PUBLICATIONS MATHEMATIQUES D'ORSAY

94-24

D.E.A. DE MATHEMATIQUES PURES

Cours :

ANALYSE FONCTIONNELLE ET HARMONIQUE
(1992-1993)

Myriam Déchamps, Françoise Piquard, Hervé Queffélec

Mémoires de D.E.A. :
P. Lefevre, P. Jaming, V. Cadet

Université de Paris-Sud
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
91405 ORSAY (France)

PUBLICATIONS MATHEMATIQUES D'ORSAY

94-24

D.E.A. DE MATHEMATIQUES PURES

Cours :

ANALYSE FONCTIONNELLE ET HARMONIQUE
(1992-1993)

Myriam Déchamps, Françoise Piquard, Hervé Queffélec

Mémoires de D.E.A. :

P. Lefevre, P. Jaming, V. Cadet

Université de Paris-Sud
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
91405 ORSAY (France)

TABLE DES MATIERES

P. Lefevre : Sur les ensembles de convergence uniforme

Le thème abordé est l'étude des ensembles de convergence uniforme dans le cadre d'un groupe abélien métrique compact. Après quelques rappels sur les résultats existants, on établit un résultat récent dû à Kashin et Tzafriri sur la densité de ces ensembles pour les systèmes trigonométrique et de Walsh.

P. Jaming : Inversibilité restreinte, problème d'extension de Kadison-Singer et applications à l'analyse harmonique

Le principal problème abordé ici est celui d'inversibilité restreinte de matrices $n \times n$. Les démonstrations utilisent des outils d'analyse fonctionnelle, probabilistes et combinatoires.

Ces résultats nous mèneront à des applications intéressantes en analyse harmonique. En particulier, nous établirons l'existence d'une constante $c > 0$ telle que pour toute partie B de $\mathbb{T}$, de mesure positive, il existe une partie $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ de densité positive, telle que pour toute fonction f à spectre dans Λ, on a

$$\left(\int_B |f|^2 \, d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant c\sqrt{\mu(B)}\, \|f\|_2 \, .$$

Enfin, nous ferons le lien entre les théorèmes d'inversibilité restreinte et le problème d'extension de Kadison-Singer.

V. Cadet : Une extension des inégalités de Khintchine-Kahane dans les espaces de Banach. Quelques applications.

Nous donnons une preuve détaillée d'un théorème d'Ullrich : "les inégalités de Khintchine-Kahane s'étendent jusqu'à l'exposant $p = 0$ pour le système de Steinhaus". Nous donnons ensuite quelques applications à des espaces de fonctions analytiques à une ou plusieurs variables.

P. Lefevre : About uniform convergence sets

The topic is the study of uniform convergence sets in a compact metrizable abelian group. After the prior results, we present a new theorem due to B. Kashin and L. Tzafriri about the density of UC sets for trigonometric and Walsh systems.

P. Jaming : Restricted invertibility, Kadison-Singer extension problem and applications to harmonic analysis

The main problem investigated her is that of restricted invertibility of $n \times n$ matrices. The prooves use functional analytic, probabilistic and combinatoric tools.

This results will lead us too interresting harmonic analysis applications. For instance, we will establish the existence of a constant $c > 0$ such that, for all $B \subset \mathbb{T}$ of positive measure, there exists a set $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ of positive density, such that, for every function f whose Fourier transform $\hat{f}$ is supported by Λ, we have :

$$\left(\int_B |f|^2 \, d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant c\sqrt{\mu(B)}\, \|f\|_2 .$$

Finely, we will link restricted invertibility to the Kadison-Singer extension property.

V. Cadet : An extension of the Khintchine-Kahane inequalities in the Banach spaces. Some applications.

We give a detailed proof of a theorem of Ullrich : "The Khintchine-Kahane inequalities can be extended till the exposant $p = 0$ for the Steinhaus system." Then we give some applications to spaces of analytic functions of one or several variables.

Sur

les ensembles

de

convergence uniforme

Par P. Lefevre

MOTS CLES : ensembles de convergence uniforme, ensembles de Sidon, inversibilité restreinte, ensembles associés à un ensemble de fréquences, problème de Kadison-Singer, sélection probabiliste, système trigonométriques, de Walsh, de Steinhaus et hilbertiens, inégalités de Khintchine-Kahane, espaces de fonctions analytiques.

KEYWORDS : UC sets, Sidon sets, restricted invertibility, sets of isomorphism, Kadison-Singer property, probabilistic selection, trigonometric system, Walsh system, Steinhaus system, hilbertian systems, Khintchine-Kahane inequalities, spaces of analytic functions.

CODE MATIERE AMS (1991) : 42A20 - 42A55 - 42C10 - 43A46 - 43A77 - 46B15 - 46L30 - 47A05 - 47A68 - 60E15 - 05A18 - 05A20.

Résumé

Le thème abordé est l'étude des ensembles de convergence uniforme dans le cadre d'un groupe abélien métrique compact infini. Après quelques rappels sur les résultats existants, on établit un résultat récent dû à Kashin et Tzafriri sur la densité de ces ensembles pour les systèmes trigonométrique et de Walsh.

Abstract

The topic is the study of uniform convergence sets in a compact metrizable abelian group. After the prior results, we present a new theorem due to B. Kashin and L. Tzafriri about the density of UC sets for trigonometric and Walsh systems.

Mots clés : ensembles de convergence uniforme, ensembles de Sidon, produits de Riesz, système trigonométrique, système de Walsh, ensembles aléatoires.

Key words : UC sets, Sidon sets, Riesz products, trigonometric system, Walsh system, random sets.

Code matière AMS (1991) : 42A20, 42A55, 42C10, 43A46, 43A77.

SOMMAIRE

Introduction

Ul'yanov [18] introduisit en 1965 la question de caractériser les sous-ensembles σ de $\mathbb{Z}$ pour lesquels les fonctions $\{\exp(2i\pi nx)\}_{n\in\sigma}$ (que l'on notera dorénavant e_n) forment une partie basique de $\mathcal{C} = \left(\{f \in C([0,1]) : f(0) = f(1)\}, \|.\|_\infty\right) = C(\mathbb{T})$ ($\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$) ou, ce qui revient au même, les sous-ensembles σ de $\mathbb{Z}$ pour lesquels les sommes partielles de Fourier de toute fonction à spectre dans σ convergent uniformément. On rappelle que le spectre d'une fonction f de $L^1([0,1])$ (noté $sp(f)$) est le support de sa transformée de Fourier $\hat{f}$. Etant donnée f dans $\mathcal{C}$, on voit aisément que, s'il y a convergence uniforme des sommes partielles $S_N(f)$, la suite $\{S_N(f)\}$ converge vers la fonction f. Il y a d'autres définitions équivalentes des ensembles de convergence uniforme que nous donnerons dans le premier chapitre.

On s'était déjà intéressé depuis longtemps au problème de la convergence normale (il s'agit alors de la notion d'ensemble de Sidon). On rappellera certains résultats à leurs propos, notamment qu'il s'agit bien d'une notion distincte de la première. Ce sera l'objet du deuxième chapitre où nous développerons plusieurs exemples exposés par l'école italienne (cf [10],[16],[17]).

Ul'yanov posa la question de savoir si, par exemple, $\{k^2\}_{k\in\mathbb{N}}$ était un ensemble de convergence uniforme. Oskolkov (cf. [8]) y répondit plus tard par la négative et généralisa ce résultat à tout ensemble $\{P(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ où P est un polynôme prenant des valeurs distinctes et entières sur $\mathbb{N}$. Nous verrons ce résultat dans le chapitre 3.

Enfin, le problème de caractériser les ensembles de convergence uniforme étant lié au problème de savoir s'ils sont "gros" ou pas, on s'intéressa longtemps au problème de connaitre leur densité ou du moins, si possible, de la majorer . Kashin et Tzafriri donnent une réponse partielle [6] et ce sera l'objet du dernier chapitre. On connaissait depuis longtemps des résultats à ce propos pour les ensembles de Sidon, nous les rappellerons dans le premier chapitre.

Nous finirons enfin avec les questions qui restent encore ouvertes.

Pour l'instant, rappelons quelques définitions et précisons quelques notations :

Définition : *On appellera UC la classe des ensembles de convergence uniforme.*

Notation : *On notera $\mathcal{P}_\Lambda$, respectivement C_Λ, resp.L^p_Λ, les éléments de $\mathcal{P}$ (l'ensemble des polynômes), resp. C, resp. L^p, dont le spectre est inclus dans Λ.*

Définition : *On rappelle les définitions équivalentes des ensembles de Sidon : on dit que $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ est un ensemble de Sidon si il vérifie une des propositions* *équivalentes suivantes :*

i) $\exists c > 0 : \forall P \in \mathcal{P}_\Lambda, \sum_{\lambda \in \Lambda} \left|\hat{P}(\lambda)\right| \leqslant c \|P\|_\infty$

ii) $\exists c > 0 : \forall f \in L^\infty_\Lambda, \sum_{\lambda \in \Lambda} \left|\hat{f}(\lambda)\right| \leqslant c \|f\|_\infty$

iii) $\exists c > 0 : \forall b \in \ell^\infty_\Lambda, \exists \mu \in M(\mathbb{T}) : \forall \lambda \in \Lambda, \quad \hat{\mu}(\lambda) = b_\lambda$ *et* $\|\mu\|_\infty \leqslant c$

iv) *Les sommes partielles de Fourier de toute fonction essentiellement bornée à spectre dans* Λ *convergent normalement vers* f.

De plus, la plus petite constante c vérifiant les propositions précédentes (c'est en fait la même !) est appelée la constante de Sidon et on la notera $S(\Lambda)$. *La mesure* μ *intervenant dans l'alinéa (iii) est appelée une mesure d'interpolation puisqu'elle interpole b sur* Λ.

Il apparaît donc clairement à partir de la caractérisation (*iv*) que tout ensemble de Sidon est un ensemble de convergence uniforme.

Notation : *Etant donnée une partie* $\mathcal{K}$ *de* $\mathbb{Z}$, *on notera* $\mathcal{L}_N(\mathcal{K})$ *la* $N^{ième}$ *constante de Lebesgue associée à* $\mathcal{K}$, *c'est à dire le nombre :*

$$Sup\{\|S_N(f)\|_\infty : f \in \mathcal{C}_\mathcal{K} \text{ et } \|f\|_\infty = 1\}$$

Enfin, dans le second chapitre, nous ne développerons pas uniquement des exemples dans le cadre de l'analyse de Fourier sur le groupe $\mathbb{T}$ mais également sur le groupe de Cantor $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ et nous utiliserons donc les fonctions de Walsh. De plus, dans le dernier chapitre, nous travaillerons d'abord dans le cadre du système de Walsh. Ainsi, nous rappelons la définition des fonctions de Walsh ordonnées par l'ordre de Paley :

Définition : *On rappelle que les fonctions de Rademacher sont définies pour tout* x *de* $\mathbb{R}$ *et tout entier* n *de* $\mathbb{N}$ *par* $r_n(x) = sign\,(\sin(2^n \pi x))$.

Définition : *Etant donné un entier* $j \geqslant 1$, *la décomposition binaire de* $j-1$ *s'écrit* $j - 1 = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k 2^k$, *la* $j^{ième}$ *fonction de Walsh que nous noterons* w_j *est alors définie par* $w_j = \prod_{k \in \mathbb{N}} r_{k+1}^{a_k}$ *où* r_k *est la* $k^{ième}$ *fonction de Rademacher. On note que nous les considérons définies sur* $\mathbb{R}$, *c'est à dire 1-périodiques. La fonction* w_1 *est identiquement égale à 1.*

Définition : *On définit également la matrice de Walsh d'ordre* N *(où* N *est une puissance de 2), que nous noterons* W_N, *dont l'élément générique de la* $p^{ième}$ *ligne et* $q^{ième}$ *colonne est* $w_p(\frac{q-\frac{1}{2}}{N})$, *avec* $1 \leqslant p, q \leqslant N$.

1
Résultats préliminaires

Dans la suite, G désigne un groupe topologique métrisable abélien infini compact, muni de sa mesure de Haar normalisée notée dx. Le dual Γ de G est alors un groupe discret dénombrable infini (cf. [14]). Fixons une suite dénombrable croissante d'ensembles finis $\{F_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ qui recouvre Γ (typiquement $\{-N, N\}$ pour $\mathbb{Z}$ et $\{w_1, \ldots, w_N\}$ pour le groupe de Cantor).

$\mathcal{P}$, $\mathcal{C}(G)$ et $L^p(G)$, $p \geqslant 1$, désignent respectivement l'espace des polynômes trigonométriques, des fonctions continues et des classes de fonctions dont la puissance $p^{ième}$ est intégrable sur G. Pour $f \in L^1(G)$ et $\gamma \in \Gamma$, on pose

$$\hat{f}(\gamma) = \int_G \gamma(-x) f(x)dx \qquad \text{et} \qquad S_N(f) = \sum_{\gamma\in F_N} \hat{f}(\gamma)\gamma \qquad N \geqslant 0$$

Pour toute partie A de $L^1(G)$ et toute partie Λ de Γ, A_Λ désigne l'ensemble des éléments de A dont le support de la transformée de Fourier est inclus dans Λ.

Définition : *On dit qu'une partie Λ de Γ est de convergence uniforme si toute fonction f de $\mathcal{C}_\Lambda(G)$ possède une série de Fourier convergente dans $\mathcal{C}(G)$ $(S_N(f))_{N\geqslant 0}$ convergera alors nécessairement vers f).*

Lemme : *$\mathcal{P}$ est dense dans $\mathcal{C}(G)$. Plus généralement, pour toute partie Λ de Γ, $\mathcal{P}_\Lambda(G)$ est dense dans $\mathcal{C}_\Lambda(G)$.*

Preuve : : Il existe (cf section 2.6 de [14]) une généralisation $(Q_n)_{n\geqslant 0}$ des noyaux de Fejer caractérisée par : Q_n est un polynôme positif, de norme L^1 égale à 1 et telle que pour tout voisinage V de 0 on ait $\int_{V^c} Q_n(x)dx$ qui converge vers 0 (V^c désigne le complémentaire de V). Ainsi, si f est dans $\mathcal{C}_\Lambda(G)$, $f * Q_n = \sum_{\gamma\in\Lambda} \hat{f}(\gamma)\widehat{Q_n}(\gamma)\gamma$ est un élément de $\mathcal{P}_\Lambda(G)$ et on montre de manière standard que $\|f * Q_n - f\|_\infty$ converge vers 0.

Proposition : *Soit Λ une partie de Γ. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) *Λ est un ensemble de convergence uniforme.*

ii) Il existe une constante $C > 0$ et, pour tout entier N, une mesure μ_N dans $M(G)$ telle que : $\|\mu_N\| \leqslant C$; $\hat{\mu}_N(\gamma) = 1$ si $\gamma \in \Lambda \cap F_N$ et $\hat{\mu}_N(\gamma) = 0$ si $\gamma \in \Lambda \cap (\Gamma \setminus F_N)$.

iii) La suite $\{\mathcal{L}_N(\Lambda)\}_{N\geqslant 1}$ est bornée.

iv) Si f est dans $\mathcal{C}_\Lambda(G)$ alors la série de Fourier de f en 0 converge vers $f(0)$.

On note alors $U(\Lambda)$ la borne supérieure des constantes de Lebesgue.

Preuve : Supposons que Λ soit un ensemble de convergence uniforme alors on considère les formes linéaires T_N qui à une fonction f de $C_\Lambda(G)$ associent sa $N^{ième}$ somme de Fourier en 0. Comme ces sommes sont bornées par hypothèse, on peut appliquer le théorème de Banach-Steinhaus sur l'espace de Banach $C_\Lambda(G)$ et les opérateurs T_N sont uniformément bornés en N donc il existe une constante $C > 0$ telle que $\|T_N\| \leqslant C$. Le théorème de Hahn-Banach nous permet alors de prolonger les formes linéaires T_N à $C(G)$. Le théorème de représentation de Riesz nous assure maintenant de l'existence de μ_N dans $M(G)$ telle que $\|\mu_N\| = \|T_N\| \leqslant C$. Ainsi, on a par restriction, pour tout élément f de $C_\Lambda(G)$:

$$T_N(f) = \int_G f(-x)d\mu_N(x) \text{ donc } \forall\gamma \in \Lambda : T_N(\gamma) = \int_G \gamma(-x)d\mu_N(x) = \widehat{\mu_N}(\gamma).$$

Or par définition de T_N, si γ appartient à Λ alors $T_N(\gamma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \gamma \in F_N \\ 0 & \text{si } \gamma \in \Gamma \setminus F_N \end{cases}$

Ainsi, l'assertion (ii) est établie en choisissant la suite $(\mu_N)_N$.

Supposons maintenant (ii) vérifiée. Alors, on a de fait pour toute fonction de $C_\Lambda(G)$:

$$S_N(f) = \mu_N * f \text{ donc } \|S_N(f)\|_\infty = \|\mu_N * f\|_\infty \leqslant C\,\|f\|_\infty$$

Ainsi les constantes de Lebesgue sont bornées par C et l'assertion (iii) est vraie.

Enfin, supposons que la suite $\{\mathcal{L}_N(\Lambda)\}_{N\geqslant 1}$ soit bornée par $U(\Lambda)$. On remarque que les caractères forment bien sûr une famille libre sur Γ.

On introduit la famille d'opérateurs P_s qui à un polynôme, c'est à dire une fonction de la forme $\sum_{\gamma\in\Lambda\cap F_j} a_\gamma\gamma$, associe le polynôme $\sum_{\gamma\in\Lambda\cap F_s\cap F_j} a_\gamma\gamma$. Ce sont bien des opérateurs continus puisqu'ils sont bornés par $U(\Lambda)$.

D'après le lemme, si on se donne une fonction f dans $C_\Lambda(G)$ et un $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme $P = \sum_{\gamma\in\Lambda\cap F_j} a_\gamma\gamma$ tel que $\|f - P\|_\infty \leqslant \varepsilon$. On a alors, pour s supérieur à j, $P_s(P) = P$ donc la majoration :

$$\begin{aligned}\|f - P_s(f)\|_\infty &\leqslant \|f - P\|_\infty + \|P - P_s(P)\|_\infty + \|P_s(P) - P_s(f)\|_\infty \\ &\leqslant \varepsilon(1 + U(\Lambda))\end{aligned}$$

D'après un critère de [20] (p. 38), la famille $\{\gamma\}_{\gamma\in\Lambda}$ est une suite basique de $(C_\Lambda(G), \|.\|_\infty)$ donc Λ est dans UC.

Ceci établit l'équivalence des trois premiers alinéas. Il est clair que (i) implique (iv). Réciproquement, si (iv) a lieu, l'argument donné au début de la preuve implique que les opérateurs T_N sont bornées par une constante C ainsi l'invariance de $C_\Lambda(G)$ par translation donne pour tout x dans G :

$$|S_N(f)(x)| \leqslant |S_N(\tau_{-x}f)(0)| \leqslant C \left\|\tau_{-x}f\right\|_\infty \leqslant C \left\|f\right\|_\infty$$

Les constantes de Lebesgues sont donc bornées par C, (iii) est vérifiée et ceci achève la démonstration de la proposition.

Faisons un rappel sur le comportement assymptotique des constantes de Lebesgue associées au groupe dual tout entier dans le cadre trigonométrique et dans le cadre du groupe de Cantor. Dans le premier cas, le résultat est bien connu (cf [21] p.67) : $\mathcal{L}_N(\mathbb{Z}) = \left(\frac{4}{\pi^2}\right)\log(N) + O(1)$ au voisinage de $+\infty$.

Dans le cadre du système de Walsh, on a toujours $\mathcal{L}_N(\mathbb{N}^*) = \int_0^1 |D_N(t)|\, dt$ où D_N est encore le $N^{ième}$ noyau de Dirichlet soit, ici : $D_N = \sum_{j=1}^{N} w_j$. Majorons alors $\mathcal{L}_N(\mathbb{N}^*)$ que l'on écrira $\mathcal{L}_N$. Remarquons d'abord que $r_k D_{2^{k-1}} = \sum_{2^{k-1}+1 \leqslant q \leqslant 2^k} w_q$ ainsi on a la relation $D_{2^k} = D_{2^{k-1}} + r_k D_{2^{k-1}} = \prod_{s=1}^{k} [1 + r_s]$ d'où :

$$D_{2^k}(t) = \begin{cases} 2^k & \text{si } t \in]0, 2^{-k}[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc $\mathcal{L}_{2^k} = 1$. Mais la suite $\left(\mathcal{L}_N\right)_N$ n'est pas bornée car on peut aussi montrer que (cf [5], p.140) : $\overline{\lim_{N\to+\infty}} \frac{\mathcal{L}_N}{\log_2(N)} > 0$. Ainsi l'étude des ensembles de convergence uniforme n'est pas triviale : $\mathbb{Z}$ n'est pas de convergence uniforme pour le système trigonométrique et $\mathbb{N}^*$ n'est pas de convergence uniforme pour le système de Walsh.

On remarque également que le caractère UC dépend de la suite $(F_N)_N$ choisie. Effectivement, si on pose $F_n = \{w_1, \ldots, w_{2^n}\}$, $\mathcal{L}_n(\mathbb{N}^*)$ vaut maintenant 1 donc $\mathbb{N}^*$ est de convergence uniforme pour le système de Walsh pour ce choix de $(F_n)_n$.

Le cas des ensembles de Sidon est étudié depuis plus longtemps. Ainsi, on connait des conditions nécessaires pour être un ensemble de Sidon et notamment une majoration de leur densité, c'est à dire du cardinal de $[-N, N] \cap \Lambda$ quand Λ est un ensemble de Sidon et N un entier. Pour cela, nous rappelons sans démonstration une condition arithmétique connue relative aux ensembles de Sidon.

Définitions : *On rappelle qu'une $s-$maille construite sur $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ (éléments* *de Γ) est une partie de Γ de la forme :*

$$M(\gamma_1,\ldots,\gamma_n;s)=\left\{\prod_{j=1}^{n}\gamma_j^{n_j}\ :\ \sum_{j=1}^{n}|n_j|\leqslant 2^s\right\}$$

On dit qu'une partie Λ de $\mathbb{Z}$ satisfait la condition des mailles si pour toute famille $(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$ d'éléments de Γ et tout entier s, on a l'inégalité : $|\Lambda\cap M(\gamma_1,\ldots,\gamma_n;s)|\leqslant Kns$, où K est une constante.

Théorème 1.1. (cf [7], p.72). Si Λ est un ensemble de Sidon, Λ vérifie la condition des mailles avec $K\leqslant(16S(\Lambda))^2$.

En particulier, on retrouve d'une part (on peut trouver une preuve indépendante dans [14]), avec $n=1$, que pour tout Sidon Λ de $\mathbb{Z}$, on a la majoration : $|\Lambda\cap\{-N,\ldots,N\}|\leqslant 8eS(\Lambda)^2\log(2N+1)$. On peut d'autre part en déduire que pour tout sous groupe fini non trivial A de Γ, on a : $|A\cap\Lambda|\leqslant K\log(|A|)$.

On retrouve également le résultat suivant :

Théorème 1.2. (cf [7]). Soit E un ensemble de Sidon de Γ alors la borne supérieure de l'ensemble des minimums de $|A|$ et $|B|$, où les parties A et B de Γ sont telles que AB soit inclus dans E, est finie. En particulier, un ensemble de Sidon ne peut être le produit de deux ensembles infinis.

Comme pour les ensembles de Sidon, on a des conditions nécessaires sur la "taille" des ensembles de convergence uniforme pour le système trigonométrique et pour le système de Walsh. Ainsi :

Théorème 1.3. (cf [10]). Si Λ une partie de $\mathbb{Z}$ qui est un ensemble de convergence uniforme, alors Λ ne peut contenir de progression arithmétique arbitrairement grande.

Preuve : Il suffit de raisonner avec les constantes de Lebesgue : il existe une fonction continue f de norme inférieure à 1 telle que $\|S_N(f)\|_\infty\geqslant(\frac{4}{\pi^2})\log(N)-1$. Comme l'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans C (cf lemme), on peut trouver un polynôme P à une distance plus petite que $\frac{1}{2}$ de f, ainsi $\|P\|_\infty\leqslant\frac{3}{2}$. En normalisant, on a donc un polynôme que l'on note P_N de norme 1 dont la somme de Fourier vérifie :

$$\|S_N(P_N)\|_\infty\geqslant\|S_N(f)\|_\infty-\mathcal{L}_N\,\|f-P_N\|_\infty\geqslant\left(\frac{2}{\pi^2}\right)\log(N)-1$$

Ainsi, $\|S_N(P_N)\|_\infty$ diverge vers $+\infty$. On notera k_N le degré de P_N. Quitte à multiplier le polynôme P_N par $\exp(2i\pi k_N.)$, on peut supposer que pour tout entier $n<0$, $\widehat{P_N}(n)$ est nul.

Supposons alors que Λ contienne une suite de progressions arithmétiques dont la taille devient arbitrairement grande, c'est à dire qu'il existe une suite d'entiers N_j tels que les parties $\{a_j + nb_j\}_{0 \leqslant n \leqslant N_j}$ $(1 \leqslant b_j,\ a_j \in \mathbb{Z})$ soient incluses dans Λ. Quitte à prendre une sous-suite de $\{N_j\}$, on peut supposer que $N_j > k_j$. On considère alors le polynôme g_j défini par :

$$\widehat{g_j}(n) = \begin{cases} \widehat{P_j}(m) & \text{si } n \text{ est de la forme } a_j + mb_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors $\|g_j\|_\infty = \|P_j\|_\infty \leqslant 1$ et g_j a son spectre dans Λ. Or, les sommes partielles de g_j ne sont pas bornées avec j car, pour tout x :

$$S_{a_j+jb_j}(g_j)(x) = \sum_{m=0}^{j} \widehat{P_j}(m) \exp(2i\pi(a_j + mb_j)x) = \tau_{a_j} S_j(P_j)(b_j x)$$

$$\text{Donc } \left\|S_{a_j+jb_j}(g_j)\right\|_\infty = \|S_j(P_j)\|_\infty \text{ qui diverge vers } +\infty$$

Ceci contredit le fait que Λ puisse être un ensemble de convergence uniforme.

Théorème 1.4. (cf [10]). Soit E une partie du dual Γ du groupe de Cantor qui soit dans *UC*, alors E ne peut contenir de sous-groupe de cardinal arbitrairement grand.

Preuve : Par le même argument que dans le cas trigonométrique (on sait que $\overline{lim}\frac{\mathcal{L}_N}{\log_2(N)} > 0$), on justifie l'existence d'une suite d'entiers $\{n_k\}$ et d'une suite de polynômes f_k, de degré noté d_k, $\|f_k\|_\infty = 1$ et $\|S_{n_k} f_k\|_\infty$ diverge vers $+\infty$.

Supposons alors que E contienne une famille de sous-groupes de cardinal arbitrairement grand 2^{h_k} (un sous-groupe fini du groupe dual a nécessairement pour cardinal une puissance de 2 car tous les éléments sont d'ordre au plus 2). Quitte à extraire une sous-suite de la suite $\{h_k\}$ et une autre de $\{d_k\}$, on peut supposer que celles-ci vérifient $2^{h_k-1} < d_k \leqslant 2^{h_k}$. Puisque les sous-groupes que l'on considère sont finis, il existe une famille génératrice finie, qui de fait est de cardinal h_k : $s_1, \ldots, s_{h_k}$. On supposera enfin que ces éléments s_i sont ordonnés dans l'ordre croissant de Paley.

On identifie les caractères du groupe de Cantor et les fonctions de Walsh (cf. p. 40) et on peut identifier une fonction de Walsh à un élément du Cantor n'ayant que des zéros à partir d'un certain rang. Il existe alors un isomorphisme de groupe α du dual Γ du groupe de Cantor sur lui-même tel que $\alpha(s_i) = r_i$, pour tout i dans $\{1, \ldots, h_k\}$. Soit alors P_k tel que $\widehat{P_k}(w_j) = \widehat{S_{n_k}(f_k)}(\alpha(w_j))$ et f_k^* telle que $\widehat{f_k^*}(w_j) = \hat{f}_k(\alpha(w_j))$: on a alors

$$\|f_k^*\|_\infty = \|f_k\|_\infty \leqslant 1 \text{ et } \|P_k\|_\infty = \|S_{n_k}(f_k)\|_\infty \to +\infty$$

Or, $P_k = S_{m_k}(f_k)$ où m_k est tel que $w_{m_k} = \alpha^{-1}(w_{n_k})$.

On a donc une suite de polynômes f_k^* à spectre dans E dont les sommes partielles de Fourier d'ordre m_k divergent vers l'infini. Ceci contredit l'hypothèse selon laquelle l'ensemble E est dans *UC* et le théorème est démontré.

2
Exemples et Contre-exemples

Nous nous proposons dans ce chapitre de développer divers exemples correspondant d'une part à un souci d'établir que les différentes notions d'ensembles de convergence que nous avons définies sont bien distinctes, d'autre part à des problèmes posés par Ul'yanov ou par d'autres mathématiciens quant à la stabilité par union des ensembles de convergence uniforme. Enfin, nous introduirons un autre type d'ensemble de convergence, intermédiaire entre UC et les ensembles de Sidon : les ensembles de convergence complètement uniforme et nous verrons dans quelle mesure cette notion se distingue des autres. Nous travaillerons tantôt dans un cadre général, tantôt dans le cadre trigonométrique ou dans celui du système de Walsh.

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser à présenter des ensembles qui sont de convergence uniforme mais qui ne sont pas des ensembles de Sidon. Commençons par une définition :

Soient G un groupe topologique métrisable abélien compact, muni de sa mesure de Haar normalisée notée dx et son dual Γ, on fixe une suite croissante d'ensembles finis $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ qui recouvre Γ.

Définitions : *Soit D une partie de Γ, on dit que D est dissocié (resp. quasi-indépendant) si 1 n'est pas dans D et si la relation de dépendance : $\gamma_1^{\alpha_1}\dots\gamma_m^{\alpha_m}=1$, où γ_j est dans D et α_j dans $\{0,\pm1,\pm2\}$ (resp. $\{0,\pm1\}$), implique $\gamma_i^{\alpha_i}=1$ pour tout i, $1\leqslant i\leqslant m$.*

Construction d'un exemple : *On note E_1 le singleton réduit à γ_1 ($\gamma_1\neq 1$). Supposons $E_k=\{\gamma_1,\dots,\gamma_k\}$ construit, on considère n_k le plus petit entier tel que l'ensemble $E_k^2=\{\gamma_{j_1}\gamma_{j_2}:\gamma_{j_i}\in E_k \text{ et } 1\leqslant j_1<j_2\leqslant k\}$ soit inclus dans F_{n_k}. Alors, on choisit γ_{k+1} tel que $E_{k+1}=E_k\cup\{\gamma_{k+1}\}$ soit dissocié et $\gamma_{k+1}E_k\cap F_{n_k}$ soit vide. On note alors E l'ensemble $\bigcup_k E_k=\{\gamma_j\}_{j\geqslant1}$. On note que E est dissocié donc est un ensemble de Sidon.*

On définit alors $E^2=\{\gamma_i\gamma_j : 1\leqslant i,j \text{ et } i\neq j\}$.

Théorème 2.1. (cf. [10]) L'ensemble E^2 est un ensemble de convergence uniforme mais n'est pas un ensemble de Sidon.

Preuve : Commençons par montrer qu'il s'agit d'un ensemble de convergence uniforme en bornant les constantes de Lebesgue. On se donne donc f dans $C_{E^2}(G)$ et un entier N. Il existe un entier k tel $n_k\leqslant N<n_{k+1}$ et on décompose alors la

somme partielle de Fourier en deux :

$$S_N(f) = \underbrace{\sum_{F_{n_k}} \hat{f}(\gamma)\gamma}_{A_N} + \underbrace{\sum_{F_N \setminus F_{n_k}} \hat{f}(\gamma)\gamma}_{B_N}$$

On se propose de majorer séparément A_N et B_N. Pour cela, on va utiliser le produit de Riesz d'ordre k :

$$P(x) = P_k(x) = \prod_{i=1}^{k} \left(1 + \frac{\gamma_i(x) + \overline{\gamma_i}(x)}{2}\right)$$

Etant donné que E est dissocié, P est réel et positif, $\hat{P}(0) = \|P\|_1 = 1$ et $\hat{P}(\gamma_i\gamma_j) = \frac{1}{4}$, si $i, j \leqslant k$ et $i \neq j$. Or, si le produit $\gamma_i\gamma_j$ est dans F_{n_k}, c'est que i et j sont inférieurs à k. Ainsi, puisque les éléments γ de $E^2 \cap F_{n_k}$ sont de la forme $\gamma_i\gamma_j$ ($i < j \leqslant k$), on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}A_N &= \frac{1}{4} \sum_{E^2 \cap F_{n_k}} \hat{f}(\gamma)\gamma = \sum_{E^2 \cap F_{n_k}} \hat{P}(\gamma)\hat{f}(\gamma)\gamma \\ &= \sum_{\Gamma} \hat{P}(\gamma)\hat{f}(\gamma)\gamma = \sum_{\Gamma} \widehat{P * f}(\gamma)\gamma \\ &= P * f\end{aligned}$$

D'où la majoration : $\|A_N\|_\infty \leqslant 4 \|f\|_\infty \|P\|_1 \leqslant 4 \|f\|_\infty$.

Passons à l'autre somme qui ne comporte que des termes $\hat{f}(\gamma)$ avec γ dans F_N mais pas dans F_{n_k} (ainsi nécessairement γ est de la forme $\gamma_{k+1}\gamma_i$ avec $i \leqslant k$). Ceci dit, on considère encore un produit de Riesz que l'on "shifte" : soit

$$Q = Q_k = \gamma_{k+1} \prod_{i=1}^{k} \left(1 + a_i \frac{\gamma_i(x) + \overline{\gamma_i}(x)}{2}\right)$$

$$\text{où} : a_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \gamma_{k+1}\gamma_i \in F_N \\ 0 & \text{si } \gamma_{k+1}\gamma_i \notin F_N \end{cases}$$

Dès lors : $\|Q\|_1 = \hat{Q}(\gamma_{k+1}) = 1$ et $\hat{Q}(\gamma_{k+1}\gamma_i) = \frac{a_i}{2}$. pour tout $i \leqslant k$. On a alors une relation similaire à ce qui se passait dans le premier cas :

$$f * Q = \sum_{\Gamma} \hat{Q}(\gamma)\hat{f}(\gamma)\gamma = \frac{1}{2} \sum_{F_N \setminus F_{n_k}} \hat{f}(\gamma)\gamma$$

d'où : $\|B_N\|_\infty \leqslant 2 \|f\|_\infty$ et finalement : $\|S_N(f)\|_\infty \leqslant 6 \|f\|_\infty$. E^2 est donc bien un ensemble de convergence uniforme.

Le fait que E^2 ne soit pas un ensemble de Sidon résulte du théorème 1.2 puisque E^2 contient des rectangles arbitrairement grands AB, avec $A = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ et $B = \{\gamma_{n+1}, \ldots, \gamma_{2n}\}$. Ceci achève la preuve du théorème.

On peut généraliser dans $\mathbf{Z}$ la construction précédente à un produit de k ensembles, en utilisant des produits de Riesz, mais on verra que l'on peut faire une preuve plus simple (cf th. 2.7) avec le noyau de De La Vallee Poussin (cf 2.4).

Nous allons maintenant démontrer un résultat, équivalent au précédent, dans le cadre du système de Walsh.

Théorème 2.2. (cf. [10]) Soit E_s l'ensemble constitué par les produits de fonctions de Rademacher de la forme $r_{i_1} \ldots r_{i_s}$ avec $i_1 < \ldots < i_s$. Si on se donne des entiers $\{s_1, \ldots, s_p\}$, en notant E l'union des ensembles E_{s_k} pour $1 \leqslant k \leqslant p$, alors E est un ensemble de convergence uniforme et si un des s_j est strictement supérieur à 1 alors ce n'est pas un Sidon.

Preuve : La deuxième partie de l'énoncé est trivialement une conséquence du théorème 1.2. Montrons que E est un ensemble de convergence uniforme :

Soit un entier N et m le plus grand entier inférieur à N tel que w_m appartienne à E. $m-1$ s'écrit $2^{j_1} + \ldots + 2^{j_h}$ avec $j_1 > \ldots > j_h$ et donc $w_m = r_{1+j_1} \ldots r_{1+j_h}$. On considère alors une fois de plus les produits de Riesz :

$$P_1 = \prod_{i=1}^{j_1 - 1} (1 + r_{i+1})$$

$$P_q = r_{1+j_1} \ldots r_{1+j_{q-1}} \prod_{i=1}^{j_q - 1} (1 + r_{i+1}) \text{ pour } 2 \leqslant q \leqslant h$$

$$P_{h+1} = r_{1+j_1} \ldots r_{1+j_h}$$

et on pose $Q_N = P_1 + \cdots + P_{h+1}$. On remarque que $\|Q_N\|_1 \leqslant h+1$ car chaque produit de Riesz est de norme inférieure à 1. Or, w_m est dans E donc h s'écrit s_j avec $j \leqslant p$. Ainsi w_m est le produit d'au plus $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant p} \{s_j\}$ fonctions de Rademacher donc, comme $h \leqslant \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant p} \{s_j\}$, $\|Q_N\|_1 \leqslant 1 + \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant p} \{s_j\}$.

D'autre part, soit w_k un élément de E : si $k > N$, a fortiori $k > m$ donc, par définition de Q_N : $\widehat{Q_N}(w_k) = 0$. Si $k \leqslant N$ alors $k \leqslant m$ par définition de m. $w_k = r_{1+l_1} \ldots r_{1+l_q}$ ($l_1 > \ldots > l_h$) et w_k appartient à E donc est le produit de q fonctions de Rademacher avec q inférieur à $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant p} \{s_j\}$ ainsi w_k est dans l'ensemble E_q (où $q = s_b$ avec $1 \leqslant b \leqslant p$) et $\widehat{Q_N}(w_k) = \widehat{P_{q_0}}(w_k) = 1$ où q_0 est le plus petit entier c tel que $l_c \neq j_c$ (auquel cas nécessairement $l_c \leqslant j_c - 1$ car $k \leqslant m$). Finalement, on a donc un élément Q_N de L^1 qui est borné par $1 + \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant p} \{s_j\}$, qui définit donc une mesure et qui vérifie :

$$\widehat{Q_N}(w_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } w_k \in E \text{ et } k \leqslant N \\ 0 & \text{si } w_k \in E \text{ et } k > N \end{cases}$$

D'après la caractérisation (ii) des ensembles de convergence uniforme, E est dans UC.

Nous allons maintenant nous intéresser, dans un cadre trigonométrique, au problème de l'union des ensembles de convergence uniforme. Sur ce point, UC se distingue encore des ensembles de Sidon car on sait que l'union de deux ensembles de Sidon est un ensemble de Sidon (voir les théorèmes de Drury dans chapitre 3 (et notamment 3.5) de [7]) alors que nous verrons que ce n'est pas toujours vrai pour UC. Toutefois, on peut conclure positivement au prix bien sûr de certaines contraintes.

Théorème 2.3. (cf. [17]) Si on se donne deux parties A de $\mathbb{N}$ et B de $\mathbb{Z}^-$ (il s'agit des entiers strictement négatifs) qui soient dans UC, alors $A \cup B$ est dans UC.

Preuve : On se donne une fonction f dans $C_{A\cup B}$. On considère le $N^{ième}$ noyau de De La Vallee Poussin : $V_N = 2K_{2N} - K_N$. On rappelle que $\widehat{V_N}(n) = 1$ si $-N \leqslant n \leqslant N$ donc on a l'identité :

$$\begin{aligned} S_N(f) &= \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)\widehat{V_N}(n)e_n \\ &= \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)\left(\widehat{V_N}(n) - \widehat{V_{[\frac{N}{2}]}}(n)\right) e_n + \left(f * V_{[\frac{N}{2}]}\right) \end{aligned}$$

où $[x]$ désigne la partie entière de x. Or, le support de la transformée : $\widehat{V_N} - \widehat{V_{[\frac{N}{2}]}}$ est inclus dans :

$$\underbrace{\left[[\frac{N}{2}] + 1, 2N - 1\right]}_{E^+} \cup \underbrace{\left[-2N + 1, -[\frac{N}{2}] - 1\right]}_{E^-}$$

On pose alors $q_N = e_{[\frac{3N}{2}]}V_N$ et $p_N = e_{[\frac{3N}{2}]}V_N$ et on note alors que pour tout n : $\widehat{p_N}(n) = \widehat{V_N}(n + [\frac{3N}{2}])$ et $\widehat{q_N}(n) = \widehat{V_N}(n - [\frac{3N}{2}])$ donc on conclut alors que pour tout n dans E^+, on a : $\widehat{p_N}(n) = 0$ et $\widehat{q_N}(n) = 1$ et que pour tout n de E^-, on a : $\widehat{p_N}(n) = 1$ et $\widehat{q_N}(n) = 0$.

$$\text{Ainsi, } S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)\left(\widehat{V_N}(n) - \widehat{V_{[\frac{N}{2}]}}(n)\right)\widehat{q_N}(n)e_n$$
$$+ \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)\left(\widehat{V_N}(n) - \widehat{V_{[\frac{N}{2}]}}(n)\right)\widehat{p_N}(n)e_n$$
$$+ \left(f * V_{[\frac{N}{2}]}\right)$$

où on remarque que le support de $\hat{f}(n)\left(\widehat{V_N}(n) - \widehat{V_{[\frac{N}{2}]}}(n)\right)\widehat{q_N}(n)$ est inclus dans A alors que celui de $\hat{f}(n)\left(\widehat{V_N}(n) - \widehat{V_{[\frac{N}{2}]}}(n)\right)\widehat{p_N}(n)$ est inclus dans B. Ainsi, comme A et B sont des ensembles de convergence uniforme, on a la majoration :

$$\begin{aligned}
\|S_N(f)\|_\infty \leqslant & U(A)\left\|f * (V_N - V_{[\frac{N}{2}]}) * q_N\right\|_\infty + U(B)\left\|f * (V_N - V_{[\frac{N}{2}]}) * p_N\right\|_\infty \\
& + \left\|f * V_{[\frac{N}{2}]}\right\|_\infty \\
\leqslant & U(A)\|f\|_\infty \|q_N\|_1 \left\|V_N - V_{[\frac{N}{2}]}\right\|_1 + U(B)\|f\|_\infty \|p_N\|_1 \left\|V_N - V_{[\frac{N}{2}]}\right\|_1 \\
& + \|f\|_\infty \left\|V_{[\frac{N}{2}]}\right\|_1 \\
\leqslant & 18(U(A) + U(B))\|f\|_\infty + 3\|f\|_\infty
\end{aligned}$$

On conclut donc que $A \cup B$ est bien un ensemble de convergence uniforme.

Notation : *On notera, pour a positif, $[a]^+$ le nombre a si celui-ci est entier ou $[a]+1$ s'il ne l'est pas, c'est à dire que $[a]^+$ est le plus petit entier supérieur ou égal à a.*

Théorème 2.4. (cf. [17]) Si on se donne une partie A de $\mathbb{N}^*$ alors on a l'équivalence des deux assertions suivantes :

i) A est un ensemble de convergence uniforme.

ii) Il existe $q > 1$ et $C > 0$ tels que $\sup_{N \in \mathbb{N}^*} \left\{U\left(A \cap [N, [qN]^+]\right)\right\} \leqslant C$

Preuve : L'implication $i \Rightarrow ii$ est claire car alors $U(A)$ est fini et on a : $U\left(A \cap [N, [qN]^+]\right) \leqslant U(A)$ pour tout entier N et tout q.

Montrons la réciproque. On va s'inspirer fortement de la démonstration précédente en affinant les estimations. Pour cela, étant donné a dans $]1, +\infty[$, on utilisera le noyau $V_{a,N}$ avec $V_{a,N} = V_N$ si $a \geqslant 2$ et, si a est dans $]1, 2[$, on prend :

$$V_{a,N} = \frac{[Na]^+}{[Na]^+ - N} K_{[aN]^+ - 1} + \frac{N}{[Na]^+ - N} K_{N-1}$$

où K_N est le $N^{i\grave{e}me}$ noyau de Fejer. On a pour ce nouveau noyau des estimations similaires à celles du noyau de De La Vallee Poussin, à savoir une majoration en norme 1 : $\|V_{a,N}\|_1 \leqslant \frac{[Na]^+ + N}{[Na]^+ - N} = 1 + \frac{2N}{[Na]^+ - N} \leqslant \frac{3}{a-1}$ (on a $[Na]^+ \geqslant Na$), quant à la transformée : $\widehat{V_{a,N}}(n) = 1$ si $|n| \leqslant N$ et $\widehat{V_{a,N}}(n) = 0$ si $|n| \geqslant [aN]^+$. On prend dans la suite pour a le nombre $\sqrt{q}$ où q est donné par l'hypothèse (ii).

On se donne une fonction f à spectre dans A (qui est inclus dans $\mathbb{N}$ donc les sommes partent de $n = 0$) et la $N^{ième}$ somme partielle de Fourier s'écrit :

$$\begin{aligned} S_N(f) &= \sum_{n=0}^{N} \hat{f}(n)\widehat{V_{a,N}}(n)e_n \\ &= \sum_{n=0}^{N} \hat{f}(n)\left(\widehat{V_{a,N}}(n) - \widehat{V_{a,[\frac{N}{a}]}}(n)\right) e_n + \left(f * V_{a,[\frac{N}{a}]}\right) \end{aligned}$$

Or, le support de la transformée : $\hat{f}(n)(\widehat{V_{a,N}} - \widehat{V_{a,[\frac{N}{a}]}})$ est inclus dans : $\left[[\frac{N}{a}] + 1, [a^2([\frac{N}{a}] + 1)]^+\right]$ et est donc inclus dans $[N', q[N']^+]$ avec $N' = [\frac{N}{a}] + 1$. Donc, on majore cette somme partielle par :

$$\begin{aligned} \|S_N(f)\|_\infty &\leqslant C \left\|f * (V_{a,N} - V_{a,[\frac{N}{a}]})\right\|_\infty + \left\|f * V_{a,[\frac{N}{a}]}\right\|_\infty \\ &\leqslant C\frac{6}{a-1}\|f\|_\infty + \frac{3}{a-1}\|f\|_\infty \end{aligned}$$

Ainsi $U(A)$ est fini et A est dans UC.

Nous allons maintenant introduire une nouvelle notion d'ensemble : les ensembles de convergence complètement uniforme. Nous en aurons besoin dans l'étude de l'union de deux éléments de UC.

Définition : *On appellera ensemble de convergence complètement uniforme une partie Λ de $\mathbb{Z}$ telle que $\sup_{p\in\mathbb{Z}}\{U(p+\Lambda)\}$ soit fini. On notera CUC la classe des ensembles de convergence complètement uniforme. On remarque que CUC est inclus dans UC et que CUC contient les ensembles de Sidon.*

Théorème 2.5. (cf. [16]) On peut également caractériser l'appartenance à CUC d'un ensemble Λ de UC en terme de mesure. Ainsi, Λ est dans CUC si et seulement si Λ est dans UC et s'il existe une mesure μ de $M(\mathbb{T})$ telle que $\hat{\mu}(\Lambda \cap \mathbb{Z}^+) = \{1\}$ et $\hat{\mu}(\Lambda \cap \mathbb{Z}^-) = \{0\}$.

Preuve : Montrons d'abord que la caractérisation est nécessaire. Pour tout entier N, $U(\Lambda - N)$ est fini donc $\Lambda - N$ est dans UC donc il existe une mesure ν_N telle que : $\hat{\nu}_N(n - N) = 1$ si $|n - N| \leqslant N$ pour n dans Λ et $\hat{\nu}_N(n - N) = 0$ si $|n - N| > N$ pour n dans Λ avec de plus $\|\nu_N\| \leqslant C$ pour une constante $C > 0$. On pose alors $\mu_N = e_N\nu_N$ qui est encore une mesure bornée en norme par C sur $\mathbb{T}$ et dont la transformée vérifie pour tout n dans Λ : $\hat{\mu}_N(n) = 1$ si $0 \leqslant n \leqslant 2N$ et $\hat{\mu}_N(n) = 0$ si $n < 0$ ou $n > 2N$.

Comme la suite $\{\mu_N\}$ est bornée dans $M(\mathsf{T})$ qui est le dual de $C(\mathsf{T})$, $\{\mu_N\}$ admet une sous-suite $\{\mu_{N_k}\}$ qui converge pour la topologie $\sigma(M(\mathsf{T}), C(\mathsf{T}))$ vers une mesure μ. Or, en testant cette convergence faible sur les caractères, on obtient la transformée de μ car pour k fixé dans Z :

$$\mu_{N_p}(e_k) = \widehat{\mu_{N_p}}(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } N_p \text{ assez grand et } k \in \mathsf{Z}^+ \cap \Lambda \\ 0 & \text{si } N_p \text{ assez grand et } k \in \mathsf{Z}^- \cap \Lambda \end{cases}$$

Ainsi, $\hat{\mu}(n) = 1$ si n est dans $\mathsf{Z}^+ \cap \Lambda$ et $\hat{\mu}(n) = 0$ si n est dans $\mathsf{Z}^- \cap \Lambda$. Ce qui démontre la caractérisation.

Inversement, montrons que cela suffit. On se donne f dans $C_{\Lambda - N}$ alors, on majore aisément la somme partielle de Fourier :

$$\begin{aligned} \|S_N(f)\|_\infty &= \|e_N S_N(f)\|_\infty = \|\mu * S_{2N}(e_N f)\|_\infty \\ &\leqslant \|\mu\| \, \|S_{2N}(e_N f)\|_\infty \\ &\leqslant \|\mu\| \, U(\Lambda) \, \|e_N f\|_\infty \quad \text{car } e_N f \in C_\Lambda \end{aligned}$$

Donc $\|S_N(f)\|_\infty \leqslant \|\mu\| \, U(\Lambda) \, \|f\|_\infty$ donc Λ est dans CUC.

Corollaire : *Un ensemble de convergence uniforme E inclus dans* N *est un ensemble de convergence complètement uniforme.*

Preuve : En effet, il suffit de remarquer que E étant un ensemble de convergence uniforme, il existe une suite bornée de mesures $\{\mu_N\}$ vérifiant pour tout entier n de $E \cap [-N, N]$ donc de $E \cap [0, N]$: $\widehat{\mu_N}(n) = 1$ donc une valeur d'adhérence μ de cette suite de $M(\mathsf{T})$ muni de la topologie $\sigma(M(\mathsf{T}), C(\mathsf{T}))$ va vérifier pour tout n de E : $\hat{\mu}(n) = 1$ car $\widehat{\mu_{N_k}}(n) = 1$ dès que N_k est assez grand. De plus, $E \cap \mathsf{Z}^-$ est vide. Ainsi, d'après l. théorème précédent, E est élément de CUC.

Définition : *On dira que deux parties A et B de* Z *sont harmoniquement séparées si il existe une mesure telle que : $\hat{\mu}_{|A} = 1$ et si $\hat{\mu}_{|B} = 0$. Ainsi, par exemple, deux ensembles de Sidon disjoints sont harmoniquement séparés (leur réunion est un Sidon) et nous venons d'établir que si Λ était dans UC et que $\mathsf{Z}^+ \cap \Lambda$ et $\mathsf{Z}^- \cap \Lambda$ étaient harmoniquement séparés alors Λ était dans CUC.*

Nous allons généraliser dans Z l'exemple exhibé dans le théorème 2.1 (p.11) mais pour cela nous aurons besoin de quelques résultats qu'il est par ailleurs intéressant de connaître.

Théorème 2.6. (cf. [17]) S'il existe une constante C et des parties $A_1, \ldots, A_N$ de Z telles que, pour tout i, j de $\{1, \ldots, N\}$, on ait : $U(A_i \cup A_j) \leqslant C$ alors on a :

$$U\left(\bigcup_{j=1}^{N} A_j\right) \leqslant (5C)^{3^{N-2}}.$$

Autrement dit, sachant que l'union deux à deux de parties de $\mathbb{Z}$ est dans UC avec une majoration uniforme de leur constante UC, on déduit que, en fait, l'union de tous ces ensembles l'est aussi.

Preuve : On va démontrer ce résultat par récurrence sur N bien sûr. Pour $N = 2$: c'est l'hypothèse. Supposons donc que le résultat soit établi à l'ordre $N-1$. Ainsi, pour toute sous famille de $N-1$ parties :$A_{j_1}, \ldots, A_{j_{N-1}}$ on a la majoration :

$$U\left(\bigcup_{k=1}^{N-1} A_{j_k}\right) \leqslant (5C)^{3^{N-3}}.$$

Ainsi, $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{N-1} A_j$, respectivement $A_N \cup \left(\bigcup_{j=1}^{N-2} A_j\right)$, resp. $A_{N-1} \cup A_N$, est un ensemble de convergence uniforme donc est associé à une mesure μ_N, resp. ν_N, resp. ξ_N, de norme majorée par $(5C)^{3^{N-3}}$, resp. $(5C)^{3^{N-3}}$, resp. C.

On considère alors la mesure $\beta_N = \mu_N * \nu_N + \mu_N * \xi_N + \nu_N * \xi_N - 2\mu_N * \nu_N * \xi_N$ qui est associée à $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{N} A_j$ car $\widehat{\beta_N}(n)$ est nul si n est dans $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{N} A_j$ mais en dehors de $[-N, N]$ et si n est dans $\{-N, \ldots, N\} \cap \displaystyle\bigcup_{j=1}^{N} A_j$, on a : $\widehat{\beta_N}(n) = 1 + 1 + 1 - 2 = 1$.

De plus, la norme de β_N est majorée par $(5C)^{2.3^{N-3}} + 2C(5C)^{3^{N-3}} + 2C(5C)^{2.3^{N-3}}$ donc par $(5C)^{3^{N-2}}$, ce qu'il fallait établir et le résultat est donc vrai par récurrence pour tout N.

Définition : *On rappelle la définition d'un ensemble de Paley : il s'agit d'une partie P de $\mathbb{N}$ telle que pour tout entier N le cardinal de l'ensemble $P \cap [N, 2N]$ soit majoré par une constante ne dépendant que de P. On rappelle qu'un ensemble de Paley se caractérise également comme union finie de suites de Hadamard.*

Théorème 2.7. (cf. [17]) Soit $A = \{n_j\}_{j \in \mathbb{N}^*}$ un ensemble de Paley alors pour tout entier s de $\mathbb{N}^*$ l'ensemble $A^s = \{n_{j_1} + \ldots + n_{j_s} : n_{j_k} \in A\}$ est un ensemble de convergence uniforme.

Preuve : Elle repose essentiellement sur la proposition suivante puisque celle-ci donne en particulier une majoration de la constante $U(A^s)$. A désigne un ensemble de Paley tel que $\sup_{N \in \mathbb{N}^*} |A \cap [N, 2N]|$ soit inférieur à K.

Proposition : *Si on se place sous les hypothèses du théorème précédent alors on a pour tous les entiers h et k de $\{0, \ldots, s\}$ et tous les entiers p et q la majoration :*

$$U\left((A^h + p) \cup (A^k + q)\right) \leqslant 5^{\left((3^{5h} + 3^{5k})(2^{2h} + 2^{2k})!\right)^K}$$

avec la convention que A^0 signifie $\{0\}$.

Preuve : On procède par récurrence. Pour $s = 0$, c'est trivialement vrai. Supposons donc que la majoration soit vraie à l'ordre $s-1$. On se propose de majorer d'abord $U(A^s)$.

On peut écrire A^s comme $\{n_{j_1} + \ldots + n_{j_s} : n_{j_k} \in A \text{ et } n_{j_1} \geqslant n_{j_k}, \forall 2 \leqslant k \leqslant s\}$ (l'addition est commutative!). Donc, pour tout entier N non nul, on a d'après la dernière majoration de la preuve du théorème 2.4 avec $q = 4$:

$U(A^s) \leqslant 3 + 6 \sup_{N \in \mathbb{N}^*} [U(A^s \cap [N, 4N])]$. D'où :

$$U(A^s) \leqslant 3 + 6 \sup_{N \in \mathbb{N}^*} \left[U\left(\bigcup_{m=1}^{K_{N,s}} \{A^{s-1} + n_{j_m^1}\} \right) \right]$$

où $\{n_{j_m^1}\}_{m=1}^{K_{N,s}}$ est l'ensemble $A \cap \left[[\frac{N}{s}] + 1, 4N \right]$ car on doit avoir :

$$N \leqslant n_{j_2} + \ldots + n_{j_s} + n_{j_m^1} \leqslant s.n_{j_m^1} \text{ soit } n_{j_m^1} \geqslant \frac{N}{s} \text{ donc } n_{j_m^1} \geqslant [\frac{N}{s}] + 1.$$

De plus $K_{N,s}$ désigne le nombre d'éléments de $A \cap \left[[\frac{N}{s}] + 1, 4N \right]$. Celui-ci est majoré par K fois le nombre d'intervalles (que l'on notera i) tels que : $[N, 4N]$ contienne $\left[[\frac{N}{s}], 2[\frac{N}{s}] \right] ; \ldots ; \left[2^{i-1} [\frac{N}{s}], 2^i [\frac{N}{s}] \right]$. i est donc le plus petit entier tel que $4N \leqslant 2^i [\frac{N}{s}]$ donc $i \geqslant 2 + \log_2(s)$ et on a enfin $K_{N,s} \leqslant K(3 + \log_2(s))$.

Ainsi, d'après 2.6 : on majore $U(A^s)$ par

$$3 + 6 \left(\underbrace{5 \left(\sup_{1 \leqslant m, m' \leqslant K_{N,s}} \left[U\left((A^{s-1} + n_{j_m}) \cup (A^{s-1} + n_{j_{m'}}) \right) \right] \right)}_{\leqslant 5^{\left((3^{5(s-1)} + 3^{5(s-1)})(2^{2(s-1)} + 2^{2(s-1)})! \right)^K}} \right)^{3^{K_{N,s}-2}}$$

Donc, on majore finalement $U(A^s)$ par $5^{(3^{5s} 2^{2s}!)^K}$.

Ceci fait, on va démontrer la propriété proprement dite par récurrence : les cas où h et k sont inférieurs à $s-1$ sont compris dans l'hypothèse de récurrence. Il reste donc à traiter le cas $h = s$. On démontre par récurrence à nouveau sur k que l'on a bien la majoration annoncée pour k dans $\{0, \ldots, s-1\}$: si k est nul, on a d'après le corollaire du théorème 2.5 : $U\left((A^s + p) \cup \{q\} \right) \leqslant U(A^s) \leqslant 5^{((3^{5s}+1)(2^{2s}+1)!)^K}$. Supposons le résultat vrai pour $k-1$ et $p \geqslant q$ soit $p = q + r$ on a d'après le corollaire du théorème 2.5 puis en utilisant la dernière majoration de la preuve du théorème 2.4 :

$$\begin{aligned}
U\left((A^s+p)\cup(A^k+q)\right) &= U\left((A^s+r)\cup A^k\right)\\
&\leqslant 3+6\sup_{N\in\mathbb{N}^*}\left[U((\{A^s+r\}\cup\{q\})\cap[N,4N])\right]\\
&\leqslant 3+6\sup_{N\in\mathbb{N}^*}\left[U\left(\bigcup_{m=1}^{K_{N,s}}\{A^{k-1}+n_{j_m}\}\cup A^s+r\right)\right]
\end{aligned}$$

où comme précédemment $\{n_{j_m}\}_{m=1}^{K_{N,s}}$ est l'ensemble $A\cap\left[[\frac{N}{s}]+1,4N\right]$ et $K_{N,s}\leqslant K(3+\log_2(s))$. Ainsi, on aboutit à la majoration :

$$U\left((A^s+p)\cup(A^k+q)\right)\leqslant 5^{\left((3^{5s}+3^{5k})(2^{2s}+2^{2k})!\right)^K}$$

Dans le cas où $p<q$ alors $q=p+r$ et c'est la même chose en faisant passer le r de l'autre côté.

Il ne reste enfin plus qu'à traiter le cas $h=s$ et $k=s$: on suppose encore $p=q+r$ (r positif) et on obtient toujours de la même manière :

$$\begin{aligned}
U\left((A^s+p)\cup(A^s+q)\right) &\leqslant U\left(A^s\cup(A^s+r)\right)\\
&\leqslant 3+6\sup_{N\in\mathbb{N}^*}\left[U((A^s+r)\cup A^s)\cap[N,4N])\right]\\
&\leqslant 3+6\sup_{N\in\mathbb{N}^*}\left[U\left(\bigcup_{m=1}^{K_{N,s}}\{A^{s-1}+n_{j_m}\}\cup A^s+r\right)\right]\\
&\leqslant 5^{\left((3^{5s}+3^{5s})(2^{2s}+2^{2s})!\right)^K}
\end{aligned}$$

Tous les cas ont donc été étudiés. Ainsi, par récurrence, on a bien la majoration annoncée et la proposition est donc complètement démontrée. Cela achève également la preuve du théorème 2.7.

Nous avons déjà remarqué que CUC contenait les ensembles de Sidon. Cette inclusion est stricte puisqu'il suffit de considérer un ensemble de convergence uniforme d'entiers positifs qui ne soit pas un Sidon, par exemple, d'après ce qui précède :$\{3^p+3^q : p\neq q\}$. Le théorème suivant est non trivial en ce sens que l'on gagne la symétrie par rapport à 0.

Théorème 2.8. (cf. [16]) Il existe un ensemble de convergence complètement uniforme, symétrique, qui ne soit pas de Sidon.

Preuve : Dans la suite, on identifiera allègrement $\overline{x}$ dans $\mathbb{T}$ et un représentant de $\overline{x}$ appartenant à $[0,1[$. Commençons par remarquer que, comme $\{\exp(in)\}$ est dense dans $\mathbb{T}$, on peut trouver pour tout couple (u,v) de $\mathbb{T}$ (u différent de v)

une suite $\{n_k\}$ vérifiant la condition de lacunarité : $n_{k+1} \geqslant 2n_k > 0$ telle que $\{\exp(in_k)\}_k$ soit dans le segment $[u, v]$. On se donne alors deux segments A et B tels que $A + B$ soit inclus dans l'intervalle $[\frac{1}{8}, \frac{3}{8}]$ et on associe à A et B deux suites de Hadamard Q et R comme précédemment. On considère alors l'ensemble $E = Q + R$. E n'est pas un ensemble de Sidon d'après le théorème 1.2 (Q et R sont infinis).

Pour établir que E est un ensemble de convergence uniforme, il suffit d'appliquer le théorème précédent avec $s = 2$ puisque l'ensemble $\tilde{E} = Q \cup R$ est en particulier un ensemble de Paley donc $\tilde{E}^2$ est dans UC et a fortiori E aussi. D'après le théorème 2.3, $E \cup (-E)$ est aussi un ensemble de convergence uniforme.

Montrons que $E \cup (-E)$ est un ensemble de convergence complètement uniforme. D'après le théorème 2.5, il suffit de montrer que E et $-E$ sont harmoniquement séparés. Notons φ la fonction qui à n associe $\exp(in)$. On a par construction : $\varphi(E) \subset [\frac{1}{8}, \frac{3}{8}]$ et $\varphi(-E) \subset [\frac{5}{8}, \frac{7}{8}]$ (via l'identification annoncée).

Soient bE, respectivement $-bE$, la fermeture de E, resp. $-E$, dans le compactifié de Bohr $b\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$. On peut alors étendre φ en une fonction $\widetilde{\varphi}$ continue sur $b\mathbb{Z}$ en posant $\widetilde{\varphi}(\gamma) = \gamma(\theta)$ $(\gamma \in b\mathbb{Z})$ et on a : $\widetilde{\varphi}(bE) \subset [\frac{1}{8}, \frac{3}{8}]$ et $\widetilde{\varphi}(-bE) \subset [\frac{5}{8}, \frac{7}{8}]$. Donc, bE et $-bE$ sont disjoints et on peut choisir un voisinage symétrique V de 0 dans $b\mathbb{Z}$ tel que $\overline{bE + V}$ et $\overline{-bE + V}$ soient encore disjoints (car $b\mathbb{Z}$ est compact donc normal).

En posant $U = \overline{bE + V}$, on peut donc construire, d'après le lemme d'Urysohn, une fonction ψ continue sur $b\mathbb{Z}$ qui vaut 1 sur U et 0 sur $-U$. On considère alors $\xi = \frac{1}{m(V)}\psi * 1_V$ qui est élément de $A(b\mathbb{Z}) = \{\hat{\mu} : \mu \in L^1(\mathbb{T}_d)\}$ ($\mathbb{T}_d$ désigne $\mathbb{T}$ muni de la topologie discrète, son dual est $b\mathbb{Z}$) comme convolée de deux fonctions de L^2 (cf 1.6.3 [14]). Ainsi, ξ est la transformée de Fourier-Stieljes d'un élément de $M(\mathbb{T}_d)$ ($\mathbb{T}_d$ est discret) donc $\xi_{|\mathbb{Z}}$ est la transformée de Fourier-Stieljes d'une mesure discrète μ de $M(\mathbb{T})$. Ainsi, avec m désignant la mesure de Haar sur $b\mathbb{Z}$: comme $\xi(t) = \frac{1}{m(V)} \int_V \psi(t - z)dz = \hat{\mu}(t)$, on a $\hat{\mu}(E) = \{1\}$ puisque, pour tout z de V, $E - z$ est inclus dans $E + V$ donc dans U sur lequel ψ est constante à 1. De même, on a $\hat{\mu}(-E) = \{0\}$. Donc E et $-E$ sont bien harmoniquement séparés et la démonstration est achevée.

Théorème 2.9. (cf. [16]) Si l'inclusion de CUC dans UC est stricte alors l'union de deux ensembles de convergence uniforme peut ne pas être un ensemble de convergence uniforme.

Remarque : *Ainsi il ne restera plus qu'à exhiber un exemple pour montrer que cette inclusion est effectivement stricte et on aura donc l'inclusion stricte de UC dans $\{A \cup B : A, B \in UC\}$.*

Preuve : Supposons donc qu'il existe un ensemble E de UC qui ne soit pas dans CUC. Posons, pour un entier n momentanément fixé : $E_n^+ = E \cap]0, n]$; $E_n^- = E \cap]-n, 0]$ et $F_n^+ = E_n^+ + 2^{2n}$; $F_n^- = E_n^- + 2^{2n}$. Puis, on pose enfin

$H^+ = \bigcup_n F_n^+$ et $H^- = \bigcup_n F_n^-$.

H^+ et H^- sont des ensembles de convergence uniforme. En effet, pour tout entier N, $H^+ \cap [N,2N] = E_n^+ + 2^{2n} \cap [N,2N]$ pour un n convenable donc est inclus dans $E_n^+ + 2^{2n}$ qui est un translaté de E_n^+ qui est inclus dans $\mathbb{N}$ donc est un ensemble de convergence complètement uniforme d'après le corollaire du théorème 2.5. Ainsi, d'après le théorème 2.4, H^+ (il en est clairement de même de H^-) est dans UC, et H^+, H^- sont dans $\mathbb{N}$.

Supposons que $H^+ \cup H^-$ soit dans UC alors il existe une suite de mesures $\{\mu_N\}$ de $M(\mathbb{T})$, bornée en norme par un réel K, telle que :

$$\widehat{\mu_N}(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j \in (H^+ \cup H^-) \cap [-N,N] \\ 0 & \text{si } j \in (H^+ \cup H^-) \setminus [-N,N] \end{cases}$$

Alors, on considère les mesures : $\nu_k = e_{2^{2k}} \mu_{2^{2k}}$ qui sont toujours bornées en norme par K, et dont on peut donc extraire une sous-suite (que l'on note encore ν_k pour simplifier) qui converge *faiblement vers ν. On a donc pour tout entier j :

$$\widehat{\nu_k}(j) = \widehat{\mu_{2^{2k}}}(j + 2^{2k}) = \begin{cases} 1 & \text{si } j + 2^{2k} \in (H^+ \cup H^-) \cap [0, 2^{2k}] \text{ soit } j \in E_k^+ \\ 0 & \text{si } j + 2^{2k} \in (H^+ \cup H^-) \setminus [0, 2^{2k}] \text{ soit } j \in E_k^- \end{cases}$$

On obtient donc par passage à la limite faible :

$$\widehat{\nu}(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j \in E \cap \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } j \in E \cap \mathbb{Z}^- \end{cases}$$

Ce qui signifie que E est dans CUC d'après le théorème 2.5, ce qui est contraire à l'hypothèse donc $H^+ \cup H^-$ n'est pas dans UC et le théorème est prouvé.

Comme annoncé nous allons montrer que l'inclusion de CUC dans *UC* est stricte. Fournier a démontré ce résultat, résolvant ainsi la question de l'union, en se servant du travail précédent de Travaglini.

Théorème 2.10. (cf. [1]) Soit H une suite lacunaire à la Hadamard. Alors $H - H$ est un ensemble de convergence uniforme qui n'est pas un ensemble de convergence complètement uniforme.

Preuve : Posons $E = H - H$. D'après le théorème 2.3, pour établir que E est dans UC, il suffit de montrer que $E^+ = E \cap \mathbb{N}$ et $E^- = E \cap \mathbb{Z}^-$ sont des ensembles de convergence uniforme. Comme E est symétrique, il suffit donc de le montrer pour E^+. Enfin, d'après le thórème 2.4, il suffit de majorer $\sup_{N \geqslant 1} U(E \cap [N, 2N])$. En effet, par définition de H, il existe $r > 1$ tel que pour tout j : $h_{j+1} \geqslant r h_j$. Fixons N et considérons les entiers j tels que il existe i_j (qui vérifie alors nécessairement $i_j < j$) tel que $h_j - h_{i_j}$ soit un élément de $[N, 2N]$. Parmi ces entiers j, on choisit le plus petit J qui vérifie donc $h_J > N$. De plus, on a la minoration :

$$2N \geqslant h_j - h_{j-1} \geqslant (r-1) h_{j-1} \geqslant (r-1) r^{j-1-J} h_J > (r-1) r^{j-1-J} N$$

Ainsi, $(r-1)r^{j-1-J} < 2$ et donc $j-1-J < \frac{\log(\frac{2}{r-1})}{\log(r)}$ que l'on pose égal à $L(r)$. Il y a donc au plus $L(r)+1$ indices j puisque $J \leqslant j \leqslant J+L(r)$. Donc $E \cap [N,2N]$ est inclus dans une union d'au plus $L(r)+1$ cosets de $(-H)$ car tout élément de $E \cap [N,2N]$ s'écrit $h_j - h_{i_j}$. Ainsi, $(-H)$ est quasi-indépendant et cette union finie de cosets de $(-H)$ est donc un ensemble de Sidon de constante de Sidon indépendante de N. $E \cap [N,2N]$ est un ensemble de Sidon de constante de Sidon S(r) et on a : $U(E\cap[N,2N]) \leqslant S(r)$. C'est ce qu'on voulait montrer et E est bien dans UC.

Montrons que E n'est pas dans CUC. Fixons un entier M. On considère la matrice de Hilbert A d'ordre M : il s'agit de la matrice de terme générique $A_{p,q}$ ($1 \leqslant p \leqslant M$ et $1 \leqslant p \leqslant M$) avec $A_{p,q} = 0$ si $p = q$ et $A_{p,q} = \frac{1}{p-q}$ sinon. Il s'agit en fait d'une matrice de Tœplitz associée à la fonction φ de L^∞ donc de L^2 définie par $\varphi(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{2i\sin(2\pi n x)}{n} = i\pi(1-2x)$ pour tout x de $]0,1[$ car, pour tout p,q de $\{1,\ldots,M\}$, $\hat{\varphi}(p-q) = A_{p,q}$.

Rappelons que A est de norme inférieure à π : pour tout p,q, $A_{p,q} = (\varphi e_q, e_p)_{L^2}$ donc A est la matrice représentative de la composition de l'opérateur M_φ de H_2^M (l'espace vectoriel engendré par les e_k pour $1 \leqslant k \leqslant M$) dans L^2 qui à y associe φy et de la projection orthogonale $P_{H_2^M}$ sur H_2^M. Ainsi, on peut majorer la norme de A par $\left\|P_{H_2^M}\right\| \, \|M_\varphi\|$. Or $\left\|P_{H_2^M}\right\|$ est égale à 1. Quant à $\|M_\varphi\|$, on la majore via l'inégalité :

$$\|M_\varphi(y)\|_2 \leqslant \|\varphi y\|_2 \leqslant \|y\|_2 \, \|\varphi\|_\infty$$

donc on obtient $\|M_\varphi\| \leqslant \|\varphi\|_\infty \leqslant \pi$. On a donc bien $\|A\| \leqslant \pi$.

Donnons nous maintenant θ dans $[0,1[$ et le vecteur de $\mathbb{C}^M$: $v(\theta) = \{v_j(\theta)\}_{1\leqslant j\leqslant M}$ avec $v_j(\theta) = \exp(2i\pi h_j\theta)$. Le polynôme f, défini par $f(\theta) = (v(\theta), Av(\theta))$ est alors à spectre dans E puisque f s'écrit en fait $f(\theta) = \sum_{m\neq n} \frac{1}{m-n}\exp\big(2i\pi(h_m - h_n)\theta\big)$. D'après la majoration précédente sur la norme de A, on a une majoration de la norme infinie de f. En effet, pour tout θ de $[0,1[$, on a, par définition de f, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|f(\theta)| \leqslant \|A\| \, \|v(\theta)\|_2^2 \leqslant \pi M$ donc $\|f\|_\infty \leqslant \pi M$.

D'autre part, on considère l'estimation : $\sum_{k>0} \hat{f}(k) = \sum_{m>n} \frac{1}{m-n}$ donc en faisant le changement d'indice $j = m-n$, on obtient $\sum_{j=1}^{M-1} (M-j)\frac{1}{j}$ car il y a $(M-j)$ entiers "m" existant à j fixé. Soit encore :

$$\sum_{k>0} \hat{f}(k) = M - 1 + M\sum_{j=2}^{M-1}\frac{1}{j} - \sum_{j=2}^{M-1} 1 \geqslant M(\log(M) - \log(2)) \geqslant \frac{\|f\|_\infty}{\pi}\log(\frac{M}{2})$$

car $M \geqslant \frac{\|f\|_\infty}{\pi}$ d'après l'étude précédente.

Ainsi, si on choisit $N = h_M$, le polynôme g défini par $g = e_{-N}f$ est à spectre dans $E - h_M$ et sa somme partielle de Fourier est minorée par :

$$\|S_N(g)\|_\infty \geqslant \left| \sum_{|n|\leqslant M} \hat{g}(n) \right| = \sum_{k>0} \hat{f}(k) \geqslant \frac{\|g\|_\infty}{\pi} \log(\frac{M}{2})$$

d'où on conclut que la constante de convergence uniforme de $E - h_M$ est minorée par $\frac{1}{\pi}\log(\frac{M}{2})$ et donc E ne peut être un ensemble de convergence complètement uniforme.

Remarques : On a ainsi démontré que l'union de deux ensembles de convergence uniforme n'est pas nécessairement dans UC en exhibant en fait au passage deux éléments de UC dont l'union n'est pas dans UC. En effet, nous venons d'établir que, étant donnée une suite H lacunaire à la Hadamard, l'ensemble $H - H$ donc a fortiori l'ensemble $H - H + H$ n'est pas dans UC. On se donne une telle suite H avec un rapport supérieur à 2 (c'est à dire $h_{j+1} \geqslant rh_j$ avec $r \geqslant 2$). On considère alors les ensembles $A = \{h_i - h_j + h_k : i > j > k\}$ et $B = \{h_i - h_j + h_k : j > i > k\}$ qui sont alors des ensembles de convergence uniforme (il suffit de reprendre la démonstration de théorème 2.9 et de remplacer le terme 2^{2n} que l'on ajoute à E_n^+ par h_k et comme $H - H$ est dans UC on conclut que A (c'est la même chose pour B) aussi). Remarquons que les ensembles A et B sont inclus dans $\mathbb{N}$ donc sont dans CUC d'après le corollaire du théorème 2.5. On a donc aussi le résultat suivant : **il existe des ensembles de CUC dont l'union n'est même pas dans UC.**

On peut donner une autre preuve de la deuxième partie du théorème précédent : **Soient E et F deux parties infinies de $\mathbb{N}$ alors $E - F$ n'est pas dans CUC.**

En effet, supposons le contraire. Il existe une mesure μ telle que pour tout n de $E - F$, on ait : $\hat{\mu}(n) = 1$ si $n \geqslant 0$ et $\hat{\mu}(n) = 0$ sinon. On pose $E = \{m_j\}_j$ et $F = \{n_j\}_j$ et on considère les caractères $\Phi_j = e_{-m_j}$ et $\Psi_j = e_{n_j}$. On a alors :

$$\int_0^1 \Phi_j(t)\Psi_k(t)d\mu(t) = \hat{\mu}(m_j - n_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } m_j \geqslant n_k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme L^∞ est le dual de L^1, le théorème d'Alaoglu implique l'existence d'une valeur d'adhérence Φ, resp. Ψ, de la suite, bornée dans $L^\infty(\mu)$, $\{\Phi_j\}$, resp. $\{\Psi_j\}$, pour la topologie *faible. Ainsi $\int \Phi\Psi_k d\mu$ converge vers $\int \Phi\Psi d\mu$ et, à k fixé, $\int \Phi_j\Psi_k d\mu$ converge vers $\int \Phi\Psi_k d\mu$. En particulier, pour j assez grand, $m_j > n_k$ et $\int \Phi_j\Psi_k d\mu = 1$ donc $\int \Phi\Psi d\mu = 1$. Alors que en approximant d'abord $\int \Phi\Psi d\mu$ par $\int \Phi_j\Psi d\mu$ puis par les $\int \Phi_j\Psi_k d\mu$ mais, nécessairement avec $m_j < n_k$ cette fois, on obtient ($\int \Phi_j\Psi_k d\mu = 0$) $\int \Phi\Psi d\mu = 0$. Il y a donc contradiction et $E - F$ n'est pas dans CUC.

Ainsi, on a le contraste entre les deux résultats suivants : si E est un ensemble de Paley : $E+E+E$ est dans UC mais $E-E+E$ n'est pas dans UC dès que E est infini et inclus dans $\mathbb{N}$ (donc en particulier si c'est un ensemble de Paley). Ceci conduit à la question de savoir si $E-E$ est nécessairement dans UC si E est de Paley. La réponse est négative car comme on va le voir dans l'exemple suivant, il existe des paires de suites de Hadamard (E_1, E_2) telles que $E_1 - E_2$ recouvre $\mathbb{Z}$.

Terminons ce chapitre en remarquant que le résultat du théorème 2.7 est optimal en ce sens qu'il existe un ensemble E de Sidon tel que $E+E$ ne soit pas dans UC (on rappelle qu'un ensemble de Paley est une union finie d'ensembles de Hadamard donc est un ensemble de Sidon). En effet, il suffit de considérer l'union de $A = \{10^n + n\}$ et $B = \{-10^n\}$. A est une suite lacunaire à la Hadamard avec un rapport supérieur à 9 et, en valeur absolue, B est aussi un ensemble de Hadamard (on prendra $E_2 = -B$ pour l'exemple de la remarque précédente). Pourtant, tout entier n s'écrit $n = 10^n + n - 10^n$ donc $E+E$ recouvre $\mathbb{N}$ et n'est donc pas dans UC.

3
Spectres polynômiaux

Un des problèmes soulevés par Ul'yanov était de savoir si $\{k^2\}_{k\in\mathbb{N}}$ est un ensemble de convergence uniforme. Oskolkov (cf. [8]) a répondu par la négative à cette question. Il a même établi le résultat pour tout ensemble polynomial. C'est l'objet du théorème 3.1. Ensuite, nous en déduirons quelques corollaires. La partie fondamentale de la preuve du théorème 3.1 réside dans le lemme suivant.

Lemme : *Soit r un entier supérieur à 1, on considère P_r un polynôme de $\mathbb{R}[X]$: $P_r(X) = a_0X^r + \ldots + a_r$. Soit M un entier supérieur à 1. On a la majoration :*

$$\left|\sum_{1\leqslant|n|\leqslant M} \frac{\exp(2i\pi P_r(n))}{n}\right| \leqslant C_r \log(M)^{1-\varepsilon_r}$$

où C_r est une constante ne dépendant que de r et $\varepsilon_r = 2^{1-r}$.

Preuve : Nous allons l'établir par récurrence sur r. Pour $r = 1$, on a $P_1(x) = a_0x + a_1$, avec $a_0 \neq 0$, et, avec $\{a_0\}$ la partie fractionnaire de a_0 :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{1\leqslant|n|\leqslant M} \frac{\exp(2i\pi(a_0n + a_1))}{n}\right| &= \left|\sum_{1\leqslant|n|\leqslant M} \frac{\exp(2i\pi a_0n)}{n}\right| \\ &= 2\left|\sum_{1\leqslant n\leqslant M} \frac{\sin(2\pi a_0n)}{n}\right| \\ &= 2\left|\sum_{1\leqslant n\leqslant M} \frac{\sin(2\pi\{a_0\}n)}{n}\right|\end{aligned}$$

Or,

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant M} \frac{\sin(2\pi\{a_0\}n)}{n} + \pi\{a_0\} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi\{a_0\}} D_M(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi\{a_0\}} \frac{\sin(\frac{(2M+1)t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}dt$$

On introduit alors la fonction f définie sur $]-2\pi, 2\pi[$ par $f(t) = \frac{1}{\sin(\frac{t}{2})} - \frac{2}{t}$ et par $f(0) = 0$. Cette fonction est C^∞ sur $]-2\pi, 2\pi[$. On a alors la majoration :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{1\leqslant n\leqslant M} \frac{\sin(2\pi\{a_0\}n)}{n}\right| &\leqslant \pi + \left|\int_0^{(2M+1)\pi\{a_0\}} \frac{\sin(u)}{u}du\right| \\ &+ \frac{1}{2}\left|\int_0^{2\pi\{a_0\}} \sin(\frac{(2M+1)t}{2})f(t)dt\right|\end{aligned}$$

Les deux intégrales du membre de droite sont bornées uniformément en M et en a_0 ($\{a_0\}$ est élément de $[0,1[$). Ainsi l'inégalité est établie pour $r = 1$.

Supposons maintenant que nous l'ayons établie pour $r \geqslant 1$ et posons $H_M = \sum_{1 \leqslant |n| \leqslant M} \frac{\exp(2i\pi P_{r+1}(n))}{n}$. On obtient par élévation au carré :

$$|H_M|^2 = \sum_{1 \leqslant |n|,|m| \leqslant M} \frac{\exp\left(2i\pi(P_{r+1}(n) - P_{r+1}(m))\right)}{nm}$$

On fait le changement d'indice $m = n + h$, h varie alors dans $\{-2M, \ldots, 2M\}$ et n dans $\{\max\{-M, -M-h\}, \ldots, \min\{M, M-h\}\}$ avec bien sûr la contrainte $n \neq -h$ et n non nul, on note I_h cet ensemble dans lequel n varie. A h fixé, on pose $Q_h(X) = P_{r+1}(X+h) - P_{r+1}(X)$. Q_h est alors un polynôme de degré r. L'expression de $|H_M|^2$ devient alors :

$$|H_M|^2 = \sum_{h=-2M}^{2M} \sum_{n \in I_h} \frac{\exp(2i\pi Q_h(n))}{(n+h)n}$$

On remarque que le terme associé à $h = 0$ est majoré par $2\sum_{p \geqslant 1} \frac{1}{p^2}$ donc par $\frac{\pi^2}{3}$. De plus, pour h non nul, $\frac{1}{(n+h)n} = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+h}\right)$. Séparons les différents termes de la somme :

Premier cas : pour $0 < h \leqslant M$: les termes correspondants sont :

$$\sum_{n \in I_h} \frac{\exp(2i\pi Q_h(n))}{(n+h)n} = \frac{1}{h}\left[\sum_{n \in I_h} \frac{\exp(2i\pi Q_h(n))}{n} - \sum_{n \in I_h} \frac{\exp(2i\pi Q_h(n))}{n+h}\right]$$

Dans ce cas I_h se réduit à $\{-M, M-h\} \setminus \{0, -h\}$ donc, on obtient :

$$\left|\sum_{n \in I_h} \frac{\exp(2i\pi Q_h(n))}{n}\right| \leqslant \left|\sum_{n \in I_h \cup \{-h\}} \frac{\exp(2i\pi Q_h(n))}{n}\right| + \frac{1}{h}$$

On reprend la somme du membre de droite et on la majore par :

$$\left|\sum_{n \in I_h \cup \{-h\}} \frac{\exp(2i\pi Q_h(n))}{n}\right| \leqslant \left|\sum_{1 \leqslant |n| \leqslant M-h} \frac{\exp(2i\pi Q_h(n))}{n}\right| + \left|\sum_{n=-M}^{-M+h-1} \frac{\exp(2i\pi Q_h(n))}{n}\right|$$

L'hypothèse de récurrence s'applique alors au polynôme Q_h et on a :

$$\left|\sum_{n\in I_h}\frac{\exp\big(2i\pi Q_h(n)\big)}{n}\right| \leqslant \frac{1}{h} + C_r\,[\log(M-h)]^{1-\varepsilon_r} + \sum_{n=-M}^{-M+h-1}\frac{1}{|n|}$$

$$\leqslant \frac{1}{h} + C_r\,[\log(M)]^{1-\varepsilon_r} + \frac{h}{M-h+1}$$

En faisant le changement d'indice $n' = n+h$ et en posant $R_h(X) = Q_h(X-h)$ qui est encore de degré r, on obtient de même :

$$\left|\sum_{n\in I_h}\frac{\exp\big(2i\pi Q_h(n)\big)}{n+h}\right| \leqslant \frac{1}{h} + C_r\,[\log(M)]^{1-\varepsilon_r} + \frac{h}{M-h+1}$$

Ainsi, on a une contribution totale du premier cas majorée par :

$$2\sum_{h=1}^{M}\frac{1}{h}\left[\frac{1}{h} + C_r\,[\log(M)]^{1-\varepsilon_r} + \frac{h}{M-h+1}\right]$$

On a donc un $O\left([\log(M)]^{2-\varepsilon_r} + \log(M)\right)$ soit $O\,(\log(M))^{2-\varepsilon_r}$ puisque $2-\varepsilon_r \geqslant 1$

Deuxième cas : on considère les h tels que $M < h \leqslant 2M$. I_h est alors l'intervalle d'entiers $\{-M,\ldots,M-h\}$ et on a la majoration brutale :

$$\left|\frac{1}{h}\sum_{n\in I_h}\frac{\exp\big(2i\pi Q_h(n)\big)}{n}\right| \leqslant \frac{1}{h}\sum_{n=h-M}^{M}\frac{1}{n} \leqslant \frac{2M-h}{h(h-M)} \leqslant \frac{1}{h-M}$$

car, ici, $2M-h \leqslant h$. Quant à l'autre somme, elle se majore de la même manière. On obtient donc une contribution du second cas majorée par un $O\left(\sum_{h=M+1}^{2M}\frac{1}{h-M}\right)$ donc par un $O\big(\log(M)\big)$ et a fortiori $O\,(\log(M))^{2-\varepsilon_r}$.

Derniers cas : le cas où $-M \leqslant h < 0$ se traite comme le premier cas et le cas où $-2M \leqslant h < -M$ se traite comme le deuxième.

Ainsi, on obtient finalement l'estimation : $|H_M|^2 = O\,(\log(M))^{2-\varepsilon_r}$ donc il existe C_{r+1} strictement positive telle que $|H_M| \leqslant C_{r+1}\,[\log(M)]^{1-\frac{\varepsilon_r}{2}}$

soit :
$$\left|\sum_{1\leqslant|n|\leqslant M}\frac{\exp\big(2i\pi P_{r+1}(n)\big)}{n}\right| \leqslant C_{r+1}\,[\log(M)]^{1-\varepsilon_{r+1}}$$

Ce qui établit l'inégalité à l'ordre $r+1$. Ainsi, par récurrence, le lemme est démontré.

Théorème 3.1. Soit r un entier supérieur à 1, on considère P_r un polynôme de $\mathbb{R}[X]$: $P_r(X) = a_0X^r + \ldots + a_r$ tel que P_r prenne des valeurs entières distinctes sur $\mathbb{N}$.

Alors $\mathcal{K} = P_r(\mathbb{N})$ n'est pas un élément de UC. De plus, on a une minoration de la $\mathcal{K}_M^{ième}$ constante de Lebesgue : il existe $\alpha_r > 0$ tel que, pour tout entier M : $\mathcal{L}_{\mathcal{K}_M}(\mathcal{K}) \geqslant \alpha_r \log(M)^{\varepsilon_r}$ avec $\varepsilon_r = 2^{1-r}$.

Preuve : On considère la fonction continue T_M définie pour a dans $[0,1]$ par :

$$T_M(a) = \sum_{1 \leqslant |n| \leqslant M} \frac{\exp(2i\pi a P_r(n+M))}{n} = \sum_{\substack{0 \leqslant n \leqslant 2M \\ n \neq M}} \frac{\exp(2i\pi a P_r(n))}{n-M}.$$

On applique le résultat du lemme au polynôme $aP_r(X+M)$ et on obtient la majoration :

$$\|T_M\|_\infty = \sup_{a\in[0,1]} |T_M(a)| \leqslant C_r \left[\log(M)\right]^{1-\varepsilon_r}$$

D'autre part, la fonction T_M est à spectre dans $\mathcal{K}$. Quitte à renuméroter la suite $\mathcal{K}$, on peut supposer qu'elle est croissante. Soit $\nu = P(M-1)$, on a alors la minoration :

$$\|S_\nu(T_M)\|_\infty \geqslant |S_\nu(T_M)(0)| = \sum_{n=0}^{M-1} \frac{1}{M-n} = \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n} \geqslant \log(M) - c$$

où c est une constante strictement positive. Il résulte des deux relations précédentes que

$$\frac{\|S_\nu(T_M)\|_\infty}{\|T_M\|_\infty} \geqslant \frac{\log(M) - c}{C_r \left[\log(M)\right]^{1-\varepsilon_r}} \geqslant \alpha_r \left[\log(M)\right]^{\varepsilon_r}$$

où α_r est une constante strictement positive. Cette minoration assure la divergence des constantes de Lebesgue car $\nu \sim M^r$ quand M tend vers l'infini (où r est le degré de P), donc $\mathcal{K}$ n'est pas un ensemble de convergence uniforme et la preuve du théorème est achevée.

Remarque : *La preuve du théorème précédent consiste en une minoration de la constante de Lebesgue. En fait, Arkhipov et Oskolkov ont démontré que la $\mathcal{K}_N^{ième}$ constante de Lebesgue d'une partie polynômiale $\mathcal{K}$ était de l'ordre de croissance de* $\log(N)$. *Nous préciserons cela mais avant nous admettrons le prochain théorème dont la démonstration utilise des estimations issues de théorie des nombres (on trouvera une preuve partielle dans [9] qui utilise notamment la "méthode des cercles" de [19]).*

Théorème 3.2. Soit r un entier supérieur à 2, on considère $\mathcal{P}_r$ l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}[X]$: $P(X) = a_0X^r + \ldots + a_r$ tel que P prenne des valeurs entières distinctes sur $\mathbb{N}$. Si on note :

$$H_N(P) = \sum_{1 \leqslant |n| \leqslant N} \frac{\exp(2i\pi P(n))}{n}$$

On a alors pour tout $r \geqslant 2$:

$$g_r \equiv \sup_{\substack{N \in \mathbb{N}^* \\ P \in \mathcal{P}_r}} |H_N(P)| < +\infty$$

De plus, pour tout P dans $\mathcal{P}_r$, la suite $\{H_N(P)\}_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Théorème 3.3. Sous les hypothèses du théorème précédent, si on note $\mathcal{K} = P(\mathbb{N}) = \{\mathcal{K}_N\}_{N \in \mathbb{N}}$, on a :

$$\frac{1}{g_r} \log(N) \leqslant \mathcal{L}_{\mathcal{K}_{N-1}}(\mathcal{K}) \text{ au voisinage de } +\infty.$$

Comme on peut la majorer par $\mathcal{L}_{\mathcal{K}_{N-1}}(\mathbb{N})$ qui est équivalent à $\frac{4}{\pi^2}\log(\mathcal{K}_N)$ soit à $\frac{4}{\pi^2}\log(N^r)$, $\mathcal{L}_{\mathcal{K}_N}(\mathcal{K})$ est donc de l'ordre de croissance de $\log(N)$ au voisinage de $+\infty$.

Preuve : Donnons nous deux entiers N et M puis introduisons la somme :

$$T_{N,M}(a) = \sum_{1 \leqslant |n| \leqslant M} \frac{\exp(2i\pi P(r+N)a)}{n} \qquad \text{avec } a \text{ dans } [0,1]$$

La fonction $T_{N,M}$ ainsi définie est continue à spectre dans $P(\mathbb{N})$. Ainsi, comme dans la preuve du théorème 3.1, on peut minorer la norme infinie de sa $\mathcal{K}_{N-1}^{\text{ième}}$ somme de Fourier par $\log(N)$ dès que $M \geqslant 2N+1$. Si on fixe momentannément N et a, $aP(X+N)$ est un élément de $\mathcal{P}_r$. D'après le théorème 3.2 admis, on peut majorer la norme infinie de $T_{N,M}$ par g_r pour tous les entiers N et M. En particulier, on obtient la minoration annoncée de $\mathcal{L}_{\mathcal{K}_{N-1}}(\mathcal{K})$.

Corollaire : *Soient P^+ un polynôme pair et P^- un polynôme impair, tous deux prenant des valeurs entières distinctes sur $\mathbb{N}$. Alors, les séries de la forme suivante convergent :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(2i\pi P^+(n))\sin(2\pi P^-(n))}{n}$$

de plus, les sommes partielles sont uniformément bornées par une constante ne dépendant que de leur degré. En particulier, c'est le cas pour les séries de la forme :

$$F_{2j+1}(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi n^{2j+1}\theta)}{n}$$

où j est un entier.

Preuve : Il suffit d'appliquer le théorème 3.2 à $P = P^+ + P^-$.

Remarque : *Il est à noter que l'on ne peut espérer une majoration du même type si l'exposant est pair, non nul, car en choisissant* $\theta = \frac{1}{3}$, *on obtient, compte tenu du fait que* $n^{2j} \equiv 0 \quad [3]$ *si* $n \equiv 0 \quad [3]$ *et* $n^{2j} \equiv 1 \quad [3]$ *si* $n \equiv \pm 1 \quad [3]$ *:*

$$S_N(F_{2j})(\frac{1}{3}) = \sum_{\substack{n=1 \\ n=3m\pm 1}}^{N} \frac{\sin(2\pi n^{2j}\theta)}{n} = \sin(\frac{2\pi}{3}) \sum_{\substack{n=1 \\ n=3m\pm 1}}^{N} \frac{1}{n}$$

et la série diverge.

4 Un résultat sur la densité des ensembles de convergence uniforme

Un des problèmes soulevés par Ul'yanov [18] est celui de déterminer la densité possible d'un ensemble de convergence uniforme. Ce problème revient à trouver, pour tout N, le cardinal optimum de $\sigma \subset \{-N, \ldots, N\}$, avec $U(\sigma)$ restant borné indépendamment de N. On peut le considérer pour d'autres systèmes orthonormés et par exemple pour le système de Walsh.

On se placera d'abord dans le cadre du système de Walsh, puis on établira un résultat équivalent pour le système trigonométrique.

Notation : Etant donnés $q, N \in \mathbb{N}^*$ avec $1 \leqslant q \leqslant N$, on désigne par S_N^q l'ensemble $S_N^q = \{\sigma \subset \{1, \ldots, N\}$ tel que $|\sigma| = q\}$ et par ν la mesure de comptage sur S_N^q. On rappelle également la définition de $U(\sigma)$ dans le cas du système de Walsh (pour la définition des w_j, se référer à l'introduction) :

$$U(\sigma) = Sup \left\{ \frac{\left\| \sum_{j=1}^{s} a_j w_j \right\|_\infty}{\left\| \sum_{j=1}^{N} a_j w_j \right\|_\infty} : 1 \leqslant s \leqslant N; \quad (a_j) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \quad supp(\{a_j\}) \subset \sigma \right\}$$

Théorème 4.1. (cf. [6])*Il existe $c > 0$ tel que pour tout $N = 2^r$, où $r \in \mathbb{N}$ est assez grand, et pour tout $q \in \{1, \ldots, \frac{N}{2}\}$, on ait :*

$$\nu \left\{ \sigma \in S_N^q : U(\sigma) \leqslant c \log\left(2 + \frac{q}{\log(N)}\right) \right\} < \frac{1}{N^2}$$

Le résultat du théorème stipule que si un ensemble inclus dans $\{1, \ldots, N\}$ est de cardinal $\gg log(N)$ alors la probabilit.' pour que $U(\sigma)$ diverge vers $+\infty$ avec N est proche de 1. Ainsi, si $|\sigma| \geqslant N^\alpha$ pour un $\alpha > 0$, alors $U(\sigma)$ est en grande probabilité d'ordre de grandeur maximal, c'est à dire de l'ordre de $log(N)$.

Preuve : Etablissons tout d'abord un premier cas.

Supposons $\frac{q}{\log(N)}$ borné. Il existe alors $c > 0$ tel que $c\log(2+\frac{q}{\log(N)}) < 1$; comme $U(\sigma) \geqslant 1$, $\left\{\sigma \in S_N^q : U(\sigma) \leqslant c\log\left(2 + \frac{q}{\log(N)}\right)\right\} = \emptyset$, donc

$\left\{\sigma \in S_N^q : U(\sigma) \leqslant c\log\left(2+\frac{q}{\log(N)}\right)\right\}$ est de mesure nulle.

Il reste à étudier le cas où $\frac{q}{\log(N)}$ est non borné.
On supposera par exemple que $\frac{q}{\log(N)} \geqslant 20$ et on pose $\delta = \frac{q}{N}$.

Le début de la démonstration consiste à déplacer le problème en changeant d'espace de probabilité. L'essentiel de la preuve sera alors, dans ce nouveau cadre, d'établir l'inégalité suivante :

$$(*) \qquad \mu\left\{\omega \in \Omega : \quad U(\sigma(\omega)) \leqslant c\log\left(2+\frac{q}{\log(N)}\right)\right\} \quad < \quad \frac{5}{N^3}$$

pour un $c > 0$ convenable.

Pour cela, plaçons le décor probabiliste : on munit $\{0,1\}$ de la mesure μ_0 définie par :

$$\mu_0(\{x\}) = \begin{cases} \delta & \text{si } x = 1 \\ 1-\delta & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Soit $\Omega = \{0,1\}^N$, on note, pour $\omega \in \Omega$, $\xi_i(\omega)$ la $i^{\text{ième}}$ coordonnée de ω.
On munit Ω de la mesure produit naturelle μ :

$$\mu(\omega) = \prod_{i=1}^{N} \mu_o(\xi_i(\omega)) = \prod_{i=1}^{N} \delta^{\xi_i(\omega)}(1-\delta)^{1-\xi_i(\omega)}$$

Les variables aléatoires ξ_i forment alors une famille de variables aléatoires indépendantes (ce sont les fonctions coordonnées sur un espace produit !), valant 1 avec probabilité δ, 0 avec probabilité $1-\delta$ et donc d'espérance δ.

Posons : $\sigma(\omega) = \{i : 1 \leqslant i \leqslant N, \xi_i(\omega) = 1\}$.

$$\begin{aligned} T : \Omega &\longmapsto \mathcal{P}(\{1,\ldots,N\}) \\ \omega &\longmapsto \sigma(\omega) \end{aligned}$$

Soit p la mesure image de μ par T, on obtient alors un espace de probabilité $(\mathcal{P}(\{1,\ldots,N\}),p)$ et, par définition, si $A \in \mathcal{P}(\{1,\ldots,N\})$ avec $|A| = q$, on a :

$$\begin{aligned} p(\{A\}) &= p(T^{-1}(\{A\})) = \mu\left(\{\omega \in \Omega : \sigma(\omega) = A\}\right) \\ &= \mu\left(\{\omega \in \Omega : \xi_i(\omega) = 1 \text{ si } i \in A \text{ et } \xi_i(\omega) = 0 \text{ sinon}\}\right) \\ &= \delta^q(1-\delta)^{N-q} \end{aligned}$$

Le cadre de la démonstration étant fixé, faisons les remarques suivantes :

Il existe $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$, éléments de S_N^q, tels que

$$\left\{\sigma \in S_N^q \quad : U(\sigma) \leqslant c\log\left(2+\frac{q}{\log(N)}\right)\right\} = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_r\}$$

Dès lors, on obtient l'égalité :

$$\nu(\{\sigma_1,\ldots,\sigma_r\}) = \frac{r}{C_N^q} = \frac{r\delta^q(1-\delta)^{N-q}}{C_N^q\delta^q(1-\delta)^{N-q}}$$

(1) $$\text{Soit } \nu(\{\sigma_1,\ldots,\sigma_r\}) = \frac{p(\{\sigma_1,\ldots,\sigma_r\})}{C_N^q\delta^q(1-\delta)^{N-q}}$$

Or, par définition :

$$\begin{aligned} p(\{\sigma_1,\ldots,\sigma_r\}) &= \mu\left(T^{-1}(\{\sigma_1,\ldots,\sigma_r\})\right) \\ &= \mu\left\{\omega \in \Omega : \ |\sigma(\omega)| = q \text{ et } U(\sigma(\omega)) \leqslant c\log\left(2+\frac{q}{\log(N)}\right)\right\} \\ &\leqslant \mu\left\{\omega \in \Omega : U(\sigma(\omega)) \leqslant c\log\left(2+\frac{q}{\log(N)}\right)\right\} \qquad (2) \end{aligned}$$

D'autre part, minorons l'expression $\mu\{\omega \in \Omega : \ |\sigma(\omega)| = q\}$; on remarque que

$$\begin{aligned} \mu\{\omega \in \Omega : \ |\sigma(\omega)| = q\} &= C_N^q.\mu\{\omega \in \Omega : \xi_j(\omega) = 1 \Leftrightarrow j \in \{1,\ldots,q\}\} \\ &= C_N^q\delta^q(1-\delta)^{N-q} \\ &= \frac{N!}{N^N}.\frac{q^q}{q!}.\frac{(N-q)^{(N-q)}}{(N-q)!} \qquad \text{car } \delta = \frac{q}{N} \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{N}{q(N-q)}} \end{aligned}$$

puisque la formule de Stirling nous donne $m! \sim \sqrt{2\pi m}e^{-m}m^m$ quand $m \mapsto +\infty$. En tenant compte de $1 \leqslant q \leqslant \frac{N}{2}$, on a alors l'existence de $K > 0$ tel que :

(3) $$\mu\left\{\omega \in \Omega : \ |\sigma(\omega)| = q\right\} \geqslant \frac{K}{\sqrt{N}}$$

On peut maintenant conclure aisément, en combinant les relations (1), (2) et (3) :

$$\nu\left\{\sigma : U(\sigma) \leqslant c\log\left(2+\frac{q}{\log(N)}\right)\right\} \leqslant \frac{\mu\left\{\omega \in \Omega : U(\sigma(\omega)) \leqslant c\log\left(2+\frac{q}{\log(N)}\right)\right\}}{\frac{K}{\sqrt{N}}}$$

Soit encore, en tenant compte de $(*)$:

$$\nu\left\{\sigma \in S_N^q : U(\sigma) \leqslant c\log\left(2+\frac{q}{\log(N)}\right)\right\} \leqslant \frac{\frac{5}{N^3}}{\frac{K}{\sqrt{N}}} \leqslant \frac{1}{N^2}$$

dès que N est assez grand, ce qui prouve le théorème 4.1.

Il reste donc à établir la fameuse relation (*). Pour cela nous allons commencer par établir différents lemmes de nature hilbertienne. Nous travaillerons avec des scalaires complexes pour pouvoir les utiliser ensuite pour traiter le cas du système trigonométrique. Dans le premier lemme, il y a un mélange entre les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$.

Lemme 1 : *Soit $b = (b_1, \dots, b_{2^r}) \in \mathbb{C}^{2^r}$ tel qu'il existe $\beta_0 > 0$ tel que pour $s \in \{1, \dots, r-1\}$:*

$$\Delta_s = \left\{ k : \frac{1}{2^{s+1}} < |b_k| \leqslant \frac{1}{2^s} \right\}$$

vérifie la condition : $|\Delta_s| \geqslant \beta_0.2^s$
Alors on a, pour tout $a = (a_1, \dots, a_{2^r})$ avec $\|a\|_1 \leqslant \lambda$, où $\lambda \in [1, (r-2)\frac{\beta_0}{8}]$,

$$\|a - b\|_2 \geqslant \frac{2^{\frac{4\lambda}{\beta_0}}\sqrt{\beta_0}}{8}$$

Preuve : Donnons nous a avec $\|a\|_1 \leqslant \lambda$, où $\frac{8\lambda}{\beta_0} \leqslant r-2$.

Posons, pour $1 \leqslant s \leqslant r-1$,

$$\lambda_s = \sum_{k \in \Delta_s} |a_k|$$

On remarque que

$$\lambda \geqslant \sum_{1 \leqslant k \leqslant 2^s} |a_k| \geqslant \sum_{1 \leqslant s \leqslant \frac{8\lambda}{\beta_0}+1} \lambda_s$$

car les Δ_s sont deux à deux disjoints.

Ainsi $\lambda \geqslant (\frac{8\lambda}{\beta_0}) Min\{\lambda_s : \quad 1 \leqslant s \leqslant \frac{8\lambda}{\beta_0} + 1\} = \frac{8\lambda}{\beta_0}\lambda_{s_0}$ donc $\lambda_{s_0} \leqslant \frac{\beta_0}{8}$

Posons $\Delta'_{s_0} = \{k \in \Delta_{s_0} : \quad \frac{1}{2^{s_0+2}} \leqslant |a_k|\}$. On remarque que par définition de s_0 on a :

$$\frac{\beta_0}{8} \geqslant \sum_{k \in \Delta'_{s_0}} |a_k| \text{ , car } \Delta'_{s_0} \subset \Delta_{s_0}$$

Donc $\quad \frac{\beta_0}{8} \geqslant \frac{|\Delta'_{s_0}|}{2^{s_0+2}} \quad$ et $\quad |\Delta'_{s_0}| \leqslant \frac{2^{s_0}\beta_0}{2}$

On obtient alors la minoration :

$$\|a-b\|_2^2 \geqslant \sum_{k\in\Delta_{s_0}} |a_k-b_k|^2 \geqslant \sum_{k\in\Delta_{s_0}\setminus\Delta'_{s_0}} (|b_k|-|a_k|)^2$$

Or si $k \in \Delta_{s_0}\setminus\Delta'_{s_0}$: $\frac{1}{2^{s_0+2}} > |a_k|$ et $\frac{1}{2^{s_0+1}} \leqslant |b_k|$, donc $(|b_k|-|a_k|) \geqslant \frac{1}{2^{s_0+2}}$ et on a :

$$\begin{aligned}\|a-b\|_2^2 &\geqslant \frac{|\Delta_{s_0}\setminus\Delta'_{s_0}|}{2^{2s_0+4}} = \frac{|\Delta_{s_0}|-|\Delta'_{s_0}|}{2^{2s_0+4}} \geqslant \frac{\beta_0 2^{s_0}}{2^{2s_0+5}}\\ &\geqslant \frac{\beta_0 2^{-s_0}}{2^5}\end{aligned}$$

Enfin, on peut conclure : $\|a-b\|_2 \geqslant \sqrt{\frac{\beta_0}{32}}.2^{\frac{-s_0}{2}}$

d'où : $\|a-b\|_2 \geqslant 2^{\frac{-4\lambda}{\beta_0}}\frac{\sqrt{\beta_0}}{8}$

Lemme 2 : *Soit $\{\varphi_i\}_{1\leqslant i\leqslant m}$ une suite d'éléments d'un espace de Hilbert H complexe vérifiant la condition suivante :*
il existe $1>\varepsilon>0$ tel que pour tout $c=(c_1,\ldots,c_m)\in\mathbb{C}^m$ on a

$$(1-\varepsilon)\|c\|_2 \leqslant \left\|\sum_{i=1}^m c_i\varphi_i\right\| \leqslant (1+\varepsilon)\|c\|_2$$

Alors on a, pour tout $c\in\ell_2^m$,

$$(1-\varepsilon)^4\|c\|_2^2 \leqslant \sum_{k=1}^m \left|(\sum_{i=1}^m c_i\varphi_i,\varphi_k)\right|^2 \leqslant (1+\varepsilon)^4\|c\|_2^2$$

Preuve : L'hypothèse nous donne que :

$$\forall c\in\ell_2^m,\qquad (1-\varepsilon)^2\|c\|_2^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^m c_i\overline{c_j}(\varphi_i,\varphi_j) \leqslant (1+\varepsilon)^2\|c\|_2^2$$

Ce qui signifie que la matrice hermitienne $G_1 = [\overline{(\varphi_i,\varphi_j)}]_{1\leqslant i,j\leqslant m}$ est définie positive et que ses valeurs propres $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ vérifient :

$$1\leqslant i\leqslant m \quad : \quad (1-\varepsilon)^2 \leqslant \lambda_i \leqslant (1+\varepsilon)^2,$$

Donc les valeurs propres de $G_1 G_1^* = G_1^2$ sont des éléments de $[(1-\varepsilon)^4; (1+\varepsilon)^4]$ et il en est de même pour sa conjuguée $G = [(\varphi_i, \varphi_j)]_{1 \leqslant i,j \leqslant m}$, ce qui se traduit par :

$$(1-\varepsilon)^4 \|c\|_2^2 \leqslant \|Gc\|^2 \leqslant (1+\varepsilon)^4 \|c\|_2^2 \qquad , \quad c \in \ell_2^m$$

Comme

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m} \left| (\sum_{i=1}^{m} c_i \varphi_i, \varphi_k) \right|^2 &= \sum_{k=1}^{m} \sum_{i,j} c_i \overline{c_j} (\varphi_i, \varphi_k)(\varphi_k, \varphi_j) \\
&= \sum_{i,j} c_i \overline{c_j} (G^2)_{i,j} \\
&= (G^2 c, c) = \|Gc\|^2
\end{aligned}$$

On aboutit à la relation annoncée.

Lemme 3 : *On se place sous les hypothèses du lemme 2.*

$$\textit{Pour } c = (c_1, \ldots, c_m) \in \mathbb{C}^m \textit{ on pose } f = \sum_{i=1}^{m} c_i \varphi_i$$

Alors on a, pour ε assez petit,

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{m} (f, \varphi_i) \varphi_i \right\| \leqslant 3\sqrt{\varepsilon} (\sum_{i=1}^{m} |(f, \varphi_i)|^2)^{\frac{1}{2}}$$

Preuve : On a :

$$0 \leqslant \left\| f - \sum_{i=1}^{m} (f, \varphi_i) \varphi_i \right\|^2 = \|f\|^2 - 2 \sum_{i=1}^{m} |(f, \varphi_i)|^2 + \left\| \sum_{i=1}^{m} (f, \varphi_i) \varphi_i \right\|^2$$

Or, d'après l'hypothèse sur les φ_i,

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} (f, \varphi_i) \varphi_i \right\|^2 \leqslant (1+\varepsilon)^2 (\sum_{i=1}^{m} |(f, \varphi_i)|^2)$$

On a également, d'après le résultat du lemme 2,

$$\sum_{k=1}^{m} |(f,\varphi_k)|^2 = \sum_{k=1}^{m} \left|\sum_{i=1}^{m} c_i(\varphi_i,\varphi_k)\right|^2 \geqslant (1-\varepsilon)^4 \|c\|_2^2$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}\left\|f - \sum_{i=1}^{m}(f,\varphi_i)\varphi_i\right\|^2 &\leqslant \|f\|^2 + (2\varepsilon+\varepsilon^2)\sum_{i=1}^{m}|(f,\varphi_i)|^2 - (1-\varepsilon)^4\|c\|_2^2 \\ &\leqslant (1+\varepsilon)^2\|c\|_2^2 + (2\varepsilon+\varepsilon^2)(1+\varepsilon)^4\|c\|_2^2 - (1-\varepsilon)^4\|c\|_2^2 \\ &\leqslant [(1+\varepsilon)^2 - (1-\varepsilon)^4 + (2\varepsilon+\varepsilon^2)(1+\varepsilon)^4]\|c\|_2^2\end{aligned}$$

Le terme entre crochet étant équivalent à 8ε au voisinage de 0, on déduit que pour ε assez petit, on a, en utilisant le lemme 2,

$$\begin{aligned}\left\|f - \sum_{i=1}^{m}(f,\varphi_i)\varphi_i\right\|^2 &\leqslant 8.5\varepsilon\|c\|_2^2 \leqslant \frac{8.5\varepsilon}{(1-\varepsilon)^4}\sum_{i=1}^{m}|(f,\varphi_i)|^2 \\ &\leqslant 9\varepsilon\sum_{i=1}^{m}|(f,\varphi_i)|^2)\end{aligned}$$

Lemme 4 : *il existe $\varepsilon_0 > 0$ ayant la propriété suivante :*

lorsque $\{\varphi_i\}_{1\leqslant i\leqslant m}$ est une suite d'éléments d'un Hilbert complexe H vérifiant

$$(1-\varepsilon)\|c\|_2 \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{m} c\cdot\varphi_i\right\| \leqslant (1+\varepsilon)\|c\|_2$$

pour un $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ et pour tout $c \in \ell_2^m$, alors pour tout $z \in H$ et pour tout $c \in \ell_2^m$, on a

$$\left\|z - \sum_{i=1}^{m} c_i\varphi_i\right\| \geqslant (1-\varepsilon)\Big[\sum_{i=1}^{m}|(z,\varphi_i)-c_i|^2\Big]^{\frac{1}{2}} - 3\sqrt{\varepsilon}\Big(\sum_{i=1}^{m}|(z,\varphi_i)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

Preuve : Soit $R : H \longmapsto L = vect\{\varphi_i; 1\leqslant i\leqslant m\}$ la projection orthogonale.

On a alors pour $z \in H$:

$$\left\|z - \sum_{i=1}^{m} c_i\varphi_i\right\| \geqslant \left\|Rz - \sum_{i=1}^{m} c_i\varphi_i\right\|$$

et $(Rz, \varphi_i) = (z, \varphi_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$. Par conséquent, il suffit de prouver la relation pour Rz au lieu de z ; ainsi on suppose dans la suite que $z \in L$. Dès lors, on a en utilisant le lemme 3

$$\left\| z - \sum_{i=1}^{m} c_i\varphi_i \right\| \geqslant \left\| \sum_{i=1}^{m} [(z,\varphi_i) - c_i]\varphi_i \right\| - \left\| z - \sum_{i=1}^{m} (z,\varphi_i) \right\|$$
$$\geqslant (1-\varepsilon)\left[\sum_{i=1}^{m} |(z,\varphi_i) - c_i|^2\right]^{\frac{1}{2}} - 3\sqrt{\varepsilon}\left[\sum_{i=1}^{m} |(f,\varphi_i)|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Ces lemmes hilbertiens vont désormais nous permettre d'exprimer le nombre $U(\sigma)$ en termes hilbertiens. Dans le cas du système de Walsh, nous nous limiterons aux scalaires réels.

Notation : *Pour $p \in \mathbb{N}$ avec $1 \leqslant p \leqslant N$ on désigne par V_p le vecteur de $\mathbb{R}^N$ dont les p premières composantes sont 1 et les autres nulles.*
Soit $\sigma \subset \{1, \ldots, N\}$, on pose :

$$Z(\sigma) = \left\{ z \in \mathbb{R}^N : supp(z) \subset \sigma, \left\| \sum_{i=1}^{N} z_i w_i \right\|_\infty \leqslant 1 \right\}$$

Lemme 5 : *On a $U(\sigma) = Max\{|(V_p, z)| \ : 1 \leqslant p \leqslant N$ et $z \in Z(\sigma)\}$*

Preuve : d'abord minorons $U(\sigma)$. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leqslant p \leqslant N$ et $z \in Z(\sigma)$.
Soit τ réel avec $0 < \tau < \frac{1}{N}$, on a alors $w_j(\tau) = 1$ pour tout $j \in \{1, \ldots, N\}$, d'où, en utilisant la définition de $U(\sigma)$ et l'appartenance de z à $Z(\sigma)$,

$$|(V_p, z)| = \left| \sum_{j=1}^{p} z_j w_j(\tau) \right| \leqslant \left\| \sum_{j=1}^{p} z_j w_j \right\|_\infty \leqslant U(\sigma) \left\| \sum_{j=1}^{N} z_j w_j \right\|_\infty$$
$$\leqslant U(\sigma)$$

D'où $Sup\{|(V_p, z)| \ : 1 \leqslant p \leqslant N$ et $z \in Z(\sigma)\} \leqslant U(\sigma)$

Majorons $U(\sigma)$: on remarque que l'on peut choisir les a_j tels que $\left\| \sum_{j=1}^{N} a_j w_j \right\|_\infty = 1$ dans la définition de $U(\sigma)$. En effet, $U(\sigma)$ est une borne supérieure, portant d'une part sur un nombre fini d'éléments et d'autre part sur le compact $[-1, 1]^N$ (en effet $|a_j| \leqslant \left\| \sum_{j=1}^{N} a_j w_j \right\|_\infty = 1$). Il existe donc p dans $\{1, \ldots, N\}$ et $\{a_j\}$ dans $[-1, 1]^N$ avec $\text{supp}\{a_j\} \subset \sigma$ tels que :

$$U(\sigma) = \left\| \sum_{j=1}^{p} a_j w_j \right\|_\infty$$

et quitte à changer $\{a_j\}$ en $\{-a_j\}$: $\exists \rho \in [0,1]$:

$$\sum_{j=1}^{p} a_j w_j(\rho) = \left\| \sum_{j=1}^{p} a_j w_j \right\|_\infty = U(\sigma)$$

$$\text{Soit} \quad f(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j w_j(x) \text{ et } \quad g(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j w_j(\rho).w_j(x)$$

Comme les fonctions de Walsh sont les caractères sur le groupe de Cantor $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ identifié à $[0,1]$, on a : $g(x) = f(x \oplus \rho)$ pour tout x de $[0,1]$, où $\oplus$ désigne l'addition dans $[0,1]$ au sens de la loi de groupe du groupe de Cantor.

Plus précisément, soit θ le transport de structure du groupe de Cantor sur $[0,1]$: c'est la décomposition dyadique, lorsqu'on s'interdit une écriture avec une infinité de 1 à la suite ! C'est à dire : $\theta((\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n 2^{-n}$. Si on définit $\tilde{\theta}$ par $\tilde{\theta}(x) = (\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ si $x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n 2^{-n}$ n'est pas un rationnel binaire, soit de la forme $\frac{i}{2^k}$ avec $1 \leqslant k$ et $0 \leqslant i \leqslant 2^k$, et $\tilde{\theta}(x) = (\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ avec $\varepsilon_n = a_{k-n}$ pour $1 \leqslant n \leqslant k$ et $\varepsilon_n = 0$ pour $n > k$, si $x = \frac{i}{2^k}$ est un rationnel binaire avec $i = \sum_{j=0}^{p} a_j 2^j$, on remarque que $\theta \circ \tilde{\theta} = I_{[0,1]}$. Soit $\odot$ l'addition sur le groupe de Cantor (c'est l'addition coordonnée par coordonnée modulo 2, c'est à dire $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1} \odot (\varepsilon'_n)_{n\geqslant 1} = (|\varepsilon_n - \varepsilon'_n|)_{n\geqslant 1}$). On a donc sur $[0,1]$:

$$x \oplus \rho = \theta(\tilde{\theta}(x) \odot \tilde{\theta}(\rho))$$

Cette relation donne sur les caractères de $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$, qui sont les fonctions $w_j o \theta$:

$$\begin{aligned} w_j(x).w_j(\rho) &= w_j(\theta(\tilde{\theta}(x)).w_j(\theta(\tilde{\theta}(\rho)) \\ &= w_j(\theta(\tilde{\theta}(x) \odot \tilde{\theta}(\rho))) \\ &= w_j(x \oplus \rho) \end{aligned}$$

Ce qui donne $g(x) = f(x \oplus \rho)$ donc $\|g\|_\infty = \|f\|_\infty = 1$

Soit $z^0 = \{a_j w_j(\rho)\}_{1 \leqslant j \leqslant N}$ alors $z^0 \in Z(\sigma)$ car supp$(z^0) \subset \sigma$ et

$$\left\| \sum_{j=1}^{N} z_j^0 w_j \right\|_\infty = \|g\|_\infty = 1$$

D'où $U(\sigma) = (V_p, z^0) \leqslant Sup\{|(V_p, z)|; 1 \leqslant p \leqslant N \text{ et } z \in Z(\sigma)\}$

et le lemme est démontré.

Lemme 6 : *On considère le système de Walsh discret* $\{W^{(i)}\}_{1 \leqslant i \leqslant N}$, *où* $W^{(j)}$ *désigne le* $j^{ième}$ *vecteur colonne de la matrice de Walsh* W_N. *On a, pour tout* $\sigma \subset \{1, \ldots, N\}$ *:*

$$U(\sigma) = Min\left\{\lambda : \forall p, \quad 1 \leqslant p \leqslant N : R_\sigma V_p = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j R_\sigma W^{(j)} \text{ avec } \sum_{j=1}^{N} |\lambda_j| \leqslant \lambda\right\}$$

où R_σ *désigne l'opérateur de projection orthogonale sur* $Vect\{e_i\}_{i \in \sigma}$ *(les* $\{e_i\}_{1 \leqslant i \leqslant N}$ *étant la base cannonique de* $\mathbb{R}^N$*).*

Preuve : Montrons tout d'abord que, étant donnés $\sigma \subset \{1, \ldots, N\}$ et $p \in \{1, \ldots, N\}$, on a :

$$(**) \qquad R_\sigma V_p \in conv\left\{\pm U(\sigma) R_\sigma W^{(j)} : 1 \leqslant j \leqslant N\right\}$$

(où $conv(A)$ désigne l'enveloppe convexe de $A \subset \mathbb{R}^N$)

En effet, supposons le contraire : $R_\sigma V_p \notin conv\left\{\pm U(\sigma) R_\sigma W^{(j)} : 1 \leqslant j \leqslant N\right\}$ pour un $p \in \{1, \ldots, N\}$.

D'après le théorème de séparation de Hahn-Banach, il existe un hyperplan qui sépare strictement $R_\sigma V_p$ et $conv\left\{\pm U(\sigma) R_\sigma W^{(j)} : 1 \leqslant j \leqslant N\right\}$. Or, la donnée de cet hyperplan est équivalente à la donnée d'un vecteur b de $\mathbb{R}^N$ vérifiant :

$(b, R_\sigma V_p) > 1$ et $\left|\left(b, U(\sigma) R_\sigma W^{(j)}\right)\right| \leqslant 1$ pour tout j de $\{1, \ldots, N\}$.

Posons $\tilde{z} = U(\sigma) R_\sigma b = (\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_N)$:

$|(\tilde{z}, V_p)| = |(U(\sigma) R_\sigma b, V_p)| = U(\sigma) \, |(R_\sigma V_p, b)| > U(\sigma)$ car $R_\sigma = R_\sigma^*$

et d'autre part pour tout $j \in \{1, \ldots, N\}$: $\left|(\tilde{z}, W^{(j)})\right| = \left|(U(\sigma) R_\sigma W^{(j)}, b)\right| \leqslant 1$, relation qui signifie que l'on a :

$$\forall j \in \{1, \ldots, N\} : \left| \sum_{i=1}^{N} \tilde{z}_i w_i\left(\frac{j - \frac{1}{2}}{N}\right) \right| \leqslant 1$$

$$\text{soit, } \left\| \sum_{i=1}^{N} \tilde{z}_i w_i \right\|_\infty \leqslant 1$$

Ainsi, puisque supp($\tilde{z}$) $\subset \sigma$ par définition de $\tilde{z}$, cette dernière relation implique que $\tilde{z} \in Z(\sigma)$. Or l'inégalité stricte $|(\tilde{z}, V_p)| > U(\sigma)$ contredit le résultat du lemme 5 et (**) est prouvée par l'absurde.

On peut donc écrire pour tout p, $1 \leqslant p \leqslant N$

$$(R) \qquad R_\sigma V_p = \sum_{j=1}^{N} \mu_j U(\sigma) R_\sigma W^{(j)} \text{ , où } \sum_{j=1}^{N} |\mu_j| \leqslant 1$$

on a donc :

$$U(\sigma) \geqslant Inf \left\{ \lambda : \forall 1 \leqslant p \leqslant N : R_\sigma V_p = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j R_\sigma W^{(j)} \quad avec \quad \sum_{j=1}^{N} |\lambda_j| \leqslant \lambda \right\}$$

D'autre part, si $R_\sigma V_p = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j R_\sigma W^{(j)}$, où $\sum_{j=1}^{N} |\lambda_j| \leqslant \lambda$, alors on a pour tout z dans $Z(\sigma)$ et pour tout p, $1 \leqslant p \leqslant N$:

$$\begin{aligned} |(V_p, z)| = |(V_p, R_\sigma z)| = |(z, R_\sigma V_p)| &= \left| \sum_{j=1}^{N} \lambda_j (z, W^{(j)}) \right| \\ &\leqslant \lambda Max \left\{ \left|(z, W^{(j)})\right| \, : 1 \leqslant j \leqslant N \right\} \leqslant \lambda \end{aligned}$$

puisqu'on a pour tout $j \in \{1, \ldots, N\}$, z appartenant à $Z(\sigma)$:

$$\left|(z, W^{(j)})\right| = \left| \sum_{i=1}^{N} z_i w_i \left(\frac{j - \frac{1}{2}}{N}\right) \right| \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{N} z_i w_i \right\|_\infty \leqslant 1$$

Donc, en passant à la borne inférieure sur λ puis au maximum sur p et $z \in Z(\sigma)$, on obtient :

$$U(\sigma) \leqslant Inf \left\{ \lambda : \forall 1 \leqslant p \leqslant N : R_\sigma V_p = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j R_\sigma W^{(j)} \quad avec \quad \sum_{j=1}^{N} |\lambda_j| \leqslant \lambda \right\}$$

D'où l'égalité cherchée, car la relation (R) montre que le minimum est atteint et le lemme est démontré.

Nous allons maintenant établir deux lemmes probabilistes, le premier n'étant en fait qu'un sous-lemme du deuxième.

Lemme 7a : *Soient $X_1, \ldots, X_N$ des variables aléatoires indépendantes sur un espace de probabilité (Ω, Σ, P). Soient $b_1, \ldots, b_N, T$ des réels positifs vérifiant : $E\{e^{tX_k}\} \leqslant \exp \frac{1}{2} b_k t^2$ pour $k \in \{1, \ldots, N\}$ et $t \in [-T, T]$.*

Alors, en posant : $B^2 = \sum_{k=1}^{N} b_k$ *et* $S = \sum_{k=1}^{N} X_k$, *on a :*
$P(|S| \geqslant x) \leqslant 2\exp(-\frac{x^2}{2B^2})$ *si* $0 \leqslant x \leqslant B^2 T$.

Preuve : L'inégalité de Bienaymé-Tchebichev fournit la relation : $(0 < t \leqslant T)$

$$P(S \geqslant x) = P(e^{tS} \geqslant e^{tx}) \leqslant e^{-tx} E\left[e^{tS}\right]$$

L'indépendance de $X_1, \ldots, X_N$ nous donne :

$$E\left[e^{tS}\right] = E\left[\prod_{k=1}^{N} \exp(tX_k)\right] = \prod_{k=1}^{N} E\left[\exp(tX_k)\right]$$

$$\leqslant \prod_{k=1}^{N} \exp(\frac{1}{2} b_k t^2) \leqslant \exp(\frac{B^2 t^2}{2})$$

D'où $P(S \geqslant x) \leqslant \exp(\frac{B^2t^2}{2} - tx)$ pour tout t de $[0, T]$ et tout x. Or, on remarque que la fonction $f(t) = \frac{B^2t^2}{2} - tx$, à x fixé, atteint son minimum pour $t = \frac{x}{B^2}$, qui est bien élément de $[-T, T]$, si $0 \leqslant x \leqslant B^2 T$. On a finalement : $P(S \geqslant x) \leqslant \exp(-\frac{x^2}{2B^2})$.

De plus, puisque $\{-X_k\}$ vérifie les mêmes hypothèses que $\{X_k\}$, on a :

$$P(S \leqslant -x) = P(\sum_{k=1}^{N} -X_k \geqslant x) \leqslant \exp(-\frac{x^2}{2B^2})$$

d'où $P(|S| \geqslant x) = P(S \geqslant x) + P(S \leqslant -x) \leqslant 2\exp(-\frac{x^2}{2B^2})$. Ce qui achève la preuve.

Lemme 7b : *Soient* δ, $0 < \delta \leqslant \frac{1}{2}$ *et* $\{\xi_k\}_{1 \leqslant k \leqslant N}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans* $\{0, 1\}$, *de moyenne* δ *sur un espace de probabilité* (Ω, Σ, μ).

Alors, on a, pour tout $(a_1, \ldots, a_N)$ *tel que* $|a_k| \leqslant 1$ *pour* $1 \leqslant k \leqslant N$ *et pour tout* γ, *élément de* $[0, \delta N]$:

$$\mu\left\{\omega \in \Omega : \left|\sum_{k=1}^{N} a_k(\xi_k(\omega) - \delta)\right| \geqslant \gamma\right\} \leqslant 2\exp(-\frac{\gamma^2}{4\delta N})$$

Preuve : Posons $X_k(\omega) = a_k(\xi_k(\omega) - \delta)$ pour tout ω dans Ω et tout k dans $\{1, \ldots, N\}$. Commençons par calculer $E(X_k^2)$:

$$E\left[X_k^2\right] = a_k^2 E\left[\xi_k^2 - 2\delta\xi_k + \delta^2\right] = a_k^2 E\left[\xi_k^2 - \delta^2\right] = a_k^2(\delta - \delta^2)$$

Pour t dans $[-1,1]$, puisque $E[X_k]=0$ et $|X_k|\leqslant 1$, on a alors la majoration :

$$\begin{aligned}
E\left[\exp(tX_k)\right] =&E\left[1+tX_k+\sum_{j=2}^{\infty}\frac{t^j}{j!}X_k^j\right]\\
&\leqslant 1+t^2E\left[X_k^2\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{j!}\right]\\
&\leqslant 1+t^2(e-2)E\left[X_k^2\right]\leqslant 1+a_k^2t^2(e-2)\delta(1-\delta)\\
&\leqslant \exp(a_k^2t^2\delta(1-\delta))\leqslant \exp(t^2\delta(1-\delta))
\end{aligned}$$

En posant $b_k=2\delta(1-\delta)$ et en appliquant le lemme 7a, on aboutit à :

$$\mu\left\{\omega\in\Omega:\left|\sum_{k=1}^{N}a_k(\xi_k(\omega)-\delta)\right|\geqslant\gamma\right\}\leqslant 2\exp(-\frac{\gamma^2}{4\delta(1-\delta)N})\leqslant 2\exp(-\frac{\gamma^2}{4\delta N})$$

si $0\leqslant\gamma\leqslant 2\delta(1-\delta)N$ donc en particulier si $0\leqslant\gamma\leqslant\delta N$ car $\delta\leqslant\frac{1}{2}$.

Nous allons maintenant avoir besoin d'établir des propriétés sur la matrice de Walsh afin de, notamment, avoir une estimation de Δ_s et d'utiliser le lemme 1.

Lemme 8a : *Pour tout n dans $\{1,\dots,N\}$, tout x de $[0,1]$ différent de $\frac{k}{2N}$ où k varie dans $\{0,\dots,2N\}$, on a :*

$$w_{2n}(x)=r_1(x)w_n(x)\qquad\text{et}\qquad w_{2n-1}(x)=w_n(2x)$$

Preuve : Tout n de $\mathbb{N}^*$ s'écrit en base 2 sous la forme $n=\sum_{k\in\mathbb{Z}}a_k(n)2^{-k}=\sum_{k\in\mathbb{N}}a_{-k}(n)2^k$ où $a_k(n)\in\{0,1\}$.

On a alors pour tout x de $[0,1]$: $w_n(x)=\prod_{k\in\mathbb{N}}[r_{k+1}(x)]^{a_{-k}(n-1)}$ où r_k est la $k^{ième}$ fonction de Rademacher.

On a alors $w_{2n}(x)=\prod_{k=0}^{\infty}[r_{k+1}(x)]^{a_{-k}(2n-1)}$

D'une part $2n-1=\sum_{k\in\mathbb{N}}a_{-k}(2n-1)2^k$ et d'autre part

$$2n-1=2(n-1)+1=1+\sum_{k\in\mathbb{N}}a_{-k}(n-1)2^{k+1}.$$

Donc, pour tout k dans $\mathbb{N}$, on a la relation : $a_{-k}(n-1) = a_{-(k+1)}(2n-1)$

Ainsi $w_{2n}(x) = r_1(x)^{a_0(2n-1)} \prod_{k=0}^{\infty} [r_{k+2}(x)]^{a_{-k}(n-1)}$

Or l'écriture de x sous la forme : $x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k(x) 2^{-k}$ où $a_k \in \{0,1\}$ nous conduit à remarquer que : $r_{k+2}(x) = (-1)^{a_{k+2}(x)} = (-1)^{a_{k+1}(2x)} = r_{k+1}(2x)$ pour tout entier k inférieur à $\log_2(n)$, tant que x n'est pas un multiple de $\frac{1}{2^{2n}}$. On obtient donc :

$$w_{2n}(x) = r_1(x)^{a_0(2n-1)} \prod_{k=0}^{\infty} [r_{k+1}(2x)]^{a_{-k}(n-1)} = r_1(x).w_n(2x)$$

puisque, $2n-1$ étant impair, $a_0(2n-1)$ vaut 1. Ce qui est le premier résultat annoncé.

Quant à la deuxième relation, on l'obtient de manière similaire :

$$w_{2n-1}(x) = \prod_{k=0}^{\infty} [r_{k+1}(x)]^{a_{-k}(2n-2)}$$

D'une part, $2n-2 = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{-k}(2n-2) 2^k$ et d'autre part

$$2n-2 = 2(n-1) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{-k}(n-1) 2^{k+1}.$$

Donc, pour tout k dans $\mathbb{N}$, on a encore la relation : $a_{-k}(n-1) = a_{-(k+1)}(2n-2)$

Ainsi $w_{2n-1}(x) = r_1(x)^{a_0(2n-2)} \prod_{k=0}^{\infty} [r_{k+2}(x)]^{a_{-k}(n-1)}$

Or on a toujours : $r_{k+2}(x) = r_{k+1}(2x)$ pour tout entier k inférieur à $\log_2(n)$, tant que x n'est pas un multiple de $\frac{1}{2^{2n}}$.

On obtient donc : $w_{2n-1}(x) = r_1(x)^{a_0(2n-2)} \prod_{k=0}^{\infty} [r_{k+1}(2x)]^{a_{-k}(n-1)} = w_n(2x)$ puisque, $2n-2$ étant pair, $a_0(2n-2)$ est nul. Ce qui achève la preuve du lemme.

Notation : On désigne par A la matrice rectangulaire à N colonnes et $2N$ lignes de terme général : $A_{p,q} = \delta_{p,2q} + \delta_{p,2q-1}$ où $0 \leqslant p \leqslant 2N$, $1 \leqslant q \leqslant N$ et $\delta_{n,m}$

désigne le symbole de Kronecker. A est donc de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

On introduit également la matrice B, matrice rectangulaire à N colonnes et $2N$ lignes de terme général : $B_{p,q} = \delta_{p,2q-1} - \delta_{p,2q}$ où $0 \leqslant p \leqslant 2N$, $1 \leqslant q \leqslant N$ donc B est de la forme :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

Lemme 8b : *On peut passer de la matrice de Walsh d'ordre N à celle d'ordre 2N via la relation de récurrence suivante :*

$$W_{2N} = \left(\begin{pmatrix} AW_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} BW_N \end{pmatrix} \right)$$

Preuve : Commençons par les N premières colonnes.
Soient $1 \leqslant p \leqslant N$ et $1 \leqslant q \leqslant N$: On a pour les lignes paires :

$$\text{D'une part, } (AW_N)_{2p,q} = \sum_{k=1}^{N} A_{2p,k}(W_N)_{k,q} = (W_N)_{p,q} = w_p(\frac{q-\frac{1}{2}}{N})$$

$$\begin{aligned} \text{D'autre part, } (W_{2N})_{2p,q} &= w_{2p}(\frac{q-\frac{1}{2}}{2N}) \\ &= r_1(\frac{q-\frac{1}{2}}{2N})w_p(\frac{q-\frac{1}{2}}{N}) \text{ d'après le lemme 8a} \end{aligned}$$

Or, comme $\frac{q-\frac{1}{2}}{2N} < \frac{1}{2}$, on a : $r_1(\frac{q-\frac{1}{2}}{2N}) = 1$. Donc le cas des lignes paires est traité.

Quant aux lignes impaires :

$$\text{D'une part, } (AW_N)_{2p-1,q} = \sum_{k=1}^{N} A_{2p-1,k}(W_N)_{k,q} = (W_N)_{p,q}$$

$$\begin{aligned}\text{D'autre part, } (W_{2N})_{2p-1,q} =& w_{2p-1}\left(\frac{q-\frac{1}{2}}{2N}\right)\\ =& w_p\left(\frac{q-\frac{1}{2}}{N}\right) \text{ d'après le lemme 8a}\\ =& (W_N)_{p,q}\end{aligned}$$

et on a le résultat pour les N premières colonnes.

Traitons maintenant le cas des N dernières colonnes. Soient $1 \leqslant p \leqslant N$ et $1 \leqslant q \leqslant N$: On a pour les lignes paires :

D'une part, $(BW_N)_{2p,q} = -(W_N)_{p,q} = -w_p(\frac{q-\frac{1}{2}}{N})$

$$\begin{aligned}\text{D'autre part, } (W_{2N})_{2p,q+N} =& w_{2p}\left(\frac{q+N-\frac{1}{2}}{2N}\right)\\ =& r_1\left(\frac{q+N-\frac{1}{2}}{2N}\right)w_p\left(\frac{q+N-\frac{1}{2}}{N}\right) \text{ d'après le lemme 8a}\end{aligned}$$

Or, comme $\frac{q+N-\frac{1}{2}}{2N} > \frac{1}{2}$, on a : $r_1(\frac{q+N-\frac{1}{2}}{2N}) = -1$. De plus, comme les fonctions de Walsh sont 1-périodiques, on a : $w_p(\frac{q+N-\frac{1}{2}}{N}) = w_p(\frac{q-\frac{1}{2}}{N})$. Donc le cas des lignes paires est traité.

Quant aux lignes impaires :

D'une part, $(BW_N)_{2p-1,q} = (W_N)_{p,q}$

$$\begin{aligned}\text{D'autre part, } \quad (W_{2N})_{2p-1,q+N} =& w_{2p-1}\left(\frac{q+N-\frac{1}{2}}{2N}\right)\\ =& w_p\left(\frac{q+N-\frac{1}{2}}{N}\right)\\ =& w_p\left(\frac{q-\frac{1}{2}}{N}\right) \text{ par 1-périodicité.}\end{aligned}$$

Tous les cas sont donc traités et le lemme est démontré.

Lemme 8c : *On peut passer de la matrice de Walsh d'ordre N à celle d'ordre $2N$ via la relation de récurrence suivante :*

$$W_{2N} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} W_N.{}^tA \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} W_N.{}^tB \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Preuve : Commençons par les N premières lignes.

Pour tout p, q avec $1 \leqslant p \leqslant N$ et $1 \leqslant q \leqslant 2N$:

$$(W_{2N})_{p,q} = w_p(\frac{q-\frac{1}{2}}{2N}) = w_p(\frac{\frac{q}{2}-\frac{1}{4}}{N}) = \begin{cases} w_p(\frac{q'-\frac{1}{4}}{N}) & \text{si } q = 2q' \\ w_p(\frac{q'-\frac{3}{4}}{N}) & \text{si } q = 2q'-1 \end{cases}$$

$$= w_p(\frac{q'-\frac{1}{2}}{N}) = (W_N)_{p,q'}$$

Alors que $(W_N.{}^tA)_{p,q} = \sum_{k=1}^{N} (W_N)_{p,k} A_{q,k} = \begin{cases} w_p(\frac{q'-\frac{1}{2}}{N}) & \text{si } q = 2q' \\ w_p(\frac{q'-\frac{1}{2}}{N}) & \text{si } q = 2q'-1 \end{cases}$

d'où l'égalité pour les N premières lignes.

Quant aux N dernières lignes

Pour tout p, q avec $1 \leqslant p \leqslant N$ et $1 \leqslant q \leqslant 2N$:

$$(W_{2N})_{p+N,q} = w_{p+N}(\frac{q-\frac{1}{2}}{2N}) = w_p(\frac{q-\frac{1}{2}}{2N}).w_{N+1}(\frac{q-\frac{1}{2}}{2N})$$

$$= \begin{cases} -w_p(\frac{q'-\frac{1}{4}}{N}) & \text{si } q = 2q' \\ w_p(\frac{q'-\frac{1}{4}}{N}) & \text{si } q = 2q'-1 \end{cases}$$

puisque $w_{N+1}(\frac{q-\frac{1}{2}}{2N}) = r_{r+1}(\frac{q-\frac{1}{2}}{2^{r+1}}) = \begin{cases} -1 & \text{si } q \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } q \text{ est impair} \end{cases}$

Alors que

$$(W_N.{}^tB)_{p,q} = \sum_{k=1}^{N} (W_N)_{p,k} B_{q,k} = \begin{cases} -(W_N)_{p,q'} = w_p(\frac{q'-\frac{1}{2}}{N}) & \text{si } q = 2q' \\ (W_N)_{p,q'} = w_p(\frac{q'-\frac{1}{2}}{N}) & \text{si } q = 2q'-1 \end{cases}$$

d'où l'égalité pour les N dernières lignes.

Corollaire : *La matrice de Walsh W_N est symétrique pour tout N de la forme $N = 2^r, r \in \mathbb{N}$.*

Preuve : On se propose de démontrer ce résultat par récurrence sur r. Le cas $r = 0$, soit $N = 1$, est trivial puisque $W_1 = (\,1\,)$. Supposons donc que W_N soit symétrique. Pour établir que W_{2N} l'est aussi, il suffit d'appliquer les lemmes 8b et 8c.

Tout ce travail va nous permetre maintenant d'avoir des estimations sur les nombres $|(V_p, W^{(j)})|$.

Notation : On définit le $j^{ième}$ coefficient de Fourier-Walsh d'une fonction f 1-périodique, intégrable sur $[0,1]$, par :

$$\hat{f}(j) = \int_0^1 f(t).w_j(t)dt \text{ où } j \in \mathbb{N}^*$$

Lemme 8d : *Pour tout j et tout p, éléments de $\{1,\ldots,N\}$, on a la majoration :*

$$\left|(V_p, W^{(j)})\right| \leqslant \frac{N}{j}$$

Preuve : L'énoncé peut aussi se formuler en termes d'analyse de Fourier-Walsh. En effet si on introduit la fonction 1-périodique f , définie sur $[0,1[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{p}{N} \\ 0 & \text{si} \quad t > \frac{p}{N} \end{cases}$$

on remarque alors que, en fait, on a : $(V_p, W^{(j)}) = (V_p, L^{(j)})$, où $L^{(j)}$ est la $j^{ième}$ ligne de W_N, puisque, d'après le lemme 8c, la matrice de Walsh W_N est symétrique. On a donc l'expression suivante :

$$\begin{aligned}(V_p, W^{(j)}) &= \sum_{k=1}^{p} w_j\left(\frac{k-\frac{1}{2}}{N}\right) \\ &= N\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{N} w_j\left(\frac{k-\frac{1}{2}}{N}\right) \\ &= N\sum_{k=1}^{p} \int_{\frac{k-1}{N}}^{\frac{k}{N}} w_j(t)dt\end{aligned}$$

puisque w_j est constante sur tout intervalle de la forme $]\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}[$. On aboutit alors à :

$$(V_p, W^{(j)}) = N\int_0^{\frac{p}{N}} w_j(t)dt = N\int_0^1 f(t).w_j(t)dt = N\hat{f}(j)$$

et pour démontrer le lemme, il s'agit donc de montrer que, pour tout j, on a : $\left|\hat{f}(j)\right| \leqslant \frac{1}{j}$.

On remarque que le cas $j = 1$ est trivial puisque $\left|(V_p, W^{(j)})\right| = p \leqslant N$. Donnons nous donc j dans $\{2,\ldots,N\}$, il existe alors s dans $\{1,\ldots,r\}$ tel que : $2^{s-1} \leqslant j-1 \leqslant 2^s - 1$. Dès lors, par définition des fonctions de Walsh, la fonction de Rademacher de plus grand indice qui intervienne dans l'expression de w_j étant r_s, w_j change de signe en $\frac{1}{2^s}$ puisque les fonctions de Rademacher d'indice inférieur sont égales à 1 sur l'intervalle $]0, \frac{1}{2^{s-1}}[$. Choisissons donc α dans $]\frac{1}{2^s}, \frac{1}{2^{s-1}}[$, on aura alors $w_j(\alpha) = -1$. On a (cf [5] p.135)

$$\begin{aligned}
\hat{f}(j) &= \int_0^1 f(t).w_j(t)dt \\
&= \int_0^1 f(t \oplus \alpha).w_j(t \oplus \alpha)dt \\
&= \int_0^1 f(t \oplus \alpha).w_j(t)w_j(\alpha)dt = -\int_0^1 f(t \oplus \alpha).w_j(t)dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 [f(t) - f(t \oplus \alpha)].w_j(t)dt
\end{aligned}$$

Donc, en passant aux valeurs absolues, on a la majoration :

$$\left|\hat{f}(j)\right| \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 |f(t) - f(t \oplus \alpha)|\,dt = \frac{1}{2}\int_{[\frac{p}{N}-\alpha, \frac{p}{N}+\alpha]\cap[0,1]} |f(t) - f(t \oplus \alpha)|\,dt$$

en effet, pour tout t de $[0,1]$, on a $|(t \oplus \alpha) - t| \leqslant \alpha$ (cf [5] p.135) ainsi : pour $1 > t > \frac{p}{N} + \alpha$, $f(t) = 0$ et $1 \geqslant t \oplus \alpha > \frac{p}{N}$ donc $f(t \oplus \alpha) = 0$. De même, $0 < t < \frac{p}{N} - \alpha$, $f(t) = 1$ et $0 \leqslant t \oplus \alpha < \frac{p}{N}$ donc $f(t \oplus \alpha) = 1$. On obtient la majoration $\left|\hat{f}(j)\right| \leqslant \alpha$, pour tout α dans $]\frac{1}{2^s}, \frac{1}{2^{s-1}}[$, ainsi

$$\left|\hat{f}(j)\right| \leqslant \frac{1}{2^s} \leqslant \frac{1}{j}$$

Donc on a bien établi : $|(V_p, W^{(j)})| \leqslant \frac{N}{j}$.

Notation : On pose, pour j dans $\{1, \ldots, N\}$: $b_j = \frac{|(V_p, W^{(j)})|}{N}$.

Lemme 8e : *On considère les ensembles Δ_s associés à la famille $\{b_j\}$ (ils sont définis dans le lemme 1), pour s dans $\{1, \ldots, r-3\}$. En prenant pour p la partie entière de $\frac{N}{3}$, on a la minoration : $|\Delta_s| \geqslant \dfrac{2^s}{2}$.*

Preuve : Pour commencer, nous devons analyser les p premières coordonnées de chaque vecteur colonne $W^{(j)}$ de la matrice de Walsh. Cette matrice est symétrique d'après le corollaire (p. 48) donc $W^{(j)} = \left\{w_j(\frac{i-\frac{1}{2}}{N})\right\}_{1\leqslant i\leqslant N}$. Soit s dans $\{1, \ldots, r-3\}$, considérons un entier j tel que $2^{s-1} + 1 \leqslant j \leqslant 2^s$, alors $w_j = r_s \prod_{0\leqslant k\leqslant s-2} r_{k+1}^{a_k(j-1)}$. La démonstration du lemme 8d nous assure déjà que $b_j \leqslant 2^{-s}$. Notons que r_s change de signe en tous les points $\frac{k}{2^s}$, $1 \leqslant k \leqslant 2^{s-1}$ et $\prod_{0\leqslant k\leqslant s-2} r_{k+1}^{a_k(j-1)}$ ne change de signe, le cas échéant, qu'aux points de la forme

$\frac{k}{2^{s-1}}$, $1 \leqslant k \leqslant 2^{s-2}$. Il y a donc au moins 2^{r-s} fois un 1 (ou un -1) à la suite dans les coordonnées de $W^{(j)}$ et il y a au plus 2^{r-s+1} fois un 1 (ou un -1) à la suite dans ses coordonnées. Ainsi, si on effectue la division euclidienne de p par 2^{r-s}, elle est de la forme : $p = u2^{r-s} + v$ avec $v < 2^{r-s}$ et on a :

$$(V_p, W^{(j)}) = \begin{cases} v & \text{si } u \text{ est pair} \\ 2^{r-s} - v & \text{si } u \text{ est impair} \end{cases}$$

Il s'agit donc maintenant d'estimer le quotient et le reste de cette division. On va devoir estimer l'entier p et pour cela, il est commode de distinguer les différents cas suivant la parité de r.

Remarquons d'abord que $\frac{1}{3} = \frac{1}{4(1-\frac{1}{4})} = \sum_{q=1}^{\infty} 2^{-2q}$.

Si donc r est pair, il s'écrit $r = 2r'$ et on a : $\dfrac{N}{3} = \sum_{q=1}^{\infty} 2^{2(r'-q)}$. En en prenant la partie entière, c'est à dire en se restreignant aux puissances de 2 d'exposant positif, on obtient :

$$[\frac{N}{3}] = \sum_{q=1}^{r'} 2^{r-2q} = \frac{N-1}{3}$$

On a donc la minoration : $b_j > \frac{1}{2^s+1}$ dans le cas où r est pair.

Si maintenant r est impair, il s'écrit $r = 2r' + 1$ et on a :

$$\frac{N}{3} = \sum_{q=1}^{\infty} 2^{2r'+1-2q}$$

En en prenant la partie entière, on obtient :

$$[\frac{N}{3}] = \sum_{q=1}^{r'} 2^{r-2q} = \frac{N-2}{3}$$

Pour regrouper ces deux cas, dans la suite nous allons établir nos formules en fonction de r' :

Le quotient u s'obtient de la même manière :

$$u = \left[\frac{\sum_{q=1}^{r'} 2^{r-2q})}{2^{r-s}}\right] = \sum_{\substack{1 \leqslant q \leqslant r' \\ 2q \leqslant s}} 2^{s-2q}$$

Donc u est un nombre pair si et seulement si tous les exposants de 2 qui interviennent sont strictement positifs, c'est à dire si et seulement si s est impair.

Si s est impair, il s'écrit $s = 2s' + 1$ et $v = \sum_{\substack{1 \leqslant q \leqslant r' \\ s-2q \leqslant -1}} 2^{r-2q} = 2^r \frac{4^{-s'} - 4^{-r'}}{3}$

$$\text{Ainsi } b_j = \frac{v}{2^r} = \frac{4^{-s'} - 4^{-r'}}{3} > \frac{1}{2^{s+1}} = \frac{4^{-s'}}{4}$$

puisque ceci est équivalent à $\frac{4^{-s'}}{4} > 4^{-r'}$ soit $r' > s' + 1$, ce qui est vrai. On a donc la minoration : $b_j > \frac{1}{2^{s+1}}$.

Si s est pair, il s'écrit $s = 2s'$ et $v = \sum_{\substack{1 \leqslant q \leqslant r' \\ s-2q \leqslant -1}} 2^{r-2q} = \frac{2^r(2^{-s} - 2^{-2r'})}{3}$

$$\text{Ainsi } b_j = \frac{2^{r-s} - v}{2^r} = \frac{2.2^{-s} + 2^{-2r'}}{3} > \frac{1}{2^{s+1}}$$

puisque ceci est équivalent à $\frac{1}{2}.2^{-s} + 2^{-2r'} > 0$, ce qui est vrai.

On a donc la minoration : $b_j > \frac{1}{2^{s+1}}$ dans le cas où r est pair.

Ainsi, on a établi que pour tout j dans $\{2^{s-1} + 1, \ldots, 2^s\}$, on a la minoration : $b_j > \frac{1}{2^{s+1}}$. On a donc aussi une minoration de $|\Delta_s|$ par $\frac{2^s}{2}$ et le lemme est démontré lorsque $1 \leqslant s \leqslant r - 3$.

Toute cette série de lemmes étant établie, on peut enfin passer à la démonstration de la relation (*) (p. 33) :

On choisit dans la suite $p = \left[\frac{N}{3}\right]$. On va appliquer les lemmes à des parties aléatoires de $\{1, \ldots, N\}$. En appliquant le lemme 6, on a la relation (on écrira dans la suite σ au lieu de $\sigma(\omega)$ afin de simplifier l'écriture des expressions) :

$$R_\sigma V_p = \sum_{j=1}^{N} \nu_j^p(\sigma) R_\sigma W^{(j)} \text{ avec } \sum_{j=1}^{N} \left|\nu_j^p(\sigma)\right| \leqslant U(\sigma)$$

Posons $m = \left[\left(\frac{\delta N}{20 \log(N)}\right)^{\frac{3}{8}}\right]$.

Nous allons en fait encadrer l'expression : $M = \left\| R_\sigma V_p - \sum_{j=1}^{m} \nu_j^p(\sigma) R_\sigma W^{(j)} \right\|_2^2$

Nous en déduirons ensuite des estimations sur $U(\sigma)$.

Commençons par majorer cette expression.

$$M = \left(\sum_{h=m+1}^{N} \nu_h^p(\sigma) R_\sigma W^{(h)}, R_\sigma V_p - \sum_{j=1}^{m} \nu_j^p(\sigma) R_\sigma W^{(j)} \right)$$

$$= \sum_{h=m+1}^{N} \nu_h^p(\sigma) \left(R_\sigma W^{(h)}, R_\sigma V_p \right) - \sum_{h=m+1}^{N} \sum_{j=1}^{m} \nu_h^p(\sigma) \nu_j^p(\sigma) \left(R_\sigma W^{(j)}, R_\sigma W^{(h)} \right)$$

D'où l'inégalité (E_0) :

$$M \leqslant U(\sigma) \max_{m \leqslant h \leqslant N} \left| (V_p, R_\sigma W^{(h)}) \right| + U(\sigma)^2 \max_{\substack{1 \leqslant j \leqslant m \\ m+1 \leqslant h \leqslant N}} \left| (W^{(h)}, R_\sigma W^{(j)}) \right|$$

Intéressons nous au premier maximum et fixons h où $m+1 \leqslant h \leqslant N$; appliquons le lemme 7b avec $a_i = (W^{(h)})_i$ où $1 \leqslant i \leqslant p$, qui est de module 1, $1 \leqslant i \leqslant p$. On obtient, dès que $0 \leqslant \gamma \leqslant \delta N$:

$$\mu \left\{ \omega \in \Omega : \left| \sum_{i=1}^{p} (W^{(h)})_i (\xi_i(\omega) - \delta) \right| \geqslant \gamma \right\} \leqslant 2 \exp(-\frac{\gamma^2}{4\delta N})$$

Donc, en passant à l'union sur h dans $\{1, \ldots, p\}$ des ensembles

$$\left\{ \omega \in \Omega : \left| \sum_{i=1}^{p} (W^{(h)})_i (\xi_i(\omega) - \delta) \right| \geqslant \gamma \right\}$$

et en prenant la mesure de cette union, on obtient :

$$\mu \left\{ \omega \in \Omega : \max_{m < h \leqslant N} \left| \sum_{i=1}^{p} (W^{(h)})_i (\xi_i(\omega) - \delta) \right| \geqslant \gamma \right\} \leqslant 2N \exp(-\frac{\gamma^2}{4\delta N})$$

Ce qui signifie que, avec une probabilité supérieure à $1 - 2N \exp(-\frac{\gamma^2}{4\delta N})$, on a : $\max_{m < h \leqslant N} \left| \sum_{i=1}^{p} (W^{(h)})_i (\xi_i(\omega) - \delta) \right| \leqslant \gamma$.

On remarque que : $\xi_i(\omega) = (R_\sigma V_p)_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in \sigma(\omega) = \sigma \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Ainsi
$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{p} (W^{(h)})_i (\xi_i(\omega) - \delta) &= \sum_{i=1}^{p} (W^{(h)})_i [(R_\sigma V_p)_i - \delta] \\
&= \sum_{i=1}^{p} (W^{(h)})_i (R_\sigma V_p - \delta V_p)_i \\
&= (R_\sigma V_p - \delta V_p, W^{(h)}) \\
&= (R_\sigma V_p, W^{(h)}) - \delta (V_p, W^{(h)})
\end{aligned}$$

On a donc en fait, avec une probabilité supérieure à $1-2N\exp(-\frac{\gamma^2}{4\delta N})$, l'inégalité suivante :

$$(E_1) \qquad \max_{m<h\leqslant N}\left|(R_\sigma V_p, W^{(h)}) - \delta(V_p, W^{(h)})\right| \leqslant \gamma$$

Soit encore : $\displaystyle\max_{m<h\leqslant N}\left|(R_\sigma V_p, W^{(h)})\right| \leqslant \gamma + \delta \max_{m<h\leqslant N}\left|(V_p, W^{(h)})\right| \leqslant \gamma + \frac{\delta N}{m}$

puisque $\left|(V_p, W^{(h)})\right| \leqslant \dfrac{N}{h} \leqslant \dfrac{N}{m}$ pour tout h dans $\{m+1,\ldots,N\}$, d'après le lemme 8d.

On choisit alors $\gamma = \sqrt{20\delta N\log(N)}$, qui vérifie $0<\gamma\leqslant\delta N$, et $\varepsilon = (\frac{\delta N}{20\log(N)})^{\frac{-1}{16}}$, qui est inférieur à 1. On remarque que alors m s'écrit aussi $m = \left[\varepsilon^2\sqrt{\frac{\delta N}{20\log(N)}}\right]$ et la relation (E_1) s'écrit encore :

$$\max_{m<h\leqslant N}\left|(R_\sigma V_p, W^{(h)})\right| \leqslant (1+\frac{1}{\varepsilon^2})\sqrt{20\delta N\log(N)} \leqslant \frac{2}{\varepsilon^2}\sqrt{20\delta N\log(N)}$$

avec une probabilité supérieure à $1-2N\exp(-5\log(N)) = 1-\frac{2}{N^4}$.

Si on s'intéresse maintenant au deuxième maximum de l'inégalité (E_0), en fixant h dans $\{m+1,\ldots,N\}$ et j dans $\{1,\ldots,m\}$, on applique le lemme 7b à $(a_1,\ldots,a_N)$ où $a_k = (W^{(h)})_k(W^{(j)})_k$, $1\leqslant k\leqslant N$, a module 1 et on obtient :

$$\mu\left\{\omega\in\Omega : \left|\sum_{i=1}^{N}(W^{(h)})_i(W^{(j)})_i(\xi_i(\omega)-\delta)\right| \geqslant \gamma\right\} \leqslant 2\exp(-\frac{\gamma^2}{4\delta N}) = \frac{2}{N^5}$$

Or, on remarque que les vecteurs colonnes de la matrice de Walsh sont orthogonaux. En effet : si $h\neq j$

$$\begin{aligned}(W^{(h)}, W^{(j)}) &= \sum_{k=1}^{N}(W^{(h)})_k)(W^{(j)})_k) \\ &= \sum_{k=1}^{N} N\frac{1}{N}w_h\left(\frac{k-\frac12}{N}\right)w_j\left(\frac{k-\frac12}{N}\right) \\ &= N\sum_{k=1}^{N}\int_{\frac{k-1}{N}}^{\frac{k}{N}} w_h(t)w_j(t)dt = N\int_0^1 w_h(t)w_j(t)dt \\ &= 0 \quad \text{car les fonctions de Walsh sont orthogonales dans } L^2.\end{aligned}$$

On obtient donc, avec une probabilité inférieure à $2\exp(-5\log(N)) = \frac{2}{N^5}$: $\left|\sum_{i=1}^{N}(W^{(h)})_i(W^{(j)})_i\xi_i(\omega)\right| \geqslant \gamma$. Et en passant à l'union pour h dans $\{m+1,\ldots,N\}$

et j dans $\{1,\ldots,m\}$, on obtient :

$$\max_{\substack{1\leqslant j\leqslant m\\ m+1\leqslant h\leqslant N}} \left|(W^{(h)},R_\sigma W^{(j)})\right| = \max_{\substack{1\leqslant j\leqslant m\\ m+1\leqslant h\leqslant N}} \sum_{i=1}^{N} W_i^{(h)} W_i^{(j)} \xi_i(\omega) \geqslant \gamma$$

avec une probabilité inférieure à $N^2.\frac{2}{N^5}$. Donc, on a, avec une probabilité supérieure à $1-\frac{2}{N^3}$: $\max_{\substack{1\leqslant j\leqslant m\\ m+1\leqslant h\leqslant N}} \left|(W^{(h)},R_\sigma W^{(j)})\right| \leqslant \gamma$.

Ainsi, en reprenant la relation (E_0), celle-ci devient :

$$(E_2) \qquad \left\| R_\sigma V_p - \sum_{j=1}^{m} \nu_j^p(\sigma) R_\sigma W^{(j)} \right\|_2^2 \leqslant U(\sigma)(U(\sigma)+\frac{2}{\varepsilon^2})\sqrt{20\delta N \log(N)}$$

avec une probabilité supérieure à $1-\frac{2}{N^3}-\frac{2}{N^4}$, donc supérieure à $1-\frac{4}{N^3}$.

Nous allons maintenant minorer l'expression M

Pour cela, on pose $\varphi_j = \frac{R_\sigma W^{(j)}}{\sqrt{\delta N}}$ où j décrit $\{1,\ldots,m\}$. Une fois de plus, l'application du lemme 7b donne, pour $1\leqslant j\leqslant m$ et $1\leqslant l\leqslant m$:

$$\mu\left\{\omega\in\Omega : \left|\sum_{i=1}^{N}(W^{(l)})_i(W^{(j)})_i(\xi_i(\omega)-\delta)\right| \geqslant \gamma\right\} \leqslant 2\exp(-\frac{\gamma^2}{4\delta N})$$

Les calculs menés précédemment sont encore licites et conduisent à :

$$\left|(R_\sigma W^{(j)},(R_\sigma W^{(l)}) - \delta(W^{(j)},W^{(l)})\right| \leqslant \sqrt{20\delta N\log(N)}$$

c'est à dire :

$$(E_3) \qquad \left|(\varphi_j,\varphi_l) - \delta(\frac{W^{(j)}}{\sqrt{N}},\frac{W^{(l)}}{\sqrt{N}})\right| \leqslant \sqrt{\frac{20\log(N)}{\delta N}} \qquad 1\leqslant j,l\leqslant m$$

avec une probabilité supérieure à $1-\frac{2}{N^3}$.

Pour tout c de ℓ_2^m, en tenant compte de l'orthonormalité des vecteurs $\frac{W^{(j)}}{\sqrt{N}}$ $(1\leqslant j\leqslant N)$, en utilisant l'égalité de Parseval et la majoration E_3

$$\begin{aligned}\left|\left\|\sum_{j=1}^{m} c_j\varphi_j\right\|^2 - \|c\|_2^2\right| &= \left|\left\|\sum_{j=1}^{m} c_j\varphi_j\right\|^2 - \left\|\sum_{j=1}^{m} c_j\frac{W^{(j)}}{\sqrt{N}}\right\|^2\right| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}|c_j||c_l|\left|(\varphi_j,\varphi_l)-(\frac{W^{(j)}}{\sqrt{N}},\frac{W^{(l)}}{\sqrt{N}})\right| \\ &\leqslant (\sum_{j=1}^{m}|c_j|)^2\sqrt{\frac{20\log(N)}{\delta N}}\end{aligned}$$

Or, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$(\sum_{j=1}^{m} |c_j|) \leqslant \sqrt{m}(\sum_{j=1}^{m} |c_j|^2)^{\frac{1}{2}}$$

D'où

$$\left| \left\| \sum_{j=1}^{m} c_j \varphi_j \right\|^2 - \|c\|_2^2 \right| \leqslant m \|c\|_2^2 \sqrt{\frac{20 \log(N)}{\delta N}} \leqslant \varepsilon^2 \|c\|_2^2$$

Finalement

$$(1-\varepsilon) \|c\|_2 \leqslant \left\| \sum_{j=1}^{m} c_j \varphi_j \right\| \leqslant (1+\varepsilon) \|c\|_2$$

On est ainsi sous les hypothèses du lemme 4 pour autant que ε soit assez petit, soit $\frac{q}{\log(N)}$ assez grand. Or il est possible de le supposer puisque l'étude du premier cas (p.32) a montré que, si cette quantité était bornée, le résultat était trivial. On applique alors ce lemme à $z = \frac{R_\sigma V_p}{\sqrt{\delta N}}$ et $c_j = \nu_j^p(\sigma)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{R_\sigma V_p}{\sqrt{\delta N}} - \left(\sum_{j=1}^{m} \nu_j^p(\sigma) \frac{R_\sigma W^{(j)}}{\sqrt{\delta N}} \right) \right\|_2 \geqslant & (1-\varepsilon) \left(\sum_{j=1}^{m} \left| (\frac{R_\sigma V_p}{\sqrt{\delta N}}, \frac{W^{(j)}}{\sqrt{\delta N}}) - \nu_j^p(\sigma) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & - 3\sqrt{\varepsilon} \left(\sum_{j=1}^{m} \left| (\frac{R_\sigma V_p}{\sqrt{\delta N}}, \frac{W^{(j)}}{\sqrt{\delta N}}) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{soit } \left\| R_\sigma V_p - \sum_{j=1}^{m} \nu_j^p(\sigma) R_\sigma W^{(j)} \right\|_2 \geqslant & (1-\varepsilon)\sqrt{\delta N} \left(\sum_{j=1}^{m} \left| (\frac{R_\sigma V_p}{\sqrt{\delta N}}, \frac{W^{(j)}}{\sqrt{\delta N}}) - \nu_j^p(\sigma) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & - 3\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\delta N}} \left(\sum_{j=1}^{m} \left| (R_\sigma V_p, W^{(j)}) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (E_4) \end{aligned}$$

Il reste alors à minorer les deux expressions intervenant dans le membre de droite. Or, d'après la relation (E_1), on a, pour tout j dans $\{1, \ldots, m\}$, avec une probabilité supérieure à $1 - \frac{2}{N^4}$:

$$\left| (V_p, R_\sigma W^{(j)}) - \delta(V_p, W^{(j)}) \right| \leqslant \sqrt{20\delta N \log(N)}$$

et cette relation va nous permettre de minorer la première expression à droite dans E_4

$$\left(\sum_{j=1}^{m}\left|(\frac{R_\sigma V_p}{\sqrt{\delta N}},\frac{W^{(j)}}{\sqrt{\delta N}})-\nu_j^p(\sigma)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left\|\left((\frac{R_\sigma V_p}{\sqrt{\delta N}},\frac{W^{(j)}}{\sqrt{\delta N}})-\nu_j^p(\sigma)\right)_{1\leqslant j\leqslant m}\right\|_2$$

$$\geqslant\left\|\left(\delta\frac{(V_p,W^{(j)})}{\delta N}-\nu_j^p(\sigma)\right)_j\right\|_2$$

$$-\left\|\left((\frac{R_\sigma V_p}{\sqrt{\delta N}},\frac{W^{(j)}}{\sqrt{\delta N}})-\delta\frac{(V_p,W^{(j)})}{\delta N}\right)_j\right\|_2$$

$$\geqslant\left(\sum_{j=1}^{m}\left|(\frac{V_p}{\sqrt{N}},\frac{W^{(j)}}{\sqrt{N}})-\nu_j^p(\sigma)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{1}{\delta N}\left(\sum_{j=1}^{m}(\sqrt{20\delta N\log(N)})^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Pour la deuxième expression à droite dans E_4, en utilisant E_1, on a

$$\left(\sum_{j=1}^{m}\left|(V_p,R_\sigma W^{(j)})-\delta(V_p,W^{(j)})\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\sum_{j=1}^{m}(\sqrt{20\delta N\log(N)})^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

soit, d'après l'inégalité triangulaire sur ℓ_2^m :

$$\left(\sum_{j=1}^{m}\left|(V_p,R_\sigma W^{(j)})\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\sum_{j=1}^{m}\left|\delta(V_p,W^{(j)})\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\left(\sum_{j=1}^{m}(\sqrt{20\delta N\log(N)})^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

On peut alors revenir à (E_4) et on a la minoration :

$$M\geqslant(1-\varepsilon)\sqrt{\delta N}\left(\sum_{j=1}^{m}\left|(\frac{V_p}{\sqrt{N}},\frac{W^{(j)}}{\sqrt{N}})-\nu_j^p(\sigma)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}-(1-\varepsilon)\sqrt{\delta N}\sqrt{m}\sqrt{\frac{20\log(N)}{\delta N}}$$

$$-3\sqrt{\frac{\varepsilon\delta}{N}}\left(\sum_{j=1}^{m}\left|(V_p,W^{(j)})\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}-3\sqrt{\frac{\varepsilon}{\delta N}}\sqrt{m}\sqrt{20\delta N\log(N)}$$

$$\geqslant (1-\varepsilon)\sqrt{\delta N}\left(\sum_{j=1}^{m}\left|(\frac{V_p}{\sqrt{N}},\frac{W^{(j)}}{\sqrt{N}})-\nu_j^p(\sigma)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$-3\sqrt{\frac{\varepsilon\delta}{N}}\left(\sum_{j=1}^{m}\left|(V_p,W^{(j)})\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad -((1-\varepsilon)+3\sqrt{\varepsilon})\varepsilon(\sqrt{20\delta N\log(N)})^{\frac{1}{4}}$$

$$\geqslant (1-\varepsilon)\sqrt{\delta N}\left(\sum_{j=1}^{m}\left|(\frac{V_p}{\sqrt{N}},\frac{W^{(j)}}{\sqrt{N}})-\nu_j^p(\sigma)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$-3\sqrt{\frac{\varepsilon\delta}{N}}\left(\sum_{j=1}^{m}\left|(V_p,W^{(j)})\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad -4\varepsilon(\sqrt{20\delta N\log(N)})^{\frac{1}{4}} \qquad (E_5)$$

car on peut supposer $\varepsilon < 1$.

On minore aisément l'expression $\left(\sum_{j=1}^{m}\left|(V_p,W^{(j)})\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ grâce à l'inégalité de Bessel :

$$\left(\sum_{j=1}^{m}\left|(V_p,W^{(j)})\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \|V_p\|_2\left\|W^{(j)}\right\|_2 \leqslant \sqrt{p}\sqrt{N} \leqslant N$$

Il faut désormais minorer l'expression : $\left(\sum_{j=1}^{m}\left|(\frac{V_p}{\sqrt{N}},\frac{W^{(j)}}{\sqrt{N}})-\nu_j^p(\sigma)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Pour cela, on va appliquer le lemme 1 avec la famille $\{b_j\}_{1\leqslant j\leqslant m}$, introduite dans le lemme 8e. Ceci est raisonnable puisqu'on avait établi que $|\Delta_s| \geqslant 2^{s-1}$, c'est à dire que $\{b_j\}_{1\leqslant j\leqslant m}$ vérifie les hypothèses du lemme 1 avec $\beta_0 = \frac{1}{2}$. Par ailleurs, il existe m' dans $\{1,\ldots,r-1\}$ tel que $2^{m'} \leqslant m \leqslant 2^{m'+1}-1$. Ainsi, dès que la famille $\{a_j\}_{1\leqslant j\leqslant 2^{m'}} = \{\nu_j^p(\sigma)\}_{1\leqslant j\leqslant 2^{m'}}$ est inférieure, en norme ℓ_1, à $\frac{(m'-2)}{16}$, on a la minoration :

$$\|a-b\|_2 \geqslant \left(\sum_{j=1}^{2^{m'}}|a_j-b_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant \frac{2^{-8\|a\|_1}}{16}$$

Or la seule information que l'on a sur a est que $\sum_{j=1}^{2^{m'}}|a_j| \leqslant \sum_{j=1}^{m}|a_j| \leqslant U(\sigma)$. Il suffit donc que $U(\sigma)$ soit inférieur à $\frac{(m'-2)}{16}$ pour pouvoir avoir la minoration :

$$\|a-b\|_2 \geqslant \frac{1}{16}\left[2^{-16U(\sigma)} - \frac{1}{m^{\frac{1}{3}}}\right]$$

Etant donné que $m' \geqslant \log_2(m) - 1$, il suffit en fait d'avoir $U(\sigma)$ inférieur à $\frac{(\log_2(m)-3)}{16}$, donc à $\frac{(\log_2(m)-3)}{32}$. Mais, on remarque que dans le cas où $\frac{(\log_2(m)-3)}{32}$ est inférieur à $U(\sigma)$, l'expression $\left[2^{-16U(\sigma)} - \frac{1}{m^{\frac{1}{3}}}\right]$ est négative. Effectivement, cette affirmation est équivalente à $\frac{1}{3}\log_2(m) \leqslant 16U(\sigma)$ or, si on a $U(\sigma) > \frac{(\log_2(m)-3)}{16}$, on a a fortiori : $\left[2^{-16U(\sigma)} - \frac{1}{m^{\frac{1}{3}}}\right] < 0$ dès que $\frac{1}{3X16}\log_2(m) < \frac{(\log_2(m)-3)}{16}$, ce qui est équivalent à $\log_2(m) > 72$. Or, il suffit de choisir m assez grand, c'est à dire $\frac{q}{\log(N)}$ assez grand. Ainsi, on a en fait aucune restriction sur $U(\sigma)$ et la minoration suivante est vraie pour $\frac{q}{\log(N)}$ assez grand :

$$\left(\sum_{j=1}^{m}\left|\left(\frac{V_p}{\sqrt{N}}, \frac{W^{(j)}}{\sqrt{N}}\right) - \nu_j^p(\sigma)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant \frac{1}{16}\left[2^{-16U(\sigma)} - \frac{1}{m^{\frac{1}{3}}}\right]$$

La minoration (E_5) devient donc :

$$\left\|R_\sigma V_p - \sum_{j=1}^{m}\nu_j^p(\sigma)R_\sigma W^{(j)}\right\|_2 \geqslant (1-\varepsilon)\sqrt{\delta N}\frac{1}{16}\left[2^{-16U(\sigma)} - \frac{1}{m^{\frac{1}{3}}}\right] - 3\sqrt{\frac{\varepsilon\delta}{N}}.N$$
$$- 4\varepsilon(\sqrt{20\delta N\log(N)})^{\frac{1}{4}}$$

Cette dernière relation, jumelée avec la relation (E_2), conduit à la relation bilan, qui est vérifiée avec une probabilité supérieure à $1 - \frac{5}{N^3}$:

$$(E)\quad U(\sigma)\left(U(\sigma) + \frac{2}{\varepsilon^2}\right)\sqrt{20\delta N\log(N)} \geqslant (1-\varepsilon)\sqrt{\delta N}\frac{1}{16}\left[2^{-16U(\sigma)} - \frac{1}{m^{\frac{1}{3}}}\right]$$
$$- 3\sqrt{\frac{\varepsilon\delta}{N}}.N - 4\varepsilon(20\delta N\log(N))^{\frac{1}{4}}$$

Il ne reste plus qu'à conclure avec cette seule relation (E) et à vérifier qu'elle implique que $U(\sigma) \geqslant c\log(\frac{q}{\log(N)})$ pour un c convenable. Si $U(\sigma) \geqslant \frac{1}{200}\log(\frac{q}{\log(N)})$, il suffit de prendre $c = \frac{1}{200}$ pour conclure. Ainsi, dans la suite, on suppose $U(\sigma) < \frac{1}{200}\log(\frac{q}{\log(N)})$. On a alors, pour $\frac{q}{\log(N)}$ assez grand : $U(\sigma) \leqslant \frac{1}{54}\left[\frac{3}{8}\log_2(\frac{\delta N}{20\log(N)})\right]$ soit $U(\sigma) \leqslant \frac{1}{54}\log_2(m)$ et on obtient :

$$(E')\qquad U(\sigma)\left(U(\sigma) + \frac{2}{\varepsilon^2}\right)\sqrt{20\delta N\log(N)} \geqslant \frac{\sqrt{\delta N}}{30.2^{16U(\sigma)}} - 4\sqrt{\varepsilon\delta N}$$

si on suppose une fois de plus que $\frac{q}{\log(N)}$ assez grand.

Si $\frac{1}{30.2^{16U(\sigma)}} \leqslant 10\sqrt{\varepsilon}$, on a $U(\sigma) \geqslant \frac{1}{32X16\log(2)}\log(\frac{q}{20\log(N)}) - \frac{4\log(10)}{16\log(2)} \geqslant \frac{1}{800\log(2)}\log(\frac{q}{20\log(N)})$ dès que $\frac{q}{\log(N)}$ assez grand.

Si $\frac{1}{30.2^{16U(\sigma)}} \geqslant 10\sqrt{\varepsilon}$, on a alors :

$$\frac{2}{\varepsilon^2} = 2\left(\frac{q}{20\log(N)}\right)^{\frac{1}{8}} = 2.10^4.30^4.2^{4X16U(\sigma)} \geqslant U(\sigma)$$

Ainsi, la relation (E') devient : $\frac{3}{\varepsilon^2}(20\delta N\log(N))^{\frac{1}{4}} \geqslant \frac{\sqrt{\delta N}}{30.2^{16U(\sigma)}} - 4\sqrt{\varepsilon\delta N}$, ce qui implique :

$$3\left(\frac{q}{20\log(N)}\right)^{\frac{1}{8}}(20\delta N\log(N))^{\frac{1}{4}} \geqslant \frac{\sqrt{\delta N}}{60.2^{16U(\sigma)}}$$

Donc $U(\sigma) \geqslant \frac{1}{180\log(2)}\log(\frac{q}{\log(N)})$, dès que $\frac{q}{\log(N)}$ assez grand.

Ainsi, dans tous les cas, on minore $U(\sigma)$ par une expression de la forme $c\log(\frac{q}{\log(N)})$ avec une probabilité supérieure à $1 - \frac{5}{N^3}$. **La relation $(*)$ est donc établie et le théorème 1 est entièrement démontré.**

Nous pouvons donc passer au résultat équivalent dans le cadre trigonométrique.

Théorème 4.2. *Il existe $b > 0$ tel que pour tout $N \geqslant 2$ et pour tout $q \in \{1, \ldots, N\}$*
Alors

$$\nu\left\{\sigma \in S^q_{2N+1} : U(\sigma - N - 1) \leqslant b\log\left(2 + \frac{q}{\log(2N+1)}\right)\right\} < \frac{1}{N^2}$$

où $\sigma - N - 1$ désigne le translaté de σ par $-(N+1)$.

Preuve : Introduisons le système trigonométrique discret d'ordre N, à savoir les vecteurs $\varphi_k = \{\varphi_{k,j}\}_{-N\leqslant j\leqslant N}$ pour $-N \leqslant k \leqslant N$ où $\varphi_{k,j} = \exp(\frac{2ikj\pi}{2N+1})$. On pose également $V_p = (\underbrace{0,\ldots,0}_{N-p},\underbrace{1,\ldots,1}_{2p+1},0,\ldots,0)$. Enfin, on désignera par Φ la matrice de Fourier de terme générique $\varphi_{k,j}$. Ses vecteurs colonnes, qui sont en fait encore les vecteurs φ_j (car on remarque que la matrice Φ est trivialement symétrique) , sont orthogonaux.

La preuve repose essentiellement sur les mêmes calculs que dans le cas du système de Walsh, du moins tant que l'on s'interesse uniquement au cas discret, c'est à dire tant que l'on fait de l'analyse de Fourier sur le groupe $\mathbb{Z}/(2N+1)\mathbb{Z}$ et que l'on remplace donc les fonctions de Walsh par les caractères : $\widetilde{w_j}(x) = \exp(\frac{2ij\pi x}{2N+1})$ où x varie dans $\{-N,\dots,N\}$, c'est à dire décrit les représentants de $\mathbb{Z}/(2N+1)\mathbb{Z}$ (l'addition se faisant sans ambigüité modulo $2N+1$). De plus, on fera varier les indices entre $-N$ et N et non plus entre 1 et N. Enfin, on fera bien attention au fait que désormais le corps de base est $\mathbb{C}$ et non plus $\mathbb{R}$.

Précisons cela en établissant dans quelle mesure les résultats précédents restent valables.

On remarque tout d'abord que la différence ne peut se situer qu'à partir du moment où la définition du système considéré intervient. Ainsi, les lemmes $1,\dots,4$ restent valables et c'est à partir du lemme 5 que la structure de Walsh intervient. Il suffit de prendre τ nul pour obtenir la première inégalité. L'autre inégalité se fait formellemnt de la même manière puisqu'on opère simplement une translation sur le groupe. Quant au lemme 6, il suffit essentiellement de vérifier si la condition $|(z,\varphi_j)| \leqslant 1$ pour tout j dans $\{-N,\dots,N\}$ implique encore la majoration $\left\| \sum_{k=-N}^{N} z_k\widetilde{w_k} \right\|_\infty \leqslant 1$. Or, ceci est trivial dès que l'on traduit la condition par $\left| \sum_{k=-N}^{N} z_k\varphi_{k,j} \right| = \left| \sum_{k=-N}^{N} z_k\widetilde{w_k}(j) \right| \leqslant 1$, pour tout j dans $\{-N,\dots,N\}$. Il va sans dire que les lemmes 7a et 7b restent tels quels. Il reste à étudier le cas délicat des lemmes 8 dont les majorations qui en résultent servent dans la démonstration de la fameuse relation $(*)$. Etudions-les de plus près :

Lemme 8bis : *On a, pour tout j non nul dans $\{-N,\dots,N\}$ et pour tout p dans $\{1,\dots,N\}$:*

$$|(V_p,\varphi_j)| \leqslant \frac{2N+1}{2|j|}$$

Preuve : En effet, on remarque que, en fait : $(V_p,\varphi_j) = D_p(\frac{2j\pi}{2N+1})$ où D_p est le $p^{ième}$ noyau de Dirichlet. Ainsi, on a la majoration :

$$|(V_p,\varphi_j)| = \left| \frac{\sin(\frac{2j\pi(2p+1)}{2(2N+1)})}{\sin(\frac{2j\pi}{2(2N+1)})} \right| \leqslant \frac{2N+1}{2|j|}$$

puisque $\left|(\frac{2j\pi}{2(2N+1)})\right| \leqslant \frac{\pi}{2}$ et que sur l'intervalle $[0,\frac{\pi}{2}]$, on a l'inégalité : $\sin(x) \geqslant \frac{2x}{\pi}$. Le lemme est donc établi.

Lemme 8ter : *En introduisant les ensembles Δ_s comme dans le lemme1 et le lemme 8e, associés cette fois aux $b_j = \left|\frac{(V_p,\varphi_j)}{2N+1}\right|$, en prenant $p = \frac{N}{2}$, on a une* *nouvelle minoration de leur cardinal* :$|\Delta_s| \geqslant \frac{1}{59}2^s$, *si* s *varie dans* $\{16,\dots,r-1\}$, *en supposant que* N *s'écrive* 2^r.

Preuve : Fixons s dans $\{1,\dots,r-1\}$ et choisissons $|j|$ dans $\{2^{s-1},\dots,2^s\}$ à priori. On a déjà la majoration $|b_j| \leqslant \frac{1}{2^s}$ d'après le lemme précédent. Il s'agit maintenant de minorer $|b_j|$. Pour cela, commençons par effectuer la division euclidienne de $N|j|$ par $2N+1$. Elle s'écrit : $N|j| = q(2N+1)+t$, avec $0 \leqslant t < 2N+1$. Dès lors, on obtient :

$$\begin{aligned}(V_p,\varphi_j) =& D_p(\frac{2j\pi}{2N+1})\\ =& \left|\frac{\sin(\frac{t\pi}{(2N+1)})}{\sin(\frac{|j|\pi}{(2N+1)})}\right| \geqslant \frac{\alpha(2N+1)}{|j|\pi}\end{aligned}$$

dès que $\pi-\theta \geqslant \frac{t\pi}{(2N+1)} \geqslant \theta$ où $0<\sin(\theta)=\alpha<1$. On obtient donc : $b_j > \frac{1}{2^{s+1}}$ à partir du moment où $\frac{|j|\pi}{\alpha} < 2^{s+1}$, c'est à dire à partir du moment où $|j| < 2^s(\frac{2\alpha}{\pi})$. Donc, dans la suite, on affine notre choix de $|j|$ à l'intervalle $[2^{s-1}, 2^{s-1}(\frac{4\alpha}{\pi})[\cap\mathbb{N}$ et on choisira bien sûr $\alpha > \frac{\pi}{4}$. De plus, on impose également que le reste de la division euclidienne t soit élément de $[(2N+1)\frac{\pi-\theta}{\pi},(2N+1)\frac{\theta}{\pi}]$. Ainsi, on va imposer à $|j|$ d'appartenir aux intervalles correspondant, c'est à dire :

$$\bigcup_{q\in\{0,\dots,\frac{N}{2}-1\}} \underbrace{\left[(2N+1)\frac{\theta}{N\pi}+q\frac{2N+1}{N},(2N+1)\frac{\pi-\theta}{N\pi}+q\frac{2N+1}{N}\right]}_{I_q}$$

On remarque qu'il s'agit d'une union disjointe. Il faut maintenant compter le nombre de tels entiers j :

Soit q_1, le plus grand q tel que $2^{s-1}(\frac{4\alpha}{\pi}) > (2N+1)\frac{\pi-\theta}{N\pi}+q\frac{2N+1}{N}$ et q_2, le plus petit q tel que $2^{s-1} \leqslant (2N+1)\frac{\theta}{N\pi}+q\frac{2N+1}{N}$.

On compte les intervalles I_q que l'on peut insérer dans $[2^{s-1},2^{s-1}(\frac{4\alpha}{\pi})[\cap\mathbb{N}$: il y en a $(q_1-q_2)(2N+1)\frac{\pi-\theta}{N\pi}$ et on a alors une minoration de $|\Delta_s|$ que nous allons préciser :

On a par définition de q_1 : $q_1 \geqslant 2^{s-1}(\frac{4\alpha}{\pi})\frac{N}{2N+1}+\frac{(-\pi+\theta)}{\pi}-1$
et par définition de q_2 : $q_2 \leqslant 2^{s-1}\frac{N}{2N+1}+\frac{(-\theta)}{\pi}+1$.

$$\begin{aligned}\text{Ainsi,}\qquad |\Delta_s| \geqslant& \left[2^{s-1}(\frac{4\alpha}{\pi}-1)\frac{N}{2N+1}+\frac{(2\theta)}{\pi}-3\right]\frac{(\pi-2\theta)}{\pi}\frac{(2N+1)}{N}\\ \geqslant& 2^{s-1}(\frac{4\alpha}{\pi}-1)\frac{(\pi-2\theta)}{\pi}+\frac{(2N+1)(\pi-2\theta)(2\theta-3\pi)}{N\pi^2}\end{aligned}$$

En choisissant finalement $\theta = \frac{\pi}{3}$ et donc $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, on obtient :

$$\begin{aligned} |\Delta_s| &\geqslant \frac{2^{s-1}}{3}\left(\frac{2\sqrt{3}}{\pi} - 1\right) + \frac{-7(2N+1)}{9N} \\ &\geqslant \frac{2^{s-1}}{3}\left(\frac{2\sqrt{3}}{\pi} - 1\right) - \frac{7}{3} \geqslant \frac{1}{59}2^s \end{aligned}$$

dès que s est supérieur à 16. Le lemme est donc démontré.

Tout ceci permet donc de conclure dans le cas discret et on a le résultat suivant : il existe $c > 0$ tel que $\nu\{A\} > 1 - \frac{1}{N^2}$, où A est l'ensemble des parties σ de S^q_{2N+1} telles qu'il existe $(a_k)_{-N \leqslant k \leqslant N}$ avec $supp(\{a_k\}) \subset \sigma - N - 1$ et p vérifiant les relations $\left\| \sum_{j=-N}^{N} a_j \widetilde{w_j} \right\|_\infty = 1$ et $\left\| \sum_{j=-p}^{p} a_j \widetilde{w_j} \right\|_\infty \geqslant c \log\left(2 + \frac{q}{\log(2N+1)}\right)$.

Il nous reste enfin à conclure le cas continu. Pour σ, élément de A, on pose : $t^\sigma = \sum_{k=-N}^{N} a_k e_k$ et $T^\sigma = V_p * t^\sigma$ où V_p désigne le $p^{ième}$ noyau de De La Vallée Poussin. On a, d'une part, d'après les propriétés du produit de convolution : $\|T^\sigma\|_\infty \leqslant \|V_p\|_1 \|t^\sigma\|_\infty$ et il est de notoriété publique que $\|V_p\|_1 \leqslant 3$. D'autre part, on majore $\|t^\sigma\|_\infty$ de la façon suivante : t^σ est continu sur le compact $[0,1]$ donc atteint sa borne supérieure en un certain point : u. Il existe alors un entier k tel que u soit dans l'intervalle $[\frac{k-1}{2N+1}, \frac{k}{2N+1}]$. On a alors :

$$\begin{aligned} \left| t^\sigma(u) - t^\sigma\left(\frac{k}{2N+1}\right) \right| &\leqslant \frac{1}{2N+1} \|t^{\sigma\prime}\|_\infty \\ &\leqslant \frac{1}{2N+1} N \|t^\sigma\|_\infty \quad \text{d'après l'inégalité de Bernstein} \\ &\leqslant \frac{1}{2} |t^\sigma(u)| \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient la majoration : $|t^\sigma(u)| \leqslant 2 \left| t^\sigma\left(\frac{k}{2N+1}\right) \right| \leqslant 2$ puisque σ, étant élément de A, on a : $\left\| \sum_{j=-N}^{N} a_j \varphi_j \right\|_\infty = \left\| \sum_{j=-N}^{N} a_j \widetilde{w_j} \right\|_\infty = 1$

On a donc majoré T^σ par 6 uniformément sur $[0,1]$. Minorons maintenant $\left\| \sum_{k=-p}^{p} \widehat{T^\sigma}(k) e_k \right\|_\infty$ Or, sachant que $\widehat{V_p}(k) = 1$ si $-p \leqslant k \leqslant p$ et en utilisant à nouveau les propriétés du produit de convolution, on aboutit à la minoration :

$$\left\| \sum_{k=-p}^{p} \widehat{T^\sigma}(k) e_k \right\|_\infty = \left\| \sum_{k=-p}^{p} a_k e_k \right\|_\infty \geqslant \left\| \sum_{k=-p}^{p} a_k \widetilde{w_k} \right\|_\infty$$

car cela revient à restreindre la borne supérieure sur $[0,1]$ aux valeurs discrètes $\frac{j}{2N+1}$. Ainsi, puisque σ est dans A, on a la minoration :

$$\left\| \sum_{k=-p}^{p} \widehat{T^{\sigma}}(k) e_k \right\|_{\infty} \geqslant c \log\left(2 + \frac{q}{\log(N)}\right)$$

La définition de $U(\sigma)$ implique alors, avec une probabilité supérieure à $1 - \frac{1}{N^2}$:

$$\begin{aligned} U(\sigma) &\geqslant \frac{\left\| \sum_{k=-p}^{p} a_k e_k \right\|_{\infty}}{\left\| \sum_{k=-N}^{N} a_k e_k \right\|_{\infty}} \\ &\geqslant \frac{c}{6} \log\left(2 + \frac{q}{\log(N)}\right) \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration de ce théorème.

Résultats complémentaires et Questions ouvertes

Résultats complémentaires :

Nous nous proposons ici de présenter d'autres résultats liés aux ensembles de convergence uniforme. Avant cela, nous allons rappeler quelques définitions et notations :

Définitions :

i) Etant donné un entier N, on dit qu'une partie P de $\mathbb{Z}$ est un parallelépipède de dimension N si P a exactement 2^N éléments et peut être représenté sous la forme $P_1 + \ldots + P_N$ où les P_k sont constitués de deux éléments.

ii) On dit que deux parties Q et R de $\mathbb{Z}$ forment une paire alternée de taille N si elles ont toutes les deux N éléments notés $\{q_n\}_{1\leqslant n\leqslant N}$ et $\{r_n\}_{1\leqslant n\leqslant N}$ (on les suppose rangés dans l'ordre croissant) qui vérifient : $q_2 - q_1 \leqslant r_2 - r_1 < q_3 - q_1 \leqslant r_3 - r_1 < \ldots$

iii) $A(\mathbb{T})$ est l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{T}$ dont la série de Fourier converge absolument, muni de la norme $\|f\|_A = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\hat{f}(n)\right|$. Si E est fermé dans $\mathbb{T}$, $A(E)$ est l'espace quotient $A(\mathbb{T})/k(E)$ où $k(E)$ est l'ensemble des éléments de $A(\mathbb{T})$ dont le support est inclus dans le complémentaire de E. $A'(\mathbb{T})$ désigne le dual de $A(\mathbb{T})$: c'est l'espace des distributions dont la norme $\|T\|_{A'} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \left|\hat{T}(n)\right|$ est finie : on les appelle pseudomesures.

iv) Etant donné $E \subset \mathbb{T}$ et $\Lambda \subset \mathbb{Z}$, on dit que E contient des progressions arbitrairement longues de Λ si pour tout couple d'entiers (M, N), avec $M \leqslant N$, il existe a, b (b non nul) dans $\mathbb{T}$ tels que $\{a + \lambda b : \lambda \in \Lambda \text{ et } M \leqslant \lambda \leqslant N\}$ soit inclus dans E.

v) Une partie S de $\mathbb{Z}$ dont le complémentaire est infini est appelée ensemble de continuité si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que toute mesure μ dans la boule unité de $M(\mathbb{T})$ vérifie :

$$\limsup_{n\in\mathbb{Z}\setminus S} |\hat{\mu}(n)| < \delta \text{ implique } \limsup_{n\in S} |\hat{\mu}(n)| < \varepsilon$$

Notation : *Etant donnée une partie fermée E de $\mathbb{T}$ totalement discontinue, on note $\{I_k\}$ l'ensemble (dénombrable) des composantes connexes de $\mathbb{T} \setminus E$. Pour j différent de k, on note E_j^k le sous-ensemble de E formé des éléments rencontrés* *lorsqu'on parcourt* T *(non plus égal à* $\mathsf{R}/2\pi\mathsf{Z}$ *mais identifié à* S^1*) dans le sens trigonométrique de* I_j *à* I_k *et on désigne alors par* $h_{j,k}$ *une fonction* C^∞ *sur* T *égale à 1 sur un voisinage de* E_j^k *et 0 sur un voisinage de* E_k^j.

Théorème : (cf. [12]) *Soit E une partie fermée de* T *totalement discontinue et* $\{h_{j,k}\}$ *une famille définie comme ci-dessus telle que, de plus,* $\sup\limits_{j,k} \|h_{j,k}\|_{A(E)} < +\infty$. *Soit* Λ *une partie de* Z *telle que* E *contienne des progressions arbitrairement longues de* Λ. *Alors* Λ *est un ensemble de convergence complètement uniforme.*

De plus, la réciproque est vraie : étant donné un ensemble de convergence complètement uniforme Λ *de* Z, *il existe une partie fermée* E *de* T *et une famille d'applications* $\{h_{j,k}\}$ *définies comme ci-dessus telles que* E *contienne des progressions arbitrairement longues de* Λ.

Remarque : *Une condition équivalente sur* E *consiste à supposer que toute fonction absolument continue sur* E *est dans* $A(E)$ *(on trouvera une preuve de ce fait dans* [12]*).*

Preuve : On note $C = \sup\limits_{j,k} \|h_{j,k}\|_{A(E)}$. On fixe deux entiers N et M. Soit n un entier tel que $n > \max\{|M|, |N|\}$. Par hypothèse, il existe a et b tels que $F_n = \{a+\lambda b : \lambda \in \Lambda \text{ et } -n \leqslant \lambda \leqslant n\}$ soit inclus dans E. On considère une mesure μ de $M(F_n)$ qui s'écrit donc sous la forme :

$$\mu = \sum_{\substack{\lambda\in\Lambda \\ |\lambda|\leqslant n}} c_\lambda \delta_{a+\lambda b}$$

Soit I_p et I_q deux composantes connexes de $\mathsf{T}\backslash E$ qui séparent $F_{M,N} = \{a+\lambda b : \lambda \in \Lambda \text{ et } M \leqslant \lambda \leqslant N\}$ du reste de F_n. Alors

$$\int_{\mathsf{T}} h_{p,q} d\mu = \sum_{\substack{\lambda\in\Lambda \\ -n\leqslant\lambda\leqslant n}} c_\lambda \int_{\mathsf{T}} \delta_{a+\lambda b} d\mu = \sum_{\substack{\lambda\in\Lambda \\ -n\leqslant\lambda\leqslant n}} c_\lambda 1_{[M,N]}(\lambda) = \sum_{\substack{\lambda\in\Lambda \\ M\leqslant\lambda\leqslant N}} c_\lambda$$

donc, on a la majoration :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{\substack{\lambda\in\Lambda \\ M\leqslant\lambda\leqslant N}} c_\lambda\right| &\leqslant C\,\|\mu\|_{\mathcal{M}} \\
&\leqslant C \sup_{k\in\mathsf{Z}} \left|\sum_{\substack{\lambda\in\Lambda \\ |\lambda|\leqslant n}} c_\lambda \exp(ik\lambda b)\right| \\
&\leqslant C \sup_{x\in\mathsf{R}} \left|\sum_{\substack{\lambda\in\Lambda \\ |\lambda|\leqslant n}} c_\lambda \exp(i\lambda x)\right|
\end{aligned}$$

Si on se donne un polynôme P à spectre dans Λ, on obtient donc la majoration :

$$\left| \sum_{\substack{\lambda\in\Lambda \\ M\leqslant\lambda\leqslant N}} \hat{P}(\lambda) \right| \leqslant C\,\|P\|_\infty$$

On prolonge l'application qui à f associe $\sum_{\substack{\lambda\in\Lambda \\ M\leqslant\lambda\leqslant N}} \hat{P}(\lambda)$ de $\mathcal{P}_\Lambda$ à C_Λ en appliquant le théorème de Hahn-Banach. On récolte alors par dualité une mesure $\mu_{M,N}$ qui vaut 1 sur $\Lambda\cap[M,N]$ et s'annule sur $\Lambda\setminus[M,N]$. Donc Λ est un ensemble de convergence complètement uniforme.

Quant à la réciproque, il suffit de considérer une fonction de type trapézoïdal (cf [14]) : on se donne δ et ε tels que $0<\delta<\varepsilon<\pi$ et on définit pour x dans $\mathbb{T}$

$$V_{x,\delta,\varepsilon}(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x-y|\leqslant\delta \\ 0 & \text{si } |x-y|\geqslant\varepsilon \\ \frac{\varepsilon-|x-y|}{\varepsilon-\delta} & \text{si } \delta<|x-y|<\varepsilon \end{cases}$$

qui a une norme$-A$ inférieure à $\sqrt{\frac{\varepsilon+\delta}{\varepsilon-\delta}}$. On considère alors $a_n=\frac{3}{4^{n+1}}$ et $b_n\leqslant\frac{1}{2n4^n}$ puis l'ensemble :

$$E=\{0\}\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}\{a_n+\lambda b_n : \lambda\in\Lambda \text{ et } -n\leqslant\lambda\, n\} \qquad \text{qui est fermé dans } \mathbb{T}.$$

On montre alors (cf [12]) que cet ensembl‿ convient.

Nous citons quelques résultats dont on peut trouver les preuves dans [12].

Théorème : *Si E est un ensemble de convergence uniforme alors $\mathbb{Z}^-\cup E$ est un ensemble de continuité.*

Théorème : *Soit E un ensemble de convergence uniforme. Il existe un entier N tel que E ne contienne pas de parallelépipède de dimension N. De plus, si E est inclus dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}^-$, il existe M tel que E ne contienne pas $Q-R$ où (Q,R) est une paire alternée de taille M.*

Remarque : *Si on considère H une suite de Hadamard avec une lacunarité forte (par exemple :$H=\{3^n\}_{n\in\mathbb{N}}$), on sait que $H-H$ est un ensemble de convergence uniforme donc un ensemble de convergence uniforme peut très bien contenir des différences arbitrairement grande de paires alternées. Le théorème précédent montre que c'est impossible si l'ensemble est inclus dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}^-$.*

Nous rappelons sans démonstration quelques conditions arithmétiques connues relatives aux ensembles de Sidon :

On a déjà rappelé la condition de maille de J.P. Kahane (voir p.8). On sait caractériser les ensembles de Sidon du groupe $G = \prod_{j=1}^{\infty} \mathbb{Z}/p_j\mathbb{Z}$ (où $(p_j)_{j\geqslant 1}$ est une suite bornée d'entiers) par la condition nécessaire et suffisante : Λ est un Sidon si et seulement si il existe K tel que pour tout sous groupe fini H de Γ : $|\Lambda \cap H| \leqslant Krg(H)$. (le rang de H, noté $rg(H)$, est le plus petit nombre de générateurs de H). En général, on ne sait pas établir la réciproque du résultat de Kahane pour un ensemble de Sidon mais G. Pisier (cf. [11]) a montré que si $|\Lambda \cap [B]| \leqslant K\,|B|$, pour toute partie quasi-indépendante finie B de Λ, où $[B]$ désigne l'ensemble des $\sum_{\gamma\in B} \alpha_\gamma\gamma$, avec $\alpha_\gamma \in \{-1, 0, 1\}$, alors Λ est un ensemble de Sidon. Notons que cette condition est plus forte que la condition des mailles correspondante : $|\Lambda \cap [B]| \leqslant K\,|B|\,(1 + \log(1 + |B|))$. Ainsi, les conditions arithmétiques liées aux ensembles de Sidon ne sont pas encore bien élucidées.

Questions ouvertes :

i) On sait majorer trivialement la constante de convergence uniforme $U(\Lambda)$ par la constante de Sidon $S(\Lambda)$. Mais, on n'en sait pas plus, un des problèmes ouverts est justement de trouver un lien entre les deux. Même dans le cas d'un ensemble fini, la relation entre les deux n'est pas claire.

ii) Est-ce qu'un ensemble qui satisfait la condition des mailles est un ensemble de Sidon ?

iii) Peut-on généraliser les conditions arithmétiques pour les classes UC et CUC ? Plus précisément, il s'agit de trouver des conditions du type "condition des mailles".

iv) Peut-on trouver des ensembles de convergence uniforme de densité plus grande que $log(N)^s$ pour tout s (voir exemple p.18) ?

v) Quelles sont les relations entre les ensembles UC et les ensembles $\Lambda(p)$ (voir à ce propos l'article [2]) ?

Remerciements :

Je tiens à remercier Myriam Déchamps et Hervé Queffelec pour leur disponibilité et pour m'avoir éclairé tout au long de cette rédaction de leurs conseils.

P. Lefevre.

Bibliographie

[1] **J.J.F Fournier.** *Two UC-sets whose union is not a UC-set* Proc. of the AMS, 84 (1982) 69-72

[2] **Fournier, Pigno.** *Analytic and arithmetic properties of thin sets* Pacific J.Math., 105 (1983) 115-141

[3] **Hewitt, Ross.** *Abstract Harmonic Analysis II* Springer Verlag, 152 (1970)

[4] **J.P. Kahane.** *Some random series of functions (second edition)* Cambridge Studies in Advanced Math., 5 (1985)

[5] **B.S. Kashin, A.A. Saakyan.** *Orthogonal series* AMS translations of Math. monographs, 75 (1989)

[6] **B. Kashin, L. Tzafriri.** *On random sets of uniform convergence* Preprint, (1993)

[7] **J.M. Lopez, K.A. Ross.** *Sidon sets* Marcel Dekker, 13 (1975)

[8] **K.I. Oskolkov.** *On spectra of uniform convergence* Dokl. Acad. Nauk. SSSR, 228 (1986) 54-58

[9] **K.I. Oskolkov, G.I. Arkhipov.** *On a special trigonometric series and its applications* Mathem. Sbornik., 134 (1987) 145-155

[10] **L. Pedemonte.** *Sets of uniform convergence* Colloq. Math., 33 (1975) 122-132

[11] **G. Pisier.** *Nouvelles caractérisations des ensembles de Sidon* Mathematical Analysis and Applications-Academic Press, (7B)

[12] **F. Ricci.** *A multiplicative structure on some spaces of pseudomeasures on the circle and related properties* Bull.Sci.Math., 103 (1979) 423-434

[13] **W. Rudin.** *Functionnal Analysis* Mac Graw Hill (second edition), (1991)

[14] **W. Rudin.** *Fourier analysis on groups* Wiley. (1962)

[15] **W. Rudin.** *Trigonometric series with gaps* J. Math. Mech., 9 (1960) 203-227

[16] **G.Travaglini, P.M. Soardi.** *On sets of completely uniform convergence* Colloq. Math., **45** (1981) 317-320

[17] **G. Travaglini.** *Some properties of UC sets* Bol. Unione Math. Ital., **15B** (1978) 272-284

[18] **P.L Ul'yanov.** *Some questions in the theory of orthogonal and biorthogonal series (Russe)* Izv. Acad. Nauk. Azerbaidzhan, **N6** (1965) 11-13

[19] **I.M. Vinogradov.** *The method of trigonometric sums in number theory (Selected Works)* Springer Verlag, (1985)

[20] **P.Wojtaszczyk.** *Banach Spaces for Analysts* Cambridge Studies in Advanced Math., **25** (1991)

[21] **A. Zygmund.** *Trigonometric series* Cambridge, (1959)

Inversibilité Restreinte, Problème d'Extension de Kadison-Singer et Applications à l'Analyse Harmonique

Par P. Jaming

d'après J. Bourgain et L. Tzafriri

Résumé

Le principal problème abordé ici est celui d'inversibilité restreinte de matrices $n \times n$. Les démonstrations utilisent des outils d'analyse fonctionnelle, probabilistes et combinatoires.

Ces résultats nous mèneront à des applications intéressantes en analyse harmonique. En particulier, nous établirons l'existence d'une constante $c > 0$ telle que pour toute partie B de $\mathbb{T}$, de mesure positive, il existe une partie $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ de densité positive, telle que pour toute fonction f à spectre dans Λ, on a

$$\left(\int_B |f|^2 \, d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant c\sqrt{\mu(B)}\,\|f\|_2 \,.$$

Enfin, nous ferons le lien entre les théorèmes d'inversibilité restreinte et le problème d'extension de Kadison-Singer.

Abstract

The main problem investigated her is that of restricted invertibility of $n \times n$ matrices. The prooves use functional analytic, probabilistic and combinatoric tools.

This results will lead us too interresting harmonic analysis applications. For instance, we will establish the existence of a constant $c > 0$ such that, for all $B \subset \mathbb{T}$ of positive measure, there exists a set $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ of positive density, such that, for every function f whose Fourier transform $\hat{f}$ is supported by Λ, we have :

$$\left(\int_B |f|^2 \, d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant c\sqrt{\mu(B)}\,\|f\|_2 \,.$$

Finely, we will link restricted invertibility to the Kadison-Singer extension property.

Mots clés : inversibilité restreinte, sélection probabiliste, théorème de factorisation de Pietsch, ensembles associés, systèmes hilbertiens, problème d'extension de Kadison-Singer, pavage.

Key words : restricted invertibility, probabilistic selection, Pietsch factorisation theorem, sets of isomorphism, hilbertien systems, Kadison-Singer extension property, paving.

Code matière AMS (1991) : 05A18, 05A20, 42A55, 46B15, 46L30, 47A05, 47A68, 60E15.

Sommaire

Introduction

Le thème de ce mémoire est principalement de montrer que, pour certaines classes de matrices, considérées comme des opérateurs linéaires sur un espace euclidien il est possible d'extraire une "grande" sous-matrice qui soit de plus inversible. Dans ce contexte, l'inversibilité ne doit pas être considérée dans son sens algébrique, mais il s'agit plutôt de montrer que la norme des inverses des sous-matrices est majorée par une constante indépendante de la dimension de l'espace euclidien considéré. L'intérêt de ce type de résultat réside évidemment dans ses applications, en particulier à l'analyse harmonique et à le géométrie des espaces de Banach. Nous nous intéresserons essentiellemnt aux retombées en analyse harmonique.

La première partie de ce mémoire, inspirée largement de [3], étudie le cas des matrices dont toutes les colonnes sont de norme 1.

Dans un premier paragraphe, on démontrera un théorème d'inversion pour cette classe de matrices. Les méthodes utilisées ici allient une sélection probabiliste à un argument combinatoire, après quoi, un argument de factorisation nous permettra de conclure.

Le second paragraphe sera consacre à une application de ce théorème à l'analyse harmonique :

On dit qu'une partie Λ de $\mathbb{Z}$ est de densité positive si la suite $\dfrac{|\Lambda \cap \{1,\ldots,n\}|}{n}$ a une limite strictement positive quand n tend vers l'infini.

Notations : $\mathbb{T}$ *désigne le cercle unité de* $\mathbb{C}$ *identifié à* $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, μ *est la mesure de Lebesgue normalisée sur* $\mathbb{T}$: $\mu = \frac{d\theta}{2\pi}$, *où* θ *est la mesure de Lebesgue sur* $[0, 2\pi[$

Pour $1 \leqslant p < \infty$ *et* $\Lambda \subset \mathbb{Z}$, $L^p_\Lambda(\mathbb{T}, \mu)$ *désigne la fermeture de l'espace vectoriel engendré par* $\{e^{inx}\}_{n\in\Lambda}$ *dans* $L^p(\mathbb{T}, \mu)$

Définition : $B \subset \mathbb{T}$ *est dit associé à une partie* Λ *de* $\mathbb{Z}$ *en norme* L^p *(on dit aussi que* B *est associé à* L^p_Λ*) s'il existe une constante* $c > 0$ *telle que pour toute fonction* f *de* $L^p_\Lambda(\mathbb{T}, \mu)$,

$$\|f\chi_B\|_p \geqslant c\|f\|_p$$

Jean-Pierre Kahane avait montré que tout intervalle était associé en norme L_2 à une suite de densité nulle. Dans la plupart des travaux qui ont suivi, lorsqu'on a considéré des sous-ensembles Λ de $\mathbb{T}$ plus minces que des intervalles, les parties Λ de $\mathbb{Z}$ associées à B étaient généralement très lacunaires, en particulier, de densité nulle. Nous montrerons ici, à l'aide du théorème d'inversibilité restreinte et d'un résultat combinatoire dû à Ruzsa, qu'en fait toute partie B de T, de mesure positive, est associée en norme L_2 à une suite de densité positive. Ce résultat est d'autant plus remarquable que nous montrerons qu'il n'est plus vrai dans le cas des normes L_p avec $p > 2$.

Le troisième paragraphe est consacré à une généralisation de ce théorème au cas des systèmes hilbertiens. Néanmoins, nous ne pourons plus obtenir ici qu'une densité supérieure positive.

Dans la deuxième partie, principalement issue de [5] et de [16], nous aborderons un problème provenant de la théorie des C^*-algèbres dû à Kadison et Singer

Dans un premier temps, nous énoncerons la conjecture de Kadison-Singer, non sans avoir d'abord rappelé les notions de C^*-algèbre utilisées. Nous passerons très vite à des formulations équivalentes appelées propriétés de pavage, ne traitant plus que de la théorie des opérateurs dans un espace de Hilbert. Nous montrerons ensuite que les propriétés de pavage sont vérifiées pour certaines sous classes de la classe des opérateurs de Laurent. Enfin, nous chercherons également à montrer l'intérêt des conjectures à travers trois exemples d'applications.

La plupart des démonstrations de cette partie, qui se veut simplement introductive au problème de Kadison-Singer, ne seront pas données, mais dans une large mesure, des références seront indiquées.

Dans le chapitre suivant nous donnerons la démonstration d'un second théorème d'inversibilité restreinte, concernant cette fois-ci des matrices n'ayant que des 0 sur la diagonale, et qui, comme le premier théorème, constitura une solution partielle au problème de pavage.

Les techniques utilisées sont essentiellement de même nature que dans le premier chapitre, néanmoins, les outils probabilistes intervenant ici sont plus complexes, ce qui permet d'obtenir des constantes optimales.

Enfin, en guise de conclusion, nous donnerons quelques perspectives sur des résultats proches, à savoir le cas des matrices rectangulaires et les problèmes d'inversibilité restreinte et de pavage dans des espaces non euclidiens.

Première Partie

Un Premier Théorème d'Inversion Restreinte et Applications à l'Analyse Harmonique

1
Un théorème d'inversibilité restreinte

Nous allons ici considérer des opérateurs $T : \ell_2^n \mapsto \ell_2^n$ tels que pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\|Te_i\| = 1$, et comparer les résultats algébrique (i.e. le rang) et analytique.

1.1 Le résultat algébrique

Rappel : Pour un opérateur $T : \ell_2^n \mapsto \ell_2^n$, la norme Hilbert-Schmidt de T, *i.e.* $\|T\|_{H.S.}^2 = \sum_{i=1}^{n} \|Te_i\|^2$ ne dépend pas de la base orthonormale choisie :

En effet : soient $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ deux bases orthonormales de ℓ_2^n, alors :

$$\begin{aligned}
\|T\|^2 = \textstyle\sum_{i=1}^n \|Te_i\|^2 &= \textstyle\sum_{i,j=1}^n |< Te_i, \varepsilon_j >|^2 &&= \textstyle\sum_{i,j=1}^n |< T^*\varepsilon_j, e_i >|^2 \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^n \|T^*\varepsilon_j\|^2 &&= \textstyle\sum_{i,j=1}^n |< T^*\varepsilon_j, \varepsilon_i >|^2 \\
&= \textstyle\sum_{i,j=1}^n |< T\varepsilon_i, \varepsilon_j >|^2 &&= \textstyle\sum_{i=1}^n \|T\varepsilon_i\|^2
\end{aligned}$$

Proposition 1.1. *Soit un opérateur $T : \ell_2^n \mapsto \ell_2^n$ tel que pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\|Te_i\| = 1$. Alors*

$$rg\, T \geqslant \frac{n}{\|T\|^2}$$

Preuve : Soit donc un opérateur $T : \ell_2^n \mapsto \ell_2^n$ et posons $k = rg\, T$. Soit $(\varepsilon_{n-k+1}, \ldots, \varepsilon_n)$ une base orthonormale de $Ker\, T$ qu'on complète en une base orthonormale $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-k}, \varepsilon_{n-k+1}, \ldots, \varepsilon_n)$ de ℓ_2^n. On a :

$$n = \sum_{i=1}^{n} \|Te_i\|^2 = \|T\|_{H.S.}^2 = \sum_{i=1}^{n} \|T\varepsilon_i\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \|T\varepsilon_i\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{k} \|T\|^2 \, \|\varepsilon_i\|^2$$
$$= k \, \|T\|^2 .$$

On a donc bien $rg\, T \geqslant \frac{n}{\|T\|^2}$

Remarque : Cette inégalité est optimale au sens que pour tout k il existe n aussi grand qu'on veut et un opérateur $T : \ell_2^n \mapsto \ell_2^n$ de rang k pour lequel l'inégalité ci-dessus est en fait une égalité.

En effet : soient k et m deux entiers, soit $n = mk$ et définissons $T : \ell_2^n \mapsto \ell_2^n$ par

$$Te_{i+jk} = e_i \quad , \quad 1 \leqslant i \leqslant k \quad , \quad 0 \leqslant j \leqslant m-1$$

Clairement $rg\, T = k$.

Mais si $x = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_{i+jk} e_{i+jk}$ alors $Tx = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=0}^{m-1} \lambda_{i+jk} \right) e_i$

donc

$$\|Tx\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \left| \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_{i+jk} \right|^2 \leqslant m \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=^}^{m-1} |\lambda_{i+jk}|^2 = m \|x\|^2$$

i.e. $\|T\| \leqslant \sqrt{m}$

D'autre part $\|T(e_1 + \ldots + e_n)\|^2 = \|m(e_1 + \ldots + e_k)\|^2 = m^2 k = mn = m \|(e_1 + \ldots + e_n)\|^2$

Donc $\|T\| = \sqrt{m}$, et par suite $rg\, T = k = \frac{n}{\|T\|^2}$

Ce résultat est à comparer avec celui que nous voulons obtenir :

1.2 Le résultat d'inversion

Théorème 1.2. *Il existe une constante $c > 0$ tel que pour tout n et tout opérateur $T : \ell_2^n \mapsto \ell_2^n$ tel que $\|Te_i\| = 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, il existe $\sigma \subset \{1, \ldots, n\}$ de cardinal $|\sigma| \geqslant \frac{cn}{\|T\|^2}$ tel que :*

$$\forall (a_j)_{j\in\sigma} \in \mathbb{C}^{|\sigma|} \qquad \left\| \sum_{j\in\sigma} a_j T e_j \right\|_2 \geqslant c \left(\sum_{j\in\sigma} |a_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Remarques : Notons que la constante c est indépendante de la dimension, ce qui fait l'intérêt principal du résultat.

Pour démontrer le théorème 1.2, il nous faut établir plusieurs résultats préliminaires.

1.3 Un résultat sur les déviations.

Lemme 1.3. *Soient $0 < \delta < 1$, un entier n et $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ une suite de variables aléatoires indépendantes sur un espace de probabilité (Ω, Σ, μ), à valeurs dans $\{0,1\}$ et de moyenne δ. Alors la déviation :*

$$D_{\delta n/2} = \left\{\omega \in \Omega : \left|\sum_{i=1}^n \xi_i(\omega) - \delta n\right| \geqslant \frac{\delta n}{2}\right\}$$

vérifie

$$\mu(D_{\delta n/2}) \leqslant 2e^{-0{,}108\delta n} \leqslant 2e^{-\frac{\delta n}{10}}$$

Preuve : Soit $\xi_i' = \xi_i - \delta$ alors $\xi_i' = \begin{cases} 1-\delta & \text{avec probabilité } \delta \\ -\delta & \text{avec probabilité } 1-\delta \end{cases}$
Fixons $i \in \{1, \ldots, n\}$ et posons $Y = \xi_i'$, prenons $\lambda > 0$.
Alors $E\left(e^{\lambda Y}\right) = 1 + \frac{\lambda^2}{2} E(Y^2) + E\left(\sum_{n\geqslant 3} \frac{\lambda^n Y^n}{n!}\right)$
Soit $D^2 = E(Y^2) = \int (\xi_i')^2 d\mu = (1-\delta)^2\delta + \delta^2(1-\delta) = \delta(1-\delta)$
Ainsi $E\left(e^{\lambda Y}\right) \leqslant 1 + \frac{\lambda^2 D^2}{2} + E\left(\sum_{n\geqslant 3} \frac{\lambda^n Y^2}{n!}\right) = 1 + \frac{\lambda^2 D^2}{2} a_\lambda$
où $a_\lambda = 1 + \frac{2}{\lambda^2}\left(e^\lambda - 1 - \lambda - \frac{\lambda^2}{2}\right)$
Soit $X = \sum_{i=1}^n \xi_i'$, on a $E\left(e^{\lambda X}\right) = \prod E\left(e^{\lambda \xi_i'}\right) \leqslant \left(1 + \frac{\lambda^2 D^2}{2} a_\lambda\right)^n$. Par suite $E\left(e^{\lambda X}\right) \leqslant \exp \frac{n\lambda^2 D^2 a_\lambda}{2}$
Mais, l'inégalité de Tchebichev nous donne :
$P(X \geqslant t) = P(e^{\lambda X} \geqslant e^{\lambda t}) \leqslant e^{-\lambda t} E\left(e^{\lambda X}\right)$ et
$P(X \leqslant -t) = P(e^{-\lambda X} \geqslant e^{\lambda t}) \leqslant e^{-\lambda t} E\left(e^{-\lambda X}\right)$ ainsi

$$P\left(|X| \geqslant t\right) \leqslant 2 \exp\left(-\lambda t + \frac{n\lambda^2 D^2 a_\lambda}{2}\right)$$

On prend $t = \delta n/2$ et on minimise le membre de droite pour $\lambda > 0$, ce qui revient à minimiser $f(\lambda) = -\lambda + 2(1-\delta)(e^\lambda - 1 - \lambda)$. Mais $f(ln\frac{3}{2}) < -0{,}216$ donc

$$\mu(D_{\delta n/2}) \leqslant 2e^{-0{,}108\delta n} \leqslant 2e^{-\frac{\delta n}{10}}$$

1.4 Une selection probabiliste

Notation : *Soit n un entier et τ une partie de $\{1,\dots,n\}$. $P_{[Te_j]_{j\in\tau}}$ désignera la projection orthogonale de ℓ_2^n sur $[Te_j]_{j\in\tau}$.*

Le lemme suivant va être démontré par une sélection probabiliste :

Lemme 1.4. *Il existe une constante $C_1 > 0$ telle que pour tout entier n et tout opérateur $T : \ell_2^n \mapsto \ell_2^n$ tel que pour $i \in \{1,\dots,n\}$, $\|Te_i\| = 1$, il existe $\sigma_1 \subset \{1,\dots,n\}$ de cardinal $|\sigma_1| \geqslant C_1 \frac{n}{\|T\|^2}$ tel que*

$$\left\|P_{[Te_j]_{j\in\sigma_1\setminus\{i\}}}(Te_i)\right\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \forall i \in \sigma_1$$

Preuve : Soit $0 < \delta < 1$ fixé (qu'on choisira ultérieurement) et $(\xi_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ comme dans le lemme 1.3. Posons $x_i = Te_i$ et $\sigma(\omega) = \{1 \leqslant j \leqslant n : \xi_i(\omega) = 1\}$.

Les ξ_j vont servir de selecteurs et σ_1 va essentiellement être l'un des $\sigma(\omega)$. Notons que, les ξ_i étant indépendants, on a :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \sum_{i=1}^n \xi_i(\omega)\left\|P_{[\xi_j(\omega)x_j]_{j\neq i}}(x_i)\right\|^2 d\mu &= \delta\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left\|P_{[\xi_j(\omega)x_j]_{j\neq i}}(x_i)\right\|^2 d\mu \\ &\leqslant \delta\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left\|P_{[\xi_j(\omega)x_j]_{j=1}^n}(x_i)\right\|^2 d\mu \\ &= \delta\int_\Omega \left\|P_{[\xi_j(\omega)x_j]_{j=1}^n}T\right\|_{H.S.}^2 d\mu\end{aligned}$$

Mais $\left\|P_{[\xi_j(\omega)x_j]_{j=1}^n}T\right\|_{H.S.}^2 \leqslant \|T\|^2\, rg(P_{[\xi_j(\omega)x_j]_{j=1}^n}T) \leqslant \|T\|^2 \sum_{j=1}^n \xi_j(\omega)$. Ainsi $\int_\Omega \sum_{i=1}^n \xi_i(\omega)\left\|P_{[\xi_j(\omega)x_j]_{j\neq i}}(x_i)\right\|^2 d\mu \leqslant \delta\|T\|^2 \int_\Omega \sum_{i=1}^n \xi_i(\omega)d\mu = \delta^2 n\|T\|^2$.
Donc en particulier :

$$\int_{\Omega\setminus D_{\frac{\delta n}{2}}} \sum_{i=1}^n \xi_i(\omega)\left\|P_{[\xi_j(\omega)x_j]_{j\neq i}}(x_i)\right\|^2 d\mu \leqslant \delta^2 n\|T\|^2$$

Mais alors, il existe $\omega_0 \in \Omega \setminus D_{\frac{\delta n}{2}}$ tel que (en éliminant les $\xi_i(\omega_0) = 0$ d'une expression à l'autre)

$$\sum_{i\in\sigma(\omega_0)} \left\|P_{[\xi_j(\omega_0)x_j]_{j\in\sigma(\omega_0)\setminus\{i\}}}(x_i)\right\|^2 = \sum_{i\in\sigma(\omega_0)} \left\|P_{[\xi_j(\omega_0)x_j]_{j\neq i}}(x_i)\right\|^2$$
$$=\sum_{i=1}^{n} \xi_i(\omega_0) \left\|P_{[\xi_j(\omega_0)x_j]_{j\neq i}}(x_i)\right\|^2$$
$$\leqslant \frac{\delta^2 n \|T\|^2}{1-\mu(D_{\frac{\delta n}{2}})} \leqslant \alpha\delta^2 n \|T\|^2$$

pourvu que $\mu(D_{\frac{\delta n}{2}}) \leqslant 1-\frac{1}{\alpha}$ donc par le lemme 1.3 il suffit que $2e^{-0{,}108\delta n} \leqslant 1-\frac{1}{\alpha}$, c'est à dire $n \geqslant -\frac{1}{0.108\delta}\ln\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)$.

D'autre part $\omega_0 \notin D_{\frac{\delta n}{2}}$ donc $\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i(\omega_0)-\delta n\right| \leqslant \dfrac{\delta n}{2}$ et ainsi

$$|\sigma(\omega_0)| = \sum_{i=1}^{n}\xi_i(\omega_0) \geqslant \frac{\delta n}{2}$$

Posons alors $\sigma_1 = \left\{i \in \sigma(\omega_0) : \left\|P_{[x_j]_{j\in\sigma(\omega_0)\setminus\{i\}}}(x_i)\right\| < 2\|T\|\sqrt{\delta}\right\}$
Alors si $i \in \sigma_1$ $\left\|P_{[Te_j]_{j\in\sigma_1\setminus\{i\}}}(Te_i)\right\| \leqslant \left\|P_{[Te_j]_{j\in\sigma(\omega_0)\setminus\{i\}}}(Te_i)\right\| < 2\|T\|\sqrt{\delta}$.
Observons que
$4\|T\|^2\delta\,|\sigma(\omega_0)\setminus\sigma_1| \leqslant \sum_{i\in\sigma(\omega_0)\setminus\sigma_1} \left\|P_{[x_j]_{j\in\sigma(\omega_0)\setminus\{i\}}}(x_i)\right\|^2 \leqslant \alpha\delta^2 n\|T\|^2$
et donc $4\|T\|^2\delta\,|\sigma(\omega_0)\setminus\sigma_1| \leqslant 2\alpha\delta\|T\|^2|\sigma(\omega_0)|$
Donc $|\sigma(\omega_0)\setminus\omega_1| \leqslant \frac{\alpha}{2}|\sigma(\omega_0)|$
et ainsi $|\sigma_1| \geqslant \left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right)|\sigma(\omega_0)| \geqslant \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right)\delta n$.
En prenant alors $\delta = \dfrac{1}{8\|T\|^2}$ et $\alpha = 1,72$, on obtient
pour $n \geqslant 120\|T\|^2$ un σ_1 de cardinal $|\sigma_1| \geqslant \dfrac{1}{120}\dfrac{n}{\|T\|^2}$ tel que

$$\forall i \in \sigma_1 \quad \left\|P_{[Te_j]_{j\in\sigma_1\setminus\{i\}}}(Te_i)\right\| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Remarque : Si $n < 120\|T\|^2$ alors en prenant σ_1 de cardinal 1 le lemme est sans contenu (projection sur le vide) et donc encore vrai !

1.5 Un résultat combinatoire de Sauer et Shelah

Soit n un entier et $I \subset \{1, \dots, n\}$, notons P^I la projection canonique de $\{-1,1\}^n$ sur $\{-1,1\}^I$.

Dans la suite, nous identifierons un élément $(u_k)_{k=1}^n$ de $\{-1,1\}^n$ et une partie A de $\{1, \dots, n\}$ de la façon suivante :

$$u_k = 1 \quad \textit{si et seulement si } k \in A$$

Définition : *On appelle densité combinatoire d'une partie S de $\{-1,1\}^n$, et on note $d_c(S)$, le plus grand cardinal des parties I de $\{1, \dots, n\}$ pour lesquelles $P^I S = \{-1,1\}^I$.*

$I \subset \{1, \dots, n\}$ est dit dense pour S si $P^I S = \{-1,1\}^I$. On note $I(S)$ l'ensemble des parties denses pour S.

Théorème 1.5. *Pour $S \subset \{-1,1\}^n$, on a $|I(S)| \geqslant |S|$.*

Corollaire : (théorème de Sauer-Shelah) *Soit $S \subset \{-1,1\}^n$ tel que $|S| > \sum_{i<k} \binom{n}{i}$ il existe alors $I \subset \{-1,1\}^n$ tel que*

$$|I| \geqslant k \quad \textit{et} \quad P^I S = \{-1,1\}^I.$$

Preuve du corollaire : Soit $d = d_c(S)$, alors $|S| \leqslant |I(S)| \leqslant \sum_{i \leqslant d} \binom{n}{i}$

Remarque : Si $S \subset \wp\{1, \dots, n\}$, $d_c(S)$ est le plus grand cardinal des parties I de $\{1, \dots, n\}$ telles que $S \cap I = \{I \cap A : A \in S\} = \wp(I)$. Alors si S est l'ensemble des parties de cardinal $< k$, $|S| = \sum_{i<k} \binom{n}{i}$ et $d_c(S) = k-1 < k$, donc l'estimation du corollaire est la meilleure possible.

La preuve que nous allons donner se trouve dans [P].

Preuve du théorème : Soit $S \subset \wp(\{1, \dots, n\})$, soit τ l'ensemble des familles $T \subset \wp(\{1, \dots, n\})$ telles que :

(a) $|T| \geqslant |S|$

(b) $I(T) \subset I(S)$

et pour $T \in \tau$ posons $m(T) = \sum_{A \in T} |A|$.

Soit $T_0 \in \tau$ pour laquelle $m(T_0)$ est minimale (il existe bien un tel T_0 car $S \in \tau$ donc $\tau \neq \emptyset$).

Si on montre que T_0 est *héréditaire* (*i.e.* si $A \in T_0$ et si $B \subset A$ alors $B \in T_0$), alors $T_0 = I(T_0)$ et $|I(S)| \geqslant |I(T_0)| = |T_0| \geqslant |S|$ ce qui achèverait la démonstration.

Montrons donc que T_0 est héréditaire : pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$, on définit $m_i : T_0 \mapsto \mathcal{P}(\{1, \ldots, n\})$ par $m_i(A) = \begin{cases} A \setminus \{i\} & si\ i \in A\ et\ A \setminus \{i\} \notin T_0 \\ A & sinon \end{cases}$

alors m_i est injective et pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, $|m_i(T_0)| = |T_0| \geqslant |S|$.

Montrons que $I(m_i(T_0)) \subset I(T_0)$: soit $I \in I(m_i(T_0))$ et $J \subset I$

1^{er} cas : $i \notin I$. On a $m_i(T_0) \cap I = \mathcal{P}(I)$, il existe donc $A \in T_0$ tel que $m_i(A) \cap I = J$; mais comme $i \notin I$, $A \cap I = (A \setminus \{i\} \cap I$ et par suite $J \in T_0 \cap I$ *i.e.* $I \in I(T_0)$.

$2^{ème}$ cas : $i \in J$. il existe alors $A \in m_i(T_0)$ tel que $A \cap I = J$ et $A = m_i(B)$ avec $B \in T_0$. Mais alors $i \in A$ donc par définition de m_i, $A = B \in T_0$

$3^{ème}$ cas : $i \in I \setminus J$. Soit alors $J' = J \cup \{i\}$, il existe $A \in m_i(T_0)$ et $B \in T_0$ tels que $A \cap I = J'$ et $m_i(B) = A$; puisque $i \in A$, $A = B$ et $B \setminus \{i\} \in T_0$, ainsi $J = I \cap (B \setminus \{i\}) \in I \cap T_0$.

On a donc montré que pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, $m_i(T_0) \in \tau$. Si $m_i(T_0) \neq T_0$, alors $m(m_i(T_0)) < m(T_0)$ ce qui contredirait la minimalité de $m(T_0)$. Donc $m_i(T_0) = T_0$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, ce qui signifie que T_0 est héréditaire *c.q.f.d.*

1.6 L'inversibilité $\ell_2 \mapsto \ell_1$

Théorème 1.6. *Il existe une constante $c_2 > 0$ telle que pour tout entier n et tout opérateur $T : \ell_2^n \mapsto \ell_2^n$ tel que pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\|Te_i\| = 1$, il existe une partie σ_2 de $\{1, \ldots, n\}$ de cardinal $|\sigma_2| \geqslant c_2 \frac{n}{\|T\|^2}$ telle que :*

$$\forall (a_j)_{j \in \sigma_2} \in \mathbb{C}^{|\sigma_2|} \quad \left\| \sum_{j \in \sigma_2} a_j T e_j \right\| \geqslant c_2 \sum_{j \in \sigma_2} \frac{|a_j|}{\sqrt{|\sigma_2|}}$$

Preuve : Posons toujours $x_i = Te_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Soient c_1 et σ_1 donnés par le lemme 1.4 ; posons $u_i' = x_i - P_{[x_j]_{j \in \sigma_1 \setminus \{i\}}}(x_i)$ pour $i \in \sigma_1$.

Alors pour $i, j \in \sigma_1$, $i \neq j$, on a

$< x_i, u_j' >=< x_i, x_j > - < x_i, P_{[x_k]_{k \in \sigma_1 \setminus \{j\}}}(x_j) >= 0$ (propriété des projections orthogonales) et

$$< x_i, u_i' >=< x_i, x_i > - < x_i, P_{[x_j]_{j \in \sigma_1 \setminus \{i\}}}(x_i) >= 1 - \left\| P_{[x_j]_{j \in \sigma_1 \setminus \{i\}}}(x_i) \right\|^2 \geqslant \tfrac{1}{2}$$

car $\|x_i\| = 1$ et $< x_i, P_{[x_j]_{j \in \sigma_1 \setminus \{i\}}}(x_i) >= \left\| P_{[x_j]_{j \in \sigma_1 \setminus \{i\}}}(x_i) \right\|^2 \leqslant \frac{1}{2}$.

Ainsi $\frac{1}{2} \leqslant \|u_i'\| \leqslant 1$ pour $i \in \sigma_1$, donc les vecteurs $u_i = \dfrac{u_i'}{\|u_i'\|}$ vérifient :

$$< x_i, u_j >= 0 \quad i,j \in \sigma_1 \quad i \neq j \quad , \quad < x_i, u_i > \geqslant \frac{1}{2} \quad i \in \sigma_1 \tag{1}$$

Nous venons donc de construire une famille de vecteurs $(u_i)_{i\in\sigma_1}$ qui est presque la base duale de $(x_i)_{i\in\sigma_1}$. Considérons $\sum_{i\in\sigma_1} a_i' x_i$, où $a_i' \in \mathbb{R}$ pour $i \in \sigma_1$ (pour simplifier), et prenons $(\varepsilon_j) \in \{-1,1\}^{\sigma_1}$ tel que pour tout $i \in \sigma_1$, $|a_i| = \varepsilon_i a_i$. Alors

$$\frac{1}{2}\sum_{i\in\sigma_1}|a_i| \leqslant \sum_{i\in\sigma_1} < x_i, u_i > \varepsilon_i a_i =< \sum_{i\in\sigma_1} a_i x_i, \sum_{i\in\sigma_1}\varepsilon_i u_i > \leqslant \left\|\sum_{i\in\sigma_1} a_i x_i\right\| \left\|\sum_{i\in\sigma_1}\varepsilon_i u_i\right\|$$

Si l'on avait, pour tout $(\varepsilon_i) \in \{-1,1\}^{\sigma_1}$, $\left\|\sum_{i\in\sigma_1}\varepsilon_i u_i\right\| \leqslant 2\sqrt{|\sigma_1|}$, le théorème serait démontré. Le théorème de Sauer-Shelah (corollaire du théorème 1.5.) va nous permettre d'avoir cette estimation en remplaçant σ_1 par une partie σ_2 "assez grande", de la façon suivante :

Considérons donc l'ensemble de choix de signes :

$$\mathcal{E} = \left\{(\varepsilon_i)_{i\in\sigma_1} \in \{-1,1\}^{|\sigma_1|} : \left\|\sum_{i\in\sigma_1}\varepsilon_i u_i\right\| \leqslant 2\sqrt{|\sigma_1|}\right\}$$

Comme $\int \left\|\sum_{i\in\sigma_1}\varepsilon_i u_i\right\|^2 d\varepsilon = \sum_{i\in\sigma_1} \underbrace{\|u_i\|^2}_{=1} = |\sigma_1|$, on a :

$$|\sigma_1| = \int \left\|\sum_{i\in\sigma_1}\varepsilon_i u_i\right\|^2 d\varepsilon \geqslant \int_{(\varepsilon_i)_{i\in\sigma_1}\in\{-1,1\}^{|\sigma_1|}\setminus\mathcal{E}} \left\|\sum_{i\in\sigma_1}\varepsilon_i u_i\right\|^2 d\varepsilon$$
$$\geqslant 4\,|\sigma_1|\,\frac{2^{|\sigma_1|} - |\mathcal{E}|}{2^{|\sigma_1|}}$$

donc $2^{|\sigma_1|} - |\mathcal{E}| \leqslant \frac{1}{4}2^{|\sigma_1|}$ *i.e.* $|\mathcal{E}| \geqslant \frac{3}{4}2^{|\sigma_1|}$.

Appliquons le théorème de Sauer Shelah à $\mathcal{E}$:

comme $|\mathcal{E}| \geqslant \frac{3}{4}2^{|\sigma_1|} > \sum_{i=1}^{\frac{|\sigma_1|}{2}-1}\binom{|\sigma_1|}{i}$, la densité de $\mathcal{E}$ est $\geqslant \frac{|\sigma_1|}{2}$ *i.e.* il existe $\sigma_2 \subset \sigma_1$ avec

$$|\sigma_2| \geqslant \frac{|\sigma_1|}{2} \geqslant \frac{c_1}{2}\frac{n}{\|T\|^2} \tag{2}$$

tel que

$$\forall(\varepsilon_i)_{i\in\sigma_2} \quad \exists(\varepsilon_i')_{i\in\sigma_1} \in \mathcal{E} \quad \forall j \in \sigma_2 \quad \varepsilon_j' = \varepsilon_j$$

(on dira que ε'_i est une extension de ε_i).

Pour terminer la preuve, soit maintenant $\{a_j\}_{j\in\sigma_2}$, écrivons $a_j = b_j + ic_j$ avec b_j et c_j réels. Prenons alors des choix de signes $(\theta'_j)_{j\in\sigma_2}$ et $(\theta_j")_{j\in\sigma_2}$ tels que, $\forall j \in \sigma_2$, $b_j\theta'_j = |b_j|$ et $c_j\theta_j" = |c_j|$. Soient ensuite $(\varepsilon'_j)_{j\in\sigma_1} \in \mathcal{E}$ et $(\varepsilon_j")_{j\in\sigma_1} \in \mathcal{E}$ les extensions respectives de $(\theta'_j)_{j\in\sigma_2}$ et de $(\theta_j")_{j\in\sigma_2}$.

Comme $< x_j, u_j > \geqslant \frac{1}{2}$ (par (1)), il vient :

$$\frac{1}{2}\sum_{j\in\sigma_2}|a_j| \leqslant \sum_{j\in\sigma_2}\{|b_j| + |c_j|\} < x_j, u_j > \tag{3}$$

mais comme $< x_j, u_i >= 0$ si $i \neq j$ (par (1)), il vient

$$\left|< \sum_{j\in\sigma_2} a_j x_j, \sum_{i\in\sigma_1}(\varepsilon'_i - i\varepsilon_i")u_i >\right| = \left|\sum_{j\in\sigma_2}\{|b_j| + |c_j| + i(c_j\varepsilon'_j - b_j\varepsilon_j")\} < x_j, u_j >\right|$$

et vu que $|\Re(z)| \leqslant |z|$, on a donc, avec (3)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{j\in\sigma_2}|a_j| &\leqslant \left|< \sum_{j\in\sigma_2} a_j x_j, \sum_{i\in\sigma_1}(\varepsilon'_i - i\varepsilon_i")u_i >\right| \\
&\leqslant \left|< \sum_{j\in\sigma_2} a_j x_j, \sum_{i\in\sigma_1}\varepsilon'_i u_i >\right| + \left|< \sum_{j\in\sigma_2} a_j x_j, \sum_{i\in\sigma_1}\varepsilon_i" u_i >\right| \\
&\leqslant \left\|\sum_{i\in\sigma_1}\varepsilon'_i u_i\right\| \left\|\sum_{j\in\sigma_2} a_j x_j\right\| + \left\|\sum_{i\in\sigma_1}\varepsilon_i" u_i\right\| \left\|\sum_{j\in\sigma_2} a_j x_j\right\| \\
&\leqslant 4\sqrt{|\sigma_1|}\left\|\sum_{j\in\sigma_2} a_j x_j\right\|
\end{aligned}$$

D'où finalement avec (2)

$$\frac{1}{2}\sum_{j\in\sigma_2}|a_j| \leqslant 4\sqrt{2}\sqrt{|\sigma_2|}\left\|\sum_{j\in\sigma_2} a_j x_j\right\|$$

En résumé :

Pour $n \geqslant 240\,\|T\|^2$, **il existe** $\sigma_2 \subset \{1,\ldots,n\}$ **de cardinal** $|\sigma_2| \geqslant \frac{1}{240}\frac{n}{\|T\|^2}$ **tel que :**

$$\forall (a_j)_{j\in\sigma_2} \qquad \left\|\sum_{j\in\sigma_2} a_j T e_j\right\| \geqslant \frac{1}{4\sqrt{2}}\sum_{j\in\sigma_2}\frac{|a_j|}{\sqrt{|\sigma_2|}}$$

Remarque : Si $n < 240\,\|T\|^2$ en prenant un σ_2 de cardinal 1, le théorème reste valable mais n'a plus d'intérêt !

1.7 Une preuve du théorème 1.2. par une méthode d'extraction.

Rappelons le résultat que nous désirons obtenir :

théorème 1.2. *Il existe une constante $c > 0$ tel que pour tout n et tout opérateur $T : \ell_2^n \mapsto \ell_2^n$ tel que $\|Te_i\| = 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, il existe $\sigma \subset \{1,\dots,n\}$ de cardinal $|\sigma| \geqslant \frac{cn}{\|T\|^2}$ tel que :*

$$\forall (a_j)_{j\in\sigma} \in \mathbb{C}^{|\sigma|} \quad \left\|\sum_{j\in\sigma} a_j Te_j\right\|_2 \geqslant c\left(\sum_{j\in\sigma}|a_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Preuve : Posons encore $x_i = Te_i$ pour $i \in \{1,\dots,n\}$, supposons que $n \geqslant 240\,\|T\|^2$, soient c_2 et σ_2 donnés par le théorème 1.5. La preuve de 1.2 sera achevée dès qu'on aura établi l'existence d'une partie σ de σ_2 de cardinal $|\sigma| \geqslant \frac{|\sigma_2|}{2}$ telle que

$$\forall (a_j)_{j\in\sigma} \in \mathbb{C}^{|\sigma|} \quad \left\|\sum_{j\in\sigma} a_j Te_j\right\|_2 \geqslant \frac{c_2}{4}\left(\sum_{j\in\sigma}|a_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Par homogénité, il suffit de montrer ceci pour les (a_j) tels que $\sum_{j\in\sigma}|a_j|^2 = 1$

Par l'absurde : supposons que ceci soit impossible.

Posons $\tau_1 = \sigma_2$ et construisons $y_1 = \sum_{j\in\tau_1} b_{1,j}x_j$ tel que $\|y_1\| < \frac{c_2}{4}$ mais $\sum_{j\in\tau_1}|b_{1,j}|^2 = 1$.

Supposons qu'on ait déjà construit $\tau_1 \supset \tau_2 \supset \dots \supset \tau_l$ avec $|\tau_l| \geqslant |\sigma_2|/2$ et des vecteurs $\{y_i\}_{i=1}^l$ tels que $y_i = \sum_{j\in\tau_i} b_{i,j}x_j$ avec $\|y_i\| < c_2/4$ et $\sum_{j\in\tau_i}|b_{i,j}|^2 = 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant l$.

Considérons alors $\tau_{l+1} = \{j \in \tau_l : \sum_{i=1}^{l}|b_{i,j}|^2 < 1\}$.

Si $|\tau_{l+1}| < |\sigma_2|/2$ arrêtons la procédure (on ne peut plus rien déduire de l'hypothèse).

Sinon $|\tau_{l+1}| \geqslant |\sigma_2|/2$ et il existe alors un vecteur $y_{l+1} = \sum_{j \in \tau_{l+1}} b_{l+1,j} x_j$ avec $\|y_{l+1}\| < c_2/4$ et $\sum_{j \in \tau_{l+1}} |b_{l+1,j}|^2 = 1$.

Montrons que le processus s'arrête nécessairement :

Les τ_l forment une suite décroissante de parties finies, si le processus ne s'arrête pas, cela signifie que les τ_l sont stationnaire à partir d'un rang l_0, ainsi on construit des $(b_{i,j})_{j \in \tau_{l_0}}$ pour $i \geqslant l_0$ tels que :

$\tau_{i+1} = \tau_i = \tau_{l_0}$ pour $i \geqslant l_0$ *i.e.* $\forall j \in \tau_{l_0}$ $\sum_{k=1}^{i} |b_{k,j}|^2 < 1$ et $\sum_{j \in \tau_{l_0}} |b_{i,j}|^2 = 1, \quad \forall i \geqslant l_0$.

$$\text{Ainsi } i - l_0 + 1 = \sum_{k=l_0}^{i} \sum_{j \in \tau_{l_0}} |b_{k,j}|^2 = \sum_{j \in \tau_{l_0}} \sum_{k=l_0}^{i} |b_{k,j}|^2 < \sum_{j \in \tau_{l_0}} \underbrace{\sum_{k=1}^{i} |b_{k,j}|^2}_{<1} < |\tau_{l_0}|$$

donc $i - l_0 + 1 < |\tau_{l_0}|$ pour tout $i \geqslant l_0$ ce qui est évidemment contradictoire. Par suite, le processus s'arrête, disons après m étapes.

Donc $|\tau_{m+1}| < \frac{|\sigma_2|}{2}$.

Posons alors pour des commodités d'écriture, $b_{i,j} = 0$ pour tous les $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant n$ pour lesquels $b_{i,j}$ n'est pas déjà défini.

Mais $\forall j \in \sigma_2 \setminus \tau_{m+1}$ $\quad \sum_{i=1}^{m} |b_{i,j}|^2 \geqslant 1$.

$$\text{Ainsi } m = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\sum_{j \in \tau_i} |b_{i,j}|^2}_{=1} = \sum_{j \in \tau_i} \sum_{i=1}^{m} |b_{i,j}|^2 \geqslant \sum_{j \in \tau_i \setminus \tau_{m+1}} \underbrace{\sum_{i=1}^{m} |b_{i,j}|^2}_{\geqslant 1} \geqslant |\sigma_2 \setminus \tau_{m+1}|$$

i.e. $m \geqslant \frac{|\sigma_2|}{2}$

D'autre part :

$$
\begin{aligned}
\frac{c_2}{\sqrt{2\,|\sigma_2|}}\sum_{j\in\sigma_2}\left(\sum_{i=1}^{m}|b_{i,j}|^2\right)^{\frac12} d\varepsilon \leqslant & \frac{c_2}{\sqrt{|\sigma_2|}}\sum_{j\in\sigma_2}\int\left|\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i b_{i,j}\right| d\varepsilon \\
= & \frac{c_2}{\sqrt{|\sigma_2|}}\int\sum_{j\in\sigma_2}\left|\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i b_{i,j}\right| d\varepsilon \\
\leqslant & \int\left\|\sum_{j\in\sigma_2}\left(\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i b_{i,j}\right) x_j\right\| d\varepsilon \quad (\textit{théorème } 1.5) \\
= & \int\left\|\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i\left(\sum_{j\in\tau_i} b_{i,j}x_j\right)\right\| d\varepsilon \quad \left(\begin{matrix} car\ b_{i,j}=0 \\ si\ j\in\sigma_2\setminus\tau_i\end{matrix}\right) \\
= & \int\left\|\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i y_i\right\| d\varepsilon \quad (definition\ des\ y_i) \\
\leqslant & \left(\sum_{i=1}^{m}\|y_i\|^2\right)^{\frac12} \quad (H\ddot{o}lder) \\
< & \frac{c_2\sqrt{m}}{4} \quad construction\ des\ y_i \qquad (*)
\end{aligned}
$$

Mais par construction :

$$\sum_{i=1}^{m}|b_{i,j}|^2 < 2 \quad \forall j\in\sigma_2 \qquad (**)$$

En effet par définition de τ_{m+1}, $\forall j\in\tau_{m+1}$, $\sum_{i=1}^{m}|b_{i,j}|^2 < 1$ et si $j\in\tau_l\setminus\tau_{l+1}$, $1\leqslant l\leqslant m$, on a :

$$\sum_{i=1}^{l}|b_{i,j}|^2 = \underbrace{\sum_{i=1}^{l-1}|b_{i,j}|^2}_{<1} + \underbrace{|b_{l,j}|^2}_{\leqslant 1} < 2$$

Il vient alors :

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{m\,|\sigma_2|}{2}} > \sum_{j\in\sigma_2}\sqrt{2}\left(\sum_{i=1}^{m}|b_{i,j}|^2\right)^{\frac12} & \geqslant \sum_{j\in\sigma_2}\sum_{i=1}^{m}|b_{i,j}|^2 \\
& = \sum_{i=1}^{m}\underbrace{\sum_{j\in\sigma_2}|b_{i,j}|^2}_{=1} = m
\end{aligned}
$$

i.e. $|\sigma_2| > 4m$ ce qui contredit $m \geqslant \frac{|\sigma_2|}{2}$ *c.q.f.d.*

1.8 Rappel sur les opérateurs p-sommants

Les résultats suivants sont démontrés dans le chapitre IIIF de [W] (les numéros des définitions et théorèmes indiqués ici étant ceux des paragraphes où ils se trouvent dans [W])

Définition : (2) *Soient X et Y deux espaces de Banach et p un entier, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

Un opérateur $T : X \mapsto Y$ est dit p-sommant s'il existe une constante $c < \infty$ telle que pour toute famille finie $(x_j)_{j=1}^n \subset X$ on a

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|Tx_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant c \sup\left\{\left(\sum_{j=1}^{n} |x^*(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} : x^* \in X^* \quad , \quad \|x^*\| \leqslant 1\right\} \qquad (*)$$

On note $\Pi_p(X,Y)$ l'espace des opérateurs p-sommants de X dans Y.
Pour $T \in \Pi_p(X,Y)$, on défini la norme p-sommante de T par :

$$\Pi_p(T) = \inf\{c : (*) \textit{ est vérifié pour toute famille finie } (x_j)_{j=1}^n \subset X\}$$

Proposition : (9) si $p < q$ alors $\Pi_p(X,Y) \subset \Pi_q(X,Y)$ et si $T \in \Pi_p(X,Y)$ alors $\Pi_q(T) \leqslant \Pi_p(T)$.

Cette inclusion, se démontre généralemet à l'aide du théorème de factorisation de Pietsch :

Théorème de factorisation de Pietsch (8) *Soient X et Y deux espaces de Banach, $1 \leqslant p < \infty$ un entier et T un opérateur $X \mapsto Y$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) T est p-sommant et $\Pi_p(T) \leqslant C$

(b) il existe une mesure de probabilité μ sur $\left(B_{X^*}, \sigma(X^*, X)\right)$ et une constante C telles que pour tout $x \in X$:

$$\|Tx\| \leqslant C \left(\int_{B_{X^*}} |x^*(x)|^p \, d\mu(x^*)\right)^{\frac{1}{p}}$$

(c) pour tout compact K et pour toute injection isométrique $i : X \mapsto C(K)$, il existe une mesure de probabilité μ sur K et une constante C telle que pour tout $x \in X$:

$$\|Tx\| \leqslant C \left(\int_K |i(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}$$

Corollaire : *Soit T un opérateur 2-sommant de ℓ_∞^n dans un espace de Hilbert $H \subset \ell_2^n$, alors il existe un opérateur diagonal $D : \ell_\infty^n \mapsto \ell_2^n$ ($De_i = \lambda_i e_i$) et un opérateur $U : l_2^n \mapsto H$ tel que $T = U \circ D$, $\|U\| \leqslant \Pi_2(T)$ et $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 = 1$*

Preuve : la condition (c) du théorème de factorisation de Pietsch nous donne l'existence d'une mesure de probabilité sur $\{1, \ldots, n\}$ (*i.e.* une suite $(\mu_i)_{i=1}^n$ de réels positifs tels que $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1$) telle que :

$$\forall (a_i)_{i=1}^n \in \ell_n^\infty \qquad \|T(a_i)_{i=1}^n\| \leqslant \Pi_2(T) \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i \, |a_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (**)$$

Définissons alors $D : \ell_\infty^n \mapsto \ell_2^n$ par $D(e_i) = \sqrt{\mu_i} e_i$ et $v : l_2^n \mapsto H$ par $Ue_i = 0$ si $\mu_i = 0$ et $Ue_i = \dfrac{Te_i}{\sqrt{\mu_i}}$ sinon.

Notons que si $\mu_i = 0$ alors par (**) $Te_i = 0$ ainsi $T = U \circ D$

Enfin pour $(a_i)_{i=1}^n \in l_n^\infty$ on a

$$\|U \circ D(a_i)_{i=1}^n\| = \|T(a_i)\| \leqslant \Pi_2(T) \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i \, |a_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \Pi_2(T) \, \|D(a_i)_{i=1}^n\|$$

d'où $\|U\| \leqslant \Pi_2(T)$ *c.q.f.d.*

Théorème : (29) *Si T est un opérateur de ℓ_∞^n dans un espace de Hilbert de dimension finie H alors T est 2-sommant et sa norme 2-sommante est telle que :*

$$\Pi_2(T) \leqslant K_G \, \|T\|$$

où K_G est la constante de Grothendieck.

1.9 Une preuve du théorème 1.2 par une méthode de factorisation

Posons encore $x_i = Te_i$ et remarquons que les $(x_i)_{i\in\sigma_2}$ sont linéairement indépendants (conséquence immédiate du théorème 1.6)

Considérons alors l'opérateur S défini de $H = [x_i]_{i\in\sigma_2} \subset \ell_2^n$ à valeurs dans ℓ_1^n défini par $Sx_i = \dfrac{e_i}{\sqrt{|\sigma_2|}}$ $\forall i \in \sigma_2$.

Par le théorème 1.6 il vient $\|S\|_{2\mapsto 1} \leqslant \dfrac{1}{c_2}$.

L'adjoint S^* de S est une application de ℓ_∞^n dans H espace de Hilbert, donc S^* est 2-sommante et sa norme 2-sommante vérifie :

$$\pi_2(S^*) \leqslant K_G \, \|S^*\| \leqslant \frac{K_G}{c_2}$$

(où K_G est la constante de Grothendieck).

Par le théorème de factorisation de Pietsch, $\exists U : \ell_2^n \mapsto H$ avec $\|U\| \leqslant \pi_2(S^*)$ et $\exists D : \ell_\infty^n \mapsto \ell_2^n$ avec $De_i = \lambda_i e_i$ et $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \leqslant 1$ tels que $S^* = U \circ D$. On a alors le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \ell_\infty^n \arrow[rr, "S^*"] \arrow[dr, "D"'] & & H \\ & \ell_2^n \arrow[ur, "U"'] & \end{tikzcd}$$

qui par dualité donne :

$$\begin{tikzcd} H \arrow[rr, "S"] \arrow[dr, "U^*"'] & & \ell_1^n \\ & \ell_2^n \arrow[ur, "D^*"'] & \end{tikzcd}$$

et $S = D^* \circ U^*$ où $D^* e_i = \overline{\lambda_i} e_i$. Mais alors $U^* x_j = \frac{e_j}{\lambda_j \sqrt{|\sigma_2|}}$ $j \in \sigma_2$.

L'opérateur U^* sera un "bon" isomorphisme sur les $\{x_j\}_{j\in\sigma}$ avec $\sigma \subset \sigma_2$ tel que pour $j \in \sigma$, λ_j ne soit pas trop grand.

Prenons donc $\sigma = \{j \in \sigma_2 : |\lambda_j| \leqslant \sqrt{\frac{2}{|\sigma_2|}}\}$ et notons qu'alors on a, $\forall \{a_j\}_{j\in\sigma_2} \in \mathbb{C}^{|\sigma_2|}$

$$
\begin{aligned}
K_G \left\| \sum_{j\in\sigma} a_j x_j \right\| / c_2 \geqslant & \pi_2(S^*) \left\| \sum_{j\in\sigma} a_j x_j \right\| \\
& \geqslant \|U\| \left\| \sum_{j\in\sigma} a_j x_j \right\| \\
& = \|U^*\| \left\| \sum_{j\in\sigma} a_j x_j \right\| \\
& \geqslant \left\| U^* \left(\sum_{j\in\sigma} a_j x_j \right) \right\| \\
& = \left(\sum_{j\in\sigma} \left| \frac{a_j}{\lambda_j \sqrt{|\sigma_2|}} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{j\in\sigma} |a_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

Il reste à vérifier que $|\sigma|$ est assez grand.

Mais $1 \geqslant \sum_{j\in\sigma_2\setminus\sigma} |\lambda_j|^2 \geqslant \frac{2}{|\sigma_2|} |\sigma_2 \setminus \sigma|$

i.e. $|\sigma_2 \setminus \sigma| \leqslant \frac{|\sigma_2|}{2}$ donc $|\sigma| \geqslant \frac{|\sigma_2|}{2}$.

En Résumé :

Les deux preuves nous donnent l'existence d'une partie σ de $\{1, \ldots, n\}$ de cardinal $|\sigma| \geqslant \frac{1}{240} \frac{n}{\|T\|^2}$ telle que :

pour la première preuve :

$$\left\| \sum_{j\in\sigma} a_j T e_j \right\| \geqslant \frac{1}{16\sqrt{2}} \left(\sum_{j\in\sigma} |a_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

et pour la seconde démonstration :

$$\left\| \sum_{j\in\sigma} a_j T e_j \right\| \geqslant \frac{1}{8K_G} \left(\sum_{j\in\sigma} |a_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Rappelons que $1,338 \leqslant K_G \leqslant 1,40491$.

2
Applications à l'analyse harmonique

Tout d'abord, nous allons nous intéresser à differentes façons de mesurer "l'épaisseur" d'une suite d'entiers. Nous rappellerons ensuite quelques propriétés des arbres, ce qui nous permettra de démontrer un résultat combinatoire dû à Ruzsa. Nous nous intéresserons enfin aux ensembles associés à des suites de densité positive. En particulier, nous montrerons à l'aide du théorème 1.2 et du résultat de Ruzsa que tout ensemble de mesure positive est associé en norme L^2 à une suite de densité positive. Ce résultat est d'autant plus remarquable qu'il est faux dans le cas des normes L^p pour $p > 2$.

2.1 Définitions et notations.

L'extension naturelle de la notion de cardinal proportionnel à n à des ensembles infinis est celle de densité.

Par suite, nous entendrons ici une partie de $\mathbb{N}$ ou de $\mathbb{Z}$.

Définition : *On appelle fonction d. comptage d'une suite Λ la fonction qui* à n associe $\Lambda(n) = |\Lambda \cap \{1, \ldots, n\}|$.

On appelle densité supérieure (respectivement densité inférieure) de Λ et on note $\overline{dens}\,\Lambda$ *(resp.* $\underline{dens}\,\Lambda$*) la* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}$ (resp. $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}$) de la suite $\dfrac{\Lambda(n)}{n}$.

Si $\overline{dens}\,\Lambda = \underline{dens}\,\Lambda$ *la valeur commune* $dens\,\Lambda$ *est appelée densité assymptotique ou densité de Λ.*

Soient $\Lambda^*(n) = \max\limits_{a\in\mathbb{Z}} |\Lambda \cap \{a+1, \ldots, a+n\}|$

et $\Lambda_*(n) = \min\limits_{a\in\mathbb{Z}} |\Lambda \cap \{a+1, \ldots, a+n\}|$ *les fonctions de comptage supérieures et inférieures de Λ*

Notons que Λ^* est sous-additive et Λ_* est sur-additive. Ceci implique l'existence de

$dens^*\Lambda = \lim \frac{\Lambda^*(n)}{n} = \inf \frac{\Lambda^*(n)}{n}$ (*densité supérieure forte de Λ*) et de

$dens_*\Lambda = \lim \frac{\Lambda_*(n)}{n} = \sup \frac{\Lambda_*(n)}{n}$ (*densité inférieure forte de Λ*).

Clairement

$$dens_*\Lambda \leqslant \underline{dens}\,\Lambda \leqslant \overline{dens}\,\Lambda \leqslant dens^*\Lambda$$

Remarquons que $dens_{\bullet}\Lambda > 0$ si et seulement si Λ ne contient pas de sauts infiniment grands *i.e.* $\exists n \forall a \quad \Lambda \cap \{a+1, \ldots, a+n\} \neq \emptyset$. Notons qu'alors, pour tout entier k il existe $\lambda_k \in \Lambda \cap \{kn+1, \ldots, (k+1)n\}$. Soit alors $\Lambda' = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ et remarquons que, si $kn+1 \leqslant p \leqslant (k+1)n$ alors :

$$\frac{k}{(k+1)n} \leqslant \frac{|\Lambda' \cap \{1, \ldots, p\}|}{p} \leqslant \frac{k+1}{kn+1}$$

et en faisant tendre k vers l'infini

$$dens\ \Lambda' = \frac{1}{n} > 0$$

On a donc le lemme :

Lemme 2.1 *Pour toute suite Λ de densité inférieure strictement positive, il existe une sous-suite de densité positive.*

Définition : *Soit $\mathcal{H}$ un ensemble de parties finies de $\mathbb{Z}$. $\mathcal{H}$ est appelé homogène si pour tout $A \in \mathcal{H}$ toutes les parties de A et tous les translatés de A sont encore dans $\mathcal{H}$*

Remarquons qu'à toute suite Λ on peut associer plusieurs systèmes homogènes. Nous nous intéresserons plus particulièrement à

$$h_1(\Lambda) = \{A \subset \mathbb{Z} : A + z \in \Lambda \text{ } pour\ un\ z \in \mathbb{Z}\}$$

Pour un système homogène $\mathcal{H}$ on définit la fonction de comptage $H(n) = \max_{A \in \mathcal{H}} |A \cap \{1, \ldots, n\}|$. Remarquons que $H(n)$ est sous-additive ce qui implique l'existence de

$$dens\,\mathcal{H} = \lim_{n \to \infty} \frac{H(n)}{n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{H(n)}{n}$$

2.2 Quelques résultats sur les arbres

Notations : *Soient n et m deux entiers, et soient $s = (s_1, \ldots, s_n)$ et $t = (t_1, \ldots, t_m)$ deux suites finies d'éléments d'un ensemble X. On note $t \prec s$ si $m \leqslant n$ et si, pour tout $k \in \{1, \ldots, m\}$, on a $t_k = s_k$.*

Pour $x \in X$, on note $x^\frown s$ la suite $(x, s_1, s_2, \ldots, s_n)$

Définition : *Un arbre sur un ensemble X est une partie T de l'ensemble des suites finies d'éléments de X telle que*

$$s \in T,\ t \prec s \Rightarrow t \in T$$

En particulier si $T \neq \emptyset$, $\emptyset \in T$

Définition : *le niveau k de l'arbre T est l'ensemble des suites de longueur k dans T*

Une branche infinie de T est une suite infinie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $X^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \geqslant 0$, $(x_0, \dots, x_n) \in T$ (on note $(x_n) \in [T]$)

Théorème 2.1. (König) *Si T est un arbre infini dont tous les niveaux sont finis, T possède une branche infinie.*

Preuve : Considérons $\{x_0 \in X \mid \exists s \in T\ s(0) = x_0\}$, c'est le niveau 1 de T et est donc fini. Comme T est infini, il existe donc x_0 tel que $T_{x_0} = \{s \mid x_0 \frown s \in T\}$ soit un arbre infini à niveaux finis.

Il existe donc x_1 tel que $T_{x_0 x_1} = \{s \mid x_0 \frown x_1 \frown s \in T\}$ soit un arbre infini à niveaux finis...

On construit ainsi, par récurrence, une suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $k \geqslant 1$, $T_{(x_0,\dots,x_k)}$ infini et alors $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une branche infinie de T. *c.q.f.d.*

2.3 Le théorème de Ruzsa

Remarquons que pour toute suite Λ on a $dens(h_1(\Lambda)) = dens^*\Lambda \geqslant \overline{dens}\Lambda$. Nous voulons établir une réciproque, à savoir que tout système homogène peut être associé à une suite au sens suivant :

Théorème 2.2. (Ruzsa [15]) *Pour tout système homogène $\mathcal{H}$ il existe une suite Λ telle que $h_1(\Lambda) \subset \mathcal{H}$ et $dens\,\Lambda = dens\,\mathcal{H}$*

Pour démontrer ce résultat établissons d'abord le lemme suivant :

Lemme 3.3 : *Soit $\mathcal{H}$ un système homogène. Pour tout entier n il existe un ensemble $A \in \mathcal{H}$ tel que $A \subset \{1, \dots, n\}$ et tel que pour tout entier m avec $1 \leqslant m \leqslant n$ on a*

$$|A \cap \{1, \dots, m\}| \geqslant m\, dens\,\mathcal{H}$$

N.B. Pour tout entier m, il existe un A_m tel que $\dfrac{|A_m \cap \{1,\ldots,m\}|}{m} \geqslant \inf \dfrac{H(n)}{n} = dens(\mathcal{H})$, le lemme affirme qu'on peut prendre $A_m = A$ pour $m \leqslant n$.

Preuve du lemme : Fixons $n \in \mathbb{N}$, soit $p \geqslant 1$, il existe $B \subset \{1,\ldots,p\}$, $B \in \mathcal{H}$ tel que $|B| = H(p) \geqslant p\, dens(\mathcal{H})$. Considérons alors

$$\begin{aligned} f(j) &= |B \cap \{1,\ldots,j\}| - \frac{jp}{n+p} dens(\mathcal{H}) \quad j \geqslant 1 \\ f(0) &= 0 \end{aligned}$$

Soit k réalisant le minimum de f sur $\{0,\ldots,p\}$, montrons que pour $1 \leqslant m \leqslant n$,

$$f(k+m) \geqslant f(k) \qquad (*)$$

En effet, tant que $k+m \leqslant p$ cela vient de la définition de k et si $p+1 \leqslant k+m \leqslant n+p$, on a

$$\begin{aligned} f(k+m) &= |B| - \frac{(k+m)p}{n+p} dens(\mathcal{H}) \geqslant 0 \quad et \\ f(k) &\leqslant f(0) = 0 \end{aligned}$$

(*) signifie que

$$0 \leqslant f(k+m) - f(k) = |B \cap \{k+1,\ldots,k+m\}| - \frac{mp}{n+p} dens(\mathcal{H})$$

ce qui implique que $A_p = (B-k) \cap \{1,\ldots,n\}$ vérifie pour $1 \leqslant m \leqslant n$

$$|A_p \cap \{1,\ldots,m\}| \geqslant m \frac{p}{p+n} dens(\mathcal{H})$$

mais comme $A_p \subset \{1,\ldots,n\}$ il n'y a qu'un nombre fini de A_p possibles, or il y a une infinité de A_p, nécessairement il existe un $A \subset \{1,\ldots,n\}$ qui apparaît une infinité de fois comme un A_p, et ce A répond à la question.

Preuve du théorème 2.3 : Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit C_n l'ensemble des A donnés par le lemme (fini et non vide). Nous allons définir un arbre de la façon suivante :

le n-ième niveau est formé des éléments de C_n et $A \in C_n$, $B \in C_{n+1}$ sont liés par $A \subset B$.

Tous les niveaux sont finis et si $B \in C_{n+1}$ alors $A = B \cap \{1,\ldots,n\} \in C_n$ donc l'arbre est infini. Ainsi par le théorème de König, il existe une branche infinie *i.e.* il existe $(A_k)_{k \geqslant 1}$ tel que pour tout $k \geqslant 1$, $A_k \in C_k$ et $A_k \subset A_{k+1}$.

Soit alors $\Lambda = \bigcup_{k \geqslant 1} A_k$, clairement $h_1(\Lambda) \subset \mathcal{H}$ (par construction) et de plus $\Lambda(n) \geqslant |A_n| \geqslant n dens\mathcal{H}$ donc $\underline{dens}\Lambda \geqslant dens\mathcal{H}$. D'autre part, nous avions remarqué que $\overline{dens}\,\Lambda \leqslant dens^*(\Lambda) = dens\, h_1(\Lambda) \leqslant dens\mathcal{H}$. Les deux inégalités précédentes nous donnent

$$\overline{dens}\,\Lambda = \underline{dens}\,\Lambda = dens\,\Lambda = dens\mathcal{H}$$

2.4 Ensembles associés à des suites de densité positive

Rappelons ici les notations déjà données dans l'introduction :

Notations : *$\mathbb{T}$ désigne le cercle unité de $\mathbb{C}$ identifié à $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, μ est la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$: $\mu = \frac{d\theta}{2\pi}$, où θ est la mesure de Lebesgue sur $[0, 2\pi[$*
Pour $1 \leqslant p < \infty$ et $\Lambda \subset \mathbb{Z}$, $L^p_\Lambda(\mathbb{T}, \mu)$ désigne la fermeture de l'espace vectoriel engendré par $\{e^{inx}\}_{n\in\Lambda}$ dans $L^p(\mathbb{T}, \mu)$

Définition : *$B \subset \mathbb{T}$ est dit associé à une partie Λ de $\mathbb{Z}$ en norme L^p (on dit aussi que B est associé à L^p_Λ) s'il existe une constante $c > 0$ telle que pour toute fonction f de $L^p_\Lambda(\mathbb{T}, \mu)$,*

$$\|f\chi_B\|_p \geqslant c\,\|f\|_p$$

Nous allons établir le résultat suivant :

Théorème 2.3. *Tout $B \subset \mathbb{T}$ tel que $\mu(B) > 0$ est un ensemble associé en norme L^2 à une suite d'entiers de densité positive.*
Plus précisément, il existe $c > 0$ tel que, pour tout $B \subset \mathbb{T}$ tel que $\mu(B) > 0$, il existe $\Lambda \subset \mathbb{N}$ vérifiant $dens\,\Lambda \geqslant c\mu(B)$ et tel que pour toute fonction f dans $L^2_\Lambda(\mathbb{T}, \mu)$

$$\|f\chi_B\|_2 \geqslant c\sqrt{\mu(B)}\,\|f\|_2$$

Preuve : Soit $B \subset \mathbb{T}$ avec $\mu(B) > 0$
Considérons l'opérateur $T : L^2(\mathbb{T}, \mu) \mapsto L^2(\mathbb{T}, \mu)$ défini par $Tf = f\dfrac{\chi_B}{\sqrt{\mu(B)}}$.

Notons que $\|Tf\|_2^2 = \displaystyle\int_{\mathbb{T}} |Tf|^2\, d\mu = \int_{\mathbb{T}} \left| f\frac{\chi_B}{\sqrt{\mu(B)}}\right|^2 d\mu \leqslant \frac{1}{\mu(B)}\int_{\mathbb{T}} |f|^2\, d\mu = \frac{1}{\mu(B)}\|f\|^2$;

d'autre part $\|T\chi_B\|^2 = \int_B \frac{1}{\mu(B)} d\mu = 1 = \frac{1}{\mu(B)} \|\chi_B\|^2$;
ainsi $\|T\| = \frac{1}{\sqrt{\mu(B)}}$.

De plus, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $\quad \|Te^{ijx}\|_2^2 = \frac{1}{\mu(B)} \int_B |e^{ijx}| \, d\mu(x) = 1$.

Identifions alors $\left([e^{ijx}]_{j=1}^n, \|\cdot\|_2\right)$ à l_n^2 (isométriquement) et appliquons le théorème 1.2 :

il existe alors une constante $c > 0$ (indépendante de n) telle que pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe $\sigma_n \subset \{1, \ldots, n\}$ avec $|\sigma_n| \geqslant \frac{cn}{\left\|T|_{[e^{ijx}]_{j=0}^{n-1}}\right\|^2} \geqslant$ $cn\mu(B)$ telle que quel que soit $(a_j)_{j\in\sigma_n} \in \mathbb{C}^{|\sigma_n|}$

$$\left\|\sum_{j\in\sigma_n} a_j T e_j\right\|_2 = \left\|\frac{\chi_B}{\sqrt{\mu(B)}} \sum_{j\in\sigma_n} a_j e^{ijx}\right\|_2 \geqslant c\left(\sum_{j\in\sigma_n} |a_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = c\left\|\sum_{j\in\sigma_n} a_j e^{ijx}\right\|_2$$

ou encore, pour toute fonction f dans $L^2(\mathbb{T}, \mu)$ à spectre dans σ_n,

$$\|\chi_B f\|_2 \geqslant c\sqrt{\mu(B)}\, \|f\|_2$$

Considérons maintenant l'ensemble $\mathcal{H}$ des parties finies σ de $\mathbb{N}$ telles que : pour toute fonction f de L^2 à spectre dans σ on a

$$\|\chi_B f\|_2 \geqslant c\sqrt{\mu(B)}\, \|f\|_2$$

(où c est la constante donée par le théorème 1.2).

Clairement, pour tout élément σ de $\mathcal{H}$, toutes les parties de σ et tous les translatés de σ sont encore dans $\mathcal{H}$ (en effet, translater le spectre σ d'une fonction f revient à multiplier f par un e^{inx}, ce qui ne change pas la norme L^2 de f). Par suite $\mathcal{H}$ est homogène.

Comme $d(\mathcal{H}) = \lim_{n\to\infty} d_n(\mathcal{H})$ existe et que pour tout $n \geqslant 1$, $\sigma_n \in \mathcal{H}$, on a $d(\mathcal{H}) > c\mu(B)$. Enfin le théorème de Ruzsa nous dit qu'il existe une suite Λ d'entiers dont toutes les parties finies sont dans $\mathcal{H}$ et telle que $dens\,\Lambda = d(\mathcal{H})$ *c.q.f.d.*

2.5 Le cas $p > 2$

Le résultat précédent n'est plus vrai pour $p > 2$, ceci est un corollaire immédiat du théorème suivant :

Théorème 2.4. *Soit $p > 2$. Alors $B \subset \mathbb{T}$ est associé en norme L^p à une suite d'entiers de densité positive si et seulement si $\mathbb{T}$ est une réunion finie de translatées de B à un ensemble de mesure nulle près.*

Avant de démontrer le théorème 2.5, montrons le corollaire suivant qui nous permettra d'exhiber un ensemble de mesure positive qui n'est associé à aucune suite de densité positive :

Corollaire 2.6 : *Si $B \subset \mathbb{T}$ est associé en norme L^p à une suite d'entiers de densité positive, alors son adhérence $\overline{B}$ est d'intérieur non vide.*

Démonstration : si B est associé à une suite d'entiers de densité positive, il en est de même pour $\overline{B}$ donc $\mathbb{T} = \cup_{k=1}^{m}(\overline{B} + r_k) \setminus O$ où O est un ensemble de mesure nulle et les r_k sont dans $\mathbb{T}$. Mais $\cup_{k=1}^{m}(\overline{B} + r_k)$ est fermé, donc O est un ouvert de mesure nulle, *i.e.* $O = \emptyset$, donc $\mathbb{T} = \cup_{k=1}^{m}(\overline{B} + r_k)$.

Mais, une réunion finie de fermés maigres étant maigre, $\overline{B}$ n'est pas d'intérieur vide.

Pour montrer que le théorème 2.4 n'est pas valable pour $p > 2$ il nous suffit donc de trouver un fermé B de $\mathbb{T}$ d'intérieur vide et de mesure positive.

Soit $(\xi_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de réels positifs tels que $0 < \xi = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\xi_n < 1$

Soit alors $B_0 = [0, 1]$, soit $B_1 = B_0$ privé de la partie centrale de longueur ξ_1 ; B_1 contient alors 2 intervalles de même longueur et est de mesure $1 - \xi_1$. Supposons alors B_k construit, B_k contient 2^k intervalles de même longueur et est de mesure $1 - \sum_{n=1}^{k} 2^{n-1}\xi_n$. Pour obtenir B_{k+1} enlevons à chacun des intervalles de B_k l'intervalle central de longueur ξ_{k+1}.

Posons enfin $B = \bigcap_{k \geqslant 1} B_k$. Alors B est un compact d'intérieur vide et de mesure

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\xi_n > 0.$$

Notation : *Soit $A(\mathbb{T}) = \left\{\varphi \in C(\mathbb{T}) : \hat{\varphi} \in \ell_1\right\}$ qu'on munit de la norme*

$\|\varphi\|_{A(\mathbf{T})} = \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{\varphi}(n)|$ *qui lui confère une structure d'espace de Banach.*

Pour montrer la condition suffisante du théorème 2.5, nous aurons besoin de deux lemmes :

Lemme 2.7 : *La fonction $1 - e^{ix}$ est de synthèse spectrale i.e. , il existe une constante c telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $F_\varepsilon \in A(\mathbf{T})$ telle que :*
i/ $F_\varepsilon(x) = 0$ pour tout x de $\mathbf{T}$ tel que $|1 - x| < \varepsilon$
ii/ $\left\|1 - e^{ix} - F_\varepsilon(x)\right\|_{A(\mathbf{T})} < c\varepsilon$

Preuve : Pour une fonction f intégrable sur $\mathbf{R}$, on note

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\xi x}\, dx$$

la transformée de Fourier de f.
Il existe une constante M telle que, pour tout $\eta > 0$, il existe une fonction g_η positive et de classe C^2 sur $\mathbf{R}$ vérifiant de plus :
iii/ $g_\eta(x) = 1$ pour $|x| \leqslant \eta$ et $g_\eta(x) = 0$ pour $|x| \geqslant 2\eta$
iv/

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{g}_\eta(n) - \hat{g}_\eta(n+1)| < \varepsilon M$$

En effet, soit h une fonction de classe C^2 positive telle que $h(x) = 0$ pour $|x| \geqslant 2$ et $h(x) = 1$ pour $|x| \leqslant 1$.
Fixons $\eta > 0$ et posons $h_\eta(x) = h(\frac{x}{\eta})$. Montrons que h_η vérifie iii/ et iv/.
Par un simple changement de variables, il vient, pour tout $n \in \mathbf{Z}$ $\hat{h}_\eta(n) = \eta\hat{h}(\eta n)$. Ainsi

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|\hat{h}_\eta(n) - \hat{h}_\eta(n+1)\right| = \eta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|\hat{h}(\eta n) - \hat{h}(\eta(n+1))\right| \leqslant \eta \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\hat{h}'(\xi)\right| d\xi$$

Posons $H(x) = xh(x)$ et notons que $\hat{h}'(\xi) = -i\hat{H}(\xi)$.
Remarquons d'autre part que H est de classe C^2, nulle hors de $[-2, 2]$ et que pour $x \in [-1, 1]$, $H(x) = x$. Mais alors :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\hat{h}'(\xi)\right| d\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\hat{H}(\xi)\right| d\xi \\ &= \int_{|\xi|\leqslant 1} \left|\hat{H}(\xi)\right| d\xi + \int_{|\xi|\geqslant 1} \left|\hat{H}(\xi)\right| d\xi\end{aligned}$$

Mais $M_1 = \int_{|\xi|\leqslant 1} \left|\hat{H}(\xi)\right| d\xi < \infty$ et est indépendant de η. Par ailleurs, par deux intégrations par parties,

$$\hat{H}(\xi) = \int_{-2}^{2} e^{-i\xi x} H(x)dx = -\frac{1}{\xi^2}\int_{-2}^{2} e^{-i\xi x} H"(x)dx$$

d'où avec le changement de variables $u = \xi x$, vu que $H"(x) = 0$ sauf si $1 \leqslant |x| \leqslant 2$

$$\hat{H}(\xi) = \int_{|\xi|\leqslant|u|\leqslant 2|\xi|} e^{-iu}\frac{H"(\frac{u}{\xi})}{\xi^3}du$$

donc

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|\geqslant 1}\left|\hat{H}(\xi)\right| d\xi &\leqslant \int_{|\xi|\geqslant 1}\left|\int_{|\xi|\leqslant|u|\leqslant 2|\xi|} e^{-iu}\frac{H"(\frac{u}{\xi})}{\xi^3}du\right| \\ &\leqslant \int_{|\xi|\geqslant 1}\int_{|\xi|\leqslant|u|\leqslant 2|\xi|}\frac{\|H"\|_\infty}{\xi^3}dud\xi \\ &\leqslant 2\|H"\|_\infty \int_{|\xi|\geqslant 1}\frac{d\xi}{\xi^2} = 4\|H"\|_\infty = M_2 < \infty\end{aligned}$$

et par suite $M = \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\hat{h}'(\xi)\right| d\xi \leqslant M_1 + M_2 < \infty$ et ainsi

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\hat{h}_\eta(n) - \hat{h}_\eta(n+1)\right| < \eta M$$

Fixons alors $\varepsilon > 0$ et soit η tel que si $\left|1 - e^{ix}\right| < \varepsilon$ alors $|x| < \eta$ (on peut prendre $\eta \leqslant \frac{\pi}{2}\varepsilon$). Posons alors $f_\varepsilon = (1 - e^{ix})g_\eta$ et remarquons que $\hat{f}_\varepsilon(n) = \hat{g}_\eta(n) - \hat{g}_\eta(n+1)$. Par suite

$$\|f_\varepsilon\|_{A(\mathbb{T})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|\hat{f}_\varepsilon(n)\right| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|\hat{g}_\eta(n) - \hat{g}_\eta(n+1)| < M\eta \leqslant 2\pi M\varepsilon$$

Ainsi $F_\varepsilon = 1 - e^{ix} - f_\varepsilon$ répond à la question.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le résultat suivant :

Lemme 2.8 : *Il existe une constante c telle que pour tout $t \in \mathbb{T}$ et tout $\varepsilon > 0$, si Γ est un ensemble d'entiers tels que, pour tout n dans Γ, $\left|1 - e^{int}\right| < \varepsilon$, alors pour tout $1 \leqslant p < \infty$, et pour tout $f \in L^p_\Gamma(\mathbb{T},\mu)$:*

$$\|f - f_t\|_p \leqslant c\varepsilon\|f\|_p$$

où $f_t(x) = f(x-t)$ *est la translatée de* f *par* t.

Preuve : Comme $1 - e^{ix}$ est de synthèse spectrale,

$\exists c \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists F_\varepsilon \in A(\mathsf{T})$ vérifiant les conditions $i/$ et $ii/$ du lemme 3.7.

Plus précisément $1 - e^{ix} - F_\varepsilon(x)$ peut s'écrire $1 - e^{ix} - F_\varepsilon(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{ijx}$ avec $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| < c\varepsilon$, donc

$$1 - e^{ix} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{ijx} \quad si \ \left|1 - e^{ix}\right| < \varepsilon$$

Fixons alors $t \in \mathsf{T}$ et $\varepsilon > 0$. Soit Γ un ensemble d'entiers tels que $\left|1 - e^{int}\right| < \varepsilon$. Il vient alors, pour tout $f \in L^p_\Gamma(\mathsf{T}, \mu)$:

$$\begin{aligned}
\|f - f_t\|_p &= \left\| \sum_{n\in\Gamma} \hat{f}(n)(1 - e^{int})e^{inx} \right\|_p \\
&= \left\| \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \sum_{n\in\Gamma} \hat{f}(n) e^{in(x+jt)} \right\|_p \\
&= \left\| \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j f_{jt} \right\|_p \\
&\leqslant \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| \, \|f_{jt}\|_p < c\varepsilon \, \|f\|
\end{aligned}$$

Montrons maintenant la condition suffisante du théorème 2.5.

Supposons que $B \subset \mathsf{T}$ est tel qu'il existe $\{t_k\}_{k=1}^m$ avec $\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{m}(B + t_k)\Big) = 1$

Alors pour tout $f \in L^r(\mathsf{T}, \mu)$ on a :

$$
\begin{aligned}
\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{T}} |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_{\bigcup_{k=1}^m (B+t_k)} |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{T}} \left|f\chi_{\bigcup_{k=1}^m (B+t_k)}\right|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \left(\int_{\mathbb{T}} \left(|f|\sum_{k=1}^m \chi_{B+t_k}\right)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left\| |f| \sum_{k=1}^m \chi_{B+t_k} \right\|_p \\
&\leqslant \sum_{k=1}^m \| |f| \chi_{B+t_k} \|_p \\
&= \sum_{k=1}^m \|f_{t_k}\chi_B\|_p^p \\
&\leqslant m \|f\chi_B\|_p + \sum_{k=1}^m \|f - f_{t_k}\|_p
\end{aligned}
$$

Soit c la constante donnée par le lemme 3.8 et posons $\varepsilon = \frac{1}{2cm}$. Soit $\Lambda(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{Z} : \max_{1\leqslant k\leqslant m} |1 - e^{int_k}| < \varepsilon\}$, alors par le lemme 3.6 il vient, pour tout $f \in L^p_{\Lambda(\varepsilon)}(\mathbb{T}, \mu)$ $\|f\|_p \leqslant m \|f\chi_B\|_p + mc\varepsilon \|f\|_p$ *i.e.*

$$\|f\chi_B\|_p \geqslant \frac{1}{2m} \|f\|_p$$

La preuve sera achevée dès qu'on aura trouvé une partie Λ de $\Lambda(\varepsilon)$ de densité positive. D'après le lemme 2.1, il suffit de montrer que $dens_* \Lambda(\varepsilon) > 0$.

Considérons l'homomorphisme de groupe $\psi : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{T}^m$ défini par $\psi(n) = \left(e^{int_1}, e^{int_2}, \ldots, e^{int_m}\right)$.

Par compacité de $\mathbb{T}^m$, l'image de ψ étant recouverte par des ouverts de la forme

$$G_j = \left\{\bar{x} = (e^{ix_1}, \ldots, e^{ix_m}) \in \mathbb{T}^m : \max_{1\leqslant k\leqslant m} \left|e^{ijt_k} - e^{ix_k}\right| < \varepsilon\right\}$$

elle est encore recouverte par les G_j pour $j \in \Delta$, où Δ est un ensemble fini. Ceci implique que $\mathbb{Z} = \bigcup_{j\in\Delta} \Gamma_j$ où Γ_j est défini par :

$$\Gamma_j = \left\{n \in \mathbb{Z} : (e^{int_1}, e^{int_2} \ldots, e^{int_m}) \in G_j\right\}$$

Mais, pour tout $j \in \Delta$, on a :

$$\Gamma_j = \left\{ n \in \mathsf{Z} : (e^{int_1}, e^{int_2} \ldots, e^{int_m}) \in \mathsf{T}^m : \max_{1 \leqslant k \leqslant m} \left| e^{ijt_k} - e^{int_k} \right| < \varepsilon \right\}$$
$$= \left\{ n \in \mathsf{Z} : (e^{int_1}, e^{int_2} \ldots, e^{int_m}) \in \mathsf{T}^m : \max_{1 \leqslant k \leqslant m} \left| 1 - e^{i(n-j)t_k} \right| < \varepsilon \right\}$$

donc Γ_j est un j-translaté de $\Delta(\varepsilon)$, ce qui implique que $\Delta(\varepsilon)$ n'a pas de sauts arbitrairement grands *i.e.* $dens_* \Delta(\varepsilon) > 0$ ce qui termine la première partie de la preuve.

Pour montrer la condition nécessaire du théorème 2.5, établissons d'abord le lemme suivant :

Lemme 2.9 : *Soit $\gamma > 0$ et un entier $r > 0$.*
Soit $B \subset \mathsf{T}$ tel que quel que soit $(t_k)_{k=1}^r \in \mathsf{T}^r$ on a

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{r} (B + t_k)\Big) < 1$$

Il existe alors un entier l_0 tel que pour tout entier $l \geqslant l_0$ et pour tout élément $\{t_k\}_{k=1}^r$ de T^r il existe un intervalle dyadique J tel que $\mu(J) = 2^{-l}$ et $\mu\Big((J + t_k) \cap B\Big) < \gamma 2^{-l}$ pour $1 \leqslant k \leqslant r$.

Preuve : Commençons par introduire la notation suivante :
pour $\bar{t} = (t_1, \ldots, t_r)$ dans T^r et pour un intervalle I de T, on pose

$$\varphi_I(\bar{t}) = \frac{\mu\Big(I \cap \bigcup_{k=1}^r (B - t_k)\Big)}{\mu(I)}$$

Notons que d'après le théorème de Lebesgue [1] $\lim_{I \to \{x\}} \varphi_I(\bar{t}) = 0$ pour presque tout $x \notin \bigcup_{k=1}^{r} (B - t_k)$. Plus précisément, si $\chi_{\bar{t}}$ désigne la fonction caractéristique de $\bigcup_{k=1}^{r} (B - t_k)$, notons que

$$\varphi_I(\bar{t}) = \frac{1}{\mu(I)} \int_I \chi_{\bar{t}}(u) d\mu(u)$$

donc par le théorème de Lebesgue $\lim_{I \to \{x\}} \varphi_I(\bar{t}) = \chi_{\bar{t}}(x)$, μ presque partout (en tout point de Lebesgue de $\chi_{\bar{t}}$). Mais, comme $\chi_{\bar{t}}(x) = 0$ si $x \notin \bigcup_{k=1}^{r} (B - t_k)$, $\lim_{I \to \{x\}} \varphi_I(\bar{t}) = 0$ pour presque tout $x \notin \bigcup_{k=1}^{r} (B - t_k)$.

---
[1] cf Halmos *Measure Theory* p208

L'hypothèse implique donc que pour tout $\bar{t} \in \mathbf{T}^r$ il existe un $x \in \mathbf{T}$ et un intervalle dyadique $I(\bar{t}) \ni x$ tel que $\varphi_{I(\bar{t})}(\bar{t}) < \gamma$.

Notons également que φ_I est continue.

En effet : soit $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$, notons que tous les $\chi_{\bar{t}+\bar{\varepsilon}}$ sont bornés par 1 et que $\chi_{\bar{t}+\bar{\varepsilon}}$ tend ponctuellement vers $\chi_{\bar{t}}$ quand $\bar{\varepsilon}$ tend vers 0, donc par le théorème de convergence dominée $\varphi_I(\bar{t}+\bar{\varepsilon})$ tend vers $\varphi_I(\bar{t})$, d'où la continuité.

Par suite, pour tout $\bar{t} \in \mathbf{T}^r$, il existe un voisinage $W_{\bar{t}}$ de $\bar{t}$ tel que pour tout $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_r) \in W_{\bar{t}}$

$$\varphi_{I(\bar{t})}(\bar{x}) < \gamma$$

Les $W_{\bar{t}}$ recouvrent $\mathbf{T}^r$ qui est compact, il existe donc $\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_H$ tels que $(W_{\bar{t}_n})_{n=1}^H$ recouvre encore $\mathbf{T}^r$. Alors, en posant $I_k = I(\bar{t}_k)$, pour tout $\bar{t} \in \mathbf{T}^r$, il existe n tel que $\bar{t} \in W_{\bar{t}_n}$ et alors $\varphi_{I_n}(\bar{t}) < \gamma$.

Par suite, pour tout $\bar{t} \in \mathbf{T}^r \quad \min\limits_{1 \leqslant h \leqslant H} \varphi_{I_h}(t) < \gamma$.

Pour chaque h, $1 \leqslant h \leqslant H$, il existe un entier $l(h)$ tel que $\mu(I_h) < 2^{-l(h)}$. Soit l un entier tel que $l \geqslant l_0 = \max\limits_{1 \leqslant h \leqslant H} l(h)$, écrivons chaque intervalle dyadique I_h en une réunion disjointe $I_h = \bigcup\limits_{i \in \Delta_h} I_{h,i}$ d'intervalles dyadiques $\{I_{h,i}\}_{i \in \Delta_h}$ de longueur 2^{-l}. Alors, $\forall \bar{t} \in \mathbf{T}^r$,

$$\varphi_{I_h}(\bar{t}) = \sum_{i \in \Delta_h} \frac{\mu(I_{h,i})}{\mu(I_h)} \varphi_{I_{h,i}}(\bar{t})$$

Puisque $\sum\limits_{i \in \Delta_h} \dfrac{\mu(I_{h,i})}{\mu(I_h)} = 1$, pour tout $\bar{t} \in \mathbf{T}^r$, et tout $1 \leqslant h \leqslant H$, il existe $i \in \Delta_h$ tel que $\varphi_{I_{h,i}}(\bar{t}) < \varphi_{I_h}(\bar{t})$. Ainsi

$$\begin{aligned} \gamma &> \min_{|J|=2^{-l}} \varphi_J(\bar{t}) \\ &= \min_{|J|=2^{-l}} 2^l \mu\Big(J \cap \bigcup_{k=1}^{r} (B - t_k)\Big) \\ &\geqslant \min_{|J|=2^{-l}} 2^l \max_{1 \leqslant k \leqslant r} \mu\Big((J + t_k) \cap B\Big) \end{aligned}$$

c.q.f.d.

Nous sommes maintenant en mesure de terminer la démonstration du théorème 2.5. Il s'agit donc de montrer que les ensembles associés sont nécessairement de la forme voulue.

Soit donc $B \subset \mathbf{T}$, tel qu'il existe $\Lambda \subset \mathbf{Z}$ et $c > 0$ tels que

i/ $dens\,\Lambda > c$

ii/ $\forall f \in L^r_\Lambda(\mathbf{T}, \mu) \quad \|f\chi_B\|_p \geqslant c\,\|f\|_p$

supposons de plus que

iii/ $\forall m \geqslant 1 \quad \forall \{t_k\}_{k=1}^m \in \mathbb{T}^m \quad \mu\Big(\cup_{k=1}^m (B+t_k)\Big) < 1$

Nous aurons besoin dans la suite de la preuve de trois paramètres (que nous fixerons le moment venu) τ, γ et un entier r. Soit également l_0 un entier donné par le lemme 2.9 avec les paramètres r et γ.

Soit $\Lambda_0 = \{n \in \Lambda : |n| \leqslant 2^l\}$, d'après i/, si l est assez grand, $|\Lambda_0| > c2^l$. Demandons de plus que $l \geqslant l_0$ pour que nous puissions, le moment venu, appliquer le lemme 2.9. Posons pour $x \in \mathbb{T}$,

$$F(x) = \sum_{n \in \Lambda_0} e^{inx}$$

Alors $F \in L^p_\Lambda(\mathbb{T}, \mu)$ et $F(0) = \|F\|_\infty = |\Lambda_0| > c2^{l+1}$.
Posons $J = \left[-2^{-(l+1)}, 2^{-(l+1)}\right]$. Pour $x \in J$ on a

$$|\Re F(x) - F(0)| \leqslant |F(x) - F(0)| \leqslant |\Lambda_0| \max_{n \in \Lambda_0} \left|e^{inx} - 1\right| \leqslant |\Lambda_0| 2^l 2^{-(l+1)} = \frac{|\Lambda_0|}{2}$$

d'où pour $x \in J$, $\Re F(x) \geqslant F(0) - \dfrac{|\Lambda_0|}{2} = \dfrac{|\Lambda_0|}{2}$.
On a alors, pour tout $t \in \mathbb{T}$

$$\begin{aligned}
\frac{c}{2} < 2^{-l-1}\frac{|\Lambda_0|}{2} &\leqslant \int_J \Re F(x)dx \\
&\leqslant \left|\int_J F(x)d\mu(x)\right| \\
&\leqslant 2^{-\frac{l}{p'}} \|F\|_p \\
&= 2^{-\frac{l}{p'}} \|F_t\|_p \\
&\leqslant 2^{-\frac{l}{p'}} c^{-1} \|F_t \chi_B\|_p
\end{aligned}$$

grâce à la condition ii/, soit

$$c^2 \leqslant 2^{-\frac{l}{p'}} \|F_t \chi_B\|_p \qquad (*)$$

La suite de la preuve consiste à trouver à l'aide du Lemme 2.9 un $t \in \mathbb{T}$ tel que $\|F_t \chi_B\|_p$ soit suffisamment petit ; on aura alors une contradiction grâce à un choix judicieux des paramètres intervenant dans le lemme 2.9.

Il s'agît, pour commencer, de trouver un "bon" système $(t_k)_{k=1}^m$ tel que $\mu\Big(\bigcup_{k=1}^m (B+t_k)\Big) < 1$. Fixons donc un premier paramètre τ ad hoc.

Notons que $F(0) = |\Lambda_0| > c2^l$. Nous choisirons donc τ tel que $\tau < c < 1$. Soit alors $\{t_k\}_{k=1}^m$ un systèmes de points de $\mathbb{T}$, de distance mutuelle $> 2^{-l-1}$, tels que $|F(t_k)| \geqslant \tau 2^l$ pour $1 \leqslant k \leqslant m$ et qui soit de plus maximal au sens suivant :

$$|F(t)| \geqslant \tau 2^l \Rightarrow \exists k, \quad 1 \leqslant k \leqslant m \quad |t - t_k| \leqslant 2^{-l-1}$$

Pour $1 \leqslant k \leqslant m$ posons $W_k = \{x \in \mathbf{T} : |x - t_k| < \tau 2^{-l-5}\}$ alors $\mu(W_k) = \tau 2^{-l-4}$ et pour $x \in W_k$ on a :

$$\begin{aligned} |F(x)| &\geqslant |F(t_k)| - |F(t_k) - F(x)| \\ &\geqslant \tau 2^l - \sum_{n \in \Lambda_0} \left|e^{int_k} - e^{inx}\right| \\ &\geqslant \tau 2^l - |\Lambda_0| 2^l \tau 2^{-l-5} \end{aligned}$$

car $\sum_{n \in \Lambda_0} \left|e^{int_k} - e^{inx}\right| \leqslant |\Lambda_0| \max_{n \in \Lambda_0} \left|e^{int_k} - e^{inx}\right| \leqslant |\Lambda_0| 2^l |t_k - x|$, pour $1 \leqslant k \leqslant m$.

D'où finalement $|F(x)| > \tau 2^{l-1}$, si $x \in W_k$, $1 \leqslant k \leqslant m$.

Notons aussi que, comme $\tau < 1$ et comme $|t_k - t_{k'}| > 2^{-l-1}$, les W_k sont 2 à 2 disjoints. Alors

$$2^{l+2} \geqslant |\Lambda_0| = \int_{\mathbf{T}} |F(x)|^2 \, d\mu \geqslant \sum_{k=1}^{m} \int_{W_k} |F(x)|^2 \, d\mu \geqslant m\mu(W_k)\tau^2 2^{2l-2} \geqslant m\tau^3 2^{l-6}$$

Prenons alors $r = \left[\frac{2^8}{\tau^3}\right] + 1$ de sorte que $m \leqslant 2^8 \tau^{-3} < r$.

Nous sommes maintenant en mesure de choisir un t qui nous conduira à la contradiction. Comme $m < r$ nous pouvons appliquer le lemme 3.9, ce qui implique l'existence d'un intervalle dyadique J de longueur 2^{-l} tel que

$$\forall 1 \leqslant k \leqslant m \quad \mu\Big((J + t_k) \cap B\Big) < \gamma 2^{-l}$$

Il existe alors $t \in \mathbf{T}$ tel que $J = I + t$ avec $I = \left[-2^{-l-1}, 2^{-l-1}\right]$ et alors

$$\forall 1 \leqslant k \leqslant m \quad \mu\Big((I + t + t_k) \cap B\Big) < \gamma 2^{-l}$$

Il ne nous reste plus maintenant qu'à majorer $\|F_t \chi_B\|_p$ et à choisir convenablement les paramètres τ et γ pour obtenir une contradiction.

Soit $V = \mathbf{T} \setminus \bigcup_{k=1}^{m} (I + t + t_k)$, comme $\|F\|_\infty \leqslant |\Lambda_0|$ remarquons qu'alors :

$$\begin{aligned} \|F_t \chi_B\|_p^p &\leqslant \int_V |F_t(x)|^p \, d\mu(x) + \sum_{k=1}^{m} \int_{(I+t+t_k) \cap B} |F_t(x)|^p \, d\mu(x) \\ &\leqslant \int_V |F_t(x)|^p \, d\mu(x) + m \|F_t\|_\infty^p \gamma 2^{-l} \\ &\leqslant \int_V |F_t(x)|^p \, d\mu(x) + \cdot\cdot |\Lambda_0|^p \gamma 2^{-l} \end{aligned}$$

Mais, pour $x \in V$, $x - t$ est à distance $> 2^{-l-1}$ de tous le t_k $(k = 1, \dots, m)$ donc par maximalité de $(t_k)_{k=1}^m$ on a $|F(x-t)| < \tau 2^l$ *i.e.* $|F_t(x)| < \tau 2^l$. Il s'en suit que

$$\begin{aligned}
\|F_t \chi_B\|_p^p &< (\tau 2^l)^{p-2} \int_V |F_t(x)|^2 \, d\mu(x) + r\,|\Lambda_0|^p \gamma 2^{-l} \\
&\leqslant \tau^{p-2} 2^{l(p-2)} |\Lambda_0| + r\,|\Lambda_0|^p \gamma 2^{-l} \\
&\leqslant (\tau^{p-2} + r\gamma) 2^{l(p-1)+2p}
\end{aligned}$$

ce qui avec (*) nous donne :

$$c^2 < (\tau^{1-\frac{2}{p}} + (r\gamma)^{\frac{1}{p}}) 2^3$$

Prenons donc τ tel que $\tau^{1-\frac{2}{p}} = c^2 2^{-4}$ (*i.e.* $\tau = (c^2 2^{-4})^{\frac{p}{p-2}}$) donc $(r\gamma)^{\frac{1}{p}} >$ $c^2 2^{-4}$ et donc $\gamma > \dfrac{c^{2p}}{r 2^{4p}}$ ce qui aboutit à une contradiction pour peu qu'on choisisse $\gamma = \frac{c^{2p}}{r 2^{4p}}$ *c.q.f.d.*

3
Systèmes Hilbertiens

Soit μ la mesure de Haar sur T et soit $B \subset \mathsf{T}$ avec $\mu(B) > 0$. Remarquons que le fait que l'opérateur $T : L^2(\mathsf{T}, \mu) \mapsto L^2(\mathsf{T}, \mu)$ défini par $Tf = f\chi_B$ soit borné peut s'exprimer par le fait qu'il existe un $M < \infty$ tel que les vecteurs $\Psi_n(x) = \chi_B e^{inx}$ (pour $n \in \mathsf{Z}$) vérifient pour tout $(a_i)_{i\in\mathsf{Z}} \in \mathsf{C}^{\mathsf{Z}}$:

$$\left\| \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \Psi_n \right\| \leqslant M \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Ceci conduit naturellement à la notion de système Hilbertien :

Définition : *Un système normalisé de vecteurs $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ d'un espace de Banach X est dit Hilbertien s'il existe une constante $M < \infty$ telle que pour toute suite quasi-nulle $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathsf{C}^{\mathsf{Z}}$ on a*

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\| \leqslant M \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Dans ce cas on dit que $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ est Hilbertien de constante M.

Si l'inégalité inverse est vraie i.e. s'il existe une constante $M' < \infty$ telle que pour toute suite quasi-nulle $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathsf{C}^{\mathsf{N}}$ on a

$$\forall (a_n)_{n=1}^{\infty} \qquad \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant M' \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\|$$

alors $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ est dit Besselien.

Il se trouve que le théorème 3.2 s'étend à tout système Hilbertien dans un espace de Hilbert arbitraire. Néanmoins, au lieu d'une densité positive, on ne poura plus qu'obtenir une densité supérieure positive :

3.1 Une extension du théorème 2.4 aux systèmes Hilbertiens

Théorème 3.1. *Il existe une constante $d > 0$ telle que pour tout espace de Hilbert X et tout système Hilbertien $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de X de constante $M < \infty$,* *il existe une partie Λ de $\mathbb{N}$ avec $\overline{dens}\,\Lambda \geqslant \dfrac{d}{M^2}$ telle que $\{x_n\}_{n\in\Lambda}$ soit aussi Besselien de constante d^{-1}*

En particulier, $\{x_n\}_{n\in\Lambda}$ est Md^{-1} équivalent à un système orthonormal.

Preuve : Comme on ne s'intéresse qu'à $\overline{[x_n]}$ on peut supposer que X est séparable, et par suite X est isométrique à ℓ^2. Pour simplifier, on va donc supposer que $X = \ell^2$.

Soient alors $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ la base canonique de ℓ^2 et R_n (respectivement S_n) la projection orthogonale de ℓ^2 sur $[e_i]_{i=1}^{n}$ (respectivement sur $[e_i]_{i=n+1}^{\infty}$).

L'hypothèse nous dit que l'opérateur $T : \ell^2 \mapsto \ell^2$ défini par $Te_n = x_n$ est de norme $\leqslant M$. Notons que pour $n \geqslant 1$, $\|Te_n\| = \|x_n\| = 1$.

Soient enfin $c > 0$ la constante donnée par le théorème 1.2 et $(\tau_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de réels strictement positifs tels que $\tau = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n^2\right)^{\frac{1}{2}} < \dfrac{c}{2M}$.

Nous allons maintenant construire deux suites croissantes d'entiers $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ et $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ et une suite $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ de parties de $\mathbb{N}$.

Prenons $q_1 = 1$, $\sigma_1 = \{q_1 + 1, 2q_1\}$ et soit r_1 tel que $\left\| S_{r_1} |_{[x_j]_{j\in\eta_1}} \right\| < \dfrac{\tau_1}{2}$. (Notons que ceci est possible puisque S_n restreint à un sous espace de dimension finie tend vers 0 en norme quand n tend vers l'infini.)

Montrons maintenant que

Lemme : *Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier $p \geqslant 1$ il existe un entier Q tel que pour tout $q > Q$, il existe $\sigma_q \subset \{q+1, \dots, 2q\}$ avec $|\sigma_q| \geqslant \dfrac{cq}{M^2}$ et*

$$\left\| R_p |_{[x_j]_{j\in\sigma_q}} \right\| < \varepsilon$$

En effet, fixons p ; si le lemme n'était pas vérifié, on pourait trouver un $\alpha > 0$ tel que, pour tout entier Q, il exi-te un entier $q > Q$ tel que, pour tout $\sigma \subset \{q+1, \dots, 2q\}$ avec $|\sigma_q| \geqslant \dfrac{cq}{M^2}$ on a

$$\left\| R_p |_{[x_j]_{j\in\sigma}} \right\| > \alpha$$

On peut ainsi construire une suite $(q_k)_{k\geqslant 1}$ telle que $q_{k+1} \geqslant 2q_k$ et de plus, pour tout $\sigma \subset \{q+1, \dots, 2q\}$ avec $|\sigma| \geqslant \dfrac{cq}{M^2}$ on a

$$\left\| R_p |_{[x_j]_{j\in\sigma}} \right\| > \alpha$$

i.e. il existe $u_\sigma = \sum_{i\in\sigma} c_i x_i$ avec $\|u_\sigma\| = 1$ et $\|R_p u_\sigma\| \geqslant \alpha$. (*)

Mais $T |_{[x_j]_{j=q_k+1}^{2q_k}}$ vérifie les hypothèses du théorème 1.2, on obtient alors $\sigma_k \subset \{q_k + 1, \dots, 2q_k\}$ avec $|\sigma_k| \geqslant \dfrac{cq_k}{M^2}$ telle que, pour tout $(a_i)_{i\in\sigma_k} \in \mathbb{C}^{|\sigma_k|}$ on a

$$\left[\sum_{i\in\sigma_k}|a_i|^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{c}\left\|\sum_{i\in\sigma_k} a_i x_i\right\|$$

Notons alors $u_k = u_{\sigma_k} = \sum_{i\in\sigma_k} c_i x_i$ donné par (*), et montrons que $u_k \to^{\omega} 0$:
Soit donc $\xi \in (\ell_2)^* = \ell_2$

$$\begin{aligned}
< \xi, u_k > &= \left|\sum_{i\in\sigma_k} c_i < \xi, x_i >\right| \\
&\leqslant \left(\sum_{i\in\sigma_k}|c_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i\in\sigma_k}|< \xi, x_i >|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \frac{1}{c}\left\|\sum_{i\in\sigma_k} c_i x_i\right\| \left(\sum_{i\in\sigma_k}|< \xi, Te_i >|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{c}\,\|u_k\| \left(\sum_{i\in\sigma_k}|< T^*\xi, e_i >|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \frac{1}{c}\left(\sum_{i\geqslant q_k}|< T^*\xi, e_i >|^2\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

car $\sum_{i=1}^{\infty}|< \chi, e_i >|^2 < \infty$ pour tout $\chi \in \ell_2$ et $T^*\xi \in (\ell_2)^* = \ell_2$.
Mais q_k tend vers l'infini quand k tend vers l'infini, on a donc bien

$$< \xi, u_k > \to_{k\to\infty} 0$$

u_k est donc une suite telle que $\|u_k\| = 1$ et $u_k \to^{\omega} 0$ et telle que de plus $\|R_p(u_k)\| > \alpha > 0$.

u_k admet alors une sous-suite équivalente à une suite bloc de la base $(e_k)_{k\geqslant 1}$ *i.e.*

On peut supposer, quitte à extraire une suite, que $(u_k)_{k\geqslant 1}$ est équivalent à un système orthonormal $(\varepsilon_k)_{k\geqslant 1}$. Ceci impliquerait l'existence d'une constante $M > 0$ telle que pour toute suite quasi-nulle $(a_k)_{k\geqslant 1}$ de scalaires :

$$\frac{1}{M}\left\|\sum_{k\geqslant 1} a_k\varepsilon_k\right\| \leqslant \left\|\sum_{k\geqslant 1} a_k u_k\right\| \leqslant M\left\|\sum_{k\geqslant 1} a_k\varepsilon_k\right\|$$

Alors

$$\alpha^2 k \leqslant \sum_{m=1}^{k} \|R_p(u_m)\|_2^2 \leqslant M^2 \sum_{m=1}^{k} \|R_p(\varepsilon_k)\| \leqslant M^4 \|R_p\|_{H.S.}^2 \leqslant M^4 p$$

et ceci est vrai pour tout k alors que p est fixé, d'où la contradiction.

Appliquons donc le lemme avec $p = r_1$:
Il existe $q_2 \geqslant 2q_1$ et $\eta_2 \subset \{q_2+1,\ldots,2q_2\}$ avec $|\eta_2| \geqslant \frac{cq_2}{M^2}$ tel que

$$\left\| R_{r_1} \, |_{[x_j]_{j\in\eta_2}} \right\| < \frac{\tau_2}{2}$$

On choisit alors $r_2 > r_1$ tel que

$$\left\| S_{r_2} \, |_{[x_j]_{j\in\eta_2}} \right\| < \frac{\tau_2}{2}$$

En continuant ainsi, on construit par récurrence deux suites croissantes d'entiers $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ et $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ ainsi qu'une suite $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ de parties de $\mathbb{N}$ telles que $|\eta_n| \geqslant \frac{cq_2}{M^2}$ et telles que de plus, pour tout n :

$$\left\| R_{r_{n-1}} \, |_{[x_j]_{j\in\eta_n}} \right\| < \frac{\tau_n}{2} \qquad \left\| S_{r_n} \, |_{[x_j]_{j\in\eta_n}} \right\| < \frac{\tau_n}{2}$$

Fixons alors n et appliquons le théorème 1.2 à l'opérateur $T\,|_{\eta_n}$. Il s'en suit qu'il existe $\sigma_n \subset \eta_n$ avec $|\sigma_n| \geqslant \dfrac{c\,|\eta_n|}{M^2} \geqslant \dfrac{c^2 q_n}{M^4}$ et telle que, pour tout $(a_j)_{j\in\sigma_n} \in \mathbb{C}^{|\sigma_n|}$:

$$\left\| \sum_{j\in\sigma_n} a_j x_j \right\|_2 \geqslant c \left(\sum_{j\in\sigma_n} |a_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Considérons alors $\Lambda = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_n$ et observons que pour tout n, on a

$$\frac{|\Lambda \cap \{1,\ldots,2q_n\}|}{2q_n} \geqslant \frac{|\sigma_n|}{2q_n} \geqslant \frac{c^2}{2M^4}$$

i.e. $\overline{dens}\Lambda \geqslant \frac{c^2}{2M^4} > 0$

D'autre part, pour tout $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ tel que $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=\sigma_n} |a_j|^2 = 1$, on a

$$S = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=\sigma_n} a_j x_j \right\|_2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (R_{r_n} + S_{r_n}) \sum_{j\in\sigma_n} a_j x_j \right\|_2$$

$$\geqslant \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (R_{r_n} - R_{r_{n-1}}) \sum_{j\in\sigma_n} a_j x_j \right\|_2 - \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (R_{r_{n-1}} + S_{r_n}) \sum_{j\in\sigma_n} a_j x_j \right\|_2$$

Mais les $(R_{r_n} - R_{r_{n-1}}) \sum_{j\in\sigma_n} a_j x_j$ sont 2 à 2 orthogonaux et $\sum_{j\in\sigma_n} a_j x_j \in [x_j]_{j=q_n+1}^{2q_n}$ donc

$$S \geqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left\|(R_{r_n} - R_{r_{n-1}}) \sum_{j\in\sigma_n} a_j x_j\right\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}} - \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n \left\|\sum_{j\in\sigma_n} a_j x_j\right\|_2$$

$$\geqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left\|(R_{r_n} - R_{r_{n-1}}) \sum_{j\in\sigma_n} a_j x_j\right\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}} - \tau M$$

Il vient alors

$$(S + \frac{c}{2})^2 \geqslant (S + \tau M)^2 \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left\|(R_{r_n} - R_{r_{n-1}}) \sum_{j\in\sigma_n} a_j x_j\right\|_2^2$$

$$\geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left\|\sum_{j\in\sigma_n} a_j x_j\right\|_2^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \left\|(R_{r_{n-1}} + S_{r_n}) \sum_{j\in\sigma_n} a_j x_j\right\|_2^2$$

$$\geqslant c^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j\in\sigma_n} |a_j|^2 - \tau^2 M^2$$

$$> \frac{2c^2}{4}$$

et ainsi $S \geqslant (\sqrt{3} - 1)\frac{c}{2}$. *i.e.* par homogénéité :

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=\sigma_n} a_j x_j\right\|_2 \geqslant (\sqrt{3} - 1)\frac{c}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=\sigma_n} |a_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

c.q.f.d.

3.2 Un contre-exemple dans le cas des systèmes Besseliens

Il n'est pas vrai en général que pour tout système Besselien ou même pour toute base $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, il existe un ensemble Λ d'entiers tel que $\overline{dens}\Lambda > 0$ et $\{x_n\}_{n\in\Lambda}$ soit également Hilbertien.

En effet, fixons $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ et considérons les vecteurs

$$f_n = c(\alpha)e^{inx}/\,|x|^\alpha\,; \qquad |n| = 0, 1, 2, \ldots$$

où $c(\alpha)$ est choisi de sorte que tous les f_n soient de norme 1 dans $L_2(-\pi, \pi)$. Les f_n forment une base de L_2 [1].
Par ailleurs

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} &= \left\|\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}\right\|_2 \\ &= \left\|\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{e^{inx}}{|x|^\alpha}\right)|x|^\alpha\right\|_2 \\ &\leqslant \left\|\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{e^{inx}}{|x|^\alpha}\right\|_2\end{aligned}$$

Donc $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est un système Besselien.

Supposons maintenant qu'il existe $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ avec $\lambda = \overline{dens}\Lambda > 0$ tel que $\{f_n\}_{n\in\Lambda}$ soit également Hilbertien avec une constante $M < \infty$. Soit alors k un entier tel que $\Lambda_k = \Lambda \cap \{1, \ldots, k\}$ soit de cardinal $|\Lambda_k| \geqslant \frac{\lambda k}{2}$. Fixons également un β ad hoc.

Par Cauchy Schwarz, il vient alors :

$$\int_0^{\frac{\beta}{k}} \left|\sum_{n\in\Lambda_k} f_n(x)\right| dx \leqslant \left\|\sum_{n\in\Lambda_k} f_n(x)\right\|_2 \sqrt{\frac{\beta}{k}} \leqslant M\sqrt{\beta}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\beta}{k}} \left|\sum_{n\in\Lambda_k} c(\alpha)\frac{e^{inx}}{|x|^\alpha}\right| dx \geqslant& c(\alpha)\left(\int_0^{\frac{\beta}{k}} \sum_{n\in\Lambda_k} \frac{1}{x^\alpha}dx - \int_0^{\frac{\beta}{k}} \left|\sum_{n\in\Lambda_k} \frac{e^{inx}-1}{x^\alpha}\right| dx\right) \\ \geqslant& c(\alpha)\left(\frac{|\Lambda_k|\beta^{1-\alpha}}{(1-\alpha)k^{1-\alpha}} - \sum_{n\in\Lambda_k}\int_0^{\frac{\beta}{k}} \frac{|e^{inx}-1|}{x^\alpha}dx\right) \\ \geqslant& c(\alpha)\left(\frac{\lambda k^\alpha \beta^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)} - 2\sum_{n\in\Lambda_k}\int_0^{\frac{\beta}{k}} \frac{\sin\frac{nx}{2}}{x^\alpha}dx\right)\end{aligned}$$

mais $2\sum_{n\in\Lambda_k}\int_0^{\frac{\beta}{k}} \frac{\sin\frac{nx}{2}}{x^\alpha}dx \leqslant 2\sum_{n\in\Lambda_k}\int_0^{\frac{\beta}{k}} \frac{nx^{1-\alpha}}{2}dx = \frac{\beta^{2-\alpha}}{2-\alpha}k^\alpha\left(\frac{1}{k^2}\sum_{n\in\Lambda_k} n\right)$ et comme $n \leqslant k$ si $n \in \Lambda_k$ il vient

---

[1] cf Hardy et Littlewood *Duke Math J.* 2 *354-382* en particulier pages 371 et 372.

$$\int_0^{\frac{\beta}{k}} \left| \sum_{n\in\Lambda_k} c(\alpha) \frac{e^{inx}}{|x|^\alpha} \right| dx \geqslant c(\alpha) k^\alpha \left(\frac{\lambda \beta^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)} - \frac{\beta^{2-\alpha}}{2-\alpha} \right)$$

En prenant alors $\beta = \dfrac{\lambda(2-\alpha)}{2^2(1-\alpha)}$, il vient

$$\frac{c(\alpha)\lambda}{4(1-\alpha)} \beta^{1-\alpha} k^\alpha \leqslant M\sqrt{\beta}$$

ce qui est impossible si on prend k assez grand.

Seconde Partie

Le Problème de Kadison-Singer et un Second Théorème d'Inversion Restreinte

4
Le problème d'extension de Kadison-Singer et la propriété de pavage

Nous discuterons dans ce chapitre de la conjecture de Kadison-Singer en C^*-algèbres, de formulations équivalentes et de quelques résultats partiels obtenus jusqu'à présent. Nous chercherons par ailleurs à montrer l'intérêt de cette conjecture en démontrant différents résultats qu'elle implique.

4.1 La propriété d'extension de Kadison-Singer

4.1.1 Un peu de vocabulaire

Définition : *Une algèbre de Banach A (supposée unitaire) est une C^*-algèbre si elle est munie d'une involution $x \mapsto x^*$ telle que $\|x^*x\| = \|x\|^2$*

Un état sur A est une forme linéaire $f : A \mapsto \mathbb{C}$ telle que $f(x^*x) \geqslant 0$ et $f(1) = 1$.

L'ensemble des états est un convexe inclus dans la boule unité de A et il est ω^*-compact. Il possède donc des points extrémaux.

Définition : *Un état pur sur A est un point extrémal de l'ensemble des états sur A.*

exemples : - $\mathcal{C}(K)$ est une C^*-algèbre commutative, les états sont les mesures de probabilité sur K et les états purs sont les masses de Dirac.

- $\mathcal{B}(l_2^n)$ est une C^*-algèbre non commutative, pour $x \in l_2^n$ fixé, $\omega_x : l_2^n \mapsto l_2^n$, $T \mapsto \omega_x(T) = < Tx, x >$ est un état pur, mais

$$f(T) = \frac{trace\ T}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} < Te_i, e_i >$$

est un état non pur.

4.1.2 La conjecture

Cette conjecture, posée par Kadison et Singer en 1959 ($[KS]$) provient d'une affirmation de Dirac :

Considérons $A_1 \subset A_2$ deux C^*-algèbres, est-ce que tout état pur sur A_1 s'étend de manière *unique* en un état pur sur A_2 ?

Dans la plupart des cas intéressants, la réponse est négative, sauf dans le cas suivant :

prenons pour A_2, $\mathcal{B}(l^2)$, et pour A_1 l'espace des opérateurs diagonaux $\mathcal{D}$

Notons que sur $\mathcal{D}$ les états purs sont soit la sélection d'une valeur propre $\lambda_k(T) = < Te_k, e_k >$ soit la limite selon un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur B_{l_2} :

$$\lambda_{\mathcal{U}}(T) = \lim_{\mathcal{U}} < Te_k, e_k >$$

Ainsi Dirac pensait que :

Conjecture 1 : **(Kadison-Singer 1959)** *Tout état pur sur $\mathcal{D}$, l'algèbre des opérateurs diagonaux sur l_2, peut s'étendre de manière* **unique** *à un état pur sur $\mathcal{B}(l_2)$.*

4.2 Formulations équivalentes :

Dans la suite, nous ne nous intéresserons plus aux C^*-algèbres mais plutôt à des formulations équivalentes en termes de théorie des opérateurs sur un espace de Hilbert de la propriété d'extension ci-dessus

Anderson a montré en 1979 ($[A]$) que la conjecture de Kadison-Singer était équivalente à la conjecture suivante, appelée *propriété de pavage* :

Conjecture 2 : *Pour tout opérateur T borné sur l_2 et tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier $m = m(T, \varepsilon)$ et une partition $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ de $\mathbb{N}$ telle que pour tout $j \in \{1, \ldots, m\}$:*

$$\left\| R_{\sigma_j}\Big(T - E(T)\Big) R_{\sigma_j} \right\|_2 < \varepsilon \, \|T\|_2$$

où $E(T)$ désigne la diagonale de T
et R_{σ_j} la projection canonique de l_2 sur $l_2^{\sigma_j} = [e_i : i \in \sigma_j]$.
$\Big((e_i)$ est la base canonique de $l_2\Big)$

Remarque : - Il est primordial de soustraire la diagonale de T, car sinon on ne pourrait pas paver T pour tout ε. Dans la suite, on supposera souvent que la matrice de T dans la base canonique de l_2 n'a que des 0 sur la diagonale, ce qui simplifiera les notations.

- Du fait que $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ forme une partition de $\mathbb{N}$, on notera que si pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$

$$\left\| R_{\sigma_j} \left(T - E(T) \right) R_{\sigma_j} \right\|_2 < \varepsilon \|T\|_2$$

alors on a

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} R_{\sigma_j} \left(T - E(T) \right) R_{\sigma_j} \right\|_2 = \sup_{1 \leqslant j \leqslant m} \left\| R_{\sigma_j} \left(T - E(T) \right) R_{\sigma_j} \right\|_2 < \varepsilon \|T\|_2$$

Cette deuxième conjecture est équivalente à une troisième :

Conjecture 3 : *Pour tout réel $M > 0$, il existe un entier $m = m(M)$ et un réel $\alpha = \alpha(M)$ tel que*

pour tout opérateur $T : l_2 \mapsto l_2$, avec $\|T\| \leqslant M$ et satisfaisant pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\|Te_i\| = 1$,

il existe une partition $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ de $\mathbb{N}$ telle que pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$ et pour tout $x \in l_2^{\sigma_j}$ on a :

$$\|Tx\|_2 \geqslant \alpha \|x\|_2$$

Il est assez facile de montrer que la conjecture 2 implique la conjecture 3 :

Considérons un opérateur $T : l_2 \mapsto l_2$ tel que $\|T\| \leqslant M$ et satisfaisant pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\|Te_n\| = 1$. Considérons alors l'opérateur T^*T :

remarquons que $< T^*Te_i, e_i >= 1$ et que $\|T^*T\| \leqslant M^2$.

Prenons alors $\varepsilon = \frac{1}{2M^2}$, la conjecture 2 nous donne une partition $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ de $\mathbb{N}$ telle que pour $j \in \{1, \dots, m\}$

$$\left\| R_{\sigma_j} (T^*T - I) R_{\sigma_j} \right\|_2 < \frac{M^2}{2M^2} = \frac{1}{2}$$

Ainsi $R_{\sigma_j} T^* T R_{\sigma_j}$ est inversible et pour $x \in l_2^{\sigma_j}$:

$$M \left\| T R_{\sigma_j} x \right\| \geqslant \left\| R_{\sigma_j} T^* T R_{\sigma_j} x \right\| \geqslant \frac{1}{2} \|x\|$$

La réciproque, due à K. Ball (cf [$BT2$]), est plus difficile à établir.

4.3 Intérêt des conjectures

Avant de donner quelques réductions de ce problème, montrons d'abord comment la propriété de pavage, si elle était vérifiée, s'appliquerait à divers problèmes en théorie des opérateurs.

Nous identifions dans ce chapitre un opérateur $T : l_2 \mapsto l_2$ et sa matrice dans la base canonique de l_2.

4.3.1 Idéaux maximaux

Nous considérons ici 3 algèbres d'opérateurs :

- $\mathcal{B}(l_2)$ l'algèbre des opérateurs bornés sur l_2
- $\mathcal{T}^\infty$ l'algèbre des opérateurs dont la matrice dans la base canonique est triangulaire supérieure.
- $\mathcal{R}^\infty$ l'algèbre des opérateurs dont la matrice est strictement triangulaire supérieure (*i.e.* triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale).

$$\mathcal{R}^\infty \subset \mathcal{T}^\infty \subset \mathcal{B}(l_2)$$

On va s'intéresser aux idéaux maximaux de ces algèbres.

Les idéaux maximaux de $\mathcal{B}(l_2)$ sont bien connus : il n'y a que $\mathcal{K}(l_2)$ l'algèbre des opérateurs compacts sur l_2.

Les idéaux maximaux de $\mathcal{T}^\infty$ sont moins bien connus : il y a par exemple, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, $M_n = \{T \in \mathcal{T}^\infty : \ < Te_n, e_n >= 0\} \supset \mathcal{R}^\infty$

On a

$$\bigcap \left\{ \mathcal{M} : \mathcal{M} \textit{ idéal maximal de } \mathcal{T}^\infty \right\} \subset \bigcap_{n \geqslant 1} M_n = \mathcal{R}^\infty$$

Problème 1 : (J. Orr) *Est-ce que*

$$\bigcap \left\{ \mathcal{M} : \mathcal{M} \textit{ idéal maximal de } \mathcal{T}^\infty \right\} = \mathcal{R}^\infty \qquad ?$$

Supposons qu'on a la propriété de pavage et montrons qu'alors la réponse à la question précédente est positive !

Par l'absurde, supposons qu'il existe un idéal maximal $\tilde{\mathcal{M}}$ de $\mathcal{T}^\infty$ tel que $\mathcal{R}^\infty \not\subset \tilde{\mathcal{M}}$. Alors $\mathcal{R}^\infty + \tilde{\mathcal{M}}$ est encore un idéal qui contient $\tilde{\mathcal{M}}$ et qui n'est pas égal à $\tilde{\mathcal{M}}$ (maximal) donc $\mathcal{R}^\infty + \tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{T}^\infty$.

Ainsi, il existe $S \in \mathcal{R}^\infty$ et $T \in \tilde{\mathcal{M}}$ tels que $I = S + T$.

Soit alors $\varepsilon > 0$ et pavons S avec ε. Il existe une partition $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ de $\mathbb{N}$ telle que

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} R_{\sigma_j} S R_{\sigma_j} \right\| < \varepsilon \|S\|$$

Mais alors

$$I = \sum_{j=1}^{m} R_{\sigma_j} I R_{\sigma_j} = \sum_{j=1}^{m} R_{\sigma_j} S R_{\sigma_j} + \sum_{i=1}^{m} R_{\sigma_j} T R_{\sigma_j}$$

Or $T \in \tilde{\mathcal{M}}$ qui est un *idéal* donc $\sum_{j=1}^{m} R_{\sigma_j} T R_{\sigma_j} \in \tilde{\mathcal{M}}$ ainsi pour tout $\varepsilon > 0$, $d(I, \tilde{\mathcal{M}}) \leqslant \varepsilon \|S\|$ *i.e.* $I \in \tilde{\mathcal{M}}$ d'où la contradiction.

4.3.2 Espace engendré par des projections

La théorie de l'intégration spectrale nous permet d'affirmer que :

$$\mathcal{B}(l_2) = \overline{span}\left\{P \in \mathcal{B}(l_2) : \|P\| = 1 \;,\; P^2 = P\right\}$$

On peut alors se demander ce qui se passe si on ne prend que des projections triangulaires supérieures :

Problème 2 : **(D. Larson)** *Est-ce que*

$$\mathcal{T}^\infty = \overline{span}\left\{P \in \mathcal{T}^\infty : \|P\| = 1 \;,\; P^2 = P\right\} \qquad ?$$

Là encore, en supposant les conjectures 1 à 3 vraies, montrons que la réponse est positive :

En effet, prenons $T \in \mathcal{T}^\infty$, $\|T\| = 1$ et soit $\varepsilon > 0$.

Considérons $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n, \ldots) \in B_{l_\infty}$ la diagonale de T. Il existe une partition $\{\eta_i\}_{i=1}^k$ de $\mathbb{N}$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ avec $|\lambda_i| \leqslant 1$ tels que

$$\left\| \mu - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \chi_{\eta_i} \right\|_\infty < \varepsilon$$

Soit alors $T_1 \in \mathcal{B}(l_2)$ tel que sa matrice est celle de T sauf sur la diagonale où on a remplacé μ par $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \chi_{\eta_i}$. Alors $\|T - T_1\| < \varepsilon$.

Nous pouvons maintenant paver chaque bloc $R_{\eta_i}(T_1 - \lambda_i I_{\eta_i}) R_{\eta_i}$. On obtient donc une partition $\sigma_{i,1}, \ldots, \sigma_{i,m}$ de η_i tel que pour $j \in \{1, \ldots, m\}$

$$\left\|R_{\sigma_{i,j}} R_{\eta_i}(T_1 - \lambda_i I) R_{\eta_i} R_{\sigma_{i,j}}\right\| < \varepsilon$$

Ainsi

$$T_1 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i R_{\eta_i} + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} R_{\sigma_{i,j}} R_{\eta_i}(T_1 - \lambda_i I_{\eta_i}) R_{\eta_i} R_{\sigma_{i,j}}$$
$$+ \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} R_{\sigma_{i,j}} R_{\eta_i}(T_1 - \lambda_i I_{\eta_i})(I - R_{\eta_i} R_{\sigma_{i,j}})$$

Notons que $\left\|\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} R_{\sigma_{i,j}} R_{\eta_i}(T_1 - \lambda_i I_{\eta_i}) R_{\eta_i} R_{\sigma_{i,j}}\right\| < \varepsilon.$

D'autre part, notons que pour tout opérateur S,

$$ST_1(I - S) = S - \Big(S - RT_1(I - S)\Big) \qquad (*)$$

Or, si R est une projection, $\Big(R - RT_1(I - R)\Big)\Big(R - RT_1(I - R)\Big) = R - RT_1(I - R) - RT_1(I - R)R - RT_1(I - R)RT_1(I - R) = R - RT_1(I - R)$; ainsi $R - RT_1(I - R)$ est une projection. Par suite, avec $(*)$, $RT_1(I - R)$ est la différence de deux projections.

Finalement $T_1 = Q + R$ avec $Q \in span\Big\{P \in \mathcal{T}^\infty : \|P\| = 1 \ , \ P^2 = P\Big\}$ et $\|R\| < \varepsilon$ d'où $\|T - Q\| < 2\varepsilon$ *c.q.f.d.*

4.3.3 "Projection triangulaire supérieure"

Pour un opérateur T notons T^+ l'opérateur dont la matrice est la partie triangulaire supérieure de la matrice de T.

Si π est une permutation, notons T_π l'opérateur dont la matrice est celle obtenue à partir de la matrice de T après permutation des lignes et des colonnes par π.

Malheureusement, même si T est borné, T^+ ne l'est pas nécessairement ! Pourtant, en supposant que les conjectures précédentes sont vérifiées, Bourgain a montré dans $[BT3]$ que :

Pour tout opérateur $T \in \mathcal{B}(l_2)$ il existe une permutation π de $\mathbb{N}$ telle que

$$\|(T_\pi)^+\| \leqslant K\,\|T\|$$

où $K = \log m(\frac{1}{10})$, et $m(\frac{1}{10})$ le nombre de parties de $\mathbb{N}$ nécessaire pour paver T avec $\varepsilon = \frac{1}{10}$.

4.4 Réductions du problème

Notons $m_{min}(T,\varepsilon)$ le nombre minimal d'ensembles nécessaires pour obtenir une partition permettant de paver T avec ε.

1/ Le résultat précédent laisse à penser qu'il suffirait de paver avec $\varepsilon = \frac{1}{10}$ et non tout ε. Mais si on peut paver avec un $\varepsilon_0 < 1$ alors on peut paver avec tout $\varepsilon > 0$.(Il suffit de prendre un entier n tel que $\varepsilon_0^n < \varepsilon$ et de paver n fois.)

2/ Si le pavage est vérifié, $m_{min}(T,\varepsilon)$ (minimal) peut être choisi comme ne dépendant que de ε (et non de T).

En effet : Si ce n'était pas possible, en fixant $\varepsilon > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existerait $T_n \in \mathcal{B}(H_n)$ (où $H_n \approx l_2$) avec des 0 sur la diagonale et $\|T_n\| = 1$ tel que $m_{min}(T_n,\varepsilon) > n$. Soit alors $H = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \oplus H_n\right) \approx l_2$ et définissons $T : H \mapsto H$ tel que T restreint à H_n soit égal à T_n. On a supposé qu'on pouvait paver tout opérateur, donc $m_{min}(T,\varepsilon)$ existe mais pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$n \leqslant m_{min}(T_n,\varepsilon) \leqslant m_{min}(T,\varepsilon)$$

d'où la contradiction.

3/ propriété de pavage uniforme

Conjecture 4 : *Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier $m = m(\varepsilon)$ tel que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout opérateur $T \in \mathcal{B}(l_2^n)$ il existe une partition $\{\eta_i\}_{i=1}^m$ tel que pour tout $i \in \{1,\ldots,m\}$*

$$\left\|R_{\eta_j}\Big((T - E(T)\Big)R_{\eta_j}\right\| < \varepsilon \|T\|$$

Notons que $m(\varepsilon)$ est indépendant de n

Théorème : *Si la propriété de pavage uniforme est vérifiée alors la propriété de pavage l'est également, et avec le même $m(\varepsilon)$.*

4/ En essayant de paver les matrices de Walsh, on se rend compte que $m(\varepsilon)$ est nécessairement de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon^2}$. On peut penser que ceci est le meilleur ordre possible :

Conjecture 5 : $m(\varepsilon) \approx \dfrac{1}{\varepsilon^2}$

5/ Soit $T \in \mathcal{B}(l_2)$ avec des 0 sur la diagonale, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un opérateur T_ε (avec des 0 sur la diagonale) pavable tel que $\|T - T_\varepsilon\| < \varepsilon$ alors T est pavable

En effet : Si T_ε est pavable il existe une partition $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ de $\mathbb{N}$ telle que pour $i \in \{1, \ldots, m\}$

$$\|R_{\sigma_i} T_\varepsilon R_{\sigma_i}\| < \varepsilon$$

mais alors

$$\begin{aligned} \|R_{\sigma_i} T R_{\sigma_i}\| &\leqslant \|R_{\sigma_i} T_\varepsilon R_{\sigma_i}\| + \|R_{\sigma_i}(T - T_\varepsilon) R_{\sigma_i}\| \\ &\leqslant \|R_{\sigma_i} T_\varepsilon R_{\sigma_i}\| + \|T - T_\varepsilon\| \\ &\leqslant 2\varepsilon \end{aligned}$$

i.e. T est pavable avec la même partition que T_ε.

4.5 Résultats positifs sur le pavage

Avant de donner des solutions partielles au problème de Kadison-Singer, énonçons des résultats affirmant que certaines classes d'opérateurs sont pavables.

4.5.1 Matrices à coefficients positifs

Théorème : (Halpern, Kaftel, Weiss [HKW] - Gregson [W]) *Les matrices à coefficients positifs peuvent être pavées avec $m = m(\varepsilon) \approx \frac{1}{\varepsilon}$*
Plus précisément :
i/ Pour les matrices auto-adjointes à coefficients positifs $m(\frac{1}{k}) = k$
ii/ Pour les matrices générales à coefficients positifs $m(\frac{2}{k}) = k$.

4.5.2 Opérateurs de Laurent

Soit $\mathbb{T}$ le tore. Munissons $L_2(\mathbb{T})$ de la base $\{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ et soit $\varphi \in L_\infty(\mathbb{T})$.

Définition : *L'opérateur de Laurent $L_\varphi : L_2(\mathbb{T}) \mapsto L_2(\mathbb{T})$ associé à φ est défini par $L_\varphi f = \varphi f$.*
Notons que $\|L_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$

Remarquons que

$$L_\varphi(j,k) = < L_\varphi(e^{ikx}), e^{ijx} > = \int_0^{2\pi} \varphi(x) e^{i(k-j)x} dx = \hat{\varphi}(j-k)$$

Ainsi la matrice de L_φ est :

$$\begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \vdots & & \\ \ddots & \ddots & \hat{\varphi}(-1) & \ddots & \\ \ddots & \ddots & \hat{\varphi}(0) & \ddots & \ddots \\ & \ddots & \hat{\varphi}(1) & \ddots & \ddots \\ & & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Observons enfin que si $\sigma \subset \mathbb{Z}$ et que si $\tilde{\sigma}$ est un translaté de σ, alors

$$\|R_{\tilde{\sigma}} L_\varphi R_{\tilde{\sigma}}\| = \|R_\sigma L_\varphi R_\sigma\|$$

Théorème : (Berman, Kaftal, Halpern, Weiss $[BHKW]$**)** *Si φ est continue alors L_φ est pavable avec des progressions arithmétiques.*

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$ et φ une fonction continue avec $\hat{\varphi}(0) = 0$ (*i.e.* la diagonale de L_φ est nulle). Il existe $\varphi_\varepsilon(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$ tel que $\hat{\varphi}_\varepsilon(0) = 0$, $\|\varphi_\varepsilon - \varphi\|_\infty < \varepsilon$ et ainsi $\|L_\varphi - L_{\varphi_\varepsilon}\| < \varepsilon$.

Posons alors $\sigma = \{\dots, -2N-2, -N-1, 0, N+1, 2N+2, 3N+3, \dots\}$. Il vient

$$R_\sigma \Big(L_{\varphi_\varepsilon}\Big) R_\sigma = 0$$

et par suite, pour $i \in \{1, \dots, N\}$

$$R_{\sigma+i} \Big(L_{\varphi_\varepsilon}\Big) R_{\sigma+i} = 0$$

Comme $\bigcup_{i=0}^{N} (\sigma + i) = \mathbb{Z}$, L_{φ_ε} peut être pavé, il en est donc de même pour L_φ.

Théorème : (Berman, Kaftal, Halpern, Weiss $[BHKW]$, $[HKW2]$ **- Gregson** $[G]$**)** *Si φ est Riemann-intégrable, alors L_φ est pavable avec des progressions arithmétiques.*

Preuve : Soit φ Riemann-intégrable à valeurs réelles avec $\hat{\varphi}(0) = 0$ et soit $\varepsilon > 0$.

Il existe deux fonctions en escalier ψ_1 et ψ_2 telles que $\psi_1(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant \psi_2(x)$ et $\int_0^{2\pi} (\psi_2(x) - \psi_1(x))dx < \varepsilon$.

Remplaçons ψ_1 et ψ_2 par deux fonctions continues $\varphi_1 \leqslant \psi_1$ et $\varphi_2 \geqslant \psi_2$ telles que $\int_0^{2\pi} (\varphi_2(x) - \varphi_1(x))dx < \varepsilon$.

Pavons L_{φ_1} avec $\{\eta_j^1\}_{j=1}^m$ (progression arithmétique) et L_{φ_2} avec $\{\eta_k^2\}_{k=1}^m$ (progression arithmétique) et posons $\tau_{j,k} = \eta_j^1 \cap \eta_k^2$. Les $\tau_{j,k}$ sont des progressions arithmétiques qui pavent L_{φ_1} et L_{φ_2}.

Remarquons enfin qu'en fixant $\tau = \tau_{j,k}$:

$$\|R_\tau L_\varphi R_\tau\| = \sup_{\|f\|=1} < R_\tau L_\varphi R_\tau f, f >= \sup_{\|f\|=1} \int_{\mathbf{T}} \varphi \left|R_\tau f\right|^2 dx < 3\varepsilon$$

Malheureusement, on ne peut étendre ces résultats aux fonctions Lebesgue-intégrables :

Théorème : **(Bourgain, Tzafriri [$BT3$])** *Si Λ est une progression arithmétique et V un ouvert dense de $\mathbf{T}$ alors*

$$\left\|R_\Lambda\Big(L_{\chi_V} - E(L_{\chi_V})\Big)R_\Lambda\right\| = 1 - \frac{\mu(V)}{2\pi}$$

où μ est la mesure de Lebesgue sur $[0, 2\pi]$.

Par suite, si V est un ouvert dense de $\mathbf{T}$ avec $0 < \mu(V) < 2\pi$ alors L_{χ_V} ne peut être pavé avec une progression arithmétique. Néanmoins

Théorème : **(Bourgain, Tzafriri [$BT3$])** *Il existe des ouverts denses V de $\mathbf{T}$ avec $\mu(V) < 2\pi$ tels que L_{χ_V} soit pavable.*

Si $\varphi \in L_\infty(\mathbf{T})$ alors $\varphi \in L_2(\mathbf{T})$ et satisfait donc l'égalité de Parseval. Si on impose une condition un peu plus forte, alors on peut encore montrer que L_φ est pavable :

Théorème : **(Bourgain [$BT2$])** *S'il existe $\tau > 0$ tel que φ satisfait $\sum_{n\in\mathbf{Z}} |\hat{\varphi}(n)|^2 |n|^\tau < \infty$ alors L_φ est pavable.*

4.5.3 Ensembles synthétiques

Définition : *Une partie Λ de $\mathbf{Z}$ est dite synthétique si ses sauts sont uniformément bornés i.e. s'il existe $d \in \mathbf{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on a $\Lambda \cap \{n+1, \ldots, n+d\} \neq \emptyset$.*

Une partie Λ de $\mathbf{Z}$ est dite partiellement synthétique s'il existe $d \in \mathbf{N}^*$ tel que Λ contient des parties de la forme

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \{a_1, a_1 + d_{1,1}\} \\
\sigma_2 &= \{a_2, a_2 + d_{2,1}, a_2 + d_{2,1} + d_{2,2}\} \\
\sigma_3 &= \{a_3, a_3 + d_{3,1}, a_3 + d_{3,1} + d_{3,2}, a_3 + d_{3,1} + d_{3,2} + d_{3,3}\} \qquad (*) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

avec pour tout i, j, $0 < d_{i,j} \leqslant d$ et $a_i \in \mathbb{Z}$

Remarque : Si Λ est synthétique, avec des sauts bornés par d, alors

$$\Lambda \cup (\Lambda + 1) \cup \ldots \cup (\Lambda + d) = \mathbb{Z}$$

Théorème : (Furstemberg [F]) *Si $\mathbb{Z} = \Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_m$ alors au moins un des Λ_i est partiellement synthétique.*

Nous pouvons maintenant établir le résultat suivant, concernant la structure arithmétique de la partition avec laquelle on pourrait éventuellement paver :

Théorème : (Louhe) *Si L_φ peut être pavé, alors L_φ est pavable par des ensembles synthétiques.*

Preuve : Soit $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m$ une partition de $\mathbb{Z}$ telle que pour $j \in \{1, \ldots, m\}$:

$$\left\| R_{\Lambda_j} \Big(L_\varphi - E(L_\varphi) \Big) R_{\Lambda_j} \right\| < \varepsilon \left\| L_\varphi \right\|$$

Par le théorème de Furstemberg l'un des Λ_i est partiellement synthétique, il existe donc $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$ comme en (*). Ainsi pour $i \geqslant 1$

$$\left\| R_{\sigma_i} \Big(L_\varphi - E(L_\varphi) \Big) R_{\sigma_i} \right\| < \varepsilon \left\| L_\varphi \right\|$$

En considérant $\sigma_1 - a_1, \sigma_2 - a_2, \ldots, \sigma_n - a_n, \ldots$, on a pour $i \geqslant 1$

$$\left\| R_{\sigma_i - a_i} \Big(L_\varphi - E(L_\varphi) \Big) R_{\sigma_i - a_i} \right\| < \varepsilon \left\| L_\varphi \right\|$$

mais alors

$$\begin{array}{llll}
\sigma_1 - a_1 & 0 & d_{1,1} & \\
\sigma_2 - a_2 & 0 & d_{2,1} & \ldots \\
\sigma_3 - a_3 & 0 & d_{3,1} & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

Alors par le principe des tiroirs, comme $1 \leqslant d_{i,1} \leqslant d$ pour tout $i \geqslant 1$, il existe $d_1 \in \{0, \ldots, d\}$ qui apparaît une infinité de fois, quitte à extraire une sous-suite des σ_k, on a alors

$$\begin{array}{lllll}
\sigma_1 - a_1 & 0 & d_1 & & \\
\sigma_2 - a_2 & 0 & d_1 & d_1 + d_{2,2} & \\
\sigma_3 - a_3 & 0 & d_1 & d_1 + d_{3,2} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

En recommençant la même opération on arrive, par récurrence à

$$
\begin{array}{llllll}
\sigma_1 - a_1 & 0 & d_1 & & & \\
\sigma_2 - a_2 & 0 & d_1 & d_1 + d_2 & & \\
\sigma_3 - a_3 & 0 & d_1 & d_1 + d_2 & & \\
\vdots & & & & & \\
\sigma_n - a_n & 0 & d_1 & d_1 + d_2 & \dots & d_1 + \dots + d_n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

On obtient ainsi un ensemble synthétique $\Lambda = \{0, d_1, d_1 + d_2, \dots\}$ tel que pour tout $k \geqslant 1$

$$\left\| R_{\{0,d_1,\dots,d_1+\dots+d_k\}} \left(L_\varphi - E(L_\varphi) \right) R_{\{0,d_1,\dots,d_1+\dots+d_k\}} \right\| < \varepsilon \, \|L_\varphi\|$$

d'où

$$\left\| R_{\{0,d_1,\dots,d_1+\dots+d_k,\dots\}} \left(L_\varphi - E(L_\varphi) \right) R_{\{0,d_1,\dots,d_1+\dots+d_k,\dots\}} \right\| < \varepsilon \, \|L_\varphi\|$$

c.q.f.d.

5
un second théorème d'inversion

Nous nous intéresserons cette fois à des opérateurs n'ayant que des 1 sur la diagonale.

5.1 L'énoncé du théorème :

Dans ce chapitre nous noterons R_σ la projection orthogonale de ℓ_2^n sur l'espace vectoriel engendré par $\{e_i\}_{i\in\sigma}$

Nous allons montrer le théorème suivant :

Théorème 5.1. *Pour tout $M > 0$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante $d = d(M,\varepsilon) > 0$ telle que pour tout entier $n \geqslant \frac{1}{d}$ et tout opérateur $T : \ell_2^n \mapsto \ell_2^n$ de norme $\|T\| \leqslant M$ et dont la matrice dans la base canonique n'a que des 1 sur la diagonale, il existe $\sigma \subset \{1,2,\ldots,n\}$ de cardinal $|\sigma| \geqslant dn$ tel que $R_\sigma T R_\sigma$ restreint à $R_\sigma \ell_2^n$ soit inversible et*

$$\left\|(R_\sigma T R_\sigma)^{-1}\right\| < 1+\varepsilon$$

Ce théorème est une conséquence immédiate du suivant :

théorème 5.2. *Pour tout $M > 0$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante $c = c(M,\varepsilon) > 0$ telle que pour tout entier $n \geqslant \frac{1}{c}$ et tout opérateur $S : \ell_2^n \mapsto \ell_2^n$ de norme $\|S\| \leqslant M$ et dont la matrice dans la base canonique n'a que des 0 sur la diagonale, il existe $\sigma \subset \{1,2,\ldots,n\}$ de cardinal $|\sigma| \geqslant cn$ tel que*

$$\|R_\sigma S R_\sigma\| < \varepsilon$$

Preuve du théorème 2.1 : Rappelons que si U est un opérateur borné tel que $\|U\| < \eta$ alors $I + U$ est inversible et $\left\|(I+U)^{-1}\right\| \leqslant \frac{1}{1-\eta}$

Il suffit donc de prendre η assez petit pour que $\frac{1}{1-\eta} < 1+\varepsilon$ et d'appliquer le théorème 2.2 à η et $S = T - I$ $\quad (\|S\| \leqslant M+1)$

Il nous reste donc à montrer le théorème 2.2. Dans les sections 5.2 à 5.4 nous nous placerons dans le cadre réel. Ainsi ℓ_2^n désignera $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. Le passage au cas complexe se fera au cours du chapitre 5.5. Nous aurons enfin besoin de 3 résultats intermédiaires :

5.2 Rappel sur les variables aléatoires gaussiennes.

Soit (Ω, Σ, μ) un espace de probabilité, un variable aléatoire $g : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ est dite gaussienne si $\mu(g > \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Si $\{g_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ est une famille de variables aléatoires gaussiennes indépendantes alors quelle que soit $(a_i)_{i\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$:

$$\left(\int_{\Omega} \left|\sum_{i\in\mathbf{N}} a_i \frac{g_i(\omega)}{\|g_i\|_2}\right|^2 d\mu(\omega)\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i\in\mathbf{N}} |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Enfin si on désigne par r_i la i-ème fonction de Rademacher, et si $\mathcal{E} \subset \mathbf{R}^q$ ($q \in \mathbf{N}$) alors :

$$\int_0^1 \sup_{u=(u_1,\dots,u_q)\in\mathcal{E}} \left|\sum_{j=1}^{q} r_j(t) u_j\right| dt = \int_0^1 \sup_{u\in\mathcal{E}} \left|\sum_{j=1}^{q} r_j(t) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{\Omega} |g_j(\omega)|\, d\mu(\omega) u_j\right| dt$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{\Omega} \int_0^1 \sup_{u\in\mathcal{E}} \left|\sum_{j=1}^{q} r_j(t) g_j(\omega) u_j\right| dt d\mu(\omega)$$

mais pour presque tout t, $r_j(t)g_j$ a même distribution que g_j, il en résulte que

$$\int_0^1 \sup_{u=(u_1,\dots,u_q)\in\mathcal{E}} \left|\sum_{j=1}^{q} r_j(t) u_j\right| dt \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{\Omega} \sup_{u=(u_1,\dots,u_q)\in\mathcal{E}} \left|\sum_{j=1}^{q} g_j(\omega) u_j\right| d\mu(\omega)$$

5.3 Le lemme de Slepian

Nous allons maintenant donner un lemme qui permet, pour deux familles de variables aléatoires gaussiennes $\{X_x(\omega)\}_{x\in\mathcal{E}}$ et $\{Y_x(\omega)\}_{x\in\mathcal{E}}$ sur un espace de probabilité (Ω, Σ, μ), de comparer les lois de $\sup_{x\in\mathcal{E}} X_x$ et de $\sup_{x\in\mathcal{E}} Y_x$ à partir des covariances de ces deux familles :

Lemme de Slepian : *Soit (Ω, Σ, μ) un espace de probabilité.*

Soient $\{X_x(\omega)\}_{x\in\mathcal{E}}$ et $\{Y_x(\omega)\}_{x\in\mathcal{E}}$ deux familles de variables aléatoires gaussiennes indexées par un ensemble d'indices $\mathcal{E}$ dénombrable, et telles que :

pour tout $x \in \mathcal{E}$ $\quad \|X_x(\omega)\|_{L_2(\mu)} = \|Y_x(\omega)\|_{L_2(\mu)}$

pour tous $x, x' \in \mathcal{E}$ avec $x \neq x'$ on a

$$\int_\Omega Y_x(\omega)Y_{x'}(\omega)d\mu(\omega) \leqslant \int_\Omega X_x(\omega)X_{x'}(\omega)d\mu(\omega)$$

alors pour tout $\lambda \geqslant 0$

$$\mu\left(\sup_{x\in\mathcal{E}} X_x(\omega) > \lambda\right) \leqslant \mu\left(\sup_{x\in\mathcal{E}} Y_x(\omega) > \lambda\right)$$

Preuve : Soit n un entier et $X = (X_1, \ldots, X_n)$ et $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ deux vecteurs gaussiens dans $\mathbf{R}^n$ et soit $\varphi : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}$ à croissance lente, c'est à dire telle que $|\varphi(x)| \leqslant A\exp(B\|x\|)$ où $\|.\|$ est la norme euclidienne sur R^n et A, B des constantes > 0. On va dans un premier temps chercher à comparer $E[\varphi(X)]$ et $E[\varphi(Y)]$.

On pose :

$c^X_{i,j} = E[X_iX_j]$ et $c^Y_{i,j} = E[Y_iY_j]$ (matrices de covariance de X et de Y.)

$M_{i,j} = c^X_{i,j} - c^Y_{i,j}$

et pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, $Z_t = \sqrt{1-t}X + \sqrt{t}Y$.

Lemme 1 : *Soit φ $\mathcal{C}^\infty$ à croissance lente, et soit $h(t) = E[\varphi(Z_t)]$. Alors*

$$i/\ h'(t) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} M_{i,j}E\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}(Z_t)\right]$$

$$ii/\ h'(t) = -\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n}\left(E[Y_i - Y_j]^2 - E[X_i - X_j]62\right)E\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}(Z_t)\right]$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} M_{i,i}\left(\sum_{j=1}^{n} E\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}(Z_t)\right]\right)$$

Preuve : Soit $F(t,u)$ la fonction caractéristique de Z_t et $f(t,x)$ sa densité ($u = (u_1, \ldots, u_n)$ et $x = (x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathbf{R}^n$). On a évidemment

$$F(t,u) = exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} u_iu_j\left((1-t)c^X_{i,j} + tc^Y_{i,j}\right)\right]$$

d'où par inversion de Fourier, en posant $d_n = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}$

$$f(t,x) = d_n\int_{\mathbf{R}^n} e^{i<x,u>}F(t,u)dx$$

et alors f vérifie l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$iii/\ \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} v_{i,j}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

En effet

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t}(x) =& d_n \int_{\mathbf{R}^n} e^{i<x,u>}\frac{\partial F}{\partial t}(t,u)du \\ =& \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(c^Y_{i,j} - c^X_{i,j}\right) d_n \int_{\mathbf{R}^n} u_i u_j e^{i<x,u>} F(t,u)du \\ =& \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(c^Y_{i,j} - c^X_{i,j}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\end{aligned}$$

Alors, comme

$$h(t) = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x) f(t,x)dx$$

il vient, par $iii/$:

$$\begin{aligned}h'(t) = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x)\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)dx & \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} v_{i,j}\int_{\mathbf{R}^n} f\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} v_{i,j} E\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(Z_t)\right]\end{aligned}$$

d'où $i/$. $ii/$ en est une conséquence immédiate :

$$E\left[Y_i - Y_j\right]^2 - E\left[X_i - X_j\right]^2 = M_{i,i} + M_{j,j} - 2M_{i,j}$$

soit

$$M_{i,j} = -\frac{1}{2}\left(E\left[Y_i - Y_j\right]^2 - E\left[X_i - X_j\right]^2\right) + \frac{1}{2}(M_{i,i} + M_{j,j})$$

Dans la suite, on emploie les notations suivantes

pour $x, y \in \mathbf{R}^n$, $\Delta_y \varphi(x) = \varphi(x+y) - \varphi(x)$.

$(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la base canonique de R^n, et $e = \sum_{i=1}^{n} e_i$.

Montrons maintenant le théorème suivant :

Théorème : *Soit φ mesurable à croissance lente vérifiant les deux hypothèses suivantes :*

a/ pour $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$ et $r > 0$ on a

$$\left(E[Y_i - Y_j]^2 - E[X_i - X_j]^2\right)\Delta_{re_i}\Delta_{re_j} \leqslant 0$$

b/ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ *et* $r > 0$,

$$M_{i,i}\Delta_{re_i}\Delta_{re_j} \geqslant 0$$

Alors

c/ $E[\varphi(X)] \leqslant E[\varphi(Y)]$.

Preuve : Soit pour $\varepsilon > 0$, $\omega_\varepsilon \in C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^+)$, supporté par $\{x : \|x\| \leqslant \varepsilon\}$, d'intégrale 1 ; et soit $\varphi_\varepsilon = \varphi * \omega_\varepsilon$, φ_ε hérite donc des propriétés de φ. Soient $a, b \in \mathbf{R}^n$, on a alors

$$d/ \lim_{r>0, r\to 0} r^{-2}\Delta_{ra}\Delta_{rb}\varphi_\varepsilon(x) = \varphi_\varepsilon"(x).(a,b) = \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j \frac{\partial^2 \varphi_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

En effet

$$\begin{aligned}
\Delta_{ra}\Delta_{rb} =& \varphi_\varepsilon(x + ra + rb) - \varphi_\varepsilon(x + ra) - \varphi_\varepsilon(x + rb) + \varphi_\varepsilon(x) \\
=& \varphi_\varepsilon(x) + \varphi'_\varepsilon(x)(ra + rb) + \frac{r^2}{2}\varphi_\varepsilon"(x)(a + b, a + b) + o(r^2) \\
& - \varphi_\varepsilon(x) - \varphi'_\varepsilon(x).ra - \frac{r^2}{2}\varphi_\varepsilon"(x)(a, a) + o(r^2) \\
& - \varphi_\varepsilon(x) - \varphi'_\varepsilon(x).rb - \frac{r^2}{2}\varphi_\varepsilon"(x)(b, b) + o(r^2) \\
& + \varphi_\varepsilon(x) \\
=& r^2\varphi_\varepsilon"(x)(a, b) + o(r^2)
\end{aligned}$$

via le théorème de Schwarz.

On voit en particulier que d'après les hypothèses, si $i \neq j$

$$\begin{aligned}
&\left(E[Y_i - Y_j]^2 - E[X_i - X_j]^2\right)\frac{\partial^2 \varphi_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} \\
&\qquad = \lim_{r>0, r\to 0} r^{-2}\left(E[Y_i - Y_j]^2 - E[X_i - X_j]^2\right)\Delta_{re_i}\Delta_{re_j}\varphi_\varepsilon \leqslant 0
\end{aligned}$$

(en prenant $a = e_i$, $b = e_j$ et en multipliant par $E[Y_i - Y_j]^2 - E[X_i - X_j]^2$). A i fixé, on a

$$c_{i,i}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 \varphi_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} = \lim_{r>0, r\to 0} r^{-1} M_{i,i}\Delta_{re_i}\Delta_{re}\varphi_\varepsilon \geqslant 0$$

($a = c_i$, $b = e$ et multiplication par $c_{i,i}$).

Soit donc $h_\varepsilon(t) = E[\varphi_\varepsilon(Z_t)]$. *ii/* du lemme nous donne alors $H'_\varepsilon(t) \geqslant 0$ puis $H_\varepsilon(1) \geqslant h_\varepsilon(0)$, soit $E[\varphi_\varepsilon(Y)] \geqslant E[\varphi_\varepsilon(X)]$.

On obtient le résultat voulu en faisant tendre ε vers 0.

Exemple fondamental de φ pour appliquer le théorème :

Soit $\varphi(x) = \sup_j(x_1, \ldots, x_n)$. On a clairement, si $r > 0$:

(*) $\varphi(x + re) = \varphi(x) + r$

(**) si $i \neq j$, alors $\varphi(x + re_i + re_j) = \max[\varphi(x + re_i), \varphi(x + re_j)]$

De (*) on déduit que $\Delta_{re}\varphi = r$ d'où $\Delta_{re_i}\Delta_{re} = 0$

De (**) on déduit que, si par exemple $\varphi(x + re_i) \geqslant \varphi(x + re_j)$, alors $\Delta_{re_i}\Delta_{re_j} = \varphi(x) - \varphi(x + re_j)$, soit pour $i \neq j$

$$\Delta_{re_i}\Delta_{re_j}\varphi \leqslant 0$$

Du théorème précédent, on déduit alors facilement :

Théorème : (Sudakov) *Soient $(X_i)_{i=1}^n$ et $(Y_i)_{i=1}^n$ deux familles de variables aléatoires gaussiennes centrées sur un espace de probabilité (Ω, Σ, μ), telles que pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $E[X_i - X_j]^2 \leqslant E[Y_i - Y_j]^2$ alors :*

$$E[\sup X_i] \leqslant E[\sup Y_i]$$

En faisant un peu plus d'efforts, on obtient également le

Lemme : (Slepian) *Soient $(X_i)_{i=1}^n$ et $(Y_i)_{i=1}^n$ deux familles de variables aléatoires gaussiennes centrées sur un espace de probabilité (Ω, Σ, μ), telles que pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $E[X_i - X_j]^2 \leqslant E[Y_i - Y_j]^2$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $E[X_i^2] = E[Y_i^2]$, alors :*

$$\mu\Big(\sup_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i > t\Big) \leqslant \mu\Big(\sup_{1 \leqslant i \leqslant n} Y_i > t\Big)$$

Preuve : Prenons toujours pour φ la fonction $\sup(x_1, \ldots, x_n)$, soit $f : \mathrm{R} \mapsto \mathrm{R}$ une fonction croissante et soit $\psi = f \circ \varphi$.

On aura encore, si $i \neq j$ et $r > 0$

$$\psi(x + re_i + re_j) = max[\psi(x + re_i), \psi(x + re_j)]$$

et encore $\Delta_{re_i}\Delta_{re_j}\psi \leqslant 0$.

On ne sait plus rien sur $\Delta_{re_i}\Delta_{re}\psi$, mais l'hypothèse $c_{i,i} = 0$ (*i.e.* $E[\sup X_i] \leqslant E[\sup Y_i]$) viendra alors à point pour que le théorème s'applique quand même ; il n'y a plus qu'à prendre $f = \chi_{]t,\infty[}$.

Nous allons enfin étendre ce théorème au cas où $\mathcal{E}$ est dénombrable.

Soit donc $F \subset \mathcal{E}$ une partie finie. On a toujours

$$P(\sup_{i \in \mathcal{E}} X_i > \lambda) \geqslant P(\sup_{i \in F} X_i > \lambda)$$

d'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $F_\varepsilon \subset \mathcal{E}$ fini tel que

$$P(\sup_{i \in F_\varepsilon} Y_i > \lambda) \geqslant P(\sup_{i \in \mathcal{E}} Y_i > \lambda) - \varepsilon$$

En combinant ces deux inégalités au lemme précédent, on obtient bien le résultat voulu.

5.4 Un lemme de découplage

Lemme 2.4. *Soit (Ω, Σ, μ) un espace de probabilité et (Ω', Σ', μ') une copie indépendante de (Ω, Σ, μ). Fixons $0 < \delta < 1$ et soit $(\xi_i)_{i=1}^n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de moyenne δ sur (Ω, Σ, μ) et à valeurs dans $\{0, 1\}$.*

Soit X un espace de Banach alors pour toute matrice $\{x_{i,j}\}_{i,j=1}^n$ à coefficients dans X telle que $x_{i,i} = 0$ on a :

$$\int_\Omega \left\| \sum_{i,j=1}^n \xi_i(\omega)\xi_j(\omega)x_{i,j} \right\|_X d\mu(\omega) \leqslant 20 \int_\Omega \int_{\Omega'} \left\| \sum_{i,j=1}^n \xi_i(\omega)\xi_j(\omega')x_{i,j} \right\|_X d\mu(\omega)d\mu'(\omega')$$

Preuve : Nous allons d'abord montrer le lemme dans le cas où les $(\xi_i)_{i=1}^n$ sont de moyenne nulle.

Soit donc $(\eta_i)_{i=1}^n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de moyenne $\frac{1}{2}$ sur un espace de probabilité $(U, \mathcal{U}, \nu)$ ne prenant que les valeurs 0 ou 1. Alors, si $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$ et $i \neq j$

$$\int_U \eta_i(u)(1 - \eta_j(u))d\nu(u) = \frac{1}{4}$$

Ainsi, comme pour tout i, $x_{i,i} = 0$:

$$
\begin{aligned}
I=&\int_\Omega \left\| \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i(\omega)\xi_j(\omega)x_{i,j} \right\| d\mu(\omega)\\
=&4\int_\Omega \left\| \sum_{i,j=1}^{n} \left[\int_U \eta_i(u)(1-\eta_j(u))d\nu(u)\right] \xi_i(\omega)\xi_j(\omega)x_{i,j} \right\| d\mu(\omega)\\
\leqslant&4\int_U\int_\Omega \left\| \sum_{i,j=1}^{n} \eta_i(u)(1-\eta_j(u))\xi_i(\omega)\xi_j(\omega)x_{i,j} \right\| d\mu(\omega)d\nu(u)
\end{aligned}
$$

Pour $u \in U$ posons $\sigma(u) = \{1 \leqslant i \leqslant n : \eta_i(u) = 1\}$ et remarquons qu'alors :

$$
I \leqslant 4\int_U\int_\Omega \left\| \sum_{i\in\sigma(u)} \sum_{j\notin\sigma(u)} \xi_i(\omega)\xi_j(\omega)x_{i,j} \right\| d\mu(\omega)d\nu(u)
$$

Nous aurons maintenant besoin du :

Lemme : *Soit (Ω, Σ, μ) un espace de probabilité, (Ω', Σ', μ') une copie indépendante. Soient $X : \Omega \mapsto \mathrm{R}^p$ et $Y : \Omega \mapsto \mathrm{R}^q$ deux variables aléatoires indépendantes et $\varphi : \mathrm{R}^p \times \mathrm{R}^q \mapsto \mathrm{R}$ une fonction mesurable alors*

$$
\int_\Omega \varphi(X(\omega), Y(\omega))d\mu(\omega) = \int_\Omega\int_{\Omega'} \varphi(X(\omega), Y(\omega'))d\mu(\omega)d\mu(\omega')
$$

Preuve : Si $\mu_{(X,Y)}$, μ_X, μ_Y désignent les mesures images de μ par (X, Y), X et Y alors

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \varphi(X(\omega), Y(\omega))d\mu(\omega)\\
&= \int_{\mathrm{R}^{p+q}} \varphi(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q)d\mu_{(X,Y)}(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q)\\
&\quad \textit{par indépendance}\\
&= \int_{\mathrm{R}^p\times\mathrm{R}^q} \varphi(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q)[d\mu_X(u_1, \dots, u_p) \otimes d\mu_Y(v_1, \dots, v_q)]\\
&= \int_\Omega\int_{\Omega'} \varphi(X(\omega), Y(\omega'))d\mu(\omega)d\mu(\omega')
\end{aligned}
$$

Appliquons ce lemme à $X = (\xi_i)_{i\in\sigma(u)}$ et $Y = (\xi_j)_{j\notin\sigma(u)}$ qui sont indépendantes et $\varphi(u_1, \dots, u_n) = \left\| \sum_{i\in\sigma(u)} \sum_{j\notin\sigma(u)} u_i u_j x_{i,j} \right\|$

Il vient :

$$I \leqslant 4 \int_U \int_\Omega \int_{\Omega'} \left\| \sum_{i\in\sigma(u)} \sum_{j\notin\sigma(u)} \xi_i(\omega)\xi_j(\omega')x_{i,j} \right\| d\mu(\omega)d\mu'(\omega')d\nu(u)$$

Il existe donc un $u_0 \in U$ tel qu'en posant $\sigma = \sigma(u_0)$ on ait :

$$I \leqslant 4 \int_\Omega \int_{\Omega'} \left\| \sum_{i\in\sigma} \sum_{j\notin\sigma} \xi_i(\omega)\xi_j(\omega')x_{i,j} \right\| d\mu(\omega)d\mu'(\omega')$$

Mais alors, en notant β (resp. β') la tribu engendrée par les $(\xi_i)_{i\in\sigma}$ (resp. $(\xi_i)_{i\notin\sigma}$) et en appelant E^β et $E^{\beta'}$ les espérances conditionnelles associées, il vient, par indépendance des ξ_i :

$$E^\beta(\xi_i) = \begin{cases} \xi_i & si \quad i \in \sigma \\ E(\xi_i) = 0 & si \quad i \notin \sigma \end{cases}$$

Ainsi

$$E^\beta \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i(\omega)\xi_j(\omega')x_{i,j} \right) = \sum_{i\in\sigma} \sum_{j=1}^n \xi_i(\omega)\xi_j(\omega')x_{i,j}$$

De même :

$$E^\beta E^{\beta'} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i(\omega)\xi_j(\omega')x_{i,j} \right) = \sum_{i\in\sigma} \sum_{j\notin\sigma} \xi_i(\omega)\xi_j(\omega')x_{i,j}$$

On a donc

$$\int_\Omega \int_{\Omega'} \left\| \sum_{i\in\sigma} \sum_{j\notin\sigma} \xi_i(\omega)\xi_j(\omega')x_{i,j} \right\| d\mu(\omega)d\mu'(\omega')$$
$$= \left\| \left\| E^\beta E^{\beta'} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i(\omega)\xi_j(\omega') \right) x_{i,j} \right\|_X \right\|_{L^1(\mu\otimes\mu')}$$
$$\leqslant \left\| E^\beta E^{\beta'} \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i(\omega)\xi_j(\omega')x_{i,j} \right\|_X \right\|_{L^1(\mu\otimes\mu')}$$
$$\leqslant \left\| \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i(\omega)\xi_j(\omega')x_{i,j} \right\|_X \right\|_{L^1(\mu\otimes\mu')}$$
$$= \int_\Omega \int_{\Omega'} \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i(\omega)\xi_j(\omega')x_{i,j} \right\|_X d\mu(\omega)d\mu'(\omega')$$

et par suite

$$J = \int_\Omega \int_{\Omega'} \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i(\omega)\xi_j(\omega')x_{i,j} \right\|_X d\mu(\omega)d\mu'(\omega') \geqslant \frac{I}{4}$$

Passons maintenant au cas général où les ξ_i sont de moyenne δ alors l'inégalité triangulaire nous donne trivialement :

$$I \leqslant \int_\Omega \left\| \sum_{i,j=1}^n (\xi_i(\omega)-\delta)(\xi_j(\omega)-\delta)x_{i,j} \right\| d\mu(\omega) + \delta \int_\Omega \left\| \sum_{i,j=1}^n \xi_i(\omega)x_{i,j} \right\| d\mu(\omega)$$
$$+ \delta \int_{\Omega'} \left\| \sum_{i,j=1}^n \xi_i(\omega')x_{i,j} \right\| d\mu'(\omega') + \delta^2 \left\| \sum_{i,j=1}^n x_{i,j} \right\|$$

mais

$$J = \int_\Omega \int_{\Omega'} \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i(\omega)\xi_j(\omega')x_{i,j} \right\| d\mu(\omega)d\mu'(\omega')$$
$$\geqslant \int_\Omega \left\| \int_{\Omega'} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i(\omega)\xi_j(\omega')x_{i,j} d\mu'(\omega') \right\| d\mu(\omega)$$
$$= \delta \int_\Omega \left\| \sum_{i,j=1}^n \xi_i(\omega)x_{i,j} \right\| d\mu(\omega)$$

de même pour les 2 derniers termes de la somme, ainsi

$$
\begin{aligned}
I \leqslant & \int_{\Omega} \left\| \sum_{i,j=1}^{n} (\xi_i(\omega)-\delta)(\xi_j(\omega)-\delta)x_{i,j} \right\| d\mu(\omega) + 3J \\
\leqslant & 4 \int_{\Omega} \int_{\Omega'} \left\| \sum_{i,j=1}^{n} (\xi_i(\omega)-\delta)(\xi_j(\omega')-\delta)x_{i,j} \right\| d\mu(\omega) d\mu'(\omega') + 3J \\
& \textit{par la première partie de la preuve} \\
\leqslant & 7J + 4\delta \int_{\Omega} \left\| \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i(\omega) x_{i,j} \right\| d\mu(\omega) \\
& + 4\delta \int_{\Omega'} \left\| \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i(\omega') x_{i,j} \right\| d\mu'(\omega') + 4\delta^2 \left\| \sum_{i,j=1}^{n} x_{i,j} \right\| \\
\leqslant & 19J
\end{aligned}
$$

5.5 L'inversibilité $\ell_2 \mapsto \ell_1$

Nous allons maintenant montrer un résultat d'inversibilité $\ell_2^n \mapsto \ell_1^n$ qui comme dans le premier chapitre va nous permettre, à l'aide d'un argument de factorisation, d'obtenir le résultat voulu.

Théorème 5.2. *Il existe une constante $c < \infty$ telle que, quel que soit $0 < \delta < 1$ et quel que soit l'entier n, pour tout opérateur $T : \ell_2^n \mapsto \ell_2^n$ tel que pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, $< Te_i, e_i >= 0$ et $\|T\|_{2\mapsto 2} \leqslant 1$ il existe une partie σ_0 de $\{1, \ldots, n\}$ telle que $|\sigma_0| \geqslant \dfrac{\delta n}{2}$ et*

$$\|R_{\sigma_0} T R_{\sigma_0}\|_{2\mapsto 1} \leqslant c\delta n^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve : Commençons par considérer le cas où ℓ_2^n désigne $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.

Soit (Ω, Σ, μ) un espace de probabilité. Fixons $0 < \delta < 1$ et soit $(\xi_i)_{i=1}^n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de moyenne δ sur (Ω, Σ, μ) à valeurs dans $\{0, 1\}$.

Posons $a_{i,j} =< Te_j, e_i >$ et

$$\sigma(\omega) = \{i \in \{1, \dots, n\} : \xi_i(\omega) = 1\}$$

Considérons

$$J = \int_\Omega \|R_{\sigma(\omega)} T R_{\sigma(\omega)}\|_{2 \to 1} \, d\mu(\omega) = \int_\Omega \left\| \sum_{i,j=1}^n \xi_i(\omega)\xi_j(\omega) a_{i,j} e_i \otimes e_j \right\|_{2 \to 1} d\mu(\omega)$$

Soit maintenant (Ω', Σ', μ') une copie indépendante de (Ω, Σ, μ) et $(\xi'_i)_{i=1}^n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de moyenne δ sur (Ω', Σ', μ') à valeurs dans $\{0, 1\}$.

Posons encore $\sigma'(\omega') = \{i \in \{1, \dots, n\} : \xi'_i(\omega') = 1\}$ et appliquons le lemme de découplage :

$$\begin{aligned} J \leqslant & 20 \int_\Omega \int_{\Omega'} \left\| \sum_{i,j=1}^n \xi_i(\omega)\xi'_j(\omega') a_{i,j} e_i \otimes e_j \right\|_{2 \to 1} d\mu(\omega) d\mu'(\omega') \\ = & 20 \int_\Omega \int_{\Omega'} \|R_{\sigma(\omega)} T R_{\sigma'(\omega')}\|_{2 \to 1} \, d\mu(\omega) d\mu'(\omega') \end{aligned}$$

Soit alors $x = (x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n x_j e_j \in \ell_2^n$, il vient

$$\begin{aligned} R_{\sigma'(\omega')} &= \sum_{j \in \sigma'(\omega')} x_j e_j \\ &= \sum_{j=1}^n \xi'_j(\omega') x_j e_j \\ T R_{\sigma'(\omega')} &= \sum_{j=1}^n \xi'_j(\omega') x_j T e_j \\ &= \sum_{j=1}^n \xi'_j(\omega') x_j \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i \right) \\ R_{\sigma(\omega)} T R_{\sigma'(\omega')} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i(\omega) \xi'_j(\omega') x_j a_{i,j} e_i \end{aligned}$$

d'où :

$$J \leqslant 20 \int_\Omega \int_{\Omega'} \sup_{\substack{x=(x_1,\dots,x_n) \in \ell_2^n \\ \|x\|_2 \leqslant 1}} \sum_{i=1}^n \xi_i(\omega) \left| \sum_{j=1}^n \xi'_j(\omega') x_j a_{i,j} \right| d\mu(\omega) d\mu'(\omega')$$

Posons donc

$$J_{\omega'} = \int_{\Omega} \sup_{\substack{x=(x_1,\dots,x_n)\in \ell_2^n \\ \|x\|_2 \leqslant 1}} \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\omega) \left| \sum_{j=1}^{n} \xi_j'(\omega') x_j a_{i,j} \right| d\mu(\omega)$$

d'où $J \leqslant 20 \int_{\Omega'} J_{\omega'} d\mu'(\omega')$. Mais

$$\begin{aligned} J_{\omega'} \leqslant & \delta \int_{\Omega} \sup_{\substack{x=(x_1,\dots,x_n)\in \ell_2^n \\ \|x\|_2 \leqslant 1}} \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} \xi_j'(\omega') x_j a_{i,j} \right| d\mu(\omega) \\ & + \int_{\Omega} \sup_{\substack{x=(x_1,\dots,x_n)\in \ell_2^n \\ \|x\|_2 \leqslant 1}} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i(\omega) - \delta) \left| \sum_{j=1}^{n} \xi_j'(\omega') x_j a_{i,j} \right| d\mu(\omega) \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{x=(x_1,\dots,x_n)\in \ell_2^n \\ \|x\|_2 \leqslant 1}} \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} \xi_j'(\omega') x_j a_{i,j} \right| & \leqslant \|TR_{\sigma'(\omega')}\|_{2\to 1} \leqslant \|T\|_{2\to 1} \\ & = \sup_{x\in \ell_2^n \setminus\{0\}} \frac{\|Tx\|_1}{\|x\|_2} \leqslant \sqrt{n}\,\|T\|_{2\to 2} \leqslant \sqrt{n} \end{aligned}$$

donc

$$\delta \int_{\Omega} \sup_{\substack{x=(x_1,\dots,x_n)\in \ell_2^n \\ \|x\|_2 \leqslant 1}} \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} \xi_j'(\omega') x_j a_{i,j} \right| d\mu(\omega) \leqslant \delta n^{\frac{1}{2}}$$

Posons alors

$$K_{\omega'} = \int_{\Omega} \sup_{\substack{x=(x_1,\dots,x_n)\in \ell_2^n \\ \|x\|_2 \leqslant 1}} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i(\omega) - \delta) \left| \sum_{j=1}^{n} \xi_j'(\omega') x_j a_{i,j} \right| d\mu(\omega)$$

et $u_i(\omega', x) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j'(\omega') x_j a_{i,j}$.

Soit maintenant $(\Omega", \Sigma", \mu")$ une copie indépendante de (Ω, Σ, μ) et de (Ω', Σ', μ'). Soit également $(\xi_i")_{i=1}^{n}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de moyenne δ sur $(\Omega", \Sigma", \mu")$ à valeurs dans $\{0,1\}$.

Comme pour $i \in \{1,\dots,n\}$ $\delta = \int_{\Omega"} \xi_i(\omega")d\mu"(\omega")$, il vient

$$K_{\omega'} = \int_{\Omega''} \int_{\Omega} \sup_{\substack{x=(x_1,\dots,x_n)\in\ell_2^n \\ \|x\|_2\leqslant 1}} \left| \sum_{i=1}^{n} (\xi_i(\omega) - \xi_i''(\omega''))\, |u_i(\omega', x)| \right| d\mu(\omega) d\mu''(\omega'')$$

Mais $\xi_i(\omega) - \xi_i''(\omega'')$ est symétrique donc en appelant $r_i(t)$ la i-ème fonction de Rademacher, on a encore

$$K_{\omega'} = \int_0^1 \int_{\Omega''} \int_{\Omega} \sup_{\substack{x=(x_1,\dots,x_n)\in\ell_2^n \\ \|x\|_2\leqslant 1}} \left| \sum_{i=1}^{n} (\xi_i(\omega) - \xi_i''(\omega'')) r_i(t)\, |u_i(\omega', x)| \right|$$
$$d\mu(\omega) d\mu''(\omega'') dt$$

Soit alors $(\Omega''', \Sigma''', \mu''')$ une troisième copie de (Ω, Σ, μ) indépendante des autres, et soit $(g_i)_{i=1}^n$ une suite de variables aléatoires gaussiennes centrées indépendantes normalisées dans $L^2(\mu''')$, en particulier $(g_i)_{i=1}^n$ est un système orthonormal de $L^2(\mu''')$. Il vient alors

$$K_{\omega'} \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{\Omega'''} \int_{\Omega''} \int_{\Omega} \sup_{\substack{x=(x_1,\dots,x_n)\in\ell_2^n \\ \|x\|_2\leqslant 1}} \left| \sum_{i=1}^{n} (\xi_i(\omega) - \xi_i''(\omega'')) g_i(\omega''')\, |u_i(\omega', x)| \right|$$
$$d\mu(\omega) d\mu''(\omega'') d\mu'''(\omega''')$$

Les ξ_i'' étant des copies des ξ_i, on en déduit :

$$K_{\omega'} \leqslant \sqrt{2\pi} \int_{\Omega'''} \int_{\Omega} \sup_{\substack{x=(x_1,\dots,x_n)\in\ell_2^n \\ \|x\|_2\leqslant 1}} \left| \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\omega) g_i(\omega''')\, |u_i(\omega', x)| \right| d\mu(\omega) d\mu'''(\omega''')$$

Soit alors D une partie dénombrable dense de la boule unité de ℓ_2^n, il vient :

$$K_{\omega'} \leqslant \sqrt{2\pi} \int_{\Omega'''} \int_{\Omega} \sup_{x\in D} \left| \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\omega) g_i(\omega''')\, |u_i(\omega', x)| \right| d\mu(\omega) d\mu'''(\omega''')$$

Posons alors

$$X_x(\omega''') = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\omega) g_i(\omega''')\, |u_i(\omega', x)|$$
$$Y_x(\omega''') = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\omega) g_i(\omega''') u_i(\omega', x)$$

comme les $(g_i)_{i=1}^n$ forment un système orthonormal de $L^2(\Omega''',\Sigma''',\mu''')$, il vient, pour tout $x \in D$

$$\|X_x\|_{L^2(\Omega''',\Sigma''',\mu''')} = \|Y_x\|_{L^2(\Omega''',\Sigma''',\mu''')} \tag{1}$$

D'autre part pour $x, x' \in D$

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega'''} |X_x(\omega''') - X_{x'}(\omega''')|^2 \, d\mu(\omega''') \\
&= \int_{\Omega'''} \left|\sum_{i=1}^n \xi_i(\omega) g_i(\omega''')(|u_i(\omega',x)| - |u_i(\omega',x')|)\right|^2 d\mu(\omega''') \\
&= \sum_{i=1}^n \xi_i(\omega)^2 \, ||u_i(\omega',x)| - |u_i(\omega',x')||^2 \\
&\leqslant \sum_{i=1}^n \xi_i(\omega)^2 \, |u_i(\omega',x) - u_i(\omega',x')|^2 \\
&= \int_{\Omega'''} |Y_x(\omega''') - Y_{x'}(\omega''')|^2 \, d\mu(\omega''')
\end{aligned}$$

D'où on déduit avec (1) que

$$\int_{\Omega'''} Y_x(\omega''') Y_{x'}(\omega''') d\mu'''(\omega''') \leqslant \int_{\Omega'''} X_x(\omega''') X_{x'}(\omega''') d\mu'''(\omega''') \tag{2}$$

(1) et (2) nous permettent d'appliquer le lemme de Slepian, on en déduit, :

$$\begin{aligned}
K_{\omega'} &\leqslant \sqrt{2\pi} \int_{\Omega'''} \int_{\Omega} \sup_{x \in D} \left|\sum_{i=1}^n \xi_i(\omega) g_i(\omega''') u_i(\omega',x)\right| d\mu(\omega) d\mu'''(\omega''') \\
&= \sqrt{2\pi} \int_{\Omega'''} \int_{\Omega} \sup_{\substack{x=(x_1,\ldots,x_n)\in \ell_2^n \\ \|x\|_2 \leqslant 1}} \left|\sum_{i=1}^n \xi_i(\omega) g_i(\omega''') u_i(\omega',x)\right| d\mu(\omega) d\mu'''(\omega''') \\
&= \sqrt{2\pi} \int_{\Omega'''} \int_{\Omega} \sup_{\substack{x=(x_1,\ldots,x_n)\in \ell_2^n \\ \|x\|_2 \leqslant 1}} \left|\sum_{i=1}^n \xi_i(\omega) g_i(\omega''') \sum_{j=1}^n \xi_j(\omega') x_j a_{i,j}\right| d\mu(\omega) d\mu'''(\omega''') \\
&= \sqrt{2\pi} \int_{\Omega'''} \int_{\Omega} \sup_{\substack{x=(x_1,\ldots,x_n)\in \ell_2^n \\ \|x\|_2 \leqslant 1}} \left|\sum_{j=1}^n \xi_j(\omega') x_j \sum_{i=1}^n \xi_i(\omega) g_i(\omega''') a_{i,j}\right| d\mu(\omega) d\mu'''(\omega''')
\end{aligned}$$

Par suite

$$K_{\omega'} \leqslant \sqrt{2\pi}\left[\int_{\Omega'''}\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{n}\xi_j(\omega')\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i(\omega)g_i(\omega''')a_{i,j}\right|^2 d\mu(\omega)d\mu'''(\omega''')\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{2\pi}\left[\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{n}\xi_j(\omega')\int_{\Omega'''}\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i(\omega)g_i(\omega''')a_{i,j}\right|^2 d\mu'''(\omega''')d\mu(\omega)\right]^{\frac{1}{2}}$$

Les g_i sont orthonormaux dans $L^2(\mu''')$ donc

$$K_{\omega'} \leqslant \sqrt{2\pi}\left[\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{n}\xi_j(\omega')\sum_{i=1}^{n}\xi_i(\omega)\left|a_{i,j}\right|^2 d\mu(\omega)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{2\pi\delta}\left[\sum_{i,j=1}^{n}\xi_j(\omega')\left|a_{i,j}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

mais alors

$$\int_{\Omega'} K_{\omega'}d\mu(\omega') \leqslant \sqrt{2\pi\delta}\left[\int_{\Omega'}\sum_{i,j=1}^{n}\xi_j(\omega')\left|a_{i,j}\right|^2 d\mu(\omega')\right]^{\frac{1}{2}}$$

en se rappelant qu'on avait supposé $\|T\|_{2\mapsto 2} \leqslant 1$, on a en particulier pour tout $j \in \{1,\ldots,n\}$ $\quad \|Te_j\|_2 \leqslant 1$ *i.e.* $\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|^2 \leqslant 1$

Par suite

$$\int_{\Omega'} K_{\omega'}d\mu(\omega') \leqslant \sqrt{2\pi}\delta n^{\frac{1}{2}}$$

et finalement

$$\int_{\Omega}\left\|R_{\sigma(\omega)}TR_{\sigma(\omega)}\right\|_{2\mapsto 1} d\mu(\omega) \leqslant 20(1+\sqrt{2\pi})\delta n^{\frac{1}{2}}$$

Ne supposons plus T de norme 1, par homogénéité, on a alors

$$\int_{\Omega}\left\|R_{\sigma(\omega)}TR_{\sigma(\omega)}\right\|_{2\mapsto 1} d\mu(\omega) \leqslant 20(1+\sqrt{2\pi})\delta n^{\frac{1}{2}}\,\|T\| \tag{3}$$

Remarque : L'idée de ce type d'applications du lemme de Slepian est originellement due à Giné et Zinn ($[GZ]$).

Passons maintenant au cas complexe. Pour $z \in \ell_2^n(\mathbb{C})$ soit $x, y \in \ell_2^n(\mathbb{R})$ les parties réelles et imaginaires de z, alors $Tz = Tx + iTy = \Re Tx - \Im Ty + i(\Im Tx + \Re Ty)$

Définissons alors deux opérateurs $\ell_2^n(\mathbb{R}) \mapsto \ell_2^n(\mathbb{R})$ de la façon suivante :

$T_1 x = \Re Tx$ et $T_2 x = \Im Tx$ (avec l'abus de notation $\ell_2^n(\mathbb{R}) \subset \ell_2^n(\mathbb{C})$).

On a $\|T_1\| \leqslant \|T\|$, $\|T_2\| \leqslant \|T\|$ et $\|T\| \leqslant 2\|T_1\| + 2\|T_2\|$.

Par suite

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left\|R_{\sigma(\omega)} T R_{\sigma(\omega)}\right\|_{2\mapsto 1} d\mu(\omega) \leqslant & 2\int_\Omega \left\|R_{\sigma(\omega)} T_1 R_{\sigma(\omega)}\right\|_{2\mapsto 1} d\mu(\omega) \\ & + 2\int_\Omega \left\|R_{\sigma(\omega)} T_2 R_{\sigma(\omega)}\right\|_{2\mapsto 1} d\mu(\omega)\end{aligned}$$

et avec (3) il vient

$$\int_\Omega \left\|R_{\sigma(\omega)} T R_{\sigma(\omega)}\right\|_{2\mapsto 1} d\mu(\omega) \leqslant 4(1+\sqrt{2\pi})\delta n^{\frac{1}{2}} \|T\| \tag{4}$$

Posons $\Omega_0 = \left\{\omega \in \Omega : \left||\sigma(\omega)| - \delta n\right| \geqslant \frac{\delta n}{2}\right\}$ (en particulier, si $\omega \notin \Omega_0$ alors $\sigma(\omega) \geqslant \frac{\delta n}{2}$), le lemme 1.3 nous dit alors que $\mu(\Omega_0) \leqslant 2e^{-0{,}1086\delta n}$.

De (4) on déduit que

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_0} \left\|R_{\sigma(\omega)} T R_{\sigma(\omega)}\right\|_{2\mapsto 1} d\mu(\omega) \leqslant 80(1+\sqrt{2\pi})\delta n^{\frac{1}{2}}$$

Il existe donc $\omega_0 \notin \Omega_0$ tel que :

$$\left\|R_{\sigma(\omega_0)} T R_{\sigma(\omega_0)}\right\|_{2\mapsto 1} \leqslant 80(1+\sqrt{2\pi})\frac{\delta n^{\frac{1}{2}}}{1-\mu(\Omega_0)} \leqslant 80(1+\sqrt{2\pi})\alpha\delta n^{\frac{1}{2}}$$

pourvu que $\mu(\Omega_0) \leqslant 1 - \frac{1}{\alpha}$ et donc que $n \geqslant -\frac{1}{0.1086} \ln \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$.

En prenant par exemple $\alpha = 1,00001$ on obtient :

Pour tout $0 < \delta < 1$ et pour tout $n \geqslant \frac{93}{\delta}$, pour tout opérateur $T : \ell_2^n \mapsto \ell_2^n$ avec $\|T\| \leqslant 1$ et satisfaisant pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ $\quad < Te_i, e_i >= 0$, il existe $\sigma_0 \subset \{1, \ldots, n\}$ avec $|\sigma_0| \geqslant \frac{\delta n}{2}$ et

$$\|R_{\sigma_0} T R_{\sigma_0}\|_{2\mapsto 1} \leqslant 281\delta n^{\frac{1}{2}}$$

5.6 Fin de la preuve du théorème 5.2 par un argument de factorisation.

Rappelons que nous voulons démontrer le résultat suivant :

Théorème 5.2. *Pour tout $M > 0$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante $c = c(M, \varepsilon) > 0$ telle que pour tout entier $n \geqslant \frac{1}{c}$ et tout opérateur $S : \ell_2^n \mapsto \ell_2^n$ de norme $\|S\| \leqslant M$ et dont la matrice dans la base canonique n'a que des 0 sur la diagonale, il existe $\sigma \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ de cardinal $|\sigma| \geqslant cn$ tel que*

$$\|R_\sigma S R_\sigma\| < \varepsilon$$

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$. Commençons par supposer $\|T\| \leqslant 1$. Nous venons d'obtenir que :

Pour tout $0 < \delta < 1$ et pour tout $n \geqslant \frac{93}{\delta}$, pour tout opérateur $T : \ell_2^n \mapsto \ell_2^n$ tel que pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, $< Te_i, e_i >= 0$,

il existe $\sigma_0 \subset \{1, \ldots, n\}$ avec $|\sigma_0| \geqslant \frac{\delta n}{2}$ *et*

$$\|R_{\sigma_0} T R_{\sigma_0}\|_{2 \mapsto 1} \leqslant 281 \delta n^{\frac{1}{2}}$$

Posons donc $S = R_{\sigma_0} T R_{\sigma_0}$ que nous considérons comme un opérateur $\ell_2^{\sigma_0} \mapsto \ell_1^{\sigma_0}$.

Mais alors son adjoint $S^* : \ell_\infty^{\sigma_0} \mapsto \ell_2^{\sigma_0}$ est 2-sommant et sa norme 2-sommante vérifie

$$\pi_2(S^*) \leqslant K_G \|S^*\| \leqslant 281 K_G \delta n^{\frac{1}{2}}$$

Le théorème de factorisation de Pietsch nous dit alors qu'il existe $U : \ell_2^{\sigma_0} \mapsto \ell_2^{\sigma_0}$ et un opérateur $D : \ell_\infty^{\sigma_0} \mapsto \ell_2^{\sigma_0}$ diagonal *i.e.* défini par $De_i = \lambda_i e_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, avec $\|U\|_{2 \mapsto 2} \|D\|_{\infty \mapsto 2} \leqslant 281 K_G \delta n^{\frac{1}{2}} \leqslant 281\sqrt{2} K_G \delta^{\frac{1}{2}} |\sigma_0|^{\frac{1}{2}}$ et qui vérifient le diagramme de factorisation suivant :

$$\begin{tikzcd}
\ell_\infty^{\sigma_0} \arrow[rr, "S^*"] \arrow[dr, "D"'] & & \ell_2^{\sigma_0} \\
& \ell_2^{\sigma_0} \arrow[ur, "U"'] &
\end{tikzcd}$$

On peut supposer que $\|D\|_{\infty \mapsto 2} = \left(\sum_{i \in \sigma_0} |\lambda_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = |\sigma_0|^{\frac{1}{2}}$. Par suite $\|U\| \leqslant 281\sqrt{2} K_G \delta^{\frac{1}{2}}$.

Posons alors $\sigma = \{i \in \sigma_0 : |\lambda_i| < \sqrt{2}\}$, il vient

$$2\big(|\sigma_0| - |\sigma|\big) \leqslant \sum_{i \in \sigma_0 \setminus \sigma} |\lambda_i|^2 \leqslant \sum_{i \in \sigma_0} |\lambda_i|^2 = |\sigma_0|$$

d'où

$$|\sigma| \geqslant \frac{|\sigma_0|}{2} \geqslant \frac{\delta n}{4}$$

Par dualité, le diagramme précédent donne :

$$\begin{tikzcd}
\ell_2^{\sigma_0} \arrow[rr, "S"] \arrow[dr, "U^*"'] & & \ell_1^{\sigma_0} \\
& \ell_2^{\sigma_0} \arrow[ur, "\overline{D}"'] &
\end{tikzcd}$$

De plus, pour $x \in \ell_2^\sigma$ on a :

$$\begin{array}{rcccl}
\|R_\sigma T R_\sigma x\|_2 & = & \|R_\sigma R_{\sigma_0} T R_{\sigma_0} R_\sigma x\|_2 & = & \|R_\sigma S R_\sigma x\|_2 \\
& = & \left\|R_\sigma \overline{D} U^* R_\sigma x\right\|_2 & \leqslant & \sqrt{2}\, \|U^* R_\sigma x\|_2 \\
& \leqslant & 562 K_G \delta^{\frac{1}{2}} \|R_\sigma x\|_2 & \leqslant & 562 K_G \delta^{\frac{1}{2}} \|x\|_2
\end{array}$$

D'où

$$\|R_\sigma T R_\sigma\| \leqslant 562 K_G \delta^{\frac{1}{2}}$$

Prenons maintenant T de norme quelconque :

$$\|R_\sigma T R_\sigma\| \leqslant 562 K_G \delta^{\frac{1}{2}} \|T\|$$

Soit finalement $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{562 K_G \|T\|}\right)^2$, il vient :

Pour tout $M > 0$ et tout $\varepsilon > 0$, pour tout entier $n \geqslant 3.10^7 K_G^2 \left(\frac{M}{\varepsilon}\right)^2$ et tout opérateur $T : \ell_2^n \mapsto \ell_2^n$ de norme $\|T\| \leqslant M$ et dont la matrice dans la base canonique n'a que des 0 sur la diagonale, il existe $\sigma \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ de cardinal $|\sigma| \geqslant (281 K_G)^2 \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^2 n$ tel que

$$\|R_\sigma T R_\sigma\| \leqslant \varepsilon$$

6 Inversibilité restreinte pour les matrices rectangulaires et pavage dans d'autres espaces

En guise de conclusion, nous donnons quelques résultats proches de ceux déjà montrés ou de ceux souhaités. En particulier, nous considérons des matrices rectangulaires, ou encore le problème de pavage dans un espace non hilbertien.

6.1 Matrices rectangulaires

Nous considérons ici des matrices rectangulaires $n \times m$, avec $n << m$, dont nous cherchons à extraire une matrice carrée $n \times n$ de petite norme.

Théorème : **(Lunin [L])** *Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tous entiers m, n avec $n < m$ et toute matrice $n \times m$ A il existe une sous-matrice carrée $n \times n$ A_0 telle que :*

$$\|A_0\|_{2\to 2} \leqslant c \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \|A\|_{2\to 2}$$

Corollaire : *Il existe une constante $d > 0$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$ et tous entiers m et n tels que $n < d\varepsilon^2 m$, alors pour toute matrice $n \times m$ A il existe une sous-matrice $n \times n$ A_0 telle que*

$$\|A_0\|_{2\to 2} \leqslant \varepsilon \|A\|_{2\to 2}$$

Dans le résultat suivant, le fait que la matrice soit rectangulaire va être remplacé par une estimation sur le rang :

Théorème : **(Kashin [K])** *Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout entier $n \geqslant \frac{1}{c}$, tout réel $0 < \delta < 1$, et tout entier $1 \leqslant q \leqslant n$, pour toute matrice $n \times n$, A, de rang inférieur à q, avec $\|A\|_{2\to 2} \leqslant 1$ et n'ayant que des 0 sur la diagonale,*

il existe une partie σ de $\{1, \ldots, n\}$ de cardinal $|\sigma| \geqslant \frac{\delta n}{10}$ et

$$\|R_\sigma A R_\sigma\|_{2\to 2} \leqslant c\left(\delta + \left(\frac{\delta q}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

6.2 Pavage et inversibilité restreinte dans d'autres espaces

Jusqu'ici, nous n'avons considéré les problèmes de pavage et d'inversibilité restreinte que dans des espaces hilbertiens, il est raisonnable de considérer ces problèmes dans d'autres espaces ℓ_p

Théorème : (Tzafriri, Slepian) *Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $p \geqslant 1$, il existe une constante $c_p(\varepsilon) > 0$ telle que pour tout entier n et tout opérateur $T \in \mathcal{B}(\ell_p^n)$ avec des 0 sur la diagonale, il existe une partie σ de $\{1,\ldots,n\}$ de cardinal $|\sigma| \geqslant c_p(\varepsilon)n$ telle que :*

$$\|R_\sigma T R_\sigma\|_{p\mapsto p} < \varepsilon \|T\|_{p\mapsto p}$$

De plus pour $p = 1$ on peut prendre $c_1(\varepsilon) = c\varepsilon$
et pour $p = 2$, on peut prendre $c_2(\varepsilon) = c\varepsilon^2$

Conjecture 5 : *Pour $1 < p < 2$, on peut prendre $c_p(\varepsilon) = c\varepsilon^p$.*

Dans le cas $p = 1$, on a mieux que l'énoncé ci-dessus, puisque dans ce cas, on peut paver :

Théorème : (K. Ball [*BT*2]) *Pour tout entier k et tout entier $n \geqslant k$, pour tout opérateur $T \in \mathcal{B}(\ell_1^n)$ avec des 0 sur la diagonale, il existe une partition $\{\sigma_i\}_{i=1}^k$ de $\{1,\ldots,n\}$ telle que, pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$ on a :*

$$\left\|R_{\sigma_j} T R_{\sigma_j}\right\|_{1\mapsto 1} < \frac{2}{k} \|T\|_{1\mapsto 1}$$

Remerciements

Je tiens ici à remercier Mme Myriam Déchamps qui, tout au long de la rédaction de ce mémoire, n'a jamais ménagé ses efforts que ce soit pour prodiguer ses conseils ou pour corriger les erreurs qui n'ont pas manqué de se glisser dans ma rédaction.

Je tiens également à remercier M Hervé Queffelec qui, à maintes reprises, est venu compléter l'aide apportée par Mme Déchamps.

Je tiens enfin à remercier M Lior Tzafriri, qui, lors de la deuxième école d'été sur les espaces de Banach et les domaines associés (Prague - Paseky 1993), m'a fournit un nouveau point de vue sur ce sujet. En particulier, la deuxième partie de ce mémoire a été très fortement influencée par son exposé.

Bibliographie

[A] **J. Anderson.** *Extensions, Restrictions and Representations of States on C^*-algebras* Trans. Amer. Math. Soc., **249** (1979) 303-329

[$BHKW$] **K. Berman, H. Halpern, V. Kaftal et G. Weiss.** *Matrix Norm Inequalities and the Relative Dixmier Property* Int. Eq. and Op. Th. J., **11** (1988) 28-48

[$BT1$] **J. Bourgain et L. Tzafriri.** *Invertibility of "Large" Submatrices with Applications to the Geometry of Banach Spaces and Harmonic Analysis* Israel J. Math., **57** (1987) 137-224

[$BT2$] **J. Bourgain et L. Tzafriri.** *Analysis at Urbana II* London Math. Soc. Lecture Note Series, **138** (1990)

[$BT3$] **J. Bourgain et L. Tzafriri.** *On a Problem of Kadison and Singer* J. Reine Angew. Math, **421** (1992) 1-41

[F] **H. Furstemberg.** *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory* Princeton University Press, (1981)

[GZ] **E. Giné et J. Zinn.** *Some Limit Theorems for Empirical Process* Ann. Probab., **12** (1984) 929-989

[G] **K.Gregson.** *Thesis* University of Aberdeen, (1986)

[$HKW1$] **H. Halpern, V. Kaftal et G. Weiss.** *The Relative Dixmier Property in Discrete Crossed Products* J. Funct. Anal., **69** (1986) 121-140

[$HKW2$] **H. Halpern, V. Kaftal et G. Weiss.** *Matrix Pavings and Laurent Operators* J. Op. Th., **16** (1986) 335-374

[KS] **R. Kadison and I. Singer.** *Amer. J. Math.* 81, **1959** (547-564)

[K] **B.S. Kashin.** *Some Properties of Matrices Bounded Operators from Spaces l_2^n to l_2^m* Izvestiya Akademii Nauk Armyanoskoi SSR, Mathematika, **15** (1980) 379-394

[L] **A.A. Lunin.** *On Operator Norms of Submatrices* Matem. Zametki, **45** (1989) 94-100 *en russe*

[P] **A. Pajor.** *Sous espaces l_1^n des espaces de Banach* Herman, Travaux en cours (1985) S-11

[*R*] **I.Z. Ruzsa.** *On Difference Sets* Studia Sci. Math. Hungar., **13** (1978) 319-326

[*Sa*] **N. Sauer.** *On the density of Families of Sets* J. Comb. Theory Ser A., **13** (1972) 145-147

[*Sh*] **S. Shelah.** *A Combinatorial Problem : Stability and Order for Models and Theories in Infinitary Languages* Pacific J. Math., **41** (1972) 247-261

[*T*] **L. Tzafriri.** *Second Summer School on Banach Spaces and Related Areas* Prague Paseky, (1993)

[*W*] **P.Wojtaszczyk.** *Banach Spaces for Analysts* Cambridge Studies in Advanced Math., **25** (1991)

Une extension des inégalités

de Khintchine-Kahane

dans les espaces de Banach

Quelques applications

Par V. Cadet

d'après D. Ullrich

Résu.né

Nous donnons une preuve détaillée d'un théorème d'Ullrich : "les inégalités de Khintchine-Kahane s'étendent jusqu'à l'exposant $p = 0$ pour le système de Steinhaus". Nous donnons ensuite quelques applications à des espaces de fonctions analytiques à une ou plusieurs variables.

Abstract

We give a detailed proof of a theorem of Ullrich : "The Khintchine-Kahane inequalities can be extended till the exposant $p = 0$ for the Steinhaus system." Then we give some applications to spaces of analytic functions of one or several variables.

Mots clés : variables aléatoires, espace de Banach, espace de Bloch, polynôme homogène, ensembles de Sidon.

Key words : random variables, Banach spaces, Bloch spaces, homogeneous polynomial, Sidon sets.

Code matière AMS (1991) : 30B20, 30C55, 42A55, 60E15.

INTRODUCTION

Dans deux articles [U1] et [U2], David Ullrich démontre que les inégalités de Kahane-Khintchine pour les variables aléatoires de Steinhaus[1] $Z_j = e^{2i\pi\omega_j}$:

$$\forall x_1, \ldots x_N \in B \qquad \left\| \sum_{j=1}^{N} x_j Z_j \right\|_p \geq c_p \left\| \sum_{j=1}^{N} x_j Z_j \right\|_2$$

où B désigne un espace de Banach quelconque et p un réél strictement positif, s'étendent au cas de la moyenne géometrique ($exp \int log |f|$, notée $\|f\|_0$), c'est à dire sans que la constante c_p ne dégénere quand p tend vers 0 par valeur supérieure. Il montre en fait l'existence d'une constante c strictement positive telle que :

$$\forall x_1, \ldots x_N \in B \qquad \left\| \sum_{j=1}^{N} x_j Z_j \right\|_0 \geq c \left\| \sum_{j=1}^{N} x_j Z_j \right\|_2 \qquad (1)$$

Cette démonstration fait l'objet de notre premiére partie et constitue le résultat principal de ce mémoire. Il faut remarquer que ce résultat est faux pour les variables aléatoires de Rademacher[2]: on a en effet $\left| \frac{1}{2} r_0 + \frac{1}{2} r_1 \right|$ qui vaut 0 avec probabilité 1/2 et ~~qui est borné par~~ 1 sinon, d'où $\left\| \frac{1}{2} r_0 + \frac{1}{2} r_1 \right\|_0 = 0$ alors que $\left\| \frac{1}{2} r_0 + \frac{1}{2} r_1 \right\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ensuite, aprés une présentation minimale des fonctions (d'une variable complexe) de Bloch, nous verrons que (1) permet de répondre par la négative à une question d'Ahern et Rudin [AR] relatives aux zéros des fonctions de Bloch, et nous présenterons une «amélioration» d'une inégalité obtenue par Anderson, Clunie et Pommerenke [ACP].

La troisiéme partie, rattachée à l'analyse complexe dans C^n, est consacrée aux polynômes de Ryll-Wojtaszczyk [RW]. En reprenant la construction qu'en a fait W.Rudin dans [RM] et en utilisant (1), D.Ullrich a étendu le résultat de Ryll et Wojtaszczyk.

Enfin, la quatriéme partie proposera un exemple d'utilisation dans un espace de Banach autre que C de (1), relatif aux ensembles de Sidon.

1. variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur le cercle unité.
2. Les variables de Rademacher sont des variables aléatoires indépendantes définies sur Ω prenant les valeurs 1 et -1 avec probabilité 1/2. Elles peuvent s'exprimer par: $r_n(x) = signe(sin(2^{n+1}\pi x))$.

I-UNE EXTENSION DES INEGALITES DE KHINTCHINE-KAHANE DANS LES ESPACES DE BANACH.

Notations: B désigne un espace de Banach quelconque.

EX désigne l'espérance de la variable aléatoire X à valeurs dans B.

$\Omega^{\mathbb{N}}$ désigne l'espace probabilisé $[0,1]^{\mathbb{N}}$, muni de sa mesure $d\omega$. Un élément de Ω est donc une suite $(\omega_j)_j$ d'éléments de $[0,1]$.Si on travaille sur $\Omega^N=[0,1]^N$, on utilisera la mesure de probabilité déduite de la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$:$d\omega_1...d\omega_N$.

La notation indicée $\Omega_1,...,\Omega_n$ désigne une suite de copies de Ω.

Dans ce qui suit, $(\omega_j)_j$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi à densité uniforme sur $[0,1]$, et on pose $Z_j = e^{2i\pi\omega_j}$ (v.a de Steinhaus). Les Z_j sont indépendantes de même loi, uniformément distribuées sur le cercle unité.

Pour p>0, on note $\|X\|_p = \left(\int_\Omega \|X(\omega)\|_B^p d\omega\right)^{1/p}$, et on définit la moyenne géométrique de X comme étant la limite pour p tendant vers 0 de cette quantité:

$$lim_{p\to 0, p>0}\|X\|_p = \|X\|_0 = exp\int_\Omega log\|X(\omega)\|_B d\omega$$

L'objet de cette première partie est de démontrer le résultat suivant, fondamental pour la suite :

<u>Théorème 1.1</u>: *il existe une constante c>0 telle que*

$$\forall x_1,\dots,x_N \in B \qquad \left\|\sum_{j=1}^N x_jZ_j\right\|_0 \geq c\left\|\sum_{j=1}^N x_jZ_j\right\|_2$$

duquel on tire le:

<u>Corollaire 1.2</u>: *il existe une constante c>0 telle que si $(x_j)_j$ est une suite de scalaires de carré sommable, on ait :* $\left\|\sum_{j=1}^\infty x_jZ_j\right\|_0 \geq c\|(x_j)_{j\geq 1}\|_2$

On commence par démontrer deux lemmes importants qui sont des «inégalités de faible concentration».

<u>lemme 1.3</u>: *il existe* $\delta>0, 0<\gamma<1$ *et* $K>1$ *telles que si :*

$$x_1,\dots,x_N \in B \qquad et \qquad E\left\|\sum_{j=1}^N Z_jx_j\right\|^2 = 1$$

alors : $\forall y\in B$ *on a* $P\left\{\left\|\sum_{j=1}^N Z_jx_j - y\right\| < \delta\right\} \leq \gamma P\left\{\left\|\sum_{j=1}^N Z_jx_j - y\right\| < K\right\}$

<u>lemme 1.4:</u> *il existe des constantes numériques $\delta>0$, $0<\gamma<1$, K finie, telles que si :*

$$x_1,\dots x_N \in B \qquad X = \sum_{j=1}^{N} Z_j x_j \qquad et \qquad \sigma^2 = E\|X^2\|$$

alors pour toute variable aléatoire Y, indépendante de X, à valeurs dans B :

$$P\{\|X+Y\| < \delta\sigma\} \le \gamma P\{\|X+Y\| < K\sigma\}$$

remarque: les valeurs suivantes conviennent: K=5, γ=4/5 et $\delta = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\right)$

<u>preuve du lemme 1.3:</u> on pose $X = \sum_{j=1}^{N} Z_j x_j$

Les inégalités de Kahane[1] nous donnent : $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(E\|X\|^2)^{1/2} \le E\|X\|$

Soit l'évènement $A_\varepsilon = \|X(\omega)\| < \varepsilon$

De l'inégalité suivante (Salem-Zygmund, [KH] page 8) :

$$\forall 0<\lambda<1 \qquad P\{\|X\| \ge \lambda E\|X\|\} \ge (1-\lambda)^2 \frac{(E\|X\|)^2}{E\|X\|^2}$$

on tire : $P\{\|X\| \ge \frac{\lambda}{\sqrt{3}}\} \ge P\{\|X\| \ge \lambda E\|X\|\} \quad \frac{(1-\lambda)^2}{3}$, mais si $\varepsilon<1/3^{1/2}$, on a

$\lambda=\varepsilon 3^{1/2}<1$ donc : $P\{\|X\| \ge \varepsilon\} \ge \frac{(1-\lambda)^2}{3}$.

Ainsi on a : $P(A_\varepsilon) \le 1 - \frac{(1-\varepsilon\sqrt{3})^2}{3}$

On choisit maintenant $0<\delta_0$ tel que $\frac{3}{4} = 1 - \frac{(1-\delta_0\sqrt{3})^2}{3} < 1$ et on démontre le lemme avec $\delta=\delta_0/2$ et $K>\delta$ à fixer par la suite. (on a en fait pour δ_0 la valeur $\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \approx \frac{1}{10}$).

1er cas : y appartient à $B(0,\delta)$[2]

l'inégalité triangulaire donne alors:

$$P\{\|X-y\| < \delta\} \le P\{\|X\| < 2\delta\} = P\{\|X\| < \delta_0\} \le \frac{3}{4}$$

on a ensuite : $\|X\| < K-\delta \Rightarrow \|X-y\| \le \|X\| + \|y\| \le K-\delta+\delta = K$

---

1. que la constante $\frac{1}{\sqrt{3}}$ soit admissible dans le cas vectoriel est dû à Tomaszenski (cf [TO]).

2. Comme d'habitude on a : $B(y,\delta) = \{x \in X ; \|x-y\| < \delta\}$

donc $P\{\|X-y\|<K\} \geq P\{\|X\|<K-\delta\} = 1-P\{\|X\|\geq K-\delta\}$

mais par l'inégalité de Tchebicheff :

$$P\{\|X\|\geq K-\delta\} = P\{\|X\|^2\geq (K-\delta)^2\} \leq \frac{E\|X\|^2}{(K-\delta)^2} = \frac{1}{(K-\delta)^2}$$

d'où $P\{\|X-y\|<K\} \geq 1-\frac{1}{(K-\delta)^2}$

or il est clair que pour K assez grand (K=5 convient) on a (ici γ=4/5) :

$$\frac{4}{5}\left(1-\frac{1}{(K-\delta)^2}\right) > \frac{3}{4} \geq P\{\|X-y\|<\delta\}$$

et ainsi $P\{\|X-y\|<\delta\} \leq \frac{4}{5}P\{\|X-y\|<K\}$

2éme cas : y n'appartient pas à B(0,δ) :

on a alors : $\|y\|\geq\delta \Rightarrow \frac{2\delta}{\|y\|}\leq 2$ donc $\exists\theta\in R; \left|1-e^{i\theta}\right| = \frac{2\delta}{\|y\|}$.

on pose $\tilde{y} = ye^{i\theta}$ donc $\|y-\tilde{y}\| = 2\delta$ d'où $B(y,\delta)\cap B(\tilde{y},\delta) = \varnothing$

mais les deux variables aléatoires X et $Xe^{-i\theta}$ ont même loi, donc :

$$P\{X\in B(y,\delta)\} = P\{X\in B(\tilde{y},\delta)\}$$

l'union étant disjointe, K supérieur à 3δ et $(B(y,\delta)\cup B(\tilde{y},\delta))\subset B(y,3\delta)$

on peut écrire :

$$P\{\|X-y\|<K\} \geq P\{\|X-y\|<3\delta\} \geq P\{X\in B(y,\delta)\} + P\{X\in B(\tilde{y},\delta)\}$$

d'où : $P\{\|X-y\|<\delta\} \leq \frac{1}{2}P\{\|X-y\|<K\} \leq \gamma P\{\|X-y\|<K\}$

ceci achéve la preuve du lemme 1.3

preuve du lemme 1.4:

on suppose σ=1 (par homogénéité), et on fait jouer à Y(ω), ω fixé, le rôle tenu par y dans l'inégalité précédente, d'où, par indépendance, on a :

$$P\{\|X+Y\|<\delta\} = \int_{\Omega_2}\int_{\Omega_1} 1_{\{\|(X(\omega_1))+Y(\omega_2)\|<\delta\}}\,d\omega_1 d\omega_2 = \dots$$

$$\dots \leq \int_{\Omega_2} P\{\|X+Y(\omega_2)\|<\delta\}\,d\omega_2 \leq \int_{\Omega_2}\gamma P\{\|X+Y(\omega_2)\|<K\}\,d\omega_2$$

$$\dots\leq \gamma P\{\|X+Y\|<K\}$$

le lemme 1.4 est donc démontré.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 1.1:

preuve du théorème 1.1: On définit la loi μ de la variable aléatoire suivante $X = \sum_{j=1}^{N} x_j Z_j$ par $\mu(A) = P\{X \in A\}$ pour tout A borélien de l'espace de Banach B.

De maniére équivalente, on a pour toute fonction mesurable et bornée sur B :

$$\int_B f(X)\, d\mu(X) = \int_{\Omega^N} f\left(\sum_{j=1}^{N} x_j Z_j\right) d\omega_1 \dots d\omega_N$$

étape 1: on a : $\int_{B_1} \log \frac{1}{\|x\|} d\mu(x) = \int_0^1 \frac{\mu(B_\lambda)}{\lambda} d\lambda$

en effet, on écrit notre intégrale sous la forme : $\int_{B_1} \log \frac{1}{\|x\|} d\mu(x) = \int_{B_1} \left(\int_{\|x\|}^{1} \frac{d\lambda}{\lambda} \right) d\mu(x)$

Comme tout est positif on peut appliquer Fubini, d'où :

$$\int_{B_1} \log \frac{1}{\|x\|} d\mu(x) = \int_0^1 \left(\int_{B_\lambda} d\mu(x) \right) \frac{d\lambda}{\lambda} = \int_0^1 \mu(B_\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda}$$

étape 2 : on montre que la quantité ci dessus est majorée par une constante c finie et indépendantes des x_j et de N. Pour cela on décompose l'intervalle d'intégration [0,1] en trois morceaux et on fait trois estimations.

Enfin on suppose, sans perte de généralité par homogénéïté et parce que les variables aléatoires de Steinhaus sont indépendantes et identiquement distribuées, que :

$\left\| \sum_{j=1}^{N} x_j Z_j \right\|_2 = 1$ *et* $\|x_1\| \geq \|x_j\|, \forall j = 1 \dots N$. On a alors $\|x_1\| \leq \left\| \sum_{j=1}^{N} x_j Z_j \right\|_2 = 1$.

1er morceau : $\int_0^{\frac{\|x_1\|}{2}} \frac{\mu(B_\lambda)}{\lambda} d\lambda$

Soit A l'évènement $\|x_1 Z_1 - y\| < \lambda$.

On fixe ω_0 dans A. Si ω_1 appartient à A on a par l'inégalité triangulaire :

$$|Z_1(\omega_0) - Z_1(\omega_1)| \leq \frac{2\lambda}{\|x_1\|}$$

Ainsi $P(A) \leq P\left(\omega_1 \in \Omega; |Z_1(\omega_0) - Z_1(\omega_1)| \leq \frac{2\lambda}{\|x_1\|}\right)$, mais comme la loi de Z_1 est invariante par rotation, la probabilité au second membre vaut

$P\left(\omega_1 \in \Omega; |Z_1(\omega_1) - 1| \le \frac{2\lambda}{\|x_1\|}\right)$ et donc $P(A) \le P\left(\omega_1 \in \Omega; |Z_1(\omega_1) - 1| \le \frac{2\lambda}{\|x_1\|}\right)$.

On va utiliser l'inégalité : $\forall 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, $\sin x \ge \frac{2}{\pi}x$, qui nous améne à distinguer deux cas :

- *1er cas:* ω_1 est dans $[0,1/2]$. Alors on a : $|Z_1 - 1| = 2|\sin\pi\omega_1| \ge 2\frac{2}{\pi}\pi\omega_1 = 4\omega_1$

  ce qui donne : $\left(|Z_1 - 1| < \frac{2\lambda}{\|x_1\|}\frac{1}{4}\right) \Rightarrow \left(\omega_1 \le \frac{\lambda}{2\|x_1\|}\right)$

- *2éme cas:* ω_1 est dans $[1/2,1]$. On a : $|Z_1 - 1| = 2|\sin\pi(1 - \omega_1)| \ge 4(1 - \omega_1)$

  donc : $\left(|Z_1 - 1| \le \frac{2\lambda}{\|x_1\|}\right) \Rightarrow \left(1 - \omega_1 < \frac{\lambda}{2\|x_1\|}\right)$

En <u>résumé</u> nous avons donc :

$P\left(\omega_1 \in \Omega; |Z_1(\omega_1) - 1| \le \frac{2\lambda}{\|x_1\|}\right) \le \frac{\lambda}{2\|x_1\|} + \frac{\lambda}{2\|x_1\|} = \frac{\lambda}{\|x_1\|}$ et d'aprés (1) : $P(A) \le \frac{\lambda}{\|x_1\|}$.

Ainsi on a $P(A) \le \frac{\lambda}{\|x_1\|}$ et, faisant jouer à $\sum_{j=2}^{N} x_j Z_j$ le rôle de y dans ce qui précéde, il vient :

$$\mu(B_\lambda) = P\left\{\left\|\sum_{j=1}^{N} x_j Z_j\right\| < \lambda\right\} = P\left\{\left\|\sum_{j=2}^{N} x_j Z_j + x_1 Z_1\right\| < \lambda\right\}$$

$$\le \int_{\Omega_2} \dots \int_{\Omega_N} \frac{\lambda}{\|x_1\|} d\omega_2 \dots d\omega_N = \frac{\lambda}{\|x_1\|}$$

D'où, finalement : $\displaystyle\int_0^{\frac{\|x_1\|}{2}} \frac{\mu(B_\lambda)}{\lambda} d\lambda \le \int_0^{\frac{\|x_1\|}{2}} \frac{1}{\|x_1\|} d\lambda = \frac{1}{2}$

2éme morceau : $\displaystyle\int_{\frac{\|x_1\|}{2}}^{2K\|x_1\|} \frac{\mu(B_\lambda)}{\lambda} d\lambda \le \int_{\frac{\|x_1\|}{2}}^{2K\|x_1\|} \frac{d\lambda}{\lambda} = \log(4K) < \infty$

(remarque: si on a $2K\|x_1\| \ge 1$ le troisiéme morceau n'existe pas et on a fini.)

3éme morceau : on prend δ comme dans le lemme 1.3, et on pose : $\alpha=\delta/2K$. Nous allons montrer , à l'aide du lemme 1.4, que : $\mu(B_{\alpha\lambda}) \le \gamma\mu(B_\lambda)$

Soit λ fixé dans $[2K\|x_1\|,1]$, et M maximal pour la condition: $\left\| \sum_{j=1}^{M} x_j Z_j \right\|_2 \leq \frac{\lambda}{K} < 1$.

(ceci est possible car cette expression est une fonction croissante[1] de M, majorée par 1, et que pour M=1 on obtient $\|x_1\| \leq \frac{\lambda}{2K} < \frac{\lambda}{K}$)

On définit alors deux nouvelles variables aléatoires, indépendantes par construction :

$$X = \sum_{j=1}^{M} x_j Z_j \qquad Y = \sum_{j=M+1}^{N} x_j Z_j$$

On pose ensuite : $\sigma^2 = \|X\|_2$ et **on montre que** $\alpha\lambda \leq \delta\sigma$:

La maximalité de M entraîne : $\left\| \sum_{j=1}^{M+1} x_j Z_j \right\|_2 > \frac{\lambda}{K}$

or : $\left\| \sum_{j=1}^{M+1} x_j Z_j \right\|_2 \leq \left\| \sum_{j=1}^{M} x_j Z_j \right\|_2 + \|x_{M+1} Z_{M+1}\|_2 = \left\| \sum_{j=1}^{M} x_j Z_j \right\|_2 + \|x_{M+1}\| = \sigma + \|x_{M+1}\|$

d'où $\sigma + \|x_{M+1}\| > \frac{\lambda}{K}$, mais on a supposé $\|x_1\| \geq \|x_{M+1}\|$ donc $\frac{\lambda}{K} \leq \sigma + \|x_1\|$.

Comme $\|x_1\| \leq \sigma$ on a $\frac{\lambda}{K} \leq 2\sigma$ et donc $\alpha\lambda = \frac{\delta}{2K}\lambda \leq 2\sigma\frac{\delta}{2} = \delta\sigma$.

Ceci nous donne, par application du lemme 1.4 aux variables aléatoires indépendantes X et Y : $P\{\|X+Y\| \leq \alpha\lambda\} \leq P\{\|X+Y\| \leq \delta\sigma\} \leq \gamma P\{\|X+Y\| \leq K\sigma\} \leq \gamma P\{\|X+Y\| \leq \lambda\}$

(car $K\sigma<\lambda$ par définition), c'est à dire : $\mu(B_{\alpha\lambda}) \leq \gamma\mu(B_\lambda)$ (1)

étape 3 : nous pouvons enfin majorer notre 3éme morceau, en recouvrant l'intervalle

$[2K\|x_1\|,1$ par $\bigcup_{n=0}^{n_0} [\alpha^{n+1},\alpha^n]$ où n_0 est tel que $2K\|x_1\| \in [\alpha^{n_0+1},\alpha^{n_0}]$.

soit $n \leq n_0$ tel que $\lambda \in [\alpha^{n+1},\alpha^n]$; posons $\lambda = \alpha^n\theta$ avec $\alpha \leq \theta$ 1. Alors $\alpha^{n-1}\theta, \alpha^{n-2}\theta, \ldots, \theta$ appartiennent à $[2K\|x_1\|,1]$. En effet : $\alpha^{n-1}\theta \geq \ldots \geq \alpha^{n_0} \geq 2K\|x_1\|$ et $\theta \leq 1$.

---

1. On écrit $\sum_{j=1}^{M} x_j Z_j(\omega) = \int_{\Omega'} \left(\sum_{j=1}^{M} x_j Z_j(\omega) + Z_{M+1}(\omega') \right) d\omega'$ car $\int_{\Omega'} Z_{M+1}(\omega')\,d\omega' = 0$. Par Jensen on a alors $\left\| \sum_{j=1}^{M} x_j Z_j(\omega) \right\|^2 \leq \int_{\Omega'} \left\| \sum_{j=1}^{M} x_j Z_j(\omega) + Z_{M+1}(\omega') \right\|^2 d\omega'$ d'où: $E\left\| \sum_{j=1}^{M} x_j Z_j(\omega) \right\|^2 \leq E\left\| \sum_{j=1}^{M+1} x_j Z_j(\omega) \right\|^2$

On peut donc appliquer n fois la formule (1) pour avoir :

$$\mu(B_\lambda) = \mu(B_{\alpha^n\theta}) = \mu(B_{\alpha\alpha^{n-1}\theta}) \le \gamma\mu(B_{\alpha^{n-1}\theta}) \le \ldots \le \gamma^n\mu(B_\theta) \le \gamma^n$$

Ce qui permet d'estimer notre troisième morceau :

$$\int_{2K\|x_1\|}^{1} \frac{\mu(B_\lambda)}{\lambda} d\lambda \le \int_{\alpha^{n_0+1}}^{1} \frac{\mu(B_\lambda)}{\lambda} d\lambda \le \sum_{n=0}^{n_0} \int_{\alpha^{n+1}}^{\alpha^n} \gamma^n \frac{d\lambda}{\lambda} \le \frac{1}{1-\gamma} \log\frac{1}{\alpha} = c'$$

BILAN: on a bien une majoration par une constante numérique finie c :

$$\int_0^1 \frac{\mu(B_\lambda)}{\lambda} d\lambda \le c' < \infty$$

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 1.1. Posons :

$$g_M = \log\|x\|\chi_{\{\frac{1}{M} \le \|x\| \le 1\}}$$

c'est une fonction mesurable et bornée sur B, convergeant simplement vers :

$$g(x) = \log\|x\| 1_{\|x\| \le 1} \qquad \textit{quand} \qquad M \to \infty$$

Mais par ce qui précède, on a pour tout M et par définition de la mesure μ :

$$\int_{B_1} g_M(x)\, d\mu(x) = \int_{\Omega^N} g_M(\omega)\, d\omega_1 \ldots d\omega_2 \ge -c'$$

Par ce qui précède : $\int_{\Omega^N} -g_M\left(\sum_{j=1}^{N} x_j Z_j\right) d\omega_1 \ldots d\omega_2 \le c$ et (remarquer que $-g_M$ est positive)

le lemme de Fatou nous dit que $\int_{\Omega^N} (-g)\left(\sum_{j=1}^{N} x_j Z_j\right) d\omega_1 \ldots d\omega_2 \le c'$, donc :

$$\int_{\Omega^N} \log\left\|\sum_{j=1}^{N} x_j Z_j\right\| d\omega_1 \ldots d\omega_2 \ge \int_{\Omega^N} g\left(\sum_{j=1}^{N} x_j Z_j\right) d\omega_1 \ldots d\omega_2 \ge -c'$$

soit : $\left\|\sum_{j=1}^{N} x_j Z_j\right\|_0 \ge e^{-c'} = c$ ce qui démontre le théorème.

Preuve du corollaire : comme notre série est de carré sommable, que les variables aléatoires sont centrées et indépendantes, on a (théorème de Kolmogorov) convergence presque sûre de $\sum_1^{\infty} x_j Z_j$. On pose alors $f_N = \sum_{j=1}^{N} x_j Z_j$, qui converge simplement vers $f = \sum_1^{\infty} x_j Z_j$

Par le théorème 1.1 appliqué à f_N nous avons $\|f_N\|_0 \geq c \sqrt{\sum_{j=1}^{N} |x_j|^2}$

Cette fois encore le lemme de Fatou permet de passer à la limite pour avoir $\|f\|_0 \geq c$.

II-ZEROS ET CROISSANCE DES FONCTIONS DE BLOCH

Notations: D désigne le disque unité ouvert du plan complexe C.

on identifiera z et $re^{i\theta}$, $|z|$ et r.

f_r sera la fonction déduite de f par : $f_r(z)=f(rz)$, r dans $[0,1[$.

la moyenne d'ordre p de f se note:

$$\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{1/p}$$

la moyenne géométrique, limite de la précédente pour p tendant vers zéro:

$$\|f\|_0 = exp \int_0^{2\pi} log|f(e^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi}$$

A-GENERALITES:

Définition: soit f holomorphe sur D, à valeurs dans C. On dit que f est une fonction de Bloch, ou que f appartient à B, si elle vérifie:

$$sup_{z \in D} (1 - |z|^2) |f'(z)| < \infty$$

On dira que f appartient à B_0 si elle vérifie la condition (plus forte) suivante:

$$\lim_{|z| \to 1^-} (1 - |z|^2) |f'(z)| = 0$$

On définit une norme dite norme Bloch sur B par :

$$\|f\|_B = |f(0)| + sup_{z \in D} (1 - |z|^2) |f'(z)|$$

Pour plus d'informations sur ces deux espaces, on pourra consulter [ACP]. Retenons simplement que B et B_0 sont des espaces de Banach, et que B_0 est la fermeture dans B des polynômes, munis de la norme Bloch.

On commence par établir quelques résultats utiles pour la suite:

Lemme 2.0: B_0 est la fermeture dans B (pour la norme Bloch) des polynômes. Plus précisément, si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_n \in B_0$ et si $f_N(z) = \sum_{n=0}^{N} \left(1 - \frac{n}{N}\right) a_n z_n$ est la somme de Fejer d'ordre N de f, alors $\|f_N - f\|_B \to 0$ quand $N \to +\infty$.

Preuve: Soit $K_N(t) = \sum_{|n| \le N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e^{int} = \frac{1}{N} \left(\frac{sin N\frac{t}{2}}{sin\frac{t}{2}} \right)^2$ le noyau de Fejer; on sait que pour toute fonction ϕ continue 2π-périodique $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\phi(t)K_N(t)\,dt \to \delta_0(\varphi) = \varphi(0)$. D'autre part, si on note $f_t(z) = f(ze^{-it})$, on a $f_N(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_t(z)K_N(t)\,dt$. Si $f \in B_0$, $t \to f_t$ est une application continue de R dans B et on a (intégrale vectorielle dans B, cf [KA] p. 10-15): $f_N - f = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f_t - f)K_N(t)\,dt$, d'où posant $\varphi(t) = \|f_t - f\|_B$, il vient :

$$\|f_N - f\|_B \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\|f_t - f\|_B K_N(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)K_N(t)\,dt \to \varphi(0) = 0.$$

<u>lemme 2.1:</u> *si f est la somme d'une série entière q-lacunaire à la Hadamard et à coefficients bornés (avec q>1), alors f appartient à B. Si de plus les modules des coefficients tendent vers 0, alors f appartient à B_0 et de plus :* $\|f\|_B \le \frac{2q}{q-1}\|a\|_\infty$, *avec* $\|a\|_\infty = sup_{i\ge 0}|a_i|$.

<u>preuve:</u> soit une suite d'exposants $(m_i)_i$, $m_i>0$, une suite $(a_i)_i$ de scalaires, bornée par 1 et q un réél vérifiant: $m_{i+1}/m_i \ge q > 1$ (suite q-lacunaire à la Hadamard) et $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^{m_i}$

on remarque que: $m_i - m_{i-1} \ge m_i - \frac{m_i}{q} = \frac{q-1}{q}m_i$

d'où: $\left|m_i a_i r^{m_i - 1}\right| \le \frac{q-1}{q}(m_i - m_{i-1})r^{m_i - 1}$

mais $(m_i - m_{i-1})r^{m_i - 1} = r^{m_i - 1} + \ldots + r^{m_i - 1} \le r^{m_{i-1}+1} + r^{m_{i-1}+2} + \ldots + r^{m_i - 1}$

donc $(m_i - m_{i-1})r^{m_i - 1} \le \frac{r^{m_{i-1}+1} - r^{m_i}}{1-r}$

ceci permet de majorer la dérivée de f:

$$(1-|z|^2)|f'(z)| = \left|\sum_{i=0}^{\infty} m_i a_i z^{m_i - 1}\right| \le \frac{q}{q-1}\frac{1-|z|^2}{1-|z|} \le \frac{2q}{q-1} < \infty$$

ce qui démontre la première partie du lemme.

Si de plus: $\lim_{i\to\infty}|a_i| = 0$, alors $\forall\varepsilon>0$, on peut écrire f=P+g avec P un polynôme et g une série lacunaire dont tous les coefficients sont majorés en module par ε et nulle en 0.

On a clairement : $limsup_{|z|\to 1}(1-|z|^2)\,|P'(z)| = 0$ d'où par ce qui précède :

$$limsup_{|z|\to 1}(1-|z|^2)\,|f'(z)| \le limsup_{|z|\to 1}(1-|z|^2)\,|g'(z)| \le sup_{|z|<1}(1-|z|^2)\,|g'(z)| \le \frac{2q}{q-1}\varepsilon$$

Ainsi $limsup_{|z|\to 1}(1-|z|^2)\,|f'(z)| = 0$ donc $f \in B_0$ ce qui achéve la démonstration du lemme 2.1.

<u>lemme 2.2:</u> *a) si f appartient à B on a:* $\|f_r\|_0 = O\left(\left(log\frac{1}{1-r}\right)^{1/2}\right)$.

Plus précisément: $\|f_r\|_0 \le 3\|f\|_B\left(log\frac{1}{1-r}\right)^{1/2}$ si $r \ge \frac{2}{3}$

b) si de plus f appartient à B_0 alors on a:

$$\|f_r\|_0 = o\left(\left(log\frac{1}{1-r}\right)^{1/2}\right)$$

ceci toujours pour r tendant vers 1 (ne sera plus précisé).

<u>*preuve:*</u>

cas où f appartient à B:

on établit un premier résultat pour la moyenne d'ordre 2 de f_r :

$$\|f_r\|_2 = O\left(\left(log\left(\frac{1}{1-r}\right)\right)^{1/2}\right)$$

soit r un réél entre 0 et 1 (r<1). On a :

$$f_r(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (re^{i\theta})^n \Rightarrow f_r'(e^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n (re^{i\theta})^{n-1} \in L^2\left([0,2\pi],\frac{d\theta}{2\pi}\right)$$

d'où (par Parseval): $\|f_r'\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^2|a_n|^2 r^{2n-2}$

Comme f appartient à B et que $re^{i\theta}$ est un point de D, on a:

$$sup_{\theta\in[0,2\pi]}\left|f_r'(e^{i\theta})\right| \le \frac{\|f\|_B}{1-r}$$

d'où $\sum_{n=1}^{\infty} n^2|a_n|^2 r^{2n-2} = \|f_r'\|_2^2 \le \frac{\|f\|_B^2}{(1-r)^2}$

Il reste à intégrer terme à terme (de 0 à r) deux fois cette série, ce qui donne:

$$\|f_r\|_2 \le \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 r^{2n}} \le \sqrt{4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n(2n-1)}|a_n|^2 r^{2n}} \le 2\|f\|_B\sqrt{log\frac{1}{1-r}}$$

On a donc, en tenant compte de $|a_0| \le \|f\|_B$, la majoration suivante :

dès que r est supérieur à 2/3 ((e-1)/e très exactement).

$$\|f_r\|_2 \leq \|f\|_B + 2\|f\|_B\sqrt{log\frac{1}{1-r}} \leq 3\|f\|_B\sqrt{log\frac{1}{1-r}}$$

On peut passer à la moyenne géometrique en remarquant que sur un espace probabilisé les «normes» $\|\ldots\|_p$ sont croissantes avec p>0. Ainsi : $\|f_r\|_0 \leq \|f_r\|_2 \quad 3\|f\|_B\sqrt{log\frac{1}{1-r}}$ dès que r>2/3, ce qui signifie bien $\|f_r\|_0 = O\left(\left(log\frac{1}{1-r}\right)^{1/2}\right)$

cas où f appartient à B_0 :

On va utiliser la densité des polynômes dans B_0, pour la norme Bloch :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists P \in R[z] ; \|f-P\|_B < \varepsilon$$

Ce qui nous permet d'écrire f=P+g avec P un polynôme et $\|g_r\|_B \leq \varepsilon$. On a alors :

$$\|f_r\|_0 \leq \|f_r\|_2 \leq \|P_r\|_2 + \|g_r\|_2 \leq O(1) + 3\|g\|_B\sqrt{log\frac{1}{1-r}}$$

d'où $limsup_{r\to 1^-}\dfrac{\|f_r\|_0}{\sqrt{log\frac{1}{1-r}}} \leq 3\|g\|_B < 3\varepsilon \ \forall\varepsilon > 0$, soit $\|f_r\|_0 = o\left(\left(log\frac{1}{1-r}\right)^{1/2}\right)$

Le lemme 2.2 est démontré

B-Réponse à une question d'Ahern et Rudin [AR]: B et B_0 ont ils les mêmes ensembles de zéros ?

Nous allons montrer que ce n'est pas le cas:
Soit la série entière lacunaire à coefficients aléatoires suivante:

$$f_\omega(z) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n z^{2^n}, \forall\omega \in \Omega, \forall z \in D$$

on a alors :
<u>proposition 2.3:</u> *pour tout ω dans Ω, f_ω appartient à B, et pour presque tout ω dans Ω*

$$\|(f_\omega)_r\|_0 \neq o\left(\left(\log\frac{1}{1-r}\right)^{1/2}\right)$$

<u>preuve</u>: l'appartenance de f_ω à B découle du lemme 2.1. On note :

$$T_r(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f_\omega(re^{i\theta})\right| d\theta - \frac{1}{2}\log\log\frac{1}{1-r}$$

Nous avons vu dans les lemmes 2.1 et 2.2 que[1] :
$T_r(\omega) \le \log 3\|f_\omega\|_B \le \log 12 sup_{n\ge 0}|Z_n(\omega)| = \log 12 = C < +\infty$, ceci indépendamment de ω. On va d'abord montrer que pour presque tout ω on a :

$$\limsup_{r\to 1} T_r(\omega) > -\infty$$

Par le corollaire1.2 on a : $\|(f_\omega)_r\|_0 \ge D\sqrt{\sum_0^{\infty} r^{2^{j+1}}} \ge D'\sqrt{\log\frac{1}{1-r}}$, en remarquant bien qu'ici on prend <u>l'espérance sur Ω</u>

(*remarque:* la seconde majoration provient de la sommation par paquets suivante :

$$\log\frac{1}{1-r} = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{r^j}{j} = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{2^j\le n<2^{j+1}}\frac{r^n}{n} \le \sum_{j=0}^{\infty} 2^j\frac{r^{2^j}}{2^j} = \sum_{j=0}^{\infty} r^{2^j}$$

et si r>3/4 on a $1-r^2 \le \sqrt{1-r}$ d'où $\log\frac{1}{\sqrt{1-r}} \le \log\frac{1}{1-r^2} = \sum_{j=0}^{\infty} r^{2^{j+1}}$)

soit $\int_\Omega \log\left|f_\omega(re^{i\theta})\right| d\omega \ge \frac{1}{2}\log\log\left(\frac{1}{1-r}\right) - \log\frac{1}{D'}$

1. Cette remarque est utile car elle assure l'existence de $\int T_r(\omega)\, d\omega$, la partie positive de l'intégrande étant bornée sur notre espace probabilisé.

On intégre ensuite cette relation sur $[0,2\pi]$ pour avoir (r est fixé) :

$$\int_0^{2\pi}\int_\Omega log|f_\omega(re^{i\theta})|d\omega\frac{d\theta}{2\pi}\geq\frac{1}{2}loglog\left(\frac{1}{1-r}\right)-log\frac{1}{D'}$$

Il est important de remarquer que l'on peut appliquer Fubini car notre intégrande est borné supérieurement et que l'on travaille sur des espaces de mesure finie. Ainsi :

$$\int_\Omega T_r(\omega)\,d\omega\geq -log\frac{1}{D'}\qquad soit\qquad \int_\Omega -T_r(\omega)\,d\omega\leq log\frac{1}{D'}$$

On pose maintenant : $T(\omega) = limsup_{r\to 1}T_r(\omega)$ et on applique le lemme de Fatou aux variables aléatoires positives $C\text{-}T_r(\omega)$ ce qui donne :

$$\int_\Omega liminf_{r\to 1}(C-T_r(\omega))\,d\omega\leq liminf_{r\to 1}\int_\Omega(C-T_r(\omega))\,d\omega$$

$$soit\qquad C-\int_\Omega limsup_{r\to 1}T_r(\omega)\,d\omega\leq C+liminf_{r\to 1}\int_\Omega -T_r(\omega)\,d\omega\quad C+log\frac{1}{D'}$$

En résumé nous avons donc $\int_\Omega T(\omega)\,d\omega\geq -log\frac{1}{D'}>-\infty$

Ainsi, $T>-\infty$ presque sûrement d'où T est finie presque sûrement, donc pour presque tout ω il existe une suite de rayons r_n (fonction de ω) tendant vers 1 et un nombre δ_ω tels que :

$$lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}log|f_\omega(r_ne^{i\theta})|d\theta-\frac{1}{2}loglog\frac{1}{1-r_n}\right)\geq\delta_\omega>-\infty$$

On passe à la moyenne géométrique :

$$lim_{n\to\infty}\|(f_\omega)_{r_n}\|\geq e^{\delta_\omega}\sqrt{log\left(\frac{1}{1-r_n}\right)}$$

Ce qui est bien la preuve de $\|(f_\omega)_r\|_0\neq o\left(\left(log\frac{1}{1-r}\right)^{1/2}\right)$

Nous pouvons maintenant démontrer le :

<u>Théoreme 2.4:</u> *il existe une fonction f dans B telle que si g appartient à B_0 et si Z(f) est inclus dans Z(g), alors g=0. En fait, presque toute fonction de la forme*

$$f_\omega(z)=\sum_{n=0}^{\infty}Z_nz^{2^n}$$

avec ω dans Ω, convient.

preuve: on rappelle la formule de Jensen, pour f holomorphe sur D:

$$|f(0)|\prod_{i=1}^{N}\frac{r}{|z_{f,i}|} = exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} log|f(re^{i\theta})|d\theta, \forall r < 1$$

où les $z_{f,i}$ sont les zéros de f, avec multiplicité, dans D(0,r) fermé.

on suppose que nos fonctions sont non nulles à l'origine et que g n'est pas identiquement nulle. On a alors : $\forall r < 1, |g(0)|\prod_{i=1}^{N'}\frac{r}{|z_{f_\omega,i}|} \leq |g(0)|\prod_{i=1}^{N}\frac{r}{|z_{g,i}|} = exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} log|g(re^{i\theta})|d\theta$

ceci avec N' inférieur à N, d'où:

$$\forall r < 1, \frac{|g(0)|}{|f(0)|}exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} log|f_\omega(re^{i\theta})|d\theta \leq exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} log|g(re^{i\theta})|d\theta$$

Mais comme g appartient à B_0, le terme de droite est un $o\left(\sqrt{log\frac{1}{1-r}}\right)$ par la proposition 2.3, alors que pour presque tout ω, celui de gauche ne l'est pas. Ainsi l'hypothése g non identiquement nulle est absurde et le théoréme est démontré.

Remarque: le théorème 2.4 apporte bien une réponse négative à la question d'Ahern et Rudin (notre $Z(f_\omega)$ ne sera jamais un Z(g) pour g dans B_0). Mentionnons que Wolff a montré dans [WO] que tout ensemble de zéros d'une fonction de H^∞ est celui d'une fonction de B_0.

En fait nous avons l'analogie suivante: B_0 est à B ce que A(D)[1] est à H^∞, or A(D) et H^∞ n'ont pas les mêmes ensembles de zéros (cf [HO]). Il semble donc raisonnable de s'être posé cette question pour B et B_0.

1. A(D) est l'algèbre du disque, à savoir l'ensembles des fonctions analytiques sur D, continues sur $\bar{D}$.

C-AMELIORATION DE L'INEGALITE [ACP]

Un résultat de Anderson, Clunie et Pommerenke [ACP] dit que si f appartient à B :

$$\limsup_{r\to 1}\frac{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f(re^{i\theta})\right|d\theta}{\log\log\frac{1}{1-r}}\le\frac{1}{2}$$

Et ils exhibent un élément de B pour lequel il y a égalité. Nous nous proposons de trouver une fonction de B_0 pour laquelle l'inégalité ci-dessus soit une égalité.

Proposition 2.5: soit ψ une fonction positive définie sur $[0,1[$, décroissante vers 0 quand r tend vers 1. Alors il existe une suite de réels $(b_j)_j$ décroissant vers 0, telle que :

$$\forall r\ge\frac{3}{4},\sum_{j=0}^{\infty}b_j^2r^{2^{j+1}}\ge\psi(r)\log\frac{1}{1-r}$$

lemme 2.6: sous les hypothèses de la proposition, il existe une suite de réels $(a_n)_n$ positifs décroissant vers 0 telle que: $\forall r\ge\frac{1}{2},\sum_{n=1}^{\infty}a_nr^n\ge\psi(r)\log\frac{1}{1-r}$.

preuve de lemme 2.6: posons $r_0=1/2$ et définissons les r_j par $1-r_{j+1}=(1-r_j)^2$. Le développement en série entiére de la fonction logarithme nous donne $\sum_{=1}^{\infty}\frac{r_j^n}{n}=\log\frac{1}{1-r_j}$.

On choisit ensuite une suite croissante d'entiers N_j tels que : $\sum_{n=1}^{N_j}\frac{r_j^n}{n}\ge\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_j^n}{n}$ et on définit les coefficients a_n de la maniére suivante :

$$\varepsilon_j=\psi(r_j)\ \text{et}\ \left|\begin{array}{l}a_n=4\varepsilon_j\ \text{pour}\ N_{j-1}<n\le N_j\\ a_n=4\varepsilon_0\ \text{pour}\ 0<n\le N_0\end{array}\right.$$

On a donc : $\forall r\ge\frac{1}{2},\exists j;r_j<r\le r_{j+1}$, d'où la majoration :

$$\psi(r)\log\frac{1}{1-r}\le\psi(r_j)\log\frac{1}{1-r_{j+1}}=2\psi(r_j)\log\frac{1}{1-r_j}=2\varepsilon_j\log\frac{1}{1-r_j}$$

Mais, par construction, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{r_j^n}{n}\ge\sum_{n=1}^{N_j}a_n\frac{r_j^n}{n}\ge4\varepsilon_j\sum_{n=1}^{N_j}\frac{r_j^n}{n}\quad 2\varepsilon_j\log\frac{1}{1-r_j}$

D'où le lemme 2.6.

preuve de la proposition 2.5:

Soit $\chi(r) = 2\psi(\sqrt{r})$: on lui associe une suite $(a_j)_j$ comme dans le lemme 2.6 : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{r^n}{n} \geq \chi(r) \log \frac{1}{1-r}$. Si on pose $b_j = \sqrt{a_{2^j}}$, alors on a , pour $r \geq \frac{3}{4}$ (noter qu'alors $r^2 \geq \frac{1}{2}$ et $1 - r^2 \leq 2(1-r) \leq \sqrt{1-r}$):

$$\sum_{j=0}^{\infty} r^{2^{j+1}} b_j^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(r^2)^n}{n} \geq \chi(r^2) \log \frac{1}{1-r^2} \geq \chi(r^2) \log \frac{1}{\sqrt{1-r}} = \psi(r) \log \frac{1}{1-r}$$

et la proposition 2.5 est démontrée[1].

Nous pouvons maintenant construire la fonction cherchée : soit f_ω définie par

$$f_\omega(z) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j Z_j z^{2^j} \qquad \forall \omega \in \Omega$$

où les b_j sont choisis comme dans la proposition 2.5, c'est à dire :

$$\|(f_\omega)_r\|_2 = \left(\sum_1^{\infty} b_j^2 r^{2^{j+1}}\right)^{1/2} \geq (\psi(r))^{1/2} \left(\log\left(\frac{1}{1-r}\right)\right)^{1/2} \qquad \forall r > \frac{3}{4}$$

proposition 2.7: pour presque tout ω dans Ω on a $\|(f_\omega)_r\|_0 \neq o\left(\sqrt{\psi(r)}\sqrt{\log \frac{1}{1-r}}\right)$

preuve: par analogie avec la preuve de la proposition 2.3 on pose :

$$T_r(\omega) = \frac{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\theta})\right| d\theta}{\frac{1}{2}\log\log\frac{1}{1-r}} - \frac{\log\psi(r)}{\log\log\frac{1}{1-r}}$$

Pour ψ suffisamment dominée par le dénominateur[2], on a par les calculs précédents :

$$T_r(\omega) \leq C < \infty$$

Dans l'autre sens, on voudrait avoir $\limsup_{r \to 1} T_r(\omega) > -\infty$ presque sûrement. Par le

1. on a utilisé la sommation par paquets suivante:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(r^2)^n}{n} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{2^j \leq n < 2^{j+1}} a_n \frac{(r^2)^n}{n} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{2^j \leq n < 2^{j+1}} a_{2^j} \frac{(r^2)^n}{n} \leq \sum_{j=0}^{\infty} r^{2^{j+1}} b_j^2$$

corollaire 1.2 nous avons

$$\left\| (f_\infty)_r \right\|_0 \geq D \sqrt{\sum_1^{\infty} b_j^2 r^{2^{j+1}}} \geq \sqrt{\psi(r)} \left(log \frac{1}{1-r} \right)^{1/2} \qquad \forall r > \frac{3}{4}$$

d'où $\int_\Omega log \left| f(re^{i\theta}) \right| d\omega \geq logD + log\psi(r) + \frac{1}{2} loglog \frac{1}{1-r}$ (r est fixé)

On peut intégrer de 0 à 2π, ce qui donne :

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_\Omega log \left| f(re^{i\theta}) \right| d\omega \right) \frac{d\theta}{2\pi} \geq logD + log\psi(r) + \frac{1}{2} loglog \frac{1}{1-r}$$

Comme d'habitude on peut appliquer Fubini car notre intégrande est borné supérieurement et que l'on travaille sur des espaces de mesure finie. On a donc :

$$\int_\Omega \left(\frac{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} log \left| f(re^{i\theta}) \right| d\theta}{\frac{1}{2} loglog \frac{1}{1-r}} - \frac{log\psi(r)}{\frac{1}{2} loglog \frac{1}{1-r}} \right) d\omega \geq 1 + \frac{logD}{\frac{1}{2} loglog \frac{1}{1-r}}$$

soit : $\int_\Omega -T_r(\omega)\, d\omega \leq -1 - \frac{logD}{\frac{1}{2} loglog \frac{1}{1-r}} \leq C' < \infty$ ie : $liminf_{r \to 1} \int_\Omega -T_r(\omega)\, d\omega \leq C'$

On applique le lemme de Fatou aux variables aléatoires positives $C - T_r(\omega)$:

$$\int_\Omega liminf_{r \to 1} (C - T_r(\omega))\, d\omega \leq liminf_{r \to 1} \int_\Omega (C - T_r(\omega))\, d\omega \leq C + C'$$

or $\int_\Omega liminf_{r \to 1} (C - T_r(\omega))\, d\omega = C - \int_\Omega limsup_{r \to 1} T_r(\omega)\, d\omega$

Ainsi on a bien $\int_\Omega limsup_{r \to 1} T_r(\omega)\, d\omega \geq -C' > -\infty$

soit $\quad \infty > limsup_{r \to 1} T_r(\omega) > -\infty \quad$ presque sûrement.

Pour presque tout ω on a donc un réel δ_ω et une suite de rayons r_n tendant vers 1 tels que

---

2. Cette remarque est à prendre au sens $\frac{log\psi(r)}{\frac{1}{2} loglog \frac{1}{1-r}} \to 0$ quand r tend vers 1^-. Nous prendrons par la suite $\psi(r) = \frac{1}{loglog \frac{1}{1-r}}$.

$T_{r_n}(\omega) \geq \delta_\omega > -\infty$ pour n assez grand, et donc :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f_\omega(r_n e^{i\theta})\right| d\theta \geq \delta_\omega \frac{1}{2}\log\log\frac{1}{1-r_n} + \log\sqrt{\psi(r_n)}$$

prenant les exponentielles on a : $\left\|(f_\omega)_{r_n}\right\|_0 \geq e^{\delta_\omega}\psi(r_n)\sqrt{\log\frac{1}{1-r_n}}$

ce qui est bien la conclusion cherchée.

Montrons maintenant que, presque sûrement, $\limsup_{r\to 1} \dfrac{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f(re^{i\theta})\right| d\theta}{\log\log\frac{1}{1-r}} = \frac{1}{2}$. Par ce

qui précède, il existe $\varepsilon_\omega > 0$ et une suite de rayons r_n tendant vers 1 tels que

$\left\|(f_\omega)_{r_n}\right\|_0 \geq \varepsilon_\omega\sqrt{\psi(r_n)}\sqrt{\log\frac{1}{1-r_n}}$

Ceci permet d'écrire $\dfrac{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f_\omega(r_n e^{i\theta})\right| d\theta}{\log\log\frac{1}{1-r_n}} \geq \frac{1}{2} + \dfrac{\log\sqrt{\psi(r_n)}}{\log\log\frac{1}{1-r_n}} + \dfrac{\log\varepsilon_\omega}{\log\log\frac{1}{1-r_n}}$

Si, par exemple, on prend $\psi(r) = \dfrac{1}{\log\log\frac{1}{1-r}}$,

alors on a bien $\limsup_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f_\omega(r_n e^{i\theta})\right| d\theta}{\log\log\frac{1}{1-r_n}} \geq \frac{1}{2}$, et [ACP] nous dit qu'alors

c'est exactement 1/2. On remarque que f_ω est dans B_0, distinction qui n'est pas faite dans [ACP].

III-POLYNOMES DE RYLL-WOJTASZCZYK

Notations: C^n est muni de sa structure hilbertienne par le produit scalaire:

$$\langle\zeta|\eta\rangle = \sum_{i=1}^{n} \zeta_i\bar{\eta}_i \text{ avec } \zeta = (\zeta_1,\dots,\zeta_n) \text{ et } \eta = (\eta_1,\dots,\eta_n)$$

B désignera la boule unité ouverte de C^n, et S sa frontiére, soit :

$$B = \{z \in C^n; |z| < 1\} \text{ et } S = \{z \in C^n; |z| = 1\}$$

On notera σ la mesure de probabilité sur S, invariante par rotation complexe (ie par le groupe unitaire U(n)).

Le but de cette partie est d'établir le résultat suivant, qui est une extension d'un résultat de Ryll et Wojtaszczyk :

<u>*Théorème 4.1:*</u> *soit n un entier non nul. Il existe une constante numérique C(n) telle que, pour toute mesure borélienne de probabilité μ sur S, il existe une suite de polynômes $P_1, P_2,\dots$ en les variables $z_1, z_2,\dots,z_n$ telle que :*

1) chaque P_k soit homogéne de degré k,

2) $|P_k(\zeta)| \le 1, \forall\zeta \in S$

3) $\exp\int_S \log|P_k|d\sigma \ge C(n)$

4) $\exp\int_S \log|P_k|d\mu \ge C(n)$

<u>remarque:</u> Ryll et Wojtaszczyk ont démontré ce résultat pour les moyennes quadratiques. La nouveauté est donc que, grâce au théorème 1.1, ces inégalités s'étendent aux moyennes géomètriques.

Nous aurons besoin du lemme suivant:

<u>*lemme 4.2*</u>: *soit n un entier strictement plus grand que un. On définit:*

$$d(\zeta,\eta) = (1 - |\langle\zeta|\eta\rangle|^2)^{1/2}, \forall(\zeta,\eta) \in S^2$$

alors d verifie l'inégalité triangulaire. De plus, si on pose pour 0<δ<1:

$$\forall\zeta \in S, E_\delta(\eta) = \{\zeta \in S; (d(\zeta,\eta) \le \delta)\}$$

alors on a: $\sigma(E_\delta(\eta)) = \delta^{2n-2}$

<u>*preuve:*</u> tout d'abord on remarque par l'inégalité de Cauchy-Schwarz que d[1] est bien définie sur S^2, ceci car : $|\langle\zeta|\eta\rangle| \le \|\zeta\|\|\eta\| = 1 \Rightarrow 1 - |\langle\zeta|\eta\rangle|^2 \ge 0$

Soit $\alpha\eta$ la projection orthogonale de ζ sur $C\eta$. On a $\alpha = \langle\zeta|\eta\rangle$ et le théorème de

1. Ce n'est pas une distance car $d(\zeta,\eta)$ est nul ssi $\zeta=e^{i\theta}\eta$. On parle alors de pseudo-distance.

Pythagore nous donne : $|\zeta-\alpha\eta| = \sqrt{1-|\alpha\eta|^2} = \sqrt{1-|\langle\zeta|\eta\rangle|^2} = d(\zeta,\eta)$.

soient (ζ,η,ω) dans S. On a : $d(\eta,\omega) = |\eta-\beta\omega|$ et $d(\zeta,\eta) = |\zeta-\alpha\eta|$

donc, remarquant que $|\alpha|$ est inférieur à un:

$$d(\zeta,\omega) \le |\zeta-\alpha\beta\omega| \le |\zeta-\alpha\eta| + |\alpha||\eta-\beta\omega| \le |\zeta-\alpha\eta| + |\eta-\beta\omega| \le d(\eta,\omega) + d(\zeta,\eta)$$

ainsi d vérifie l'inégalité triangulaire.

Calculons le volume de $E_\delta(\eta)$: on pose $t = (1-\delta^2)^{1/2}$ on a alors :

$$\zeta \in E_\delta(\eta) \Leftrightarrow (\zeta \in S, d(\zeta,\eta) < \delta) \Leftrightarrow 0 \le 1-\delta^2 \le |\langle\zeta|\eta\rangle|^2 \le 1 \Leftrightarrow t \le |\langle\zeta|\eta\rangle| \le 1$$

on rappelle que, si f est une fonction d'une variable complexe, on a la formule d'intégration par tranches (cf [R1] 1.4.5) :

$$\int_S f(\langle\zeta|\eta\rangle)\, d\sigma(\zeta) = \frac{n-1}{\pi} \int_{[0,1]} \int_{[0,2\pi]} (1-r^2)^{n-2} f(re^{i\theta})\, r\,dr\,d\theta$$

d'où, en prenant : $f(z) = 1_{[t,1]}(|z|)$ avec $t = (1-\delta^2)^{1/2}$, on a :

$$\sigma(E_\delta(\eta)) = \int_S f(\langle\zeta|\eta\rangle)\, d\sigma(\zeta) = \frac{n-1}{\pi} \int_{[0,2\pi]} \int_t^1 (1-r^2)^{n-2} r\,dr\,d\theta = \delta^{2n-2}$$

et le lemme est démontré.

preuve du théorème:

pour n=1, il suffit de prendre les monômes z^k et C(1)=1.

On suppose dorénavant que n est strictement supérieur à 1. Soient k un entier non nul et δ tel que $8k\delta^2=1$ (ce choix sera expliqué par la suite), et $(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_M)$ un systéme de points de S maximal pour la propriété suivante : $\forall i \ne j,\ d(\eta_i,\eta_j) > 2\delta$. (un tel M existe pour des raisons de volume). Alors:

a) l'inégalité triangulaire pour d implique $E_\delta(\eta_i) \cap E_\delta(\eta_j) = \varnothing, \forall i \ne j$, d'où $M\delta^{2n-2} \le 1$ d'aprés le lemme 4.1.

b) $S = \bigcup_{j=1}^{M} E_{2\delta}(\eta_j)$ .En effet, si $\exists\zeta \in S; \forall j, d(\zeta,\eta_j) > 2\delta$, alors $\forall\eta_j, E_\delta(\eta_j) \cap E_\delta(\xi) = \varnothing$, et le système $(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_M,\xi)$ contredit la maximalité de M.

Montrons maintenant les parties 1 et 2 du théorème. On définit des polynômes à coefficients aléatoires par : $W_k^{(\omega)}(z) = \sum_{j=1}^{M} Z_j \langle z|\eta_j\rangle^k$ [1].Il est clair que l'on obtient ainsi des polynômes homogénes de degré k en les n variables complexes $z_1,z_2,\ldots,z_n$. Montrons qu'ils sont uniformément bornés en module sur S :

on fixe un élément ζ de S et on découpe en «couronnes» de centre ζ l'ensemble des η_j en posant : $\forall m \in N, H_m = \{j ; m\delta \le d(\zeta, \eta_j) < (m+1)\delta\}$ (les H_m sont disjoints).

on remarque que si j appartient à H_m, le théorème de Pythagore nous donne :

$$|\langle\zeta|\eta_j\rangle|^2 = 1 - (d(\zeta,\eta_j)^2) \le 1 - m^2\delta^2 = 1 - \frac{m^2}{8k} \le e^{-\frac{m^2}{8k}}$$

donc on a la majoration : $(|\langle\zeta|\eta_j\rangle|)^k \le e^{-\frac{m^2}{16}}$

on a ensuite pour tout entier m et tout indice j dans H_m: $E_\delta(\eta_j) \subset E_{(m+2)\delta}(\zeta)$, car :

$$\xi \in E_\delta(\eta_j) \Rightarrow d(\xi,\zeta) \le d(\zeta,\eta_j) + d(\xi,\eta_j) < (m+1)\delta + \delta = (m+2)\delta$$

d'où l'inclusion : $\bigcup_{j \in H_m} E_\delta(\eta_j) \subset E_{(m+2)\delta}(\zeta)$ qui nous donne l'inégalité volumique suivante (car les $E_\delta(\eta_j)$ sont disjoints) :

$$\sigma(E_\delta(\eta_1))\, card(H_m) \le \sigma(E_{(m+2)\delta}(\zeta)) = ((m+2)\delta)^{2n-2}$$

de laquelle on tire $card(H_m) \le (m+2)^{2n-2}$.

Nous pouvons maintenant majorer nos polynômes :

$$\forall \omega \in \Omega, \left|W_k^{(\omega)}(z)\right| \le \sum_{j=1}^{M} (|\langle\zeta|\eta_j\rangle|)^k = \sum_{m \in N} \sum_{j \in H_m} (|\langle\zeta|\eta_j\rangle|)^k$$

$$\ldots \le \sum_{m \in N} \left((m+2)^{2n-2} e^{-\frac{m^2}{16}} \right) = s < \infty$$

On remarque bien sûr que cette majoration est indépendante de t et de ω. Il suffit donc de poser : $\tilde{W}_k^{(\omega)}(z) = \frac{W_k^{(\omega)}(z)}{s}$ et les polynômes ainsi obtenus sont bien uniformément bornés par 1 en module.

Montrons la troisième partie du théorème :

Nous allons appliquer le théorème 1 à nos polynômes. Pour cela, on remarque que le rôle des coefficients a_j est tenu par les produits scalaires, à ζ fixé dans S, et que leur norme (en tant

---

1. Remarque: dans la preuve de Rudin on utilise des variables de Rademacher et non pas de Steinhaus qui, elles, vont nous permettre d'appliquer le théorème 1.1.

que vecteur de C^M) est dominée par :

$$\left(\sum_{j=1}^{M}\left(|\langle\zeta|\eta_j\rangle|\right)^{2k}\right)^{1/2} \le \left(\sum_{m\in N}\left((m+2)^{4n-4}e^{-\frac{m^2}{8}}\right)\right)^{1/2} = s' < \infty$$

ensuite, on va minorer cette somme, terme à terme. On part de l'égalité :

$$S = \bigcup_{j=1}^{M} E_{2\delta}(\eta_j)$$

d'où : $\zeta \in S \Rightarrow \exists j ; \zeta \in E_{2\delta}(\eta_j) \qquad d(\zeta, \eta_j) < 2\delta$

donc : $|\langle\zeta|\eta_j\rangle|^2 \ge 1 - 4\delta^2 = 1 - \frac{1}{2k}$ car $8k\delta^2 = 1$.

ainsi on a la minoration[1] : $\sum_{j=1}^{M}\left(|\langle\zeta|\eta_j\rangle|^k\right)^2 \ge \left(1 - \frac{1}{2k}\right)^k \ge \frac{1}{2} = c' > 0$

Le théorème 1.1 donne alors : $exp\int_{\Omega} log\left|\tilde{W}_k^{(\omega)}(z)\right| d\omega \ge c\left(\sum_{1}^{M}\left(|\langle\zeta|\eta_j\rangle|^k\right)^2\right)^{1/2}$

ce qui s'écrit encore :

$$\int_{\Omega} log\left|\tilde{W}_k^{(\omega)}(\zeta)\right| d\omega \ge log c + \frac{1}{2} log c' = log c''$$

Comme on a une borne supérieure sur nos polynômes, l'expression ci-dessus est bornée supérieurement. Les domaines d'intégration étant de mesures finies, le théorème de Fubini nous donne :

$$\int_S\int_{\Omega} log\left|\tilde{W}_k^{(\omega)}(\zeta)\right| d\omega\, d\sigma(\zeta) = \int_{\Omega}\int_S log\left|\tilde{W}_k^{(\omega)}(\zeta)\right| d\sigma(\zeta)\, d\omega \ge log c''$$

La deuxiéme inégalité entraîne l'existence d'au moins un ω_0 dans Ω tel que :

$$exp\int_S log\left|\tilde{W}_k^{(\omega_0)}(\zeta)\right| d\sigma(\zeta) \ge c''$$

Il est clair que c'' ne dépend que de la dimension, donc la partie 3 du théorème est demontrée.

remarque : à ce stade de la démonstration, on peut se demander si on n'a pas une minoration uniforme pour nos polynômes par une constante strictement positive.Un théorème de Hartogs[2] nous dit que non :

si on a $\left|\tilde{W}_k^{(\omega_0)}(\zeta)\right| \ge c > 0, \forall\zeta \in S$, par continuité de ce polynôme, il existe $\varepsilon>0$ tel

1. c'est ici que se justifie le choix $8k\delta^2=1$.
2. cf [HO p.30]: soit K un compact de Ω ouvert de C^n tel que Ω-K soit connexe; et f holomorphe sur B-K; alors f se prolonge analytiquement à tout Ω

que : $\left|\tilde{W}_k^{(\omega_0)}(\zeta)\right| \geq \frac{c}{2}, \forall \zeta \in A = \{z \in C^n ; 1-\varepsilon < |z| < 1+\varepsilon\}$

mais alors, notant : $\Omega = \{z \in C^n ; |z| < 1+\varepsilon\}$, le théorème de Hartogs nous dit que la fonction $f(\zeta) = \dfrac{1}{\tilde{W}_k^{(\omega_0)}(\zeta)}$, analytique dans A, se prolonge analytiquement à Ω, ce qui est absurde car : $\left|\tilde{W}_k^{(\omega_0)}(0)\right| = 0$

Pour conclure et démontrer le 4), on utilise un moyennage sur le groupe unitaire U(n) de C^n, muni de sa mesure de Haar normalisée dU. On remarque que si on compose nos polynômes avec des élèments de U(n) les propriétés d'homogénéïté et de bornitude précedemment établies restent inchangées.

Comme on a une borne supérieure sur nos polynômes, l'expression ci-dessus est bornée supérieurement. Les domaines d'intégration étant de mesures finies, le théorème de Fubini nous donne :

$$\int_{U(n)} \int_S log\left|\tilde{W}_k^{(\omega_0)}(U(\zeta))\right| d\mu(\zeta) dU = \int_S \int_{U(n)} log\left|\tilde{W}_k^{(\omega_0)}(U(\zeta))\right| dU d\mu(\zeta)$$

Mais on sait que $\forall \zeta_0 \in S$ on a [1]:

$$\int_{U(n)} log|Q_k(U(\zeta_0))| dU = \int_S log|Q_k(\zeta)| d\sigma(\zeta) \geq log c''$$

d'où : $\displaystyle\int_{U(n)} \left(\int_S log|Q_k(U(\zeta))| d\mu(\zeta)\right) dU \geq \int_S (log c'') d\mu(\zeta) = log c''$

ainsi pour au moins un élèment U_k de U(n) on a :

$$exp \int_S log|Q_k(U_k(\zeta))| d\mu(\zeta) \geq c''$$

Comme cette constante c" ne dépend que de la dimension, il suffit pour achever la preuve de prendre comme polynômes : $P_k = Q_k o U_k$

Q.E.D

Remarque: le résultat précédent peut s'interpreter ainsi: nos polynômes ne peuvent pas être trop grands car ils sont bornés par 1 en module, mais pas trop petits non plus car en module ils sont >0 presque partout (sinon le logarithme vaudrait moins l'infini sur un ensemble de mesure non nulle mais alors la partie 3) du théorème serait en défaut.)

---

1. cf [R1]. En fait ceci est dû à l'invariance de σ sous l'action du groupe U(n), ce qui permet d'écrire :

$$\int_S log|Q_k(U(\zeta))| d\sigma(\zeta) = \int_S log|Q_k(\zeta)| d\sigma(\zeta)$$

IV-UNE REMARQUE SUR LES ENSEMBLES DE SIDON[1]

On reprend les notations du I. On va donner un exemple d'application du cas «vectoriel» du théorème 1.1.

cadre: nous nous plaçons sur le groupe $G = T^{N^*}$, produit dénombrable de copies du tore T, dont le dual est usuellement noté $Z^{(N^*)}$; c'est à dire qu'il s'identifie à l'ensemble des suites $s = (n_j)_{j \geq 0}$ d'entiers $n_j \in Z$ pour lesquelles un nombre fini seulement de termes sont non nuls. L'action de $s = (n_j)_{j \geq 0} \in Z^{(N^*)}$ sur $\omega = (\omega_j) \in T^{N^*}$ se fait par la formule $s(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} \omega_j^{n_j}$, le produit infini ayant un sens car c'est en réalité un produit fini.

On sait (cf lemme 4.2) que les $\{Z_j\}_{j \geq}$ forment un ensemble de Sidon, et ils vérifient le théorème 1.1, de même que les $\{Z_j\tilde{Z}_k\}_{j \geq}$ (par le corollaire 4.1 ci-dessous). Nous pouvons donc nous demander si «vérifier le théorème 1.1» n'implique pas «être un ensemble de Sidon». Malheureusement le lemme 4.3 montre que ce n'est pas le cas.

<u>corollaire 4.1:</u> *$\tilde{Z}_1,\ldots,\tilde{Z}_n,\ldots$ désigne une autre suite de variables de Steinhaus, indépendantes de la suite $Z_1,\ldots,Z_n,\ldots$ Alors si c est comme dans le théorème 1.1 et si $x_{j,k} \in B$ pour $1 \leq j,k \leq N$, alors* $\left\| \sum_{j,k=1}^{N} x_{j,k} Z_j \tilde{Z}_k \right\|_0 \geq c^2 \left\| \sum_{j,k=1}^{N} x_{j,k} Z_j \tilde{Z}_k \right\|_2$.

<u>preuve :</u> on note Ω et $\tilde{\Omega}$ les espaces de probabilités sur lesquels sont définies Z_j et $\tilde{Z}_k$, et on définit un nouvel espace de Banach $X = L_B^2(\tilde{\Omega})$ de fonctions définies sur $\tilde{\Omega}$, à valeurs dans B, de carré intégrable.

Posons pour j=1,...,N $y_j = \sum_{k=1}^{N} x_{j,k} \tilde{Z}_k$ (qui est dans X). Nous allons appliquer deux fois le théorème 1.1, dans B puis dans X. Pour voir le rôle joué par les normes de ces deux espaces nous reprenons une notation plus lourde :

$$exp \int_{\Omega^N} \int_{\tilde{\Omega}^N} log \left\| \sum_{j,k=1}^{N} x_{j,k} Z_j \tilde{Z}_k \right\|_B d\omega\, d\tilde{\omega} = exp \int_{\Omega^N} log \left(exp \left(\int_{\tilde{\Omega}^N} log \left\| \sum_{j,k=1}^{N} x_{j,k} Z_j \tilde{Z}_k \right\|_B d\tilde{\omega} \right) \right) d\omega$$

1. cf [LR]

Par le théorème 1.1 appliqué à B, cette dernière expression est minorée par :

$$c\left(\exp\int_{\Omega^N}\log\left(\int_{\bar{\Omega}^N}\left\|\sum_{j,k=1}^{N} x_{j,k}Z_j\bar{Z}_k\right\|_B^2 d\bar{\omega}\right)^{\frac{1}{2}}d\omega\right) = c\left(\exp\int_{\Omega^N}\log\left\|\sum_{j,k=1}^{N} x_{j,k}Z_j\bar{Z}_k\right\|_X d\omega\right)$$

$$= c\left(\exp\int_{\Omega^N}\log\left\|\sum_{j=1}^{N} y_jZ_j\right\|_X d\omega\right) \geq c^2\left(\int_{\Omega^N}\left\|\sum_{j=1}^{N} y_jZ_j\right\|_X^2\right)^{1/2} = \ldots$$

(on a appliqué cette fois le théorème 1.1 à X), d'où :

$$c^2\left(\int_{\Omega^N}\int_{\bar{\Omega}^N}\left\|\sum_{j,k=1}^{N} x_{j,k}Z_j\bar{Z}_k\right\|_B^2 d\omega d\bar{\omega}\right)^{1/2} = c^2\left\|\sum_{j,k=1}^{N} x_{j,k}Z_j\bar{Z}_k\right\|_X = c^2\left\|\sum_{j,k=1}^{N} x_{j,k}Z_j\bar{Z}_k\right\|_2$$

et le corollaire est démontré.

<u>lemme 4.2:</u> *les $\{Z_j\}_{j\geq}$ forment un ensemble de Sidon de $Z^{(N^*)}$.*

<u>preuve :</u> donnons nous un polynôme en $\omega \in \Omega^{IN}$: $P(\omega) = \sum_{j=1}^{n} a_jZ_j(\omega)$ (en fait les a_j sont les coefficients de Fourier de P).Alors[1], pour $\underline{\omega} = \{\underline{\omega}_1,\ldots,\underline{\omega}_n,0,0,\ldots\} \in \Omega^{IN}$ tel que $Z_j(\underline{\omega}) = \frac{\bar{a}_j}{|a_j|}$, on a la majoration $sup\ \{|P(\omega)|,\omega \in \Omega^{IN}\} = \sum_{j=1}^{n}|a_j|$, ce qui signifie bien que les $\{Z_j\}_{j\geq}$ forment un ensemble de Sidon de constante 1.

<u>lemme 4.3:</u> *les $\{Z_j\bar{Z}_k\}_{j\geq}$ ne forment pas un ensemble de Sidon de $Z^{(N^*)}xZ^{(N^*)}$.*

<u>preuve:</u> considérons le polynôme suivant $P(\omega) = \sum_{j,k=1}^{n} a_{j,k}Z_j(\omega)\bar{Z}_k(\omega)$, avec $a_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{n}}e^{2ijk\frac{\pi}{n}}$ (ces coefficients forment une matrice unitaire dite «de Walsh»). Nous avons alors, d'une part, la somme des modules des coefficients de Fourier de P qui vaut :

$$\sum_{j,k=1}^{n}|a_{j,k}| = \sum_{j,k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}} = n^{\frac{3}{2}}$$

1. nous convenons que si $a_j=0$ alors on met 0 à la place de $\underline{\omega}_j$ dans $\underline{\omega}$.

D'autre part, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|P(\omega)| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left|\bar{Z}_k(\omega)\right|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{j,k} Z_j\right|^2} = \sqrt{n}\sqrt{n} = n$$

donc si les $\{Z_j\bar{Z}_k\}_{j \geq}$ formaient un ensemble de Sidon, il existerait c>0 telle que pour tout n on ait $n^{\frac{3}{2}} \leq cn$, ce qui est absurde.

REFERENCES

[ACP] J.M. Anderson, J.Clunie et Ch.Pommerenke, *On Bloch functions and normal functions*, J. Reine Angew. Math. 270 (1974), 12-37.
[AR] P.Ahern and W.Rudin, *Bloch functions, BMO, and boundary zeroes*, Indiana Math. J. 36 (1987), 131-148.
[CH] K.K.Chung, *A course in probability theory* (2nd edition), Academic press, New York, 1974.
[HO] K.Hoffman, *Banach spaces of analytic functions*, Dover Pub. (1982).
[KA] Y.Katznelson, *An introduction to Harmonic Analysis*, John WXiley and Sons, New-York, 1968. p10-15.
[KH] J.P.Kahane, *Some random series of functions*, Cambridge Studies in Advanced Math. 5, Cambridge University Press, 1985.
[LR] Lopez-Ross, *Sidon sets*
[R1] W.Rudin, *New constructions of holomorphic functions in the unit ball of C^n*, CBMS-NSF Regional Conferences Series in Math,63, Amer. Math. Soc.,Providence, RI, 1986.
[R2] W.Rudin, *Function theory in the unit ball of C^n*, Springer Verlag, New York, 1980.
[RW] J.Ryll and P.Wojtaszczyk, *On homogeneous polynomials on a complex ball*, Trans. Amer. Math. Soc. 18 (1988), 52-54.
[TO] Tomaszenski
[U1] D.Ullrich, *An extension of the Kahane-Khintchine inequality in a banach space*, Bull. of the Amer. Math. Soc. 18 (1988), 52-54.
[U2] D.Ullrich, *Khintchine's inequality and the zeroes of bloch functions*, Duke Math. J 52 n°2 (1988), 519-535.
[WO] T.Wolff, *Two Algebras of bounded functions*, Duke Math. J. 49 (1982), 312-328.