}, \vec{e}_3\right)$ est direct, $\vec{e}_3$ est proportionnel au "produit vectoriel" des vecteurs $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}$ et $\frac{\partial \vec{M}}{\partial v}$, avec un coefficient de proportionnalité positif. On a donc

$$\vec{e}_3 = \left(\frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}, \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}, \frac{r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} \right),$$

avec

$$\begin{cases} p = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u}, \text{ noté } \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \\ q = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \quad r = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}. \end{cases}$$

Alors

$$\det\left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}, \vec{e}_3\right) = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}.$$

On peut calculer ceci à l'aide des coefficients E, F, G du

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

On a en effet

$$p^2 + q^2 + r^2 = EG - F^2,$$

en vertu de l'identité de Lagrange

$$\begin{aligned} (bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2 &= \\ &= (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (aa' + bb' + cc')^2. \end{aligned}$$

En définitive, l'élément d'aire est

$$\boxed{\omega_1 \wedge \omega_2 = \sqrt{EG - F^2} du \wedge dv}.$$

La deuxième forme quadratique fondamentale de la surface S.

La valeur de la forme différentielle $d\vec{e}_3$ sur un vecteur $\vec{\xi}$ tangent à S au point $M \in S$ ne dépend que de $\vec{\xi}$, et non du choix du repère r d'origine M. Il en est de même pour la forme différentielle $d\vec{M}$. Donc le produit scalaire (de deux formes différentielles vectorielles)

$$\langle d\vec{M}, -d\vec{e}_3 \rangle$$

est une forme différentielle quadratique sur S : pour chaque point $M \in S$, c'est

une forme quadratique sur l'espace tangent à M . Par définition, la forme différentielle quadratique $\langle d\vec{M}, -d\vec{e}_3 \rangle$ s'appelle la deuxième forme quadratique fondamentale de S .

Pour obtenir sa valeur sur un vecteur tangent $\vec{\xi}$ au point M_0 , supposons que M décrive, à partir de M_0 , une courbe C tangente à $\vec{\xi}$ (et tracée sur S). Pour cette courbe on a

$$\frac{d\vec{M}}{ds} = \vec{e}_1, \quad -\frac{d\vec{e}_3}{ds} = a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2$$

(où $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ désigne le repère de Darboux de la courbe C).

Donc $\langle \frac{d\vec{M}}{ds}, -\frac{d\vec{e}_3}{ds} \rangle = a_{13}$, courbure normale de C dans la direction du vecteur tangent $\vec{\xi}$ au point M_0 . Comme la valeur de ds^2 sur $\vec{\xi}$ est $|\vec{\xi}|^2$, on obtient :

Proposition 1.— La valeur de la deuxième forme fondamentale sur un vecteur tangent $\vec{\xi}$ est égale au produit

$$|\vec{\xi}|^2 \cdot (\text{courbure normale dans la direction de } \vec{\xi}).$$

[On peut donc dire que la courbure normale dans la direction de $\vec{\xi}$ est égale au quotient de la valeur (pour $\vec{\xi}$) de la 2^e forme fondamentale par la valeur (pour $\vec{\xi}$) de la 1^{ère} forme fondamentale].

Calcul : $d\vec{M} = \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2$, $-d\vec{e}_3 = \omega_{13} \vec{e}_1 + \omega_{23} \vec{e}_2$, donc

$$\langle d\vec{M}, -d\vec{e}_3 \rangle = \omega_1 \cdot \omega_{13} + \omega_2 \cdot \omega_{23}$$

[au second membre, on a des produits ordinaires, et non des produits extérieurs, de formes différentielles du premier degré].

Cela signifie que

$$\omega_1(r, \vec{\xi}) \omega_{13}(r, \vec{\xi}) + \omega_2(r, \vec{\xi}) \omega_{23}(r, \vec{\xi})$$

est égal au produit de $|\vec{\xi}|^2$ pour la courbure normale dans la direction de $\vec{\xi}$.

Puisque, pour un repère r donné, ω_{13} et ω_{23} sont des fonctions linéaires de $\vec{\xi}$, $\omega_{13}(r, \vec{\xi})$ et $\omega_{23}(r, \vec{\xi})$ sont des combinaisons linéaires de $\omega_1(r, \vec{\xi})$ et $\omega_2(r, \vec{\xi})$ (à coefficients fonctions du repère r). Posons donc

a priori

$$\omega_{13} = a \omega_1 + b \omega_2, \quad \omega_{23} = b' \omega_1 + c \omega_2,$$

où a, b, b', c sont des fonctions de r . La condition d'intégrabilité (déjà trouvée)

$$\omega_1 \wedge \omega_{13} + \omega_2 \wedge \omega_{23} = 0$$

donne aussitôt

$$b \omega_1 \wedge \omega_2 + b' \omega_2 \wedge \omega_1 = 0,$$

d'où

$$\boxed{b = b'}$$

(puisque $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$). Finalement on a

$$\omega_{13} = a \omega_1 + b \omega_2, \quad \omega_{23} = b \omega_1 + c \omega_2, \quad \text{d'où}$$

$$\omega_1 \cdot \omega_{13} + \omega_2 \cdot \omega_{23} = a(\omega_1)^2 + 2b \omega_1 \cdot \omega_2 + c(\omega_2)^2.$$

On a donc prouvé :

Proposition 2.- La deuxième forme quadratique fondamentale est égale à

$$a(\omega_1)^2 + 2b \omega_1 \cdot \omega_2 + c(\omega_2)^2,$$

où a, b, c sont des fonctions du repère r .

On va maintenant interpréter ces trois fonctions.

Proposition 3.- La courbure normale de la surface en $M(r)$ dans la direction faisant l'angle φ avec $\vec{e}_1(r)$ est égale à :

$$a(r) \cos^2 \varphi + 2b(r) \sin \varphi \cos \varphi + c(r) \sin^2 \varphi.$$

En effet, il résulte des propositions 1 et 2 que cette courbure normale est égale à

$$\frac{1}{|\vec{\xi}|^2} [a(r)[\omega_1(r, \xi)]^2 + 2b(r) \omega_1(r, \xi) \omega_2(r, \xi) + c(r)[\omega_2(r, \xi)]^2],$$

$\vec{\xi}$ étant un vecteur du plan tangent en $M(r)$, faisant l'angle φ avec $\vec{e}_1(r)$. Or

$$\omega_1(r, \vec{\xi}) = |\vec{\xi}| \cos \varphi, \quad \omega_2(r, \vec{\xi}) = |\vec{\xi}| \sin \varphi.$$

La proposition en résulte.

Corollaire. $a(r)$ est la courbure normale dans la direction de $\vec{e}_1(r)$;

$c(r)$ est la courbure normale dans la direction de $\vec{e}_2(r)$.

Le corollaire se déduit de la proposition 3 en faisant $\varphi = 0$ (pour $\vec{e}_1(r)$),
resp. $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (pour $\vec{e}_2(r)$).

- Comment peut-on interpréter $b(r)$?

On va calculer pour cela la torsion géodésique dans la direction faisant l'angle φ avec le vecteur $\vec{e}_1(r)$. Soit $\vec{e}'_1$ le vecteur unitaire dans cette direction, et soit $\vec{e}'_2$ tel que $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}_3)$ soit direct. Toutes les courbes tangentes à $\vec{e}'_1$ en M ont même torsion géodésique. Soit C une telle courbe, s son arc. Puisque $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}_3)$ est le repère de Darboux de C tracé sur S , la torsion géodésique de C est le coefficient de $\vec{e}'_2$ dans l'expression de $\frac{-d\vec{e}_3}{ds}$. Or

$$\vec{e}_1 = \vec{e}'_1 \cos \varphi - \vec{e}'_2 \sin \varphi, \quad \vec{e}_2 = \vec{e}'_1 \sin \varphi + \vec{e}'_2 \cos \varphi.$$

D'autre part $-d\vec{e}_3 = \omega_{23} \vec{e}_2 + \omega_{13} \vec{e}_1$. Donc

$$\frac{-d\vec{e}_3}{ds} = \frac{\omega_{23}}{ds} (\vec{e}'_1 \sin \varphi + \vec{e}'_2 \cos \varphi) + \frac{\omega_{13}}{ds} (\vec{e}'_1 \cos \varphi - \vec{e}'_2 \sin \varphi).$$

Le coefficient de $\vec{e}'_2$ est donc $-\sin \varphi \frac{\omega_{13}}{ds} + \cos \varphi \frac{\omega_{23}}{ds}$. Or

$$\omega_{13} = a(r)\omega_1 + b(r)\omega_2, \quad \omega_{23} = b(r)\omega_1 + c(r)\omega_2,$$

et $\frac{\omega_1}{ds} = \cos \varphi$ et $\frac{\omega_2}{ds} = \sin \varphi$. On en déduit :

$$\begin{aligned} -\sin \varphi \frac{\omega_{13}}{ds} + \cos \varphi \frac{\omega_{23}}{ds} &= -\sin \varphi (a(r) \frac{\omega_1}{ds} + b(r) \frac{\omega_2}{ds}) \\ &\quad + \cos \varphi (b(r) \frac{\omega_1}{ds} + c(r) \frac{\omega_2}{ds}) \\ &= b(r)(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + (c(r) - a(r)) \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned}$$

On peut donc énoncer la proposition :

Proposition 4.- La torsion géodésique en $M(r)$ dans la direction faisant l'angle φ avec $\vec{e}_1(r)$ est égale à

$$b(r) \cos 2\varphi + \frac{c(r) - a(r)}{2} \sin 2\varphi.$$

En faisant $\varphi = 0$ puis $\varphi = \frac{\pi}{2}$, on en déduit :

Corollaire. $b(r)$ est la torsion géodésique dans la direction de $\vec{e}_1$
 $= -(\text{torsion géodésique dans la direction de } \vec{e}_2)$.

Plus généralement on voit que pour deux directions orthogonales φ et $\varphi + \frac{\pi}{2}$, les torsions géodésiques sont opposées.

Courbure moyenne.

Calculons les courbure normales dans deux directions orthogonales φ et $\varphi + \frac{\pi}{2}$:

$$\text{pour } \varphi : a(r)\cos^2\varphi + 2b(r)\sin\varphi\cos\varphi + c(r)\sin^2\varphi$$

$$\text{pour } \varphi + \frac{\pi}{2} : a(r)\sin^2\varphi - 2b(r)\cos\varphi\sin\varphi + c(r)\cos^2\varphi .$$

On voit que la somme des deux est indépendante de φ , et égale à $a(r)+c(r)$.

Proposition 5.- La somme des courbures normales dans deux directions orthogonales est constante (ne dépend que du point M de S), et égale à $a(r)+c(r)$.
 C'est, par définition, la courbure moyenne de S au point M.

Directions principales.

Cherchons les directions tangentes (caractérisées par φ) pour lesquelles la torsion géodésique est nulle. Si l'on a

$$b(r) = 0, \quad a(r) = c(r) \quad \text{pour un repère } r \text{ d'origine } M,$$

alors la torsion géodésique est nulle dans toutes les directions tangentes. On en déduit que les égalités $b(r) = 0$ et $a(r) = c(r)$ sont vraies pour tous les repères r d'origine M .

Un tel point M est appelé un ombilic. Par définition, c'est un point en lequel la torsion géodésique est nulle dans toutes les directions tangentes en M .

Montrons que cette définition est équivalente à :

- (1) la courbure normale est la même dans toutes les directions tangentes en M .

Définition $\Rightarrow$ (1) ? D'après la définition, on a $b(r) = 0$ et $a(r) = c(r)$, donc la courbure normale dans la direction φ est $a(r)\cos^2\varphi + c(r)\sin^2\varphi = a(r)$, indépendante de φ .

Réciproquement $(1) \Rightarrow a(r) = c(r)$ (ce sont les courbures normales dans les directions de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$). Donc $2b(r)\sin \varphi \cos \varphi + a(r)$ ne dépend pas de φ . Donc $b(r) = 0$. M est bien un ombilic.

Si M n'est pas un ombilic, la torsion géodésique est nulle pour :

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2b(r)}{a(r)-c(r)} \quad (\text{valeur bien déterminée, éventuellement infinie}).$$

Il y a donc deux directions φ pour lesquelles la torsion géodésique est nulle. Elles sont orthogonales (l'égalité ci-dessus définit 2φ à π près, donc φ à $\frac{\pi}{2}$ près).

Ces directions sont appelées directions principales en M .

La continuité des fonctions $a(r)$, $b(r)$ et $c(r)$ permet de montrer facilement que l'ensemble des points qui ne sont pas des ombilics est un ouvert de la surface S . Si M n'est pas un ombilic, il existe donc un ouvert contenant M dans lequel sont définis 2 champs de directions tangentes (les directions principales) qui sont orthogonaux en chaque point.

D'après un théorème sur les équations différentielles, il existe, dans un voisinage ouvert de M assez petit, une famille de courbes tangentes en chaque point de l'ouvert au premier champ, et une famille de courbes tangentes en chaque point au second champ. Ces courbes sont appelées lignes de courbure de S ; par un point M il passe deux lignes de courbure, qui sont orthogonales.

Soit r un repère tel que $\vec{e}_1(r)$ et $\vec{e}_2(r)$ soient les directions principales au point M .

Alors $b(r) = 0$ (puisque c'est la torsion géodésique dans la direction de $\vec{e}_1(r)$).

$a(r)$ et $c(r)$ sont appelées courbures principales (ce sont les courbures normales dans les directions principales).

Soient $R_1 = \frac{1}{a(r)}$ et $R_2 = \frac{1}{c(r)}$. R_1 et R_2 sont appelés rayons de courbure principaux (il n'y a pas de moyen de les distinguer l'un de l'autre, c'est-à-dire de savoir qui est le premier et qui est le second).

On a alors, comme cas particuliers de propriétés déjà énoncées :

la courbure normale dans la direction φ est :

$$\frac{1}{R_1} \cos^2 \varphi + \frac{1}{R_2} \sin^2 \varphi$$

la torsion géodésique dans la direction φ est :

$$\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) \sin \varphi \cos \varphi .$$

Courbure totale.

Calculons $ac-b^2$:

$$ac-b^2 = \left(\frac{1}{R_1} \cos^2 \varphi + \frac{1}{R_2} \sin^2 \varphi\right) \left(\frac{1}{R_1} \sin^2 \varphi + \frac{1}{R_2} \cos^2 \varphi\right) - \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi$$

(φ étant l'angle de $\vec{e}_1(r)$ avec une des directions principales).

$$\text{Donc } ac-b^2 = \frac{\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi + 2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{R_1 R_2} = \frac{1}{R_1 R_2} .$$

Donc le produit des courbures principales au point M est égal à $ac-b^2$, qui ne dépend donc pas du repère r , mais seulement de son origine M .

Par définition : $\frac{1}{R_1 R_2} = \underline{\text{courbure totale}}$ de S au point M .

La forme de courbure géodésique.

ω_{12} est une forme différentielle à 3 variables u, v, φ sur l'espace des repères $\mathcal{R}(S)$.

ω_{12} est appelée forme de courbure géodésique. On va expliquer pourquoi.

Soit C une courbe sur S . L'ensemble des repères de Darboux de C est une famille de repères à un paramètre s . Cette famille constitue une courbe Γ dans l'espace $\mathcal{R}(S)$. On a :

$$d\vec{e}_1 = \omega_{12} \vec{e}_2 + \omega_{13} \vec{e}_3$$

et

$$\frac{d\vec{e}_1}{ds} = a_{12} \vec{e}_2 + a_{13} \vec{e}_3$$

(a_{12} = courbure géodésique de C au point M).

ω_{12} est une forme différentielle sur $\mathcal{R}(S)$: à tout r de $\mathcal{R}(S)$ elle associe une forme linéaire sur l'espace tangent à $\mathcal{R}(S)$. Elle induit sur Γ une

forme différentielle, qui n'est autre que $a_{12} ds$ (où a_{12} est la courbure géodésique de C). Si on note $\frac{1}{\rho_g}$ la courbure géodésique, on voit que la forme ω_{12} induit sur C la forme $\frac{ds}{\rho_g}$.

Rappelons qu'on a obtenu plus haut, entre autres conditions d'intégrabilité, les relations

$$\boxed{d\omega_1 = -\omega_2 \wedge \omega_{12}, \quad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12}} \quad .$$

Proposition.— ω_{12} est l'unique forme différentielle α de degré un telle que :

$$d\omega_1 = -\omega_2 \wedge \alpha, \quad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \alpha.$$

En effet, si α et β satisfont à ces relations, et si $\gamma = \alpha - \beta$, alors on a :

$$0 = \omega_2 \wedge \gamma, \quad 0 = \omega_1 \wedge \gamma.$$

Donc γ est proportionnel à ω_1 et ω_2 . Or ω_1 et ω_2 ne sont pas proportionnelles, puisque $\omega_1(\xi) = |\xi| \cos \varphi$ et $\omega_2(\xi) = |\xi| \sin \varphi$. Donc $\gamma = 0$.

C.Q.F.D.

Invariants par difféomorphisme isométrique.

Soient S et S' deux surfaces dans $\mathbb{R}^3$.

Définition. f est un difféomorphisme de S sur S'

$\Leftrightarrow f$ est un homéomorphisme différentiable (dans les deux sens).

A chaque vecteur tangent à S , l'application linéaire tangente à f fait correspondre un vecteur tangent à S' . Si f est isométrique, l'application linéaire tangente à f transforme chaque vecteur tangent dans un vecteur tangent de même longueur (par définition de "isométrique"). Supposons désormais qu'il en soit ainsi.

La correspondance entre les vecteurs tangents en M et les vecteurs tangents en $M' = f(M)$ conservant la longueur euclidienne, conserve aussi le produit scalaire, donc les angles.

Supposons de plus que f conserve l'orientation.

Alors à tout repère de Darboux de S correspond un repère orthonormé direct de S' , donc repère de Darboux de S' . On définit ainsi un difféomorphisme de $\mathcal{R}(S)$ sur $\mathcal{R}(S')$ (si f est suffisamment différentiable). On définit de même une correspondance bijective entre les formes différentielles sur $\mathcal{R}(S)$ et celles sur $\mathcal{R}(S')$. En effet, si α est une forme différentielle sur $\mathcal{R}(S)$, soient $r \in \mathcal{R}(S)$ et $r' \in \mathcal{R}(S')$ les repères qui se correspondent ; si $\vec{\xi}$ un vecteur de l'espace tangent à $\mathcal{R}(S)$ et $\vec{\xi}'$ son transformé dans l'espace tangent à $\mathcal{R}(S')$, on définit α' (forme différentielle sur $\mathcal{R}(S')$) telle que

$$\alpha'(r', \vec{\xi}') = \alpha(r, \vec{\xi}).$$

Dans cette correspondance entre les formes différentielles :

$$\begin{aligned} \omega_1 &\rightsquigarrow \omega'_1 \\ \omega_2 &\rightsquigarrow \omega'_2 \end{aligned}$$

car $\begin{matrix} \vec{e}_1 \rightsquigarrow \vec{e}'_1 \\ \vec{e}_2 \rightsquigarrow \vec{e}'_2 \end{matrix}$, $d\vec{M} \rightsquigarrow d\vec{M}'$, et $\begin{cases} d\vec{M} = \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 \\ d\vec{M}' = \omega'_1 \vec{e}'_1 + \omega'_2 \vec{e}'_2 \end{cases}$.

Donc $\omega_1 \wedge \omega_2 \rightsquigarrow \omega'_1 \wedge \omega'_2$. Ainsi :

les aires sont conservées par difféomorphisme isométrique.

De même $d\omega_1 \rightsquigarrow d\omega'_1$, $d\omega_2 \rightsquigarrow d\omega'_2$. Or

$$d\omega_1 = -\omega_2 \wedge \omega_{12}, \quad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12}.$$

Soit α' le transformé de ω_{12} ; on a

$$d\omega'_1 = -\omega'_2 \wedge \alpha', \quad d\omega'_2 = \omega'_1 \wedge \alpha'.$$

Or ω'_{12} est l'unique α' vérifiant ce système.

Donc $\omega_{12} \rightsquigarrow \omega'_{12}$.

Interprétation géométrique.

Soit C une courbe sur S : $M \rightsquigarrow M'$, $C \rightsquigarrow C'$, $\omega_{12} \rightsquigarrow \omega'_{12}$.

Les formes induites se transforment l'une dans l'autre. Or, on a vu que ω_{12} induit sur C la forme $\frac{ds}{\rho_g}$, ρ_g étant le rayon de courbure géodésique.

De même ω'_{12} induit $\frac{ds'}{\rho'_g}$. Donc $\frac{ds}{\rho_g} \rightarrow \frac{ds'}{\rho'_g}$. Comme $ds \rightarrow ds'$ (les longueurs sont conservées),

la correspondance conserve la courbure géodésique.

Rappelons enfin la condition d'intégrabilité :

$$d\omega_{12} = -\omega_{13} \wedge \omega_{23}.$$

On a $\omega_{13} = a \omega_1 + b \omega_2$, $\omega_{23} = b \omega_1 + c \omega_2$,

donc $d\omega_{12} = -(a c - b^2) \omega_1 \wedge \omega_2$, c'est-à-dire

$$\boxed{d\omega_{12} = -\frac{1}{R_1 R_2} \omega_1 \wedge \omega_2}.$$

Or $\omega_{12} \rightarrow \omega'_{12}$, donc $d\omega_{12} \rightarrow d\omega'_{12}$.

De plus les éléments d'aire sont conservés. Donc $\frac{1}{R_1 R_2}$ est conservé.

La courbure totale est conservée par difféomorphisme isométrique.

Soit $M(u, v)$ une représentation paramétrique d'un ouvert U de S .

Il lui correspond, comme on l'a déjà vu, un champ de repères, tel que le vecteur $\vec{e}_1(M)$ soit proportionnel à $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}$ (avec un coefficient > 0). Alors les repères r dont l'origine M est dans U sont décrits par les trois paramètres (u, v, φ) , φ étant l'angle $(\vec{e}_1(M), \vec{e}_1(r))$, $\vec{e}_1(M)$ étant le 1^{er} vecteur du repère du champ.

ω_{12} est une forme différentielle en (u, v, φ) sur $\mathcal{R}(U)$. Soit σ l'application qui à tout point M de U fait correspondre le repère du champ ayant M pour origine.

On considère $\overline{\omega_{12}}$, forme différentielle sur la surface induite par l'application $\sigma : \overline{\omega_{12}}$ est la forme à 2 variables (u, v) déduite de ω_{12} (qui dépend de u, v, φ) en fixant $\varphi = 0$. C'est la restriction de ω_{12} aux repères du champ. [La forme $\overline{\omega_{12}}$ dépend donc du choix du champ de repères].

Théorème.

$$\boxed{\omega_{12} = \overline{\omega_{12}} + d\varphi}.$$

Démonstration :

$$\vec{e}_1(r) = \vec{e}_1(M) \cos \varphi + \vec{e}_2(M) \sin \varphi$$

$$\vec{e}_2(r) = -\vec{e}_1(M) \sin \varphi + \vec{e}_2(M) \cos \varphi$$

ω_{12} est le coefficient de $\vec{e}_2$ dans l'expression de $d\vec{e}_1$:

$$\omega_{12} = (d\vec{e}_1, \vec{e}_2) .$$

Or

$$d\vec{e}_1(M) = \overline{\omega}_{12} \vec{e}_2(M) + \overline{\omega}_{13} \vec{e}_3(M) .$$

(On restreint la formule $d\vec{e}_1 = \omega_{12} \vec{e}_2 + \omega_{13} \vec{e}_3$ aux repères du champ). De même :

$$d\vec{e}_2(M) = -\overline{\omega}_{21} \vec{e}_1(M) + \overline{\omega}_{23} \vec{e}_3(M) .$$

Donc $d\vec{e}_1(r) = \overline{\omega}_{12} \vec{e}_2(M) \cos \varphi - \overline{\omega}_{12} (\vec{e}_1(M) \sin \varphi) + (-\vec{e}_1(M) \sin \varphi + \vec{e}_2(M) \cos \varphi) d\varphi + \dots$

Or

$$\vec{e}_1(M) = \vec{e}_1(r) \cos \varphi - \vec{e}_2(r) \sin \varphi$$

$$\vec{e}_2(M) = \vec{e}_1(r) \sin \varphi + \vec{e}_2(r) \cos \varphi .$$

Donc le coefficient de $\vec{e}_2(r)$ dans $d\vec{e}_1(r)$ est :

$$\overline{\omega}_{12} (\cos^2 \varphi - (-\sin^2 \varphi)) + d\varphi (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = \overline{\omega}_{12} + d\varphi$$

C.Q.F.D.

Calcul de la courbure totale en fonction du ds^2 .

Nous nous plaçons dans un ouvert U dans lequel on a un champ de repères.

Les relations d'intégrabilité

$$d\omega_1 = -\omega_2 \wedge \omega_{12} , \quad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12}$$

donnent, pour les formes $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$ et $\overline{\omega}_{12}$ induites sur U par le champ de repères :

$$(1) \quad d\overline{\omega}_1 = -\overline{\omega}_2 \wedge \overline{\omega}_{12} , \quad d\overline{\omega}_2 = \overline{\omega}_1 \wedge \overline{\omega}_{12} .$$

Ces relations vont permettre de calculer $\overline{\omega}_{12}$ connaissant $\overline{\omega}_1$ et $\overline{\omega}_2$.

En effet, puisque $\overline{\omega}_1$ et $\overline{\omega}_2$ forment, en chaque point M de S , une base du dual de l'espace tangent en M , on a une relation

$$(2) \quad \overline{\omega}_{12} = \lambda_1 \overline{\omega}_1 + \lambda_2 \overline{\omega}_2 ,$$

où λ_1 et λ_2 sont des fonctions du point $M \in U$. Posons cette valeur de $\overline{\omega}_{12}$ dans les relations (1) ; on obtient

$$(3) \quad d\overline{\omega}_1 = \lambda_1 \overline{\omega}_1 \wedge \overline{\omega}_2, \quad d\overline{\omega}_2 = \lambda_2 \overline{\omega}_1 \wedge \overline{\omega}_2.$$

Les relations (3) permettent donc de calculer λ_1 et λ_2 lorsqu'on connaît $\overline{\omega}_1$ et $\overline{\omega}_2$: on calcule $d\overline{\omega}_1$ et $d\overline{\omega}_2$, qui sont des formes différentielles de degré 2, nécessairement proportionnelles à $\overline{\omega}_1 \wedge \overline{\omega}_2$: λ_1 et λ_2 sont les coefficients de proportionnalité. Une fois λ_1 et λ_2 ainsi calculés, la relation (2) fournit $\overline{\omega}_{12}$.

Quand on a obtenu $\overline{\omega}_{12}$, on prendra sa différentielle extérieure $d\overline{\omega}_{12}$; or on a vu que

$$d\omega_{12} = -\frac{1}{R_1 R_2} \omega_1 \wedge \omega_2 ;$$

en passant aux formes induites sur U par le champ de repères, on trouve

$$(4) \quad d\overline{\omega}_{12} = -\frac{1}{R_1 R_2} \overline{\omega}_1 \wedge \overline{\omega}_2.$$

Dans cette relation, on connaît déjà $\overline{\omega}_1 \wedge \overline{\omega}_2$ et $d\overline{\omega}_{12}$; donc on en déduit le coefficient de proportionnalité $-\frac{1}{R_1 R_2}$, ce qui fournit enfin la courbure totale.

On va expliciter ces calculs dans le cas où le ds^2 a la forme

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2 ;$$

autrement dit, dans le cas où $F = \langle \frac{\partial \vec{M}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \rangle = 0$. Cette condition exprime que les courbes $u = c^{te}$ et $v = c^{te}$ sont orthogonales. Or tout point de S possède un voisinage ouvert dans lequel il existe deux familles de courbes orthogonales (il suffit de prendre pour première famille les trajectoires d'un champ de vecteurs, et pour deuxième famille leurs trajectoires orthogonales).

Introduisons $A = \sqrt{E}$, $B = \sqrt{G}$; avec cette notation on a

$$ds^2 = (A du)^2 + (B dv)^2,$$

A et B étant des fonctions de u et v . Les vecteurs tangents

$$\frac{1}{A} \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \quad \text{et} \quad \frac{1}{B} \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}$$

sont unitaires et orthogonaux ; par définition, ce seront les vecteurs $\vec{e}_1(M)$ et $\vec{e}_2(M)$ d'un champ de repères, qui est donc ainsi défini. On a alors

$$\overline{\omega}_1 = A du, \quad \overline{\omega}_2 = B dv, \quad ds^2 = \overline{\omega}_1^2 + \overline{\omega}_2^2.$$

D'où :

$$\begin{cases} d\overline{\omega}_1 = -\frac{\partial A}{\partial v} du \wedge dv, & d\overline{\omega}_2 = \frac{\partial B}{\partial u} du \wedge dv, \\ \overline{\omega}_1 \wedge \overline{\omega}_2 = AB du \wedge dv. \end{cases}$$

Les formules (2) donnent donc

$$\lambda_1 = -\frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial v}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial u},$$

et (2) donne

$$(5) \quad \overline{\omega}_{12} = -\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial v} du + \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial u} dv.$$

Calculons

$$\begin{aligned} d\overline{\omega}_{12} &= \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial u} \right) \right] du \wedge dv \\ &= \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial u} \right) \right] \overline{\omega}_1 \wedge \overline{\omega}_2, \end{aligned}$$

et (4) donne donc :

$$(6) \quad \boxed{\frac{1}{R_1 R_2} = -\frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial u} \right) \right]}.$$

Un cas particulier important (cf. ci-dessous) est celui où $A = 1$; on a alors

$$(7) \quad \boxed{\frac{1}{R_1 R_2} = -\frac{1}{B} \frac{\partial^2 B}{\partial u^2}}.$$

Recherche des géodésiques.

Ce sont les courbes dont le plan osculateur est, en tout point, normal à la surface. Ce sont aussi les courbes dont la courbure géodésique est nulle en tout point. Une telle courbe C définit une courbe Γ dans $\mathcal{R}(S)$, à savoir le lieu des repères de Darboux de C ; et la condition pour que C soit une géodésique est que la forme induite sur Γ par ω_{12} soit nulle. Or

$$\omega_{12} = \overline{\omega}_{12} + d\varphi,$$

où $\overline{\omega}_{12}$ est donnée par (5). Cherchons à définir C en prenant pour v une fonction convenable de u (c'est possible au voisinage d'un point de C où la tangente fait un angle $\neq \frac{\pi}{2}$ avec le vecteur $\vec{e}_1(M)$ tangent à la courbe $v = C^{\text{te}}$). L'angle φ de la tangente à C avec $\vec{e}_1(M)$ est donné par

$$\text{tg } \varphi = \frac{\overline{\omega}_2}{\overline{\omega}_1} = \frac{B}{A} \frac{dv}{du}.$$

On doit écrire $d\varphi + \overline{\omega}_{12} = 0$, c'est-à-dire

$$(8) \quad \boxed{\frac{d}{du} \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{B}{A} \frac{dv}{du} \right) = \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial v} - \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial u} \frac{dv}{du}} .$$

Telle est l'équation différentielle des géodésiques. Si on explicite, on voit que c'est une équation du second ordre, de la forme

$$\frac{d^2 v}{du^2} = f(u, v, \frac{dv}{du}) .$$

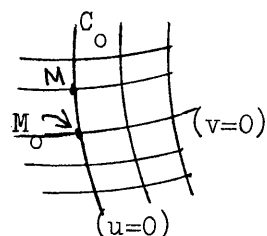
Le théorème d'existence et d'unicité locales des équations différentielles fournit le résultat suivant : un point $M_0 \in S$ étant donné, ainsi qu'une direction tangente à S au point M_0 , il existe, dans un voisinage assez petit de M_0 , une géodésique et une seule passant par M_0 et tangente à la direction donnée.

Choix astucieux des paramètres u et v .

On va voir qu'au voisinage de tout point $M_0 \in S$ on peut choisir des paramètres u et v "astucieux", comme suit :

soit C_0 une courbe passant par M_0 ; par chaque point $M \in C_0$ il passe une unique géodésique normale à C_0 au point M . Une application plus poussée du théorème d'existence des équations différentielles de second ordre permet de voir que les géodésiques passant par les $M \in C_0$ suffisamment voisins de M_0 remplissent une fois et une seule un voisinage de M_0 . Prenons les trajectoires orthogonales de cette famille de géodésiques (C_0 est l'une d'elles) ; dans un ouvert U assez petit contenant M , on a alors deux familles de courbes orthogonales, les courbes de l'une des familles étant géodésiques.

Convenons que les géodésiques sont les courbes $v = C^{te}$, et leurs trajectoires orthogonales les courbes $u = C^{te}$; on peut aussi convenir que u et v sont nuls au point M_0 . La courbe C_0 est donc la courbe $u = 0$. Ceci ne



détermine pas encore entièrement les paramètres u et v . Mais on a en tout cas :

$$ds^2 = (A du)^2 + (B dv)^2 .$$

Exprimons que les courbes $v = C^{te}$ sont des

géodésiques : l'équation (8) doit être vérifiée chaque fois qu'on donne à v une valeur constante (voisine de 0). Pour cela, il faut et il suffit que $\frac{\partial A}{\partial v} = 0$ pour toute valeur de v .

Autrement dit, $A(u,v)$ ne dépend que de u . Mais alors

$$A(u)du$$

est la différentielle d'une fonction de u ; prenons cette nouvelle fonction comme paramètre u (avec toujours $u = 0$ sur C_0). Alors le ds^2 prend la forme

$$(9) \quad ds^2 = du^2 + (B dv)^2.$$

On voit que du est la différentielle de l'arc sur chaque géodésique $v = C^{te}$, et comme les courbes $u = C^{te}$ sont orthogonales aux géodésiques, on a démontré le résultat suivant :

Si, à partir de C_0 , on porte sur chaque géodésique orthogonale à C_0 une même longueur, le lieu des points obtenus est orthogonal à ces géodésiques.

On peut faire un choix de u et v encore un peu plus astucieux. En effet, on aurait pu commencer par prendre pour C_0 une géodésique ; or l'équation des géodésiques, lorsqu'on prend v comme variable et u comme fonction inconnue de v , se déduit de (8) en échangeant les rôles de u et v ; on avait

$$d(\text{arc tg } \frac{B}{A} \frac{dv}{du}) = \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial v} du - \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial u} dv,$$

ou encore

$$-d(\text{arc tg } \frac{A}{B} \frac{du}{dv}) = \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial v} du - \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial u} dv,$$

d'où l'équation

$$(8') \quad \frac{d}{dv}(\text{arc tg } \frac{A}{B} \frac{du}{dv}) = \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial u} - \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial v} \frac{du}{dv}.$$

La courbe C_0 , définie par $u = 0$, est géodésique si et seulement si (8') est vérifiée pour $u = 0$, c'est-à-dire si $\frac{\partial B}{\partial u}(0,v) = 0$.

Enfin, on peut achever de fixer le choix du paramètre v en supposant que, sur la courbe C_0 , v est l'arc, ce qui, d'après (9), s'exprime par la condition

$$B(0,v) = 1.$$

En résumé, il est possible, au voisinage de chaque point M_0 de S , de choisir un paramétrage (u,v) de S de façon que

$$(10) \quad \boxed{ds^2 = du^2 + (B(u,v)dv)^2, \quad B(0,v) = 1, \quad \frac{\partial B}{\partial u}(0,v) = 0} .$$

Alors la courbure totale est donnée par

$$(7) \quad \frac{1}{R_1 R_2} = -\frac{1}{B} \frac{\partial^2 B}{\partial u^2} .$$

Supposons en particulier que la courbure totale soit nulle en tout point. Alors $\frac{\partial^2 B}{\partial u^2} = 0$, donc B (pour chaque v fixé) est une fonction linéaire de u ; mais les relations (10) montrent que $B(u,v) = 1$. Ainsi le ds^2 a la forme

$$\boxed{ds^2 = du^2 + dv^2} .$$

Le difféomorphisme d'un voisinage ouvert U de M_0 sur un ouvert du plan (u,v) , défini par le paramétrage, est donc une isométrie de U sur un ouvert du plan euclidien.

Il en résulte aussitôt :

Proposition.— Si deux surfaces S et S' ont une courbure totale identiquement nulle, elles sont localement isométriques (i.e.: étant donnés $M_0 \in S$ et $M'_0 \in S'$, il existe un difféomorphisme isométrique f d'un voisinage ouvert U de M_0 sur un voisinage ouvert U' de M'_0 , tel que $f(M_0) = M'_0$).

On va prouver une proposition plus générale :

Proposition.— Si deux surfaces S et S' ont une même courbure totale constante, elles sont localement isométriques.

Soit K la valeur constante de la courbure totale de S . Le cas où $K = 0$ vient d'être examiné. Supposons donc $K \neq 0$. On a, avec les coordonnées "astucieuses" satisfaisant à (10) :

$$\frac{\partial^2 B}{\partial u^2} + KB = 0, \quad B(0,v) = 1, \quad \frac{\partial B}{\partial u}(0,v) = 0 .$$

Pour intégrer cette équation différentielle linéaire du second ordre (pour v fixé, et avec les valeurs initiales de B et $\frac{\partial B}{\partial u}$ pour $u = 0$), on distingue deux cas :

1° $K > 0$. La solution est

$$B(u,v) = \lambda(v) \cos(\sqrt{K} u) + \mu(v) \sin(\sqrt{K} u),$$

et les conditions initiales donnent $\lambda(v) = 1$, $\mu(v) = 0$. D'où :

$$(11) \quad ds^2 = du^2 + \cos^2(\sqrt{K} u) dv^2 .$$

Ce paramétrage (u,v) est valable pour un ouvert U de S .

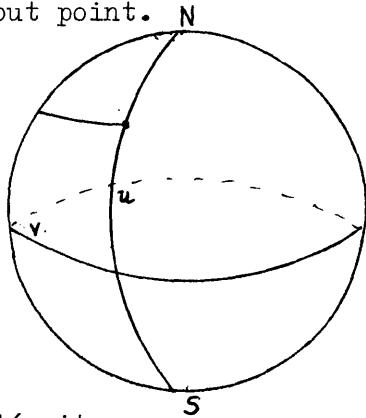
On peut faire de même pour un ouvert U' de S' . Le difféomorphisme isométrique de U sur U' s'obtiendra en faisant se correspondre deux points s'ils ont les mêmes paramètres (u,v) .

2° $K < 0$. On trouve cette fois

$$ds^2 = du^2 + \frac{1}{K} \sinh^2(\sqrt{-K} u) dv^2 ,$$

et le raisonnement s'achève de la même manière.

Un exemple de surface à courbure totale constante > 0 est la sphère-unité $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Tous les points sont des ombilics, et la courbure totale est 1 en tout point.



Si on enlève de S^2 un demi-grand cercle (fermé) joignant le pôle nord N au pôle sud S , on peut repérer les points restants par la latitude u ($-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$) et la longitude v ($-\pi < v < \pi$); alors

ds^2 s'écrit

$$du^2 + \cos^2 u dv^2 ,$$

ce qui est bien en accord avec la formule (11).

THEORIE ABREGEE DES FORMES DIFFERENTIELLES
ET DES VARIETES DIFFERENTIELLES.

Nous avons déjà utilisé les formes différentielles. On va maintenant en esquisser une théorie plus systématique.

I - Formes différentielles dans un ouvert U d'un espace vectoriel E .

E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension finie.

Soit U un ouvert de E .

Définition. On appelle forme différentielle de degré zéro dans U , une application $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.

Cette fonction peut éventuellement être supposée continue, resp. de classe C^k (i.e. : k fois continûment différentiable), resp. de classe C^∞ (i.e. : indéfiniment différentiable). Le plus souvent, nous supposerons f de classe C^∞ .

Définition. On appelle forme différentielle de degré un dans U , une application

$$\omega : U \rightarrow \mathcal{L}(E, \mathbb{R}),$$

où $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des formes linéaires sur E (i.e. : le dual de E). Ici encore, on doit préciser si la fonction ω (à valeurs vectorielles) est continue, ou de classe C^k , ou de classe C^∞ . Le plus souvent nous supposerons ω de classe C^∞ .

Définition. On appelle forme différentielle de degré p (p entier ≥ 2) dans U une application

$$\omega : U \rightarrow \mathcal{L}_p(E, \mathbb{R}),$$

où $\mathcal{L}_p(E, \mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des formes p -linéaires alternées sur $\mathbb{R}$. Rappelons ce qu'on entend par là.

Formes p -linéaires alternées.

Tout d'abord, une application

$$f : \underbrace{E \times \dots \times E}_{p \text{ facteurs}} = E^p \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\xi_1, \dots, \xi_p) \rightarrow f(\xi_1, \dots, \xi_p)$$

est dite multilinéaire (ou p -linéaire quand on veut préciser l'entier p) si

elle est linéaire par rapport à chaque variable (lorsqu'on fixe les autres variables). Prenons une base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ l'espace vectoriel ; alors chaque vecteur $\xi \in E$ a des coordonnées $\xi^1, \dots, \xi^n$ relativement à cette base :

$$\vec{\xi} = \sum_{i=1}^n \xi^i \vec{e}_i .$$

Pour $p = 1$, une forme p -linéaire n'est autre qu'une forme linéaire $\xi \mapsto f(\xi)$, et l'on a

$$f(\xi) = \sum_{i=1}^n a_i \xi^i , \text{ avec } a_i = f(e_i) .$$

Pour p quelconque, soient $\xi_1^1, \dots, \xi_j^n$ les coordonnées du $j^{\text{ième}}$ vecteur de la suite $(\xi_1, \dots, \xi_p)$. La multilinéarité de f implique :

$$\begin{aligned} f(\xi_1, \dots, \xi_p) &= f\left(\sum_{i_1=1}^n \xi_1^{i_1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i_p=1}^n \xi_p^{i_p} e_{i_p}\right) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_p} a_{i_1, \dots, i_p} \xi_1^{i_1} \dots \xi_p^{i_p} , \end{aligned}$$

avec $a_{i_1, \dots, i_p} = f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$.

Réciproquement toute fonction de $\xi_1, \dots, \xi_p$ de la forme

$$\sum_{i_1, \dots, i_p} a_{i_1, \dots, i_p} \xi_1^{i_1} \dots \xi_p^{i_p} \quad (a_{i_1, \dots, i_p} \in \mathbb{R})$$

est une fonction p -linéaire.

On dit qu'une $f(\xi_1, \dots, \xi_p)$ multilinéaire est alternée si la valeur $f(\xi_1, \dots, \xi_p)$ chaque fois que l'on a $\xi_i = \xi_j$ pour 2 indices distincts i et j . Si l'on fixe toutes les variables sauf ξ_i et ξ_j , f devient une $g(\xi_i, \xi_j)$ bilinéaire, telle que

$$g(\xi, \xi) = 0 \text{ quel que soit } \xi \in E .$$

Alors, $g(\xi_i + \xi_j, \xi_i + \xi_j) = 0$, d'où, en développant :

$$\boxed{g(\xi_i, \xi_j) = -g(\xi_j, \xi_i)} .$$

Ainsi l'échange des valeurs de deux variables d'indices distincts multiplie la valeur de $f(\xi_1, \dots, \xi_p)$ par -1 . Plus généralement, soit σ une permutation

quelconque de l'ensemble $\{1, 2, \dots, p\}$; on sait que σ est composée de "transpositions" (une transposition est une permutation qui échange deux éléments i et j distincts et laisse fixes les autres), et que la parité du nombre des transpositions dont σ est composée est un invariant (indépendant du choix de la décomposition de σ en transpositions).

On appelle signature de σ , et on note $\varepsilon(\sigma)$, l'entier égal à $+1$ si σ est composé d'un nombre pair de transpositions, égal à -1 si σ est composé d'un nombre impair de transpositions. On a $\varepsilon(\sigma \circ \sigma') = \varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(\sigma')$; autrement dit, $\sigma \rightarrow \varepsilon(\sigma)$ un homomorphisme du groupe des permutations sur le groupe multiplicatif à deux éléments $+1$ et -1 .

Cela dit, il est immédiat que si f est alternée, on a

$$f(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(\xi_1, \dots, \xi_p)$$

(démonstration par récurrence sur le nombre de transpositions dont σ est composé).

Cela dit, cherchons à quelle condition doivent satisfaire les coefficients $a_{i_1, \dots, i_p}$ d'une forme p -linéaire

$$f(\xi_1, \dots, \xi_p) = \sum_{i_1, \dots, i_p} a_{i_1, \dots, i_p} \xi_1^{i_1} \dots \xi_p^{i_p}$$

pour qu'elle soit alternée. On trouve que

$$a_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(p)}} = \varepsilon(\sigma) a_{i_1, \dots, i_p}$$

pour toute permutation σ . [Exercice : vérifier que c'est nécessaire et suffisant]

Donc $a_{i_1, \dots, i_p} = 0$ si les indices $i_1, \dots, i_p$ ne sont pas tous distincts ; et on obtient

$$\begin{aligned} f(\xi_1, \dots, \xi_p) &= \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} a_{i_1, \dots, i_p} \left(\sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) \xi_1^{i_{\sigma(1)}} \dots \xi_p^{i_{\sigma(p)}} \right) \\ &= \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} a_{i_1, \dots, i_p} f_{i_1, \dots, i_p}(\xi_1, \dots, \xi_p), \end{aligned}$$

où $f_{i_1, \dots, i_p}(\xi_1, \dots, \xi_p)$ est une forme p -linéaire alternée d'un type parti-

culier : c'est la valeur du déterminant formé avec les coordonnées d'indices $i_1, \dots, i_p$ des vecteurs $\xi_1, \dots, \xi_p$.

Observons que $i_1, \dots, i_p$ doivent prendre leurs valeurs dans l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$; par suite, si $p > n$, toute forme p-linéaire alternée sur E (de dimension n) est identiquement nulle.

Explicitons le cas où $p = 2$: on trouve

$$(1) \quad f(\xi, \eta) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} (\xi^i \eta^j - \xi^j \eta^i).$$

Opérations sur les espaces $\mathcal{A}_p(E, R)$.

Il est clair que l'ensemble $\mathcal{A}_p(E, R)$ des formes p-linéaires alternées est un espace vectoriel (pour les opérations évidentes d'addition des formes, et de multiplication d'une forme par un scalaire). On va de plus définir une multiplication :

$$\mathcal{A}_p(E, R) \times \mathcal{A}_q(E, R) \rightarrow \mathcal{A}_{p+q}(E, R)$$

comme suit. Soient $f \in \mathcal{A}_p(E, R)$, $g \in \mathcal{A}_q(E, R)$; la fonction

$$(\xi_1, \dots, \xi_{p+q}) \mapsto f(\xi_1, \dots, \xi_p) g(\xi_{p+1}, \dots, \xi_{p+q})$$

est une forme multilinéaire à $p+q$ variables, mais elle n'est pas alternée en général : elle est seulement alternée par rapport aux p premières variables, et aussi par rapport aux q dernières. Posons

$$h(\xi_1, \dots, \xi_{p+q}) = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) f(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(p)}) g(\xi_{\sigma(p+1)}, \dots, \xi_{\sigma(p+q)}),$$

la sommation étant étendue aux permutations σ de $\{1, \dots, p+q\}$ qui satisfont aux conditions suivantes :

$$(2) \quad \sigma(1) < \dots < \sigma(p), \quad \sigma(p+1) < \dots < \sigma(p+q).$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que h est alternée. Par définition, h se note $f \wedge g$ et s'appelle le produit extérieur de f et g .

Exemple : $p = 1, q = 1$. Si f et g sont deux formes linéaires, on a

$$h(\xi, \eta) = f(\xi) g(\eta) - f(\eta) g(\xi) ;$$

on voit bien que h est bilinéaire et alternée ($h(\xi, \xi) = 0$) ; c'est le produit extérieur $f \wedge g$ des formes linéaires f et g .

Dans ce cas, on constate que

$$f \wedge f = 0, \quad g \wedge f = -f \wedge g$$

[en fait, le produit extérieur est une fonction bilinéaire alternée, à valeurs dans $\mathcal{A}_2(E, \mathbb{R})$, de $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$].

Si $(u^1, \dots, u^n)$ est la base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ duale de la base $(e_1, \dots, e_n)$ de E , la $i^{\text{ème}}$ coordonnée ξ^i d'un vecteur $\xi \in E$ n'est autre que

$$\xi^i = u^i(\xi).$$

Le produit extérieur $u^i \wedge u^j$ est donc la forme bilinéaire alternée définie par

$$(u^i \wedge u^j)(\xi, \eta) = \xi^i \eta^j - \eta^i \xi^j.$$

Il résulte alors de la formule (1) que toute f bilinéaire alternée s'écrit d'une seule manière

$$f = \sum_{i < j} a_{ij} u^i \wedge u^j$$

(combinaison linéaire des produits extérieurs $u^i \wedge u^j$) ; autrement dit, les $u^i \wedge u^j$ (pour les couples (i, j) tels que $i < j$) forment une base de l'espace $\mathcal{A}_2(E, \mathbb{R})$.

Propriétés de la multiplication extérieure :

pour $f \in \mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$, $g \in \mathcal{A}_q(E, \mathbb{R})$, le produit $f \wedge g$ est une fonction bilinéaire du couple (f, g) :

$$\left\{ \begin{array}{l} (f_1 + f_2) \wedge g = f_1 \wedge g + f_2 \wedge g \\ (\lambda f) \wedge g = \lambda(f \wedge g) \quad \text{pour } \lambda \in \mathbb{R} \\ f \wedge (g_1 + g_2) = f \wedge g_1 + f \wedge g_2 \\ f \wedge (\lambda g) = \lambda(f \wedge g) \quad \text{pour } \lambda \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

De plus on a

$$\boxed{g \wedge f = (-1)^{pq} f \wedge g} \quad (\text{sans démonstration});$$

on l'a vérifié lorsque $p = 1, q = 1$). Enfin, la multiplication est associative : cela veut dire que si $f \in \mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$, $g \in \mathcal{A}_q(E, \mathbb{R})$, $h \in \mathcal{A}_r(E, \mathbb{R})$, on a

$$\boxed{(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h)} \quad (\text{sans démonstration}).$$

En particulier, si $f_1, \dots, f_p$ sont p formes linéaires, on écrira

$$f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_p \quad (\text{sans parenthèse}).$$

Exercice. Notant toujours $(u^1, \dots, u^n)$ la base duale de la base $(e_1, \dots, e_n)$ de E , montrer que les produits extérieurs

$$u^{i_1} \wedge \dots \wedge u^{i_p} \quad \text{relatifs aux suites } (i_1, \dots, i_p)$$

telles que $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$.

Conditions d'indépendance linéaire de plusieurs formes linéaires.

On se bornera au cas de 2 formes linéaires et au cas de 3 formes linéaires.

Proposition.— Soient f et g deux formes linéaires sur E . Pour que f et g soient linéairement dépendantes, il faut et il suffit que $f \wedge g$ soit nul (comme élément de $\mathcal{A}_2(E, \mathbb{R})$).

C'est évidemment nécessaire, car si par exemple $g = \lambda f$, on a :

$$f \wedge g = f \wedge (\lambda f) = \lambda(f \wedge f) = 0.$$

C'est suffisant : supposons $f \wedge g = 0$; si f et g sont identiquement nulles, elles sont linéairement dépendantes, donc on peut se borner au cas où $f \neq 0$.

Montrons qu'alors g est proportionnelle à f . Soit $\xi_0 \in E$ tel que $f(\xi_0) \neq 0$; puisque $f \wedge g = 0$, on a

$$f(\xi_0) g(\xi) - f(\xi) g(\xi_0) = 0 \quad \text{pour tout } \xi \in E,$$

donc

$$g(\xi) = \frac{g(\xi_0)}{f(\xi_0)} f(\xi). \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Proposition.— Soient f, g et h trois formes linéaires sur E . Pour que f, g, h soient linéairement dépendantes, il faut et il suffit que $f \wedge g \wedge h = 0$ (comme élément de $\mathcal{A}_3(E, \mathbb{R})$).

C'est nécessaire, car si $h = \lambda f + \mu g$ par exemple, on a $f \wedge g \wedge (\lambda f + \mu g) = 0$. Pour montrer que c'est suffisant, on peut se borner au cas où $f \wedge g \neq 0$ (sinon f et g sont linéairement dépendantes, et a fortiori f, g et h le sont). Soient ξ_0 et ξ_1 deux vecteurs tels que

$$f(\xi_0) g(\xi_1) - f(\xi_1) g(\xi_0) \neq 0.$$

Puisque $f \wedge g \wedge h = 0$, on a, quel que soit $\xi \in E$:

$$\begin{aligned} (f(\xi_0) g(\xi_1) - f(\xi_1) g(\xi_0)) h(\xi) + (g(\xi_0) h(\xi_1) - g(\xi_1) h(\xi_0)) f(\xi) \\ + (h(\xi_0) f(\xi_1) - h(\xi_1) f(\xi_0)) g(\xi) = 0, \end{aligned}$$

donc h est bien combinaison linéaire de f et g .

- Ces préliminaires étant posées, revenons à la définition d'une forme différentielle de degré p dans un ouvert $U \subset E$; c'est une fonction

$$\omega : U \rightarrow \mathcal{A}_p(E, \mathbb{R}),$$

que nous supposons le plus souvent de classe C^∞ .

Pour $x \in U$, $\omega(x)$ est donc une forme p -linéaire alternée; sa valeur pour une suite $(\xi_1, \dots, \xi_p)$ de vecteurs de E sera notée

$$\omega(x; \xi_1, \dots, \xi_p);$$

pour x fixé, c'est multilinéaire et alterné en $\xi_1, \dots, \xi_p$. Dans le cas $p = 1$, on écrira simplement $\omega(x; \xi)$, linéaire en ξ .

La somme $\omega_1 + \omega_2 = \omega$ de deux formes différentielles de degré p se définit comme suit: pour chaque $x \in U$, on pose

$$\omega(x) = \omega_1(x) + \omega_2(x)$$

(au second membre figure la somme de deux éléments de $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$). On a donc

$$\omega(x; \xi_1, \dots, \xi_p) = \omega_1(x; \xi_1, \dots, \xi_p) + \omega_2(x; \xi_1, \dots, \xi_p).$$

On définit de même le produit d'une forme différentielle ω par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ainsi l'ensemble $\Omega_p(U)$ de toutes les formes différentielles de degré p dans U est un espace vectoriel (de dimension infinie). Un élément de $\Omega_p(U)$ s'appelle aussi une p -forme différentielle (pour abréger le langage).

En réalité, la notation $\Omega_p(U)$ est ambiguë, car elle ne précise pas s'il s'agit des applications $U \rightarrow \mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$ de classe C^∞ , ou de toutes celles qui sont de classe C^k , ou encore de toutes celles qui sont continues. Mais comme on se bornera à considérer des formes différentielles de classe C^∞ , il n'y a pas d'inconvénient pratique à la notation $\Omega_p(U)$.

Produit extérieur de deux formes différentielles.

On définit une multiplication

$$\Omega_p(U) \times \Omega_q(U) \rightarrow \Omega_{p+q}(U) ;$$

dite multiplication extérieure : si $\alpha \in \Omega_p(U)$, $\beta \in \Omega_q(U)$, leur produit extérieur $\alpha \wedge \beta$ est la forme différentielle $\omega \in \Omega_{p+q}(U)$ définie par

$$\omega(x) = \alpha(x) \wedge \beta(x)$$

(produit extérieur de deux formes multilinéaires). On a donc :

$$\begin{aligned} & \omega(x ; \xi_1, \dots, \xi_{p+q}) \\ &= \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) \alpha(x ; \xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(p)}) \beta(x ; \xi_{\sigma(p+1)}, \dots, \xi_{\sigma(p+q)}) , \end{aligned}$$

la sommation étant étendue aux permutations σ de $\{1, \dots, p+q\}$ telles que

$$\sigma(1) < \dots < \sigma(p), \quad \sigma(p+1) < \dots < \sigma(p+q).$$

La multiplication extérieure $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$ est bilinéaire ; on a

$$\beta \wedge \alpha = (-1)^{pq} \alpha \wedge \beta \quad \text{si } \alpha \in \Omega_p(U) \text{ et } \beta \in \Omega_q(U) .$$

Elle est associative :

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) .$$

On a le cas particulier d'un produit d'une fonction f (i.e. : une forme différentielle de degré zéro) et d'une p -forme différentielle ω ; on le note simplement $f \cdot \omega$, et on a

$$(f \cdot \omega)(x ; \xi_1, \dots, \xi_p) = f(x) \omega(x ; \xi_1, \dots, \xi_p) .$$

On voit que $\Omega_p(U)$ est un module sur l'anneau $\Omega_0(U)$ des fonctions de classe C^∞ sur U .

Différentiation extérieure.

On va définir une nouvelle opération, qui à chaque $\omega \in \Omega_p(U)$ associe un élément de $\Omega_{p+1}(U)$ noté $d\omega$, et appelé différentielle extérieure de ω . Pour cela, un bref rappel sur les dérivées est nécessaire.

Soit U un ouvert d'un espace vectoriel E (de dimension finie), et soit $f : U \rightarrow F$ une fonction à valeurs dans un espace vectoriel F (de dimension finie). Choisissons des normes sur E et sur F (on sait que, sur un espace

vectoriel E de dimension finie, toutes les normes sont "équivalentes").

On dit que f est différentiable au point $x \in U$ si l'accroissement $f(x+h)-f(x)$ de la fonction f est "sensiblement égal" à une fonction linéaire de l'accroissement h de la variable, c'est-à-dire, d'une façon précise, s'il existe une $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{|f(x+h)-f(x)-\varphi(h)|}{|h|} = 0 .$$

Une telle φ linéaire, si elle existe, est unique. On l'appelle la dérivée de f au point x , et on la note $f'(x)$. On écrit alors $f'(x).h$ pour noter la valeur de $\varphi = f'(x)$ sur le vecteur $h \in E$.

Supposons f différentiable en tout point de U . Alors $f'(x)$ est une fonction de x ; on définit ainsi l'application dérivée

$$f' : U \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$$

[attention : f' ne prend pas ses valeurs dans le même espace F que la fonction f]. La question se pose de savoir si f' est une fonction continue, resp. différentiable. Si f' est différentiable, sa dérivée, notée f'' , est une application

$$U \rightarrow \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F)).$$

Mais on sait que $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$ s'identifie naturellement à l'espace vectoriel des applications bilinéaires $E \times E \rightarrow F$, qu'on notera $\mathcal{L}_2(E, F)$. Cette identification se fait de la manière suivante : si $\varphi(\xi, \eta)$ est une fonction bilinéaire (à valeurs dans F), l'application partielle $\eta \mapsto \varphi(\xi, \eta)$, notée φ_ξ , est un élément de $\mathcal{L}(E, F)$, et l'application $\xi \mapsto \varphi_\xi$ est une application linéaire $E \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$. Réciproquement, si $\xi \mapsto \varphi_\xi$ est une application linéaire $E \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$, on lui associe l'application bilinéaire

$$(\xi, \eta) \mapsto \varphi_\xi(\eta).$$

Ainsi, on peut considérer $f''(x)$ comme un élément de $\mathcal{L}_2(E, F)$. Un théorème classique (qu'on ne redémontre pas ici) dit que, en fait, $f''(x)$ est une fonction

bilinéaire symétrique :

$$f''(x)(\xi, \eta) = f''(x)(\eta, \xi) \quad \text{pour } \xi \in E, \eta \in E.$$

Si on prend une base dans E , les points ont des coordonnées x^i ; alors $f''(x)$ est définie par la matrice des dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j},$$

et le fait que $f''(x)$ est une fonction bilinéaire symétrique se traduit par la symétrie de cette matrice, c'est-à-dire

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \quad (\text{théorème de Schwarz}).$$

Définition de la différentielle extérieure d'une forme différentielle.

Commençons par une forme de degré zéro, c'est-à-dire une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ (supposée de classe C^∞). On lui associe la forme différentielle ω de degré 1 dans U , définie par

$$\omega(x; \xi) = f'(x) \cdot \xi \quad \text{pour } x \in U, \xi \in E.$$

Cette forme différentielle ω se note df , et s'appelle la différentielle de la fonction f dans l'ouvert U .

Soit maintenant $\omega : U \rightarrow \mathcal{L}_p(E, \mathbb{R})$ une forme différentielle de degré $p > 1$. Puisqu'on la suppose de classe C^∞ (la classe C^1 suffirait), on a une fonction dérivée

$$\omega' : U \rightarrow \mathcal{L}(E, \mathcal{L}_p(E, \mathbb{R})),$$

ce qui permet de définir, pour $x \in U$ et $\xi_0 \in E$:

$$\omega'(x) \cdot \xi_0 \in \mathcal{L}_p(E, \mathbb{R}).$$

$(\omega'(x) \cdot \xi_0) \cdot (\xi_1, \dots, \xi_p)$ est, pour $x \in U$ fixé, une fonction $(p+1)$ -linéaire de $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_p$, mais elle n'est pas alternée (elle est seulement alternée par rapport aux p dernières variables). Pour la rendre alternée, on fait la somme suivante :

$$\sum_{i=0}^p (-1)^i (\omega'(x) \cdot \xi_i) \cdot (\xi_0, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \xi_p),$$

où la notation $(\xi_0, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \xi_p)$ désigne la suite de p vecteurs obtenue en supprimant le vecteur ξ_i de la suite $(\xi_0, \dots, \xi_p)$. Par définition, la différentielle extérieure $d\omega$ est donnée par la formule :

$$(3) \quad (d\omega)(x ; \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i (\omega'(x) \cdot \xi_i) (\xi_0, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \xi_p)$$

Remarque : en fait, on a sommé sur toutes les permutations σ de $\{0, 1, \dots, p\}$ telles que

$$\sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(p) ;$$

il y a une telle σ telle que $\sigma(0) = i$, et sa signature $\varepsilon(\sigma)$ est $(-1)^i$.

Dans le cas particulier où $p = 1$, on a

$$(d\omega)(x ; \xi, \eta) = (\omega'(x) \cdot \xi) \cdot \eta - (\omega'(x) \cdot \eta) \cdot \xi ,$$

qui est bien, pour x fixé, une fonction bilinéaire alternée de (ξ, η) .

Remarque : pour ω de degré 1, la relation $d\omega = 0$ exprime que $(\omega'(x) \cdot \xi) \cdot \eta$ est une fonction bilinéaire symétrique de (ξ, η) . Il en est ainsi lorsque $\omega = df$, car alors

$$\omega(x) = f'(x),$$

donc $\omega'(x) = f''(x)$ qui est bilinéaire symétrique. On a donc prouvé la relation

$$d(df) = 0$$

pour toute fonction f de classe C^∞

(de classe C^2 suffirait).

Autre propriété : $d(f \cdot \omega) = (df) \wedge \omega + f \cdot (d\omega)$ pour $f \in \Omega_0(U)$.

Démontrons cette relation importante.

[il faut prendre garde de bien écrire, au second membre, $(df) \wedge \omega$ et non $\omega \wedge (df)$, ce qui n'est pas la même chose si ω est de degré impair].

Rappelons d'abord le résultat suivant, qui concerne la dérivée du "produit" de deux fonctions. Soient $u : U \longrightarrow F$ et $v : U \longrightarrow G$ deux fonctions à valeurs vectorielles, et soit $\varphi : F \times G \longrightarrow H$ une application bilinéaire (F, G, H désignent trois espaces vectoriels réels). Le "produit" de u et v suivant φ est l'application $\psi : U \longrightarrow H$ définie par

$$\psi(x) = \varphi(u(x), v(x)) \quad \text{pour } x \in U.$$

Alors si u et v sont différentiables, ψ est aussi différentiable, et la dérivée $\psi'(x)$ est donnée par la formule

$$\psi'(x) \cdot \xi = \varphi(u'(x) \cdot \xi, v) + \varphi(u(x), v'(x) \cdot \xi).$$

Appliquons ce résultat dans le cas où

$$F = \mathbb{R}, \quad G = \mathcal{A}_p(E, \mathbb{R}), \quad H = \mathcal{A}_p(E, \mathbb{R}),$$

$\varphi : \mathbb{R} \times \mathcal{A}_p(E, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$ étant définie par la structure d'espace vectoriel de $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$ [multiplication d'un élément de $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$ par un scalaire]. Nous prenons en outre $u = f$, $v = \omega$; alors $\psi = f \cdot \omega$, et on a donc

$$(f \cdot \omega)'(x) \cdot \xi = (f'(x) \cdot \xi) \cdot \omega(x) + f(x) \cdot (\omega'(x) \cdot \xi).$$

Les deux membres sont des fonctions p -linéaires alternées. D'où

$$\begin{aligned} d(f\omega)(x; \xi_0, \dots, \xi_p) &= \sum_{i=0}^p (-1)^i (f'(x) \cdot \xi_i) \omega(x; \xi_0, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \xi_p) \\ &\quad + f(x) \cdot \sum_{i=0}^p (\omega'(x) \cdot \xi_i) (\xi_1, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \xi_p) \end{aligned}$$

ce qui donne aussitôt

$$d(f\omega) = (df) \cdot \omega + f \cdot (d\omega).$$

C.Q.F.D.

Généralisation : on a $\boxed{d(d\omega) = 0}$ pour tout $\omega \in \Omega_p(U)$,

$\boxed{d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (d\beta)}$ pour $\alpha \in \Omega_p(U)$, $\beta \in \Omega_q(U)$ (sans démonstration ici).

[il faut prendre garde de bien écrire, au second membre, $(df) \wedge \omega$ et non $\omega \wedge (df)$, ce qui n'est pas la même chose si ω est de degré impair].

Rappelons d'abord le résultat suivant, qui concerne la dérivée du "produit" de deux fonctions. Soient $u : U \longrightarrow F$ et $v : U \longrightarrow G$ deux fonctions à valeurs vectorielles, et soit $\varphi : F \times G \longrightarrow H$ une application bilinéaire (F, G, H désignent trois espaces vectoriels réels). Le "produit" de u et v suivant φ est l'application $\psi : U \longrightarrow H$ définie par

$$\psi(x) = \varphi(u(x), v(x)) \quad \text{pour } x \in U.$$

Alors si u et v sont différentiables, ψ est aussi différentiable, et la dérivée $\psi'(x)$ est donnée par la formule

$$\psi'(x) \cdot \xi = \varphi(u'(x) \cdot \xi, v) + \varphi(u(x), v'(x) \cdot \xi).$$

Appliquons ce résultat dans le cas où

$$F = \mathbb{R}, \quad G = \mathcal{A}_p(E, \mathbb{R}), \quad H = \mathcal{A}_p(E, \mathbb{R}),$$

$\varphi : \mathbb{R} \times \mathcal{A}_p(E, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$ étant définie par la structure d'espace vectoriel de $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$ [multiplication d'un élément de $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$ par un scalaire]. Nous prenons en outre $u = f$, $v = \omega$; alors $\psi = f \cdot \omega$, et on a donc

$$(f \cdot \omega)'(x) \cdot \xi = (f'(x) \cdot \xi) \cdot \omega(x) + f(x) \cdot (\omega'(x) \cdot \xi).$$

Les deux membres sont des fonctions p -linéaires alternées. D'où

$$\begin{aligned} d(f\omega)(x; \xi_0, \dots, \xi_p) &= \sum_{i=0}^p (-1)^i (f'(x) \cdot \xi_i) \omega(x; \xi_0, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \xi_p) \\ &\quad + f(x) \cdot \sum_{i=0}^p (\omega'(x) \cdot \xi_i) (\xi_0, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \xi_p) \end{aligned}$$

ce qui donne aussitôt

$$d(f\omega) = (df) \wedge \omega + f \cdot (d\omega).$$

C.Q.F.D.

Généralisation : on a $d(d\omega) = 0$ pour tout $\omega \in \Omega_p(U)$,

$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (d\beta)$ pour $\alpha \in \Omega_p(U)$, $\beta \in \Omega_q(U)$ (sans démonstration ici).

Ecriture canonique d'une forme différentielle lorsque U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$
(on peut toujours se ramener à ce cas en prenant une base de l'espace vectoriel E).

Notation : $x^1, x^2, \dots, x^n$: coordonnées de $x \in \mathbb{R}^n$. Les coordonnées sont des fonctions différentiables ; $dx^1, \dots, dx^n$ sont des formes différentielles de degré un.

Rappel : soit f une fonction ; on a vu que, par définition,

$$(df)(x ; \xi) = f'(x) \cdot \xi.$$

Si f est linéaire, on a $f'(x) = f$ (valeur indépendante de x). Appliquant ceci à dx^i , on trouve : $(dx^i)(x, \xi) = \xi^i$, i -ième coordonnée du vecteur ξ ; donc dx^i est la i -ème forme linéaire coordonnée u^i .

Ecriture canonique d'une forme ω de degré un. Par définition :

$$\omega(x) \cdot \xi = \sum_{i=1}^n a_i(x) \xi^i.$$

Par conséquent

$$(1) \quad \boxed{\omega = \sum_i a_i(x) \cdot dx^i} \quad \text{Les coefficients } a_i(x) \text{ sont uniques.}$$

Ecriture canonique d'une forme ω de degré 2. On a vu que la forme bilinéaire alternée $\omega(x)$ s'écrit d'une seule manière $\omega(x) = \sum_{i < j} a_{ij}(x) u^i \wedge u^j$.

Donc on a

$$(2) \quad \boxed{\omega = \sum_{i < j} a_{ij}(x) \cdot (dx^i) \wedge (dx^j)}$$

Les coefficients $a_{ij}(x)$ sont uniques.

Remarque : Soit ω une forme différentielle de degré 2 :

$$\omega = 0 \iff a_{ij}(x) = 0 \quad \forall x. \quad [\text{d'après (2)}].$$

Ecriture canonique du produit extérieur de deux formes différentielles de degré 1.

$$\begin{cases} \omega_1 = \sum_{i=1}^n a_i(x) \cdot (dx^i) \\ \omega_2 = \sum_{j=1}^n b_j(x) \cdot (dx^j) \end{cases}$$

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \sum_{i,j} (a_i(x) \cdot b_j(x)) \cdot dx^i \wedge dx^j.$$

D'où, en groupant deux par deux les termes non nuls :

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \sum_{i < j} [a_i(x) b_j(x) - a_j(x) b_i(x)] dx^i \wedge dx^j$$

On généralise facilement au produit extérieur de deux formes différentielles de degrés p et q .

Ecriture canonique de la différentielle d'une fonction f :

$$\begin{aligned} (df)(x; \xi) &= f'(x) \cdot \xi \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot \xi^i \end{aligned}$$

d'où

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx^i$$

Problème. Soit ω une forme différentielle de degré un : $\omega = \sum_i a_i(x) dx^i$; calculer l'écriture canonique de $d\omega$. On a $d\omega = \sum_i d[a_i(x) \cdot dx^i]$.

Utilisons la relation $d(f\omega) \wedge (df) \omega + f \cdot (d\omega)$.

On trouve ici :

$$d\omega = \sum_i (da_i(x)) \wedge dx^i + \sum_i a_i(x) \cdot d(dx^i).$$

Or $d(dx^i) = 0$. D'où

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_i [da_i(x)] \wedge dx^i \\ &= \sum_{i,j} \left(\frac{\partial a_i(x)}{\partial x^j} dx^j \right) \wedge dx^i \end{aligned}$$

Finalement :

$$d\omega = \sum_{i < j} \left[\frac{\partial a_j(x)}{\partial x^i} - \frac{\partial a_i(x)}{\partial x^j} \right] dx^i \wedge dx^j$$

Remarque. $d\omega = 0 \iff \frac{\partial a_j(x)}{\partial x^i} = \frac{\partial a_i(x)}{\partial x^j} \quad \forall i, \forall j$.

En particulier, la relation $d(df) = 0$ exprime que

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (\text{théorème de Schwarz}).$$

Changement de variable dans les formes différentielles.

Soient $U \subset E$, $U' \subset E'$, $\varphi : U' \longrightarrow U$ différentiable

$$y = (y^1, \dots, y^p) \in U'$$

$$x = \varphi(y) = (\varphi^1(y), \dots, \varphi^n(y)) \in U.$$

On va associer à φ une application linéaire $\varphi^* : \Omega_p(U) \rightarrow \Omega_p(U')$ de la façon suivante : pour $\omega \in \Omega_p(U)$, on a, par définition :

$$(\varphi^* \omega)(\varphi ; \eta_1, \dots, \eta_p) = \omega(\varphi(y) ; \varphi'(y). \eta_1, \dots, \varphi'(y). \eta_p).$$

On dit que $\varphi^*(\omega)$ est la forme différentielle (sur U') déduite de ω par le changement de variables $\varphi : U' \longrightarrow U$.

Propriétés du changement de variable.

$$(1) \text{ linéarité : } \varphi^*(\omega_1 + \omega_2) = \varphi^*(\omega_1) + \varphi^*(\omega_2)$$

$$\varphi^*(\lambda \omega) = \lambda \varphi^*(\omega) \quad \text{pour } \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$(2) \text{ cas particulier : } p = 0 \text{ (fonctions) alors } \varphi^*(f) = f \circ \varphi.$$

$$(3) \varphi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \varphi^*(\omega_1) \wedge \varphi^*(\omega_2) \quad \text{conséquence immédiate de la définition du produit extérieur.}$$

$$(4) \varphi^*(df) = d(\varphi^*(f)).$$

Démonstration. Cette ^{dernière} relation va résulter du théorème qui donne la dérivée d'une fonction composée

$$\begin{aligned} (\varphi^*(df))(y ; \eta) &= (df)(\varphi(y) ; \varphi'(y). \eta) \\ &= f'(\varphi(y)) \cdot (\varphi'(y) \cdot \eta) \\ &= (f \circ \varphi)'(y) \cdot \eta. \\ &= d(\varphi^*(f))(y ; \eta). \end{aligned}$$

$$(5) \text{ plus généralement : } \varphi^*(d\omega) = d(\varphi^*(\omega)).$$

Démonstration : Exercice.

Calculs explicites avec l'écriture canonique. Soit ω une forme différentielle de degré un :

$$\begin{aligned}
\omega &= \sum_i a_i(x) dx^i \\
\varphi^*(\omega) &= \sum_i \varphi^*(a_i(x)) dx^i \\
&= \sum_i \varphi^*(a_i(x)) \varphi^*(dx^i) \\
&= \sum_i (a_i \circ \varphi)(y) d\varphi^*(x^i)
\end{aligned}$$

or

$$\varphi^*(x^i) = x^i \circ \varphi = \varphi^i$$

d'où

$$\boxed{\varphi^*(\omega) = \sum_i (a_i \circ \varphi)(y) d(\varphi^i(y))} .$$

En développant $d\varphi^i = \sum_{j=1}^p \frac{\partial \varphi^i}{\partial y^j} dy^j$, on obtient l'écriture canonique de $\varphi^*(\omega)$.

On procède de même pour une forme différentielle de degré > 1 ; par exemple, soit une forme de degré 2 :

$$\omega = \sum_{i < j} a_{ij}(x) dx^i \wedge dx^j ;$$

alors

$$\varphi^*(\omega) = \sum_{i < j} (a_{ij} \circ \varphi)(y) d\varphi^i(y) \wedge d\varphi^j(y) ,$$

et on développe le second membre.

Composition de changements de variable. Soient : $U \subset E$, $U' \subset E'$, $U'' \subset E''$, $\varphi : U' \rightarrow U$, $\psi : U'' \rightarrow U'$. Alors $\varphi \circ \psi : U'' \rightarrow U$, et on a

$$\Omega_p(U) \xrightarrow{\varphi^*} \Omega_p(U') \xrightarrow{\psi^*} \Omega_p(U'').$$

Proposition. -

$$\boxed{(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*}$$

Démonstration. Pour $p = 0$, c'est la relation $f \circ (\varphi \circ \psi) = (f \circ \varphi) \circ \psi$.

Pour $p = 1$:

$$\begin{aligned}
\psi^*(\varphi^*(\omega))(z ; \zeta) &= (\varphi^* \omega)(\varphi(z) ; \varphi'(z) \cdot \zeta) \\
&= \omega[\varphi(\varphi(z)) ; \varphi'(\varphi(z)) \cdot (\psi'(z) \cdot \zeta)] \\
&= \omega[\varphi \circ \psi(z), (\varphi \circ \psi)'(z) \cdot \zeta] \\
&= (\varphi \circ \psi)^*(\omega)(z ; \zeta) ,
\end{aligned}$$

d'où $\phi^*(\phi^* \omega) = (\phi \circ \phi)^*(\omega)$.

C. Q. F. D.

On généralise facilement cette démonstration pour $p > 1$.

Formes différentielles quadratiques. Soit U un ouvert d'un espace vectoriel E .

Notation. $\mathcal{Q}_2(E, \mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des formes quadratiques sur E .

$\mathcal{Q}_2^+(E, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des formes quadratiques définies positives sur E .

Définition. Une forme différentielle quadratique sur U est une application $\alpha : U \longrightarrow \mathcal{Q}_2(E, \mathbb{R})$.

Si on note, pour $x \in U$, $\xi \in E$, $\alpha(x; \xi)$ la valeur de $\alpha(x)$ au vecteur ξ , on voit que $\alpha(x; \xi)$ est une forme quadratique en ξ (qui dépend de x).

Rappel. Il existe une correspondance bijective entre $\mathcal{Q}_2(E, \mathbb{R})$ et $\mathcal{Y}_2(E, \mathbb{R})$ (espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques) : à $f \in \mathcal{Y}_2(E, \mathbb{R})$ on fait correspondre $\varphi \in \mathcal{Q}_2(E, \mathbb{R})$ définie par : $\varphi(\xi) = f(\xi, \xi)$.
Réciproquement : à $\varphi \in \mathcal{Q}_2(E, \mathbb{R})$ on fait correspondre $f \in \mathcal{Y}_2(E, \mathbb{R})$ définie par :

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{2}[\varphi(\xi + \eta) - \varphi(\xi) - \varphi(\eta)].$$

Soit $\alpha : U \longrightarrow \mathcal{Q}_2(E, \mathbb{R})$ une forme différentielle quadratique. On définit

$$\beta : U \longrightarrow \mathcal{L}_2(E, \mathbb{R})$$

$$\beta(x; \xi, \eta) = \frac{1}{2}[\alpha(x; \xi + \eta) - \alpha(x; \xi) - \alpha(x; \eta)].$$

Exemple. Produit (ordinaire, non extérieur) de deux formes différentielles de degré 1 : soient ω_1 et ω_2 deux formes différentielles de degré 1 ; $\omega_1(x; \xi)$ et $\omega_2(x; \xi)$ sont linéaires en ξ . Soit α définie par

$$\alpha(x; \xi) = \omega_1(x; \xi) \omega_2(x; \xi).$$

α est bien, pour x fixé, une forme quadratique en ξ ; on écrit $\alpha = \omega_1 \cdot \omega_2$ (ne pas confondre avec $\omega_1 \wedge \omega_2$).

Ecriture canonique d'une forme différentielle quadratique.

Soit $E = \mathbb{R}^n$. Toute forme quadratique $\varphi \in \mathcal{Q}_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ s'écrit d'une seule manière

$$\varphi(\xi) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} \xi^i \xi^j.$$

La forme bilinéaire associée s'écrit

$$\begin{aligned} f(\xi, \xi') &= \frac{1}{2} \sum_{i \leq j} a_{ij} (\xi^i \xi'^j + \xi^j \xi'^i) \\ &= \sum_{i,j} b_{ij} \xi^i \xi'^j, \end{aligned}$$

avec $b_{ij} = b_{ji}$,
$$\begin{cases} b_{ij} = \frac{1}{2} a_{ij} & \text{pour } i < j \\ b_{ii} = a_{ii} \end{cases}$$

Ainsi on a une autre écriture canonique pour φ :

$$\varphi(\xi) = \sum_{i,j} b_{ij} \xi^i \xi^j, \quad b_{ij} = b_{ji};$$

c'est celle-ci qu'on utilise le plus souvent, lorsque la caractéristique du corps est $\neq 2$ (ce qui est le cas pour le corps $\mathbb{R}$ qui nous intéresse ici).

De là on déduit une écriture canonique pour une forme différentielle quadratique :

$$\alpha = \sum_{i,j} b_{ij}(x) (dx^i) \cdot (dx^j), \quad b_{ij}(x) = b_{ji}(x)$$

Changement de variables pour les formes différentielles quadratiques.

Soit, comme plus haut, $\varphi : U' \rightarrow U$ une application différentiable. A chaque forme différentielle quadratique α sur U on associe une forme différentielle quadratique sur U' , notée $\varphi^*(\alpha)$, à savoir :

$$(\varphi^*(\alpha))(y; \eta) = \alpha(\varphi(y); \varphi'(y) \cdot \eta).$$

Si on a

$$\alpha = \sum_{i,j} b_{ij}(x) (dx^i) \cdot (dx^j),$$

alors

$$\varphi^*(\alpha) = \sum_{i,j} (b_{ij} \circ \varphi)(y) (d\varphi^i(y)) \cdot (d\varphi^j(y)),$$

et il reste à développer :

$$d\varphi^i = \sum_k \frac{\partial \varphi^i}{\partial y^k} dy^k, \quad d\varphi^j = \sum_h \frac{\partial \varphi^j}{\partial y^h} dy^h$$

pour obtenir l'écriture canonique de $\varphi^*(\alpha)$.

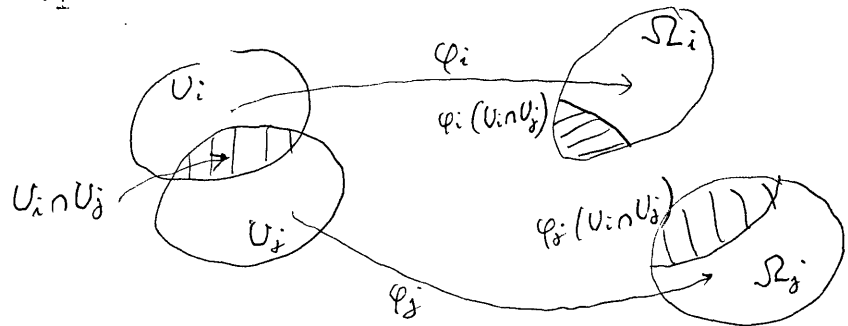
Variétés différentielles.

Définition. Une variété différentielle de dimension n et de classe C^∞ est définie par les données et l'axiome suivants :

Données : - un espace topologique séparé X ;

- un recouvrement de X par des ouverts U_i ($i \in I$), et des applications $\varphi_i : U_i \rightarrow \Omega_i$, où les φ_i sont des homéomorphismes et les Ω_i des ouverts de $\mathbb{R}^n$. Les φ_i s'appellent des "cartes".

Axiome :



on définit, quels que soient i et j , le changement de cartes :

$$\varphi_i(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}} \varphi_j(U_i \cap U_j) ;$$

$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ est un homéomorphisme d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

L'axiome est le suivant : $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ est une application de classe C^∞ ; comme cette condition est posée pour tout couple (i, j) , elle vaut aussi pour le couple (j, i) ; donc l'inverse $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ de $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ est aussi de classe C^∞ . Donc $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ est un homéomorphisme qui est indéfiniment différentiable ainsi que son inverse ; une telle application s'appelle un difféomorphisme.

Définition. Une collection de cartes s'appelle un atlas.

Définition. Soit $x \in U_i$; alors $\varphi_i(x) \in \mathbb{R}^n$ a des coordonnées $\xi^1, \dots, \xi^n$ qui sont des fonctions continues sur U ; le système de ces fonctions ξ^i ($1 \leq i \leq n$) s'appelle un système de coordonnées locales sur l'ouvert U_i .

Exemples.

1) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Alors Ω a une structure de variété différentielle, si on se donne une seule carte $\varphi : \Omega \xrightarrow{\text{identité}} \Omega$.

2) Soient X une variété différentielle et U un ouvert de X .

Alors U a canoniquement une structure de variété différentielle induite par X : le recouvrement de U est défini par les ouverts

$$V_i = U \cap U_i ;$$

pour chaque i , la carte $\phi_i : V_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ est la restriction de la carte $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ de U_i sur un ouvert Ω_i de $\mathbb{R}^n$. La carte ϕ_i se fait sur un sous-ouvert de Ω_i .

Fonction différentiable sur une variété différentielle.

Définition. Soit $f : X \rightarrow E$, où X est une variété différentielle et E un espace vectoriel. f est différentiable $\iff \begin{cases} f \text{ est continue ;} \\ \forall i, f \circ \varphi_i^{-1} \text{ est différentiable dans } \Omega_i, \end{cases}$

où $\begin{cases} (U_i)_{i \in I} \text{ est le recouvrement de } X, \\ \text{et } \varphi_i : U_i \rightarrow \Omega_i \text{ la carte donnée de } U_i. \end{cases}$

Définition. Soit $f : X \rightarrow Y$, où X est une variété différentielle de dimension n , et Y une variété différentielle de dimension p . Notons en abrégé :

X définie par $(U_i, \varphi_i, \Omega_i)$

Y définie par $(V_\alpha, \phi_\alpha, \Omega_\alpha)$

Par définition :

f différentiable (i.e. de classe C^∞) $\iff \begin{cases} (1) f \text{ continue ;} \\ (2) \phi_\alpha \circ f \circ \varphi_i^{-1} \text{ différentiable.} \end{cases}$

Explicitons (2) : pour tout $x \in X$, soit U_i un ouvert du recouvrement de X tel que $x \in U_i$, et soit V_α un ouvert du recouvrement de Y tel que :

$y = f(x) \in V_\alpha$; alors $\phi_\alpha \circ f \circ \varphi_i^{-1}$ existe dans un voisinage de $\varphi_i(x)$ dans Ω_i .

C'est une application d'un voisinage de $\varphi_i(x)$ dans Ω_i , à valeurs dans $\Omega_\alpha \subset \mathbb{R}^p$.

On demande qu'elle soit différentiable.

Remarque.— Revenons à la définition de X avec des cartes $\varphi_i : U_i \rightarrow \Omega_i$.

Si on munit U_i de la structure différentielle induite (par X sur l'ouvert U_i), φ_i est différentiable ainsi que son inverse φ_i^{-1} . Autrement dit, φ_i est un difféomorphisme.

Exemple : $P_n(\mathbb{R})$: espace projectif réel de dimension n .

On définit une structure de variété différentielle comme suit :

- le recouvrement est formé des ouverts U_i définis par

$$U_i = \{x \in P_n(\mathbb{R}) \mid \text{la } i^{\text{ème}} \text{ coordonnée homogène de } x \text{ est non nulle}\}.$$

- cartes : $\varphi_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$(x_0, x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right);$$

$$\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x_0, x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right).$$

Examinons les changements de cartes : on va montrer par exemple que $\varphi_0 \circ \varphi_1^{-1}$ est un difféomorphisme :

$$\varphi_0(U_0 \cap U_1) = \{(y_1, \dots, y_n) \mid y_1 \neq 0\} \text{ ouvert de } \mathbb{R}^n$$

$$\varphi_1(U_0 \cap U_1) = \{(y_1, \dots, y_n) \mid y_1 \neq 0\} \text{ ouvert de } \mathbb{R}^n$$

$$(y_1, \dots, y_n) \xrightarrow{\varphi_1^{-1}} (y_1, 1, y_2, \dots, y_n) \xrightarrow{\varphi_0} \left(\frac{1}{y_1}, \frac{y_2}{y_1}, \dots, \frac{y_n}{y_1}\right)$$

où $y_1 \neq 0$.

D'après sa définition, $\varphi_0 \circ \varphi_1^{-1}$ est une application rationnelle, donc de classe C^∞ (puisque le dénominateur y_1 est $\neq 0$). De même, $\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}$ est de classe C^∞ .

Sous-variétés d'une variété différentielle.

Soit X une variété différentielle de dimension n .

Soit Y un sous-ensemble de X .

Définition. Y est, au point $a \in Y$, une sous-variété différentielle (de classe C^∞) de dimension p si et seulement s'il existe un voisinage ouvert V de a (ouvert dans X) et une carte $\varphi : V \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$, tels que :

$$\varphi(a) = 0, \quad \varphi(Y \cap V) = \Omega \cap A,$$

Exemples.

1) On se place dans $\mathbb{R}^3$, les coordonnées s'appelant x, y, z . Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (coordonnées x, y). Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Alors les points de $\mathbb{R}^3$ tels que $z = f(x, y)$ forment une sous-variété différentielle de l'ouvert $p^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^3$, en notant $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la projection $(x, y, z) \mapsto (x, y)$.

2) La sphère $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est définie par l'équation

$$(x^0)^2 + (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 = 1,$$

en notant $x^0, \dots, x^n$ les coordonnées dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Soit

$$a = (a^0, \dots, a^n) \in S^n.$$

On peut, dans un voisinage assez petit de a , résoudre l'équation de la sphère par rapport à l'une des coordonnées convenablement choisie ; par exemple, si $a^0 \neq 0$, l'équation se résout comme suit :

$$x^0 = \sqrt{1 - (x^1)^2 - \dots - (x^n)^2}$$

dans l'ouvert défini par $x^0 > 0$. La sphère S^n , qui est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^{n+1}$, est donc une sous-variété différentielle de $\mathbb{R}^{n+1}$.

3) Exercice : démontrer que les variétés linéaires projectives de $P_n(\mathbb{R})$ sont des sous-variétés différentielles de $P_n(\mathbb{R})$.

Structure de variété différentielle d'une sous-variété.

Soit Y une sous-variété différentielle d'une variété différentielle X . On va définir sur Y une structure de variété différentielle : par définition d'une sous-variété, tout point de Y possède un voisinage ouvert V (dans X) tel qu'il existe une carte

$$\varphi : V \xrightarrow{\sim} \Omega \subset \mathbb{R}^r$$

pour laquelle $\varphi(Y \cap V)$ est l'ensemble des points $(x^1, \dots, x^n) \in \Omega$ tels que $x^{p+1} = 0, \dots, x^n = 0$. Par définition, $x^1, \dots, x^p$ forment un système de coordonnées locales sur $Y \cap V$; ce qui revient à dire que $\varphi|_{Y \cap V}$ est une carte de $Y \cap V$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$. On laisse le soin de vérifier que les cartes ainsi obtenues

définissent sur Y une structure de variété différentielle.

Exemple : $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$; dans un voisinage convenable d'un point $a = (a^0, a^1, \dots, a^n) \in S^n$ tel que $a^0 \neq 0$, les fonctions $x^1, \dots, x^n$ définissent un système de coordonnées locales sur S^n .

Rappel du théorème des fonctions implicites :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, contenant l'origine 0 (pour fixer les idées).

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application différentiable, définie par des équations

$$(1) \quad x^i = f^i(u^1, \dots, u^p) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

les f^i étant différentiables dans U , à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que le rang de la matrice $\left(\frac{\partial f^i}{\partial u^j}\right)$ au point 0 est égal à p , ce qui revient à dire que cette matrice contient une sous-matrice à p lignes et p colonnes dont le déterminant est $\neq 0$ au point 0 . [Alors le rang est encore p en tout point suffisamment voisin de 0]. Supposons par exemple que

$$(2) \quad \det \left(\frac{\partial f^i}{\partial u^j} \right) \neq 0 \quad \text{pour } 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq p.$$

Alors, dans un voisinage convenable de 0 , le système (1) équivaut à un système

$$\begin{cases} u^i = g^i(x^1, \dots, x^p), & 1 \leq i \leq p \\ x^{p+1} = g^{p+1}(x^1, \dots, x^p) \\ \vdots \\ x^n = g^n(x^1, \dots, x^p), \end{cases}$$

les fonctions $g^1, \dots, g^n$ étant différentiables. Il en résulte que l'image d'un voisinage convenable de 0 , par l'application (1), est une sous-variété différentielle dans un voisinage du point $f(0)$, lorsqu'on a supposé que le rang de $\left(\frac{\partial f^i}{\partial u^j}\right)$ est p à l'origine.

Fibré tangent à une variété différentielle X .

On étudie d'abord un cas particulier : celui d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ (c'est une variété différentielle).

Définition. Un vecteur tangent à Ω au point $x \in \Omega$ est un couple (x, ξ) , où $(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$. L'ensemble des vecteurs tangents aux différents points de Ω est donc $\Omega \times \mathbb{R}^n$, qu'on note aussi $T(\Omega)$. Soit

$$p : T(\Omega) \rightarrow \Omega$$

la projection $(x, \xi) \mapsto x$;

x s'appelle l'origine du vecteur tangent (x, ξ) .

Définition. $T(\Omega)$, muni de l'application p , s'appelle le fibré tangent à Ω .

La fibre d'un point x de Ω est l'ensemble des vecteurs ξ du couple (x, ξ) quand on fixe x ; on la note $T_x(\Omega)$. C'est l'espace vectoriel tangent à Ω au point x , qui s'identifie à $\mathbb{R}^n$.

Soient maintenant Λ un ouvert de $\mathbb{R}^p$,

$f : \Omega \rightarrow \Lambda$ une application différentiable.

A f on associe la fonction $T(f)$ définie par :

$$\begin{aligned} T(f) : T(\Omega) = \Omega \times \mathbb{R}^n &\xrightarrow{T(f)} \Lambda \times \mathbb{R}^p = T(\Lambda) \\ (x, \xi) &\longmapsto (f(x), f'(x) \cdot \xi). \end{aligned}$$

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} T(\Omega) & \xrightarrow{T(f)} & T(\Lambda) \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ \Omega & \xrightarrow{f} & \Lambda \end{array}$$

Le théorème de la dérivée d'une fonction composée, appliqué à

$$\Omega \xrightarrow{f} \Lambda \xrightarrow{g} \Sigma,$$

s'écrit

$$(g \circ f)'(x) \cdot \xi = g'(f(x)) \cdot (f'(x) \cdot \xi).$$

Cette relation exprime que dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} T(\Omega) & \xrightarrow{T(f)} & T(\Lambda) & \xrightarrow{T(g)} & T(\Sigma) \\ \downarrow p & & \downarrow p & & \downarrow p \\ \Omega & \xrightarrow{f} & \Lambda & \xrightarrow{g} & \Sigma \end{array},$$

le composé $T(g) \circ T(f)$ est égal à $T(g \circ f)$. Telle est la formulation sous laquelle s'exprime le théorème de la dérivée d'une fonction composée.

Cas général.— Soit X une variété différentielle. Soit

$$\varphi_i : U_i \xrightarrow{\sim} \Omega_i \subset \mathbb{R}^n$$

une carte de l'ouvert $U_i \subset X$. Par définition, un vecteur tangent à X en un point $x \in U_i$ est défini par un couple

$$(\varphi_i(x), \xi) \in \Omega_i \times \mathbb{R}^n = T(\Omega_i);$$

c'est un vecteur tangent à Ω_i au point $\varphi_i(x)$. Mais il faut préciser ce qui arrive quand on change de carte.

Soit donc $\varphi_j : U_j \xrightarrow{\sim} \Omega_j \subset \mathbb{R}^n$ une autre carte ; posons, dans l'ouvert $\varphi_i(U_i \cap U_j) \subset \Omega_i$,

$$\varphi_{ji} = \varphi_j \circ (\varphi_i)^{-1} ;$$

φ_{ji} est un difféomorphisme $\varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$. L'application $T(\varphi_{ji}) = \varphi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme qui est linéaire dans chaque fibre.

Soit alors $x \in U_i \cap U_j$; par définition, un vecteur tangent à Ω_i au point $\varphi_i(x)$ et un vecteur tangent à Ω_j au point $\varphi_j(x)$ définissent le même vecteur tangent à X si et seulement s'ils se correspondent dans le difféomorphisme $T(\varphi_{ji})$.

L'ensemble $T_x(X)$ des vecteurs tangents à X en un point $x \in X$ a donc une structure d'espace vectoriel (réel, de dimension n) : si $x \in U_i$, la carte φ_i définit un isomorphisme de l'espace vectoriel $T_x(X)$ sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

Définition. Soit $T(X)$ la réunion disjointe des $T_x(X)$ lorsque x parcourt X . On munit $T(X)$ de l'application

$$p : T(X) \rightarrow X$$

qui, à chaque vecteur tangent $\xi \in T(X)$, associe l'unique $x \in X$ tel que $\xi \in T_x(X)$. Alors la fibre $p^{-1}(x)$ n'est autre que $T_x(X)$, qu'on appelle l'espace vectoriel tangent à X au point x .

On va maintenant définir sur $T(X)$ une structure de variété différentielle.

Soit $\varphi_i : U_i \rightarrow \Omega_i \subset \mathbb{R}^n$ une carte ; soit $p^{-1}(U_i) = T(U_i)$ l'image réciproque de U_i dans $T(X)$. D'après la définition des vecteurs tangents à X aux points de U_i , φ_i définit une bijection

$$\Phi_i : T(U_i) \rightarrow \Omega_i \times \mathbb{R}^n = T(\Omega_i).$$

Dans $T(U_i) \cap T(U_j) = T(U_i \cap U_j)$, le changement de cartes

$$\Phi_j \circ \Phi_i^{-1} : \Phi_i(T(U_i \cap U_j)) \rightarrow \Phi_j(T(U_i \cap U_j))$$

n'est autre que ce qu'on a noté plus haut $T(\varphi_{ji})$; c'est un difféomorphisme. Donc les cartes Φ_i définissent bien sur $T(X)$ une structure de variété différentielle. On se rappellera que chaque carte $\varphi_i : U_i \rightarrow \Omega_i$ définit une carte $\Phi_i : T(U_i) \rightarrow T(\Omega_i) = \Omega_i \times \mathbb{R}^n$, et l'on notera $T(\varphi_i)$ l'application Φ_i .

Observons que l'application $p : T(X) \rightarrow X$ est différentiable (pour les structures différentielles de $T(X)$ et de X).

Champ de vecteurs sur une variété différentielle X .

C'est par définition une section σ du fibré tangent $T(X)$, c'est-à-dire une application

$$\sigma : X \rightarrow T(X)$$

$$x \mapsto \sigma(x) \in T_x(X)$$

telle que $p \circ \sigma = \text{Identité}$.

On peut la considérer comme application d'une variété différentielle X dans une variété différentielle $T(X)$. On peut donc donner un sens à : " σ est différentiable". Explicitons :

Soit U_i un ouvert de X , muni d'une carte φ_i ; alors $T(U_i)$ est un ouvert de $T(X)$ muni de la carte Φ_i correspondante. La donnée de σ définit τ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} T(U_i) & \xrightarrow{\Phi_i} & \Omega_i \times \mathbb{R}^n \\ \uparrow \sigma & & \uparrow \tau \\ U_i & \xrightarrow{\varphi_i} & \Omega_i \end{array}$$

τ est une section du fibré $T(\Omega_i) = \Omega_i \times \mathbb{R}^n$.

Si $y \in \Omega_i$, on a $\tau(y) = (y, \tau_1(y))$, avec $\tau_1(y) \in \mathbb{R}^n$. Donc σ est définie par la donnée de $\tau_1 : \Omega_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ (τ_1 est un "champ de vecteurs" dans $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$). On dira alors que σ est différentiable si τ_1 est différentiable.

Application linéaire tangente.

Soient X et Y deux variétés différentielles, f un morphisme de X dans Y (c'est-à-dire une application différentiable).

On va associer à f une application de $T(X)$ dans $T(Y)$, notée $T(f)$, dont la restriction $T_x(f)$ à $T_x(X)$ sera linéaire ; alors l'application linéaire

$$T_x(f) : T_x(X) \rightarrow T_{f(x)}(Y)$$

sera appelée l'application linéaire tangente à f au point x .

- Examinons d'abord un cas particulier : $X = \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $Y = \Omega' \subset \mathbb{R}^p$.

Ici l'application linéaire tangente au point x est la dérivée $f'(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$.

$T(f)$ sera l'application de $T(\Omega) = \Omega \times \mathbb{R}^n$ dans $T(\Omega') = \Omega' \times \mathbb{R}^p$, définie par

$$(x, \xi) \mapsto (f(x), f'(x) \cdot \xi).$$

Cas général.

Soit $x \in U$, ouvert de X ; soit une carte $\varphi : U \xrightarrow{\sim} \Omega \subset \mathbb{R}^n$; alors $y = f(x) \in V$ ouvert de Y , V étant muni d'une carte

$$\psi : V \xrightarrow{\sim} \Omega' \subset \mathbb{R}^p.$$

Quitte à restreindre U , on peut supposer que f envoie U dans V .

On définit alors l'application g de Ω dans Ω' , telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \Omega & \xrightarrow{g} & \Omega' \end{array}$$

D'après l'étude précédente du cas particulier, on a défini $T(g)$ de $\Omega \times \mathbb{R}^n$ dans $\Omega' \times \mathbb{R}^p$; or $T(U)$ est un ouvert de $T(X)$ qui est muni d'une carte

$$\alpha : T(U) \rightarrow \Omega \times \mathbb{R}^n$$

déduite de φ .

De même, $T(V)$ est muni d'une carte

$$\beta : T(V) \rightarrow \Omega' \times \mathbb{R}^p$$

déduite de ψ .

On définit alors $T(f)$, tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Omega \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{T(g)} & \Omega' \times \mathbb{R}^p \\ \alpha \uparrow & & \uparrow \beta \\ T(U) & \xrightarrow{T(f)} & T(V) \end{array} .$$

On vérifie que $T(f)$ ainsi définie ne dépend pas du choix des cartes φ et ψ (en utilisant le théorème de dérivation d'une fonction composée).

On vérifie également que $T(f)$ rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} T(X) & \xrightarrow{T(f)} & T(Y) \\ \downarrow p_X & & \downarrow p_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

c'est-à-dire que $T(f)$ transforme un vecteur tangent à X en x en un vecteur tangent à Y en $f(x)$.

De plus, la restriction $T_x(f) : T_x(X) \rightarrow T_{f(x)}(Y)$ est linéaire. C'est l'application linéaire tangente à f en x .

Remarque : une carte p_i de U_i sur $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$ est, en fait, un difféomorphisme de U_i sur Ω_i (U_i et Ω_i étant considérés comme variétés différentielles).

On a vu que p_i définissait une carte Φ_i de $T(U_i)$ sur $T(\Omega_i) = \Omega_i \times \mathbb{R}^n$.

D'après les définitions précédentes, on vérifie que $\Phi_i = T(p_i)$ (on applique ce qui précède avec $U = U_i$, $V = \Omega_i$, $\Omega = \Omega' = \Omega_i$, $\varphi = \psi = \text{Id}$, $T(\varphi) = T(\psi) = \text{Id}$, $\alpha = \Phi_i$).

En résumé, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} U & \xrightarrow{\varphi} & \Omega & \xleftarrow{f} & \Omega \times \mathbb{R}^n & \xleftarrow{T(\varphi)} & T(U) \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow T(g) & & \downarrow T(f) \\ V & \xrightarrow{\psi} & \Omega' & \xleftarrow{q} & \Omega' \times \mathbb{R}^n & \xleftarrow{T(\psi)} & T(V) \end{array}$$

Différentielle d'une fonction numérique.

Soit X une variété différentielle. Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable.

En considérant $\mathbb{R}$ comme variété différentielle, on peut définir d'après ce qui précède :

$$T(f) : T(X) \rightarrow T(\mathbb{R}),$$

$T(f)$ étant linéaire dans chaque fibre. Or le fibré tangent à $\mathbb{R}$ est $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$; on peut considérer la deuxième projection : $T(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{p_2} \mathbb{R}$ ($p_2(x, y) = y$), qui est linéaire en y pour x fixé.

La fonction composée $p_2 \circ T(f)$ sera donc linéaire dans chaque fibre.

Par définition, on pose $df = p_2 \circ T(f) : T(X) \rightarrow \mathbb{R}$; on note $d_x f = p_{2,x} \circ T_x(f)$ la différentielle de f au point x .

Formes différentielles sur une variété différentielle.

- Forme différentielle de degré 1 sur X . C'est par définition une application ω de $T(X)$ dans $\mathbb{R}$, linéaire dans chaque fibre.

(Pour x fixé, c'est une forme linéaire sur l'espace tangent $T_x(X)$).

En considérant $T(X)$ et $\mathbb{R}$ comme des variétés différentielles, on peut donc donner un sens à : " ω est différentiable" (c'est alors un morphisme de variétés différentielles). Nous supposons en général que les formes différentielles considérées sont différentiables.

Avec ces définitions on constate que la différentielle df d'une fonction définie sur X est une forme différentielle de degré 1 sur X .

- Forme différentielle de degré 0 .

C'est par définition une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie sur X .

- Forme différentielle de degré $p \geq 2$ (appelée aussi forme différentielle extérieure).

C'est une fonction ω telle que

$$\forall x \in X, \omega(x) \in \mathcal{A}_p(T_x(X), \mathbb{R}).$$

Pour $x \in X$, $\xi_1, \dots, \xi_p \in T_x(X)$, on a :

$$\omega(x; \xi_1, \dots, \xi_p) \in \mathbb{R}.$$

Lorsque X est un ouvert A de $\mathbb{R}^n$, on a $T_x(X) = \mathbb{R}^n$, et par suite on retrouve la définition antérieure d'une forme différentielle de degré p :

$$\omega : A \rightarrow \mathcal{A}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}).$$

Soit U un ouvert de X , et soit $\varphi : U \xrightarrow{\sim} A \subset \mathbb{R}^n$ une carte de U sur un ouvert A de $\mathbb{R}^n$. A chaque forme différentielle ω de degré p sur U , on associe une forme différentielle α sur A , à savoir : pour $y \in A$, et $\eta_1, \dots, \eta_p \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\alpha(y; \eta_1, \dots, \eta_p) = \omega(\varphi^{-1}(y); T_y(\varphi^{-1}) \cdot \eta_1, \dots, T_y(\varphi^{-1}) \cdot \eta_p).$$

Par définition, on dira que la forme ω dans U est de classe C^∞ si la forme correspondante α est de classe C^∞ . Cette définition est indépendante du choix de la carte.

On dira qu'une forme différentielle ω sur la variété X est de classe C^∞ si sa restriction à tout ouvert U possédant une carte est de classe C^∞ . On notera $\Omega_p(X)$ l'espace vectoriel des formes différentielles sur X , de degré p et de classe C^∞ .

Opérations sur les formes différentielles.

- Produit extérieur.

On définit une application de $\Omega_p(X) \times \Omega_q(X)$ dans $\Omega_{p+q}(X)$, $(\omega_1, \omega_2) \mapsto \omega_1 \wedge \omega_2$ par la même formule que celle qui définit le produit extérieur de deux formes différentielles sur $\mathbb{R}^n$: pour $x \in X$, on a en effet

$$\omega_1(x) \in \mathcal{A}_p(T_x(X), \mathbb{R})$$

$$\omega_2(x) \in \mathcal{A}_q(T_x(X), \mathbb{R}),$$

et on prend le produit extérieur $\omega_1(x) \wedge \omega_2(x) \in \mathcal{A}_{p+q}(T_x(X), \mathbb{R})$.

- Changement de variable.

Soient Y et X deux variétés différentielles, φ un morphisme de Y dans X . On lui associe une application linéaire φ^* de $\Omega_p(X)$ dans $\Omega_p(Y)$, comme suit : si $\omega \in \Omega_p(X)$, on pose

$$(\varphi^*\omega)(Y : \eta_1, \dots, \eta_p) = \omega(\varphi(Y) : T_Y(\varphi) \cdot \eta_1, \dots, T_Y(\varphi) \cdot \eta_p),$$

les η_i appartenant à $T_Y(Y)$.

On montre les propriétés suivantes :

$\begin{aligned} \varphi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) &= \varphi^*(\omega_1) \wedge \varphi^*(\omega_2) \\ (\varphi \circ \psi)^* &= \psi^* \circ \varphi^* \end{aligned}$

Soit φ une carte de U sur un ouvert A de $\mathbb{R}^n$; alors l'application qu'on a définie plus haut de $\Omega_p(U)$ dans $\Omega_p(A)$ peut être interprétée comme étant égale à $(\varphi^{-1})^* = (\varphi^*)^{-1}$.

- Différentielle extérieure d'une forme différentielle.

Soit X une variété différentielle, et soit $\omega \in \Omega_p(X)$. Soit U un ouvert de X , φ une carte : $U \xrightarrow{\sim} A \subset \mathbb{R}^n$. Par changement de variables, ω donne $\alpha = (\varphi^{-1})^*(\omega)$, forme différentielle sur A . Or on a défini $d\alpha$ (différentielle extérieure d'une forme différentielle dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$). On pose alors, par définition :

$$d\omega = \varphi^*(d\alpha).$$

On a : $d\omega \in \Omega_{p+1}(X)$, puisque $d\alpha \in \Omega_{p+1}(A)$.

Montrons que cette définition ne dépend pas du choix de la carte φ .

Soit ψ une autre carte : $U \xrightarrow{\sim} B \subset \mathbb{R}^n$, et soit $(\psi^{-1})^*(\omega) = \beta$.

On veut montrer que $\psi^*(d\beta) = \varphi^*(d\alpha)$, c'est-à-dire

$$((\psi^{-1})^* \circ \varphi^*)(d\alpha) = d\beta.$$

Or $(\psi^{-1})^* \circ \varphi^* = (\varphi \circ \psi^{-1})^*$, et $\varphi \circ \psi^{-1}$ est un difféomorphisme de B sur A .

$$\begin{aligned} \text{D'autre part, on a } \beta &= (\psi^{-1})^*(\omega) = (\psi^{-1})^*(\varphi^*(\alpha)) \\ &= (\varphi \circ \psi^{-1})^*(\alpha). \end{aligned}$$

Posons $\varphi \circ \psi^{-1} = \theta$. On doit vérifier que

$$\theta^*(d\alpha) = d(\theta^*(\alpha)).$$

Or cette propriété est bien vraie pour les changements de variable relatifs à des formes différentielles dans des ouverts de $\mathbb{R}^n$. C.Q.F.D.

La différentielle extérieure vérifie les propriétés suivantes :

$d(f\omega) = (df) \wedge \omega + f d\omega$ $d(df) = 0$ si $\omega_1 \in \Omega_p(X)$: $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2$ $d(d\omega) = 0$ $d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega)$
--

(On vérifie ces propriétés en utilisant des cartes).

Formes différentielles quadratiques sur une variété différentielle X .

Une forme différentielle quadratique sur X est une application α qui à tout x de X fait correspondre une forme quadratique sur l'espace tangent $T_x(X)$:

$$\alpha(x) \in Q_2(T_x(X)) .$$

Pour x fixé, $\alpha(x; \xi)$ est une forme quadratique en ξ ($x \in X, \xi \in T_x(X)$).

On définit de façon évidente les changements de variable pour les formes quadratiques.
(Les calculs se font dans les cartes).

Exemple : produit (ordinaire) de deux formes différentielles de degré 1.

On définit $\omega_1 \cdot \omega_2$ par : $(\omega_1 \cdot \omega_2)(x; \xi) = \omega_1(x; \xi) \omega_2(x; \xi)$.

Espace tangent à une sous-variété.

Soit Y une sous-variété de la variété différentielle X ; soit p la dimension de Y .
Soit $x_0 \in Y$; il existe $U \subset X$, $U \ni x_0$, et $\varphi : U \xrightarrow{\sim} A \subset \mathbb{R}^n$ tels que

$$\begin{cases} \varphi(x_0) = 0 \\ \varphi(Y \cap U) = A \cap \mathbb{R}^p \end{cases}$$

(par définition d'une sous-variété).

Ici on considère $\mathbb{R}^p$ inclus canoniquement dans $\mathbb{R}^n$ par

$(x^1, \dots, x^p) \mapsto (x^1, \dots, x^p, 0, \dots, 0)$; $\varphi|_{Y \cap U}$ est une carte de Y sur $A \cap \mathbb{R}^p$.

On a défini $T(\varphi) : T(U) \xrightarrow{\sim} T(A) = A \times \mathbb{R}^n$. De même

$$T(\varphi|_{Y \cap U}) : T(Y \cap U) \rightarrow T(A \cap \mathbb{R}^p) = (A \cap \mathbb{R}^p) \times \mathbb{R}^p .$$

Donc, par $T(\varphi|_{Y \cap U})$, $T_{x_0}(Y)$ est envoyé sur $\mathbb{R}^p$, considéré comme sous-espace de $\mathbb{R}^n$, qui est l'image par $T(\varphi)$ de $T_{x_0}(X)$.

On peut donc identifier (à l'aide des cartes) $T_{x_0}(Y)$ à un sous-espace vectoriel de $T_{x_0}(X)$.

Avec cette identification, les vecteurs tangents en x_0 à Y sont tangents en x_0 à X .

Problème. Comment reconnaître qu'un vecteur tangent à X est tangent à Y , lorsque Y est défini localement par des équations ?

Soit $x_0 \in Y$. Supposons qu'on ait au voisinage de x_0 dans X , des coordonnées

nul orthogonal à $\overrightarrow{OM}$ et dépendant de manière continue de M . A ce vecteur on peut faire correspondre un point de S^n (intersection avec S^n de la demi-droite qui porte le vecteur).

Le problème se ramène donc à trouver une application continue f de S^n dans S^n telle que $\forall M \in S^n, f(M) \perp M$.

On montre facilement l'existence d'une telle application pour n impair ($n = 2k-1$): à

$$(x^0, x^1, x^2, x^3, \dots, x^{2k-2}, x^{2k-1})$$

on associe :

$$(-x^1, x^0, -x^3, x^2, \dots, -x^{2k-1}, x^{2k-2}).$$

C'est bien un vecteur unitaire et orthogonal au précédent. La fonction est évidemment continue.

On montre qu'il est impossible de trouver un tel champ de vecteurs pour n pair (par exemple pour $n = 2$).

Variétés riemanniennes.

Définition. Une variété riemannienne est une variété différentielle X munie de la donnée d'une forme différentielle quadratique $\alpha \gg 0$.

[La notation $\alpha \gg 0$ signifie que, dans chaque espace tangent $T_x(X)$, la forme quadratique induite par α est définie positive ; elle définit donc sur l'espace vectoriel $T_x(X)$ une structure d'espace euclidien].

Exemple : soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$; l'espace tangent en $x \in \Omega$ s'identifie à $\mathbb{R}^n$, et la forme quadratique canonique sur $\mathbb{R}^n$ (somme des carrés des coordonnées) définit une forme différentielle quadratique sur Ω ; d'où une structure riemannienne (dite canonique) sur Ω .

Toute sous-variété différentielle Y d'une variété riemannienne X possède une structure riemannienne, dite structure induite : on sait en effet que si $y \in Y$, l'espace tangent $T_y(Y)$ s'identifie à un sous-espace vectoriel de $T_y(X)$; la forme

quadratique $\gg 0$ que l'on a déjà sur $T_Y(X)$ induit sur $T_Y(Y)$ une forme quadratique $\gg 0$, d'où la structure riemannienne de Y .

Exemple : toute sous-variété Y d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ possède canoniquement une structure riemannienne. C'est notamment le cas d'une surface contenue dans un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

Expression de la forme différentielle quadratique α à l'aide de coordonnées locales. Soit $(x^1, \dots, x^n)$ un système de coordonnées locales dans un ouvert $U \subset X$; la forme différentielle quadratique α qui définit la structure riemannienne de X induit sur U une forme différentielle quadratique α_U , qui s'écrit d'une seule manière

$$\alpha_U = \sum_{i,j} g_{ij}(x) dx^i \cdot dx^j,$$

avec $g_{ij}(x) = g_{ji}(x)$. On doit naturellement exprimer que, pour chaque $x \in U$, la forme quadratique

$$\sum_{i,j} g_{ij}(x) \xi^i \xi^j$$

est définie positive.

La forme quadratique α s'appelle souvent le ds^2 de la variété riemannienne X . Cette terminologie se justifie par le fait suivant : soit C une courbe tracée sur X (i.e. une sous-variété différentielle de dimension 1) ; le ds^2 induit sur C une forme différentielle quadratique, dont la racine carrée est une forme différentielle de degré 1 sur C : l'intégrale de cette dernière donne la longueur d'un arc de la courbe C (pour la structure riemannienne donnée). Le choix d'une des deux racines carrées possibles correspond au choix d'une orientation sur C .

Exemple du demi-plan de Poincaré : on a les coordonnées (x,y) valables dans tout le demi-plan (qui se compose des points tels que $y > 0$) ; le ds^2 est

$$\frac{(dx)^2 + (dy)^2}{y^2}.$$

Il ne faut pas le confondre avec le ds^2 euclidien, qui est $dx^2 + dy^2$.

Repères orthonormés d'une variété riemannienne X .

Pour chaque point x , une base orthonormée de l'espace tangent $T_x(X)$ (qui,

rappelons-le, a une structure d'espace euclidien) est, par définition un repère orthonormé d'origine $x \in X$. Il est clair que le groupe orthogonal $O(n)$ (n désigne la dimension de X) opère dans l'ensemble des repères orthonormés d'origine x ; et ceci pour chaque $x \in X$. Ainsi $O(n)$ opère dans l'ensemble $\mathcal{R}'(X)$ de tous les repères orthonormés de X (d'origine quelconque).

Si en outre la variété X a été orientée, alors on a une orientation sur chaque espace tangent $T_x(X)$, donc on a la notion de repère orthonormé direct. Alors le groupe $SO(n)$ opère dans l'ensemble $\mathcal{R}(X)$ de tous les repères orthonormés directs de la variété X .

[Parenthèse sur l'orientation d'une variété différentielle X , non nécessairement munie d'une structure riemannienne.- Orienter X , c'est par définition choisir (si c'est possible) dans chaque espace tangent $T_x(X)$ une orientation, de manière à satisfaire à la "condition de cohérence" suivante : pour tout $x \in X$ il existe un ouvert $U \ni x$ et une carte $\varphi : U \xrightarrow{\sim} \Omega \subset \mathbb{R}^n$ telle que l'isomorphisme

$$T(\varphi) : T(U) \xrightarrow{\sim} T(\Omega) = \Omega \times \mathbb{R}^n$$

induisse, pour chaque $x \in U$, un isomorphisme $T_x(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui transforme l'orientation choisie sur $T_x(U)$ en l'orientation canonique de $\mathbb{R}^n$].

Désormais, on supposera que X est une variété riemannienne orientée, et on notera $\mathcal{R}(X)$ l'ensemble des repères orthonormés directs de X . Chaque fois qu'on a une carte

$$\varphi : U \xrightarrow{\sim} \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

d'un ouvert U de X sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, telle que $T_x(\varphi)$ définisse un isomorphisme $T_x(U) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ respectant les orientations, chaque repère orthonormé direct d'origine $x \in U$ est transformé en une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^n$, ce qui définit une bijection de $\mathcal{R}(U)$ (ensemble des repères orthonormés directs dont l'origine appartient à U) sur le produit $\Omega \times SO(n)$. En regardant les choses de près, on voit facilement qu'on obtient ainsi des cartes des ouverts $\mathcal{R}(U)$, qui définissent sur $\mathcal{R}(X)$ une structure de variété différentielle [$\mathcal{R}(U)$ est un ouvert

de $\mathcal{R}(X)$] ; la dimension de la variété $\mathcal{R}(X)$ est

$$n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} .$$

On l'appelle la variété des repères orthonormés directs de X , ou plus simplement la variété des repères de X . Comme on l'a vu, le groupe $SO(n)$ opère dans cette variété.

L'application $q : \mathcal{R}(X) \rightarrow X$ qui associe à chaque repère son "origine", s'appelle la fibration canonique de la variété des repères. La fibre $q^{-1}(x)$ d'un point $x \in X$ n'est autre que la sous-variété des repères d'origine x ; les fibres sont, en fait, les orbites du groupe $SO(n)$ opérant dans $\mathcal{R}(X)$. Le groupe $SO(n)$ opère de façon simplement transitive dans chaque fibre.

L'application q est différentiable (regarder une carte) : on a donc une application

$$T(q) : T(\mathcal{R}(X)) \rightarrow T(X)$$

qui envoie le fibré tangent à $\mathcal{R}(X)$ dans le fibré tangent à X ; pour chaque $r \in \mathcal{R}(X)$, $T_r(q) : T_r(\mathcal{R}(X)) \rightarrow T_{q(r)}(X)$ est linéaire (application linéaire tangente à q au point $r \in \mathcal{R}(X)$).

Définition des formes différentielles ω_i ($1 \leq i \leq n$). Lorsque le repère $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ était variable dans l'espace euclidien, on avait pu écrire (M désignant l'origine du repère)

$$d\vec{M} = \sum_i \omega_i \vec{e}_i .$$

Maintenant, le repère est dans un espace vectoriel qui varie avec l'origine M (ou x) du repère ; néanmoins on va encore pouvoir définir des formes différentielles ω_i sur la variété $\mathcal{R}(X)$. En effet, soit $r \in \mathcal{R}(X)$ un repère d'origine $M \in X$; et soit $\vec{\xi} \in T_M(X)$ un vecteur tangent. Soient $\omega_i(r ; \vec{\xi})$ ses coordonnées suivant la base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ du repère r . On a

$$\vec{\xi} = \sum_{i=1}^n \omega_i(r ; \vec{\xi}) \vec{e}_i .$$

Il est clair que, pour r fixé, chaque $\omega_i(r ; \vec{\xi})$ est une fonction linéaire du vecteur tangent $\vec{\xi}$ à X au point $M = q(r)$ (origine du repère r). Donc chaque

ω_1 peut être considéré comme une forme différentielle de degré 1 sur la variété $\mathcal{R}(X)$; mais une telle forme différentielle jouit de la particularité que sa valeur sur un vecteur tangent η à $\mathcal{R}(X)$ en un point $r \in \mathcal{R}(X)$ ne dépend que du vecteur tangent ξ à X (au point $M = q(r)$), transformé de η par

$$T_r(q) : T_r(\mathcal{R}(X)) \rightarrow T_M(X).$$

On a évidemment

$$\sum_{i=1}^n (\omega_i(r; \vec{\xi}))^2 = |\vec{\xi}|^2,$$

puisque le repère $r = (\vec{e}_1(r), \dots, \vec{e}_n(r))$ est orthonormé. Ainsi la forme différentielle quadratique $\sum_{i=1}^n (\omega_i)^2$ (considérée comme forme différentielle sur X) n'est autre que le ds^2 de la variété riemannienne X .

Exercice : le produit extérieur $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n$ est une forme différentielle sur X : c'est l'élément de volume (orienté) de la variété riemannienne X . Sa valeur sur $(\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_n)$ (où $\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_n$ sont des vecteurs tangents à X en un point $M \in X$) est égale à $\det(\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_n)$, le déterminant étant pris par rapport à une base orthonormée directe de l'espace tangent $T_M(X)$.

Retour au cas $n = 2$.

Désormais, on considérera seulement le cas d'une variété riemannienne orientée X de dimension 2. On a donc les deux formes différentielles ω_1 et ω_2 sur $\mathcal{R}(X)$, définies par

$$\vec{\xi} = \omega_1(r; \vec{\xi}) \vec{e}_1(r) + \omega_2(r; \vec{\xi}) \vec{e}_2(r).$$

$(\omega_1)^2 + (\omega_2)^2$ est le ds^2 , $\omega_1 \wedge \omega_2$ est l'élément d'aire orientée.

Proposition.- Il existe, sur la variété des repères $\mathcal{R}(X)$, une forme différentielle ω_{12} de degré 1, et une seule, telle que

$$(1) \quad \boxed{d\omega_1 = -\omega_2 \wedge \omega_{12}, \quad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12}}$$

[N.B. dans le cas où X est une surface plongée dans un ouvert de $\mathbb{R}^3$, on a montré plus haut que la "forme de courbure géodésique" ω_{12} satisfait à ces relations. Il s'agit donc ici de donner une définition valable dans le cas général d'une variété riemannienne de dimension 2].

Démonstration : (i) l'unicité se montre exactement comme dans le cas d'une surface de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Reste à prouver l'existence. On va montrer que chaque point de X possède un voisinage ouvert U tel que, dans l'ouvert $q^{-1}(U) = \mathcal{R}(U)$ de la variété des repères $\mathcal{R}(X)$, il existe une forme ω_{12} satisfaisant à (1). Prenons un ouvert U assez petit pour qu'il existe un champ de repères dans U :

$$\sigma : U \rightarrow \mathcal{R}(U) .$$

Un tel champ étant choisi, posons

$$\overline{\omega}_i = \sigma^*(\omega_i) \quad , \quad i = 1, 2 ;$$

$\overline{\omega}_1$ et $\overline{\omega}_2$ sont des formes différentielles sur U , et $\overline{\omega}_1 \wedge \overline{\omega}_2$ est l'élément d'aire de U . Prouvons d'abord un lemme :

Lemme : il existe sur U une forme différentielle $\overline{\omega}_{12}$ telle que

$$(1') \quad d\overline{\omega}_1 = -\overline{\omega}_2 \wedge \overline{\omega}_{12} \quad , \quad d\overline{\omega}_2 = \overline{\omega}_1 \wedge \overline{\omega}_{12} .$$

Preuve du lemme : elle résulte d'un calcul déjà fait dans le cas des surfaces de $\mathbb{R}^3$. On calcule les fonctions λ_1 et λ_2 par :

$$(2) \quad d\overline{\omega}_1 = \lambda_1 \overline{\omega}_1 \wedge \overline{\omega}_2 \quad , \quad d\overline{\omega}_2 = \lambda_2 \overline{\omega}_1 \wedge \overline{\omega}_2 ,$$

et alors on prend

$$(3) \quad \overline{\omega}_{12} = \lambda_1 \overline{\omega}_1 + \lambda_2 \overline{\omega}_2 .$$

Le lemme étant ainsi prouvé, notons $(\vec{e}_1(r), \vec{e}_2(r))$ la base du repère r , et $(\vec{e}_1(M), \vec{e}_2(M))$ la base du repère $\sigma(M)$ (du champ de repères au point $M = q(r)$).

On a

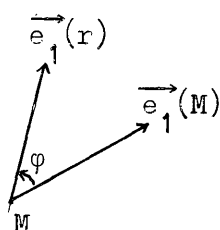
$$\overline{\omega}_1 \vec{e}_1(M) + \overline{\omega}_2 \vec{e}_2(M) = \omega_1 \vec{e}_1(r) + \omega_2 \vec{e}_2(r)$$

(puisque les deux membres sont des expressions du vecteur tangent $\vec{\xi}$ au point M).

On en déduit

$$\omega_1 = \overline{\omega}_1 \cos \varphi + \overline{\omega}_2 \sin \varphi \quad , \quad \omega_2 = -\overline{\omega}_1 \sin \varphi + \overline{\omega}_2 \cos \varphi ,$$

en notant φ l'angle de la rotation qui transforme $\vec{e}_1(M)$ en $\vec{e}_1(r)$. Alors la



relation (1) équivaut à

$$\begin{cases} d\overline{\omega}_1 = -\overline{\omega}_2 \wedge (\omega_{12} - d\varphi) \\ d\overline{\omega}_2 = \overline{\omega}_1 \wedge (\omega_{12} - d\varphi) \end{cases}$$

(faire le calcul facile). Il suffit donc de prendre

$$(4) \quad \omega_{12} = d\varphi + \overline{\omega}_{12}$$

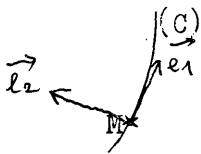
pour satisfaire à (1), puisque $\overline{\omega}_{12}$ satisfait à (1').

C.Q.F.D.

Non seulement nous avons démontré la proposition, mais nous venons d'indiquer un calcul explicite de la forme ω_{12} lorsqu'on utilise un champ de repères : on calcule d'abord $\overline{\omega}_{12}$ par les formules (2) et (3), et alors la formule (4) donne ω_{12} .

Courbure géodésique d'une courbe orientée, tracée sur X .

X désigne toujours une variété riemannienne orientée, de dimension 2. On vient de définir ω_{12} sur $\mathcal{R}(X)$, espace des repères. On va définir la courbure géodésique d'une courbe (C) orientée tracée sur X . C'est une fonction du point de la courbe. Dans le cas où X est une surface plongée dans $\mathbb{R}^3$, on retrouvera la courbure géodésique d'une courbe tracée sur une surface.



A chaque point M de (C) , on associe le repère orthonormé $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ tel que $\vec{e}_1$ soit le vecteur unitaire tangent en M à la courbe orientée (C) . La courbe (C) définit ainsi

une courbe (Γ) dans l'espace des repères. La forme induite par ω_{12} sur (Γ) est une forme différentielle sur (C) : $\omega_{12} = a(s)ds$, s désignant l'arc de (C) .

Définition. $a(s)$ est la courbure géodésique de (C) au point M d'abscisse s . On a $a(s) = \frac{\omega_{12}}{ds}$; c'est une fonction sur (C) , notée $\frac{1}{\rho_g}$.

Remarque : la courbe (Γ) est une application $\varphi : (C) \rightarrow \mathcal{R}(X)$. La forme induite par ω_{12} sur (C) n'est autre que $\varphi^*(\omega_{12})$; en toute rigueur, on aurait dû écrire $\varphi^*(\omega_{12}) = a(s)ds$.

Dans le cas où X est une surface de $\mathbb{R}^3$, $\frac{1}{\rho_g}$ est bien la courbure géodésique d'une courbe tracée sur X .

Courbes géodésiques.

Dans le cas où X était une surface plongée dans $\mathbb{R}^3$, les courbes géodésiques étaient les courbes pour lesquelles la courbure géodésique était identiquement nulle.

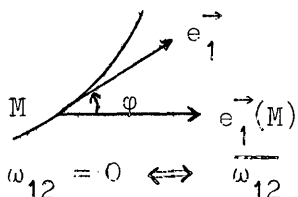
On va prendre la même définition :

Définition. Sur X , les courbes géodésiques sont les courbes (C) pour lesquelles la courbure géodésique est nulle en tout point de (C) .

Quelles sont les conditions différentielles pour qu'une courbe soit une géodésique ? C'est un problème local. Localement, il existe un champ de repères sur X . On choisit une section différentiable $\sigma : U \rightarrow \mathcal{R}(U)$.

Alors $\sigma^*(\omega_{12}) = \overline{\omega}_{12}$ est une forme différentielle sur l'ouvert U de X .

Soit M un point de la courbe (C) . Soit $\vec{e}_1$ le vecteur tangent unitaire en M à (C) , et soit $\vec{e}_1(M)$ le premier vecteur du repère $\sigma(M)$. Posons $(\vec{e}_1(M), \vec{e}_2(M)) = \varphi$.

On sait que $\omega_{12} = \overline{\omega}_{12} + d\varphi$.
 Pour que (C) soit une géodésique, il faut et il suffit que $\omega_{12} = 0 \iff \overline{\omega}_{12} + d\varphi = 0$.

Explicitons : supposons que l'on ait choisi des coordonnées locales u et v , telles que $ds^2 = (Adu)^2 + (Bdv)^2$, où A et B sont fonctions de u et v (les courbes $u = C^{te}$ et $v = C^{te}$ sont donc orthogonales). On a (calcul déjà fait dans le cas des surfaces)

$$\overline{\omega}_1 = Adu ; \overline{\omega}_2 = Bdv ; \overline{\omega}_{12} = -\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial v} du + \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial u} dv ,$$

$$\varphi = \arctg \frac{B}{A} \frac{dv}{du} .$$

Pour exprimer que v , fonction de u , définit une géodésique, on écrit

$$d\varphi + \overline{\omega}_{12} = 0 ,$$

ce qui donne :

$$\frac{d}{du} \left(\arctg \frac{B}{A} \frac{dv}{du} \right) = \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial v} - \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial v} \frac{dv}{du} .$$

Telle est l'équation différentielle des géodésiques. En développant, on trouve une équation différentielle du second ordre :

$$\frac{d^2 v}{du^2} = f(u, v, \frac{dv}{du}) .$$

On en déduit que par un point M donné il passe une géodésique et une seule tangente à une direction donnée.

Exemple : vérifier que les géodésiques du demi-plan de Poincaré sont les pseudo-droites. On connaît le ds^2 : $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$. Ici $u = x$, $v = y$, $A = \frac{1}{y}$, $B = \frac{1}{y}$. Donc l'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{d}{dx} \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{dy}{dx} \right) = y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y} \right) = -\frac{1}{y},$$

soit :

$$\boxed{\frac{d}{dx} (\operatorname{arc} \operatorname{tg} y') + \frac{1}{y} = 0}.$$

Cette équation est invariante par translation parallèle à l'axe Ox . La méthode classique d'intégration consiste à chercher une relation différentielle entre y et y' , en posant

$$dx = \frac{dy}{y'}.$$

On obtient

$$y' \frac{d}{dy} (\operatorname{arc} \operatorname{tg} y') + \frac{1}{y} = 0$$

$$y' d(\operatorname{arc} \operatorname{tg} y') + \frac{dy}{y} = 0$$

$$y' \frac{dy'}{1+y'^2} + d(\log y) = 0.$$

[y est > 0 puisqu'on est dans le demi-plan de Poincaré]. On trouve

$$\frac{1}{2} d(\log(1+y'^2)) + d(\log y) = 0, \text{ d'où}$$

$$y \sqrt{1+y'^2} = \text{constante}.$$

Posons $y' = \operatorname{tg} \theta$, $\sqrt{1+y'^2} = \frac{1}{\cos \theta}$. On obtient $y = C \cos \theta$, C étant une constante. Puis $dx = \frac{dy}{y'} = \frac{-C \sin \theta d\theta}{\operatorname{tg} \theta} = -C \cos \theta d\theta$, d'où

$$\boxed{\begin{aligned} x - x_0 &= -C \sin \theta \\ y &= C \cos \theta \end{aligned}}.$$

Ceci est l'équation paramétrique d'un cercle centré en $(x_0, 0)$, de rayon C . Dans le demi-plan de Poincaré, les géodésiques sont donc les cercles centrés sur l'axe réel.

On a laissé échapper les droites $x = C^{\text{te}}$ qui correspondent à $y' = \infty$.

Courbure totale de X .

La courbure totale en $M \in X$ est une fonction sur X , définie comme suit.

On a :

$$\omega_{12} = \overline{\omega_{12}} + d\varphi, \quad d\omega_{12} = d\overline{\omega_{12}},$$

formes différentielles sur X , de degré 2. Plus précisément, si $q : \mathcal{R}(X) \rightarrow X$ désigne l'application canonique, $d\omega_{12}$ est le q^* d'une forme différentielle sur X . Or on connaît déjà une forme différentielle de degré 2 : l'élément d'aire $\omega_1 \wedge \omega_2$. Toute forme de degré 2 est nécessairement proportionnelle à celle-là ; on a donc

$$d\omega_{12} = -K \omega_1 \wedge \omega_2.$$

Par définition, K ainsi défini s'appelle la courbure totale : c'est une fonction sur X .

Cette définition est légitime, car dans le cas d'une surface plongée dans $\mathbb{R}^3$, on retrouve bien la courbure totale.

Si on note $d\sigma$ l'élément d'aire $\omega_1 \wedge \omega_2$, on a $d\omega_{12} = -K d\sigma$. Le calcul de K se fait de la même façon que dans le cas d'une surface de $\mathbb{R}^3$: on prend un champ de repères dans U , et on prend le ds^2 sous la forme :

$$ds^2 = (A du)^2 + (B dv)^2.$$

On a

$$\overline{\omega_1} = A du, \quad \overline{\omega_2} = B dv, \quad \overline{\omega_1} \wedge \overline{\omega_2} = AB du \wedge dv$$

$$\overline{\omega_{12}} = -\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial v} du + \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial u} dv$$

$$d\overline{\omega_{12}} = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial v} \right) du \wedge dv + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial u} \right) du \wedge dv$$

$$d\overline{\omega_{12}} = \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial v} \right) \right] \overline{\omega_1} \wedge \overline{\omega_2}.$$

La relation $d\overline{\omega_{12}} = -K \overline{\omega_1} \wedge \overline{\omega_2}$ donne alors

$$-K = \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial v} \right) \right].$$

Comme dans le cas d'une surface de $\mathbb{R}^3$, on peut toujours prendre localement des coordonnées u, v telles que

$$ds^2 = du^2 + (B dv)^2,$$

avec $B(0,v) = 1$ et $\frac{\partial B}{\partial u}(0,v) = 0$.

Dans ce cas, $K = -\frac{1}{B} \frac{\partial^2 B}{\partial u^2}$.

Exemple du demi-plan de Poincaré.

Dans le demi-plan de Poincaré, on a un groupe transitif d'automorphismes qui laissent fixe le ds^2 . Donc, a priori, la courbure totale est la même en tous les points : c'est une constante. En fait, on a ici :

$$u = x, v = y, A = B = \frac{1}{y}$$

$$-K = y^2 \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{1}{y} \right) \right] = y^2 \times \frac{1}{y^2} = 1 \Rightarrow \boxed{K = -1}.$$

Transport parallèle.

Considérons une courbe (Γ) dans l'espace des repères. Elle définit une courbe (C) dans X , au moyen de l'application canonique $q : \mathcal{R}(X) \rightarrow X$. On veut donner un sens à la phrase suivante : "Dans le déplacement (Γ) , le repère reste parallèle à lui-même".

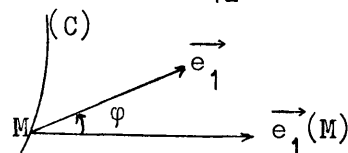
Définition. On dit qu'une courbe (Γ) dans $\mathcal{R}(X)$ définit un transport parallèle si la forme ω_{12} induite sur (Γ) est nulle.

Problème. Donnons-nous une courbe (C) sur X . On se propose d'attacher à chaque point M de (C) un repère d'origine M , de façon qu'il reste parallèle à lui-même lorsque M décrit (C) . Il s'agit de "relever" la courbe (C) au moyen d'une application $\sigma : C \rightarrow \mathcal{R}(X)$ telle que $q \circ \sigma$ soit l'application identique de C .

Donnons-nous un point $M_0 \in (C)$, et cherchons σ pour $M \in (C)$ suffisamment voisin de M_0 .

Pour cela, supposons qu'on ait choisi un champ de repères au voisinage de M_0 . En chaque point $M \in (C)$, on a le vecteur $\vec{e}_1(M)$ du champ. Un autre vecteur unitaire $\vec{e}_1$ tangent en M sera défini par l'angle φ qu'il fait avec $\vec{e}_1(M)$. Ce vecteur $\vec{e}_1$, variable avec M , décrit une courbe Γ dans $\mathcal{R}(X)$. Notons ω_{12} la forme induite par ω_{12} sur Γ ; on a

$$\omega_{12} = \overline{\omega_{12}} + d\varphi$$



Pour que Γ définisse un transport parallèle, il faut et il suffit que la fonction φ , sur (C) , soit telle que $\omega_{12} = 0$. D'où l'équation différentielle

$$d\varphi = - \overline{\omega}_{12}.$$

Si la courbe (C) est donnée, alors $\overline{\omega}_{12}$ est une forme connue sur C ; on a

$\overline{\omega}_{12} = b(s)ds$, où $b(s)$ est une fonction connue de l'arc s . Alors la condition à laquelle doit satisfaire φ est

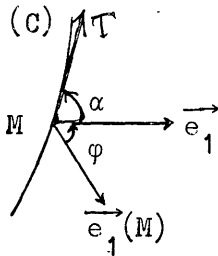
$$\frac{d\varphi}{ds} = - b(s).$$

On obtient donc φ par une quadrature.

En résumé, si on se donne la valeur initiale de φ pour $M = M_0$, le problème a (localement) une solution et une seule : on a transporté un vecteur unitaire tangent à X , parallèlement à lui-même, le long de la courbe (C) , à partir d'une donnée initiale arbitraire au point M_0 .

Interprétation de la courbure géodésique. Soit (C) une courbe tracée sur X .

Nous supposons qu'on a, dans un voisinage ouvert U de C , un champ de repères, et on note $\overrightarrow{e}_1(M)$ le premier vecteur (unitaire) du champ au point $M \in U$. Considérons d'autre part un "champ parallèle" le long de C , et soit



$\overrightarrow{e}_1$ le vecteur du champ parallèle au point $M \in C$. Soit φ l'angle $(\overrightarrow{e}_1(M), \overrightarrow{e}_1)$.

Notons α l'angle de la tangente orientée

à (C) en M avec le vecteur $\overrightarrow{e}_1$ du champ

parallèle. Et soit θ l'angle de la tangente avec le vecteur $\overrightarrow{e}_1(M)$. On a

$$\theta = \alpha + \varphi.$$

Avec ces notations, la courbure géodésique est

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{d\theta + \overline{\omega}_{12}}{ds} = \frac{d\alpha + d\varphi + \overline{\omega}_{12}}{ds}.$$

Or $d\varphi + \overline{\omega}_{12} = 0$, d'après la définition d'un champ parallèle. Donc finalement :

$$\boxed{\frac{1}{\rho_g} = \frac{d\alpha}{ds}}.$$

$\frac{1}{\rho_g}$ ne dépend pas du choix du champ parallèle, car un changement de champ parallèle revient à remplacer α par $\alpha + C^{te}$. Ainsi : la courbure géodésique est la dérivée, par rapport à l'arc, de l'angle α que fait la tangente avec une "direction fixe" (i.e. avec les vecteurs d'un champ parallèle le long de C).

Relation entre le transport parallèle et la courbure totale.

Rappels. On se place d'abord dans un plan. On prend un compact δ ; on suppose que son "bord orienté" est une courbe orientée γ , différentiable par morceaux. On oriente γ de façon à avoir δ sur sa gauche.

Soit ω une forme différentielle de degré 1, définie au voisinage de δ . Par définition, $\int_{\gamma} \omega$ est égal à la somme des intégrales de ω sur les arcs différentiables dont se compose γ .

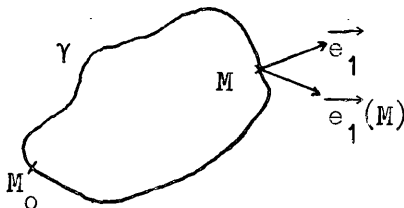
Formule de Stokes

$$\boxed{\int_{\gamma} \omega = \iint_{\delta} d\omega} .$$

Cette formule se généralise au cas où δ est un compact d'une variété différentielle orientée X , de dimension 2, pourvu que δ ait encore un "bord orienté" γ . Ici la variété va être X , variété riemannienne. On supposera désormais qu'il existe un champ de repères dans un voisinage de δ (il en est ainsi si δ est "assez petit"). Relativement à ce champ de repères on a défini la forme différentielle $\overline{\omega}_{12}$; elle existe dans un voisinage de δ . En appliquant la formule de Stokes, on trouve

$$\int_{\gamma} \overline{\omega}_{12} = \iint_{\delta} d\overline{\omega}_{12} = - \iint_{\delta} K d\sigma ,$$

où K est la courbure totale.



On effectue le transport parallèle le long de γ à partir d'un point $M_0 \in \gamma$; alors φ est une fonction du point de γ , telle que

$\overline{\omega}_{12} + d\varphi = 0$ le long de γ . On a donc

(1)

$$\boxed{\int_{\gamma} d\varphi = \iint_{\delta} K d\sigma}$$

relation fondamentale .

Elle montre qu'en général $\int_{\gamma} d\varphi \neq 0$: autrement dit, lorsqu'on part de M_0 et qu'on y revient après avoir parcouru γ , φ n'est pas revenu à sa valeur initiale. La formule (1) nous dit de combien a varié φ lorsqu'on effectue le transport parallèle le long de γ et qu'on revient au point initial. Cette variation $\int_{\gamma} d\varphi$ ne dépend pas du choix du champ de repères au voisinage de δ , car le second membre n'en dépend pas.

Avec les notations précédentes, on a

$$d\varphi = d\theta - d\alpha, \text{ avec } d\alpha = \frac{ds}{\rho_g}.$$

(1) devient

(2)

$$\int_{\gamma} \frac{ds}{\rho_g} = \int_{\gamma} d\theta - \iint_{\delta} K d\sigma ;$$

si γ se compose d'un nombre fini d'arcs différentiables γ_i , alors (2) signifie que

(2')

$$\sum_i \int_{\gamma_i} \frac{ds}{\rho_g} = \sum_i \int_{\gamma_i} d\theta - \iint_{\delta} K d\sigma.$$



En un point anguleux, le vecteur tangent tourne d'un seul coup d'un angle θ_i .

$\sum_i \int_{\gamma_i} d\theta + \sum_i \theta_i$ est l'angle dont a tourné au

total le vecteur tangent à γ par rapport au

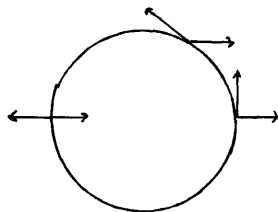
vecteur $\vec{e}_1(M)$ du champ de repères.

Cette somme est évidemment un multiple entier de 2π , car l'angle du vecteur tangent à γ au point M_0 avec $\vec{e}_1(M_0)$ est bien défini (modulo 2π). En fait, c'est égal à 2π (nous l'admettons sans démonstration) :

(3)

$$\sum_i \int_{\gamma_i} d\theta + \sum_i \theta_i = 2\pi.$$

Vérifions seulement cette formule dans un cas simple :



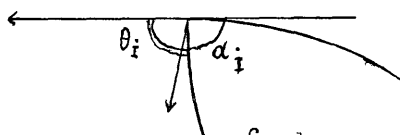
Dans le plan, quand on décrit un cercle orienté, il est facile de voir que la tangente tourne de 2π ; il en est de même pour un polygone.

Nous admettons que la formule (3) est toujours vraie.

Tenant compte de (3), la formule (2') devient :

$$(4) \quad \boxed{\int_{\gamma} \frac{ds}{\rho_g} + \sum_i \theta_i = 2\pi - \iint_{\delta} K d\sigma} \quad .$$

Introduisons les angles intérieurs α_i du polygone curviligne ; on a



$\theta_i = \pi - \alpha_i$. D'où, si n est le nombre des "sommets" (ou des "côtés") du polygone :

$$\int_{\gamma} \frac{ds}{\rho_g} + n\pi = \sum_i \alpha_i + 2\pi - \iint_{\delta} K d\sigma$$

ou encore :

$$(5) \quad \boxed{\sum_i \alpha_i = \int_{\gamma} \frac{ds}{\rho_g} + (n-2)\pi + \iint_{\delta} K d\sigma} \quad (\text{formule de Gauss-Bonnet})$$

Cas où les γ_i sont des arcs de géodésiques.

Dans ce cas $\int_{\gamma_i} \frac{ds}{\rho_g} = 0$, par définition des géodésiques. Alors la formule (5)

se simplifie. On dit que δ (ou γ) est un polygone géodésique, et (5) exprime la somme des angles d'un tel polygone géodésique à l'aide de l'intégrale double de la courbure totale.

Triangle géodésique. C'est le cas où $n = 3$.



La formule de Gauss-Bonnet s'écrit

$$\boxed{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi + \iint_{\delta} K d\sigma} \quad .$$

a) Prenons par exemple pour X le demi-plan de Poincaré. On a évidemment un champ de repères orthonormés dans X . Dans ce cas, $K = -1$. On retrouve que : $\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$ est égal à l'aire du triangle.

b) Dans le cas du plan euclidien, $K = 0$; on retrouve que la somme des angles d'un triangle rectiligne est égale à π .

c) Prenons pour X la sphère S^2 plongée dans $\mathbb{R}^3$.

Les arcs de géodésiques sont les arcs de grands cercles. Par deux points non diamétralement opposés, il passe un unique arc de grand cercle les joignant et de longueur $< \pi$.

Sur la sphère privée d'un point, il y a toujours un champ de repères, car par projection stéréographique, on projette le complément d'un point dans S^2 sur le plan, où il existe un champ de repères.

Il reste à déterminer la courbure totale de S^2 ; on peut déjà dire qu'elle est constante car on a le groupe des rotations qui est transitif. En fait, tout plan normal à S^2 en un point $M \in S^2$ coupe S^2 suivant un cercle de rayon 1; tous les points de la sphère sont des ombilics, et $K = 1$.

Pour un triangle géodésique δ sur la sphère, l'aire de δ est donc égale à

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi.$$

[Il existe une démonstration élémentaire de ce résultat; voir par ex. le Traité de Géométrie élémentaire d'Hadamard].

Cas où X est une variété riemannienne, orientée et compacte.

La formule (3) est valable pour un polygone curviligne, pourvu qu'il existe un champ de repères dans un voisinage de ce polygone. On va maintenant faire une étude globale dans le cas où X est une variété riemannienne, orientée et compacte. (La sphère S^2 , le tore plongés dans $\mathbb{R}^3$, donnent des exemples de telles variétés; mais le demi-plan de Poincaré n'est pas compact).

On démontre (nous l'admettons) qu'on peut toujours décomposer X en un nombre fini de polygones curvilignes P_j , tels que chaque "arête" appartienne à deux polygones et seulement à deux polygones.

$X = \bigcup_j P_j$ (ce n'est pas une union disjointe; on a

$$P_i \cap P_j = \begin{cases} \emptyset, & \text{ou} \\ \text{une arête} = \text{côté commun à } P_i \text{ et } P_j \end{cases}.$$

Soit M un sommet; la somme des angles en M est 2π .

Pour chaque P_j , on va écrire la formule de Gauss-Bonnet :

$$\sum_{i,j} \alpha_{i,j} = \sum_{i,j} \int_{\gamma_{i,j}} \frac{ds}{\rho_g} + n_j \pi - 2\pi + \iint_{P_j} K d\sigma.$$

On va ajouter membre à membre ces égalités, en sommant sur l'indice j . Or on a

$$\sum_j \left(\sum_{i,j} \alpha_{i,j} \right) = 2\pi S,$$

où S est le nombre de sommets dans la décomposition de X .

$$\sum_j \left(\sum_{i,j} \int_{\gamma_{i,j}} \frac{ds}{\rho_g} \right) :$$

chaque arête est comptée deux fois, dans deux polygones P_j et P_k ; mais dans P_j elle est parcourue dans un sens et dans P_k dans l'autre sens; les intégrales correspondantes sont donc opposées et on a donc

$$\sum_j \left(\sum_{i,j} \int_{\gamma_{i,j}} \frac{ds}{\rho_g} \right) = 0.$$

Soit A la nombre des arêtes; $\sum_j n_j = 2A$, car chaque arête est comptée deux fois.

$\sum_j (2\pi) = 2\pi F$, où F est le nombre des "faces". (i.e. des polygones).

Enfin :

$$\sum_j \iint_{P_j} K d\sigma = \int_X K d\sigma.$$

On a donc finalement :

$$2\pi S = 2\pi A - 2\pi F + \iint_X K d\sigma.$$

(6)

$$\boxed{F + S - A = \frac{1}{2\pi} \iint_X K d\sigma}$$

Remarques. Il peut y avoir plusieurs façons de décomposer X ; puisque le second membre de (6) ne dépend pas du choix de la décomposition, on conclut que l'entier $F + S - A$ est indépendant de la décomposition. C'est un invariant de la variété différentielle X . [En fait, on peut même prouver que c'est un invariant de l'espace topologique compact X].

On note

$$\chi(X) = F + S - A \quad ; \text{ on l'appelle la caractéristique}$$

d'Euler de la variété X .

Puisque le premier membre $\chi(X)$ de (6) est un entier, on voit que

$$\frac{1}{2\pi} \iint_X K \, d\sigma$$

est un entier ; de plus cet entier est indépendant de la structure riemannienne de X , car le décompte des faces, arêtes et sommets de la décomposition en polygone ne fait pas intervenir le ds^2 de la variété différentielle X .

Exemples :

a) $X = S^2$.

On va prendre la structure riemannienne de S^2 plongée dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne. Alors $K = 1$, d'où

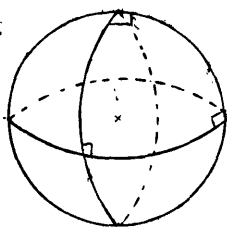
$$\frac{1}{2\pi} \int_X K \, d\sigma = \frac{1}{2\pi} \iint_{S^2} d\sigma = \frac{4\pi}{2\pi} = 2.$$

Ainsi

$$\chi(S^2) = 2.$$

Ceci prouve que si la sphère est décomposée en polygones, on a $F + S - A = 2$.

On va le vérifier sur une décomposition particulière : on partage la sphère en



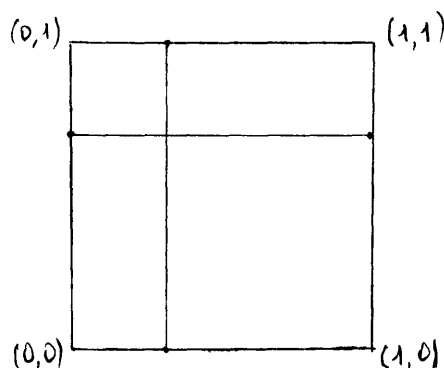
huit triangles égaux, dont tous les angles sont droits.

$$S = 6 ; F = 8 ; A = 12.$$

$$F + S - A = 8 + 6 - 12 = 2.$$

b) $X = \mathbb{T}^2 = \mathbb{T} \times \mathbb{T}$, où $\mathbb{T}$ désigne le tore

$$\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}. \text{ On a donc } \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2.$$



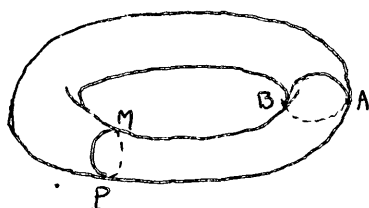
Le tore peut donc s'obtenir comme quotient du carré ayant pour sommets les points $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ et $(0,1)$. Ce carré fermé contient en effet au moins un représentant de chaque classe d'équivalence. La relation d'équivalence induite sur le carré est la suivante : on identifie deux points qui sont sur les

côtés horizontaux du carré et qui sont sur une même verticale ; et deux points qui sont sur les côtés verticaux et sur une même horizontale. Les quatre sommets sont donc identifiés en un seul point.

On va choisir une structure riemannienne sur le tore : $\mathbb{R}^2$ a une structure riemannienne évidente : sa structure euclidienne. Quand on fait une translation, cette structure riemannienne est conservée. Donc $\mathbb{T}^2$ hérite d'une structure riemannienne induite par celle de $\mathbb{R}^2$; elle est localement euclidienne ; et par suite $K = 0$. La relation (6) donne donc

$$\chi(\mathbb{T}^2) = 0$$

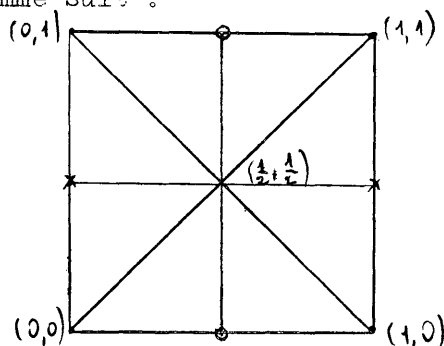
Pour toute autre structure riemannienne sur le tore, on aura $\iint_X K \, d\sigma$; donc si la courbure totale K n'est pas identiquement nulle, elle ne garde pas un signe constant. C'est ce qu'on vérifie lorsqu'on réalise le tore dans $\mathbb{R}^3$ et qu'on le



munir de la structure riemannienne induite ; au point A les deux rayons de courbure principaux ont le même signe ; en B ils sont de signes contraires.

Exemple de décomposition du tore en triangles : nous décomposons le carré

comme suit :



Compte tenu des identifications, on voit que :

$$F = 8, S = 4, A = 12. \text{ D'où}$$

$$F + S - A = 0,$$

comme il se doit.

On peut remarquer que le tore et la sphère ne sont pas difféomorphes, puisque leurs caractéristiques d'Euler sont différentes. [En fait, le tore et la sphère ne sont même pas homéomorphes].



DATE DE FIN DE PRÊT

H. 564



BJH17857

17857.

