PUBLICATIONS MATHEMATIQUES D'ORSAY

SEMINAIRE
D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE
ORSAY

Année 1967/1968

Mathématique (425)
(Service des Publications - Bibliothèque)
Faculté des Sciences
91 - ORSAY (France)

P U B L I C A T I O N S   M A T H E M A T I Q U E S   D ' O R S A Y

S E M I N A I R E

D' ALGEBRE NON COMMUTATIVE

O R S A Y

Année 1967/1968

Mathématique (425)
(Service des Publications - Bibliothèque)
Faculté des Sciences
91 - ORSAY (France)

Table des Matières

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

FACULTE des SCIENCES de
l'Université de Paris

ORSAY

1967-1968

SEMINAIRE d'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

-:-

Conference n° 1
du 6 Novembre 1967

CORPS ASSOCIE à un MODULE CO-IRREDUCTIBLE

-:-

par L. LESIEUR

***

Il est possible de construire directement le corps associé à un module M co-irréductible sans passer par l'enveloppe injective E(M) ; deux méthodes sont esquissées dans [1] , page 373 : la méthode des endomorphismes partiels, et la méthode qui utilise des couples particuliers d'éléments de M .

Je développe ici la deuxième méthode, en éclairant cependant les calculs par l'introduction d'homomorphismes. Je donne pour terminer deux propriétés relatives au cas particulier d'un anneau co-irréductible.

1°) Module co-irréductible.

A étant un anneau (quelconque) et M un A-module à gauche (non nul), M est appelé co-irréductible si l'intersection de deux sous-modules non nuls de M est un sous-module non nul. Cette condition revient à la condition des multiples communs : deux éléments non nuls de M ont toujours un multiple commun non nul,

$$(1) \qquad \underline{\forall\ \xi \neq 0\ ,\quad \xi' \neq 0\ ,\quad \exists\ a\,\xi = a'\,\xi' \neq 0}\ .$$

$$(\xi\ ,\ \xi' \in M\ ;\quad a\ ,\ a' \in A \text{ ou } \mathbf{Z})\ .$$

Si A n'a pas d'élément unité, ou si M n'est pas unitaire, a et a' peuvent être des éléments de $\mathbf{Z}$; si le module est unitaire, a et a' peuvent toujours être pris dans A. Pour simplifier l'écriture, nous omettrons dans la suite de mentionner $\mathbf{Z}$.

Exemple : anneau régulier à gauche de Ore.

2°) Relation d'équivalence $\mathcal{R}$.

Soit E l'ensemble des couples (ξ,η) d'éléments de M tels que :

$$(2) \qquad \xi \neq 0\ ,\quad 0 \because \xi \subseteq 0 \because \eta$$

(Nous désignons par $0 \because \xi = \mathrm{Ann}\ \xi$ l'idéal à gauche de A formé par les éléments a tels que $a\,\xi = 0$).

Nous considérons la relation $\mathcal{R}$ définie dans E par :

$$(3) \qquad (\xi,\eta)\ \mathcal{R}\ (\xi',\eta') \Longleftrightarrow \exists\ a\ ,\ a' \in A$$

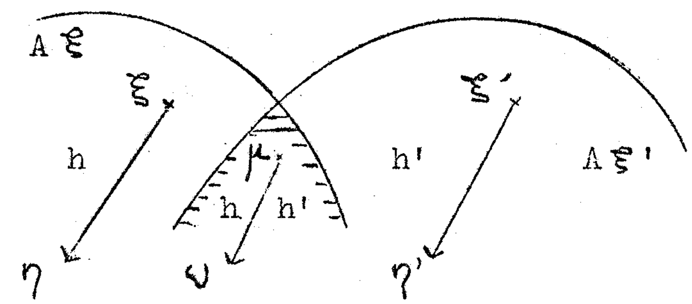
$$\text{tels que} \quad \begin{cases} \mu = a\,\xi = a'\,\xi' \neq 0 \\ \nu = a\,\eta = a'\,\eta'\ . \end{cases}$$

Afin d'éclairer les démonstrations qui suivent, il est commode de donner une interprétation de $\mathcal{R}$ au moyen d'homomorphismes.

.../...

Si $(\xi,\eta) \in E$, l'application $h : a\,\xi \longrightarrow a\,\eta$ est, en vertu de (2) , un homomorphisme du A-module non nul $A\,\xi$ sur le A-module $A\,\eta$. Nous l'appellerons $h(\xi,\eta)$.

La relation $\mathfrak{R}$ signifie que <u>les homomorphismes $h(\xi,\eta)$ et $h'(\xi',\eta')$ coïncident en un point non nul $\mu = a\,\xi$ du module $A\xi \cap A\,\xi'$</u> .



<u>Propriété</u> 1. <u>$\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence</u>.

$\mathfrak{R}$ est réflexive et symétrique. Montrons qu'elle est transitive. Supposons, en effet, en plus de (3) :

$$(\xi',\eta')\,\mathfrak{R}\,(\xi'',\eta'') \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \mu' = b\,\xi' = b'\,\xi'' \neq 0 \\ \qquad b\,\eta' = b'\,\eta'' \end{cases}$$

Prenons, d'après la condition (1), un point non nul commun à $A\,\mu$ et $A\,\mu'$, soit :

$$\gamma = u\,a\,\xi = v\,b\,\xi' \neq 0 \;.$$

On en déduit :

$$(4) \qquad u\,a\,\xi = v\,b'\,\xi'' \neq 0 \;.$$

et, puisque $(\xi',\eta') \in E$,

$$u\,a'\,\xi' = v\,b\,\xi' \Longrightarrow u\,a'\,\eta' = v\,b\,\eta' = \gamma'$$

(Le point γ' est l'image de γ par l'homomorphisme $h(\xi',\eta')$)

.../...

d'où :

$$(5) \qquad u\, a\, \eta = v\, b'\, \eta''$$

(Le point γ' est aussi l'image de γ par $h(\xi,\eta)$ et $h(\xi'',\eta'')$).

Les relations (4) et (5) expriment :

$$(\xi,\eta)\ \mathfrak{R}\ (\xi'',\eta'') .$$

Remarque. Si l'on a $(\xi,\eta)\,\mathfrak{R}\,(\xi',\eta')$, la relation $c\xi = c'\xi'$ n'entraîne pas nécessairement $c\eta = c'\eta'$, contrairement à ce qui se passe dans des cas analogues (anneaux de fractions par rapport à une partie multiplicative d'éléments réguliers vérifiant la condition C[2] ; anneau régulier à gauche de Ore.) Cela signifie que, si les homomorphismes $h(\xi,\eta)$ et $h(\xi',\eta')$ coïncident au point $\mu \neq 0$ de $A\xi \cap A\xi'$, ils ne coïncident pas nécessairement sur $A\xi \cap A\xi'$; par contre, ils coïncident sur le sous-module $A\mu$.

Propriété 2. Si $(\xi,\eta) \in E$ et si $a\xi \neq 0$, on a :

$$(\xi,\eta) \sim (a\xi, a\eta) .$$

(Le signe $\sim$ est le signe d'équivalence modulo $\mathfrak{R}$.
La propriété est immédiate ; notons seulement que $(a\xi, a\eta) \in E$).

Propriété 3. On a $(\xi,0) \sim (\xi',0)$ quels que soient ξ et ξ' non nuls, et la classe commune de ces éléments est celle des couples $(\xi,\eta) \in E$ pour lesquels $0\,{}^{\bullet}.\,\xi \not\subseteq 0\,{}^{\bullet}.\,\eta$, c'est à dire pour lesquels $h(\xi,\eta)$ n'est pas injectif.

En effet, $(\xi,\eta) \sim (\xi',0)$ équivaut à : il existe a et a' tels que $a\xi = a'\xi' \neq 0$, $a\eta = 0$. On a bien $a \in 0\,{}^{\bullet}.\,\eta$ et $a \notin 0\,{}^{\bullet}.\,\xi$. Réciproquement, si $a\xi \neq 0$ et $a\eta = 0$, avec $(\xi,\eta) \in E$, on a : $(\xi,\eta) \sim (\xi,0)$. Ce point $a\xi$ est d'ailleurs un élément non nul du noyau de $h(\xi,\eta)$, ce qui démontre la dernière partie de la propriété.

.../...

Définition.

La classe obtenue à la propriété 3 s'appelle la classe nulle ; elle sera encore notée 0 .

Propriété 4. On a $(\xi,\xi) \sim (\eta,\eta)$ quels que soient $\xi, \eta \neq 0$.

(La classe correspondante est la classe unité, notée 1).

3°) Multiplication dans $K = E/\mathfrak{R}$.

Désignons par $\xi\backslash\eta$ la classe de (ξ,η) . Nous allons définir le produit $(\xi\backslash\eta) . (\xi'\backslash\eta')$.
L'homomorphisme $h(\xi,\eta)$ transforme $A\xi$ en $A\eta$. Pour le composer avec l'homomorphisme $h(\xi',\eta')$, il faut considérer $A\eta \cap A\xi'$. Si $\eta = 0$ (donc si $\xi\backslash\eta = 0$) , nous avons :

$$\xi \xrightarrow{h} 0 \xrightarrow{h'} 0$$

et, en composant $h\,h'$ (1) :

$$\xi \overset{h\,h'}{\rightsquigarrow} 0 \quad .$$

Nous avons alors comme produit :

$$(6) \qquad (\xi\backslash 0) . (\xi'\backslash\eta') = (\xi\backslash 0) = 0 \quad .$$

Si $\eta \neq 0$, on prend un point commun non nul à $A\eta$ et $A\xi'$ soit : $u\eta = u'\xi' \neq 0$ et on a :

$$u\xi \xrightarrow{h} u\eta \xrightarrow{h'} u'\eta' \quad ,$$

d'où : $u'\eta'$ est transformé de $u\xi$ par $h\,h'$, et nous prenons comme définition du produit :

$$(7) \quad (\xi\backslash\eta) . (\xi'\backslash\eta') = (u\xi\backslash u'\eta') \ ; \ u\eta = u'\xi' \neq 0$$

---

(1) On écrit ξh pour le transformé $h(\xi)$, et par suite $h\,h'$ pour le composé $h' \circ h$.

.../...

Les relations (6) et (7) donnent donc une définition du produit, et nous en avons une interprétation par homomorphismes. Elles se groupent sous la forme :

$$\boxed{(\xi \backslash \eta) \,.\, (\xi' \backslash \eta') = (u\xi \backslash u'\eta')} \tag{8}$$

avec : $\quad u\eta = u'\xi' \quad , \quad u\xi \neq 0 .$

Justification.

Notons d'abord que $(u\xi , u'\eta') \in E$.
En effet : $u\xi \neq 0$ et de plus :

$$a\,u\xi = 0 \implies a\,u\eta = 0 \implies a\,u'\xi' = 0 \implies a\,u'\eta' = 0 .$$

Il faut vérifier ensuite que la définition ne dépend pas des représentants choisis (ni des éléments u et u' tels que $u\eta = u'\xi' \neq 0$; mais ce dernier point résulte du premier).
Soit $(\xi_1, \eta_1) \sim (\xi, \eta)$. On a le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\xi_1 \arrow[d, "h_1"'] & \xi \arrow[d, "h"'] & a\xi = a_1\xi_1 \arrow[d, "h"', "h_1"] & u\xi \arrow[d, "h"] & u_1\xi_1 \arrow[d, "h_1"] & \xi' \arrow[d, "h'"] \\
\eta_1 & \eta & a\eta = a_1\eta_1 & u\eta = u'\xi' \arrow[d, "h'"] & u_1\eta_1 = u_1'\xi' \arrow[d, "h'"] & \eta' \\
 & & & u'\eta' & u_1'\eta' &
\end{tikzcd}$$

En choisissant un point γ multiple non nul de $a\xi$, $u\xi$ et $u_1\xi_1$, soit :

$$\gamma = \lambda\, a\xi = m\, u\xi = n\, u_1\xi_1 \neq 0 ,$$

.../...

On voit que les homomorphismes $h\,h'$ et $h_1\,h'$ auront le même effet sur le point γ , c'est à dire

$$m\,u'\,\eta' = n\,u'_1\,\eta'$$

d'où : $(u\xi\,,\,u'\eta') \sim (u_1\,\xi_1, u'_1\,\eta')$.

Soit $(\xi',\eta') \sim (\xi'_1,\eta'_1)$. On a le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\xi \arrow[d, "h"'] & \xi' \arrow[d, "h'"'] & \xi \arrow[d, "h'_1"'] & b\xi'=b'\xi \arrow[d, "h'"', "h'_1"] & u\xi \arrow[d, "h"'] & u_1\xi \arrow[d, "h"'] \\
\eta & \eta' & \eta'_1 & b\eta'=b'\eta'_1 & u\eta \otimes u'\xi' \arrow[d, "h'"'] & u_1\eta \otimes u'_1\xi'_1 \arrow[d, "h'_1"'] \\
 & & & & u'\eta' & u'_1\,\eta'_1
\end{tikzcd}$$

En prenant un point γ multiple non nul de $u\,\xi$, $u_1\,\xi$ et $b\,\xi'$:

$$\gamma = m\,u\,\xi = n\,u_1\,\xi = \ell\,b\,\xi' \neq 0 \; ,$$

on voit que les homomorphismes $h\,h'$ et $h\,h'_1$ auront le même effet sur le point γ , c'est à dire :

$$m\,u\,\xi = n\,u_1\,\xi$$
$$m\,u'\,\eta' = n\,u'_1\,\eta'_1$$

On en déduit :

$$(u\xi, u'\eta') \sim (u_1\xi\,, u'_1\,\eta'_1)\,.$$

La définition du produit est bien indépendante des représentants choisis dans chaque classe.

4°) Propriétés de la multiplication.

Propriété 5. Pour que le produit soit nul, il faut et il suffit que l'un des facteurs soit nul.

Supposons $\xi \backslash \eta = 0$. On peut donc prendre $\eta = 0$ et on a déjà vu (relation (6)) que $(\xi \backslash 0) . (\xi' \backslash \eta') = 0$.

Supposons $(\xi' \backslash \eta') = 0$. On peut prendre $\eta' = 0$ et, d'après l'expression (8), le produit $(\xi \backslash \eta)(\xi' \backslash 0)$ est nul.

Enfin, supposons $\xi \backslash \eta \neq 0$ et $\xi' \backslash \eta' \neq 0$.
On a vu (propriété 3) ; $\mathrm{Ann}\ \xi = \mathrm{Ann}\ \eta$ et $\mathrm{Ann}\ \xi' = \mathrm{Ann}\ \eta'$.
On en déduit aisément :

$$\mathrm{Ann}\ u\xi = \mathrm{Ann}\ u'\eta' .$$

En effet :

$$a\,u\,\xi = 0 \Longrightarrow a\,u\,\eta = 0 \Longrightarrow a\,u'\,\xi' = 0 \Longrightarrow a\,u'\,\eta' = 0$$

et $$a\,u'\,\eta' = 0 \Longrightarrow a\,u'\,\xi' = 0 \Longrightarrow a\,u\,\eta = 0 \Longrightarrow a\,u\,\xi = 0 .$$

On peut aussi remarquer que h et h' sont des injections et, par suite, $h\,h'$ est une injection. Il en résulte
$(\xi \backslash \eta)(\xi' \backslash \eta') = (u\xi \backslash u'\eta') \neq 0$.

Propriété 6. La multiplication est associative.

$$[(\xi \backslash \eta)(\xi' \backslash \eta')](\xi'' \backslash \eta'') = (\xi \backslash \eta)[(\xi' \backslash \eta')(\xi'' \backslash \eta'')]$$

D'après la définition du produit, il est possible de choisir des représentants tels que :

$$\xi' = \eta \quad , \quad \xi'' = \eta' .$$ (1)

(1) On écarte le cas d'un terme nul, qui est résolu par la propriété 5.

.../...

On a alors :

$$\xi \xrightarrow{h} \eta \xrightarrow{h'} \eta' \xrightarrow{h''} \eta''$$

et l'associativité du produit revient à celle du produit d'endomorphismes :

$$(hh')h'' = h(h'h'') .$$

<u>Propriété 7</u>. <u>L'ensemble $K^* = K - \{0\}$ est un groupe multiplicatif</u>.

L'élément neutre est la classe $1 = (\xi \backslash \xi)$, $\xi \neq 0$. L'inverse de $\xi \backslash \eta \neq 0$ est $\eta \backslash \xi$. On a bien en effet $(\eta, \xi) \in E$ puisque $\eta \neq 0$ et $\mathrm{Ann}\ \eta = \mathrm{Ann}\ \xi$ (propriété 3). On peut aussi remarquer que $h(\xi,\eta)$ est une injection et que $h(\eta,\xi)$ est l'injection inverse.

5°) <u>Addition dans $K = E/\mathfrak{R}$</u> .

Pour définir la somme $(\xi \backslash \eta) + (\xi' \backslash \eta')$, il faut un domaine de définition commun aux deux homomorphismes $h(\xi,\eta)$ et $h^{I}(\xi',\eta')$. Ce sera $A\xi \cap A\xi' \neq 0$. On prend donc :

$$u\xi = u'\xi' \neq 0 \quad \text{et} \quad h(u\xi) + h(u'\xi') \ ,$$

d'où la définition de la somme au moyen des représentants :

$$(9) \qquad \boxed{(\xi \backslash \eta) + (\xi' \backslash \eta') = (u\xi \backslash u\eta + u'\eta')}$$

avec <u>$u\xi = u'\xi' \neq 0$</u> .

<u>Justification</u>. Notons d'abord que le couple $(u\xi, u\eta + u'\eta')$ appartient à E . En effet, on a

$$u\xi \neq 0 \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} k\,u\,\xi = 0 \\ k\,u'\xi' = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} k\,u\,\eta = 0 \\ k\,u'\eta' = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow k(u\eta + u'\eta') = 0$$

.../...

Il faut vérifier ensuite que la définition ne dépend pas des représentants choisis (ni du produit $a\xi = a'\xi' \neq 0$, mais ce dernier point résulte du premier).
Soit $(\xi_1,\eta_1) \sim (\xi,\eta)$. On a le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\xi_1 \arrow[d, "h_1"'] & \xi \arrow[d, "h"'] & a\xi = a_1\xi_1 \arrow[d, "h"', "h_1"] & u\xi = u'\xi' \arrow[d, "h+h'"] & u_1\xi_1 = u'_1\xi' \arrow[d, "h_1+h'"] & \xi' \arrow[d, "h'"] \\
\eta_1 & \eta & a\eta = a_1\eta_1 & u\eta + u'\eta' & u_1\eta_1 + u'_1\eta' & \eta'
\end{tikzcd}$$

En prenant $\gamma = \lambda a\xi = m u \xi = n u_1 \xi_1 \neq 0$, on aura :

$m u \eta = n u_1 \eta_1$ (h et h_1 ont le même effet sur γ)
$m u' \eta' = n u'_1 \eta'$ (conséquence de $m u' \xi' = n u'_1 \xi'$) d'où par addition :

$$m(u\eta + u'\eta') = n(u_1\eta_1 + u'_1\eta') \quad ,$$

ce qui prouve :

$$(u\xi, u\eta + u'\eta') \sim (u_1\xi_1, u_1\eta_1 + u'_1\eta') \quad .$$

Soit $(\xi'_1,\eta'_1) \sim (\xi',\eta')$; on a encore invariance du second membre de (9) car (ξ,η) et (ξ',η') jouent le même rôle dans la définition.

Cette définition (9) est donc justifiée, et on voit de plus que <u>l'addition est commutative</u>.

6°) <u>Propriétés de l'addition</u>.

Il résulte immédiatement de la définition (9) :

$(\xi \backslash 0) = 0$ est élément neutre.

$(\xi \backslash (-\eta))$ est opposé à $(\xi \backslash \eta)$.

.../...

L'addition est associative.

En effet, quand on se donne trois éléments $(\xi\backslash\eta)$, $(\xi'\backslash\eta')$, $(\xi''\backslash\eta'')$ de K , on peut prendre un multiple commun non nul à ξ , ξ' , ξ'' ce qui revient à supposer $\xi=\xi'=\xi''$, ou encore que les homomorphismes h , h' , h" ont le même domaine de définition $A\xi$. (C'est l'analogue de la réduction au même dénominateur pour les fractions). La propriété d'associativité est alors une conséquence de la propriété analogue pour l'addition de η , η' et η'' .

L'addition est distributive par rapport à la multiplication.
Distributivité à gauche.

$$(\xi\backslash\eta)\,(\xi'\backslash\eta'+\xi'\backslash\eta'') = (\xi\backslash\eta)\,(\xi'\backslash\eta') + (\xi\backslash\eta)\,(\xi'\backslash\eta'')$$

Le 1er membre est égal à $(u\xi\backslash v(\eta'+\eta''))$, avec $u\eta = v\xi'$ et $u\xi\neq 0$, tandis que le deuxième vaut $(u\xi\backslash v\eta'+v\eta'')$, avec les mêmes notations.
Distributivité à droite.

$$(10)\quad (\xi'\backslash\eta'+\xi'\backslash\eta'')(\xi\backslash\eta) = (\xi'\backslash\eta')(\xi\backslash\eta)+(\xi'\backslash\eta'')\,(\xi\backslash\eta)$$

Le deuxième membre se calcule à partir de :

$$(u_1\xi'\backslash v_1\eta) + (u_2\xi'\backslash v_2\eta) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u_1\eta' = v_1\xi \\ u_2\eta'' = v_2\xi \end{cases}$$

On en déduit en prenant $\ell u_1\xi' = m u_2\xi'\neq 0$, pour la somme l'expression :

$$(\ell u_1\xi'\backslash \ell v_1\eta + m v_2\eta)\,.$$

De plus, nous avons :

$$\ell u_1\eta' = m u_2\eta' = \ell v_1\xi \ ;\ \ell u_1\eta'' = m u_2\eta'' = m v_2\xi\,,$$

.../...

d'où : $\ell u_1 (\eta'+\eta'') = (\ell v_1 + m v_2)\xi$

Cette relation prouve que le premier membre de (10) est aussi $(\ell u_1 \xi' \setminus (\ell v_1 + m v_2)\eta)$.

En rassemblant tous les résultats, on a le théorème suivant.

<u>Théorème</u>. <u>L'ensemble</u> $K = E/\mathfrak{R}$ <u>muni de l'addition et de la multiplication définies précédemment forme un corps</u>.

<u>On l'appelle le corps $K(M)$ associé au A-module co-irréductible M</u>.

7°) <u>Cas d'un anneau co-irréductible</u>.

Soit A un <u>anneau</u> unitaire co-irréductible, noethérien à gauche ou non(1). On a la propriété suivante :

<u>Propriété</u> 7. <u>L'ensemble des éléments diviseurs de zéro à droite forme un idéal bilatère D complètement premier</u>.

1) $d \in D$, $a \in A \Longrightarrow d\,a \in D$ (immédiat)

2) $d \in D$, $a \in A \Longrightarrow a\,d \in D$, (en effet, il existe $x \neq 0$ tel que $x\,d = 0$; si $a = 0$, on a $a\,d = 0 \in D$; si $a \neq 0$, il existe $u\,a = v\,x \neq 0$ d'où $u\,a\,d = v\,x\,d = 0$ avec $u \neq 0$, ce qui prouve $a\,d \in D$.

3) $d \in D$, $d' \in D \Longrightarrow d - d' \in D$. (En effet, on a $x\,d = 0$, $x \neq 0$; $x'\,d' = 0$, $x' \neq 0$.
Prenons $u\,x = u'\,x' \neq 0$; on a : $u\,x\,(d-d') = 0$).

---

(1) Le cas noethérien à gauche rentre dans l'étude des anneaux complètement primaires (voir[3]).

Cet idéal D est complètement premier car $a \notin D$, $b \notin D$ entraîne $a\, b \notin D$ (si $x\, a\, b = 0$ on a $x\, a = 0$ puisque $b \notin D$ et $x = 0$ puisque $a \notin D$).

L'anneau quotient A/D est donc intègre.

Propriété 8.

L'application $\varphi : x \longrightarrow (1 \backslash x)$ est un homomorphisme de l'anneau A dans le corps associé $K(A)$ dont le noyau est l'idéal D des éléments diviseurs de zéro à droite. L'anneau intègre A/D est donc isomorphe à un sous-anneau de $K(A)$.

On a en effet $1 \backslash x + 1 \backslash y = 1 \backslash (x+y)$ $(1 \backslash x)\,(1 \backslash y) = (1,xy)$. Le noyau de cet homomorphisme est formé des éléments x tels que $(1 \backslash x) = 0$. D'après la propriété 3, ces éléments x sont ceux pour lesquels il existe $u \neq 0$ avec $u\, x = 0$. Le noyau est donc l'idéal D des éléments diviseurs de zéro à droite.

La propriété 8 pourrait être reliée à une propriété plus générale concernant l'anneau quotient de $\mathrm{Hom}_A\,(M,M)$ par l'idéal des endomorphismes de noyau non nul ([1] , page 374).

De la propriété 8 résulte que A/D est injecté dans $K(A)$ mais cela ne signifie pas que $K(A)$ est un corps de fractions de A/D .

(On a donc un plongement d'anneau intègre dans un corps qui n'est pas un corps de fractions ; donner un exemple).

.../...

BIBLIOGRAPHIE

***

[1] L. LESIEUR, Coeur d'un module, Journal de Math. pures et appl. t. 42, 1963, p. 367-407.

[2] L. LESIEUR, Anneaux de fractions, Cours de Math. approfondies, Orsay 1964-1965.

[3] L. LESIEUR, Anneaux noethériens à gauche complètement primaires. (Séminaire Dubreil, novembre 1967).

-:-:-:-:-:-

SEMINAIRE d'ALGEBRE NON-COMMUTATIVE

-:-

CONFERENCE N° 2 DU 13 NOVEMBRE 1967

***

MODULES INJECTIFS et ENVELOPPE INJECTIVE d'UN MODULE

J. FORT

***

Définition 1.

Un A-module Q est dit <u>injectif</u> si, pour tout A-module M et tout sous-module N de M et tout homomorphisme f de N dans Q, il existe un homomorphisme $\bar{f}$ de M dans Q prolongeant f (cf. H. Cartan et S. Eilenberg [3], p. 8).

Cette définition est équivalente à la suivante :

Définition 1'.

Un A-module Q est dit <u>injectif</u> si le foncteur $\mathrm{Hom}_A(\cdot,Q)$ est exact.

Soit en effet une suite exacte d'homomorphismes :

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \quad , \quad \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, g \ ;$$

il faut montrer que, si Q est injectif selon la définition 1, alors la suite induite :

$$\mathrm{Hom}_A(M'',Q) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_A(M,Q) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_A(M',Q)$$

est exacte. Pour cela il suffit d'établir que $\mathrm{Ker}\, f^* \subseteq \mathrm{Im}\, g^*$.

.../...

Soit u un homomorphisme de M dans Q tel que $0 = f^*(u) = u \circ f$;

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, "\pi"] & M'' \arrow[dl, dashed, "v"'] \\ & Q & M/X \arrow[l, "u_1"] \arrow[u, "q"'] \end{tikzcd}$$

u s'annule sur $X = \operatorname{Im} f$ et se factorise en $u = u_1 \circ \pi$, où π est l'homomorphisme canonique $M \longrightarrow M/X$. X étant le noyau de g :

$$g = q \circ \pi \quad , \quad q \text{ injectif} .$$

D'après la définition 1, il existe un homomorphisme $M'' \xrightarrow{v} Q$ tel que $v \circ q = u_1$. Ainsi

$$g^*(v) = v \circ g = v \circ q \circ \pi = u_1 \circ \pi = u \quad .$$

Inversement, la définition 1' entraîne la définition 1 (considérer la suite exacte $0 \longrightarrow N \longrightarrow M$).

Théorème 1.

Pour qu'un A-module à gauche M soit injectif, il faut et il suffit que, pour tout idéal à gauche I de A et tout homomorphisme f de I dans M , f soit réalisé par une homothétie, c'est-à-dire qu'il existe $y \in M$ tel que $f(\alpha) = \alpha\, y_0$ pour tout $\alpha \in A$ (cf. H. Cartan et S. Eilenberg [3], p. 8).

La condition est nécessaire puisque $I \xrightarrow{f} M$ se prolonge à l'anneau A selon $\bar{f}$ (prendre $y = \bar{f}(1)$).

Montrons que la condition est suffisante. Soient E un A-module, F un sous-module de E , et f un homomorphisme de F dans M . La famille $\mathfrak{F}$ des couples (X,φ) , où X est un sous-module de E contenant F et φ un homomorphisme de X dans M prolongeant f , est inductive pour l'ordre $\leqslant$ défini par :

$$(X,\varphi) \leqslant (X',\varphi') \iff X \text{ est sous-module de } X' \text{ et } \varphi' \text{ prolonge } \varphi$$

Soit (X_0,φ_0) un élément maximal de $\mathfrak{F}$ ainsi ordonnée (théorème de Zorn), et nous allons montrer que $X_0 = E$.

S'il n'en est pas ainsi, soit $x \in E$ tel que $x \notin X_0$ . .../...

$Ax \cap X_o = Ix$ avec $I = X_o \cdot . \, x$ (idéal à gauche ensemble des éléments λ de A tels que $\lambda \ x \in X_o$).

L'homomorphisme $\lambda \longrightarrow \varphi_o(\lambda x)$ de I dans M, peut se réaliser par l'homothétie $\lambda \longrightarrow \lambda y$; en posant, pour $x_o \in X_o$ et $\lambda \in A$,

$$\bar{\varphi}(x_o+\lambda x) = \varphi_o(x_o) + \lambda y$$

on obtient un homomorphisme φ de $X_o + Ax$ dans M qui prolonge φ_o, ce qui contredit le caractère maximal de (X_o, φ_o).

Corollaire 1.

Pour qu'un module M sur un anneau principal A soit injectif il faut et il suffit qu'il soit divisible (c'est-à-dire que pour tout $\alpha \in A - \{0\}$ et pour tout $x \in M$, il existe $y \in M$ tel que $x = \alpha y$).

Pour prouver que la condition est nécessaire, considérer l'homomorphisme $\lambda \alpha \longrightarrow \lambda x$; inversement si $I \xrightarrow{f} M$ est un homomorphisme de l'idéal $I \neq (0)$ dans M, considérer un générateur α de I et un élément y de M tel que $f(\alpha) = \alpha y$.

Théorème 2.

Tout A-module peut être plongé dans un A-module injectif. (cf. H. Cartan et S. Eilenberg [3] p. 9).

Nous proposons une démonstration utilisant la théorie des ordinaux, due essentiellement à R. Baer (cf. [1]) et qui s'étend au cas des catégories de Grothendieck (cf. théorème 1.10.1 p. 135 de [6]). On trouvera d'autres méthodes dans B. Eckmann et A. Schopf [5], dans L. Lesieur et R. Croisot [7] p. 96-98, dans D.G. Northcott [8] théorème 8 p. 70 .

A tout A-module à gauche X nous allons associer un A-module $D(X)$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$(*)\begin{cases} 1)\ D(X) \text{ est une extension de } X, \\ 2)\ \text{Pour tout idéal à gauche } I \text{ de } A \text{ et pour tout homomorphisme} \\ I \xrightarrow{f} X, \text{ il existe un élément } y \text{ de } D(X) \text{ tel que} \\ f(\lambda) = \lambda y \text{ pour tout } \lambda \text{ de } I. \end{cases}$$

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble de tous les couples (I,f) formés d'un idéal à gauche I et d'un homomorphisme $I \xrightarrow{f} X$, et soit L le A-module libre engendré par $\mathcal{C}$. Désignons par K le sous-module de la somme directe $X \oplus L$ engendré par les éléments

$$(f(\lambda)\,,\,-\lambda\,(I,f)) \qquad (I,f) \in \mathcal{C}\quad,\quad \lambda \in I\,.$$

Posons $D(X) = (X \oplus L)/K$. L'application $x \longrightarrow (x,0)$ de X dans $X \oplus L$ définit un homomorphisme $X \xrightarrow{\varphi} D(X)$.

Si $\varphi(x) = 0$, alors

$$(x,0) = \sum_i \mu_i\,(f_i(\lambda_i)\,,\,-\,\lambda_i(I_i,f_i))$$
$$= \sum_i (f_i(\mu_i\lambda_i)\,,\,-\,\mu_i\lambda_i\,(I_i,f_i))$$

et, dans L, $\sum\limits_i \mu_i\,\lambda_i\,(I_i,f_i) = 0$, ce qui implique $\mu_i\,\lambda_i = 0$ pour tout i et $x = \sum\limits_i f_i(\mu_i\,\lambda_i) = 0$. φ est donc bien un homomorphisme injectif.

Prouvons que $D(X)$ ainsi construit vérifie également la propriété 2) $(*)$. Considérons un homomorphisme $I \xrightarrow{f} X$ d'un idéal à gauche I dans X ; alors $(I,f) \in \mathcal{C}$. Soit y l'image dans $D(X)$ de l'élément $(0,(I,f))$ de $X \oplus L$; alors pour tout $\lambda \in I$ on a bien dans $X \oplus L$

$$f(\lambda) = (f(\lambda),0) = (0,\lambda\,(I,f)) + k \quad, \text{ avec } k \in K\,,$$

et dans $D(X)$, $f(\lambda) = \lambda\,y$.

Soit Ω le plus petit ordinal infini dont le cardinal soit strictement plus grand que le cardinal de l'anneau A ; Ω est alors nécessairement un ordinal limite. Pour chaque $i \leq \Omega$ nous allons définir par induction transfinie un A-module S_i et pour chaque $j \leq i$ un homomorphisme injectif $S_j \xrightarrow{u_{ij}} S_i$ de telle sorte que pour tout i_o fixé, $i_o \leq i$, le système $(S_\lambda, u_{\lambda\mu})_{\lambda \leq i_o, \mu \leq i_o}$ soit inductif.

On pose alors $S_o = M$, M étant le module donné, puis $S_1 = D(M)$ en choisissant pour u_{10} l'injection de M dans $D(M)$.

Supposons que la construction des S_λ ait été faite pour tous les $\lambda < i$. Si i est de la forme $j + 1$, on pose $S_i = D(S_j)$, et l'homomorphisme u_{ij} est l'injection $S_j \longrightarrow D(S_j)$, ce qui définit par compositions tous les homomorphismes $u_{i\lambda}$, $\lambda \leq i$.

Si i est ordinal limite, on pose $S_i = \varinjlim_{\alpha < i} S_\alpha$; les $u_{i\alpha}$ sont alors les homomorphismes canoniques $S_\alpha \longrightarrow S_i$ définis par cette limite inductive, et ils sont tous injectifs.

Ω étant ordinal limite on obtient ainsi $S_\Omega = \varinjlim_{\alpha < \Omega} S_\alpha$, et comme les $u_{\Omega\alpha}$ sont injectifs, les S_α peuvent être identifiés à des sous-modules de S_Ω, et $S_\Omega = \bigcup_{\alpha < \Omega} S_\alpha$.

Montrons que S_Ω est un A-module injectif ; pour cela considérons un homomorphisme $I \xrightarrow{f} S_\Omega$ d'un idéal à gauche I dans S_Ω. $I = \bigcup_{\alpha < \Omega} f^{-1}(S_\alpha)$. Si les $f^{-1}(S_\alpha)$ sont constants à partir d'un $\alpha_o < \Omega$, alors $f(I) \subseteq S_{\alpha_o}$ et f se réalise par une homothétie définie par un élément de S_{α_o+1} puisque S_{α_o} vérifie (*).

Supposons au contraire, que pour tout $\alpha < \mathcal{N}$ il existe β tel que $\alpha < \beta < \mathcal{N}$ et $f^{-1}(S_\alpha) \subsetneq f^{-1}(S_\beta)$. Observons que

$$I = f^{-1}(S_o) \cup \left(\bigcup_{\alpha < \mathcal{N}} \Delta_\alpha\right), \text{ avec } \Delta_\alpha = f^{-1}(S_{\alpha+1}) - f^{-1}(S_\alpha),$$

est une partition de I, et soit Γ l'ensemble des $\alpha < \mathcal{N}$ tel que Δ_α soit non vide ; dans ces conditions :

$$\text{card } I \geqslant \text{card } \Gamma = \text{card } \mathcal{N}^{(1)},$$

car Γ a pour limite $\mathcal{N}$. Ainsi card $A \geqslant$ card $\mathcal{N}$, ce qui est contraire au choix de $\mathcal{N}$.

Tout homomorphisme $I \xrightarrow{f} S_{\mathcal{N}}$ se réalise donc par une homothétie, et $S_{\mathcal{N}}$ est injectif d'après le théorème 1.

<u>Proposition 1</u>.

Un produit direct de modules est injectif si et seulement si chacun des facteurs de ce produit est un module injectif.

Soient un produit $P = \prod_{i \in I} M_i$ de modules M_i, $\{q_i\}_{i \in I}$ et $\{p_i\}_{i \in I}$ les injections et les projections canoniques définissant P, N un sous-module de M. Supposons que P soit injectif et soit l'homomorphisme $N \xrightarrow{f} M_i$. L'homomorphisme $N \xrightarrow{q_i \circ f} P$ se prolonge en $M \xrightarrow{u} P$; $p_i \circ u$ prolonge alors f à M.

Inversement, supposons que tous les M_i soient injectifs, et soit l'homomorphisme $N \xrightarrow{\varphi} P$; pour chaque i,

---

(1) Γ ayant pour limite $\mathcal{N}$, $\mathcal{N} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} [0,\gamma]$; $[0,\gamma]$ et $\mathcal{N}$ ayant des types d'ordre différents, le caractère minimum de l'ordinal $\mathcal{N}$ implique card $[0,\gamma] <$ card $\mathcal{N}$; card $\mathcal{N}$ n'étant pas cardinal limite, il existe c (ici card A) tel que card $[0,\gamma] \leqslant c <$ card $\mathcal{N}$. Si card Γ était strictement plus petit que card $\mathcal{N}$, alors card $\Gamma \leqslant c$ et $\mathcal{N} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} [0,\gamma]$ impliquerait

$$\text{card } \mathcal{N} \leqslant \text{card } \Gamma \times c \leqslant c^2 = c .$$

$N \xrightarrow{p_i \circ \varphi} M_i$ se prolonge à M selon $M \xrightarrow{\varphi_i} M_i$. L'homomorphisme $\prod_i \varphi_i$ prolonge alors φ à M .

Proposition 2.

> Pour qu'un A-module à gauche Q soit injectif il faut et il suffit qu'il soit facteur direct dans toutes ses extensions.

Pour voir que la condition est nécessaire il suffit de prolonger à l'extension E de Q l'application identique de Q sur Q .

Montrons que la condition est suffisante ; Q admet une extension injective E (d'après le théorème 2). Par hypothèse Q est facteur direct de E , donc est injectif en vertu de la proposition 1.

Autre démonstration de la proposition 2 (condition suffisante), indépendante du théorème de plongement.

Considérons un A-module Q qui soit facteur direct dans toutes ses extensions, et soient N un sous-module du A-module M , et $N \xrightarrow{f} Q$ un homomorphisme de N dans Q . La somme fibrée des deux homomorphismes
$$\begin{tikzcd} & M \\ N \arrow[ur, "inj"] \arrow[dr, "f"'] & \\ & Q \end{tikzcd}$$
est le module quotient $S = (Q\times M)/K$, où $K = \{(f(x),-x)\ ,\ x \in N\}$, muni des homomorphismes $Q \xrightarrow{q} S$ et $M \xrightarrow{\varphi} S$ induits respectivement par les injections canoniques $Q \longrightarrow Q \times M$ et $M \longrightarrow Q \times M$.

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\text{inj. can.}"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[d, "\varphi"] \\ Q \arrow[r, "q"'] & S \arrow[l, dashed, bend right, "p"'] \end{tikzcd}$$

q est injectif car $(Q \times 0) \cap K = 0$; $q(S)$, isomorphe à Q , est facteur direct dans S , par hypothèse ; il existe donc un homomorphisme $S \xrightarrow{p} Q$ tel que $p \circ q = 1_Q$.

θ étant l'homomorphisme canonique $Q \times M \xrightarrow{\theta} S$, pour $x \in N$,

$$\varphi(x) = \theta(0,x) = \theta(f(x), 0) = q(f(x)) \quad ,$$

et $(p \circ \varphi)(x) = (p \circ q)(f(x)) = f(x)$,

$p \circ \varphi$ étend bien f à M .

Proposition 2' .

> Pour qu'un A-module Q soit injectif il faut et il suffit qu'il soit facteur direct dans tout module somme de Q et d'un A-module monogène.

Appliquer ce qui précède au cas où $M = A_s$ et où N est un idéal à gauche de A .

La somme directe d'une famille (infinie) de A-modules injectifs n'est pas nécessairement injective. Soient, par exemple, k un corps commutatif, I un ensemble infini, A l'anneau produit K^I . A est alors un A-module injectif, mais l'idéal $\mathfrak{a}$ de A somme directe des facteurs de k^I n'est pas un A-module injectif (cf. N. BOURBAKI [2] , exercice n° 12 p. 266). Lorsque A est noethérien à gauche, toute somme directe de A-modules à gauche injectifs est injective ; plus précisèment :

<u>Proposition 3</u>. (cf. CHASE S. [4]).

Pour un anneau unitaire A , les assertions suivantes sont équivalentes :

a) A est noethérien à gauche,

b) toute somme directe de A-modules à gauche injectifs est injective.

a) $\Longrightarrow$ b) : Soient $\bigoplus_{i\in I} Q_i$ une somme directe de A-modules à gauche injectifs Q_i , et f un homomorphisme d'un idéal à gauche $\mathfrak{a}$ de A dans $\bigoplus_{i\in I} Q_i$,

$$\mathfrak{a} \xrightarrow{f} \bigoplus_{i\in I} Q_i \quad .$$

$f(\mathfrak{a})$ est un A-module de type fini ; il est par suite inclus dans la somme directe $\bigoplus_{h=1}^{n} Q_{i_h}$ d'une famille <u>finie</u> de Q_{i_h} , somme qui est injective (cf. Proposition 1). f se réalise donc par une homothétie (cf. Théorème 1).

b) $\Longrightarrow$ a) : Soit

$$\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{a}_n \subseteq \dots$$

une chaine ascendante d'idéaux à gauche de A , et posons

$$\mathfrak{a} = \sum_{n\geqslant 1} \mathfrak{a}_n = \bigcup_{n\geqslant 1} \mathfrak{a}_n \ .$$

Chaque A-module à gauche quotient $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}_n$ possède une extension injective Q_n (cf. théorème 2).

$\mathfrak{a} \xrightarrow{\varphi_n} \mathfrak{a}/\mathfrak{a}_n$ désignant l'homomorphisme canonique, soit

$\mathfrak{a} \xrightarrow{f} \prod_{n\geqslant 1} Q_n$ défini par

$$f(\lambda) = (\varphi_n(\lambda))_{n\geqslant 1} \quad , \text{ pour } \lambda \in \mathfrak{a} \ .$$

D'après la définition de l'idéal à gauche $\mathfrak{A}$, pour $\lambda \in \mathfrak{A}$, nous avons $\varphi_n(\lambda) = 0$ sauf pour un nombre fini de valeurs de n ; il en résulte que $f(\mathfrak{A})$ est sous - module de la somme directe $\bigoplus_{n \geq 1} Q_n$, laquelle est un A-module injectif par hypothèse. f se réalise donc par une homothétie $\lambda \longrightarrow \lambda y$, avec $y \in \bigoplus_{n \geq 1} Q_n$.

Dans ces conditions, il existe N tel que $y \in \bigoplus_{n=1}^{N} Q_n$; ainsi :

$$f(\mathfrak{A}) \subseteq \bigoplus_{n=1}^{N} Q_n ,$$

et, pour tout $\lambda \in \mathfrak{A}$, $\varphi_{N+1}(\lambda) = 0$, c'est-à-dire $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}_{N+1}$.

Définition 2.

Une extension E d'un A-module M est dite extension essentielle de M si, pour tout sous-module X de E , la relation $X \cap M = 0$ implique $X = 0$.

Cette condition est équivalente à la suivante :

pour tout $x \in E - \{0\}$ il existe $\alpha \in A$ tel que $\alpha x \in M - \{0\}$.

Proposition 4.(la vérification est laissée au soin du lecteur).

Etant données les extensions de A-modules $E \subseteq F \subseteq G$, pour que G soit extension essentielle de E , il faut et il suffit que G soit extension essentielle de F et que F soit extension essentielle de E .

Proposition 5.

Soient $(M_i)_{i \in I}$ et $(E_i)_{i \in I}$ deux familles filtrantes supérieurement de sous-modules de M ; si, pour tout $i \in I$, E_i est extension essentielle de M_i , alors :

$$\bigcup_{i \in I} E_i \text{ est extension essentielle de } \bigcup_{i \in I} M_i .$$

preuve :

Soit un sous-module X de $\bigcup_{i\in I} E_i$ tel que $0 = X \cap \left(\bigcup_{i\in I} M_i\right)$; de $0 = \bigcup_{i\in I} (X \cap M_i)$, on déduit, pour tout $i \in I$, $X \cap E_i \cap M_i = 0$. Comme E_i est extension essentielle de M_i,

$$X \cap E_i = 0 \quad , \text{ pour tout } i \in I \ ;$$

ceci entraîne $X = X \cap \left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) = \bigcup_{i\in I} (X \cap E_i) = 0$.

Proposition 6.

Soit $\bigoplus_{i\in I} M_i$ une somme directe de sous-modules de M, et, pour chaque $i \in I$, soit E_i une extension essentielle de M_i dans M ; dans ces conditions :

a) La somme $\sum_{i\in I} E_i$ est directe,

b) $\bigoplus_{i\in I} E_i$ est une extension essentielle de $\bigoplus_{i\in I} M_i$.

1er cas : $I = \{1,2\}$

E_1 étant extension essentielle de M_1, la relation $M_1 \cap M_2 \cap E_2 \cap E_1 = 0$ implique $M_2 \cap E_2 \cap E_1 = 0$, et, E_2 étant extension essentielle de M_2 ; la relation $M_2 \cap E_2 \cap E_1 = 0$ implique $E_1 \cap E_2 = 0$; la somme $E_1 + E_2$ est bien directe.

Pour montrer que $E_1 \oplus E_2$ est une extension essentielle de $M_1 + M_2$, considérons $x = x_1 + x_2$, $x \neq 0$, $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. L'une des composantes x_1 ou x_2 n'est pas nulle ; soit, par exemple, $x_1 \neq 0$. E_1 étant extension essentielle de M_1, il existe $\alpha \in A$ tel que $\alpha x_1 \in M_1 - \{0\}$. Si $\alpha x_2 = 0$, nous avons bien $\alpha x \in (M_1 \oplus M_2) - \{0\}$; sinon, il existe $\beta \in A$ tel que $\beta\alpha x_2 \in M_2 - \{0\}$ puisque E_2 est extension essentielle de M_2 , et, dans ce cas, $\alpha x \in (M_1 \oplus M_2) - \{0\}$.

2ème cas : $I = \{1,2,\ldots,n\}$ a un cardinal fini.

Preuve par induction sur n .

3ème cas : I est un ensemble quelconque.

Soit $\mathfrak{F}$ l'ensemble des parties finies F de I ,

$$\sum_{i\in I} E_i = \bigcup_{F\in\mathfrak{F}} \left(\sum_{i\in F} E_i\right) \quad ;$$

la somme $\sum_{i\in I} E_i$ est directe car chacune des sommes finies $s_F = \sum_{i\in F} E_i$ est directe (d'après le 2ème cas) ; de plus, s_F est extension essentielle de $\bigoplus_{i\in F} M_i$.

La proposition 5 montre alors que $\sum_{i\in I} E_i$ est extension essentielle de $\bigcup_{F\in\mathfrak{F}} \left(\bigoplus_{i\in F} M_i\right) = \bigoplus_{i\in I} M_i$.

Remarque :

Le $\mathbb{Z}$ - module Q est extension essentielle de $\mathbb{Z}$, mais le produit $Q^{\mathbb{N}}$ n'est pas un $\mathbb{Z}$ - module extension essentielle de $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ (considérer l'élément $\left(\frac{a_i}{b_i}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ avec $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ suite de nombres premiers distincts).

La notion d'extension essentielle est liée à celle de complément relatif.

Définition :

Etant donné un sous-module N d'un module M, on appelle complément relatif (ou complément) de N dans M un élément maximal K dans l'ensemble des sous-modules X de M tels que $N \cap X = 0$.

L'existence d'un tel K est assurée par le théorème de Zorn.

Un complément dans le module M est, par définition, un sous-module qui est le complément dans M d'un certain sous-module de M.

Théorème 3.

Pour un sous-module K d'un A-module M, les conditions suivantes sont équivalentes :

a) K est un sous-module complément dans M,

b) K est sans extension essentielle propre dans M.

a) $\Longrightarrow$ b) : Soit N un sous-module dont K est un complément ; pour tout sous-module E de M contenant strictement K, on a :

$$E \cap N \neq 0 \quad ;$$

d'autre part $E \cap N \cap K = 0$; donc E n'est pas extension essentielle de K.

b) $\Longrightarrow$ a) : Considérons un sous-module N complément de K dans M, soit K' un complément de N contenant K, et montrons que K' est extension essentielle de K (et ainsi $K = K'$).

Soit X un sous-module tel que $X \subseteq K'$ et $X \cap K = 0$; comme $(K \oplus X) \cap N \leq K' \cap N = 0$.

La somme $K + X + N$ est directe et,

$$0 = (N \oplus X) \cap K \quad ;$$

N étant complément de K : $N \oplus X = N$; donc $X \subseteq N$ et $X \subseteq K'$ ce qui implique $X = 0$.

Proposition 7.

Si M est un sous-module du module injectif Q, toute extension essentielle de E dans M est M - isomorphe[1] à un sous-module de Q. Si M est injectif, il ne possède pas d'extension essentielle propre.

Preuve.

Le plongement canonique de M dans Q se prolonge en un homomorphisme $E \xrightarrow{f} Q$;

$\operatorname{Ker} f \cap M = 0$ (noyau du plongement) ; E étant une extension essentielle de M, $\operatorname{Ker} f = 0$, et E est isomorphe au sous-module $f(E)$ de Q - chaque élément de M étant invariant par f -.

Théorème 4.

M étant un A-module, il existe un A-module E extension de M, défini à un M-isomorphisme près, et ayant les propriétés équivalentes suivantes :

a) E est une extension essentielle maximale de M ;

b) E est une extension essentielle injective de M.

c) E est une extension injective minimale de M.

Preuve :

Soit Q une extension injective du module M. L'ensemble des extensions essentielles de M dans Q, ordonné par inclusion, est inductif (et non vide : M appartient à cet ensemble).

---

(1) Chaque élément de M étant invariant dans l'isomorphisme.

Un élément maximal E de cet ensemble vérifie la condition a) du théorème, en vertu de la proposition 4.

a) implique b) : Soient E une extension essentielle maximale de M et F une extension de E ; considérons un complément relatif K de E dans F,

$$E \approx (E \oplus K)/K \subseteq F/K$$

Montrons que F/K est extension essentielle de $(E \oplus K)/K$. Soit X un sous-module de F contenant K tel que

$$X \cap (E \oplus K) = K \quad ;$$

alors $X \cap E = K \cap E = 0$, avec $K \subseteq X$; K étant un complément de E, $X = K$.

F/K est ainsi extension essentielle de $(E \oplus K)/K \approx E$, et, d'après la condition a), $F/K = (E \oplus K)/K$, $F = E \oplus K$.

E est facteur direct dans toute extension ; il est donc injectif.

b) implique c) : Soit Q un module injectif tel que $M \subseteq Q \subseteq E$. E est extension essentielle de Q car E est extension essentielle de M. L'injectif Q n'ayant pas d'extension essentielle propre : $E = Q$.

c) implique a) : E étant injectif, E contient une extension essentielle maximale de M, soit E' (d'après la construction donnée plus haut). E' est injectif, puisque a) implique b). Ainsi $E' = E$

Il reste à établir l'unicité. Soient deux A-modules E et E' vérifiant les conditions du théorème. E' est alors M-isomorphe à un sous-module E_1 du module injectif E (cf. proposition 7) ; E étant une extension injective minimale de M, $E_1 = E$.

Définition :

Un A-module E vérifiant les conditions du théorème 4, est appelé une enveloppe injective de M (ou l'enveloppe injective de M, par abus de langage). Notation : $E(M)$.

Exemples.

1) $\mathbb{Q}$ est l'enveloppe injective du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Q}$ est Z-injectif d'après le corollaire 1 du théorème 1, et on contrôle aisément que Q est extension essentielle de $\mathbb{Z}$).

La somme directe de copies de $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^{(I)}$, est un $\mathbb{Z}$ - module injectif (cf. Proposition 3), et est extension essentielle de $\mathbb{Z}^{(I)}$ (cf. Proposition 6). $\mathbb{Q}^{(I)}$ est donc une enveloppe injective du Z-module libre $Z^{(I)}$. On a d'ailleurs $\mathbb{Q}^{(I)} \approx \mathbb{Z}^{(I)} \otimes_Z \mathbb{Q}$.

2) Soit A un anneau unitaire intègre, non nécessairement commutatif, admettant un corps des quotients à gauche K : tout élément de K s'écrit $a^{-1} b$ avec $a \in A - \{0\}$ et $b \in A$; A vérifie la condition de Ore : (existence des multiples communs à gauche) (C) pour tout $x \in A$ et $x' \in A - \{0\}$ il existe $u \in A - \{0\}$ et $v \in A$ tels que $u x = v x'$.

Le A-module K est enveloppe injective du A-module à gauche A_s (il est trivial que K soit extension essentielle de A).

Montrons que K est un A-module injectif ; pour cela, considérons un A-homomorphisme $\mathfrak{a} \xrightarrow{f} K$ tel que $f(\mathfrak{a}) \neq 0$, $\mathfrak{a}$ étant un idéal à gauche de A.

Pour $a, b \in \mathfrak{a} - \{0\}$ il existe (cf. condition (C)) u et v de A tels que $u a = v b \neq 0$; en appliquant f,

$$u f(a) = v f(b)$$

comme $u = v b a^{-1}$, $v b a^{-1} f(a) = v f(b)$, $a^{-1} f(a) = b^{-1} f(b)$. Soit $h = a^{-1} f(a)$; f est alors réalisée par l'homothétie :

$$b \longrightarrow b h .$$

3) Soit U_p le sous-module du $\mathbb{Z}$ - module $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ formé des images modulo $\mathbb{Z}$ des rationnels de la forme $\frac{x}{p^n}$, p étant un nombre premier fixé, $x \in Z$, $n \in \mathbb{N}$.

Les sous-groupes de U_p, distincts de U_p, sont les sous-groupes G_n, G_n étant engendré par la classe modulo Z de $\frac{1}{p^n}$; chaque G_n est isomorphe au groupe additif $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$.

U_p est alors <u>enveloppe injective</u> de chacun des $G_n \approx Z/p^n\mathbb{Z}$, pour $n \geqslant 1$.

En effet tout élément de U_p est divisible par une puissance p^h de p, et par tout entier a premier à p (utiliser la relation de Bezout), donc par tout entier non nul. U_p est donc <u>injectif</u> (cf. corollaire 1 du théorème 1).

U_p est extension essentielle de tout sous-groupe $G_n \neq 0$, car le treillis des sous-groupes de U_p est une chaîne.

BIBLIOGRAPHIE

***

[1] BAER R., Abelian groups that are direct summands of every containing abelian groups (Bull. Amer. Math. Soc., t. 46, 1940, p. 800 - 806).

[2] BOURBAKI N., Algèbre linéaire (Fasc. VI, 3e édition, ASI n° 1236, Hermann, Paris 1962).

[3] CARTAN H. et EILENBERG S., Homological Algebra (Princeton, 1956).

[4] CHASE S., Direct product of modules (Trans. Amer. Math. Soc. 97, 1960, p. 457-473.

[5] ECKMANN B. et SCHOPF A., Über injektive Moduln (Archiv. der Math., t. 4, 1953, p. 75-78).

[6] GROTHENDIECK A., Sur quelsques points d'algèbre homologique (Tôhoku Math. J., t. 9, 1957, p. 119-221).

[7] LESIEUR L. et CROISOT R., Algèbre noethérienne non commutative (Mémorial Sc. Math., Fasc. CLIV, Gauthier-Villars, Paris 1963).

[8] MORTHCOTT D.G., an introduction to homological Algebra (Cambridge University Press, 1960).

SEMINAIRE d'ALGEBRE NON-COMMUTATIVE

-:-

CONFERENCE N° 3 DU 20 NOVEMBRE 1967

***

MODULES INJECTIFS INDECOMPOSABLES

G. RENAULT

***

1. Modules injectifs indécomposables.

DÉFINITION 1. - Un A-module M est indécomposable si ses seuls facteurs directs sont 0 et M.

PROPOSITION 1. - Soit M un A-module ; les propriétés suivantes sont équivalentes :

a. 0 est $\cap$-irréductible dans M ;

b. L'enveloppe injective $E(M)$ est indécomposable ;

c. $E(M)$ est l'enveloppe injective de tout sous-module non nul de M.

(a) $\Longrightarrow$ (b). - Soit $E(M) = M_1 \oplus M_2$; posons $X_1 = M \cap M_1$ et $X_2 = M \cap M_2$; $E(M)$ est une extension essentielle de M ; par suite, X_1 et X_2 sont différents de (0) et l'on a $X_1 \cap X_2 = 0$.

(b) $\Longrightarrow$ (c). - Soit P sous-module de M ; $E(P)$ est facteur direct de $E(M)$ et, par suite, $E(P) = E(M)$.

(c) $\Longrightarrow$ (a). - Soient X_1 et X_2 deux sous-modules de M tels que $X_1 \cap X_2 = 0$, $E(M)$ non extension essentielle de X_1.

Exemple. - Soit E un A-module injectif indécomposable, alors $E = E(A/J)$ où J est un idéal irréductible. D'après la proposition 1, si J est un idéal irréductible, alors $E(A/J)$ est injectif et indécomposable.

Réciproquement, soit $x \in E$, alors $E = E(Ax)$; soit J annulateur de x :

$$Ax \simeq A/J \ , \qquad E = E(A/J)$$

avec J irréductible.

PROPOSITION 2. - Soit E un A-module injectif et indécomposable, alors $\mathrm{Hom}_A(E\ , E)$ est un anneau local.

Soit $u \in \mathrm{Hom}_A(E, E)$, u est un automorphisme de $E \iff u$ est injectif. En effet, dans ce cas $u(E)$ est un A-module injectif et, par suite, est facteur direct de E.

Soient $u, v \in \mathrm{Hom}_A(E, E)$, $\mathrm{Ker}\, u \neq 0$, $\mathrm{Ker}\, v \neq 0$,

$$\mathrm{Ker}(u+v) > \mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v \neq 0 \implies \mathrm{Ker}(u+v) \neq 0$$

PROPOSITION 3. - Soient $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ des sous-modules irréductibles d'un A-module M tels que $0 = X_1 \cap \dots \cap X_n$ et 0 n'étant intersection d'aucune sous-famille des X_i. Alors

a. $E(M/X_i)$ est un A-module injectif indécomposable ;

b. $E(M) = E(M/X_1) \oplus \dots \oplus E(M/X_n)$.

La propriété (a) résulte immédiatement de la proposition 1. Soient φ_i l'application canonique $M \to M/X_i$ et $\varphi = (\varphi_i)_{1 \leq i \leq n}$.

$$\varphi_i : m \to [\varphi_1(m) \dots \varphi_n(m)]$$

φ est une application injective de M dans $E = E(M/X_1) \oplus \dots \oplus E(M/X_n)$. Il nous suffit d'établir que E est une extension essentielle de $\varphi(M)$. Par hypothèse, il existe

$$m \in \bigwedge_{j \neq i} X_j \quad \text{avec} \quad m \notin X_i$$

par suite,

$$\varphi(M) \cap M/X_i \neq 0$$

D'après la proposition 1, on sait que $E(M/X_i)$ est l'enveloppe injective de $\varphi(M) \cap M/X_i$. Soit $x = (x_1, \dots, X_n) \in E$. Pour toute composante non nulle x_i, il existe $a_i \in A$ tel que $a_i x_i \in \varphi(M) \cap M/X_i$ avec $a_i x_i \neq 0$, et, par suite, il existe $s \in A$ tel que $sx \neq 0$ et avec $sx \in \varphi(M)$. E est une extension essentielle de $\varphi(M)$.

Avec des hypothèses analogues; si $X = X_1 \cap \dots \cap X_n$, alors

$$E(M/X) = E(M/X_1) \oplus \dots \oplus E(M/X_n)$$

Remarque. - Si M est un A-module noethérien, 0 est intersection d'un nombre fini de sous-modules irréductibles.

PROPOSITION 4. - Soit A un anneau noethérien à gauche ; tout A-module injectif M est somme directe de sous-modules injectifs indécomposables.

Soit C un sous-module maximal, somme directe de sous-modules injectifs indécomposables. Alors $C = M$; sinon, il existe $x \in P$, $x \notin C$; soit $O(X)$ annulateur de x , A noethérien, par suite, $O(x) = X_1 \cap \dots \cap X_n$, où les X_i sont des idéaux irréductibles de A , $O(X)$ n'étant intersection d'aucune sous-famille des X_i .

$$E(A/O(X)) = E(Ax) = E(A/X_1) \otimes \dots \otimes E(A/X_n)$$

le sous-module de M , $C \otimes E(A/X_1) \otimes \dots \otimes E(A/X_n)$ est somme directe de modules injectifs indécomposables, ce qui contredit le caractère maximal de C .

2. Le théorème d'Azumaya.

THÉORÈME. - La décomposition d'un module M en somme directe de sous-modules injectifs et indécomposables est unique à un automorphisme près de M .

Soit

$$M = \bigotimes_{i \in I} M_i$$

une telle décomposition ; on va prouver que tout sous-module N injectif indécomposable est isomorphe à un M_i ,

$$M = N \otimes P$$

Soient f et f' les applications canoniques de M dans N et P . On a

$$1 = f + f' , \quad f \circ f' = f' \circ f = 0$$

Il existe $i_1 , \dots , i_s \in I$ tel que

$$N \cap M_{i_1} \otimes \dots \otimes M_{i_s} \neq 0$$

LEMME. - Soit A un anneau des endomorphismes de M , f , $f' \in A$ tels que $f + f' = 1$. Alors, pour tout système d'indices fini $i_1 , \dots , i_s$, il existe des sous-modules $P_1 , \dots , P_s$ tels que :

a. Pour tout k, f ou f' induise un isomorphisme de $M_k \to P_k$.

b. $M = P_1 \oplus \dots \oplus P_s \oplus (\bigoplus_{i \neq i_k} M_i)$.

Soit $\ell i_1 : M \to M_{i_1}$ la projection de M sur M_{i_1} parallèlement aux autres facteurs.

$$\ell i_1 = \ell i_1 \circ f + \ell i_1 \circ f' \quad ,$$

et, par suite,

$$\ell i_1 \circ f \text{ ou } \ell i_1 \circ f'$$

induit un isomorphisme sur M_{i_1}. Supposons que $\ell i_1 \circ f$ induit cet isomorphisme

$$P_1 = f(M_{i_1}) \simeq M_{i_1}$$

et ℓi_1 induit un isomorphisme de P_1 sur M_i

$$\operatorname{Ker} \ell i_1 = \bigoplus_{i \neq i_1} M_i \quad ,$$

par suite,

$$M = P_1 \oplus (\bigoplus_{i \neq i_1} M_{i_1}) \quad ;$$

en itérant le procédé, on obtient le résultat.

Appliquons le lemme à la situation précédente. f' annule $N \cap M_{i_1} \oplus \dots \oplus M_{i_s}$ et, par suite, ne peut définir un isomorphisme de $M_{i_1} \oplus \dots \oplus M_{i_s}$ sur $P_{i_1} \oplus \dots \oplus P_{i_s}$; on en conclut que, pour au moins un k, f est un isomorphisme. $M_{i_k} \to P_k$; N étant un module injectif indécomposable, il s'en suit $P_k = N$.

Montrons l'unicité de cette décomposition à un automorphisme près de M. Soit $M = \bigoplus_{j \in J} N_j$ une autre décomposition de M en somme directe de sous-modules injectifs et indécomposables, d'après ce qui précède, tout N_j est isomorphe à un M_i, et reciproquement tout M_i est isomorphe à un N_j.

Deux indices de I (resp. J) seront dits équivalents s'ils définissent des sous-modules isomorphes. Les classes de I et de J se correspondent biunivoquement, et on notera K , l'ensemble de ces classes ; tout $k \in K$ définit une classe $[I(k)\ ,\ J(k)]$, tout revient à prouver que $\operatorname{card} I(k) = \operatorname{card}[J(k)]$.

α. $\operatorname{card}[I(k)]$ fini. - Soient $j_1 \in J(k)$ et f_1 la projection de M sur N_{j_1} ; en utilisant ce qui précède, il existe $i_1 \in I$ tel que f_1 soit un isomorphisme de M_{i_1} sur N_{j_1} et on a

(1) $$M = M_{i_1} \otimes \left(\bigotimes_{j \neq j_1} N_j \right)$$

Si j_1 est le seul élément de $j(k)$, on a

$$\operatorname{card}[I(k)] \geqslant \operatorname{card}[J(k)]$$

d'où l'égalité ; sinon, on recommence l'opération. D'où, finalement,

$$\operatorname{card}[I(k)] \geqslant \operatorname{card}[J(k)]$$

et, par suite,

$$\operatorname{card}[I(k)] = \operatorname{card}[J(k)]$$

β. $\operatorname{card}[I(k)]$ infini. - Soit f_j la projection de M sur N_j , parallèlement aux autres facteurs.

$$M_i = \sup_J \left(M_i \cap \bigotimes_{j \in L} N_j\right)$$

où L parcourt les familles finies de J . Par suite, $M_i \cap \operatorname{Ker} f_j = 0$ pour un nombre fini de j ; pour tout i , il existe un nombre fini de j tel que f_j soit un isomorphisme de M_i sur N_j ; soit $j(i) = \{j\}$ cet ensemble. Quand i parcourt $i(k)$, les $j(i)$ recouvrent $j(k)$. $\operatorname{card}[I(k)]$ infini, par suite,

$$\operatorname{card}[I(k)] \geqslant \operatorname{card}[J(k)] \quad .$$

3. Modules isotypiques.

DÉFINITION 2. - On dit que X est un sous-module isotypique de M , si $E(M/X)$ est somme directe de sous-modules injectifs indécomposables tous isomorphes.

Remarque. - $E(M/X)$ est isotypique au sens de N. BOURBAKI.

Soit I un sous-module isotypique "dont les composantes" sont isomorphes à π , module injectif indécomposable. π est le type de I , on dit que I est π-isotypique.

PROPOSITION 5. - L'intersection de deux sous-modules π-isotypiques est un sous-module π-isotypique.

$X = X_1 \cap X_2$, $E(M/X) \subset E(M/X_1) \oplus E(M/X_2)$ et $E(M/X)$ est facteur direct de $E(M/X_1) \oplus E(M/X_2)$; le théorème d'Azumaya entraîne la propriété.

Cette propriété permet, dans une décomposition comme intersection de sous-modules isotypiques, de rassembler les sous-modules de même type. On obtient ainsi une décomposition réduite, c'est-à-dire une décomposition comme intersection de sous-modules isotypiques de types tous différents sans élément superflu.

PROPOSITION 6. - Tout sous-module d'un module artinien ou noethérien admet une décomposition réduite comme intersection de sous-modules isotypiques. Soient deux décompositions de X

$$X = I_1 \cap \dots \cap I_n = I'_1 \cap \dots \cap I'_{n'} ,$$

alors $n = n'$ et les types des I_i sont les mêmes que ceux des I'_j .

Ces propriétés sont les conséquences des théorèmes précédents.

4. Applications aux anneaux commutatifs.

THÉORÈME 2. - Soit A un anneau commutatif noethérien, il y a correspondance biunivoque entre les idéaux premiers de A et les modules injectifs indécomposables. $P \leftrightarrow E(A/P)$ si Q est un idéal irréductible P-primaire, alors

$$E(R/Q) \cong E(R/P)$$

Soit P un idéal premier de A ; alors P est irréductible et, par suite, $E(A/P)$ est un A-module injectif et indécomposable. Soient P_1 et P_2 deux idéaux premiers tels que $E(A/P_1) \cong E(A/P_2) = E$. On plonge A/P_1 et A/P_2 dans E , et on a $A/P_1 \cap A/P_2 \neq 0$; c'est un sous-module qui a pour annulateur P_1 et P_2 ; par suite $P_1 = P_2$.

Soit Q un idéal irréductible P-primaire ; il existe n tel que $P^n \subset Q$, n étant le plus petit entier tel que P^n a la propriété. Il existe $b \in P^{n-1}$, $b \notin Q$; soit $\bar{b}$ l'image de b dans A/Q . Soit $O(\bar{b})$ l'annulateur de $\bar{b}$; il est clair que $O(\bar{b}) \supset P$. D'autre part, $a \in O(\bar{b})$. Alors $ab \in Q$ et, par suite, $a \in P$; d'où finalement

$$O(\bar{b}) = P$$

$$E(A/Q) \cong E(A/P)$$

5. Injectifs indécomposables et idéaux bilatères premiers.

Soit A un anneau noethérien à gauche ; si I est un module injectif indécomposable, les annulateurs des sous-modules non nuls de I, forment une famille filtrante croissante d'idéaux bilatères de A.

Cette famille admet un élément maximal $A(I)$; $A(I)$ est un idéal bilatère premier : $(a\,A\,b \subset A(I) \Longrightarrow a \in A(I)$ ou $b \in A(I))$.

La correspondance $I \rightsquigarrow A(I)$ entre type d'injectifs indécomposables et idéaux bilatères premiers n'est pas en général injective. Pour plus de détails on se reportera à [4] p. 421 à 423.

Exercices :

1) Caractériser les anneaux commutatifs tels que tout A-module simple est injectif. [Ce sont les anneaux réguliers au sens de Von Neumann (th. de Kaplausky)] .

2) Si m est un entier strictement positif déterminer les modules injectifs indécomposables et les modules projectifs sur l'anneau $A = \mathbb{Z}/(m)$. (on montrera que A est un A-module injectif).

—:—

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN (H.) and EILENBERG (S.). - Homological algebra. - Princeton, University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19).

[2] ECKMANN (B.) und SCHOPF (A.). - Über injektive Moduln, Archiv der Math., t. 4, 1953, p. 75-78.

[3] GABRIEL (Pierre). - Objets injectifs dans les catégories abéliennes, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, t. 12, 1958/59, n° 17, 32 p.

[4] GABRIEL (Pierre). - Des catégories abéliennes, Bull. Soc. math. France, t. 90, 1962 (Thèse Sc. math. Paris. 1961).

[5] MATLIS (Eben). - Injective modules over noetherian rings, Pacific J. Math., t. 8, 1958, p. 511-528.

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

-:-:-:-:-:-

Conférence n° 4 du 27 novembre 1967

ANNEAUX DE FRACTIONS GENERALISES ARTINIENS.

par M. DJABALI

-:-:-:-:-:-

L. LESIEUR a étudié dans [4] la notion d'anneau de fractions $F(A)$ d'un anneau A par rapport à un système multiplicatif S d'éléments non nécessairement réguliers. La théorie fait intervenir un ensemble I' défini ainsi : si $x \in I'$, ou bien il existe $b \in S$ tel que $bx = o$, ou bien il existe $b' \in S$ tel que $xb' = o$, ou bien encore il existe b et $b' \in S$ tels que $bxb' = o$, (nous ne supposons pas que S contient un élément unité pour la multiplication de A). On appelle I l'idéal bilatère engendré par I'. Si $\bar{A}$ est l'anneau A/I et $\bar{S}$ l'image canonique de A, $F(A)$ existe si et seulement si

1) $\bar{S}$ est constitué d'éléments réguliers dans $\bar{A}$

2) $\bar{A}$ possède un anneau de fractions au sens classique du terme par rapport à $\bar{S}$. On posera alors : $F(A) = \bar{A}_{\bar{S}}$.

Les conditions 1 et 2 peuvent s'exprimer d'une autre façon :

1). Si $b \in S$, $\lambda b \in I \Rightarrow \lambda \in I$ et $b\lambda \in I \Rightarrow \lambda \in I$

2) Pour tout couple b, a, $b \in S$, $a \in A$ il existe un couple b', a', $b' \in S$, $a' \in A$ tel que : $b'a = a'b \pmod{I}$.

Dans toute la suite nous supposerons que S est l'ensemble D' des éléments réguliers à droite d'un anneau noethérien à gauche A. Dans ce cas

I' se réduit à l'ensemble des x tels que : $\bigcirc \cdot x \cap S \neq \emptyset$. I n'est autre que l'idéal à gauche engendré par I', I' étant évidemment permis pour la multiplication à droite.

L'étude se simplifie dans le cas où A possède la propriété du multiple commun par rapport à S, c'est-à-dire que pour tout couple b, a, $b \in S$, $a \in A$, il existe un couple b', a', $b' \in S$, $a' \in A$ tel que : $b'a = a'b$. Alors L. LESIEUR a montré que $I' = I$ et que l'anneau $F(A)$ existait. Un résultat du à L. SMALL [7] montre que ceci est réalisé dans le cas où tout élément régulier modulo le radical de A est régulier à droite et que dans ces conditions $F(A)$ est un anneau artinien.

Nous allons donner une condition nécessaire pour que $F(A)$, s'il existe, soit artinien. Cette condition n'est pas nécessairement suffisante. Cependant elle l'est pour les anneaux que nous appellerons quasi-premiers et quasi-semi-premiers.

I. QUELQUES RESULTATS SUR LES ANNEAUX NOETHERIENS.

Soit A un anneau noethérien L. LESIEUR et R. CROISOT ont montré dans [6] le théorème suivant :

<u>Théorème 1.1</u> : Il existe un nombre fini d'idéaux premiers P_i, $1 \leq i \leq n$ tels que : $P_1 P_2 \ldots P_n = o$. Alors les P_i sont les idéaux premiers minimaux de A. De plus si R est le radical nilpotent de A : $R = \cap P_i$.

Nous avons nous-mêmes établi le théorème suivant [2] :

<u>Théorème 2.1</u> : Soit b un élément de A régulier à droite. Alors b est régulier modulo R.

<u>Proposition 1,1</u> : Soit b un élément de A régulier modulo R. Alors b est régulier modulo chacun des P_i.

Il suffit de montrer que b est régulier à droite modulo P_i (cf. [3]), c'est-à-dire que $\lambda b \in P_i$ entraîne $\lambda \in P_i$. Appelons P'_i l'intersection de ceux des P_j qui sont distincts de P_i. Nous supposerons que $P'_i \neq P_i$ car si tous les P_j sont égaux à P_i, on a $R = P_i$ et le résultat est trivial. On peut écrire : $R = P_i \cap P'_i$. Donc $P'_i P_i \subset R$. Si $\lambda b \in P_i$, $P'_i \lambda b \subset R$. Mais b étant régulier à droite modulo R cela implique que $P'_i \lambda \subset R$ et donc $P'_i \lambda \subset P_i$. Comme P_i est un idéal premier et que P'_i est un idéal bilatère non contenu dans P_i nous en déduisons que $\lambda \in P_i$.

<u>Corollaire 1</u> : Tout élément de D' est régulier modulo chacun des P_i.

<u>Corollaire 2</u> : Soit I un idéal bilatère de A. Alors tout élément régulier à droite modulo I est régulier modulo chacun des idéaux premiers minimaux contenant I.

<u>Corollaire 3</u> : Soit I un idéal bilatère contenu dans R. Alors tout élément régulier à droite modulo I est régulier modulo R.

<u>Définition 1,1</u> : Soit S un système multiplicatif. Nous dirons qu'un idéal premier P est S-premier si tout élément de S est régulier modulo P.

Dans le cas où $S = D'$, nous venons de voir que les idéaux premiers minimaux de A sont S-premiers. Remarquons que dans le cas où $D = A-D'$ est un idéal bilatère nous retrouvons la notion d'idéal premier D-primaire définie par L. LESIEUR ([5]).

Dans le cas d'un anneau commutatif il est immédiat qu'un idéal premier est S-premier ($S = D'$) si et seulement si il est contenu dans un idéal premier associé à 0. Dans le cas général on peut se demander si les idéaux premiers associés à 0 dans une décomposition tertiaire sont S-premiers. Nous sommes en mesure de répondre par l'affirmative dans le cas où l'idéal singulier à gauche $J(A)$ de A est nul.

<u>Proposition 2,1</u> : Soit A un anneau noethérien tel que $J(A) = 0$. Tout élément de A régulier à droite est régulier modulo le radical tertiaire de A

Soit R_3 le radical tertiaire de A et soit $b \in D'$. Si $\lambda b \in R_3$, cela veut dire que pour tout idéal à gauche non nul X, il existe un idéal à gauche X' non nul contenu dans X tel que $\lambda b X' = o$ (cf. [6]). Mais nous avons montré que dans ce cas $\bigcirc^{\cdot}. bX' = \bigcirc^{\cdot}. X'$ (cf. [1]). Donc $\lambda X' = o$ et on voit que $\lambda \in R_3$.

Corollaire : Les idéaux premiers associés à o dans une décomposition tertiaire sont S-premiers.

En effet R_3 est l'intersection de ces idéaux. La démonstration est analogue à celle de la proposition 1,1.

II. ANNEAU DE FRACTIONS GENERALISE D'UN ANNEAU NOETHERIEN.

Proposition 1,2 : I est contenu dans l'idéal singulier à gauche $J(A)$ de A.

En effet si $x \in I'$, $\exists b \in D'$ tel que $bx = o$. Mais Ab est essentiel dans A (cf. [3]) et il en est de même pour $\bigcirc^{\cdot}. x$ que contient Ab. Donc $I' \subset J(A)$ et on en déduit que $I \subset J(A)$.

Corollaire : I est contenu dans le radical de A.

Proposition 2,2 : Soit $b \in D'$. Alors $\bar{b}$ est régulier modulo $\bar{R} = R/I$.

Il suffit de remarquer que A/R est isomorphe à $\bar{A}/\bar{R}$ et d'appliquer le théorème 1,1.

Proposition 3,2 : Supposons que A possède un anneau de fractions généralisé $F(A) = \bar{A}_{\bar{D}'}$. Alors le radical $\bar{R}'$ de $F(A)$ est égal à $F(A)\bar{R}$ et on a : $\bar{R} = \bar{A} \cap \bar{R}'$.

Pour la démonstration on peut se reporter à [7].

Proposition 4,2 : Supposons que $F(A)$ existe. Soit P un idéal S-premier ($S = D'$). Alors tout élément de $\bar{S}$ est régulier modulo $\bar{P}$. De plus si on pose $\bar{P}' = F(A)\bar{P}$ on peut dire que $\bar{P} = \bar{A} \cap \bar{P}'$ et que $\bar{P}'$ est un idéal propre premier de $F(A)$.

Remarquons d'abord que $\bar{P}$ est un idéal premier de $\bar{A}$. En effet P contient R et contient donc I. Dans ces conditions le premier point s'établit immédiatement.

Supposons alors que $\bar{b}^{-1}\bar{a} \in \bar{A} \cap \bar{P}'$. Il en est de même du produit $\bar{b}(\bar{b}^{-1}\bar{a})$. Mais si $\bar{a}$ appartient à $\bar{P}$ il en est de même pour $\bar{b}^{-1}\bar{a}$ puisque $\bar{b}$ est régulier modulo $\bar{P}$. On a donc bien $\bar{P} = \bar{A} \cap \bar{P}'$.

Montrons maintenant que $\bar{P}'$ est un idéal bilatère. On sait déjà que c'est un idéal à gauche. On voit sans difficultés que c'est un idéal à droite si tout produit de la forme $\bar{p}\bar{b}^{-1}$, $\bar{p} \in \bar{P}$ peut s'écrire sous la forme $\bar{b}_1^{-1}\bar{p}_1$ avec $\bar{p}_1 \in \bar{P}$. Mais on a $\bar{b}_1\bar{p} = \bar{p}_1\bar{b}$. On remarque $\bar{p}_1\bar{b} \in \bar{P}$. $\bar{b}$ étant régulier modulo P on en déduit que $\bar{p}_1 \in \bar{P}$ et donc $p_1 \in P$.

Montrons enfin que $\bar{P}'$ est un idéal premier. Supposons que le produit $\bar{b}^{-1}\bar{a}\, F(A)\bar{b}_1^{-1}\bar{a}_1 \subset \bar{P}'$. Mais alors on voit que $\bar{b}^{-1}\bar{a}\,\bar{A}\bar{a}_1 = \bar{b}^{-1}\bar{a}\,\bar{A}\bar{b}_1(\bar{b}_1^{-1}\bar{a}_1)$ appartient à $\bar{P}'$. Donc $\overline{aAa_1} \subset \bar{P}' \cap \bar{A} = \bar{P}$. Comme $\bar{P}$ est premier on voit que soit $\bar{a}$, soit $\bar{a}_1$ appartient à $\bar{P}$.

Proposition 5.2 : Supposons qu'un anneau noethérien A possède un anneau de fractions généralisé artinien. Dans ces conditions les seuls idéaux S-premiers sont les idéaux premiers minimaux de A.

Dans un anneau artinien tout idéal propre premier est maximal (cf.[6]). Soient Pi, $1 \leqslant i \leqslant n$, les idéaux premiers minimaux de A. Les idéaux $\bar{P}'i = F(A)\bar{P}i$ sont des idéaux propres premiers de $F(A)$. Montrons que si $\bar{R}'$ est le radical de $F(A)$, $\bar{R}' = \cap \bar{P}'i$. En effet pour tout i $\bar{P}'i \cap A = \bar{P}i$ et donc $\cap \bar{P}'i \cap A = \cap \bar{P}i = \bar{R}$. D'où l'inclusion $\cap \bar{P}'i \subset F(A)\bar{R} = \bar{R}'$. D'autre part nous pouvons dire que $\cap \bar{P}'i \supset \bar{R}'$ d'où l'égalité annoncée.

Dans ces conditions les $\bar{P}'i$ sont les seuls idéaux propres premiers de $F(A)$. Maintenant si P est un idéal S-premier, $\bar{P}' = F(A)\bar{P}$ est nécessairement égal à l'un des $\bar{P}'i$. Comme $\bar{P}' \cap A = \bar{P}$ et $\bar{P}'i \cap A = \bar{P}i$ on voit que $\bar{P} = \bar{P}i$ d'où l'égalité $P = Pi$ (P et Pi contiennent I).

<u>Théorème 1,2</u> : (L. SMALL [7]) . Soit A un anneau noethérien dans lequel tout élément régulier modulo le radical est régulier à droite. Alors A possède un anneau de fractions généralisé artinien.

En effet il suffit de remarquer que dans les raisonnements de [7] on ne se sert que de la régularité à droite des éléments réguliers modulo le radical. La condition du multiple commun est vérifiée par rapport au système S. L'anneau de fractions est artinien.

Remarquons que dans ce cas l'ensemble des éléments réguliers de $\bar{A}$ est égal à $\bar{S}$. En effet tout élément régulier $\bar{b}$ de $\bar{A}$ est régulier modulo $\bar{R}$ (Th. 1,1). Donc b est régulier modulo R ($\bar{A}/\bar{R}$ étant évidemment isomorphe à A/R).

<u>Proposition 6,2</u> : Soit A un anneau noetherien commutatif non nilpotent. A possède un anneau de fractions artiniens si et seulement si les seuls idéaux S-premiers sont les idéaux premiers minimaux de A.

La propriété est bien connue. D'ailleurs on peut remarquer avec L. SMALL [7] que tout élément régulier modulo le radical est régulier dans A. On voit d'ailleurs que dans ces conditions l'ensemble S n'est pas vide.

Notre condition 5,2 nous fournit une condition nécessaire pour qu'un anneau de fractions généralisé artinien existe. Nous ne sommes pas en mesure de dire si elle est suffisamte dans le cas d'un anneau non commutatif. Etudions quand même un cas particulier et tout d'abord rappelons la définition :

<u>Définition 1,2</u> : un idéal à gauche I d'un anneau A est dit idéal complément si I est la seule extension essentielle de lui-même dans A (cf. [3]).

Donnons alors deux définitions.

<u>Définition 2,2</u> : un anneau A est dit quasi-premier si tout idéal complément a un annulateur à gauche nul.

<u>Définition 3,2</u> : Un anneau A est dit quasi-semi-premier si tout idéal complément contenant un idéal nilpotent non nul a un annulateur à gauche nul.

Nous pouvons considérer qu'un anneau premier (resp. semi-premier) est quasi-premier (resp. quasi-semi-premier).

<u>Théorème 2,2</u> : Pour qu'un anneau noetherien A quasi-semi-premier possède un anneau de fractions généralisé artinien, il faut et il suffit que les seuls idéaux S-premiers soient les idéaux premiers minimaux.

Soient P_i , $1 \leqslant i \leqslant n$, les idéaux premiers minimaux de A . Leur produit est nul et on peut écrire $P_1 P_2 \ldots P_n = o$ avec $P_1 P_2 \ldots P_{n-1} \neq o$. Posons $Q_n = P_1 P_2 \ldots P_{n-1}$. On en déduit que $\bigcirc \cdot . Q_n$ est différent de o puisqu'il contient Pn . Montrons que tout élément de S est régulier à droite modulo $\bigcirc \cdot . Q_n$. En effet si $c \in S$ et si $\lambda c \in \bigcirc \cdot . Q_n$, on peut écrire : $Q_n \lambda c = o$ et donc $Q_n \lambda = o$. Mais alors c est régulier modulo les idéaux premiers minimaux contenant $\bigcirc \cdot . Q_n$ (corollaire 2 de la prop. 1,1). Ces idéaux sont donc des idéaux S-premiers. Mais comme $\bigcirc \cdot . Q_n$ contient Pn et que tout idéal S-premier est minimal nous en déduisons que : $\bigcirc \cdot . Q_n = Pn$.

D'après le théorème 1,2 il suffit de montrer que tout élément régulier modulo R est régulier à droite. Soit donc b un élément régulier modulo R dont l'annulateur à gauche $\bigcirc \cdot . b$ est maximal. Supposons $\bigcirc \cdot . b \neq o$. Soit I une extension essentielle maximale de $\bigcirc \cdot . b$. I est un idéal complément et on a : $I \cap R \neq o$. En effet $\bigcirc \cdot . b \subset R$ puisque b est régulier à droite modulo R et $I \cap R \supset \bigcirc \cdot . b$. Nous en déduisons que $\bigcirc \cdot . I = o$.

Considérons Pn . Comme $\bigcirc \cdot . Pn \supset Qn$, $\bigcirc \cdot . Pn \neq o$. Il en résulte qu'on ne peut avoir $I \subset Pn$. Mais b est régulier modulo Pn (prop. 1,1). On sait que dans ces conditions l'image canonique de b engendre un idéal à gauche essentiel dans l'anneau premier noethérien A/Pn . En particulier puisque $I \not\subset Pn$, $I \cap (Ab+Pn) \not\subset Pn$. Cela revient à dire qu'il existe $i \in I$, avec $i = ab+p$, $i \notin Pn$, et $p \in Pn$. Or au début de notre raisonnement nous avons vu que $\bigcirc \cdot . Q_n = Pn$. Donc $Q_n i \neq o$ et on peut écrire l'égalité : $Q_n i = Q_n ab \neq o$. Cela prouve que $Ab \cap I \neq o$ et comme I est une extension essentielle de $\bigcirc \cdot . b$. On peut encore écrire $Ab \cap \bigcirc \cdot . b \neq o$.

Remarquons maintenant que b^2 est également régulier modulo R . Comme $\bigcirc \cdot . b \subset \bigcirc \cdot . b^2$ et que $\bigcirc \cdot . b$ est maximal on voit que $\bigcirc \cdot . b = \bigcirc \cdot . b^2$. Mais si $Ab \cap \bigcirc \cdot . b = o$, cela implique qu'il existe λ tel que $\lambda b \neq o$ et $\lambda b^2 = o$, donc qu'il y a inclusion stricte $\bigcirc \cdot . b \subset \bigcirc \cdot . b^2$. Nous arrivons à une contradiction et nous avons bien $\bigcirc \cdot . b = o$.

<u>Exemple</u> : Soit A l'anneau des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ o & c \end{pmatrix}$ dont les coefficients appartiennent à Z . A est un anneau noethérien. Les seuls idéaux

premiers minimaux sont les idéaux :

$$P_1 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ o & o \end{pmatrix}\right\} \qquad\qquad P_2 = \left\{\begin{pmatrix} o & b \\ o & o \end{pmatrix}\right\}$$

On a bien :

$$P_1 \cap P_2 = R = \left\{\begin{pmatrix} o & b \\ o & o \end{pmatrix}\right\}$$

D'autre part : $P_2 P_1 = o$.

Il est facile de vérifier que [illegible] est un anneau quasi semi-premier. On remarque que les seuls idéaux compléments qui ont une intersection non nulle avec R sont P_2 d'une part et A d'autre part . Or $\bigcirc \cdot . P_2 = \bigcirc \cdot . A = o$. D'ailleurs l'idéal singulier à gauche $J(A)$ est nul et on voit que précisément la fermeture de R (cf [1]) . Comme dans ce cas tout élément régulier à droite est régulier A possède un anneau de fractions au sens classique du terme artinien.

- BIBLIOGRAPHIE -

[1] M. DJABALI. Anneaux de fractions d'un J-anneau. Séminaire Dubreil-Pisot (Algèbre et Théorie des nombres) 18^e année, 1964-1965, n° 8 .

[2] M. DJABALI. Demi-groupes nilpotents et radical d'un anneau noethérien ou artinien. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 264, p. 493-495 (13 mars 1967).

[3] A.W. GOLDIE. Semi-prime rings with maximum condition. Proc. London Math. Soc., t. 10, p. 201-220.

[4] L. LESIEUR. Anneaux de fractions. Cours de Math. Approfondies, Orsay, 1964-65.

[5] L. LESIEUR. Anneaux noethériens à gauche complètement primaires à gauche, Séminaire Dubreil-Pisot (Algèbre et Théorie des nombres, 21^e année, 1967-68, n° 1 .

[6] L. LESIEUR et R. CROISOT. Algèbre noethérienne non commutative. Memorial Sc. Math., Fasc. CLIV, Gauthiers-Villars, Paris 1963.

[7] L. SMALL. Orders in artinian rings, J. of Algebra, 4, 1966, p. 13-41.

SEMINAIRE d'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 5 du 2 Décembre 1967

ANNEAU ASSOCIE A UN MODULE SOMME DIRECTE DE SOUS-MODULES INJECTIFS INDECOMPOSABLES

par A. CAILLEAU

1. Définition et propriétés de l'anneau associé à un module.

Dans tout ce qui suit A est un anneau unitaire non nécessairement commutatif et tous les modules considérés sont des A-modules à gauche unitaire.

Soit M un A-module quelconque ; un endomorphisme de M est dit Endormorphisme Essentiel, si son noyau est un sous-module essentiel de M.

PROPOSITION 1.1. - Les endomorphismes essentiels de M constituent un idéal bilatère de l'anneau des endomorphismes de M ; Cet idéal sera noté $J(M)$.

Soient φ et φ' deux endomorphismes essentiels de M et soit ψ un endomorphisme quelconque de M. On a les inclusions :

$$\ker\varphi \cap \ker\varphi' \subseteq \ker(\varphi + \varphi'), \quad \ker\varphi \subseteq \ker\psi\varphi$$

et par suite $\varphi + \varphi'$ et $\psi\varphi$ sont des endomorphismes essentiels de M. Montrons qu'il en est de même de $\varphi\psi$: Soit X un sous module de M vérifiant : $X \cap \ker\varphi\psi = o$. On a alors $\ker\varphi \cap \psi(X) = o$, et par suite $\psi(X) = o$. X étant inclus dans $\ker\psi$, l'est dans $\ker\varphi\psi$ et l'on a donc : $X \cap \ker\varphi\psi = X$ soit $X = o$.

DEFINITION 1.1. - Soit M un A-module et soit $\mathcal{A}$ l'anneau des endomorphismes de M ; on appelle anneau associé à M l'anneau quotient $\mathcal{A}/_{J(M)}$.

Cet anneau sera noté $S(M)$, et l'image d'un endomorphisme φ de M, dans $S(M)$ sera notée $\bar{\varphi}$.

PROPOSITION 1.2. - <u>Soit M un A-module et soit E l'enveloppe injective de M ; l'anneau $S(M)$ associé à M est un sous anneau de l'anneau $S(E)$ associé à E</u> .

Soit φ un endomorphisme quelconque de M ; il existe au moins un endomorphisme de E prolongeant φ , et d'autre part si deux endomorphismes Φ et Φ' de E prolongeant φ , ils diffèrent d'un élément de $J(E)$ puisque ker $(\Phi - \Phi')$ contenant M est essentiel dans E. On peut donc poser pour un endomorphisme φ de M : $f(\varphi) = \Phi$ où Φ est un endomorphisme de E prolongeant φ. f est manifestement un homomorphisme d'anneaux dont le noyau est $J(M)$

THEOREME 1.1. - <u>Si E est un A-module injectif</u> (resp. quasi injectif.

1) <u>$J(E)$ coïncide avec le radical de Jacobson l'anneau des endomorphismes de E</u> .

2) <u>L'anneau $S(E)$ associé à E est un anneau régulier</u> (au sens de Von Neumann). (cf. Utumi 5 , Johnson et Wong 3 , Faith et Utumi 1)

Rappelons que le radical de Jacobson R de l'anneau B des endomorphismes de E, est le plus grand idéal à gauche de B constitué d'éléments φ tels que $(1 - \varphi)$ soit inversible à gauche.

Soit φ appartenant à $J(E)$ on a : $\ker \varphi \cap \ker(1 - \varphi) = o$ et par suite $\ker (1 - \varphi) = o$. Le diagramme :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E \arrow[r, "1 - \varphi"] \arrow[d, "1_E"'] & E \\ & E & \end{tikzcd}$$

où 1_E désigne l'identité sur E, se plonge dans un diagramme commutatif de la forme :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E \arrow[r, "1 - \varphi"] \arrow[d, "1_E"'] & E \arrow[dl, bend left, "\tau"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

et $1 - \varphi$ est donc inversible à gauche. On a donc :

$$J(E) \subseteq R$$

Soit maintenant un élément φ de R ; si X est un sous-module de E vérifiant $X \cap \ker \varphi = 0$, le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\varphi} & E \\ & & {\scriptstyle i}\downarrow & & \\ & & E & & \end{array}$$

où i est l'injection canonique de X dans E , se plonge dans un diagramme commutatif de la forme :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

X est alors inclus dans $\ker(1 - \psi\varphi)$. Mais φ appartenant à R, $1 - \psi\varphi$ est inversible à gauche et l'on a donc $\ker(1 - \psi\varphi) = 0$ d'où $X = 0$. Par suite φ appartient à $J(E)$.

Montrons que $S(E) = \mathcal{B}/_R$ est régulier. Soit φ un élément de B , considérons un complément X de $\ker \varphi$ dans E. On peut trouver (cf. démonstration précédente) un élément ψ de B vérifiant

$$X \subseteq \ker(1 - \psi\varphi)$$

$\ker \varphi(1 - \psi\varphi)$ contenant le sous-module $X \oplus \ker \varphi$ essentiel dans E, est lui-même essentiel dans E , et $\varphi(1 - \psi\varphi)$ appartient donc à $J(E)$. Par suite on a : $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}\,\bar{\psi}\,\bar{\varphi}$

<u>PROPOSITION 1.3.</u> - <u>L'anneau associé à un A-module injectif indécomposable E est un corps, dit corps associé à E</u> .

En effet, si E est un A-module injectif indécomposable, tout endomorphisme de E , non essentiel, est injectif et par suite surjectif.

N.B. On retrouve bien ainsi le corps associé à E tel qu'il a été défini par L. Lesieur dans la première conférence. Cette question est traitée dans l'additif au présent exposé, fait par M.C. Germa.

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON-COMMUTATIVE

-:-:-:-

ANNEXE A LA CONFERENCE N° 5

-:-:-:-

CORPS ASSOCIE A UN MODULE CO-IRREDUCTIBLE M

par Mme Marie-Christine GERMA

-:-:-:-:-

Soit M un module co-irréductible.

Dans la conférence n° 1, on lui a associé le corps $\underline{K(M)} = \mathcal{E}/_{\mathcal{R}}$, où $\mathcal{E}$ est un certain sous-ensemble de $M \times M$ et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence dans $\mathcal{E}$. Dans la conférence n° 5, on lui a associé le corps $\underline{K} = \mathcal{B}/_{\mathcal{R}(\mathcal{B})}$

où $\mathcal{B}$ = End E, E enveloppe injective de M

$\mathcal{R}(\mathcal{B})$ = Radical de Jacobson de $\mathcal{B}$

$\mathcal{R}(\mathcal{B}) = \{\beta \in \mathcal{B},\ \operatorname{Ker} \beta \neq o\}$.

(cf. aussi [1] p. 372.373).

Montrons que K et K(M) sont isomorphes.

Pour définir l'isomorphisme $\varphi : K(M) \longrightarrow K$ nous utiliserons l'homomorphisme $h(\xi,\eta)$ associé à un élément (ξ,η) de $\mathcal{E}$. (conférence n° 1, p. 3).

Soit $(\xi\setminus\eta) \in K(M)$. On choisit un représentant $(\xi,\eta) \in (\xi\setminus\eta)$, puis un élément h_1 de $\mathcal{B}$ prolongeant $h(\xi,\eta)$. On pose alors $\underline{\varphi(\xi\setminus\eta) = \bar{h}_1}$, $\bar{h}_1$ désignant la classe de h_1 dans $\mathcal{B}$ modulo $\mathcal{R}(\mathcal{B})$.

Il faut alors montrer

a) ceci définit bien une application $\varphi : K(M) \longrightarrow K$

b) φ est un homomorphisme d'anneaux

c) φ est bijectif.

a) <u>soit</u> $(\xi \smallsetminus \eta) \in K(M)$.

Prenons deux représentants (ξ , η) et (ξ', η') de $(\xi \smallsetminus \eta)$; puis choisissons un prolongement h_1 de $h = h(\xi,\eta)$ et un prolongement h'_1 de $h' = h(\xi',\eta')$.

<u>Montrons que $\bar{h}_1 = \bar{h}'_1$</u> (le cas où à un représentant (ξ,η) de $(\xi \smallsetminus \eta)$ on associe deux prolongements possibles h_1 et h'_1 de $h(\xi,\eta)$ rentre dans ce cas là).

Or h et h' coïncident sur un élément $a\xi = a'\xi' \neq 0$

donc h_1 et h'_1 aussi ; d'où $\mathrm{Ker}(h_1 - h'_1) \neq 0$ c.q.f.d.

b) <u>avec les notations précédentes</u>.

$$\varphi(\xi \smallsetminus \eta) + \varphi(\xi' \smallsetminus \eta') = \bar{h}_1 + \bar{h}'_1 = \overline{h_1 + h'_1}$$

$$(\xi \smallsetminus \eta) + (\xi' \smallsetminus \eta') = (u\xi \smallsetminus u\eta + u'\eta') \quad \text{où} \quad u\xi = u'\xi' \neq 0$$

et où $\begin{cases} h(u\xi, u\eta + u'\eta') = k + k' \\ k = \text{restriction de } h \text{ à } Au\xi \\ k' = \text{restriction de } h' \text{ à } Au'\xi' \end{cases}$

Soit k_1 (resp. k'_1) un prolongement de k (resp. k') à E ; $k_1 + k'_1$ est alors un prolongement de $k + k'$ à E et on a :

$$\varphi\Big[(\xi \smallsetminus \eta) + (\xi' \smallsetminus \eta')\Big] = \overline{k_1 + k'_1}$$

d'autre part $\overline{k_1 + k'_1} = \overline{h_1 + h'_1}$ car $k_1 + k'_1$ et $h_1 + h'_1$ coïncident sur $u\xi = u'\xi' \neq 0$. Donc φ <u>est un homomorphisme pour l'addition</u>

$$\varphi(\xi \smallsetminus \eta).\varphi(\xi' \smallsetminus \eta') = \bar{h}_1 . \bar{h}'_1 = \overline{h_1 h'_1}$$

(Le produit dans $\mathfrak{B}$ est $h_1 h'_1 = h'_1 \circ h_1$; et on note $\xi h_1 = h_1(\xi)$)

$$(\xi \smallsetminus \eta).(\xi' \smallsetminus \eta') = (u\xi \smallsetminus u'\eta') \quad \text{où} \quad u\eta = u'\xi' \quad \text{et} \quad u\xi \neq 0$$

avec $h(u\xi, u'\eta') = kk'$ où k (resp. k') est la restriction de h (resp. h') à $Au\xi$ (resp. $Au\eta = Au'\xi'$)

d'où $\varphi\left[(\xi \smallsetminus \eta).(\xi' \smallsetminus \eta')\right] = \overline{k_1 k'_1}$

et $\overline{k_1 k'_1} = \overline{h_1 h'_1}$ car $k_1 k'_1$ et $h_1 h'_1$ coïncident sur $u\xi \neq o$,

<u>donc</u> φ <u>est un homomorphisme d'anneaux</u>.

c) φ <u>est injective</u>.

Soit $\bar{h}_1 = \varphi(\xi \smallsetminus \eta)$ et $\bar{h}'_1 = \varphi(\xi' \smallsetminus \eta')$

Supposons $\bar{h}_1 = \bar{h}'_1$ alors $\ker(h_1 - h'_1) \neq o$ donc h_1 et h'_1 coïncident sur $\mu \neq o$.

M étant co-irréductible, soit $z \neq o$, $z \in A\xi \cap A'\xi' \cap A\mu$.
$h_1(z) = h'_1(z)$ car $z \in A\mu$; d'où $h(z) = h'(z)$ et $(\xi \smallsetminus \eta) = (\xi' \smallsetminus \eta')$

φ <u>surjective</u>.

Soit $\bar{h}_1 \in \mathcal{B}/\mathcal{R}(\mathcal{B})$ et $h_1 \in \bar{h}_1$

Deux cas sont à considérer

1) $h_1 \neq o$.

On choisit $\xi \in M$, $\xi h_1 \neq o$.

Alors $(\xi, \xi h_1) \in \mathcal{E}$ car $\xi \neq o$ et $\operatorname{Ann} \xi \subseteq \operatorname{Ann} \xi h_1$.

De plus $\varphi(\xi \smallsetminus \xi h_1) = \bar{h}_1$

2) $h_1 = o$.

Soit alors $\xi \in M$; $\xi \neq o$: $\varphi(\xi \smallsetminus o) = \bar{h}_1$ c.q.f.d.

-:-:-:-:-:-

[1] L. LESIEUR - Coeur d'un module. Journal de Math. Pures et Appli. t. 42, 1963 - p. 367.407.

SEMINAIRE d'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 6 du 9 Décembre 1967 (suite de la Conférence n° 5)

ANNEAU ASSOCIE A UN MODULE SOMME DIRECTE DE SOUS-MODULES INJECTIFS INDECOMPOSABLES

par A. CAILLEAU

2. Anneau associé à un module injectif riche en co-irréductibles . (resp . à un module somme directe de sous-modules injectifs indécomposables)

Modules riches en co-irréductibles

Nous reprenons ici des définitions et propriétés énoncées et démontrées par J. FORT [2] .

On appelle module riche en co-irréductibles, un module extension essentielle d'une somme directe de sous-modules co-irréductibles . Il résulte immédiatement de cette définition qu'un module injectif est riche en co-irréductibles si, et seulement si, il est extension essentielle d'une somme directe de sous-modules injectifs indécomposables .

Nous utiliserons pour les modules riches en co-irréductibles, la notion de dimension introduite par J. FORT :

Théorème 2.1 : - Soient M un A-module et $S = \bigoplus_{i \in I} C_i$, $T = \bigoplus_{j \in J} K_j$, deux sommes directes maximales de sous-modules co-irréductibles de M (i. e . tout sous-module co-irréductible de M rencontre S et T selon des sous-modules non nuls) ; désignons par $E(C_i)$ et $E(K_j)$ des enveloppes injectives des C_i et des K_j . Alors, il existe une bijection σ de I sur J, et un isomorphisme φ de $\bigoplus_{i \in I} E(C_i)$ sur $\bigoplus_{j \in J} E(K_j)$, tels que l'on ait pour tout indice i de I :

$$\varphi\,(E(C_i)) = E(K_{\sigma(i)}) \quad .$$

Le cardinal de I, ne dépendant que de M, est dit dimension de M et noté dim M.

N.-B.- On peut de même parler de π -dimension de M, pour un type π de sous-modules injectifs indécomposables de l'enveloppe injective de M : on appelle ainsi le cardinal d'une famille $(C_i,\ i \in I)$ de sous-modules co-irréductibles de M, telle que :

- pour tout i appartenant à I , $E(C_i)$ soit de type π ;
- la somme $\sum_{i \in I} C_i$ soit directe ;

- tout sous-module co-irréductible C de M dont l'enveloppe injective est de type π, coupe $\bigoplus_{i \in I} C_i$ selon un sous-module non nul .

Anneau associé à un module injectif riche en co-irréductibles .

Le cas particulier où E est un A-module injectif de dimension finie a été étudié par L. Lesieur et R. Croisot [4] :

Théorème 2.2 - Soit E un A-module injectif de dimension finie : $E = \bigoplus_{i=1}^{m} E_i$

Désignons par $(\pi_1, \dots\dots\dots, \pi_p)$ l'ensemble des types de sous-modules injectifs indécomposables de E, et pour tout $m = 1, \dots\dots, p$, par k_m le nombre de sous-modules E_i de type π_m . Alors, l'anneau $S(E)$ associé à E, est un anneau semi-simple, produit de p anneaux simples, chacun d'eux étant isomorphe à l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension k_m sur le corps k_m associé au type π_m .

Soit maintenant E un A-module injectif riche en co-irréductibles, de dimension quelconque, nous savons qu'il est extension essentielle d'une somme directe de sous-modules injectifs indécomposables :

$$\bigoplus_{i \in I} E_i$$

Nous allons d'abord montrer que l'anneau $S(E)$ associé à E est isomorphe à l'anneau $S(\bigoplus_{i \in I} E_i)$ associé à $\bigoplus_{i \in I} E_i$, c'est-à-dire la propriété suivante :

Théorème 2.3. - Soit M une somme directe de A-modules injectifs indécomposables ; l'anneau associé à M est isomorphe à l'anneau associé à l'enveloppe injective E de M .

Nous savons que $S(M)$ se plonge dans $S(E)$ (cf . Proposition 1.2) .
Montrons que si M est somme directe de sous-modules injectifs indécomposables :

$$M = \bigoplus_{i \in I} E_i$$

l'homomorphisme f de la proposition 1.2 est surjectif .

Soit Φ un endomorphisme de E, désignons par I_1 le sous-ensemble de I constitué des indices i tels que E_i ne soit pas inclus dans $\ker \Phi$. Si i appartient à I_1, il existe un élément x_i de E_i tel que $\Phi(x_i)$ ne soit pas nul. M étant essentiel dans E, on peut trouver un élément a_i de A tel que $a_i\,\Phi(x_i)$ ne soit pas nul et appartienne à M et, par suite, à une somme directe finie :

$$\bigoplus_{\ell=1}^{n} E_{j_\ell}$$

Cette somme directe finie de modules injectifs étant elle-même injective, il existe un homomorphisme φ_i de E_i dans $\bigoplus\limits_{\ell=1}^{n} E_{j_\ell}$ dont la restriction à $Aa_i\,x_i$ coïncide avec Φ.

Soit φ l'endomorphisme de M :

$$\varphi = \bigoplus_{i\in I} \varphi_i ,$$

où les φ_i sont définis comme précédemment pour les indices i de I_1, et où les φ_i sont nuls pour les indices i n'appartenant pas à I_1. Si ψ est un endomorphisme de E prolongeant φ, on a pour tout indice i de I :

$$\ker (\psi - \Phi) \cap E_i \neq 0 ,$$

en effet, ou i appartient à I_1 et alors $\ker (\varphi - \Phi) \cap E_i$ contient $a_i\,x_i$, ou i n'appartient pas à I_1 et alors

$$\ker (\varphi - \Phi) \cap E_i = E_i .$$

Il en résulte que ψ et Φ diffèrent d'un élément de $J(E)$, et l'on a par suite :

$$f(\varphi) = \overline{\Phi} .$$

Il nous suffit dès lors de rechercher la structure de

$$S\Big(\bigoplus_{i\in I} E_i\Big) .$$

LEMME 2.1. - <u>L'anneau associé à une somme directe de A-modules injectifs indécomposables</u>

$$M = \bigoplus_{i\in I} E_i$$

<u>est isomorphe au produit des anneaux associés aux composantes isotypiques de $\bigoplus\limits_{i\in I} E_i$.</u>

Soit $(\pi_\lambda\ ,\ \lambda \in \Lambda)$ l'ensemble des types de sous-modules injectifs indécomposables de $\bigoplus_{i\in I} E_i$. Pour tout λ appartenant à Λ désignons par I_λ l'ensemble des indices i de I tels que E_i soit de type π_λ et posons :

$$M_\lambda = \bigoplus_{i\in I_\lambda} E_i\ ,\qquad \overline{M_\lambda} = \bigoplus_{i\notin I_\lambda} E_i\ ,$$

appelons enfin η_λ l'injection canonique de M_λ dans M et ξ^λ la projection de M sur M^λ parallèlement à $\overline{M_\lambda}$. Si à un endomorphisme α de M nous faisons correspondre l'élément

$$(\overline{\xi^\lambda\ \alpha\eta^\lambda})_{\lambda\in\Lambda} \qquad \text{de} \qquad \prod_{\lambda\in\Lambda} S(M_\lambda)$$

($\overline{\xi^\lambda\ \alpha\eta^\lambda}$ étant la classe de $\xi^\lambda\ \alpha\eta^\lambda$ modulo $J(M_\lambda)$), nous obtenons une application θ de l'anneau $\mathfrak{A}$ des endomorphismes de M dans $\prod_{\lambda\in\Lambda} S(M_\lambda)$.

1° θ <u>est un homomorphisme d'anneaux</u> : il est évident que pour tout couple $(\alpha_1\ ,\ \alpha_2)$ d'éléments de $\mathfrak{A}$, on a :

$$\theta(\alpha_1 + \alpha_2) = \theta(\alpha_1) + \theta(\alpha_2)\ .$$

Pour montrer l'égalité :

$$\theta(\alpha_1 \cdot \alpha_2) = \theta(\alpha_1) . \theta(\alpha_2)\ ,$$

on est amené à montrer que l'on a, pour tout λ appartenant à Λ :

$$\overline{\xi^\lambda\ \alpha_1\ \xi^\lambda\ \alpha_2\ \eta^\lambda} = \overline{\xi^\lambda\ \alpha_1\ \alpha_2\ \eta^\lambda}\ ,$$

soit

$$\overline{\xi^\lambda\ \alpha_1(\xi^\lambda\ \alpha_2 - \alpha_2)\eta^\lambda} = 0\ .$$

Or l'homomorphisme $(\xi^\lambda\ \alpha_2 - \alpha_2)$ envoie M_λ dans $\overline{M_\lambda}$. Si

$$\ker\ (\xi^\lambda\ \alpha_2 - \alpha_2) \cap M_\lambda$$

n'était pas essentiel dans M_λ , il existerait un indice i de I_λ vérifiant

$$\ker\ (\xi^\lambda\ \alpha_2 - \alpha_2) \cap E_i = 0\ ,$$

et M_λ et $\overline{M_\lambda}$ admettraient alors des sous-modules injectifs indécomposables isomorphes, ce qui est impossible (en vertu, par exemple de la proposition 2 de [2] :

Soient un A-module M et $\bigoplus_{i\in I} X_i$ une somme directe de sous-modules de M, si Y est un sous-module de M vérifiant

$$Y \cap (\bigoplus_{i\in I} X_i) \neq 0 ,$$

il existe un sous-module non nul de l'un des X_i isomorphe à un sous-module de Y). $\ker (\xi^\lambda \alpha_2 - \alpha_2)\eta^\lambda$ est donc essentiel dans M^λ, il en est évidemment de même de $\ker \xi^\lambda \alpha_1(\xi^\lambda \alpha_2 - \alpha_2)\eta^\lambda$, par suite on a bien

$$\overline{\xi^\lambda \alpha_1(\xi^\lambda \alpha_2 - \alpha_2)\eta^\lambda} = 0 ,$$

2° θ <u>est surjectif</u> : si $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est un élément de $\prod_{\lambda\in\Lambda} S(M_\lambda)$, l'endomorphisme α de M :

$$\alpha = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \eta^\lambda \alpha_\lambda , \qquad \text{où pour tout } \lambda , \ \overline{\alpha_\lambda} = a_\lambda ,$$

est tel que $\theta(\alpha)$ soit égal à $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

3° $\ker \theta = J(M)$: on vérifie immédiatement l'inclusion : $J(M) \subseteq \ker \theta$.

Supposons que l'on puisse trouver un élément α de $\ker \theta$ n'appartenant pas à $J(M)$. Pour un tel élément on peut trouver un indice i de I vérifiant :

$$\ker \alpha \cap E_i = 0 .$$

Si λ est l'élément de Λ tel que i appartienne à I_λ, on a, $\theta(\alpha)$ étant nul,

$$\ker \xi^\lambda \alpha \cap E_i \neq 0 .$$

$\alpha(E_i)$ est donc un sous-module injectif indécomposable de M de type π_λ ($\ker \alpha \cap E_i = 0$), rencontrant $\overline{M_\lambda}$ ($\ker \xi^\lambda \alpha \cap E_i \neq 0$) ceci est impossible d'après la proposition 2 de [2], rappelée précédemment.

Il nous reste à étudier l'anneau associé à chaque composante isotypique de $\bigoplus_{i\in I} E_i$, c'est-à-dire à une somme directe de modules injectifs indécomposables tous isomorphes :

THÉORÈME 2.4. - <u>L'anneau associé à une somme directe de modules injectifs indécomposables tous isomorphes</u> :

$$M = \bigoplus_{i \in I} E_i ,$$

<u>est un anneau régulier, self-injectif à droite, isomorphe à l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension</u> ;

$$\dim M = \operatorname{card} I ,$$

<u>sur le corps associé au type des</u> E_i .

Remarquons tout d'abord que les propriétés pour $S(M)$ d'être régulier et self-injectif à droite, résulteront de l'isomorphisme entre $S(M)$ et l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel qui possède lui-même ces propriétés (cf. théorème 1.1).

Soit F un A-module injectif indécomposable isomorphe aux A-modules E_i et soit K le corps associé à F ; désignons par V l'espace vectoriel à droite sur K engendré par une famille quelconque $(e_i)_{i \in I}$ indexée par I :

$$V = \bigoplus_{i \in I} e_i K$$

Pour tout indice i de I, nous choisissons un isomorphisme φ_i de F sur E_i, et nous désignons par ξ_i la projection de M sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} E_j$.

Soit α un endomorphisme de M, et i un indice de I, les indices j de I pour lesquels $\overline{\varphi_j^{-1} \xi_j \alpha \varphi_i}$ n'est pas nul, sont en nombre fini : en effet, fixons-nous un élément non nul x de E_i ; si $\overline{\varphi_j^{-1} \xi_j \alpha \varphi_i}$ n'est pas nul, on a

$$\ker \xi_j \alpha \cap E_i = 0 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \xi_j \alpha(x) \neq 0 ,$$

or, l'ensemble des indices j pour lesquels $\xi_j \alpha(x)$ n'est pas nul est fini.

On peut donc considérer l'application η de l'anneau $\mathfrak{A}$ et des endomorphismes de M dans l'anneau $\mathfrak{L}$ des endomorphismes de V définie par :

$$\eta(\alpha).(e_i) = \sum_{j \in I} e_j . \overline{\varphi_j^{-1} \xi_j \alpha \varphi_i} .$$

1° η <u>est un homomorphisme d'anneaux</u> : on a pour tout couple (α_1 , α_2) d'éléments de $\mathfrak{A}$:

$$\eta(\alpha_1 + \alpha_2) = \eta(\alpha_1) + \eta(\alpha_2)$$

D'autre part,

$$\eta(\alpha_2).\eta(\alpha_1)(e_i) = \sum_{k\in I} e_k \sum_{p\in I} \overline{\varphi_k^{-1}\ \xi_k\ \alpha_2\ \xi_p\ \alpha_1\ \varphi_i}$$

$$\eta(\alpha_2.\alpha_1)(e_i) = \sum_{k\in I} e_k\ \overline{\varphi_k^{-1}\ \xi_k\ \alpha_2\ \alpha_1\ \varphi_i}\ .$$

Désignons par I_1 l'ensemble des indices p de I vérifiant :

$$\ker \xi_p\ \alpha_1 \cap E_i = 0\ .$$

Si x est un élément de E_i vérifiant $\alpha_1(x) \neq 0$, on peut trouver un élément a de A tel que $a\alpha_1(x)$ ne soit pas nul et soit égal à $\sum_{p\in I_1} \xi_p\ \alpha_1(ax)$, ax est alors un élément non nul de $\ker (\alpha_1 - \sum_{p\in I_1} \xi_p\ \alpha_1)$. On a donc,

$$\ker (\alpha_1 - \sum_{p\in I_1} \xi_p\ \alpha_1) \cap E_i \neq 0$$

et par suite :

$$\sum_{p\in I_1} \overline{\varphi_k^{-1}\ \xi_k\ \alpha_2\ \xi_p\ \alpha_1\ \varphi_i} = \overline{\varphi_k^{-1}\ \xi_k\ \alpha_2\ \alpha_1\ \varphi_i}$$

ce qui donne, compte tenu de la définition de I_1 :

$$\sum_{p\in I} \overline{\varphi_k^{-1}\ \xi_k\ \alpha_2\ \xi_p\ \alpha_1\ \varphi_i} = \overline{\varphi_k^{-1}\ \xi_k\ \alpha_2\ \alpha_1\ \varphi_i}\ .$$

Remarque. - La démonstration précédente suppose que I_1 n'est pas vide;; il est trivial que la conclusion subsiste dans le cas où I_1 est vide.

2° η est surjectif : soit ρ un élément de $\mathcal{E}$. On peut poser:

$$\rho(e_i) = \sum_{j\in I} e_j\ \overline{\rho_i^j}\ ,$$

Où les ρ_i^j sont nuls sauf pour un nombre fini d'indices j.

L'endomorphisme: $\alpha = \bigoplus_{i\in I} \alpha_i$,

avec pour tout i de I :

$$\alpha_i = \Big(\sum_{k\in I} \varphi_k \, \rho_i^k\Big)\varphi_i^{-1} ,$$

est tel que son image par α soit ρ .

3° $\ker \eta = J(M)$: on montre immédiatement qu'un élément α de $\mathfrak{A}$ est annulé par η si, et seulement si, l'on a pour tout couple d'indices (i , j) :

$$\ker \xi_j \, \alpha \cap E_i \neq 0 .$$

Ceci est évidemment vérifié par les éléments de $J(M)$. D'autre part, si α n'appartient pas à $J(M)$, il existe un indice i de I tel que l'on ait

$$\ker \alpha \cap E_i = 0 ;$$

pour un élément non nul x de E_i , on peut écrire :

$$\alpha(x) = \xi_{j_1} \alpha(x) + \dots + \xi_{j_n} \alpha(x) ,$$

de l'hypothèse $\ker \alpha \cap E_i = 0$, on déduit qu'il existe un indice j parmi $j_1 , \dots , j_n$, tel que $\ker \xi_{j_p} \alpha \cap E_i$ ne soit pas essentiel dans E_i , c'est-à-dire tel que $\ker \xi_{j_p} \alpha \cap E_i$ ne soit pas nul. Ceci prouve que α n'est pas annulé par η .

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer un théorème de structure, dont le théorème 2.2 de [4] apparaît comme cas particulier.

THÉORÈME 2.5. - Soit E un A-module riche en co-irréductibles (resp. somme directe de A-modules injectifs indécomposables) et soit $(\pi_\lambda , \lambda \in \Lambda)$ l'ensemble des types de sous-modules injectifs indécomposables de E ; l'anneau $S(E)$ associé à E est un anneau régulier, self-injectif à droite, isomorphe à l'anneau produit $\prod_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{L}_\lambda$, où pour tout λ , $\mathfrak{L}_\lambda$ est l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel sur le corps associé au type π_λ , dont la dimension est égale à la π_λ-dimension de E .

$S(E)$ est régulier et self-injectif à droite en tant que produit d'anneaux possédant ces propriétés. Pour montrer qu'un anneau

$$L = \prod_{\lambda\in\Lambda} L_\lambda$$

produit d'anneaux self-injectifs à droite (resp. à gauche) est lui-même self-injectif à droite (resp. à gauche), on peut montrer que pour tout λ , L_λ est un L-module à droite (resp. à gauche) injectif ; L , produit de L-modules injectifs, est alors un L-module injectif.

BIBLIOGRAPHIE

[1] FAITH (Carl) and UTUMI (Yuzo). - Quasi-injective modules and their endomorphism rings, Arch. der Math., t. 15, 1964, p. 166-174.

[2] FORT (Jacques). - Sommes directes de sous-modules co-irréductibles d'un module, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, t. 20, 1966/67, 21 p. (multigr.).

[3] JOHNSON (R. E.) and WONG (E. T.). - Self-injective rings, Canad. math. Bull., t. 2, 1959, p. 167-173.

[4] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Coeur d'un module, J. Math. pures et appl., Série 9, t. 42, 1963, p. 367-407.

[5] UTUMI (Yuzo). - On a theorem on modular lattices, Proc. Japan Acad., t. 35, 1959, p. 16-21.

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

-:-:-:-:-

Conférence n° 7 du 8 janvier 1968

par Michèle FERRANDON

-:-:-:-:-:-

Sur une application de fermeture dans les modules.

Dans toute la suite R désignera un anneau unitaire. Les R-modules considérés seront des modules unitaires. Lorsqu'on ne précisera pas la nature d'une application, il s'agira d'un morphisme de R-module.

I. Définition d'une application de fermeture sur les sous-modules d'un module.

Proposition 1.

A, B, C étant des modules à gauche sur R et $A \subseteq B$ il y a équivalence des propriétés suivantes :

1) Pour tout sous-module E de B/A, $\mathrm{Hom}_R(E,C) = o$

2) Si D est un sous-module de B tel que $A \subseteq D \subseteq B$ et φ un morphisme de D dans C tel que $\varphi(A) = o$ alors $\varphi = o$

3) $\forall b \in B$, $\forall c \in C$, $c \neq o$, $\exists r \in R$, $rb \in A$, $rc \neq o$.

Démonstration :

1) $\Longrightarrow$ 2) Soient $A \subseteq D \subseteq B$ et $\varphi : D \longrightarrow C$ $\varphi(A) = o$.

On peut factoriser φ suivant

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr] & & C \\ & D/A \arrow[ur, "\bar{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

$E = D/A \quad \bar{\varphi} = o$

$\mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Im}\,\bar{\varphi} = o \qquad \varphi = o$.

2) $\Longrightarrow$ 3) Si la propriété 3 n'est pas vérifiée il existe $b \in B$ et $c \in C$ $c \neq o$ tels que si $r \in R$ $rb \in A$ alors $rc = o$.

Posons $I = A^{\cdot}.b = \{r \in R \mid rb \in A\}$ $\quad Ic = o$.

L'application $a + rb \in A + Rb \longrightarrow rc \in Rc$ définit un morphisme de module de $A + Rb$ dans C ; $\varphi(A) = o$ donc $\varphi = o$, or $\varphi(b) = c \neq o$ d'où une contradiction.

3) $\Longrightarrow$ 1) $E \subseteq B/A \qquad \varphi : E \longrightarrow C$.

Si φ est $\neq o$ il existe $\bar{b} \in E$ tel que $\varphi(\bar{b}) = c \neq o$ or il existe $r \in R$ tel que $rb \in A$ $\quad rc \neq o \quad r\bar{b} = o \quad rc = r\varphi(\bar{b}) = \varphi(r\bar{b}) = o$ d'où une contradiction.

Les propriétés précédentes seront notées $A \leqslant B(C)$.

<u>Proposition 2.</u> (<u>transitivité</u>)

<u>Soient A, B, C, P des R-modules, $A \subseteq B \subseteq C$</u> .

<u>Les propriétés suivantes sont équivalentes.</u>

1) <u>$A \leqslant B(P)$ et $B \leqslant C(P)$</u>

2) <u>$A \leqslant C(P)$</u> .

<u>Démonstration</u>.

1) $\Longrightarrow$ 2) $\quad A \subseteq D \subseteq C \qquad \varphi : D \longrightarrow P \qquad \varphi(A) = o \qquad A \leqslant B(P)$ et

$A \subseteq D \cap B \subseteq B \Longrightarrow \varphi(D \cap B) = o \qquad B \subseteq B + D \subseteq C$.

L'application $\psi : b + d \in B + D \longrightarrow \varphi(d) \in P$ est un morphisme de modules de $B + D$ dans P telle que $\psi(B) = o \qquad B \leqslant C(P) \Longrightarrow \psi = o$, soit $\varphi = o$.

La réciproque est immédiate.

Soient M et P deux R-modules.

<u>Remarque.</u> Soient A un sous-module de M , et $\mathcal{F}$ la famille des sous-modules B de M vérifiant $A \leqslant B(P)$.

$\mathcal{F}$ est non vide car $A \leqslant A(P)$ et possède un élément maximal A' . En fait nous allons montrer que cet élément est maximum.

D'autre part pour tout $x \in A'$ par transitivité

$A \subseteq A + Rx \subseteq A' \Longrightarrow A \leqslant (A + Rx)\ (P)$.

Soit A un sous-module de M , <u>définissons</u> :

$A_1 = \{x \in M \mid A \leqslant (A + Rx)\ (P)\}$

$A_2 = \{x \in M \mid A^{\cdot}.\, x \leqslant R(P)\}$.

Proposition 3.

$A_1 = A_2$ est un sous-module de M.

Démonstration :

- Soient $x \in A_1$, $A \cdot\!. x \subseteq I \subseteq R$ (I idéal à gauche de R) et $\psi : I \longrightarrow P$ $\psi(A \cdot\!. x) = o$.

Posons $D = A + Ix$ $A \subseteq D \subseteq A + Rx$.

L'application $\varphi : a + ix \in A + Ix \longrightarrow \psi(i) \in P$ définit un morphisme de D dans P et $\varphi(A) = o$ $x \in A_1$ donc $\varphi = o$

$\mathrm{Im}\, \varphi = \mathrm{Im}\, \psi = o$ donc $x \in A_2$ et $A_1 \subseteq A_2$

- Soient $x \in A_2$, $A \subseteq D \subseteq A + Rx$ et $\varphi : D \longrightarrow P$ $\varphi(A) = o$.

Posons $I = D \cdot\!. x$ $A \cdot\!. x \subseteq I \subseteq R$

L'application $\psi : i \in I \longrightarrow \varphi(ix) \in P$ définit un morphisme de I dans P et $\psi(A \cdot\!. x) = o$; $x \in A_2$ donc $\psi = o$ et $\varphi(Ix) = o$; $D = A + Ix$ $\varphi(D) = \varphi(A + Ix) = o$ donc $x \in A_1$ et $A_2 \subseteq A_1$.

- Soient $x \in A_1$ $r \in R$; $A \subseteq A + Rrx \subseteq A + Rx$ par transitivité $A \leqslant (A + Rrx)\ (P)$ et $rx \in A_1$.

- Soient $x, y \in A_1$, $A \subseteq D \subseteq A + R(x + y)$ et $\varphi : D \longrightarrow P$ $\varphi(A) = o$.

Posons $I = D \cdot\!. (x + y)$ $J = D \cdot\!. x$ $K = D \cdot\!. y$ $D = A + I(x + y)$ $I \supseteq J \cap K$.

$A \subseteq A + Jx \subseteq A + Rx$

La restriction de φ à $A + Jx$ est nulle sur A et $x \in A_1$ donc $\varphi(Jx) = o$ et de même $\varphi(Ky) = o$; $A \subseteq A + Ix \subseteq A + Rx$.

L'application $\psi : a + ix \in A + Ix \longrightarrow \varphi(i(x + y)) \in P$ définit un morphisme de $A + Ix$ dans P $\psi(A) = o$ et $x \in A_1$ $\Longrightarrow \psi = o$ donc $\varphi = o$ et $x + y \in A_1$

Proposition 4.

A_1 est maximum dans la famille $\mathcal{F}$.

On vérifie facilement que $A \leqslant A_1 (P)$ et que si $A \leqslant B(P)$ alors $B \subseteq A_1$.

<u>Théorème 1</u> .

<u>A étant un sous-module de M l'application $A \longrightarrow A_1$ est une application de fermeture dans l'ensemble des sous-modules de M . On l'appellera fermeture associée à P .</u>

- $A \subseteq A_1$.
- Soient $A \subseteq B$ et $x \in A_1$.

$A \cdot. x \subseteq B \cdot. x \subseteq R$ $\quad x \in A_2$ donc $A \cdot. x \leqslant R(P)$ et par transitivité $B \cdot. x \leqslant R(P)$, $x \in B_2$.

- $A \leqslant A_1(P)$ $\quad A_1 \leqslant (A_1)_1 (P) \Longrightarrow A \leqslant (A_1)_1 (P)$ et donc

$(A_1)_1 \subseteq A_1 \subseteq (A_1)_1$ $\qquad (A_1)_1 = A_1$.

<u>Définissons $A_3 = \{x \in M \mid o \cdot._P (A \cdot. x) = o\}$</u> .

I étant un idéal à gauche de R $\quad o \cdot._P I = \{y \in P \mid I y = o\}$.

<u>Remarque</u> :

$A_1 \subseteq A_3$.

Soient $x \in A_1$ $\quad I = A \cdot. x$, $\quad p \in P$ $\quad I p = o$.

$\varphi : a + rx \in A + Rx \longrightarrow rp \in P$ est un morphisme de $A + Rx$ dans P , $\varphi(A) = o$ $\quad x \in A_1$ $\quad \varphi = o$ $\quad \varphi(x) = p = o$ donc $x \in A_3$.

<u>La réciproque est vraie dans deux cas particuliers</u> :

1) <u>Si R est commutatif</u> :

Soient $x \in A_3$, $A \subseteq D \subseteq A + Rx$, $\varphi : D \longrightarrow P$ $\quad \varphi(A) = o$.

Soient $r \in D \cdot. x$, $y = \varphi(rx)$ et $s \in A \cdot. x$

$sy = \varphi(srx) = \varphi(rsx) = r\varphi(sx) = o$.

$(A \cdot. x) y = o \Longrightarrow y = o$ et $\varphi = o$.

2) <u>Si P est injectif</u> :

Soient $x \in A_3$, $A \subseteq D \subseteq A + Rx$ $\quad \varphi : D \longrightarrow P$ $\quad \varphi(A) = o$.

P étant injectif il existe $\psi : A + Rx \longrightarrow P$ prolongeant φ :

$$\begin{tikzcd} o \arrow[r] & D \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & A + Rx \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ & P & \end{tikzcd}$$

$y = \psi(x) \in o \cdot\cdot_P (A \quad x)$ donc $y = o$ $\quad \psi = o = \varphi$; $x \in A_1$.

II. Propriété de la fermeture associée à un module injectif.

M, P et Q étant des R-modules et A un sous-module de M on note A_P la fermeture de A associée à P et A_Q la fermeture de A associée à Q .

Proposition 1.

Si i est une injection de P dans Q alors $A_Q \subseteq A_P$.

Soient $A \subseteq D \subseteq A_Q$, $\varphi : D \to P$ $\quad \varphi(A) = o$

$i \circ \varphi : D \to Q$ $\quad i \circ \varphi(A) = o$ donc $i \circ \varphi = o$ et $\varphi = o$ donc $A \leqslant A_Q(P)$ et $A_Q \subseteq A_P$.

Proposition 2.

Si Q est extension essentielle de P alors $A_P = A_Q$.

On sait déjà que $A_Q \subseteq A_P$.

Soient $b \in A_P$ et $q \in Q$ $\quad q \neq o$.

Q est extension essentielle de P :

$\exists s \in R$ $\quad sq \in P$ $\quad sq \neq o$ et $sb \in A_P$.

D'après I. 1 $\quad \exists r \in R$ $\quad rsb \in A$ $\quad rsq \neq o$ et d'après I. 1 on a $A \leqslant A_P(Q)$ et $A_P \subseteq A_Q$.

Pour étudier la fermeture sur un module M associée à P on peut donc remplacer P par son enveloppe injective.

Par la suite on étudie la fermeture associée à un module P injectif.

Posons $H = \mathrm{Hom}_R(M,P)$.

Proposition 3.

Les sous-modules fermés de M sont les annulateurs des sous-ensembles de H. Plus précisément A étant un sous-module de M $\quad A_P = o \cdot\cdot_M (o \cdot\cdot_H A)$.

On définit $o \cdot_H A = \{\varphi \in H \mid \varphi(A) = o\}$ et si $S \subseteq H$

$o \cdot_M S = \bigcap_{\varphi \in S} \ker \varphi$

- Soit $\varphi \in o \cdot_H A$ $\cdot$ $\varphi(A) = o$ donc $\varphi(A_p) = o$ et $A_p \subseteq o \cdot_M (o \cdot_H A)$.
- Soient $x \in o \cdot_M (o \cdot_H A)$, $A \subseteq D \subseteq A + Rx$ $\varphi : D \longrightarrow P$ $\varphi(A) = o$.

Soit $\psi \in H$ prolongeant φ $\psi(A) = o$ $\psi \in o \cdot_H A$ donc $\psi(x) = o$ et $\varphi = o$.

Par la suite on notera $A_p = \bar{A}$.

<u>Proposition 4.</u>

<u>A et B étant des sous-modules de M $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$</u>.

$$\bar{A} \cap \bar{B} = (o \cdot_M (o \cdot_H A)) \cap (o \cdot_M (o \cdot_H B))$$
$$= o \cdot_M ((o \cdot_H A) + (o \cdot_H B))$$

et P étant injectif $(o \cdot_H A) + (o \cdot_H B) = o \cdot_H A \cap B$ donc $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cap B}$.

<u>Remarque</u> : <u>cette propriété ne se conserve pas par intersection infinie.</u>

<u>Exemple</u> : $R = \mathbb{Z} = M$ $P = \mathbb{Q}$ $A \subseteq M$ $A \neq o$ $\bar{A} = \mathbb{Z}$; $\bar{o} = o$.

$$\bigcap_{p \in \mathbb{Z} - \{o\}} \overline{\mathbb{Z}p} = \mathbb{Z} \qquad \overline{\bigcap_{p \in \mathbb{Z} - \{o\}} \mathbb{Z}p} = \bar{o} = o$$

<u>Proposition 5.</u>

<u>L'ensemble des fermés forme un treillis complet modulaire</u>.

En posant $\bigwedge_{i \in I} Ai = \bigcap_{i \in I} Ai$ et $\bigvee_{i \in I} Ai = \overline{\sum_{i \in I} Ai}$ on obtient un treillis complet.

Il est modulaire si $A \subseteq C \Longrightarrow \overline{A + B \cap C} = (\overline{A+B}) \cap C$

$$\overline{A+B} \cap C = [o \cdot_M (o \cdot_H A+B)] \cap (o \cdot_M (o \cdot C))$$
$$= o \cdot_M [o \cdot_H (A+B) + o \cdot_H C] = o \cdot_M (o \cdot_H (A+B) \cap C)$$
$$= o \cdot_M (o \cdot A + B \cap C) = \overline{A + B \cap C}$$

<u>Remarque</u> : Ce treillis n'est en général pas distributif.

Exemple : il existe P tel que pour tout sous-module A de M $A_p = A$.

$A_P = A \iff \forall x \notin A \quad \exists \varphi \, , \; \varphi : A + Rx_{/A} \longrightarrow P \, , \; \varphi \neq o$ il suffit de prendre $P = \bigoplus M_{/A}$ pour tous les sous-modules A de M et pour φ la restriction à $A + Rx$ de l'injection canonique de $M_{/A}$ dans P .

On munit l'ensemble des fermetures sur un module de la relation d'ordre suivante :

$F_1 \leqslant F_2 \iff$ pour tout sous-module A de M $F_1(A) \subseteq F_2(A)$.

<u>Propriété</u>.

<u>L'ensemble des fermetures sur M associées aux divers modules P forme un treillis complet</u>.

Soit $(Pi)_{i \in I}$ une famille de modules, Ai la fermeture de A associée à Pi .

$P = \bigoplus_{i \in I} Pi$ $\quad \bar{A}$ = fermeture de A associée à P .

On montre facilement que $\bar{A} = \bigcap_{i \in I} Ai$ et qu'on a un treillis complet.

III. <u>Etude de la fermeture associée à P injectif sur des modules M et N</u> .

M , N , étant deux R-modules, A un sous-module de M , B un sous-module de N on notera $\bar{A}$ la fermeture de A dans M associée à P et $\hat{B}$ la fermeture de B dans N associée à P .

<u>Propriété 1.</u>

<u>Soient f un morphisme de M dans N et A un sous-module de M . Alors $f(\bar{A}) \subseteq \widehat{f(A)}$</u> .

<u>Corollaire</u>.

<u>$M = N = R$. La fermeture d'un idéal bilatère A de R est un idéal bilatère</u>.

Soit $x \in R$.

$\bar{A}x \subseteq \overline{Ax} \subseteq \bar{A}$.

<u>Propriété : 2.</u>

<u>Si f est un isomorphisme de M dans N et A un sous-module de M $f(\bar{A}) = \widehat{f(A)}$</u> .

Propriété 3.

Si N est un sous-module de M et A un sous-module de N $\hat{A} = \bar{A} \cap N$.

En appliquant III. 1 à l'injective de N dans M on a $\hat{A} \subseteq \bar{A}$.

Reciproquement : Soit $\varphi : N \longrightarrow P$ $\varphi(A) = o$ et soit $\psi : M \longrightarrow P$ un prolongement de φ ; $\psi(A) = o \implies \psi(\bar{A}) = o \implies \varphi(\bar{A} \cap N) = o$ donc $\bar{A} \cap N \subseteq \hat{A}$.

Remarques.

1. Si A est un sous-module de M on a $\widehat{A \cap N} = \bar{A} \cap N$.

2. Si $A \subseteq N \subseteq M$ et si N est fermé dans M alors A fermé dans N équivaut à A fermé dans M.

Définition.

Si N est un sous-module de M on dit que N est <u>dense</u> dans M si $\bar{N} = M$.

On note $L_P(M)$ = treillis des fermés de M dans la fermeture associée à P.

Proposition 4.

Si N est dense dans M, $L_P(N)$ est isomorphe à $L_P(M)$.

Il est facile de voir que les applications :

$A \in L_P(M) \longrightarrow A \cap N \in L_P(N)$

$B \in L_P(N) \longrightarrow \bar{B} \in L_P(M)$

sont réciproques l'une de l'autre et sont des isomorphismes de treillis.

Proposition 5.

Soit F un sous-module de M.

$L_P(M/_F)$ est isomorphe au treillis des fermés de M contenant F.

Soit $\psi : M \longrightarrow M/_F = N$ la surjection canonique.

On sait qu'il y a bijection entre les sous-modules de M contenant F et les sous-modules de $M/_F$. Il reste à voir que c'est une bijection entre les sous-modules fermés.

- supposons A fermé et soit $\psi(x) \in o_{M/_F}\,(o \cdot_K A/_F)$ $K = \mathrm{Hom}_R(M/_F, P)$.

Soit $\varphi : M \longrightarrow P$ $\varphi(A) = o \implies \varphi(F) = o$ et φ se factorise suivant

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & & P \\ & M/_F \arrow[ur, "\bar{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

$\bar{\varphi}(A_{/F}) = o \Longrightarrow \bar{\varphi} \circ \psi(x) = o = \varphi(x)$

donc $x \in A$ et $\psi(x) \in A_{/F}$ qui est fermé.

- si $A_{/F}$ est fermé on a $\psi(A) \subseteq \psi(\bar{A}) \subseteq \widehat{\psi(A)}$ or $\psi(A) = \widehat{\psi(A)} =$ et donc $A = \bar{A}$.

Il est évident qu'on a un isomorphisme de treillis.

Conséquence.

Si $F = \bar{o}$ $\forall A$ $A \subseteq M$ $\bar{o} \subseteq \bar{A}$ donc $L_p(M) \approx L_p(M_{/F})$.

IV. Etude d'une fermeture telle que $L_p(M)$ soit complèmenté.

On pose $F = \bar{o}$.

Proposition 1.

Il y a équivalence des propriétés suivantes :

1) $L_p(M)$ est complèmenté.

2) Tout sous-module de $M_{/F}$ est dense.

D'après III. 5 il suffit de le démontrer dans le cas où $o = \bar{o}$.

1) $\Longrightarrow$ 2) Soit A essentiel dans M $L_p(M)$ étant complèmenté il existe $B \in L_p(M)$ tel que $\bar{A} \cap B = o$ et $\bar{A} + B = M$ or $\bar{A}$ essentiel dans M entraîne $B = o$ et $\bar{A} = M$.

2) $\Longrightarrow$ 1) Soit A fermé et B un sous-module complèmenté de A (c'est-à-dire maximal pour la relation $A \cap B = o$) $A + B$ est essentiel dans M et donc $\overline{A + B} = M$ on aura alors $\overline{A + \bar{B}} = M$ et $A \cap \bar{B} = o$ en vertu du lemme 1 et $\bar{B}$ est un complément de A dans $L_p(M)$.

Lemme 1.

Si $o = \bar{o}$ $\bar{A}$ est extension essentielle de A.

En effet si $X \subseteq \bar{A}$ $X \cap A = o$ $\overline{X \cap A} = \bar{o} = o = \bar{X} \cap \bar{A} = \bar{X}$ donc $X = o$.

Proposition 6.

Si $N \subseteq M$ et, si $L_p(M)$ est complèmenté, $L_p(N)$ est complèmenté.

Ceci résulte du fait que $L_p(N)$ est la trace sur N de $L_p(M)$ et que le treillis des sous-modules d'un module est modulaire.

Proposition 7.

Si $o = \bar{o}$ il y a équivalence de :

1) $L_P(M)$ est complémenté.

2) Les fermés de M sont les sous-modules compléments de M.

1) $\Rightarrow$ 2) Soit A un fermé et soit A' une extension essentielle de A. D'après IV.6 $L_P(A')$ est complémenté et $A \in L_P(M) \Rightarrow A \in L_P(A')$; A est essentiel dans A' donc $\bar{A} = A = A'$ et A est un sous-module complément de M. D'autre part d'après le lemme 1 tout sous-module complément est fermé.

2) $\Rightarrow$ 1) Soit A essentiel dans M, $\bar{A}$ est un fermé donc un sous-module complément ce qui exige $\bar{A} = M$ et d'après IV.1 $L_P(M)$ est complémenté.

Remarque : une condition suffisante pour que $o = \bar{o}$ est $M \subseteq P$.

Signalons la propriété :

Soit P un module injectif donnant sur M une fermeture telle que $\bar{o} = o$. Il existe un module Q et une injection de M dans Q tels que $L_P(M) = L_Q(M)$.

Soit $H = \mathrm{Hom}_R(M,P)$.

$\bar{o} = o \iff \forall x \in M \quad x \neq o \quad \exists h \in H \quad h(x) \neq o$

il suffit de poser $$Q = \prod_{h \in H} h(M)$$

et $o \longrightarrow M \xrightarrow{u} Q$ au moyen de $u : x \in M \longrightarrow (h(x))_{h \in H}$.

V. Application au coeur d'un module.

Soit M un R-module, E une enveloppe injective de M.

On sait que $L_M(M) = L_E(M)$.

Soit $\Lambda = \mathrm{Hom}_R(E,E)$. Les fermés de E sont les annulateurs à gauche des sous-ensembles de Λ.

Soit $J(\Lambda) = \left\{\lambda \in \Lambda \mid \ker\lambda \text{ est essentiel dans } E\right\}$

$C(E)$ = coeur de $E = o \cdot_E J(\Lambda)$

$C(M)$ = coeur de $M = C(E) \cap M = o \cdot_M J(\Lambda)$

on s'intéresse à $L_M(C(M)) = L_E(C(M))$ = trace sur $C(M)$ du treillis $L_E(C(E))$.

$L_E[C(E)]$ = trace sur $C(E)$ du treillis $L_E(E)$

$C(E)$ est un fermé, si $A \subseteq C(E)$ on a

$\hat{A} \in L_E\, L(E)$ $\bar{A} \in L_E(E)$ $\bar{A} = \hat{A}$

Théorème 1.

Les fermés de $C(E)$ dans la fermeture associée à E sont les sous-modules compléments de $C(E)$.

D'après IV.7 il suffit de montrer que $L_E(C(E))$ est complémenté, ou que tout sous-module essentiel dans $C(E)$ est dense.

Soit X un sous-module essentiel dans $C(E)$.

On a évidemment $X_E \subseteq C(E)$.

Soient Y un sous-module complément de $C(E)$ dans E et $\varphi : E \longrightarrow E$ $\varphi(X) = o$.

On définit : $\psi : x \oplus y \in C(E) \oplus Y \longrightarrow \varphi(x) \in E$.

Soit $\Phi : E \longrightarrow E$ un prolongement de φ .

ker $\Phi \supseteq X + Y$ qui est essentiel dans E ; $\Phi \in J(\Lambda)$ et $\Phi(C(E)) = o = \varphi(C(E))$ donc $C(E) \subseteq X_E$ $X_E = C(E)$ X est donc dense dans $C(E)$.

Théorème 2.

Les fermés de $C(M)$ suivant M sont les sous-modules compléments de $C(M)$ et le treillis $L_M(C(M))$ est complémenté.

$C(M)$ est essentiel dans $C(E)$ donc est dense dans $C(E)$ et d'après III.4 $L_M(C(M)) = L_E(C(M)) \simeq L_E(C(E))$.

Proposition 1.

$C(M)$ est le plus grand sous-module D de M tel que $L_M(D)$ soit complémenté.

Soit $D \subseteq M$ tel que $L_M(D) = L_E(D)$ soit complémenté.

Soit $\varphi \in J(\Lambda)$ $D \cap$ ker φ est essentiel dans D .

Donc la fermeture de $D \cap \ker \varphi$ dans D est D.

Mais $\ker \varphi$ est fermé dans E donc $D \cap \ker \varphi$ est fermé dans D.

$D \cap \ker \varphi = D$ $D \subseteq \ker \varphi$ donc $D \subseteq C(E) \cap M = C(M)$.

<u>Théorème 3.</u>

<u>Il y a équivalence des propriétés suivantes :</u>

1) <u>$C(M) = M$</u>.

2) <u>$L_M(M)$ = treillis des sous-modules compléments de M</u>.

3) <u>$L_M(M)$ est complémenté.</u>

<u>Proposition 2.</u>

<u>Soit $M \subseteq P$ tel que $L_P(M)$ soit complémenté.</u>

<u>Alors $L_P(M) = L_M(M)$ et $M = C(M)$.</u>

$M \subseteq P$ et $X \subseteq M \Longrightarrow X_P \subseteq X_M$ donc $L_M(M) \subseteq L_P(M)$.

Si $X \in L_P(M)$ X est un sous-module complément de M (IV.7) et $X \in L_M(M)$.

On pourrait se demander si lorsque $L_M(M)$ est complémenté, pour tout module P, $M \subseteq P$ on a $L_P(M)$ complémenté. Mais cela signifierait que si $M = C(M)$, $\forall\, P \supseteq M$ $C(M) \subseteq C(P)$ or cette propriété n'est pas vraie.

BIBLIOGRAPHIE

J. LAMBEK. On the structure of semi-prime rings and their rings of quotients. Can. J. of Math. 13-1961 pp. 392-401.

L. LESIEUR et R. CROISOT. Coeur d'un module. J. Math. Pures et Appl. - 42 - Fasc. 4 - 1963 - pp. 367-407.

G. RENAULT. Etude des sous-modules compléments dans un module (Thèse).

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Exposé n° 8 du 15 janvier 1968

-:-:-:-:-:-:-

Travaux de Johnson et Wong sur les anneaux auto-injectifs [1]

par Benoit LEMONNIER

-:-:-:-:-:-:-

Les anneaux et les modules considérés sont unitaires.

Définition 1 (II).

Un A-module N est dit extension rationnelle de M quand M est un sous-module de N tel que si F est un homomorphisme partiel de N dans N dont le domaine contient M alors $f(M) = o$ implique $\mathrm{Im}\, f = o$.

Notation : $M \leqslant N$.

Toute extension rationnelle est extension essentielle $(M \leqslant N \Longrightarrow M < N)$. Sinon N contiendrait un sous-module $M' \neq o$ tel que $M \cap M' = o$, alors la projection $M + M' \longrightarrow M'$ est non nulle bien qu'elle satisfasse aux conditions de la définition.

Proposition 1.

Les relations d'extension essentielle et d'extension rationnelle sont conservées dans le passage aux préimages homomorphes.

Soient $\varphi : P_A \longrightarrow N_A$ un homomorphisme de A-modules et M un sous-module de N.

Supposons $p \in \varphi^{-1}(N)$, $p \notin \varphi^{-1}(M)$; donc $\varphi(p) \in N$, $\varphi(p) \notin M$. Si $M < N$ il existe $a \in A$ tel que $\varphi(pa) \in M$, $\varphi(pa) \neq o$; donc $pa \neq o$ et $pa \in \varphi^{-1}(M)$. Ainsi $M < N \Longrightarrow \varphi^{-1}(M) < \varphi^{-1}(N)$.

Soient f un endomorphisme partiel de $\varphi^{-1}(N)$, D son domaine de définition. L'hypothèse $D \supset \varphi^{-1}(M)$ et $f(\varphi^{-1}(M)) = o$ permet de construire un homomorphisme $f' : M + \varphi(D) \longrightarrow N$ en posant $f'(m+\varphi(d)) = f(d)$; en effet $m + \varphi(d) = o \Longrightarrow d \in \varphi^{-1}(M) \Longrightarrow f(d) = o$. Alors $f'(M) = o$ et $M \leqslant N$ impliquent $f' = o$, donc $f = o$.

Définition 2 (III).

m, $m \in M_A$, est dit élément singulier du module M quand l'annulateur de m est essentiel dans A_A .

Proposition 2 (III).

L'ensemble, noté $J(M_A)$, des éléments singuliers de M est un sous-module de M (sous-module singulier).

Ce fait résulte des deux relations :

$\mathrm{Ann}(m+m') \supset \mathrm{Ann}(m) \cap \mathrm{Ann}(m')$, $\mathrm{Ann}(ma) = \hat{a}^{-1}[\mathrm{Ann}(m)]$,

où m; $m' \in M$; $a \in A$; $\hat{a} \in \mathrm{Hom}(A_A)$, $\hat{a}(a') = aa'$, $\forall a' \in A$.

Proposition 3 (III).

Si l'anneau A admet un suranneau régulier Q tel que $A < Q_A$, alors l'idéal singulier droit de A est nul.

Si $a \in A$, $a \neq o$, il existe q, $q \in Q$, tel que $a = aqa$; $qa = e$ est un idempotent de Q et $\mathrm{Ann}(a) = \mathrm{Ann}(e)$. Puisque A est essentiel dans Q_A il existe c et d , $c \in A$, $d \in A$, $o \neq c = ed$; $c \in \mathrm{Ann}(1-e)$. Ainsi l'annulateur de $1-e$ n'est jamais nul. $\mathrm{Ann}(e) \cap \mathrm{Ann}(1-e) = o$ montre que $\mathrm{Ann}\ a$ n'est jamais essentiel dans A ; a n'est pas singulier.

Proposition 4.

Si le sous-module singulier de M est nul , alors les extensions essentielles de M sont des extensions rationnelles à sous-module singulier nul.

Soient $M < N$, f homomorphisme partiel : $N \supset D \xrightarrow{f} N$ et $f(M) = o$. Si $\mathrm{Im}\ f \neq o$, il existe $n \in N$ tel que $f(n) \neq o$ et $m = f(n) \in M$ (en utilisant $M < N$) . $\mathrm{Ann}(m) \supset \{a | a \in A , na \in M\} = \hat{n}^{-1}(M)$, où $\hat{n}$ désigne l'homomorphisme $A_A \ni a \longrightarrow na \in N_A$. Donc $\mathrm{Ann}(m) < A_A$, et $m \in J(M_A)$, ce qui contredit $m \neq o$. Ainsi $\mathrm{Im}\ f = o$, et $M \leqslant N$.

Si un élément non nul n, $n \in N$, était régulier, il existerait $a \in \mathfrak{a} \in A$ tel que $na \neq o$, $na \in M$, et na serait singulier (P.2).

Théorème 1.

E_A désigne une enveloppe injective du A-module à droite M_A, $\hat{E}$ l'anneau des endomorphismes de E. Si $J(M_A) = o$,

1° l'anneau $\mathrm{Hom}(M_A)$ est plongeable dans $\hat{E}$;

2° $\hat{E}$ est l'anneau associé à E, il est donc régulier ;

3° $\hat{E}_{\hat{E}}$ est injectif (<u>auto-injectivité à droite</u> de l'anneau $\hat{E}$) .

1° Si $f \in \mathrm{Hom}(M_A)$, puisque E est injectif f admet au moins un prolongement $\bar{f}$ à E. $M \leqslant E$ (P.4) montre que ce prolongement est unique. Soit $g \in \mathrm{Hom}(M_A)$, $\overline{f.g}$ et $\bar{f}.\bar{g}$, $\overline{f+g}$ et $\bar{f} + \bar{g}$, coïncident sur M, donc $\overline{f.g} = \bar{f}.\bar{g}$, $\overline{f+g} = \bar{f} + \bar{g}$. L'application $f \longrightarrow \bar{f}$ est un homomorphisme d'anneaux, bien sûr injectif.

2° Il suffit de montrer que $g \in \hat{E}$, $\mathrm{Ker}g < E$ implique $g = o$. C'est vrai parce que : $J(M_A) = o \Longrightarrow J(E_A) = o$ (P.4), à fortiori $J(\mathrm{Ker}g) = o$, donc (P.4) $\mathrm{Ker}g \leqslant E$.

3° Donnons-nous L un idéal à droite de $\hat{E}$, $h : L_{\hat{E}} \longrightarrow \hat{E}_{\hat{E}}$ un homomorphisme de $\hat{E}$-modules à droite; il s'agit de trouver s, $s \in \hat{E}$ tel que $h(\ell) = s.\ell$ $\forall \ell \in L$

L'ensemble des sommes finies $\Sigma\, \ell_i(e_i)$, $\ell_i \in L$, $e_i \in E$, est un sous-module de E_A ; la donnée de h permet de construire un homomorphisme η de ce sous-module, noté $(LE)_A$, dans E_A en posant : $\eta(\Sigma\, \ell_i(e_i)) = \Sigma\, h(\ell_i)(e_i)$. En effet supposons $\ell_1 e_1 + \dots + \ell_n e_n = o$, l'idéal à droite engendré par $\ell_1, \dots, \ell_n$ dans l'anneau régulier S admet un générateur idempotent ε ; de $\varepsilon\, \ell_i = \ell_i$ on déduit :

$$\sum_1^n h(\ell_i)e_i = \sum_1^n h(\varepsilon \ell_i)e_i = h(\varepsilon) \sum_1^n \ell_i e_i = o \ ,$$

la seconde égalité utilise le fait que h est un homomorphisme de E-modules à droite et la distributivité dans l'anneau $\hat{E}$.

Soit s un prolongement de η à E, donc $s \in \hat{E}$; la définition de η montre que $s[\ell(e)] = [h(\ell)](e)$, $\forall e \in E$, $\forall \ell \in L$; donc $s.\ell = h(\ell)$, $\forall \ell \in L$.

Théorème 2.

Si l'idéal singulier droit de l'anneau A est nul, l'enveloppe injective de A_A peut être munie d'une structure de suranneau de A, régulier, auto-injectif à droite, compatible avec sa structure de A-module à droite.

Posons $\hat{A} = \mathrm{Hom}(A_A)$ et $\hat{E} = \mathrm{Hom}(E_A)$ où E_A est une enveloppe injective de A_A. Le théorème 1 montre que $\hat{A}$ est un sous-anneau de $\hat{E}$. Mais $\hat{A} \approx A$, en effet l'homomorphisme d'anneau $\varphi : A \longrightarrow \hat{A}$, défini par $\varphi(a)(a') = aa'$ est un isomorphisme puisque A est unitaire. Désormais A est identifié à $\hat{A}$, A est donc un sous-anneau de $\hat{E}$.

Montrons maintenant que le A-module $\hat{E}_A$ peut être à son tour identifié à E_A. En effet, étant donné $e \in E$, l'application $a \longrightarrow ea$ est un homomorphisme de A_A dans E_A qui peut être prolongé (E_A est injectif) en un endomorphisme $\Psi(e)$ de E_A ; $\Psi(e) \in \hat{E}$; $\Psi(e)$ est unique puisque $A \leq E_A$. $\Psi : E_A \longrightarrow \hat{E}_A$ est un monomorphisme de A-modules dont la restriction à A est l'identité. $\Psi(E)$ est donc une enveloppe injective de A_A ; finalement $\Psi(E) = \hat{E}$.

Corollaire.

Dans les hypothèses du théorème 2, si Q est un suranneau de A tel que Q_A soit extension essentielle de A, alors Q est un sous-anneau de l'enveloppe injective de A.

En effet $A < Q_A$ montre qu'il est possible de supposer, pour les structures de A-modules, $A \subset Q_A \subset E_A$. Alors $Q \approx \mathrm{Hom}(Q_Q) \subset \mathrm{Hom}(Q_A) \subset \mathrm{Hom}(E_A) \approx \hat{E}$, pour les structures d'anneau. La seconde inclusion provient de $J(Q_A) = 0$ (P.4).

<u>REFERENCES</u>

I E.T. Wong and R.E. Johnson, Self-injectives rings (Can. Math. Bull. Vol. 2, n° 3 , 1959, p. 167-173) .

II G.D. Findlay and J. Lambek, A generalized ring of quotients I (Can. Math. Bull. 1, 1958, 77-85).

III R.E. Johnson The extensed centralizer of a ring over a module (Proc. Amer. Math. Soc. 2, 1951, 891-895).

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

-:-:-:-:-:-

Conférence n° 9 du 22 janvier 1968

par E. LONGIN

-:-:-:-:-:-

<u>Auto-injectivité de l'anneau associé à un module injectif, d'après G. RENAULT</u>

<u>Préliminaires</u>.

Nous avons vu qu'étant donné un A module à gauche M, on pouvait lui associer son "anneau associé" $\bar{B} = B/_R$ où B est l'anneau des endomorphismes de M, et R l'idéal bilatère de B, ensemble des endomorphismes φ de M tels que Ker φ soit essentiel dans M.

Nous allons démontrer ici le résultat suivant dû à G. RENAULT : <u>l'anneau associé à un module injectif est auto-injectif à droite</u>.

Par conséquent nous nous placerons dans la situation suivante : E est un A module injectif, $B = \mathrm{End}_A E$ anneau des endomorphismes de E, $\bar{B}$ l'anneau associé à E.

Nous savons que dans ces conditions R(défini ci-dessus) est le radical de Jacobson de B et que $\bar{B}$ est un anneau régulier au sens de Von Neumann.

1. <u>Relèvement des idempotents de l'anneau associé à un Module injectif</u>.

Etant donné $h \in B$, nous noterons $\bar{h}$ son image canonique dans $\bar{B} = B/_R$.

<u>Proposition 1.1.</u> Si $\bar{q}$ est un idempotent de $\bar{B}$, il existe un idempotent p de B tel que $\bar{p} = \bar{q}$.

Soit q un élément de B dont l'image dans la surjection canonique $B \longrightarrow \bar{B}$ soit $\bar{q}$

$\bar{q}^2 = \bar{q}$ entraîne que si $q^2-q = \varphi$, ker φ est essentiel dans E .

Soit ψ la restriction de q à ker φ . On a $\psi^2 = \psi$ et donc ker φ = Im $\psi \oplus$ Ker ψ .

Posons $K = E(\text{Im } \psi)$ une enveloppe injective de Im ψ contenu dans E , et H un supplément de K dans E contenant Ker ψ .

Si p est la projection de E sur K parallèlement à H on a

$$\begin{cases} p^2 = p \\ \text{et } p \text{ coïncide avec } q \text{ sur ker } \varphi . \end{cases}$$

Donc ker(p-q) est essentiel dans E et par suite $\bar{p} = \bar{q}$.

Remarque. Si l'on suppose en outre que $q \in eB$ où e est un idempotent de B , on peut choisir $p \in eB$ tel que $p^2 = p$ et $\bar{p} = \bar{q}$.

En effet $q \in eB$ entraîne Im $q \subseteq$ Im e et donc Im $\psi \subseteq$ Im e . Comme E = Im e $\oplus$ Ker e Im e est injectif et donc on peut choisir $K = E(\text{Im } \psi)$ inclus dans Im e . On obtient alors Im $p \subseteq$ Im e donc p = ep et donc $p \in eB$.

Lemme 1.1.

$$\begin{cases} \text{Soient } e,f \text{ deux idempotents de } B \text{ , tels que } \overline{ef} = o \text{ alors} \\ \text{Im } e \cap \text{Im } f = (o) \text{ et } eB \cap fB = (o) . \end{cases}$$

$\overline{ef} = o$ signifie que si $\varphi = ef$, ker φ est essentiel dans E . Il suffit donc de démontrer que ker $\varphi \cap$ Im e $\cap$ Im f = (o) .

Soit x un élément de cette intersection :

$x = e(x) = f(x) = ef(x) = \varphi(x)$. Donc x = o .

Et alors on a évidemment $eB \cap fB = (o)$.

Lemme 1.2.

$$\begin{cases} \text{Soient } E, E_1, E_2, E_3 \text{ des modules injectifs vérifiant :} \\ \text{a) } E = E_1 \oplus E_2 \\ \text{b) } E_1 \cap E_3 = o \\ \text{c) } E_2 \cap E_3 = K \text{ est un sous-module essentiel de } E_3 . \\ \text{Alors il existe un supplémentaire } E_4 \text{ de } E_1 \text{ dans } E \text{ tel que} \\ E_4 \supset E_3 \text{ et } E_4 \cap E_2 \text{ soit un sous-module essentiel de } E_2 . \end{cases}$$

Soit G un complément relatif de K dans E_2. G est injectif et l'on a $G \cap E_3 = (o)$ [puisque $G \cap E_3 = G \cap E_3 \cap E_2 = G \cap K = (o)$]. Considérons $G \oplus E_3$ $(G \oplus E_3) \cap E_2 = G \oplus (E_3 \cap E_2) = G \oplus K$ puisque $G \subseteq E_2$ et que le treillis de sous-modules d'un module est modulaire.

Donc $(G \oplus E_3) \cap E_2$ est essentiel dans E_2.

Montrons que $(G \oplus E_3) \cap E_1 = (o)$.

Mais $(G \oplus E_3) \cap E_1 \cap E_2 = (o) = (G \oplus E_3) \cap E_1 \cap (G \oplus K)$.

Or $G \oplus K$ est un sous-module essentiel de $G \oplus E_3$ puisque K est un sous-module essentiel de E_3. Ceci entraîne bien que $(G \oplus E_3) \cap E_1 = (o)$.

Par conséquent il existe un supplémentaire E_4 de E_1 dans E qui contient $G \oplus E_3$. Et l'on a évidemment $E_4 \cap E_2$ sous-module essentiel de E_2.

Proposition 1.2.

Etant donné deux idempotents e, f de B tels que $\overline{ef} = o$, il existe un idempotent p de B tel que :

1) $pB = eB$.

2) $\overline{p} = \overline{e}$ et $pf = o$.

Et l'on a $eB \oplus fB = gB$ g étant un idempotent de B.

Utilisons le lemme 1.2 avec E, $E_1 = \mathrm{Im}\, e$, $E_2 = \mathrm{Ker}\, e$ $E_3 = \mathrm{Im}\, f$.

On a évidemment la condition a) et b) découle du lemme 1.1.

Montrons que $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, e$ est essentiel dans $\mathrm{Im}\, f$.

Soit $x \in \mathrm{Im}\, f$, $x \notin \mathrm{Ker}\, e$ $f(x) = x$ et donc

$e(x) = ef(x) \neq o$ $x \notin \mathrm{Ker}(ef)$.

Mais $\overline{ef} = o \iff \mathrm{Ker}(ef)$ est essentiel dans E donc il existe $a \in A$ tel que $ax \in \mathrm{Ker}(ef)$; $ax \in \mathrm{Im}\, f$ donc $e(ax) = ef(ax) = o$ $ax \in \mathrm{Ker}\, e \cap \mathrm{Im}\, f$. Par suite $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, e$ est essentiel dans $\mathrm{Im}\, f$.

Soit donc H un supplémentaire de $\mathrm{Im}\, e$ tel que

$\mathrm{Im}\, f \subset H$.

$H \cap \mathrm{Ker}\, e$ est un sous-module essentiel de $\mathrm{Ker}\, e$.

Soit p la projection de E sur $\mathrm{Im}\, e$ parallèlement à H.

On a donc $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Im}\, e$ donc $pB = eB$

$\mathrm{Ker}\, p \supseteq \mathrm{Im}\, f$ donc $pf = o$

$\mathrm{Ker}(p-e) \supseteq \mathrm{Im}\, e \oplus (H \cap \mathrm{Ker}\, e)$.

comme $H \cap \operatorname{Ker} e$ est essentiel dans $\operatorname{Ker} e$

$\operatorname{Ker}(p-e)$ est essentiel dans $\operatorname{Im} e \oplus \operatorname{Ker} e = E$.

Enfin considérons $g = p+f-fp$. On a $\begin{matrix} p = gp \\ f = gf \end{matrix}$ et $g = g^2$

donc comme d'autre part (lemme 1.1) $eB \cap fB = (o)$ $eB \oplus fB = gB$.

Lemme 1.3.

Soit A un anneau régulier. Si x et y sont deux éléments non nuls de E tels que $xA \cap yA = (o)$ il existe un idempotent non nul e de xA tel que

a) $xA = eA$.

b) $ey = o$.

A étant régulier, il existe $q = q^2$ tel que $xA \oplus yA = qA$.

$q = x\alpha + y\beta$ - $y = qy = x\alpha y + y\beta y$. Donc $(x\alpha)y = o$

$$x\alpha = (x\alpha)^2 + y\beta x\alpha \Longrightarrow (x\alpha)^2 = x\alpha$$

$e = x\alpha$ répond aux conditions .

Proposition 1.3.

Si e et f sont des idempotents de B tels que $\overline{eB} \cap \overline{fB} = (o)$, alors $eB \cap fB = (o)$ et il existe un idempotent g de B tel que $eB \oplus fB = gB$.

$\overline{B}$ étant un anneau régulier, il existe un idempotent $\overline{p}$ de $\overline{eB}$ tel que $\overline{pB} = \overline{eB}$ et $\overline{pf} = o$.

D'autre part d'après la proposition 1.1 et la remarque qui la concerne on peut suppposer que p est un idempotent de eB .

D'après la proposition 1.2 $pB \cap fB = (o)$, et il existe un idempotent g tel que $pB \oplus fB = gB$.

Il ne reste qu'à démontrer que $pB = eB$.

Or $p \in eB$. Donc $pB \subseteq eB$.

Supposons que $pB \neq eB$. Ceci entraîne $\operatorname{Im} p \subsetneqq \operatorname{Im} e$.

Mais comme $\operatorname{Im} p$ est inductif $\operatorname{Im} e = \operatorname{Im} p \oplus K$ $[K \neq (o)]$.

Soit q la projection de E sur K parallèlement à $\operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} e$. Montrons que $\overline{q} = o$.

Posons $h = p+q$, $\operatorname{Im} h = \operatorname{Im} e$ donc $hB = eB$ donc $\overline{hB} = \overline{eB} = \overline{pB}$ par suite il existe $\overline{k} \in \overline{B}$ tel que $\overline{h} = \overline{pk} = \overline{p+q}$. Or $qp = o$ donc $\overline{qpk} = \overline{qp} + \overline{q}^2 = o$ entraîne $\overline{q}^2 = \overline{q} = o$.

Par suite Ker q est essentiel dans E , ce qui est en contradiction avec le fait que $K \neq (o)$.

On a donc bien $pB = eB$. La proposition est démontrée.

<u>Proposition 1.4.</u>

Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille d'idempotents de B telle que $\sum_{i \in I} \bar{e}_i \bar{B}$ soit une somme directe, alors la somme $\sum_{i \in I} e_i B$ est directe.

Il suffit de le démontrer pour I fini.

Nous allons raisonner par récurrence sur Card I .

Si Card I = 2 la proposition 1.3 donne la solution, avec en plus $eB \oplus fB = gB$ où $g^2 = g$.

Supposons que si Card I = n - 1 la proposition est vraie et que l'on a

$$\sum_{i \in I} e_i B = g_I B \qquad g_I^2 = g_I \ .$$

Pour Card I = n , soit J tel que $J \cup \{k\} = I$

Card J = n - 1 donc

$\sum_{i \in J} e_i B = g_J B$ et par suite $\sum_{i \in I} e_i B = g_J B \oplus e_k B$ et l'on a

$\sum_{i \in I} \bar{e}_i \bar{B} = \bar{g}_J \bar{B} \oplus \bar{e}_k \bar{B}$, on a donc bien $e_b B \cap g_J B = (o)$ et la proposition est montrée.

2. <u>Anneau associé à un module injectif.</u>

<u>Lemme 2.1.</u> Soit $b = \bigoplus_{i \in I} e_i B$ un idéal à droite de B où les $(e_i)_{i \in I}$ sont des idempotents de B ; tout homomorphisme f de b dans B se prolonge en un endomorphisme de B - [homomorphisme de B-modules] .

Nous utiliserons une technique due à R.E. Johnson et E.T. Wong.

Nous allons montrer qu'il existe $f' \in B$, tel que si $m \in b$ $f(m) = f'.m$ ce qui démontrera la proposition.

Soit M le sous-module de E défini par $M \equiv bE$

$$y \in M \iff y = \sum_{j \in J} e_j \lambda_j x_j \qquad \lambda_j \in b\ ,\ x_j \in E \quad J \text{ fini},\ J \subseteq I\ .$$

Posons $g(y) = \sum_{j \in J} f(e_j \lambda_j) x_j$. Montrons qu'ainsi on définit bien un homomorphisme de M dans E.

En effet si $y = \sum_{j' \in J'} e'_{j'} \lambda'_{j'} x'_{j'}$, l'idéal à droite de B engendré par les e_j et $e'_{j'}$ (en nombre fini) est égal à un idéal qB, et donc on a $e_j = qe_j$ et $e'_{j'} = qe'_{j'}$, donc $g(y) = f(q).y$. On a donc bien un homomorphisme : $M \longrightarrow E$.

E étant injectif, g se prolonge en $f' : E \longrightarrow E$ qui vérifie si $m \in b$ et $x \in E$ $f'[m_*(x)] = f(m).x$ on a donc bien $f(m) = f' \circ m$.

<u>Lemme 2.2.</u> Pour qu'un anneau régulier A soit auto-injectif à droite il faut et il suffit que pour tout idéal à droite b de A de la forme $b = \bigoplus_{i \in J} e_i A$ où $(e_i)_{i \in I}$ est une famille d'idempotents, tout homomorphisme de A-module de b dans A se prolonge en un endomorphisme de A.

La condition est évidemment nécessaire.

Montrons qu'elle est suffisante.

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal à droite de $A \neq (o)$, f un homomorphisme de dans A. Il suffit de montrer que f peut être prolongé en un endomorphisme de A.

Montrons que $\mathfrak{a}$ est extension essentielle d'un idéal $b = \bigoplus_{i \in I} e_i A$, où les e_i sont des idempotents.

Considérons l'ensemble des idéaux de cette forme où les e_i sont pris dans $\mathfrak{a}$.

Ordonnons cet ensemble qui n'est pas vide (puisque $\forall x \in A - \{o\}$, xA est engendré par un idempotent] au moyen de la relation d'ordre suivante

$$\bigoplus_{i \in I} e_i A \subseteq \bigoplus_{j \in J} e_j A \iff I \subset J \ .$$

Pour cette relation d'ordre, si $(b_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est une famille de tels idéaux, $b_\lambda = \bigoplus_{i \in I_\lambda} e_i A$, on a $\mathrm{Sup}_{\lambda \in \Lambda}(b\ ) = \bigoplus_{i \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda} e_i A$. Cet ensemble est donc en particulier inductif. Soit $b = \bigoplus_{i \in I} e_i A$ un élément maximal.

Si $x \in \mathfrak{a} - b$, supposons $b \cap xA = (o)$, mais $xA = qA$ avec $q^2 = q \in \mathfrak{a}$ puisque A est régulier et donc la somme $b + qA$ est directe ce qui est en contradiction avec le fait que b est maximal, donc $b \cap xA \neq (o)$ et donc b est essentiel dans $\mathfrak{a}$.

Soit f' la restriction de f à B . Par hypothèse f' peut se prolonger en un endomorphisme h de A .

Or si $x \in \mathfrak{a}$ $b .\cdot x = J$ est un idéal essentiel de E .

En effet si $y \in A-J$ $xy \notin b$ mais $xy \in \mathfrak{a} - (o)$ donc il existe $\lambda \in A$ tel que $xy\lambda \in b$ et $y\lambda \in J$.

De plus on a $xJ \subseteq b$ et comme h et f coïncident sur b $(h-f)(xJ) = o$ soit $(h-f)(x)\ J = o$. Donc l'annulateur à droite de $(h-f)(x)$ contient J , c'est donc un idéal essentiel de A et donc $(h-f)(x)$ appartient à l'idéal singulier de A . A étant régulier ce dernier est nul et par suite $(h-f)(x) = o$, donc h et f coïncident sur $\mathfrak{a}$ et h prolonge f .

Théorème 2.1.

Si E est un A-module injectif, l'anneau associé à M est auto-injectif à droite.

D'après le lemme 2.2 il suffit de prouver que tout homomorphisme f d'un idéal $b = \bigoplus_{i \in I} \overline{e_i}\bar{B}$ $(\bar{e}_i^2 = \bar{e}_i)$ dans $\bar{B}$ se prolonge en un endomorphisme de $\bar{B}$ (considéré comme $\bar{B}$-module) .

D'après la proposition 1.1 on peut supposer que les $\overline{e_i}$ sont les images d'idempotents e_i de B .

Posons $f(\overline{e_i}) = \overline{x_i} = \overline{x_i}\,\overline{e_i}$. D'après la proposition 1.4 la somme $b' = \sum_{i \in I} e_i B$ est directe. Donc on définit un homomorphisme g de b' dans B en posant $g(e_i) = x_i e_{i-}$. D'après le lemme 2.1 il existe $x_o \in B$ tel que $g(e_i) = x_o e_i = x_i e_{i-}$. On a donc $\overline{x_i}\,\overline{e_i} = f(\overline{e_i}) = \overline{x_o}\,\overline{e_i}$ et donc l'endomorphisme h de $\bar{B}$ défini par $h(\bar{x}) = \overline{x_o}\,\bar{x}$ $\forall \bar{x} \in \bar{B}$ prolonge f .

Corollaire 1.

Soit E un A-module injectif dont le sous-module singulier est nul, alors $B = \mathrm{End}_A E$ est auto-injectif à droite.

En effet, si le sous-module singulier est nul, R est nul donc $\bar{B} = B$.

- BIBLIOGRAPHIE -

B.L. OSOFSKY - Endomorphism Rings of quasi-injectives Modules - Not. Amer. Math. Soc. 14 - 1967 - p. 419.

J.E. ROOS - Locally distributive Spectral Categories and Strongly regular Rings (Springer Lectures Notes n° 47 - 1967).

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 10 du 29 janvier 1968

-:-:-:-:-:-

($\mathcal{C}$)-Algèbres non associatives

par C. JOULAIN

-:-:-:-:-:-

Nous nous proposons de généraliser, pour les ($\mathcal{C}$)-algèbres non associatives, les résultats obtenus par L. LESIEUR et R. CROISOT dans [4] et [5], concernant les ($\mathcal{C}$)-algèbres satisfaisant à certaines conditions de chaîne. Nous n'imposons plus ici les axiomes d'associativité (cf. [5], p. 26) ; par contre, nous renforçons la condition de chaîne ascendante sur les residuels à droite par une condition de chaîne ascendante sur les résiduels à droite généralisés.

I. Hypothèses générales.

1. ($\mathcal{C}$)-Algèbres non associatives.

Nous considérons une ($\mathcal{C}$)-algèbre (L) (non nécessairement associative) constituée par les deux treillis ($\mathcal{C}$) et (L) satisfaisant aux axiomes suivants

Axiome A: ($\mathcal{C}$) est un groupoïde réticulé, quasi-entier, complet.

($\mathcal{C}$) est un groupoïde multiplicatif. La relation d'ordre, la réunion et l'intersection dans ($\mathcal{C}$) sont notées : $\leq$, $\cup$, $\cap$. L'élément maximum est noté $\mathcal{C}$ et l'élément minimum 0.

Axiome B: (L) est un treillis complet.

Les opérations du treillis (L) sont notées : $\leq$, $\cap$ et $\cup$. L'élément maximum de (L) est noté U et l'élément minimum est noté 0 .

Axiome C : Les éléments de $(\mathscr{C})$ sont opérateurs dans (L) .

L'opération externe fait correspondre à $\mathscr{A} \in (\mathscr{C})$ et $X \in (L)$ l'élément de (L) noté $\mathscr{A}X$.

L'application $(\mathscr{A}, X) \longrightarrow \mathscr{A}X$ de $(\mathscr{C}) \times (L)$ dans (L) sera notée σ ; donc $\sigma(\mathscr{A}, X) = \mathscr{A}X$. C'est cette application qui joue un rôle important dans la suite.

L'opération externe vérifie les conditions suivantes :

$$\mathscr{A} \in (\mathscr{C}) \ , \ X, Y \in (L) : \mathscr{A}(X \cup Y) = \mathscr{A}X \cup \mathscr{A}Y \ .$$

$$\mathscr{A}, \mathscr{B} \in (\mathscr{C}) \ , \ X \in (L) : (\mathscr{A} \cup \mathscr{B})X = \mathscr{A}X \cup \mathscr{B}X \ .$$

Ces relations sont supposées valables pour des réunions infinies :

$$\mathscr{A}\Big(\bigcup_{i \in I} X_i\Big) = \bigcup_{i \in I} \mathscr{A}X_i \quad \text{et} \quad \Big(\bigcup_{i \in I} \mathscr{A}_i\Big)X = \bigcup_{i \in I} \mathscr{A}_i X \ .$$

On suppose en outre :

$$\mathscr{A}X \leqslant X \quad , \quad 0X = 0 \ .$$

La structure de groupoïde de $(\mathscr{C})$ n'intervient pas dans les notions que nous allons définir, mais (L) étant une $(\mathscr{C})$-algèbre, nous pourrons comparer les résultats obtenus à ceux de [2] . D'autre part, dans les applications, nous aurons à faire à des exemples de $(\mathscr{C})$-algèbres non associatives.

2. Résiduels à gauche et à droite.

Comme dans le cas associatif (cf. [5], p. 28), les propriétés suivantes sont des conséquences de l'axiome C .

Propriété 1.1. X et Y étant donnés dans (L) , l'ensemble des éléments $\mathscr{A} \in (\mathscr{C})$ tels que $\mathscr{A}Y \leqslant X$ possède un élément maximum, noté $X \cdot\!. Y$, appelé résiduel à gauche de X par Y .

Propriété 1.2. $X \in (L)$ et $\mathscr{A} \in (\mathscr{C})$ étant donnés, l'ensemble des éléments $Y \in (L)$ tels que $\mathscr{A}Y \leqslant X$ possède un élément maximum noté $X .\!\cdot \mathscr{A}$, appelé résiduel à droite de X par $\mathscr{A}$.

Notons les conséquences des axiomes A, B, C que nous utiliserons dans la suite :

1° $\mathcal{A} \in (\mathcal{C})$, X, Y $\in$ (L) : $X \leqslant Y \Longrightarrow \mathcal{A}X \leqslant \mathcal{A}Y$.

2° $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in (\mathcal{C})$, $X \in (L)$: $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{A}X \leqslant \mathcal{B}X$.

3° X, Y, Z $\in$ (L) , $\mathcal{A} \in (\mathcal{C})$: $X \leqslant Y \Longrightarrow X \mathbin{\cdot\,\cdot} Z \leqslant Y \mathbin{\cdot\,\cdot} Z$ et $X \mathbin{.\,\cdot} \mathcal{A} \leqslant Y \mathbin{.\,\cdot} \mathcal{A}$.

4° X, Y, Z $\in$ (L) : $Y \leqslant Z \Longrightarrow X \mathbin{\cdot\,\cdot} Y \geqslant X \mathbin{\cdot\,\cdot} Z$.

5° $X \in (L)$, $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in (\mathcal{C})$: $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B} \Longrightarrow X \mathbin{.\,\cdot} \mathcal{A} \geqslant X \mathbin{.\,\cdot} \mathcal{B}$.

6° $X_i \in (L)$, pour $i \in I$, $Y \in (L)$: $\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) \mathbin{\cdot\,\cdot} Y = \bigcap_{i \in I} (X_i \mathbin{\cdot\,\cdot} Y)$.

7° $X_i \in (L)$, pour $i \in I$, $\mathcal{A} \in (\mathcal{C})$: $\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) \mathbin{.\,\cdot} \mathcal{A} = \bigcap_{i \in I} (X_i \mathbin{.\,\cdot} \mathcal{A})$.

8° $X \in (L)$, $Y_i \in (L)$ pour $i \in I$: $X \mathbin{\cdot\,\cdot} \left(\bigcup_{i \in I} Y_i\right) = \bigcap_{i \in I} (X \mathbin{\cdot\,\cdot} Y_i)$.

9° $X \in (L)$, $\mathcal{A}_i \in (\mathcal{C})$, pour $i \in I$: $X \mathbin{.\,\cdot} \left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i\right) = \bigcap_{i \in I} (X \mathbin{.\,\cdot} \mathcal{A}_i)$.

10° $X \in (L)$, $\mathcal{A} \in (\mathcal{C})$: $X \leqslant X \mathbin{.\,\cdot} \mathcal{A}$.

3. Résiduels à droite généralisés.

Si $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ sont des éléments de $(\mathcal{C})$ et X un élément de (L), le produit : $\mathcal{A}_n(\mathcal{A}_{n-1}(\ldots(\mathcal{A}_1 X)\ldots))$ sera noté simplement : $\mathcal{A}_n \mathcal{A}_{n-1} \ldots \mathcal{A}_1 X$. On a donc :

$$\mathcal{A}_n \mathcal{A}_{n-1} \ldots \mathcal{A}_1 X = \mathcal{A}_n(\mathcal{A}_{n-1} \ldots \mathcal{A}_1 X) .$$

Si $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_{n-1} = \ldots = \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$, ce produit est noté : $\sigma_n(\mathcal{A}, X)$.

On a donc :

$$\sigma_1(\mathcal{A}, X) = \mathcal{A}X = \sigma(\mathcal{A}, X) \ ; \ \sigma_n(\mathcal{A}, X) = \mathcal{A}\,\sigma_{n-1}(\mathcal{A}, X) .$$

La $(\mathcal{C})$-algèbre (L) n'étant pas supposée associative, en général, on a :

$$(X \mathbin{.\,\cdot} \mathcal{A}) \mathbin{.\,\cdot} \mathcal{B} \neq X \mathbin{.\,\cdot} (\mathcal{A}\mathcal{B}) ,$$

ce qui nous conduit à la notion suivante :

Si $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ sont des éléments de $(\mathcal{C})$ et X un élément de (L), on pose

$X \,.\!\cdot (\mathcal{A}_1) = X \,.\!\cdot \mathcal{A}_1$ et $X \,.\!\cdot (\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_K) = (X \,.\!\cdot (\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_{K-1})) \,.\!\cdot \mathcal{A}_K$.

$X \,.\!\cdot (\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n)$ est l'élément maximum de l'ensemble des $Y \in (L)$ tels que :

$$\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 \ldots \mathcal{A}_n Y \leq X \,.$$

Nous dirons que $X \,.\!\cdot (\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n)$ est un résiduel à droite généralisé de X .

On suppose que la $(\mathcal{C})$-algèbre (L) satisfait à l'axiome suivant :

Axiome D : L'ensemble des résiduels à gauche et l'ensemble des résiduels à droite généralisés de tout élément $X \in (L)$ vérifient la condition de chaîne ascendante.

Propriété 1.3. La condition de chaîne descendante sur les résiduels à droite généralisés de tout élément $X \in (L)$ entraîne la condition de chaîne ascendante sur les résiduels à gauche de tout élément $X \in (L)$.

En effet, comme dans le cas associatif, la condition de chaîne descendante sur les résiduels à droite entraîne la condition de chaîne ascendante sur les résiduels à gauche (cf. [5], p. 29).

L'axiome D est en particulier vérifié dans les cas suivants :

1° Les treillis $(\mathcal{C})$ et (L) vérifient la condition de chaîne ascendante.

2° Le treillis (L) vérifie la condition de chaîne ascendante et la condition de chaîne descendante.

4. Exemples.

Donnons quelques exemples de $(\mathcal{C})$-algèbres (L) (non associatives) vérifiant l'axiome D .

1° $(\mathcal{C}) = (L)$ est l'ensemble des idéaux bilatères d'un anneau (non associatif), (cf. BERHENS [1]), ou d'un groupoïde avec zéro, la condition de chaîne ascendante étant vérifiée.

2° $(\mathcal{C})$ est l'ensemble des idéaux bilatères d'un anneau (non associatif) ou d'un groupoïde avec zéro, et (L) est l'ensemble des idéaux à gauche de l'anneau ou du groupoïde. On impose la condition de chaîne ascendante pour les idéaux à gauche.

3° $(\mathcal{C}) = (L)$ est l'ensemble des sous-groupes normaux d'un groupe satisfaisant à la condition de chaîne ascendante pour les sous-groupes normaux, (cf. KURATA, [3]) .

La réunion de deux éléments A et B dans le treillis $(\mathcal{C})$ est le produit AB de deux sous-groupes normaux. Le produit de A par B , dans le groupoïde $(\mathcal{C})$ est le sous-groupe commutateur $[A,B]$. Dans cet exemple, $(\mathcal{C})$ est un groupoïde commutatif et on a :

$$A : B = A \,.\!\cdot\, B = A \,\cdot\!.\, B \,.$$

II. σ-Radical d'un élément de (L)

1. Résiduels à gauche σ-premiers d'un élément de (L).

Rappelons qu'un résiduel à gauche de $X \in (L)$ est dit propre s'il est de la forme $X \,\cdot\!.\, Y$, avec $Y \not\leq X$. On a alors la propriété suivante (cf [5], propriété 3.4) :

Propriété 2.1. Pour que $\mathcal{A} \in (\mathcal{C})$ soit un résiduel à gauche propre de $X \in (L)$, il faut et il suffit que :

$$\mathcal{A} = X \,\cdot\!.\, (X \,.\!\cdot\, \mathcal{A}) \,, \quad \text{avec} \quad X \,.\!\cdot\, \mathcal{A} > X \,.$$

La démonstration est celle de la propriété 3.4 de [5] .

Définition 2.1. Un résiduel à gauche $\mathcal{P}$ de $X \in (L)$ est un résiduel à gauche σ-premier de X s'il vérifie la condition :

$$\mathcal{A}_n \mathcal{A}_{n-1} \dots \mathcal{A}_1 (X \,.\!\cdot\, \mathcal{P}) \leq X \Longrightarrow \text{il existe } i \text{ tel que } \mathcal{A}_i \leq \mathcal{P} \,.$$

Conséquence. Si $\mathcal{P}$ est un résiduel à gauche σ-premier de X et si l'on a :

$$\mathcal{A}_1(X \,.\!\cdot\, \mathcal{P}) \cap \mathcal{A}_2(X \,.\!\cdot\, \mathcal{P}) \cap \dots \cap \mathcal{A}_n(X \,.\!\cdot\, \mathcal{P}) \leq X \,,$$

l'un au moins des $\mathcal{A}_i$ est contenu dans $\mathcal{P}$.

En effet, on a :

$$\mathcal{A}_n\mathcal{A}_{n-1} \dots \mathcal{A}_1(X \mathbin{.\!\cdot} \mathcal{P}) \leqslant \mathcal{A}_1(X \mathbin{.\!\cdot} \mathcal{P}) \cap \dots \cap \mathcal{A}_n(X \mathbin{.\!\cdot} \mathcal{P}) .$$

Remarque. Dans le cas d'une $(\mathcal{C})$-algèbre (associative), les notions de résiduel à gauche σ-premier de X et de résiduel à gauche premier de X coïncident. En effet la condition de la définition 2.1 s'écrit alors :

$$\mathcal{A}_n\mathcal{A}_{n-1} \dots \mathcal{A}_1 \leqslant \mathcal{P} = X \mathbin{\cdot\!.} (X \mathbin{.\!\cdot} \mathcal{P}) \Longrightarrow \text{il existe } i \text{ tel que } \mathcal{A}_i \leqslant \mathcal{P} .$$

Ces notions sont distinctes dans le cas non associatif (cf. exemple 2.1) .

Propriété 2.2. Si $\mathcal{P} = X \mathbin{\cdot\!.} Y$ est un résiduel à gauche de X tel que :

$$\mathcal{A}_n\mathcal{A}_{n-1} \dots \mathcal{A}_1 Y \leqslant X \Longrightarrow \text{il existe } i \text{ tel que } \mathcal{A}_i \leqslant \mathcal{P} ,$$

alors, $\mathcal{P}$ est un résiduel à gauche σ-premier de X.

En effet, on a : $\mathcal{P}Y \leqslant X \Longrightarrow Y \leqslant X \mathbin{.\!\cdot} \mathcal{P}$.

Soit : $\mathcal{A}_n\mathcal{A}_{n-1} \dots \mathcal{A}_1(X \mathbin{.\!\cdot} \mathcal{P}) \leqslant X$, il en résulte :

$$\mathcal{A}_n\mathcal{A}_{n-1} \dots \mathcal{A}_1 Y \leqslant \mathcal{A}_n\mathcal{A}_{n-1} \dots \mathcal{A}_1(X \mathbin{.\!\cdot} \mathcal{P}) \leqslant X$$

et l'un au moins des $\mathcal{A}_i$ est contenu dans $\mathcal{P}$.

La réciproque est fausse (cf. exemple 2.2).

Les notions de résiduel pseudo-essentiel et de résiduel essentiel introduites par L. LESIEUR et R. CROISOT [6] restent valables dans le cas non associatif :

Définition 2.3. On appelle résiduel pseudo-essentiel de $X \in (L)$ un résiduel à gauche $\mathcal{P}$ de X tel qu'il existe $Y \not\leqslant X$ avec

$$\mathcal{P} = X \mathbin{\cdot\!.} Y \quad \text{et} \quad Z \leqslant Y ,\ Z \not\leqslant X \Longrightarrow X \mathbin{\cdot\!.} Z = X \mathbin{\cdot\!.} Y$$

Propriété 2.3. Tout résiduel pseudo-essentiel d'un élément $X \in (L)$ est un résiduel à gauche σ-premier de X .

Soit $\mathcal{P} = X \mathbin{\cdot\!.} Y$, résiduel pseudo-essentiel de X (par rapport à Y).

On utilise la propriété 2.2 et on démontre par récurrence sur n que :

$$\mathcal{A}_n\mathcal{A}_{n-1} \dots \mathcal{A}_1 Y \leqslant X \Longrightarrow \text{il existe } i \text{ tel que } \mathcal{A}_i \leqslant \mathcal{P}.$$

C'est évident pour $n = 1$.

Soit $\mathcal{A}_n \mathcal{A}_{n-1} \dots \mathcal{A}_1 Y \leqslant X$, ce qui s'écrit encore : $\mathcal{A}_n(\mathcal{A}_{n-1} \dots \mathcal{A}_1 Y) \leqslant X$. Si $\mathcal{A}_{n-1} \dots \mathcal{A}_1 Y \leqslant X$, il existe i $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ tel que $\mathcal{A}_i \leqslant \mathcal{P}$ (d'après l'hypothèse d'induction). Posons $Z = \mathcal{A}_{n-1} \dots \mathcal{A}_1 Y \not\leqslant X$; on a $Z \leqslant Y$, donc $X \mathbin{\cdot.} Z = \mathcal{P}$. Alors : $\mathcal{A}_n Z \leqslant X \Longrightarrow \mathcal{A}_n \leqslant X \mathbin{\cdot.} Z = \mathcal{P}$.

La réciproque est fausse, même dans le cas associatif (cf. exemple 2.3).

Corollaire. Tout résiduel à gauche propre de X, maximal (en tant que résiduel à gauche propre de X) est un résiduel à gauche σ-premier de X.

En effet, un résiduel à gauche propre maximal de X est, en particulier, un résiduel pseudo-essentiel de X.

Propriété 2.4. Tout élément X de (L), autre que U, possède un résiduel à gauche propre σ-premier.

Il suffit de considérer un résiduel à gauche propre maximal de X, dont l'existence est assurée par l'axiome ν.

Théorème 2.1. Quel que soit $X \in (L)$, $X \neq U$, on peut trouver un nombre fini de résiduels à gauche σ-premiers $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_k$, d'éléments de (L), tels que :

$$\mathcal{P}_i \geqslant X \mathbin{\cdot.} U \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 \dots \mathcal{P}_k U \leqslant X .$$

La démonstration est analogue à celle du théorème 3.1 de [5], les résiduels à droite étant remplacés par les résiduels à droite généralisés.

Soit $\mathcal{P}_1$ un résiduel à gauche propre σ-premier de X ; on a :
$\mathcal{P}_1 \geqslant X \mathbin{\cdot.} U$; posons $X_1 = X \mathbin{.\cdot} \mathcal{P}_1 > X$ (propriété 2.1).

Si $X_1 = U$, on a $\mathcal{P}_1 U \leqslant X$ et $k = 1$.

Si $X_1 \neq U$, soit $\mathcal{P}_2$ un résiduel à gauche propre σ-premier de X_1 ; on a
$\mathcal{P}_2 = X_1 \mathbin{\cdot.} (X_1 \mathbin{.\cdot} \mathcal{P}_2) \geqslant X \mathbin{\cdot.} (X_1 \mathbin{.\cdot} \mathcal{P}_2) \geqslant X \mathbin{\cdot.} U$.

On pose $X_2 = X_1 \mathbin{.\cdot} \mathcal{P}_2 = (X \mathbin{.\cdot} \mathcal{P}_1) \mathbin{.\cdot} \mathcal{P}_2$ et on a $X < X_1 < X_2$.

Si $X_2 = U$, on a $X_1 \mathbin{.\cdot} \mathcal{P}_2 = U \Longrightarrow \mathcal{P}_2 U \leqslant X_1 = X \mathbin{.\cdot} \mathcal{P}_1 \Longrightarrow \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 U \leqslant X$.

Si $X_2 \neq U$, le procédé se poursuit et, d'après la condition de chaîne ascendante sur les résiduels à droite généralisés de X, il existe un entier k tel que :

$X_k = U = X \cdot\!\cdot (\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_k)$, c'est-à-dire : $\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 \ldots \mathcal{P}_k U \leqslant X$; le théorème en résulte.

Propriété 2.5. Parmi les résiduels à gauche σ-premiers $\mathcal{P}$ des éléments de (L) contenant X, il en existe un nombre fini $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_k$ tels que chaque $\mathcal{P}$ contienne au moins un $\mathcal{P}_i$.

Les résiduels $\mathcal{P}_i$ du théorème 2.1 satisfont à cette condition. En effet, $\mathcal{P}_i$ est un résiduel à gauche propre σ-premier de $X_{i-1} \geqslant X$; d'autre part, si $\mathcal{P}$ est un résiduel à gauche σ-premier de $X' \geqslant X$, on a :

$$\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 \ldots \mathcal{P}_k (X' \cdot\!\cdot \mathcal{P}) \leqslant \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 \ldots \mathcal{P}_k U \leqslant X \leqslant X'$$

et, par conséquent, l'un au moins des $\mathcal{P}_i$ est contenu dans $\mathcal{P}$.

Corollaire. Les éléments minimaux parmi les $\mathcal{P}_i$ du théorème 2.1 sont les éléments minimaux parmi les résiduels à gauche σ-premiers des éléments de (L) contenant X. Par suite, ils sont définis de manière unique. Les résiduels à gauche σ-premiers des éléments de (L) contenant X, qui sont minimaux sont en nombre fini.

Propriété 2.6. Si $\mathcal{A}$ est un résiduel à gauche propre σ-premier de $X \in (L)$ et si $\mathcal{B}$ n'est pas contenu dans $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ est un résiduel à gauche propre σ-premier de $X \cdot\!\cdot \mathcal{B}$.

Pour démontrer que $\mathcal{A}$ est un résiduel à gauche propre de $X \cdot\!\cdot \mathcal{B}$ nous adaptons la démonstration donnée par L. LESIEUR et R. CROISOT dans le cas associatif (cf. [4], propriété 2.3). Posons $\mathcal{M} = (X \cdot\!\cdot \mathcal{B}) \cdot\!\cdot [(X \cdot\!\cdot \mathcal{B}) \cdot\!\cdot \mathcal{A}]$. On a $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{M}$ donc :
$$(X \cdot\!\cdot \mathcal{B}) \cdot\!\cdot \mathcal{M} \leqslant (X \cdot\!\cdot \mathcal{B}) \cdot\!\cdot \mathcal{A}.$$ D'autre part :

$$\mathcal{M}[(X \cdot\!\cdot \mathcal{B}) \cdot\!\cdot \mathcal{A}] \leqslant X \cdot\!\cdot \mathcal{B} \Longrightarrow (X \cdot\!\cdot \mathcal{B}) \cdot\!\cdot \mathcal{A} \leqslant (X \cdot\!\cdot \mathcal{B}) \cdot\!\cdot \mathcal{M}$$

et, finalement :

$$(X \cdot\!\cdot \mathcal{B}) \cdot\!\cdot \mathcal{M} = (X \cdot\!\cdot \mathcal{B}) \cdot\!\cdot \mathcal{A} \geqslant X \cdot\!\cdot \mathcal{A} \Longrightarrow$$

$$\mathcal{M}(X \cdot\!\cdot \mathcal{A}) \leqslant X \cdot\!\cdot \mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{B}\mathcal{M}(X \cdot\!\cdot \mathcal{A}) \leqslant X.$$

Or $\mathcal{A}$ est un résiduel à gauche σ-premier de X et $\mathcal{B} \not\leq \mathcal{A}$; il en résulte $\mathcal{M} \leq \mathcal{A}$, d'où $\mathcal{M} = \mathcal{A}$, ce qui démontre que $\mathcal{A}$ est un résiduel à gauche de $X .: \mathcal{B}$

Si $\mathcal{A}$ n'était pas un résiduel à gauche propre de $X .: \mathcal{B}$, on aurait : $(X .: \mathcal{B}) .: \mathcal{A} = X .: \mathcal{B}$, d'où $X .: \mathcal{B} \geq X .: \mathcal{A}$ et $\mathcal{B} \leq X :. (X .: \mathcal{A}) = \mathcal{A}$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Démontrons que $\mathcal{A}$ est un résiduel à gauche propre σ-premier de $X .: \mathcal{B}$.

Soit $\mathcal{A}_n \mathcal{A}_{n-1} \dots \mathcal{A}_1 [(X .: \mathcal{B}) .: \mathcal{A}] \leq X .: \mathcal{B}$. On a :

$$\mathcal{B} \mathcal{A}_n \dots \mathcal{A}_1 [(X .: \mathcal{B}) .: \mathcal{A}] \leq X .$$

Or $X .: \mathcal{A} \leq (X .: \mathcal{B}) .: \mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B} \mathcal{A}_n \dots \mathcal{A}_1 (X .: \mathcal{A}) \leq \mathcal{B} \mathcal{A}_n \dots \mathcal{A}_1 [(X .: \mathcal{B}) .: \mathcal{A}] \leq X.$

Mais, $\mathcal{A}$ est un résiduel à gauche σ-premier de X et $\mathcal{B} \not\leq \mathcal{A}$; il en résulte que l'un au moins des $\mathcal{A}_i$ est contenu dans $\mathcal{A}$. On déduit de cette propriété :

<u>Théorème 2.2. Tout élément $X \in (L)$ ne peut admettre qu'un nombre fini de résiduels à gauche propres σ-premiers.</u>

La démonstration est analogue à celle du cas associatif ; le raisonnement conduit à une chaîne infinie strictement croissante de résiduels à droite généralisés de X , ce qui contredit l'axiome D (cf. [4], théorème 2.1).

<u>Théorème 2.3. Pour que $X .: \mathcal{A} > X$, il faut et il suffit que $\mathcal{A}$ soit contenu dans un résiduel à gauche propre σ-premier de X .</u>

La démonstration du cas associatif s'applique sans modification (cf. [5], théorème 5.2).

<u>Exemple 2.1.</u> On considère le groupoïde G à 5 éléments dont la table de multiplication est la suivante :

	o	a	b	c	d
o	o	o	o	o	o
a	o	o	o	o	o
b	o	o	o	a	b
c	o	a	a	a	c
d	o	a	a	b	d

Les idéaux bilatères de G sont :

$O = \{o\}$, $A = \{o, a\}$, $I = \{o, a, b\}$, $J = \{o, a, b, c\}$, $G = \{o, a, b, c, d\}$.

On prend pour $(\mathcal{C}) = (L)$ le treillis des idéaux bilatères de G : $O \subset A \subset I \subset J \subset G$.

J est un idéal premier, mais $A :. J = J$ n'est pas un résiduel à gauche σ-premier de A ; en effet on a :

$A \,\dot{\cdot}\, J = J$ et $GGJ = GI = A$, bien que $G \not\subseteq J$.

Par contre $J \,\dot{\cdot}\, G = J$ est un résiduel essentiel de J , c'est donc un résiduel à gauche σ-premier de $J \,\dot{\cdot}$.

$0 \,\dot{\cdot}\, A = I$ est un résiduel essentiel de 0 , donc un résiduel à gauche σ-premier de 0 ; cependant, I n'est pas un idéal premier car $JJ = A \subset I$ et $J \not\subset I$.

$I \,\dot{\cdot}\, G = I$ n'est pas un résiduel à gauche σ-premier de I car $JJG = A \subset I$.

Exemple 2.2. Prenons pour $(\mathscr{C})$ le groupoïde réticulé à 4 éléments tels que $0 < \mathscr{A} < \mathscr{B} < \mathscr{C}$ avec la table de multiplication ci-dessous. Prenons pour (L) le treillis à 5 éléments tels que : $0 < X < Y < Z < T$. Les éléments de $(\mathscr{C})$ opèrent sur (L) suivant la table ci-dessous :

	0	$\mathscr{A}$	$\mathscr{B}$	$\mathscr{C}$
0	0	0	0	0
$\mathscr{A}$	0	0	$\mathscr{A}$	$\mathscr{A}$
$\mathscr{B}$	0	0	$\mathscr{B}$	$\mathscr{B}$
$\mathscr{C}$	0	$\mathscr{A}$	$\mathscr{B}$	$\mathscr{B}$

	0	X	Y	Z	T
0	0	0	0	0	0
$\mathscr{A}$	0	0	0	X	T
$\mathscr{B}$	0	0	X	Y	T
$\mathscr{C}$	0	X	Y	Z	T

(L) est une $(\mathscr{C})$-algèbre non associative vérifiant l'axiome D . On a :

$0 \,\dot{\cdot}\, X = \mathscr{B}$, $0 \,\dot{\cdot}\, Y = \mathscr{A}$, $0 \,\dot{\cdot}\, Z = 0 \,\dot{\cdot}\, T = 0$.

$0 \,\dot{\cdot}\, T = 0$ est un résiduel à gauche σ-premier de 0 , mais ce n'est pas un résiduel pseudo-essentiel de 0 .

D'autre part, on a $\mathscr{A}\mathscr{B} Z = 0$ ce qui montre que la réciproque de la propriété 2.2 est fausse.

Exemple 2.3. On considère le groupoïde à 4 éléments avec la table de multiplication suivante :

	o	a	b	c
o	o	o	o	o
a	o	o	o	o
b	o	o	b	a
c	o	a	b	b

On prend pour $(\mathscr{C}) = (L)$ le treillis des idéaux bilatères :

$0 = \{o\}$, $A = \{o, a\}$, $I = \{o, a, b\}$, $G = \{o, a, b, c\}$,

$0 \subset A \subset I \subset G$.

$0 \,\dot{\cdot}\, G = A$ est un résiduel à gauche σ-premier de 0, mais ce n'est pas un résiduel pseudo-essentiel de 0 .

2. Cas des sous-groupes normaux d'un groupe.

omme le montre l'exemple 2.1, un résiduel à gauche premier d'un élément X de (L) n'est pas, en général, un résiduel à gauche σ-premier de X, (même dans le cas $(\mathcal{C}) = (L)$). Cependant, dans le cas où $(\mathcal{C}) = (L)$ est le treillis des sous-groupes normaux d'un groupe G, nous allons voir qu'un résiduel premier de $X \in (L)$ est un résiduel σ-premier de X Ceci est une conséquence de la relation (1) suivante valable dans un groupe quelconque :

Si A, B, C sont trois sous-groupes normaux de G, on note :

$$[A, B, C] = [A, [B,C]] \quad ;$$

on a alors :

$$(1) \qquad [A, B, C] \subseteq [B, C, A]\,[C, A, B] .$$

Dans la suite $A^{(n)}$ désigne le sous-groupe dérivé d'ordre n de A :

$$A^{(o)} = A \ , \ A^{(n)} = [A^{(n-1)} \ , A^{(n-1)}] .$$

D'autre part, conformément à la notation générale de I, 3, on pose :

$$[A_n, A_{n-1}, \dots, A_1, B] = [A_n, [A_{n-1}, \dots, A_1, B]] \ ,$$

et $\quad \sigma_1(A,B) = [A,B] \ , \quad \sigma_n(A,B) = [A, \sigma_{n-1}(A,B)] \ .$

Propriété 2.7. Si A et B sont deux sous-groupes normaux et n un entier $\geqslant o$, on a :

$$[A^{(n)},B] \subseteq \sigma_{2^n}(A,B) .$$

Le résultat est évident pour $n = o$. Supposons que quels que soient les sous-groupes normaux A et B, on ait :

$$[A^{(n-1)}, B] \subseteq \sigma_{2^{n-1}}(A,B) .$$

Alors, d'après la relation (1) :

$$[A^{(n)},B] = [B,A^{(n-1)},A^{(n-1)}] \subseteq [A^{(n-1)},A^{(n-1)},B]\,[A^{(n-1)},B,A^{(n-1)}]$$
$$\subseteq [A^{(n-1)},A^{(n-1)},B] \ ,$$

ce qui entraine :

$$[A^{(n)},B] \subseteq [A^{(n-1)}, [A^{(n-1)},B]] \subseteq [A^{(n-1)}, \sigma_{2^{n-1}}(A,B)]$$
$$\subseteq \sigma_{2^{n-1}}(A, \sigma_{2^{n-1}}(A,B)) \text{ , d'où : } [A^{(n)},B] \subseteq \sigma_{2^n}(A,B) .$$

La propriété en résulte.

Théorème 2.4. Tout résiduel premier d'un sous-groupe normal A est un résiduel σ-premier de A.

Soit $P = A : B$ un résiduel premier de A ; on a $P = A : (A : P)$.

Soit :
$$[A_n, A_{n-1}, \dots, A_1, A : P] \subseteq A .$$

On a, en posant $C = A_1 \cap \dots \cap A_n$:
$$\sigma_n(C, A : P) \subseteq [A_n, \dots, A_1, A : P] \subseteq A .$$

Si m est un entier positif tel que $n \leqslant 2^m$, il vient, d'après la propriété 2.7 :
$$[C^{(m)}, A : P] \subseteq \sigma_{2^m}(C, A : P) \subseteq \sigma_n(C, A : P) \subseteq A \Longrightarrow C^{(m)} \subseteq A : (A : P) = P .$$

P étant premier, il en résulte $C \subseteq P$ et :

$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \subseteq P$, entraîne que P contient l'un des A_i.

P est donc un résiduel σ-premier de A.

La réciproque est fausse (cf. exemple 2.4). D'autre part, ce résultat ne s'étend pas au cas plus général où $(\mathcal{C}) = (L)$ est commutatif, (exemple 2.5).

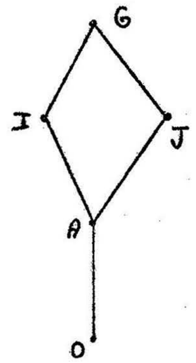
Exemple 2.4. On considère les groupes symétriques S_3 et S_5 et le groupe $G = S_3 \times S_5$. A_3 et A_5 étant les groupes alternés, 1×1, $A_3 \times 1$ et $A_3 \times S_5$ sont des sous-groupes normaux de G.

$1 \times 1 : A_3 \times 1 = A_3 \times S_5$ est un résiduel essentiel de 1×1, donc un résiduel σ-premier de 1×1. Mais le sous-groupe normal $A_3 \times S_5$ n'est pas premier, en effet :
$$[S_3 \times S_5 , S_3 \times S_5] \subseteq A_3 \times S_5 .$$

Exemple 2.5. Soit G le groupoïde commutatif à 4 éléments, dont la table de multiplication est la suivante :

	o	a	b	c
o	o	o	o	o
a	o	o	o	o
b	o	o	o	a
c	o	o	a	c

Les idéaux de G sont :
$0 = \{o\}$, $A = \{o,a\}$, $I = \{o,a,b\}$, $J = \{o,a,c\}$ et G. $(\mathcal{C}) = (L)$ est commutatif ; le treillis $(\mathcal{C}) = (L)$ des idéaux de G est le suivant :



I est un idéal premier, mais $0 : I = I$ n'est pas un résiduel σ-premier de 0, en effet : $JJI = 0$ et $J \not\subseteq I$.

3. <u>σ-Radical d'un élément de (L).</u>

Soit $X \in (L)$; d'après la propriété 2.5, l'intersection des résiduels à gauche σ-premiers des éléments contenant X est égale à l'intersection de ceux de ces résiduels qui sont minimaux, ces derniers étant en nombre fini ; c'est aussi l'intersection des résiduels à gauche $\mathcal{P}_i$ du théorème 2.1.

<u>Définition 2.4.</u> L'intersection des résiduels à gauche σ-premiers des éléments de (L) contenant X, est appelée <u>σ-radical</u> de X et notée $\mathcal{R}_1(X)$.

<u>Remarque.</u> D'après le théorème 2.1 on a $\mathcal{P}_i \geqslant X : U$ et donc :

$$\mathcal{R}_1(X) \geqslant X \because U .$$

<u>Théorème 2.5. X étant un élément quelconque de (L), l'ensemble des éléments $\mathcal{A}$ de $(\mathcal{C})$ tels qu'il existe un entier positif m vérifiant :</u>

$$\underline{\sigma_m(\mathcal{A}, U) \leqslant X}$$

<u>a un élément maximum égal au σ-radical de X.</u>

On a : $\mathcal{R}_1(X) = \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{P}_i \leqslant \mathcal{P}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, les $\mathcal{P}_i$ étant les résiduels à gauche du théorème 2.1 ; d'où :

$$\sigma_k(\mathcal{R}_1(X), U) \leqslant \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 \ldots \mathcal{P}_k U \leqslant X .$$

Montrons que $\mathcal{R}_1(X)$ est l'élément maximum de $(\mathcal{C})$ possèdant la propriété. Soit $\sigma_m(\mathcal{A}, U) \leqslant X$, m entier positif, et soit $\mathcal{P}$ un résiduel à gauche σ-premier d'un élément $X' \geqslant X$. On a :

$$\sigma_m(\mathcal{A}, X' \therefore \mathcal{P}) \leqslant \sigma_m(\mathcal{A}, U) \leqslant X \leqslant X' \Longrightarrow \mathcal{A} \leqslant \mathcal{P} , \quad (\text{déf. } 2.2).$$

Il en résulte $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{R}_1(X)$.

Propriété 2.8. Si $X = X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n$, on a :

$\mathcal{R}_1(X) = \mathcal{R}_1(X_1) \cap \mathcal{R}_1(X_2) \cap \ldots \cap \mathcal{R}_1(X_n)$.

C'est une conséquence immédiate du théorème 2.5.

Remarque. Si (L) est une $(\mathcal{C})$-algèbre associative, on a $\sigma_m(\mathcal{A},U) = \mathcal{A}^m U$. Alors $\mathcal{R}_1(X)$ est l'élément maximum parmi les $\mathcal{A} \in (\mathcal{C})$ tels que $\mathcal{A}^m \leq X \cdot . U$. On retrouve la notion de radical primaire de [5] (chap. V,1). Par contre, si (L) est une $(\mathcal{C})$-algèbre non associative, le σ-radical d'un élément $X \in (L)$ et le radical primaire de X (cf. [2], III, B) sont en général distincts ; mais ces radicaux sont comparables dans le cas $(\mathcal{C}) = (L)$.

Propriété 2.9. Dans le cas $(\mathcal{C}) = (L)$, le σ-radical $\mathcal{R}_1(X)$ d'un élément X de (L) est contenu dans le radical primaire $r(X)$.

$r(X)$ est l'intersection des éléments premiers de $(\mathcal{C})$ contenant X . Soit $\mathcal{P} \neq U$ un élément premier de $(\mathcal{C})$ contenant X . On a :

$$\sigma_m(\mathcal{R}_1(X), U) \leq X \leq \mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{R}_1(X) \leq \mathcal{P} \quad ; \quad \text{d'où :}$$

$$\mathcal{R}_1(X) \leq r(X) .$$

Cette inégalité est stricte, en général, (exemple 2.6). De plus, si $(\mathcal{C}) \neq (L)$ on ne sait pas comparer les radicaux $\mathcal{R}_1(X)$ et $r(X)$.

Exemple 2.6. Reprenons l'exemple 2.1 . Les résiduels à gauche σ-premiers des éléments de $(\mathcal{C}) = (L)$ sont I, J et G, on a : $\mathcal{R}_1(0) = I$.

Par contre, les idéaux bilatères premiers sont J et G , d'où $r(0) = J$.

On a : $\mathcal{R}_1(0) \subset r(0)$

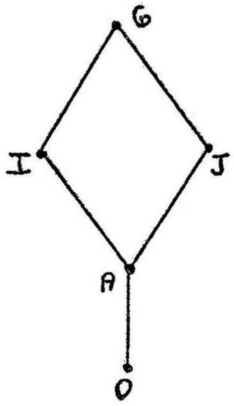
Exemple 2.7. On considère le groupoïde G à 4 éléments, dont la table de multiplication est la suivante :

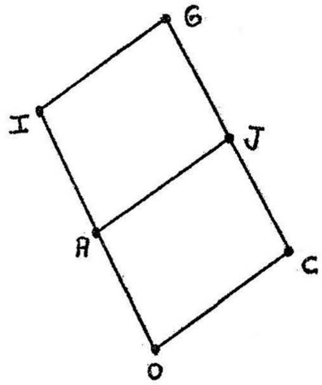
	o	a	b	c
o	o	o	o	o
a	o	o	a	o
b	o	a	a	o
c	o	o	a	c

Les idéaux bilatères de G sont :

$O = \{o\}$, $A = \{o,a\}$, $I = \{o,a,b\}$, $J = \{o,a,c\}$ et G. On a en outre l'idéal à gauche : $C = \{o,c\}$

Le treillis $(\mathcal{C})$ des idéaux bilatères et le treillis (L) des idéaux à gauche sont les suivants :





$C \cdot. A = J$ est un résiduel pseudo-essentiel de C, donc un résiduel à gauche σ-premier de C ; en outre $JJG = C$; il en résulte :

$$\mathcal{R}_1(C) = J \text{ .}$$

Les idéaux bilatères premiers sont I et G et on a $C \cdot. G = O$, d'où $r(C) = I$. $\mathcal{R}_1(C)$ et $r(C)$ sont incomparables.

III. Eléments σ-primaires de (L).

Définition 3.1. Un élément $Q \in (L)$ est dit σ-primaire s'il vérifie la condition :

$\mathcal{A}X \leq Q$, $X \nleq Q \Longrightarrow$ il existe k, entier positif tel que : $\sigma_k(\mathcal{A},U) \leq Q$.

Cette définition peut se mettre sous l'une des deux formes équivalentes suivantes, en utilisant le σ-radical $\mathcal{R}_1(Q)$:

$$\mathcal{A}X \leq Q \text{ , } X \nleq Q \Longrightarrow \mathcal{A} \leq \mathcal{R}_1(Q) \text{ ,}$$

ou :

$$\mathcal{A} \nleq \mathcal{R}_1(Q) \Longrightarrow Q \cdot. \mathcal{A} = Q \text{ .}$$

Remarque. Si (L) est une $(\mathcal{C})$-algèbre associative, la notion d'élément σ-primaire coïncide avec celle d'élément primaire (cf. [5], p. 47). Par contre, si (L) est une $(\mathcal{C})$-algèbre non associative, la notion d'élément σ-primaire est, en général, distincte de la notion d'élément primaire définie dans [2] (III, C), comme le montrent les exemples 3.1 et 3.2 . Toutefois, on a la propriété suivante :

Propriété 3.1. Dans le cas où $(\mathcal{C}) = L$, tout élément σ-primaire est primaire.
Soit Q un élément σ-primaire et soit $\mathcal{A} \not\leqslant r(Q)$.

On a (propr. 2.9) $\mathcal{R}_1(Q) \leqslant r(Q)$, d'où $\mathcal{A} \not\leqslant \mathcal{R}_1(Q)$ et par conséquent $Q \mathbin{\cdot\!.} \mathcal{A} = Q$. On en déduit que Q est primaire.

La réciproque est fausse, (exemple 3.2).

Rappelons qu'un élément de (L) est dit premier à droite si l'on a :

$\mathcal{A}X \leqslant Q \;,\; X \not\leqslant Q \implies \mathcal{A}U \leqslant Q$, (cf. [5] p. 47) .

Cette définition s'applique au cas non associatif.

Propriété 3.2. Si Q est σ-primaire, les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1) Q est premier à droite.

2) $Q \mathbin{\cdot\!.} U$ est un résiduel à gauche σ-premier de Q .

3) $Q \mathbin{\cdot\!.} U = \mathcal{R}_1(Q)$.

1) $\implies$ 2) ; On démontre par récurrence sur n que :

$\mathcal{A}_n \dots \mathcal{A}_1 U \leqslant Q \implies$ il existe i tel que $\mathcal{A}_i \leqslant Q \mathbin{\cdot\!.} U$.

C'est évident pour $n = 1$. Soit $\mathcal{A}_n \dots \mathcal{A}_1 U \leqslant Q$; posons $X = \mathcal{A}_{n-1} \dots \mathcal{A}_1 U$.

Si $X \leqslant Q$, il existe i tel que $\mathcal{A}_i \leqslant Q \mathbin{\cdot\!.} U$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$.

Sinon, on a $\mathcal{A}_n X \leqslant Q$ et $X \not\leqslant Q$; Q étant premier à droite il en résulte $\mathcal{A}_n \leqslant Q \mathbin{\cdot\!.} U$.

2) $\implies$ 3) : résulte de la définition du σ-radical $\mathcal{R}_1(Q)$.

3) $\implies$ 1) : la démonstration est celle du cas associatif.

Propriété 3.3. Si $Q \neq U$ est primaire, son σ-radical $\mathcal{R}_1(Q)$ est un résiduel à gauche propre maximum, donc σ-premier, de Q .

Démontrons d'abord que $\mathcal{R}_1(Q)$ est un résiduel à gauche propre de Q .
Si Q est premier à droite, on a $\mathcal{R}_1(Q) = Q \mathbin{\cdot\!.} U$. Sinon, on a $\mathcal{R}_1(Q) \not\leqslant Q \mathbin{\cdot\!.} U$ et il existe un entier $k > 1$ tel que :

$\sigma_{k-1}(\mathcal{R}_1(Q),U \not\leq Q$ et $\sigma_k(\mathcal{R}_1(Q),U) \leq Q$

Alors :

$\mathcal{R}_1(Q)\sigma_{k-1}(\mathcal{R}_1(Q),U) = \sigma_k(\mathcal{R}_1(Q),U) \leq Q \Longrightarrow$

$\mathcal{R}_1(Q) \leq Q \cdot. \sigma_{k-1}(\mathcal{R}_1(Q),U) = \mathcal{A}$.

D'autre part :

$\mathcal{A}\sigma_{k-1}(\mathcal{R}_1(Q),U) \leq Q$ et $\sigma_{k-1}(\mathcal{R}_1(Q),U \not\leq Q \Longrightarrow \mathcal{A} \leq \mathcal{R}_1(Q)$

D'où finalement :

$\mathcal{R}_1(Q) = \mathcal{A} = Q \cdot. \sigma_{k-1}(\mathcal{R}_1(Q),U)$.

Montrons que $\mathcal{R}_1(Q)$ est un résiduel propre maximum de Q . Soit $\mathcal{A}$ un résiduel à gauche propre de Q , on a $Q \cdot. \mathcal{A} > Q$ et Q étant primaire il en résulte $\mathcal{A} \leq \mathcal{R}_1(Q)$

Propriété 3.4. Si $Q \neq U$ est σ-primaire, $\mathcal{R}_1(Q)$ est minimum parmi les résiduels à gauche propres σ-premiers des éléments de (L) contenant Q .

C'est une conséquence de la définition du σ-radical $\mathcal{R}_1(Q)$ et de la propriété précédente, et on en déduit immédiatement :

Propriété 3.5. Si $Q \neq U$ est σ-primaire, $\mathcal{R}_1(Q)$ est le seul résiduel à gauche propre σ-premier de Q .

Théorème 3.1. Pour que $Q \neq U$ soit σ-primaire, il faut et il suffit qu'il admette un seul résiduel à gauche propre σ-premier $\mathcal{P}$ qui soit minimum parmi les résiduels à gauche σ-premiers des éléments de (L) contenant Q .

La condition nécessaire résulte des propriétés 3.4 et 3.5. La condition suffisante s'établit comme dans le cas associatif (cf. [5], p. 48).

Notons qu'un élément $Q \neq U$ qui admet un seul résiduel propre σ-premier n'est pas nécessairement σ-primaire, même dans le cas associatif (exemple 3.3).

Définition 3.2. Si $Q \neq U$ est σ-primaire, son σ-radical étant $\mathcal{P}$, on dit que Q est $\mathcal{P}\sigma$-primaire.

Propriété 3.6. Soit $Q \neq U$ et soit $\mathcal{P}$ un élément de $(\mathcal{C})$ tels que :

1) $\mathcal{A}X \leq Q$; $X \not\leq Q \Longrightarrow \mathcal{A} \leq \mathcal{P}$.

2) Il existe un entier positif n tel que $\sigma_n(\mathcal{P}, U) \leq Q$.

Alors, $\mathcal{P}$ est un résiduel à gauche σ-premier de Q et Q est $\mathcal{P}$ σ-primaire.

Q est σ-primaire, en effet : $\mathcal{A}X \leqslant Q$, $X \not\leqslant Q \Longrightarrow \mathcal{A} \leqslant \mathcal{P} \Longrightarrow$

$$\sigma_n(\mathcal{A},U) \leqslant \sigma_n(\mathcal{P},U) \leqslant Q .$$

Le σ-radical de Q est $\mathcal{P}$; en effet, soit k l'entier positif minimum tel que $\sigma_k(\mathcal{R}_1(Q), U) \leqslant Q$.

Si $k = 1$, $\mathcal{R}_1(Q)U \leqslant Q \Longrightarrow \mathcal{R}_1(Q) \leqslant \mathcal{P}$, (d'après 1)) .

Si $k > 1$, $\mathcal{R}_1(Q)\sigma_{k-1}(\mathcal{R}_1(Q),U) = \sigma_k(\mathcal{R}_1(Q),U) \leqslant Q$ et

$$\sigma_{k-1}(\mathcal{R}_1(Q),U) \not\leqslant Q \Longrightarrow \mathcal{R}_1(Q) \leqslant \mathcal{P}.$$

D'autre part, d'après 2) il existe $n > o$ tel que $\sigma_n(\mathcal{P},U) \leqslant Q$, ce qui entraîne $\mathcal{P} \leqslant \mathcal{R}_1(Q)$ et finalement : $\mathcal{R}_1(Q) = \mathcal{P}$.

Propriété 3.7. L'intersection d'un nombre fini d'éléments $\mathcal{P}$ σ-primaires de (L) est un élément $\mathcal{P}$ σ-primaire.

Soit $Q = Q_1 \cap \dots \cap Q_n$, où les Q_i sont $\mathcal{P}$ σ-primaires. On peut supposer $Q_i \neq U$ $(i = 1,2,\dots,n)$. Il suffit alors de vérifier les conditions 1) et 2) de la propriété 3.6.

Exemple 3.1. Reprenons l'exemple 2.7. On a :

$$\mathcal{R}_1(C) = J \quad \text{et} \quad C.^{\cdot}I = C.^{\cdot}G = C .$$

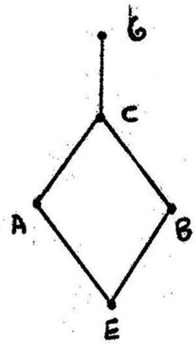
Par contre : $\quad r(C) = I \quad$ et $\quad C.^{\cdot}J = J \neq C$,

Donc C est σ-primaire mais n'est pas primaire.

Exemple 3.2. Soit G le groupe d'ordre 12 engendré par les éléments a et b tels que : $a^6 = b^4 = e$; $a^3 = b^2$; $aba = b$.

Le treillis des sous-groupes normaux est le suivant :

$E = \{e\}$, $A = \{e,a^3\}$, $B = \{e,a^2,a^4\}$, $C = \{e,a,a^2,a^3,a^4,a^5\}$ et G .



Le seul sous-groupe normal premier est G et tous les éléments de $(\mathscr{C}) = (L)$ sont donc primaires. Par contre, on a $\mathscr{R}_1(E) = C$ et $E : G = A$, donc E est primaire sans être σ-primaire ; D'autre part : $\mathscr{R}_1(A) = C$ et $A \cdot\!\!: G = A$, donc A est σ-primaire ; mais A n'est pas premier à droite, en effet :

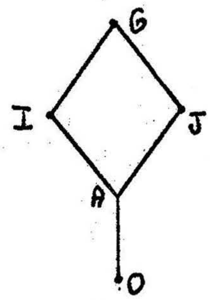
$[B, B] = E \subseteq A$, $B \nsubseteq A$ et $[B, G] = B \nsubseteq A$.

Exemple 3.3. Soit G le groupoïde à 4 éléments dont la table de multiplication est la suivante :

	o	a	b	c
o	o	o	o	o
a	o	o	a	a
b	o	a	b	a
c	o	o	o	c

On prend pour $(\mathscr{C}) = (L)$ le treillis des idéaux bilatères de G qui sont les suivants :

$0 = \{o\}$, $A = \{o,a\}$, $I = \{o,a,b\}$, $J = \{o,a,c\}$ et G.



$0 \cdot\!\!: A = J$ est le seul résiduel à gauche propre σ-premier de 0 .

On a $\mathscr{R}_1(0) = A$ et $0 \cdot\!\!: J = A \neq 0$, 0 n'est donc pas un idéal σ-primaire, bien qu'il admette un seul résiduel à gauche propre σ-premier. L'idéal J n'est pas minimum parmi les résiduels à gauche σ-premiers des idéaux bilatères de G ; par exemple, I est un résiduel à gauche σ-premier de A et $J \nsubseteq I$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERHENS (E.A) - Zur additiven Idealtheorie in nichtassoziativen Ringen, Math. Zeitschr, t. 64, 1956, p. 169-182.

[2] GERMA (M.C.) - ($\mathcal{C}$)-Algèbres non associatives. Séminaire Dubreil-Pisot (Algèbre et théorie des nombres), 1966-1967, n° 12.

[3] KURATA (Y.) - A decomposition of normal subgroups in a group, Osaka J. of Math., t. 1, 1964, p. 201-229.

[4] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.) - Théorie noethérienne des anneaux, des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatif, I, (Colloque d'Algèbre Supérieure, C.B.R.M., Bruxelles 1956, p. 79-121).

[5] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.) - Algèbre noethérienne non commutative. Paris, Gauthiers-Villars, 1963 (Mémorial des Sciences mathématiques, 154).

[6] LESIEUR (L) et CROISOT (R.) - La notion de résiduel essentiel, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 246, 1958, p. 357-360.

-:-:-:-:-:-

Séminaire d'Algèbre non commutative

Conférence n° 11 du 5 Février 1968

*

* *

Travaux de Y. Utumi sur les anneaux auto-injectifs à gauche

Melle J. CALAIS

*

* *

L'étude des anneaux auto-injectifs à gauche publiée en 1967 par Yuzo Utumi [1] est la suite d'une précédente étude parue en 1965 [2], dont nous énoncerons les principaux résultats.

Tous les anneaux que l'on considère sont unitaires. On désignera par J le radical de Jacobson d'un anneau A et on utilisera les notations suivantes :

$\overline{A} = A/_J$ et B étant une partie de A, $\overline{B} = \{ \overline{x} ; x \in B \}$,

$\ell(B) = 0 \stackrel{\cdot}{\cdot} B$ et $r(B) = 0 \cdot\!\cdot B$.

I – Anneaux continus à gauche et Anneaux auto-injectifs à gauche.

1°) Résultats fondamentaux [2]

Théorème 1 – 1. A étant un anneau auto-injectif à gauche, $\overline{A}$ est auto-injectif à gauche et régulier au sens de Von Neumann.

Théorème 1 - 2 . A étant un anneau auto-injectif à gauche, tout système d'idempotents orthogonaux de $\bar{A}$ peut être relevé en un système d'idempotents orthogonaux de A .

Le théorème 1 - 2 , ainsi que la régularité de $\bar{A}$ peuvent être démontrés avec une hypothèse moins forte que l'auto-injectivité de A . Il suffit de supposer que A satisfait aux deux conditions suivantes :

Condition C_1 : Pour tout idéal à gauche L de A , il existe un idempotent $e \in A$ tel que L est essentiel dans A e .

Condition C_2 : Si $f = f^2$ et si A f est isomorphe à un idéal à gauche L de A , alors L est aussi engendré par un idempotent.

Définition 1 - 3 . Un anneau satisfaisant aux conditions C_1 et C_2 est dit continu à gauche.

Proposition 1 - 4 . Tout anneau A continu à gauche satisfait aux deux conditions suivantes :

Condition C_3 : Pour tout idempotent e et pour tout idéal à gauche L contenu dans A e , il existe un idempotent $f \in A e$ tel que L est essentiel dans A f .

Condition C_4 : Si $A g \cap A h = 0$ pour deux idempotents g et h , A g + A h est engendré par un idempotent.

Théorème 1 - 5 . Tout anneau auto-injectif à gauche est continu à gauche [3 , théorème 57 - 13] .

Définition 1 - 6 . Un élément x d'un anneau A est dit singulier à gauche si $\ell(x)$ est un idéal à gauche essentiel dans A .

L'ensemble des éléments singuliers à gauche d'un anneau A forme un idéal Z de A que l'on appelle : l'idéal singulier à gauche de A . On définit de même l'idéal Z' singulier à droite de A .

Théorème 1 - 7 . Si A est un anneau continu à gauche, alors Z = J = Z' et $A/_Z$ est un anneau continu à gauche et régulier au sens de Von Neumann.

C'est à partir de ce théorème qu'est démontré le théorème 1 - 1 .

2°) Résultats utiles pour l'étude de [1].

Lemme 1 - 8. Soit A un anneau satisfaisant aux conditions C_3 et C_4. Soit e un idempotent et x un élément tel que $\overline{x} = \overline{x}^2$ et $\overline{x}\,\overline{e} = \overline{x}$; alors il existe un idempotent f tel que $f e = f$ et $\overline{f} = \overline{x}$.

Corollaire 1 - 9. Soit A un anneau satisfaisant aux conditions C_3 et C_4. Si $\overline{x} = \overline{x}^2$, il existe un idempotent e tel que $\overline{x} = \overline{e}$.

Théorème 1 - 10. Soit A un anneau continu à gauche et e un idempotent de A. Soit $(\overline{e}_i)$ un système d'idempotents orthogonaux de $\overline{A} = A/_{Z}$, supposons que $\overline{A}\,\overline{e}$ soit extension essentielle de $\sum \overline{A}\,\overline{e}_i$. Alors, il existe un système (f_i) d'idempotents orthogonaux de A tel que $\overline{e}_i = \overline{f}_i$ pour tout i et tel que A e est extension essentielle de $\sum A f_i$.

3°) Quelques conditions suffisantes pour qu'un anneau continu à gauche soit auto-injectif à gauche.

Théorème 1 - 11. Tout anneau d'ordre n $(n > 1)$ est auto-injectif à gauche si et seulement si il est continu à gauche.

Définition 1 - 12. Un anneau A sera dit fortement régulier si pour tout x, il existe y tel que $x = x^2 y$.

Théorème 1 - 13. Soit A un anneau continu à gauche tel que $\overline{A}$ ne contienne pas d'idéal non nul qui soit un anneau fortement régulier. Alors A est auto-injectif à gauche.

Théorème 1 - 14. Un anneau primitif (à droite ou à gauche) est auto-injectif à gauche si et seulement s'il est continu à gauche.

Théorème 1 - 15. Un anneau artinien à droite et à gauche est quasi-Frobénusien si et seulement s'il est continu (continu à droite et à gauche).

II – Anneaux auto-injectifs à gauche [1]

L'objet principal de ce paragraphe est la démonstration du théorème suivant :

Théorème : A étant un anneau auto-injectif à gauche, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $\ell(B) = 0$, pour un idéal(bilatère) B, entraîne $B = A$.

(2) $\overline{A}$ est la somme directe d'un nombre fini d'anneaux simples auto-injectifs à gauche et $r(\ell(J)) = J$.

Soit A un anneau auto-injectif à gauche, il vérifie la condition C_1 ; on démontre alors le lemme suivant :

Lemme 2 – 1. Soit B un idéal d'un anneau A auto-injectif à gauche. Si $e = e^2$ et $A\,e$ est extension essentielle de B, considéré comme A-module à gauche, alors $\overline{e}$ appartient au centre de $\overline{A}$.

La démonstration s'appuie sur le résultat suivant démontré par Y. Utumi [2, lemme 5,5] : si e et f sont deux idempotents de A, si pour tout idempotent g de A e et tout idempotent f de A f on a $A\,g \not\approx A\,h$, alors $\overline{e}\,\overline{A}\,\overline{f} = 0$.

Démontrons ici, que si L et L' sont deux idéaux à gauche non nuls respectivement contenus dans $A\,e$ et $A\,(1 - e)$, on a $L \not\approx L'$. Supposons $L \approx L'$, B étant essentiel dans $A\,e$, $L \neq 0$ implique $B \cap L \neq 0$. Montrons que l'on a aussi $B \cap L' \neq 0$. A étant auto-injectif à gauche l'isomorphisme de L sur L' peut être réalisé par la multiplication à droite par un élément de A, et B étant un idéal bilatère de A :

$$B \cap L \neq 0 \implies B \cap L' \neq 0 \quad ;$$

d'où $A\,e \cap A\,(1 - e) \neq 0$, ce qui est impossible donc $L \not\approx L'$.

On a alors, d'après le résultat énoncé plus haut :
$\overline{e}\,\overline{A}\,(\overline{1 - e}) = 0$. On en déduit que pour tout $\overline{x} \in \overline{A}$ on a : $(\overline{e}\,\overline{x} - \overline{x}\,\overline{e})^2 = 0$; $\overline{A}$ étant semi-premier, $\overline{e}$ appartient au centre de $\overline{A}$.

Le théorème suivant caractérise le radical de Jacobson d'un anneau auto-injectif à gauche.

Théorème 2 - 2 . Soient A un anneau auto-injectif à gauche et B un idéal à gauche (ou à droite) de A . Alors $B \subseteq J$ si et seulement si B ne contient pas d'idempotent non nul.

On sait que $\overline{A}$ est régulier (au sens de Von Neumann) supposons $B \nsubseteq J$. Alors $\overline{B}$ contient un idempotent non nul $\overline{x}$. D'après le corollaire 1 - 9 , il existe un idempotent $e \in A$ tel que $\overline{x} = \overline{e}$. Alors $\overline{1 - e + x} = \overline{1}$, $1 - e + x$ est un élément inversible dans A . Soit y un inverse de $1 - e + x$ dans A , la multiplication à droite par y définit un isomorphisme de $A\,e\,x = A\,e(1 - e + x)$ sur $A\,e$. D'après la condition C_2 , $A\,e\,x$ est engendré par un idempotent f , et $\overline{x} \neq 0 \Rightarrow (e \neq 0$ et $f \neq 0)$.

Si B est un idéal à gauche, on a $x \in B$, et donc $f \in B$.

Si B est un idéal à droite, posons $f = z\,x$, alors $x\,z\,x\,z$ est un idempotent non nul de B .

Corollaire 2 - 3 . Soit L un idéal à gauche de l'anneau auto-injectif à gauche A ; alors, L est essentiel dans A , considéré comme A-module à gauche, si et seulement si $r(L) \subseteq J$.

Puisque A satisfait à la condition C_1 , L n'est pas essentiel dans A si et seulement si L est contenu dans $A\,e$, avec $e = e^2 \neq 1$, et c'est le cas, si et seulement si $r(L)$ contient un idempotent non nul, c'est-à-dire $r(L) \nsubseteq J$.

Si A est un anneau auto-injectif à gauche, tout endomorphisme de A peut être réalisé par une homothétie (multiplication à droite par un élément de A), par suite $\ell(J)$ est le coeur de l'anneau A considéré comme A-module à gauche [4] , et nous avons :

Corollaire 2 - 4 . Soit A un anneau auto-injectif à gauche. Alors le coeur du A-module à gauche A est essentiel si et seulement $r(\ell(J)) = J$.

Propriété 2 - 5 . Soit B un idéal d'un anneau semi-premier A . B est essentiel dans A si et seulement si $\ell(B) = 0$.

Il suffit de montrer que pour tout idéal à gauche L de A on a :

$$B \cap L = 0 \Longleftrightarrow L\,B = 0 \quad .$$

En effet : 1) $B \cap L = 0 \implies B L = 0 \implies L B L B = 0 \implies L B = 0$

2) Supposons $L B = 0$, et soit $x \in B \cap L$;
$x^2 \in L B = 0$ et $x^2 = 0 \implies x = 0$.

Lemme 2 - 6 . Soit B un idéal de l'anneau A auto-injectif à gauche.
Si $r(\ell(J)) = J$, alors :

$$\ell(B) = 0 \implies \ell(\overline{B}) = 0 \text{ dans } \overline{A} .$$

D'après le théorème 1 - 1 , $\overline{A}$ est auto-injectif à gauche, donc il existe $\overline{e} \in \overline{A}$ tel que $\overline{A}\,\overline{e}$ soit extension essentielle de $\overline{B}$. D'après le lemme 2 - 1, $\overline{e}$ appartient au centre de $\overline{A}$, et d'après le corollaire 1 - 9 , on peut supposer que $e = e^2$ dans A . On a alors :

$$B \subsetneq A e + J = e A + J$$

$$\text{d'où} \quad A(1-e) \cap \ell(J) \subsetneq \ell(B) ,$$

et par suite :

$$A(1-e) \cap \ell(J) \neq 0 .$$

L'hypothèse $r(\ell(J)) = J$ entraîne que $\ell(J)$ est essentiel, d'après le corollaire 2 - 4 ; d'où $A(1-e) = 0$ et $e = 1$. Par suite $\overline{B}$ est essentiel dans $\overline{A}$; $\overline{A}$ étant semi-premier, on a $\ell(\overline{B}) = 0$, d'après la propriété 2 - 5 .

Soit A un anneau auto-injectif à gauche et régulier (au sens de Von Neumann); supposons que la somme des idéaux principaux à gauche $A x_i$ soit directe; alors, il existe un système d'idempotents orthogonaux (e_i) tels que $A x_i = A e_i$ pour tout i . Ce résultat a été démontré par Y. Utumi [5 - théorème 2 - 2] et sera utilisé dans la démonstration du lemme suivant :

Lemme 2 - 7 . Soit A un anneau auto-injectif à gauche et B un idéal contenant J . Alors :

$$(\ell(\overline{B}) = 0 \text{ dans } \overline{A}) \implies (\ell(B) = 0 \text{ dans } A) .$$

$\ell(\overline{B}) = 0$ dans A signifie que $\overline{B}$ est essentiel dans $\overline{A}$. Soit $C = \sum^{\oplus} \overline{A}\,\overline{x}_i$ un idéal à gauche maximal, somme directe d'idéaux à gauche principaux contenus dans $\overline{B}$. Puisque C est maximal, $\overline{B}$ est extension essentielle de C , on en déduit que C est essentiel dans $\bar{A}$. Il existe alors un système $(\bar{e}_i)$ d'idempotents orthogonaux de $\bar{A}$ tels que $\bar{A}\,\bar{e}_i = \bar{A}\,\bar{x}_i$ pour chaque i. D'après le théorème 1 - 10, on peut supposer que (e_i) est un système d'idempotents orthogonaux de A et que $\sum A\, e_i$ est essentiel dans A. $J \subset B$, implique que B contient chacun des e_i. $\ell(B) \neq 0$ entraînerait $\ell(B) \cap \sum A\, e_i \neq 0$; mais on a $\ell(B) = e_i = 0$ pour tout i, donc $\ell(B) \cap \sum A\, e_i = 0$ et $\ell(B) = 0$.

<u>Théorème 2 - 8</u>. Soit A un anneau auto-injectif à gauche, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $\ell(B) = 0$ pour un idéal B implique $B = A$.

(2) $\bar{A}$ est somme directe d'un nombre fini d'anneaux simples auto-injectifs à gauche et $r(\ell(J)) = J$.

a) Montrons que (1) $\Longrightarrow$ (2) dans le cas où $J = 0$.

Soit P un idéal bilatère maximal, $P \neq A$ donc $\ell(P) \neq 0$. J étant nul, A ne contient pas d'idéal nilpotent non nul, donc $P \cap \ell(P) = 0$ et P n'est pas essentiel, P est facteur direct. Considérons la somme C de tous les idéaux bilatères maximaux. Si l'on avait $C \neq A$, C serait contenu dans un idéal maximal P, le supplémentaire de P ne serait pas dans C, ce qui est contraire à la définition de C, donc $C = A$. A, considéré comme A - A bimodule, est complètement réductible donc est somme directe d'un nombre fini d'anneaux simples. Chacun de ces anneaux est auto-injectif à gauche puisque A est auto-injectif à gauche.

b) Montrons que (1) $\Longrightarrow$ (2) dans le cas général, $J \neq 0$.

Supposons que l'on ait $\ell(\bar{B}) = 0$ dans $\bar{A}$ pour un idéal B contenant J. D'après le lemme 2 - 7, on a $\ell(B) = 0$, d'où $B = A$ et $\bar{B} = \bar{A}$. D'après a) $\bar{A}$ est somme d'un nombre fini d'anneaux simples auto-injectifs à gauche.

Montrons maintenant que $r(\ell(J)) = J$.

Soit e un idempotent de A tel que $\ell(J)$ soit essentiel dans A e, d'après le lemme 2 - 1, $\bar{e}$ appartient au centre de $\bar{A}$, et $J + e\,A = J + A\,e$ est un idéal de A.

$\ell(J + eA) = \ell(J) \cap A(1-e) = 0$, d'où $J + eA = A$ et $eA = A$; ainsi, $e = 1$. L'idéal à gauche $\ell(J)$ est essentiel dans A, d'où $r(\ell(J)) = J$ d'après le corollaire 2 - 4.

c) Montrons que (2) $\Rightarrow$ (1). Soit B un idéal de A tel que $\ell(B) = 0$. D'après le lemme 2 - 6, on a $\ell(\overline{B}) = 0$ dans $\overline{A}$, par suite $\overline{B}$ est essentiel dans $\overline{A}$, puisque $\overline{A}$ est semi-premier. L'hypothèse (2) implique alors $\overline{B} = \overline{A}$, d'où $A = B + J$, donc $A = B$.

<u>Corollaire 2 - 9</u>. Soit A un anneau auto-injectif à gauche satisfaisant aux conditions du théorème 2 - 8. Alors, $\overline{A}$ est artinien si et seulement si tout idéal à gauche non nul contient un idéal à gauche <u>uniforme</u>, c'est-à-dire un idéal à gauche non nul qui est extension essentielle de chacun des idéaux à gauche non nuls qu'il contient.

a) <u>Condition nécessaire</u> : par hypothèse $\overline{A}$ est artinien. Pour tout idéal à gauche L de A, il existe $e \in A$ tel que $e = e^2$ et Ae est extension essentielle de L. Montrons que $\overline{A}\,\overline{e}$ contient un idempotent primitif $\overline{f}$.

Soit $\overline{g}$ un idempotent non nul de $\overline{A}\,\overline{e}$; on a $\overline{A}\,\overline{g} \subseteq \overline{A}\,\overline{e}$ et $\overline{e}\,\overline{g} = \overline{g}\,\overline{e} = \overline{g}$, car $\overline{e}$ est central dans $\overline{A}$.

Soit $\overline{h}$ un idempotent non nul de $\overline{A}\,\overline{g}$; on a $\overline{A}\,\overline{h} \subsetneq \overline{A}\,\overline{g}$ et $\overline{h}\,\overline{g} = \overline{h}$, d'où $(\overline{h}\,\overline{g} - \overline{h}\,\overline{g})^2 = 0$; $\overline{A}$ étant semi-premier on en déduit $\overline{h}\,\overline{g} = \overline{g}\,\overline{h} = \overline{h}$.

On détermine ainsi une chaîne décroissante d'idéaux à gauche de $\overline{A}$. $\overline{A}$ est artinien, donc il existe un idempotent non nul $\overline{f} \in \overline{A}\,\overline{e}$ tel que $\overline{A}\,\overline{f}$ soit l'idéal à gauche minimum de la chaîne; $\overline{f}$ est alors primitif. D'après le lemme 1 - 8, on peut supposer $f = f^2$ et $fe = f$ dans A. L étant essentiel dans Ae, on a $L \cap Af \neq 0$.

Montrons que $L \cap Af$ est uniforme.

Soit N un idéal à gauche tel que $N \subsetneq L \cap Af$. Il existe un idempotent $k \in Af$ tel que N soit essentiel dans Ak. $\overline{f}$ étant primitif :

$$\overline{A}\,\overline{k} \subsetneq \overline{A}\,\overline{f} \Longrightarrow \overline{k} = \overline{f},$$

d'où $\overline{A}\,\overline{k} = \overline{A}\,\overline{f}$. En utilisant le lemme 1 – 5 démontré par Y. Utumi dans [2](2), on en déduit que $A\,k = A\,f$. $A\,f$ est donc extension essentielle de tout idéal à gauche $N \subseteq L \cap A\,f$, en particulier $L \cap A\,f$ est essentiel dans $A\,f$, et par suite $L \cap A\,f$ est extension essentielle de tout idéal à gauche qu'il contient.

b) Condition suffisante : supposons que tout idéal à gauche non nul de A contienne un idéal à gauche uniforme. A satisfaisant aux conditions du théorème 2 – 8', soit $\overline{g}$ un élément unité de l'un quelconque des anneaux simples dont $\overline{A}$ est la somme directe. On peut supposer que g est un idempotent de A. $A\,g$ contient, par hypothèse, un idéal à gauche I uniforme. Il existe alors, un idempotent h tel que I soit essentiel dans $A\,h$ et $h\,g = h$. $\overline{h}\,\overline{g} = \overline{h}$ et $\overline{h}$ est un idempotent primitif de $\overline{A}$. Puisque $\overline{A}$ est régulier, $\overline{A}\,\overline{h}$ est un idéal à gauche minimal de $\overline{A}$. Ainsi $\overline{A}\,\overline{g}$ est un anneau simple contenant un idéal à gauche minimal, il est simple et artinien. Par suite, $\overline{A}$ est artinien.

Remarque : Dans les conditions du corollaire 2 – 9, tout annulateur à gauche contient un annulateur à gauche minimal. En fait, pour tout idempotent e de A tel que $\overline{e}$ soit primitif, $A\,e \cap \ell\,(J)$ est un annulateur à gauche minimal. Tout annulateur à gauche minimal est de cette forme, car tout idéal à droite maximal s'écrit $J + (1 - e)\,A$, e étant un idempotent tel que $\overline{e}$ soit primitif.

III - P F - anneaux à gauche.

Soient M et N deux A-modules à gauche, désignons par Im (M,N) la somme des Im (v) pour tous les $v \in \mathrm{Hom}_A\,(M,N)$.

Définition 3 – 1. M étant un A-module à gauche, on dit que M est complètement fidèle si :

$$\mathrm{Im}\,(M,A) = A.$$

[2, Lemme 1 – 5] : soit v un homomorphisme d'anneaux de A dans B, tel que Ker v ne contienne pas d'idempotent non nul. Si e et f sont deux idempotents de A tel que $A\,e \subseteq A\,f$, et $v\,(A\,e) = v\,(A\,f)$, alors $A\,e = A\,f$.

Définition 3 - 2 . Un anneau A sera appelé un PF-anneau à gauche, si tout A-module à gauche M fidèle est complètement fidèle.

En remarquant que $\ell(M) \subseteq \ell(\mathrm{Im}(M,A))$, on voit que tout A-module complètement fidèle est fidèle.

Azumaya a montré que tout QF-anneau est un PF-anneau à gauche.

Proposition 3 - 3 . Soit A un anneau auto-injectif à gauche tel que tout idéal à gauche non nul contienne un idéal à gauche minimal. Soit S le socle à gauche de A .

Alors pour tout A-module à gauche M , on a :

$$S \cap \ell(M) = S \cap \ell(\mathrm{Im}(M,A))$$

La remarque faite plus haut montre qu'il suffit de démontrer que $S \cap \ell(\mathrm{Im}(M,A)) \subseteq S \cap \ell(M)$.

A étant auto-injectif à gauche, on a :

$$\mathrm{Im}(M,A) = \sum_{x \in M} \mathrm{Im}(Ax,A) .$$

Or pour tout $x \in M$, on a

$$\mathrm{Im}(Ax,A) = \mathrm{Im}(A/_{\ell(x)},A) = Ar(\ell(x))$$

d'où

$$r(\ell(x)) \subseteq \mathrm{Im}(Ax,A)$$

et $$\ell(\mathrm{Im}(Ax,A)) \subseteq \ell(r(\ell(x))) .$$

Or dans un anneau auto-injectif à gauche, tout idéal à gauche I est essentiel dans $\ell(r(I))$, donc $\ell(x)$ est essentiel dans $\ell(r(\ell(x)))$ pour tout $x \in M$. Par suite tout idéal à gauche minimal de $\ell(r(\ell(x)))$ est un idéal minimal de $\ell(x)$, d'où

$$S \cap \ell(x) = S \cap \ell(r(\ell(x))) ;$$

en prenant l'intersection pour tous les $x \in M$, on a :

$$S \cap \ell(\mathrm{Im}(M,A)) \subseteq S \cap \ell(M) .$$

Dans la démonstration du théorème suivant nous aurons à utiliser un résultat dû à Azumaya :

Etant donné un anneau A , s'il existe un A-module à gauche injectif et complètement fidèle, A est auto-injectif à gauche.

Théorème 3 - 4 . Un anneau A est un P-F-anneau à gauche si et seulement si :

1) il est auto-injectif à gauche.
2) $\bar{A}$ est artinien.
3) tout idéal à gauche non nul contient un idéal à gauche minimal.

a) Condition suffisante : soit S le socle à gauche de A . S est essentiel dans A , montrons que $S = r\,(J)$. On a nécessairement $S \subseteq r\,(J)$. D'autre part $\bar{A}$ est artinien, régulier, donc semi-simple. Or $r\,(J)$ peut être considéré comme un $\bar{A}$-module à gauche puisque $J\,r\,(J) = 0$. $\bar{A}$ étant semi-simple, $r\,(J)$ est semi-simple donc contenu dans S , d'où $S = r\,(J)$.

D'après le corollaire 2 - 3 , on a $r\,(r\,(J)) \subseteq J$. Puisque $r\,(J)$ est somme directe des idéaux à gauche minimaux de A , $r\,(J)$ est le plus petit des idéaux à gauche essentiels dans A . Par suite $r\,(J) \subseteq \bigcap_{x \in J} \ell\,(x)$, puisque J coïncide avec l'idéal singulier à gauche de A ; d'où $r\,(J) \subseteq \ell(J)$ et $J \subseteq r\,(\ell(J)) \subseteq r\,(r\,(J)) \subseteq J$, donc $\underline{J = r\,(\ell(J))}$.

On peut alors appliquer le théorème 2 - 8 , c'est-à-dire que le seul idéal tel que $\ell\,(B) = 0$ est A . Soit M un A-module à gauche fidèle. On a $\ell\,(M) = 0$, d'où $\ell\,(\mathrm{Im}\,(M,A)) = 0$ d'après la proposition 3 - 3 , et $\mathrm{Im}\,(M,A) = A$ puisque $\mathrm{Im}\,(M,A)$ est un idéal de A . M est donc complètement fidèle.

b) Condition nécessaire : Le A-module à gauche A a une extension injective K qui est complètement fidèle par hypothèse. Donc d'après le résultat d'Azumaya cité plus haut, A est auto-injectif à gauche. Soit B un idéal de A tel que $\ell\,(B) = 0$. B est A-module à gauche fidèle donc complètement fidèle. L'auto-injectivité de A implique $B = A$. En vue de l'application du corollaire 2 - 9 , il suffit de démontrer que tout idéal à gauche non nul contient un idéal à gauche minimal.

Soit S le socle à gauche de A. Il existe un idempotent e tel que S est essentiel dans $A\,e$ et $\overline{e}$ appartient au centre de $\overline{A}$ (lemme 2 - 1). Soit M la somme directe de $A\,e$ et de $A/_{L_i + Ae}$ pour tous les idéaux à gauche L_i essentiels dans $A\,(1-e)$.

Supposons d'abord que M soit fidèle, alors M est complètement fidèle et

$$A = \mathrm{Im}(M,A) = \mathrm{Im}(Ae,A) + \sum_i \mathrm{Im}(A/_{L_i + Ae}, A) = Ae\,A + \sum_i A\,r\,(L_i + A_e) .$$

$L_i + Ae$ étant essentiel, on a $r\,(L_i + Ae) \subsetneq J$ pour tout i ; donc $\overline{A} = \overline{A}\,\overline{e}\,\overline{A} = \overline{A}\,\overline{e}$, puisque $\overline{e}$ appartient au centre de $\overline{A}$. On en déduit que $\overline{e} = \overline{1}$ et $e = 1$. S est donc un idéal à gauche essentiel, par suite tout idéal à gauche non nul contient un idéal minimal.

Supposons maintenant M non fidèle, on a

$$0 \neq \ell(M) \subseteq A\,(1-e) \cap \left(\bigcap (L_i + A\,e)\right)$$

Puisque $L_i \subseteq A\,(1-e)$, on a $A\,(1-e) \cap (L_i + A\,e) = L_i$, d'où $\bigcap L_i \neq 0$. $\bigcap L_i$ est complètement réductible d'après le lemme 3 - 5, il est contenu dans le socle à gauche S. Or, on a $\bigcap L_i \subseteq A\,(1-e)$, d'où contradiction.

<u>Lemme 3 - 5</u>. Soit M un A-module à gauche, supposons que l'intersection D de tous les sous-modules essentiels soit non nulle, alors, D est complètement réductible.

Soit N un sous-module de D et soit H un sous-module maximal de M disjoint de N, alors $N + H$ est essentiel et contient D ; $D = N \oplus (D \cap H)$, c'est-à-dire que tout sous-module de D est facteur direct de D ;

<u>Principales propriétés des anneaux PF-à gauche.</u>

<u>Propriété 3 - 6</u>. Dans un PF-anneau à gauche, le socle à droite coïncide avec le socle à gauche et $S = r\,(J) = \ell\,(J)$.

<u>Propriété 3 - 7</u>. Soit S le socle d'un PF-anneau à gauche.

1) S est un idéal à droite essentiel, c'est-à-dire que tout idéal à droite contient un idéal à droite minimal.

2) Tout idéal à droite minimal est un annulateur à droite et est de la forme $e\,S$ où e est un idempotent primitif.
Réciproquement, si e est un idempotent primitif $e\,S$ est un idéal à droite minimal.

<u>Propriété 3 - 8</u>. S étant le socle d'un anneau PF-à gauche, on a
$r(S) = \ell(S) = J$.

<u>Propriété 3 - 9</u>. Un anneau A PF-à gauche satisfait aux conditions suivantes:

1) Si un idéal à droite R de A est isomorphe à $A\,e$, avec $e = e^2$, alors R est aussi engendré par un idempotent.

2) Si R est un idéal à droite de A, tel que $r(\ell(R))$ soit extension essentielle de R, il existe un idempotent e tel que R est essentiel dans $e\,A$. En particulier, si R est de type fini, R a une extension essentielle engendrée par un idempotent.

3) Si R est un idéal à droite essentiel dans $r(\ell(R))$ et contenu dans $e\,A$, avec $e = e^2$, il existe un idempotent $f \in e\,A$ tel que R est essentiel dans $f\,A$.

4) Soit $g\,A \cap h\,A = 0$, g et h étant idempotents, alors $g\,A + h\,A$ est engendré par un idempotent.

Un problème reste ouvert : un PF-anneau à gauche est-il toujours PF-anneau à droite?

BIBLIOGRAPHIE

[1] Utumi Yuzo - Self injective rings - Jour. of Algebra 6, 56 - 54 , 1967 .

[2] Utumi Yuzo - On continuous rings and self injective rings - Trans. Am. Math. Soc. 118 (1965) 158 - 173 .

[3] C.W. Curtis and I. Reiner - Representation theory of finite groups and associative algebras - Interscience New-York 1962 .

[4] L. Lesieur et R. Croisot - Coeur d'un module - J. Math. Pures Appl. 42 (1963) 367 - 407 .

[5] Utumi Yuzo - On continuity and self injectivity of a complete regular rings . Canad. J. Math. 18 (1966) , 404 - 412 .

[6] Ikeda M. and Nakayama T. On some caracterisation of quasi-Frobenius and regular rings - Proc. Am. Math. Soc. 5 (1954) - 15 - 19 .

[7] Azumaya G. A duality theory for injective modules - Am. J. Math. 81 (1959) , 249 - 278 .

[8] Utumi Yuzo - On continuous regular rings and semi simple self injective rings, Canad. J. Math. 12 (1960) 597 - 605 .

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

MODULES TERTIAIRES, MODULES PRIMAIRES ET LEMME D'ARTIN REES

Conférence n° 12 du 26 février 1968

par Marie-Christine GERMA

-:-:-:-:-:-:-:-

Notre but est ici d'étudier l'aspect particulier suivant de la théorie noethérienne non commutative de L. LESIEUR et R. CROISOT [1].

1.- Considérant des modules à gauche unitaires sur des anneaux unitaires non nécessairement commutatifs nous nous intéressons aux sous-modules primaires et aux sous-modules tertiaires d'un module quelconque. Un cas particulier de ceci est constitué par les idéaux à gauche primaires ou tertiaires d'un anneau A.

2.- Constatant que dans le cas d'un anneau commutatif noethérien les notions "primaire" et "tertiaire" coïncident nous voulons étudier les anneaux non nécessairement commutatifs où ces notions coïncident encore. Ces anneaux, sous l'hypothèse qu'ils sont noethériens à gauche, ne sont pas autre chose que les anneaux noethériens à gauche où le lemme d'Artin REES est valable. Ceci a été mis en évidence par L. LESIEUR et R. CROISOT [2] .

Nous avons rassemblé quelques exemples de ces anneaux qui apparaissent comme une généralisation des anneaux noethériens commutatifs, exemples donnés par [1] ,[3] et [4] .

RAPPELS.

Nous utiliserons la présentation maintenant classique des décompositions primaires et tertiaires de LESIEUR et CROISOT [1] ; RILEY [3] en donne une présentation axiomatique intéressante dont on trouvera un résumé dans l'exposé de GRAPPY [12].

HYPOTHESES A.

$$\begin{cases} A & \text{anneau non nécessairement commutatif, unitaire, noethérien bilatère} \\ U & A\text{-module à gauche, unitaire, noethérien.} \end{cases}$$

Ceci est réalisé dans l'un des cas particuliers suivants :

(1) A anneau noethérien à gauche, et $U = A$ considéré comme A-module à gauche.

(2) U est un A-module à gauche de type fini avec A noethérien à gauche.

THEORIE TERTIAIRE. (sous les hypothèses A).

Théorème 1. X étant un sous-module quelconque de $\mathfrak{U}$, l'ensemble des idéaux bilatères $\mathfrak{a}$ de A tels que :

$$(X . \mathfrak{a}) \cap C = X \implies C = X \quad .$$

est une section commençante d'élément maximum $R_3(X)$. De plus $R_3(X)$ est l'intersection des résiduels essentiels de X.

Théorème 2. $R_3(X)$ est aussi l'ensemble des éléments $a \in A$ vérifiant la condition :

$$b \not\in X \Longrightarrow \exists c \in (b) \text{ tel que } c \not\in X \text{ et } a(c) \subseteq X .$$

On désigne par (b) par exemple le sous-module de U engendré par l'élément b.

Démonstration : voir [1] page 73.

Définition 1. $R_3(X)$ est appelé radical tertiaire de X.

Proposition 3 : Quels que soient les sous-modules $X_1, X_2, \dots, X_n$ de U on a :

$$R_3(X_1 \cap X_2 \dots \cap X_n) \supseteq R_3(X_1) \cap \dots \cap R_3(X_n)$$

et en général on n'a pas l'égalité.

Définition 2. Soit $Q \subseteq U$; Q est dit tertiaire s'il vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

1. $\alpha(b) \subseteq Q$, $b \not\in Q \Longrightarrow \alpha \in R_3(Q)$
2. $Q \mathbin{.\cdot} \mathfrak{a} \supset Q$ et $(Q \mathbin{.\cdot} \mathfrak{a}) \cap X = Q \Longrightarrow X = Q$
3. $Q \mathbin{.\cdot} \mathfrak{a} \supset Q$ et $(Q \mathbin{.\cdot} \mathfrak{a}) \cap X \subseteq Q \Longrightarrow X \subseteq Q$
4. $\mathfrak{a} X \subseteq Q$, $X \not\subseteq Q \Longrightarrow \mathfrak{a} \subseteq R_3(Q)$
5. $\mathfrak{a} \not\subseteq R_3(Q) \Longrightarrow Q \mathbin{.\cdot} \mathfrak{a} = Q$
6. $Q = U$ ou $Q \neq U$ et Q possède un seul résiduel essentiel .

Proposition 4 : Tout sous-module $\cap$-irréductible de U est tertiaire.

Théorème d'existence 5. Pour tout sous-module X de U, $X \neq U$, il existe au moins une décomposition réduite de X comme intersection d'un nombre fini de sous-modules tertiaires de U.

Théorème d'unicité 6 (en un certain sens). Voir [1] p. 78.

Théorie primaire (sous les hypothèses A).

radical primaire d'un idéal bilatère $\mathfrak{a}$ de A

$r(\mathfrak{a}) = \cap$ idéaux premiers contenant $\mathfrak{a} = \cap$ idéaux premiers minimaux contenant $\mathfrak{a}$ (la deuxième intersection est une intersection finie).

Proposition 7:

$F = \{B$, idéaux bilatères de A tel que $\exists n$, $B^n \subseteq \mathfrak{a}\}$ est une section commençante d'élément maximum $r(\mathfrak{a})$.

Si $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}', \mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n$ sont des idéaux bilatères de A on a les deux propositions suivantes :

Proposition 8 : $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}' \Rightarrow r(\mathfrak{a}) \subseteq r(\mathfrak{a}')$

Proposition 9 : $r(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \cap \dots \cap \mathfrak{a}_n) = r(\mathfrak{a}_1) \cap \dots \cap r(\mathfrak{a}_n)$.

Définition 3. X étant un sous-module de U, on pose :

$$r(X) = r(X' . U) = r^{U}(X)$$

$r^U(X)$ s'appelle radical primaire de X considéré comme sous-module de U ; quand il n'y a pas ambiguité on écrit simplement $r(X)$.

Remarque : pour tout sous-module X de U on a

$$r(X) \subseteq R_3(X) .$$

Proposition et définition 4 :

Soit $Q \subseteq U$; Q est dit primaire dans U s'il vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

1. $[\mathfrak{a}X \subseteq Q \ , \ X \nsubseteq Q \ , \ X \subseteq U] \implies \mathfrak{a} \subseteq r^U(Q)$

2. $\mathfrak{a} \nsubseteq r^U(Q) \implies Q \cdot\!\!\cdot\, \mathfrak{a} = Q$

3. $[\mathfrak{a}X \subseteq Q \ , \ X \nsubseteq Q \ , \ X \subseteq U] \implies \exists n$ tel que $\mathfrak{a}^n \subseteq Q \cdot\!\!\cdot\, U$

4. Q a un seul résiduel à gauche propre premier qui est aussi premier minimum contenant $Q \cdot\!\!\cdot\, U$.

En particulier, Q est un idéal à gauche primaire de l'anneau A si l'on a :

$aAb \subseteq Q \ , \quad b \notin Q \implies \exists n$ tel que $(a)^n \subseteq Q$.

Remarque : dans la propriété 2 le résiduel $Q \cdot\!\!\cdot\, \mathfrak{a}$ est à prendre dans U .

Proposition 10 :

Tout sous-module primaire de U est tertiaire.

Remarque : un sous-module $\cap$ -irréductible de U n'est pas nécessairement primaire.

Remarques : a) on n'a pas de théorème d'existence de décomposition en intersection de sous-modules primaires.

b) quand un sous-module Q de U admet une décomposition primaire celle-ci satisfait à un théorème d'unicité en un certain sens, voir [1] p. 50.

Théorème 11. Sous les hypothèses A , les propriétés suivantes sont équivalentes:

1) tout sous-module de U admet une décomposition primaire dans U .

2) tout sous-module tertiaire de U est primaire dans U .

3) U vérifie la propriété d'Artin REES (définition 5).

Définition 5 :

Soient A un anneau et U un A-module à gauche. On dit que U vérifie la propriété d'Artin REES si l'on a :

quels que soient $\mathfrak{a}$ un idéal bilatère de A , X un sous-module de U , n un entier, il existe h(n) entier tel que :

$$\mathfrak{a}^{h(n)} U \cap X \subseteq \mathfrak{a}^n X .$$

Démonstration du théorème 11.

Ceci est démontré dans [2] . La démonstration faite ici suit la méthode de [5] , elle-même inspirée de [6] . On montre dans l'ordre $2 \Longrightarrow 1 \Longrightarrow 3 \Longrightarrow 2$.

$2 \Longrightarrow 1$ évident.

$1 \Longrightarrow 3$ soient $\mathfrak{a}$ un idéal bilatère de A , N un sous-module de U , n un entier. On considère la décomposition primaire réduite.

$$\mathfrak{a}^n N = Q_1 \cap \dots \cap Q_m$$

Si $N \subseteq Q_i$ pour $i = 1, \ldots, m$; la propriété 3 est trivialement vérifiée pour N , car

$$\mathfrak{a}^n U \cap N \subseteq N \subseteq Q_1 \cap \ldots \cap Q_m = \mathfrak{a}^n N .$$

Si, pour au moins un i , on a $N \not\subseteq Q_i$, alors on peut supposer qu'il existe m' $(m' \leq m)$ tel que l'on ait $N \not\subseteq Q_i$ $(i = 1, \ldots, m')$ et $N \subseteq Q_i$ $(i = m'+1, \ldots, m)$ - les Q_i étant primaires, il existe alors pour chaque i $(i = 1, \ldots, m')$ un entier s_i tel que $(\mathfrak{a}^n)^{s_i} \subseteq Q_i \cdot\!\!\cdot U$ d'où en posant $s = \sup(s_1, \ldots, s_{m'})$

$$\mathfrak{a}^{ns} U \cap N \subseteq \mathfrak{a}^n N$$

c. q. f. d.

$3 \Longrightarrow 2$. Soit N un sous-module tertiaire de U . Soient $\mathfrak{a}$ un idéal bilatère de A et X un sous-module de U tel que $\mathfrak{a} X \subseteq N$ et $X \not\subseteq N$ - Nous allons montrer que pour un entier h convenable $\mathfrak{a}^h \subseteq N \cdot\!\!\cdot U$. N étant tertiaire avec $\mathfrak{a}X \subseteq N$, $X \not\subseteq N$ on a : $N \subset N \cdot\!\!\cdot \mathfrak{a} \subseteq U$. La propriété d'Artin REES donne alors un entier h tel que :

$$\mathfrak{a}^h U \cap (N \cdot\!\!\cdot \mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{a}(N \cdot\!\!\cdot \mathfrak{a}) \subseteq N$$

et N étant tertiaire ceci entraîne $\mathfrak{a}^h U \subseteq N$

c. q. f. d.

<u>Définition 6</u> : Un anneau A noethérien à gauche vérifiant comme A-module à gauche l'une des propriétés équivalentes du théorème 11 est appelé <u>anneau classique</u>.

<u>Définition 7</u> : Un A-module U vérifiant les hypothèses (A) et les propriétés équivalentes du théorème 11 est appelé <u>module d'Artin REES</u>.

Remarque : Dans un module d'Artin REES le radical tertiaire et le radical primaire d'un sous-module tertiaire coïncident

EXEMPLES D'ANNEAUX CLASSIQUES ET DE MODULES D'ARTIN REES

Proposition 1.1. - Tout anneau commutatif noethérien est un anneau classique

En effet tout idéal à gauche admet une décomposition primaire.

Proposition 1.2. - Un anneau noethérien Λ dans lequel tous les idéaux sont bilatères est un anneau classique.

Démonstration : L'hypothèse que les idéaux sont bilatères implique que $x\Lambda = \Lambda x$ pour tout $x \in \Lambda$. Ceci implique que un idéal à gauche I de Λ est primaire au sens rappelé plus haut si et seulement si il est primaire au sens suivant :

"$xy \in I$, $y \notin I$ entraîne une puissance de x appartient à I" qui est la définition du cas commutatif. Alors la démonstration de [7, lemme 3, p. 21] s'écrit sans modification pour montrer que les idéaux irréductibles de Λ sont primaires.

Proposition 1.3. - Soit Λ un anneau classique. Alors tout anneau quotient $\Gamma = \Lambda/_I$ est un anneau classique.

Démonstration :

a) Λ étant noethérien à gauche, $\Gamma = \Lambda/_I$ est également noethérien à gauche ;

b) Tout idéal à gauche $\mathfrak{a}'$ de Γ admet une décomposition primaire ; en effet si f est l'homomorphisme canonique $\Lambda \longrightarrow \Lambda/_I$ on a $\mathfrak{a}' = f(\mathfrak{a})$ avec $\mathfrak{a} = f^{-1}(\mathfrak{a}') \supseteq I$. Soit $\mathfrak{a} = Q_1 \cap \ldots \cap Q_n$ une décomposition primaire réduite de $\mathfrak{a}$ dans Λ ; les Q_i contenant I, on peut écrire $f(\mathfrak{a}) = f(Q_1) \cap \ldots \cap f(Q_n)$, et ceci est une décomposition primaire de $f(\mathfrak{a})$ en vertu du lemme suivant :

Lemme 1.1. - Soit Q idéal à gauche d'un anneau Λ avec $Q \supseteq I$; Si Q est P-primaire alors $f(Q)$ est $f(P)$ primaire.

Démonstration facile.

Proposition 1.4. - Tout quotient d'un module d'Artin REES est un module d'Artin REES.

Démonstration :

a) si M est un A-module à gauche d'Artin REES $M' = M/_N$ est un A-module à gauche noethérien.

b) tout sous-module tertiaire $Q/_N$ de $M/_N$ est primaire. Ceci est conséquence immédiate du lemme 1.3. lui-même conséquence du lemme 1.2 suivant.

Lemme 1.2. - Soit M un A-module et $N \subseteq Q \subseteq M$. Alors il y a correspondance bijective entre les résiduels propres de Q et les résiduels propres de $Q/_N$, qui conserve la propriété d'essentialité.

Démonstration évidente.

Lemme 1.3. - Soit M un A-module, $N \subseteq Q \subseteq M$. Si Q est P-tertiaire (resp. P-primaire) $Q/_N$ est P-tertiaire (resp. P-primaire) et réciproquement.

Démonstration élémentaire.

Proposition 1.5. - Si M et N sont deux A-modules d'Artin REES, le module $M \oplus N$ est encore un module d'Artin REES.

a) $M \oplus N$ est noethérien,

b) Soit R un sous-module $\mathfrak{a}$-tertiaire de $M \oplus N$. Montrons que R est primaire. D'après [3 - lemme 1.3] $M \cap R$ est un sous-module $\mathfrak{a}$-tertiaire de M , $N \cap R$ est un sous-module $\mathfrak{a}$-tertiaire de N . $M \cap R$ (resp. $N \cap R$) est donc $\mathfrak{a}$-primaire dans M (resp. dans N). Donc il existe des entiers h et k tels que $\mathfrak{a}^h M \subseteq M \cap R$ et $\mathfrak{a}^k N \subseteq N \cap R$ où $\mathfrak{a} = r^M(M \cap R) = r^N(N \cap R) = R_3^{M \oplus N}(R)$ d'où $\mathfrak{a}^{\max(h,k)} (M \oplus N) \subseteq (M \cap R) \oplus (N \cap R) \subseteq R$.

Ceci montre que $\mathfrak{a} \subseteq r(R)$ or $r(R) \subseteq R_3(R) = \mathfrak{a}$ (propriété générale des radicaux) d'où $r(R) = R_3(R) = \mathfrak{a}$, ce qui montre que R est $\mathfrak{a}$-primaire dans $M \oplus N$.

<u>Corollaire 1.6.</u> - <u>Tout module de type fini M sur un anneau classique Λ est un Λ-module d'Artin REES.</u>

a) M est noethérien,

b) Λ est un Λ-module à gauche d'Artin REES.

c) $M \simeq \Lambda^n/N$.

<u>Proposition 1.7.</u> - <u>L'anneau M_n des matrices carrées d'ordre n sur un anneau commutatif noethérien A est un anneau classique.</u>

Ceci a été démontré par LESIEUR et CROISOT [1. Théorème 8.6, p. 83]. Cette démonstration reste valable avec des hypothèses moins restrictives ce qui fait de la proposition 1.7. un cas particulier de la proposition 1.8.

<u>Proposition 1.8.</u> - <u>L'anneau M_n des matrices carrées d'ordre n sur un anneau classique A est un anneau classique.</u>

Il est immédiat (corollaire 6) que M_n est un A-module d'Artin REES, c'est-à-dire un A-module à gauche noethérien vérifiant l'une des propriétés du théorème 9. Pour montrer que M_n est un anneau classique il faut montrer :

a) que M_n est un M_n-module à gauche noethérien

b) que M_n en tant que M_n-module à gauche vérifie l'une des propriétés du théorème 9.

Pour le détail de la démonstration voir [1 - p. 83].

Proposition 1.9. - Si A est un anneau unitaire intègre principal alors A est un anneau classique.

Voir GOLDIE [8 - chapitre 6] ou GERMA Anne [9].

Proposition 1.10. - Soit A un anneau commutatif noethérien, Λ une A-algèbre centrale, de type fini en tant que A-module. Si les idéaux de Λ viennent de son centre, c'est-à-dire si tout idéal bilatère U de Λ est de la forme $U = \Lambda.\mathfrak{a}$ où $\mathfrak{a}$ est un idéal de A, alors Λ est un anneau classique.

Remarque : la proposition 1.7. est un cas particulier de la proposition 1.10.

Démonstration de 1.10. :

a) Λ est un A-module noethérien donc un Λ-module à gauche noethérien. En effet les idéaux à gauche de Λ sont les sous A-modules de Λ qui sont permis pour la multiplication à gauche par les éléments de Λ. Une chaîne croissante d'idéaux à gauche de Λ est une chaîne de sous A-modules de Λ donc elle est stationnaire.

b) Λ est un A-module d'Artin REES,

c) Λ est un Λ-module d'Artin REES : soient $U = \Lambda\,\mathfrak{a}$ un idéal bilatère de Λ, I un idéal à gauche de Λ, n un entier ; d'après b) il existe $h(n)$ tel que $\mathfrak{a}^{h(n)}\Lambda \cap I \subseteq \mathfrak{a}^n I$ d'où

$$(\Lambda\mathfrak{a})^{h(n)} \cap I \subseteq (\Lambda\mathfrak{a})^n I \quad \text{et}$$

$$U^{h(n)} \cap I \subseteq U^n I$$

c.q.f.d.

Un cas particulier de la proposition 1.10. est la proposition suivante.

Proposition 1.11. - Si Λ est une R-algèbre, séparable, de type fini comme R-module, où R est un anneau commutatif noethérien alors Λ est un anneau classique.

En effet : si C désigne le centre de Λ, il est connu [10 - corollaire 3.2] que les idéaux bilatères de Λ viennent de C ; tout idéal bilatère de Λ est de la forme $B\Lambda$ où B est un idéal de C et $B\Lambda \cap C = B$. Il s'ensuit comme Λ est noethérien que C est aussi un anneau noethérien. La proposition 1.10 montre alors que Λ est un anneau classique.

Corollaire 1.12. - Si R est un anneau commutatif noethérien, M un R-module projectif de type fini, alors l'anneau des endomorphismes de M est un anneau classique.

Ceci se présente comme une généralisation de la proposition 1.7.

Démonstration : Si M est un R-module projectif de type fini alors

$\Lambda = \mathrm{Hom}_R(M,M)$ est une R-algèbre séparable de type fini ([10] proposition 5.1) . Donc Λ est un anneau classique.

Si R est un anneau de DEDEKIND , Σ une algèbre centrale simple sur le corps des quotients de R et Λ un ordre maximal dans Σ sur R , il est connu [11] que, si Σ est une algèbre complète de matrices, Λ est l'anneau des endomorphismes d'un R-module projectif de type fini ; donc d'après le corollaire 1.12 Λ est un anneau classique. Cependant par une démonstration directe on peut montrer que <u>tout</u> ordre maximal sur un anneau de DEDEKIND est un anneau classique.

<u>Proposition 1.13. - Soit R un anneau de DEDEKIND, Σ une algèbre centrale simple sur le corps des quotients de R , Λ un ordre maximal dans Σ sur R alors Λ est un anneau classique.</u>

Démonstration : voir [3] p. 198.

Signalons un résultat plus général dû à MISCHLER, mais partiel quant à notre objectif de donner des exemples d'anneaux classiques :

<u>Proposition 1.14. - Si R est un ordre maximal d'ASANO dans un anneau S alors la propriété d'Artin REES est valable pour les idéaux bilatères de R.</u>

Dans [3] (§ 3) on peut voir un exemple d'anneau Artinien non classique. Les anneaux artiniens classiques ont une structure particulièrement simple.

<u>Proposition 1.15. - Soit Λ un anneau artinien. Alors Λ est un anneau classique si et seulement si il est somme directe d'un nombre fini d'anneaux artiniens primaires.</u>

Démonstration [3] p. 199.

<u>Définition</u> : un anneau primaire est un anneau qui modulo son radical est un anneau artinien simple.

Nous terminerons cette étude en montrant que, dans un anneau classique, le théorème d'intersection de KRULL est valable.

<u>Proposition 1.16. - Soit Λ un anneau classique et $\mathfrak{a}$ un idéal bilatère de Λ. Soit $V = \bigcap_{n \geq 1} \mathfrak{a}^n$ alors $V = \mathfrak{a}V$. Si $\mathfrak{a}$ est contenu dans le radical de Λ alors $\bigcap_{n \geq 1} \mathfrak{a}^n = 0$.</u>

<u>Démonstration</u> : d'après la propriété d'Artin REES il existe $h(1)$ tel que $\mathfrak{a}^{h(1)} \cap V \subseteq \mathfrak{a}V$ d'où $V = \mathfrak{a}^{h(1)} \cap V \subseteq \mathfrak{a}V \subseteq V$ et $V = \mathfrak{a}V$.

Si $\mathfrak{a}$ est contenu dans le radical de Λ il est bien connu que cette dernière égalité implique $V = (0)$.

<u>Remarque</u> : on trouvera une généralisation de ce théorème à un anneau Λ non nécessairement classique dans [2].

- BIBLIOGRAPHIE -

[1] L. LESIEUR et R. CROISOT : Algèbre noethérienne non commutative Mémorial des Sciences math. 1963.

[2] L. LESIEUR et R. CROISOT : Extension au cas non commutatif d'un théorème de KRULL et d'un lemme d'Artin REES - Journal für mathematik - 1960 - Band 204 - Heft 114 - p. 216-220 -

[3] J.A. RILEY : Axiomatic primary and tertiary decomposition theory - Trans. Amer. Math. Soc. 105 (1962) p. 177-201 -

[4] MISCHLER : Maximal ASANO orders.

[5] M.C. GERMA : $\mathcal{C}$-algèbres non associatives. Séminaire DUBREIL-PISOT - 20ème année - 1966-67 - n° 12 -

[6] Y. KURATA : A décomposition of normal subgroups in a group. Osaka J. of Math. t. 1; 1964, p. 201-229 -

[7] D.G. NORTHCOTT : Ideal theory. Cambridge Tracts n° 42 - 1953 -

[8] A.W. GOLDIE : Rings with maximum condition - Lecture notes Yale University.

[9] A. GERMA : Séminaire LESIEUR 1967-68 - (Conf. 17 : Anneaux principaux intègres)

[10] M. AUSLANDER et O. GOLDMAN : The Brauer group of a commutative ring - Trans. Amer. Math. Soc. 97 - (1960) p. 367-409 -

[11] M. AUSLANDER et O. GOLDMAN - Trans. Amer. Math. Soc. 97 (1960) p. 1-24 -

[12] GRAPPY : Séminaire d'algèbre non commutative de L. LESIEUR - 18 mars 1968 -

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

Conférence n° 13 du 4 mars 1968

IDEAUX PREMIERS DE L'ALGEBRE ENVELOPPANTE D'UNE ALGEBRE DE LIE NILPOTENTE

par Yves NOUAZE

Cette conférence est un exposé d'un mémoire paru au "Journal of algebra" : P. GABRIEL et Y. NOUAZE : Idéaux premiers de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie nilpotente (Journal of algebra, Vol. 6, n° 1, 1967, p. 77-99).

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 14 du 18 mars 1968

-:-:-:-:-:-:-

Caractérisations de la décomposition tertiaire en théorie des modules

par J. GRAPPY.

-:-:-:-:-:-:-:-

Pour étendre au cas non commutatif la notion d'idéal (ou de module) primaire on a introduit différents types d'idéaux (ou de modules) : primaires, secondaires, unirésidués, tertiaires, primaux. (Voir L. LESIEUR et R. CROISOT [2]). Nous exposerons ici deux axiomatiques généralisant la théorie primaire du cas commutatif. L'intérêt essentiel est de montrer que la théorie tertiaire est la "bonne théorie" pour les anneaux non commutatifs.

I. Foncteurs de décomposition, d'après JOHN A. RILEY [3].

A. Rappels.

Pour plus de clarté rappelons les définitions et les premiers résultats exposés dans la conférence n° 12.

Soit A un anneau unitaire. Une catégorie $\mathcal{C}$ de A-modules à gauche, avec pour morphismes les monomorphismes, est dite admissible si :

1) Pour toute suite exacte $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$, si $M \in \mathcal{C}$ alors $M' \in \mathcal{C}$ et $M'' \in \mathcal{C}$.

2) $M \in \mathcal{C}$, $M' \in \mathcal{C}$ impliquent $M \oplus M' \in \mathcal{C}$.

On considère la catégorie $\mathcal{P}(\mathfrak{I})$ des parties de l'ensemble $\mathfrak{I}$ des idéaux à gauche de A , avec pour morphismes les inclusions.

Un foncteur Γ de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{J})$ est dit foncteur de prédécomposition si Γ est covariant et vérifie :

1) Si $M \in \mathcal{C}$, et si $M = \bigcup_\alpha M_\alpha$ où les M_α forment une famille totalement ordonnée d'éléments de $\mathcal{C}$, alors $\Gamma(M) = \bigcup_\alpha \Gamma(M_\alpha)$.

2) Si $M \in \mathcal{C}$ et si la suite $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ est exacte, alors $\Gamma(M') \subseteq \Gamma(M) \subseteq \Gamma(M') \cup \Gamma(M'')$.

3) $\Gamma(M) = \emptyset$ si et seulement si $M = (0)$.

On dira que N est un Γ-sous-module de M si $\Gamma(M/N)$ est réduit à un élément.

Une famille $\{M_1, \ldots, M_k\}$ de sous-modules de M est une Γ-décomposition de N dans M si :

a) Les M_i sont des Γ-sous-modules de M.

b) $N = M_1 \cap \ldots \cap M_k$, et aucun M_i n'est superflu.

c) $\Gamma(M/M_i) \neq \Gamma(M/M_j)$, $i \neq j$.

Proposition 1.1 . Soit $\{M_1, \ldots, M_k\}$ une Γ-décomposition de N dans M , avec $\Gamma(M/M_i) = \{a_i\}$. Alors :

1) $\Gamma(M/N) = \{a_1, \ldots, a_k\}$

2) $\Gamma(M_i/N) = \{a_1, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_k\}$

3) $\Gamma([M_1 \cap \ldots \cap \hat{M}_i \cap \ldots \cap M_k]/N) = \{a_i\}$

Remarquons que se donner une Γ-décomposition de N dans M revient à se donner une Γ-décomposition de (0) dans M/N .

Un module $M \in \mathcal{C}$ est Γ-fini si $\Gamma(M)$ est fini.

En modifiant la définition de RILEY nous dirons que Γ est un foncteur de décomposition si (0) admet une Γ-décomposition dans tout module $M \in \mathcal{C}$. Il en résulte que tout $M \in \mathcal{C}$ est Γ-fini, et que la propriété (P) est vérifiée :

(P) : Pour tout $M \in \mathcal{C}$, et tout $a \in \Gamma(M)$, il existe $N \subseteq M$ avec $\Gamma(N) = \{a\}$.

De plus, la propriété (P) implique que tout M Γ-fini admet une Γ-décomposition.

Proposition 1.2. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie admissible de A-modules à gauche de type fini sur A-noethérien à gauche, alors Γ est un foncteur de décomposition si et seulement si il vérifie (P) .

On notera $\mathcal{C}_0$ une telle catégorie.

B. Comparaison de foncteurs de prédécomposition.

Soient Γ et Ω deux foncteurs de prédécomposition sur $\mathcal{C}$.

On dira que Γ est plus fort que Ω si $\Gamma(M) \supseteq \Omega(M)$, $\forall M \in \mathcal{C}$.

Il en résulte que si M est Γ-fini, M est aussi Ω-fini.

Si N est un Γ-sous-module de M , N est aussi un Ω-sous-module de M , et $\Gamma(M/_N) = \Omega(M/_N)$.

Proposition 1.3. Soient Γ un foncteur de décomposition, et Ω un foncteur de prédécomposition tels que Γ soit plus fort que Ω .

Alors $\Gamma = \Omega$.

Soient $M \in \mathcal{C}$, et considérons une Γ-décomposition de (0) dans $M : \{M_1, \dots, M_K\}$. Les M_i sont des Ω-sous-modules, et $\Omega(M/_{M_i}) = \Gamma(M/_{M_i})$. Il en résulte que $\{M_1, \dots, M_K\}$ est une Ω-décomposition de (0) dans M , d'où (prop. 1.1) $\Omega(M) = \cup\Omega(M/_{M_i}) = \Gamma(M)$.

Deux foncteurs de décomposition ne peuvent donc être comparables.

C. Décompositions normales.

Soit Γ un foncteur de prédécomposition sur $\mathcal{C}$. On dira que Γ est normal si :

a) $\forall \mathfrak{a} \in \Gamma(M)$, $\exists N \subseteq M$, $N \neq 0$ $\mathfrak{a}N = 0$

b) $\forall \mathfrak{a} \in \Gamma(M)$, $\mathrm{Ann}(M) \subseteq \mathfrak{a}$

Proposition 1.4. Soit Γ un foncteur de prédécomposition normal. Si $\Gamma(M) = \{\mathfrak{a}\}$, alors pour tout sous-module P de M :

$P \cap (0 \underset{M}{:} \mathfrak{a}) = (0) \Longrightarrow P = (0)$ $(0 \underset{M}{:} \mathfrak{a} = \{x, x \in M , \mathfrak{a}x = 0\})$.

Si $P \neq (0)$, $\Gamma(P) = \{\mathfrak{a}\}$. Puisque Γ est normal, il existe $N' \subseteq P$, $N' \neq 0$, $\mathfrak{a}N' = 0$. On a donc $(0) \subset N' \subseteq P \cap (0 \underset{M}{:} \mathfrak{a})$.

Proposition 1.5. Soit Γ un foncteur de prédécomposition normal. Si $\Gamma(M) = \{\mathfrak{P}\}$ alors $\mathfrak{P}$ est résiduel à gauche propre maximum de 0 dans M.

Soit $\mathfrak{a} = 0 \cdot . N$, où $0 \subset N \subseteq M$. On a $\Gamma(N) = \{\mathfrak{P}\}$, d'où $\mathfrak{a} = \mathrm{Ann}(N) \subsetneq \mathfrak{P}$ puisque Γ est normal.

De plus il existe $M' \subseteq M$, $M' \neq 0$, $\mathfrak{P} M' = 0$. Il en résulte $\mathfrak{P} \subseteq 0 \cdot . M'$, et l'égalité a lieu d'après ce qui précède.

Théorème 1.6. Soit Γ un foncteur de décomposition normal. Alors, pour tout $M \in \mathcal{C}$, $\Gamma(M)$ est l'ensemble des résiduels essentiels de (0) dans M.

Soit $\mathfrak{P} \in \Gamma(M)$. D'après la propriété (P), il existe $N \subseteq M$ $\Gamma(N) = \{\mathfrak{P}\}$. $\mathfrak{P}$ est un résiduel maximum propre de 0 dans N (prop. 1.5), donc un résiduel essentiel de (0) dans M.

Réciproquement soit $\mathfrak{P} = 0 \cdot . N$ un résiduel essentiel.

Pour tout $\mathfrak{P}_i \in \Gamma(N) \subseteq \Gamma(M)$ on a $\mathfrak{P}_i \supseteq 0 \cdot . N = \mathfrak{P}$. De plus il existe M', $0 \subset M' \subseteq N$, $\mathfrak{P}_i M' = 0$, d'où $\mathfrak{P}_i \subseteq 0 \cdot M' = \mathfrak{P}$ puisque $\mathfrak{P}$ est essentiel. Cette dernière démonstration ne suppose pas que Γ soit un foncteur de décomposition.

Corollaire 1.7. S'il existe un foncteur de décomposition normal sur $\mathcal{C}$, il est unique, et il est moins fort que tout foncteur de prédécomposition normal.

Corollaire 1.8. Le foncteur de décomposition tertiaire est l'unique foncteur de décomposition normal sur $\mathcal{C}_0$.

II. - S-primarités, d'après A. ANDRUNAKIEVIC et J.M. RJABUKHIN [1].

Les auteurs se placent dans le cadre des idéaux bilatères d'un anneau noethérien. Les résultats se généralisent aux $\mathcal{C}$-algèbres. Nous nous limiterons au cas des sous-modules d'un A-module à gauche M sur un anneau A-noethérien à gauche. N, L ... désigneront des sous-modules de M, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{B}$, ... des idéaux bilatères de A.

A. Définition d'une S-primarité.

Une application S de l'ensemble des sous-modules de M dans l'ensemble des idéaux bilatères de A est une application de primarité si l'on a :

1) $S(M) = A$

2) $N \subset M \Longrightarrow N \subset N \mathbin{.\cdot} S(N)$, $S(N) \supseteq \mathrm{Ann}(M/N)$

Proposition 2.1. Soit S une application de primarité. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $N \subset N \mathbin{.\cdot} \mathfrak{a} \Longrightarrow \mathfrak{a} \subseteq S(N)$

b) $\mathfrak{a}L \subset N$, $L \nsubseteq N \Longrightarrow \mathfrak{a} \subseteq S(N)$

a) implique b) :
Si $\mathfrak{a}L \subseteq N$, $L \nsubseteq N$ alors $N \subset N \mathbin{.\cdot} \mathfrak{a}$, d'où $\mathfrak{a} \subseteq S(N)$.

b) implique a) :
Posant $L = N \mathbin{.\cdot} \mathfrak{a}$ on a $\mathfrak{a}L \subseteq N$ et $L \nsubseteq N$ d'où $\mathfrak{a} \subseteq S(N)$.

Définition : On dira que N est S-primaire (dans M) s'il vérifie l'une des deux conditions équivalentes de la proposition 2.1.

Exemples :

- $S(N) = \mathrm{Ann}(M/N)$. Alors N est S-primaire si et seulement si S est un sous-module premier.

- On peut prendre pour $S(N)$ l'un des radicaux primaire, secondaire, unirésiduel, tertiaire, ou primal. Il suffit de vérifier la propriété $N \subset N \mathbin{.\cdot} S(N)$ en prenant pour $S(N)$ le plus grand de ces radicaux, le radical primal $\mathcal{R}_4(N)$. Or $N \mathbin{.\cdot} \mathcal{R}_4(N) \supseteq N \mathbin{.\cdot} (N \mathbin{\cdot .} L) \supseteq L$, où $N \mathbin{\cdot .} L$ est un résiduel propre maximal de N , et $L \supset N$.

Les éléments S-primaires sont les éléments primaires, secondaires, unirésiduels, tertiaires ou primaux.

B. Comparaison de S-primarité.

Définition :

Si S_1 et S_2 sont deux applications de primarité, on dit que S_1 est plus forte que S_2 si tout sous-module S_1 - primaire est S_2 - primaire.

Ce n'est qu'une relation de préordre : S_1 sera équivalente à S_2 si les sous-modules S_1-primaires et S_2-primaires coïncident. Notons $\mathfrak{I}_S$ l'ensemble des sous-modules S-primaires.

S_1 est plus forte que S_2 si et seulement si $\mathfrak{I}_{S_1} \subseteq \mathfrak{I}_{S_2}$. Cela aura lieu si $S_1(N) \subseteq S_2(N)$.

<u>Proposition 2.2.</u> Soient $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{P}_l$) l'ensemble des sous-modules premiers (resp. primaux) de M . Pour toute primarité S on a

$$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{J}_S \subseteq \mathcal{P}_l \,,$$

et pour tout élément N S-primaire

$$S(N) = \mathcal{R}_4(N) = N \cdot.(N .\cdot S(N)) \,.$$

Soit $L = N .\cdot S(N)$, $L \supset N$. On a $S(N) \subseteq N \cdot. L$.

De plus $(N \cdot. L)L \subseteq N$ implique $N \cdot. L \subseteq S(N)$ puisque N est S-primaire, d'où $S(N) = N \cdot.(N .\cdot S(N))$ et $S(N)$ est un résiduel propre de N . Montrons qu'il est maximum. Si $\mathfrak{a} = N \cdot. K$, $K \supset N$, $\mathfrak{a}K \subseteq N$ implique $\mathfrak{a} \subseteq S(N)$. La proposition en résulte aussitôt.

<u>Corollaire 2.3.</u> N est S-primaire si et seulement si $S(N)$ est l'unique résiduel propre maximal de N .

<u>Proposition 2.4.</u> Pour tout ensemble $\mathcal{J}$ de sous-modules, vérifiant $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}_l$, il existe au moins une application de primarité S telle que $\mathcal{J} = \mathcal{J}_S$.

On peut définir S par :

$$S(N) = \mathrm{Ann}(M/_N) \quad \text{si } N \notin \mathcal{J}$$

$$S(N) = \mathcal{R}_4(N) \quad \text{si } N \in \mathcal{J}$$

Tout élément de $\mathcal{J}$ est S-primaire (corollaire 2.3) . Si $N \notin \mathcal{J}$ il ne peut être S-primaire sinon $N \in \mathcal{P} \subseteq \mathcal{J}$.

<u>C. Décompositions.</u>

Soit $N = N_1 \cap \dots \cap N_2$.

On dit que l'on a une S-décomposition si les N_i sont S-primaires. Une telle décomposition est réduite si aucun N_i n'est superflu et si les $S(N_i)$ sont distincts.

On considère les conditions suivantes :

(I) Tout $N \subsetneq M$ admet une S-décomposition.

(II) Si $M_1, \dots, N_K$ sont S-primaires avec $S(N_1) = \dots = S(N_K)$ alors $N = N_1 \cap \dots \cap N_K$ est S-primaire et $S(N) = S(N_1)$.

(III) Si N est S-primaire il admet une décomposition réduite unique $(N = N)$.

Proposition 2.5. Parmi les primarités vérifiant (I) , il en existe une plus forte R et N est R-primaire si et seulement si N est $\cap$-irréductible ou premier.

Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des sous-modules $\cap$-irréductibles de M . Il existe une primarité R telle que $\mathcal{R} \cup \mathcal{P}$ soit l'ensemble des modules R-primaires (prop. 2.4). R vérifie bien sûr (I) . Soient S vérifiant (I) , et N R-primaire . Si N est premier, alors $N \in \mathcal{J}_S$. Si N est $\cap$-irréductible, on a $N = N_1 \cap \dots \cap N_k$ où les N_i sont S-primaires, d'où $N = N_i$.

Proposition 2.6. Il existe une plus forte primarité T vérifiant (I) et (II) , et N est T-primaire si et seulement si il est tertiaire.

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des sous-modules de la forme $N_1 \cap \dots \cap N_k$, où les N_i sont R-primaires et $R(N_1) = \dots = R(N_k)$. Il existe une primarité T telle que $\mathcal{J}_T = \mathcal{C}$, et T vérifie (I) et (II) . Si S vérifie (I) et (II) , soit N T-primaire. $N = N_1 \cap \dots \cap N_k$, où les N_i sont R-primaires, et $R(N_1) = \dots = R(N_k)$.

D'après la proposition 2.5 les N_i sont S-primaires, et $S(N_i) = T(N_i)$. N est donc S-primaire puisque S vérifie (II) .

Soit N un module tertiaire. Il admet une T-décomposition réduite $N = N_1 \cap \dots \cap N_k$. D'après ce qui précède les N_i sont tertiaires, et l'unicité des décompositions tertiaires implique $k = 1$, et N est T-primaire.

Corollaire 2.7. N est tertiaire si et seulement si il est intersection finie de sous-modules $\cap$-irréductibles ou premiers, de même radical tertiaire.

En effet si un sous-module premier P n'est pas $\cap$-irréductible il s'écrit comme intersection sans éléments superflus de sous-modules $\cap$-irréductibles, donc tertiaires, qui ont nécessairement même radical puisque $\overset{\perp}{P}$ est aussi tertiaire.

Théorème 2.8. Toutes les primarités S vérifiant (I), (II) et (III) sont équivalentes.
N est S-primaire si et seulement si il est tertiaire.

Si N est S-primaire, $N = N_1 \cap \dots \cap N_k$, décomposition réduites en modules tertiaires, donc S-primaires. La condition (III) donne le résultat.

<u>Remarques</u>. Les auteurs, qui ne considèrent que les idéaux bilatères de A imposent la condition $I \subseteq S(I)$, en apparence différente de la condition $S(I) \supseteq I \cdot . A$ que nous avons imposée.

Mais en fait $S(I)$ n'intervient que pour les idéaux S-primaires, et dans ce cas $S(I)$ est un résiduel à gauche propre, donc contient $I \cdot . A$.

-:-:-:-:-:-:-

- BIBLIOGRAPHIE -

-:-:-:-

[1] A. ANCHUNAKIEVIC et J.M. RJABUKHIN.
Idéaux primaires dans les anneaux non commutatifs
Doklady Aked. Nauk., t. 165, fasc. 1, 1965, 13-16.

[2] L. LESIEUR et R. CROISOT.
Algèbre noethérienne non commutative
Mémorial des Sciences mathématiques. Fasc. CLIV Gauthier-Villars.

[3] JOHN A. RILEY.
Axiomatic primary and tertiary decomposition theory.
Trans Amer Math Soc. 105 (1962) 177, 201.

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

CONFERENCE N° 15 du 25 mars 1968

-:-:-:-:-:-:-

ANNEAUX PRINCIPAUX INTEGRES

- CAS NON COMMUTATIF -

par Mme GERMA Anne

-:-:-:-:-:-:-

I - PROPRIETES ELEMENTAIRES.

Dans cet exposé A désigne un anneau d'intégrité unitaire dont les idéaux à gauche, à droite ou bilatères sont principaux à gauche, à droite ou bilatères.

Proposition 1.1 : A satisfait la condition de chaine croissante. Il satisfait la condition de chaine descendante pour toute famille d'idéaux d'intersection non vide. S'il satisfait sans restriction la condition de chaine descendante pour toute famille d'idéaux à gauche (resp. à droite) c'est un corps.

Preuve : Considérons une chaine croissante d'idéaux à droite $a_1A \subseteq a_2A \subseteq \dots \subseteq a_nA \subseteq \dots$ $\bigcup_n a_nA$ est un idéal à droite donc de la forme aA. Pour un certain N, a appartient à a_NA. On a donc $a_NA = a_{N+p}A$ pour tout p positif ou nul.

Considérons une chaine décroissante d'idéaux à droite qui contiennent tous un élément b non nul, et donc bA

$a_1A \supseteq a_2A \supseteq \dots \quad \forall_i \quad \exists b_i \quad b = a_ib_i \quad$ car $\quad b \in a_iA$

$\exists c_{i-1} \quad a_i = a_{i-1}c_{i-1}$ car $a_i \in a_{i-1}A$

$b = a_{i-1}c_{i-1}b_i = a_{i-1}b_{i-1}$ donc $b_{i-1} = c_{i-1}b_i$.

On a donc une chaine croissante

$$Ab_1 \subseteq Ab_2 \subseteq \dots \subseteq Ab_n \subseteq \dots$$

$$\exists N \qquad Ab_N = Ab_{N+1} = \dots$$

A partir d'un certain rang les C_i sont donc des unités et $a_NA = a_{N+1}A = \dots$
Considérons $a \neq 0$. On a alors la suite décroissante $aA \supseteq a^2A \supseteq \dots$. Supposant la condition de chaine décroissante vraie sans rèstriction

$$\exists N \quad a^NA = a^{N+1}A \quad \text{ou} \quad a^N = a^{N+1}b \quad \text{ou} \quad 1 = ab$$

et on voit que a est inversible (dans un anneau d'intégrité $uv = 1 \Longrightarrow vu = 1$) .

<u>Proposition 1.2.</u> : A est un anneau de Ore : par définition cela signifie que A est intègre et que pour $a \neq 0$ et $a' \neq 0$ $aA \cap a'A \neq \{0\}$. C'est là un cas particulier du cas noethérien mais qui admet une démonstration plus simple.

<u>Preuve</u> : Considérons l'idéal $aA + a'A = bA \neq \{0\}$

$\exists p$ et q non tous les deux nuls tels que $b = ap + a'q$

$\exists a_1 \neq 0$ tel que $a = ba_1$

$\exists a'_1 \neq 0$ tel que $a' = ba'_1$

$ap = b - a'q \Longrightarrow apa'_1 = ba'_1 - a'qa_1 = a'(1 - qa_1)$

$a'q = b - ap \Longrightarrow a'qa_1 = ba_1 - apa_1 = a(1 - pa_1)$.

Supposons $p \neq 0$ alors on a $0 \neq apa'_1 = a'(1 - qa'_1) = a''$.

Donc il existe $a'' \neq 0$ et $a'' \in aA \cap a'A$, donc $aA \cap a'A \neq \{0\}$.
Ceci nous permet d'affirmer que A admet un corps des fractions à droite.

Proposition 1.3. Pour un idéal bilatère de A tout générateur à droite est aussi générateur à gauche.

Preuve : Soit I un idéal bilatère de A on a donc

$I = aA = Ab$ donc $a = ub$ et $b = av$ $a = uav$ mais $ua = u^2b = at$
donc $a = atv$ $tv = 1$ v est inversible, on démontre de même que u est inversible $aA = Aav \Longrightarrow aAv^{-1} = Aa$ mais

$$aAv^{-1} = aA \text{ donc } Aa = aA = I .$$

II - INTERSECTION D'IDEAUX IRREDUCTIBLES DE A .

Définition 2.1. a est dit $\cap$-irréductible à droite si l'idéal aA est $\cap$-irréductible à droite.

A étant noethérien à droite (resp. à gauche) tout idéal à droite admet une décomposition réduite comme intersection finie d'idéaux à droite $\cap$-irréductible à droite.

$$\forall a \neq 0 \quad \exists a_1, a_2, \ldots, a_n \qquad aA = a_1A \cap a_2A \cap \ldots \cap a_hA$$

avec $a_iA \supset aA$ a_iA non superflu, a_iA $\cap$-irréductible à droite. Nous avons démontré dans le paragraphe I que l'idéal nul est $\cap$-irréductible à droite.

Nous étudions des idéaux à droite propres distincts de l'idéal nul et non maximaux.

Théorème 2.1. (I) . Soit aA un idéal à droite de A . Il y a équivalenc entre les propriétés suivantes :

a) a est $\cap$-irréductible à droite .

b) aA est contenu dans un unique idéal minimal qui le contient strictement (existence établie en I).

c) Aa est contenu dans un unique idéal à gauche propre maximal.

d) Si $a = bc = b'c'$ avec c et c' irréductibles alors $Ac = Ac'$.

e) Si $a = bc = b'c'$ avec c et c' irréductibles alors $bA = b'A$.

Preuve : $a \Longrightarrow b$. Supposons l'existence de deux sur-idéaux minimaux de aA on a $aA \subseteq bA \cap cA$ et comme bA et cA minimaux, $ab = bA \cap cA$ ce qui est contraire à a .

$b \Longrightarrow a$. Soit bA l'unique sur l'idéal minimal de aA et supposons $aA = dA \cap eA$ on a $aA \subset dA \Longrightarrow bA \subseteq dA$ et de même $bA \subseteq eA$ $aA \subset bA \subseteq dA \cap eA$ (contradictoire).

$b \Longrightarrow c$. Soit bA l'unique sur-idéal minimal de aA . On a donc $aA \subset bA$ ou $a = bc$ avec c irréductible. On en déduit $Aa \supset Ac$. Soit Ac' maximal contenant Aa $Aa \subset Ac' \iff a = dc'$ et d non nul, non inversible. On a donc $aA \supset dA$ d'où $bA \subseteq dA$ ou $b = dk$ $a = bc = dkc = dc'$ $kc = c'$ or c'est irréductible donc k est une unité et $Ac = Ac'$.

$c \Longrightarrow d$ $a = bc = b'c'$ avec c et c' irréductibles. $Aa \subseteq Ac$ et $Aa \subseteq Ac'$ avec Ac et Ac' maximaux donc $Ac = Ac'$.

$d \Longrightarrow e$ $Ac = Ac' \Longrightarrow \exists\, u$ unité $c = uc'$

$a = bc = b'c' = buc' \Longrightarrow b' = bu \Longrightarrow b'A = bA$.

$e \Longrightarrow b$ Supposons que aA admette deux sur idéaux minimaux bA et $b'A$. Alors $a = bc = b'c'$ avec c et c' irréductibles donc $bA = b'A$.

Corollaire 2.1. Si a est $\cap$-irréductible à droite Aa admet un seul idéal maximal propre le contenant Ad_n . On a une suite de composition $Aa \subset Ad_1 \subset Ad_2 \subset \dots \subset Ad_n \subset A$ et d_i est $\cap$-irréductible à droite à cause de l'unicité de Ad_n .

Corollaire 2.2. Soit aA $\cap$-irréductible à droite, bA son seul sur-idéal minimal $a = bc$

$$cA = \{x \in A,\ bx \in aA\} .$$

Preuve : Si $y = cd$ $\quad by = bcd = ad \quad by \in aA$

Si $by \in aA \quad by = ac = bce \quad$ donc $\quad y = ce \quad y \in cA$.

Nous allons maintenant énoncer le théorème fondamental de cet énoncé.

Théorème 2.2. L'anneau A est un anneau classique. Rappelons que cela signifie que A est noethérien et vérifie le lemme d'Artin Rées.

Preuve : Lemme D'Artin Rées :

Si J idéal bilatère, Q idéal à gauche, et n entier sont données, il existe m , entier, tel que $J^m \cap Q \subseteq J^n Q$. Nous pouvons aussi montrer que la décomposition primaire à lieu, et pour cela il suffit de montrer que tout idéal à gauche Q $\cap$ -irréductible est primaire.

$$JB \subseteq Q \text{ et } B \not\subseteq Q \Longrightarrow \exists n\ J^n \subset Q .$$

Si J est un idéal bilatère de base a , J^n est un idéal bilatère de base a^n . En effet $J^2 = \{x ; x = \sum_{\text{finie}} u_i a \mu_i a\}$ mais $a\mu_i = v_i a$ $\sum_{\text{finie}} u_i a \mu_i a = \sum_{\text{finie}} u_i v_i a^2 = ta^2$.

On achève le raisonnement en faisant une récurrence sur n .

D'autre part $Q \cdot\!\!\cdot J^n$ est un idéal à gauche égal à $Q \cdot\!\!\cdot a^n$. Si $J^n x \subseteq Q \Longrightarrow a^n x \in Q$.

On a $Q \subset Q \cdot\!\!\cdot J \subseteq Q \cdot\!\!\cdot J^n \subseteq Q \cdot\!\!\cdot a^n$.

Si $a^n x \in Q \quad Aa^n x \subseteq Q$ ou $J^n x \subseteq Q$.

$Q \cdot\!\!\cdot a^n$ étant un idéal à gauche, $Q \cdot\!\!\cdot J^n$ en est un.

Considérons l'ensemble $(Q \,.\!\cdot\, a^*) \cap (Q + a^nA) = P$.

On a l'inclusion évidente $Q \subseteq P$.

Soit $y \in P$ $\quad y = q + a^nb \qquad q \in Q\ ,\ b \in A$

$$ay = aq + a^{n+1}b \qquad ay \in Q\ .$$

Or la chaine $Q \,.\!\cdot\, J^n$ est une chaine croissante donc finie et à partir d'un certain N on a $Q \,.\!\cdot\, J^N = Q \,.\!\cdot\, J^{N+p}$ pour tout p positif ou nul .

Donnons à n cette valeur N

ay et aq étant éléments de Q $a^{n+1}b$ appartient à Q . On a donc $b \in Q \,.\!\cdot\, a^{n+1} = Q \,.\!\cdot\, a^n$. Donc a^nb est élément de Q , donc y est élément de Q . On a en conséquence l'identité

$$Q = (Q \,.\!\cdot\, a) \cap (Q + a^nA).$$

Q étant $\cap$-irréductible, comme $Q \,.\!\cdot\, a = Q \,.\!\cdot\, J$ contient strictement Q , $Q + a^nA = Q$, et par conséquent $a^nA = J^n \subseteq Q$.

La démonstration de ce théorème m'a été communiquée par L. LESIEUR.

- BIBLIOGRAPHIE -

I - FELLER - 1960 - Can. J. Math. , Vol. 12, p. 592-596.
Intersection Irreductible ideals of a non commutative principal ideal domain.

-:-:-:-:-:-:-:-:-

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

-:-:-:-:-:-:-:-

Conférence n°16 du 22 Avril 1968

par Jean-Yves CHAMARD

-:-:-:-:-

Modules isotypiques et modules tertiaires.

Cette étude fait suite aux exposés [5] et [7] ; nous étudions ici la notion de module isotypique, en nous inspirant du travail de Lesieur et Croisot [9], ainsi que de Bourbaki [2]. Nous généralisons certains résultats de [9] au cas où les modules considérés ne vérifient aucune condition de chaine, et où l'anneau satisfait une condition moins forte que la condition de chaine ascendante (condition C page 6). Les résultats du troisième paragraphe sont dûs en partie à Gabriel [4].

- Résiduel essentiel de N dans M.

Soit N un sous-module d'un A-module M, et P un idéal bilatère de A; on dit que P est un résiduel essentiel de N dans M s'il existe un sous-module X de M contenant strictement N et tel que :

$$\forall Y, \quad N \subset Y \subseteq X \Longrightarrow P = N^{\cdot} \cdot Y$$

c'est-à-dire tel que P soit l'annulateur à gauche de X/N et de tout sous-module non nul de X/N.

On vérifie alors aisément que P est un idéal bilatère premier de A.

- Sous-module P tertiaire de M

Un sous-module N de M est dit P-tertiaire, où P est un idéal bilatère premier de A, si P est l'unique résiduel essentiel de N dans M.

§ 1- Idéal bilatère premier associé à un module

Dans ce paragraphe, nous étudions l'ensemble des résiduels essentiels de N dans M (où N est un sous-module de M), en généralisant au cas non commutatif la méthode de Bourbaki [2]. A la proposition 4, nous étendons au cas d'un ensemble d'indice I quelconque une propriété donnée habituellement pour un ensemble I fini.

Dans tout l'exposé, l'anneau A est unitaire, et les A-modules sont des A-modules à gauche.

Définition 1 Un idéal bilatère P de A est dit premier si, quels que soient a et b dans A tels que P contienne a A b, a ou b appartient à P.

Définition 2. Un idéal bilatère premier P est dit associé en un module M s'il existe un sous-module non nul N de M tel que P soit l'annulateur (à gauche) de tout sous-module non nul de N.

On note Ass(M) l'ensemble des idéaux bilatères premiers associés à M.

- Remarquons que si M est nul, Ass(M) $= \emptyset$; la réciproque est vraie si A est noetherien à gauche (cf proposition 2) ; si M_1 et M_2 sont isomorphes, $\mathrm{Ass}(M_1) = \mathrm{Ass}(M_2)$.

Proposition 1. Soient N un sous-module d'un A-module M, et P un idéal bilatère premier de A; les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) P est associé à M/N

(2) P est un résiduel essentiel de N dans M.

- Démonstration.

Elle résulte trivialement de la définition d'un résiduel essentiel.

Corollaire. Un sous-module N de M est P-tertiaire si et seulement si $\mathrm{Ass}(M/N) = \{P\}$.

Proposition 2. Soient M un A-module, $N \neq 0$ et $\mathcal{F} = \{ \mathrm{Ann}\, N / 0 \neq N \subseteq M \}$.

Tout élément maximal de $\mathcal{F}$ appartient à Ass(M).

- Démonstration :

Soit $P = \text{Ann } N$ un élément maximal de $\widehat{\mathcal{I}}$, et N_1 un sous-module non nul de N ; $\text{Ann } N$ étant contenu dans $\text{Ann } N_1$ et $\text{Ann } N_1$ appartenant à $\widehat{\mathcal{I}}$, on a nécessairement $P = \text{Ann } N_1$; il est alors facile de vérifier que P est un idéal bilatère premier .

Corollaire . Si A est noethérien à gauche et si M est un A-module non nul , $\text{Ass } M$ est non vide .

Proposition 3 . Soit M un A-module co-irréductible, tel que $\text{Ass } M$ soit non vide .

$\text{Ass } M$ est alors réduit à un seul élément P, appelé annulateur maximum de M.

- Démonstration .

Soit $P_1 = \text{Ann } N_1$ et $P_2 = \text{Ann } N_2$ deux idéaux bilatères premiers associés à M ; M étant co-irréductible, $N_1 \cap N_2$ est non nul, et l'on a les égalités :

$$P_1 = \text{Ann } N_1 = \text{Ann } (N_1 \cap N_2) = \text{Ann } N_2 = P_2 .$$

Condition C . On dit qu'un anneau A vérifie la condition C si, pour tout A-module injectif indécomposable E, $\text{Ass } E$ est non vide .

- Tout anneau noethérien à gauche vérifie la condition C d'après la proposition 2; plus généralement, tout anneau A dont les idéaux bilatères vérifient la condition de chaîne ascendante satisfait la condition C (les annulateurs de sous-modules de M étant des idéaux bilatères de A) .

Lemme 1. Soit X un sous-module non nul d'une somme directe de sous-modules $(M_i)_{i \in I}$ d'un module M; il existe un indice i de I et un sous-module non nul M_i' de M_i isomorphe à un sous-module X' de X .

- Démonstration .

Soit x un élément non nul de X; $A\,x$ étant contenu dans une somme directe finie de $(M_i)_{i \in I}$, il suffit de démontrer le lemme pour un ensemble d'indice fini, par récurrence sur card I.

- Pour card I = 2, X est contenu dans $M_1 \oplus M_2$; Si $X \cap M_1 = 0$, X est isomorphe à un sous-module de $(M_1 \oplus M_2)/M_1 = M_2$; Si $X \cap M_1 \neq 0$, $X \cap M_1$ répond à la question.

- Pour card I = n, X est contenu dans $\left(\bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i\right) \oplus M_n$; l'hypothèse de récurrence permet alors de conclure.

<u>Proposition 4. Soit $(N_i)_{i \in I}$ une famille indépendante de sous-modules d'un module M; on a $\mathrm{Ass}\left(\bigoplus_{i \in I} N_i\right) = \bigcup_{i \in I} \mathrm{Ass}\, N_i$.</u>

- <u>Démonstration</u>

On a bien sûr pour tout i, l'inclusion

$$\mathrm{Ass}\, N_i \subseteq \mathrm{Ass}\,\left(\bigoplus_{i \in I} N_i\right).$$

Réciproquement, soit P = Ann K un idéal premier bilatère associé à $\bigoplus_{i \in I} N_i$; d'après le lemme 1, il existe un indice i et un sous-module non nul N'_i de N_i isomorphe à un sous-module non nul K' de K.

P annule alors tous les sous-modules non nuls de N'_i, donc appartient à $\mathrm{Ass}\, N_i$

<u>Proposition 5. Si N est un sous-module essentiel de M, Ass N = Ass M.</u>

- <u>Démonstration</u> : Evidente.

§ 2 - Modules isotypiques

Définition . Un sous-module N de M est dit π -isotypique si $E(M/N)$ est somme directe de modules injectifs indécomposables de type π.

- Tout sous-module $\cap$ -irréductible N de M est évidemment isotypique, puisqu'alors $E(M/N)$ est indécomposable .

Définition . Un A-module M est dit complètement réductible s'il est somme directe de sous-modules injectifs indécomposables .

Matlis a démontré dans [10] que, si A est noetherien à gauche, tout A-module injectif est complètement réductible (on trouvera la démonstration de cette assertion dans [12]) .

Théorème 1 . Soit A un anneau quelconque , et N un sous-module d'un A-module M tel que $E(M/N)$ soit complètement réductible : $E(M/N) = \bigoplus_{i \in I} E_i$.

L'ensemble des résiduels essentiels de N dans M est égal à l'ensemble des annulateurs maxima des E_i .

- Démonstration .

La propsition 1 prouve que l'ensemble des résiduels essentiels de N dans M est égal à $\mathrm{Ass}\,(E(M/N))$, donc (proposition 5) à $\mathrm{Ass}\,(\bigoplus_{i \in I} E_i)$, qui est égal à $\bigcup_{i \in I} \mathrm{Ass}\, E_i$ (proposition 4) .

Or $\mathrm{Ass}\, E_i$ est vide, ou est égal à l'annulateur maximum des E_i (proposition 3) .

Corollaire . Si A vérifie la condition C, et si $E(M/N)$ est complètement réductible, N est un sous-module tertiare de M si et seulement si les E_i ont tous même idéal premier associé .

- Démonstration : Triviale

Proposition 7 . Les réciproques du théorème 2 et de la proposition 6 sont en général fausses .

- Contre exemple .

Soit $B = \mathbb{R}(Y)[X]$, X et Y n'étant pas permutables ; soit $\mathfrak{b}$ l'idéal bilatère de B engendré par les éléments de la forme :

$$\lambda X - X\lambda - \lambda'$$

où λ décrit $\mathbb{R}(Y)$, et où λ' est la fraction rationnelle dérivée de λ .

Soit A l'anneau quotient $B/\mathfrak{b}$.

- On vérifie que, dans A, on a l'égalité

$$\lambda X^p = \sum_{q=0}^{p} a_q X^q \quad \lambda^{(p-q)} ,$$

où a_q appartient à $\mathbb{R}$.
On en déduit facilement que :

. (i) Tout élément de A s'écrit, de manière unique

$$\sum \lambda_p \; X^p \qquad , \qquad \lambda_p \in \mathbb{R}(Y)$$

. (ii) A est intègre .
. (iii) Tout idéal à gauche (et à droite) de A est monogène .
. (IV) O et A sont les seuls idéaux bilatères .

- La condition (iii) prouve que A est noethérien à gauche et à droite, et donc (IV et proposition 2) que tout idéal à gauche non nul de A est O-tertiaire .

– Soient alors λ_1 et λ_2 deux éléments distincts de $\mathbb{R}(Y)$;

$$\mathfrak{A}_1 = A\,(X - \lambda_1) \quad \text{et} \quad \mathfrak{A}_2 = A\,(X - \lambda_2)$$

sont des idéaux à gauche maximaux , donc isotypiques, de A .

$\mathrm{Ann}_d(A/\mathfrak{A}_1) = \mathfrak{A}_1$ étant différent de $\mathrm{Ann}_d(A/\mathfrak{A}_2) = \mathfrak{A}_2$, $A/\mathfrak{A}_1$ et $A/\mathfrak{A}_2$ sont des A-modules simples non isomorphes, donc $E\,(A/\mathfrak{A}_1)$ n'est pas isomorphe à $E\,(A/\mathfrak{A}_2)$. $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2$ étant égal à A, $A/(\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2)$ est isomorphe à $A/\mathfrak{A}_1 \oplus A/\mathfrak{A}_2$, ce qui prouve que $\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2$ n'est pas un sous-module isotypique de A, alors qu'il est O-tertiaire (et même O-primaire), puisqu'intersection de deux idéaux O-tertiaire (respectivement O-primaires) .

La réciproque du théorème 2 n'est donc pas vérifiée dans ce cas .

– Par ailleurs, E (A) étant isomorphe au corps des quotients à gauche K de A, qui est un A-module injectif indécomposable, l'idéal 0 est isotypique du type de K.

L'idéal $\mathfrak{A}_1$ défini ci-dessus est quant à lui isotypique de type $E\,(A/\mathfrak{A}_1)$; or $E\,(A/\mathfrak{A}_1)$ ne peut être isomorhpe à K, car $\mathrm{Ann}_d\,(A/\mathfrak{A}_1) = \mathfrak{A}_1$ est non nul, ce qui ne saurait être si $A/\mathfrak{A}_1$ étant contenu dans K .

0 et $\mathfrak{A}_1$ sont donc deux idéaux isotypiques de A tels que

$$\mathrm{Ass}\,(A/\mathfrak{A}_1) = \mathrm{Ass}\,(A/0) = \{0\} \quad ,$$

et qui cependant ne sont pas de même type, ce qui prouve que la réciproque de la proposition 6 n'est pas vérifiée dans ce cas .

<u>Remarque</u> . Nous verrons à la proposition 11 que, dès que la réciproque de la proposition 6 est satisfaite, il en est de même pour la réciproque du théorème 2.

<u>Proposition 8. Soit A un anneau quelconque ; l'intersection de deux sous-modules π-isotypiques d'un module M est un sous-module π-isotypique de M.</u>

- <u>Démonstration</u> .

Soient N_1 et N_2 deux sous-modules π-isotypiques de M, et soit $N = N_1 \cap N_2$
On définit un homorphisme φ de M/N dans $M/N_1 \oplus M/N_2$ en posant :

$$\varphi(x + N) = (x + N_1 \, , \, x + N_2)$$

φ étant injectif, E (M/N) est facteur direct du module

$$F = E\,(M/N_1) \oplus E\,(M/N_2) \;;$$

F étant somme directe d'injectifs indécomposables et étant injectif on sait (Chamard [3] théorème 3) que tout facteur direct de F est également somme directe d'injectifs indécomposables ; soit $E\,(M/N) = \bigoplus_{i \in I} E_i$.
Le fait que tous les E_i soient de type π résulte alors du théorème d'Azumaya([1] , théorème 1) ; $N_1 \cap N_2$ est donc un sous-module π-isotypique de M .

<u>Définition</u> . Soit N un sous-module de M, et $(N_i)_{i = 1 \dots n}$ des sous-modules $\cap$-irréductibles de M tels que

$$N = \bigcap_{i=1}^{n} N_i \qquad (1)$$

- On dit que (1) est une <u>décomposition de N en intersection réduite de sous-modules $\cap$-irréductibles</u> de M si l'on a :

$$\forall i , \qquad N \neq \bigcap_{j \neq i} N_j$$

<u>Proposition 9</u> (Matlis [10])

<u>Soit A un anneau noethérien à gauche , et N un sous-module d'un A-module M admettant une décomposition du type précédent ; E (M/N) est alors</u>

<u>isomorphisme</u> à $\bigoplus_{i=1}^{n} \underline{E(M/N_i)}$.

- On trouvera la démonstration de cette proposition dans [12] (Proposition 4-1) .

<u>Définition</u> . Soit N un sous-module de M, et $(N_i)_{i=1,\dots,n}$ des sous-modules π_i-isotypiques de M tels que

$$N = \bigcap_{i=1}^{n} N_i \qquad (2)$$

On dit que (2) est une <u>décomposition de N en intersection réduite de sous-modules isotypiques de M</u> si l'on a :

$$\text{(i)} \quad \forall i \;, \qquad N \neq \bigcap_{j \neq i} N_j$$

$$\text{(ii)} \quad \forall i \neq j \;, \qquad \pi_i \neq \pi_j$$

<u>Théorème 3</u> . <u>Soit A un anneau noethérien à gauche et M un A-module noethérien ou artinien</u> .

1°) <u>Tout sous-module N de M admet une décomposition en intersection réduite de sous-modules isotypiques de M .</u>

2°) Soient $N = \bigcap_{i=1}^{n} N_i = \bigcap_{j=1}^{n'} N'_j$ deux telles décompositions on a <u>$n = n'$, et les types des N'_j sont les mêmes que ceux des N_i</u> .

- <u>Démonstration</u> .

- 1°) M étant noethérien ou artinien, N est égal à une intersection finie de sous-modules $\cap$-irréductibles, donc isotypiques, de M ; la proposition 8 permet alors de de "réduire" cette décomposition, en regroupant les isotypiques de même type .

- 2°) Soient $N = \bigcap_{i=1}^{n} N_i = \bigcap_{j=1}^{n'} N'_j$ deux décompositions du type (2).

M étant noethérien ou artinien, chacun des N_i et des N'_i admet une décomposition du type (1) :

$$N_i = \bigcap_{k=1}^{n_i} N_{i,k} \quad , \quad N'_j = \bigcap_{l=1}^{n'_j} N'_{j,l} \quad ;$$

On peut donc écrire

$$N = \bigcap_{i=1}^{n} \left(\bigcap_{k=1}^{n_i} N'_{i,k} \right) = \bigcap_{j=1}^{n'} \left(\bigcap_{l=1}^{n'_j} N'_{j,l} \right) \quad .$$

chacun des $N_{i,k}$ et des $N'_{j,l}$ est $\bigcap$-irréductible dans M, mais les décompositions ci-dessus ne sont pas forcément réduite au sens (1) ; on les réduit donc, en supprimant les composants superflus. Il existe des $m_i \leq m_i$ et des $m'_i \leq n'_i$, tels que les décompositions :

$$N = \bigcap_{i=1}^{n} \left(\bigcap_{k=1}^{m_i} N_{i,k} \right) = \bigcap_{j=1}^{n'} \left(\bigcap_{l=1}^{m'_j} N'_{j,l} \right)$$

soient réduites au sens (1) (on s'est permis de changer les indices k des $N_{i,k}$ et les indices l des $N'_{j,k}$, afin que k (respectivement l) varie effectivement de 1 à m_i (respectivement de 1 à m'_i)).

En outre, la condition (ii) de la définition de décomposition réduite au sens (i) implique que

$$\forall i \ , \quad m_i \geqslant 1 \quad ; \quad \forall j \ , \quad m'_j \geqslant 1 \ .$$

La proposition 9 permet alors d'écrire :

$$E\,(M/N) = \bigoplus_{i=1}^{n} \left(\bigoplus_{k=1}^{m_i} E\,(M/N_{i,k}) \right)$$

$$= \bigoplus_{j=1}^{n'} \left(\bigoplus_{\ell=1}^{m_i} E(M/N'_{j,\ell}) \right)$$

Les N_i et N'_j étant isotypiques de type π_i et π'_j, tous les $(E(M/N_{i,k})_{k=1\ldots m_i}$ sont isomorphes de type π_i, et tous les $(E(M/N'_{j,\ell}))_{\ell=1\ldots m'_i}$ sont isomorphes de type π'_j. Puisqu'aucun des m_i et aucun des m'_j n'est nul, le théorème d'Azumaya prouve que $n = n'$, et que l'ensemble des π_i est égal à l'ensemble des π'_j.

Corollaire. Soit A un anneau noethérien à gauche, et M un A-module noethérien ou artinien. Tout sous-module N de M admet alors une décomposition en intersection finie de sous-modules tertiaires.

Nous terminons ce paragraphe en donnant une caractérisation des sous-modules isotypiques, qui généralise la proposition 10-9 de 9.

Proposition 10. Soit N un sous-module quelconque d'un A-module M ; les assertions suivantes sont équivalentes :

1 N est un sous-module isotypique de M.

2 (i) $E(M/N)$ est somme directe d'injectifs indécomposables.

(ii) Pour tous sous-modules X_1 et X_2 de M contenant strictement N et tels que $N = X_1 \cap X_2$, il existe des sous-modules Y_1 et Y_2 tels que :

$$\begin{array}{l} N \subset Y_1 \subseteq X_1 \\ \\ N \subset Y_2 \subseteq X_2 \end{array} \quad \text{et} \quad Y_{1/N} \approx Y_{2/N}$$

- <u>Démonstration</u> .

$1 \Longrightarrow 2$

- (i) L'assertion (i) est dans la définition d'isotypique .

- (ii) $E(X_{1/N})$ et $E(X_{2/N})$ étant facteurs directs du module injectif complètement réductible $E(M/N)$, le théorème 3 de Chamard [3] et le théorème d'Azymaya [1] prouvent que $E(X_{1/N})$ et $E(X_{2/N})$ sont sommes directes d'injectifs indécomposables , tous isomorphes puisqu'il en est ainsi pour $E(M/N)$.

Soient E_1 et F_1 deux injectifs indécomposables apparaissant dans une décomposition de $E(X_{1/N})$ et $E(X_{2/N})$ respectivement

Soient
$$Z_{1/N} = E_1 \cap (X_{1/N}) \neq 0$$
$$Z_{2/N} = F_1 \cap (X_{2/N}) \neq 0$$

et soit φ l'isomorphisme de E_1 sur F_1 ; $Y_{2/N} = \varphi(Z_{1/N}) \cap (Z_{2/N})$ n'est pas nul, puisque $X_{1/N}$ est un module co-irréductible . Soit $Y_{1/N} = \varphi^{-1}(Y_{2/N})$; $Y_{2/N}$ et $Y_{2/N}$ sont non nuls , et isomorphes par construction .

$2 \Longrightarrow 1$

Soit $E(M/N) = \bigoplus_{i \in I} E_i$ une décomposition de $E(M/N)$ en somme directe d'injectifs indécomposables .

Pour tout i, $X_{i/N} = E_i \cap (M/N)$ est un sous-module non nul de M/N puisque M/N est essentiel dans $E(M/N)$; si i et j sont deux indices distincts, $X_i \cap X_j = N$, donc il existe par hypothèse des sous-modules isomorphes non nuls

$$Y_{i/N} \text{ et } Y_{j/N} \text{ de } X_{i/N} \text{ et } X_{j/N} .$$

On en déduit que
$$E_i = E(X_{i/N}) \approx E(Y_{j/N}) = E(M/N_j)$$
$$= E_j \quad , \text{ ce qui prouve que } N \text{ est}$$

isotypique

§ 3- INJECTIFS INDECOMPOSABLES ET IDEAUX PREMIERS BILATERES

Dans ce paragraphe, A est un anneau noethérien à gauche ; soit Π l'ensemble des types de A-modules injectifs indécomposables , et $\mathcal{P}$ l'ensemble des idéaux bilatères premiers de A .

Lemme 2 . Soit P un idéal bilatère premier de A ; P est l'annulateur de tout sous-module non nul de A/P .

- Démonstration .

Soit $M = A/P$, et soit $N = \mathfrak{A}/P$ $(P \subsetneq \mathfrak{A})$ un sous-module non nul de M ; P est contenu dans Ann N, puisque c'est un idéal bilatère de A .

Soit $a \in A$ tel que $aN = 0$, c'est-à-dire tel que $aA\mathfrak{A} \subseteq P$; soit b un élément de $\mathfrak{A}$ qui n'appartient pas à P - aAb étant contenu dans P premier, on en déduit que a appartient à P , et donc que P = Ann N .

Application de Π dans $\mathcal{P}$.

Soit φ l'application de Π dans $\mathcal{P}$ qui, à tout π de Π, associe $\varphi(\pi) = \text{Ass}(\pi) \in \mathcal{P}$.

Théorème 4 . L'application φ est surjective .

- Démonstration . Soit P un idéal bilatère premier de A ; A étant noethérien, P admet une décomposition en intersection finie réduite d'idéaux $\cap$ -irréductibles de A - La proposition 9 prouve alors que

$$E(A/P) = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i ,$$

où les E_i sont des injectifs indécomposables de type π_i .

A/P étant essentiel dans E (A/P) , il rencontre chacun des E_i suivant un sous-module non nul E_i' ; le lemme 2 prouve que P annule tous les sous-modules non nuls de E_i', et appartient ainsi à Ass E_i, c'est-à-dire (proposition 3) que P est l'annulateur maximum de chacun des E_i .

Définition . Soit M un A-module on appelle ensemble des types d'injectifs indécomposables associé à M - et on note Π_M - l'ensemble des types des modules injectifs indécomposables isomorphes à une enveloppe injective d'un quotient M/N de M.

Lemme 3 . Soient A un anneau noethérient à gauche, M un A-module, et N un sous-module de M; si $E(M/N) = \bigoplus_{i \in I} E_i$ est une décomposition de $E(M/N)$ en somme directe d'injectifs indécomposables de type Π_i, alors pour tout i, Π_i appartient à Π_M.

- Démonstration . Soit $F = \bigoplus_{j \neq i} E_j$; M/N étant essentiel dans $E(M/N) = E_i \oplus F$, $F + (M/N)$ est essentiel dans $E_i \oplus F$; F étant facteur direct de $E_i \oplus F$, c'est un complément dans $E_i \oplus F$, et donc (Renault [11] proposition 1 - 2), l'essentialité passe au quotient :
$[F + (M/N)]/F$ est essentiel dans $(E_i \oplus F)/F \approx E_i$.

Le module $[F + (M/N)]/F$ étant isomorphe à un quotient M/N_i de M, on en déduit que E_i est isomorphe à $E(M/N_i)$, et donc que le type de E_i appartient à Π_M.

Nous étudions maintenant dans quels cas les réciproques du théorème 2 et de la proposition 6 sont vérifiées, en donnant soit des conditions nécessaires et suffisantes, soit des conditions suffisantes .

Proposition 11 . Soient A un anneau noethérien à gauche, et M un A-module . Considérons les assertions suivantes :

1. La restriction de φ à Π_M est injective .

2. Si N_1 et N_2 sont deux sous-modules isotypiques de M tels que $Ass(M/N_1) = Ass(M/N_2)$, N_1 et N_2 sont de même type .

3. Il y a coïncidence entre sous-modules tertiaires et sous-modules isotypiques de M .

Alors les conditions 1 et 2 sont équivalentes et impliquent la condition 3.

- Démonstration

2 $\Longrightarrow$ 1 . Soient $E_1 = E\,(M/N_1)$ et $E_2 = E\,(M/N_2)$ deux injectifs indécomposables dont les types appartiennent à Π_M, et supposons que $\varphi(E_1) = \varphi(E_2) = P$, c'est-à-dire $\mathrm{Ass}\,(M/N_1) = \mathrm{Ass}\,(M/N_2) = \{P\}$.
N_1 et N_2 étant des modules isotypiques de même idéal premier associé P, ils sont par hypothèse de même type, c'est-à-dire que E_1 est isomorphe à E_2 .

1 $\Longrightarrow$ 2 . Soient N_1 et N_2 deux sous-modules isotypiques que M, ayant même idéal premier associé :

$$E\,(M/N_1) = \bigoplus_{i \in I} E_i \qquad \text{et} \qquad E\,(M/N_2) = \bigoplus_{j \in J} F_j \ ,$$

avec $\mathrm{Ass}\,(E_i) = \mathrm{Ass}\,(F_j) = \{P\}$

Le lemme 2 prouve que les types des E_i et des F_j appartiennent à Π_M, donc (hypothèse 1) , que les E_i sont isomorphes aux F_j, c'est à dire que N_1 et N_2 sont de même type

1 $\Longrightarrow$ 3 . Soit N un sous-module tertiaire de M :

$E\,(M/N) = \bigoplus_{i \in I} E_i$, avec $\mathrm{Ass}\,(E_i) = \{P\}$ pour tout i .

Le lemme 2 prouve que les types des E_i appartiennent à Π_M, donc (hypothèse 1) qu'ils sont isomorphes ; N est donc un sous-module isotypique de M .

Problème : La condition 3 implique-t-elle les deux autres ?

Proposition 12 . Soit A un anneau noethérien ; les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) φ est une bijection .

(2) Pour tout A-module M, la condition 2 de la proposition 11 est vérifiée.

(2') Pour tout couple ($\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$) d'idéaux isotypiques de A, si Ass $(A/\mathfrak{a}_1)$ = Ass $(A/\mathfrak{a}_2)$, $\mathfrak{a}_1$ et $\mathfrak{a}_2$ sont de même type .

(3) Pour tout A-module M, il y a coïncidence entre les sous-modules tertiaires et les sous-modules isotypiques .

- Démonstration : Soit E un A-module injectif indécomposable ; pour tout élément x non nul de E, E est enveloppe injective de A x, donc de $A/\mathfrak{a}$, où $\mathfrak{a}$ = Ann x .

Ceci prouve que $\mathcal{T}_A = \mathcal{T}$

- $2' \Longleftrightarrow 1 \Longleftrightarrow 2 \Longleftrightarrow 3$ se déduit donc de la proposition 11 .

- $3 \Longrightarrow 1$. Soient E_1 et E_2 deux A-modules injectifs indécomposables tels que Ass (E_1) = Ass (E_2) $\{\mathfrak{P}\}$.
0 est un sous-module tertiaire, donc isotypique, de $E_1 \oplus E_2$, ce qui prouve que E_1 est isomorphe à E_2 .

Remarque 1 . Soit l'assertion :

(3') Il y a identité entre idéaux tertiaires et isotypiques de A .

- Les conditions précédentes impliquent évidemment cette condition (3') ; en outre, démontrer $3 \Longrightarrow 1$ dans la proposition 11 équivaut à démontrer $3' \Longrightarrow 3$ dans la proposition 12 .

Remarque 2 . Les propositions 7 et 12 prouvent que l'application φ n'est pas en général bijective .

Proposition 13 . Soient A un anneau noethérien, et M un A-module ; soit la condition :

(H_M) : " Pour tout sous-module N de M, et tout élément $\bar{x}$ de M/N , il existe des éléments $\bar{x}_1 \ldots\ldots \bar{x}_n$ de M/N tels que

$$\mathrm{Ann}\,(A\,\bar{x}) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ann}\,(\bar{x}_i) \text{ "}$$

Si A vérifie la condition (H_M) , la restriction de φ à Π_M est injective , et il y a donc identité entre les sou-modules tertiaires et les sous-modules isotypiques de M .

- Demonstration Soit $\underline{P}_M = \varphi\,(\Pi_M)$, et soit ψ l'application de $\underline{P}_M$ dans Π_M qui, à tout idéal bilatère premier P de $\underline{P}_M$, associe le type de l'idéal isotypique P (cf . théorème 4) . On a vu au théorème 4 de $\psi \circ \varphi = 1_{\Pi_M}$ démontrons que, si A vérifie (H_M) , $\varphi \circ \psi = 1_{\underline{P}_M}$.

Considérons pour cela un injectif indécomposable $E = E\,(M/N)$ dont le type Π appartient à Π_M, et soit $\mathrm{Ass}\,(E) = \{ P \}$. Soit X/N un sous-module non nul de M/N dont P annule tous les sous-modules non nuls, et soit $\bar{x}$ un élément non nul de X/N ; puisque $P = \mathrm{Ann}\,(A\,\bar{x})$, il existe par hypothèse des éléments $(\bar{x}_i)_{i = 1 \ldots\ldots n}$ dans $A\,\bar{x}$ tels que $P = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ann}\,\bar{x}_i$.

Il existe donc un monomorphisme de A/P dans $\bigoplus_{i=1}^{n} A\,\bar{x}_i$;

Or $E\,(A\,\bar{x}_i) = E\,(M/N) = E$, ce qui prouve que $E\,(A/P)$ est un sous-module de E^n .

On en déduit que $E(A/P)$ est somme directe d'injectifs indécomposables E_j tout isomorphes à E, donc que $\varphi \circ \psi = 1_{P_M}$, et qu'ainsi la restriction de φ à π_M est injective.

Remarque . La condition précédente est en particulier satisfaite si les idéaux à gauche de A, annulateurs d'éléments de M/N (où N décrit les sous-modules de M), vérifient la condition de chaîne descendante.

Proposition 14 . (Gabirel [4]) . Soit A est un anneau noethérien à gauche vérifiant la condition :

(H) " . Pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A, il existe des éléments $\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n$ de $A/\mathfrak{a}$ tels que $\mathrm{Ann}(A/\mathfrak{a}) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ann}\, \bar{x}_i$ ".

l'application φ est bijective.

- Démonstration .

Il suffit de remarquer que, pour tout élément $\bar{x}$ de M/N, on a $A\bar{x} \approx A/\mathrm{Ann}\,\bar{x} = A/\mathfrak{a}$, et d'appliquer la proposition 13.

Proposition 15 .

La condition (H) est vérifiée dans les deux cas suivants :

a - A est artinien à gauche.

b - Tout idéal de A est bilatère.

- Démonstration .

a - Evident

b - $\mathfrak{a}$ étant bilatère, on a

$\mathrm{Ann}_g(A/\mathfrak{a}) = \mathfrak{a} = \mathrm{Ann}\,\bar{1}$.

Remarque . On retrouve ainsi que, si A est commutatif, il existe une bijection entre idéaux premiers et types d'injectifs indécomposables (cf . Matlis [10]) .

Lemme 4 . Pour tout idéal bilatère premier P d'un anneau noethérien à gauche A , P est isotypique .

- Démonstration .

$B = A/P$ étant un anneau premier noethérien à gauche, on sait (Goldie [6] , Lesieur et Croisot [8])que $E_B (B) = C$ est un anneau simple ;l'enveloppe injective E de A/P considérée comme A-module contient C, et c'est en fait l'ensemble des éléments de E annulés par P .

Or B étant un anneau simple noethérien, il est somme directe d'un nombre fini d'idéaux à gauche simples isomorphes .

Ces idéaux étant des A-modules co-irréductibles isomorphes, E est somme directe d'injectifs indécomposables isomorphes, ce qui prouve que P est isotypique.

Proposition 16 . Soit A un anneau noethérien à gauche, et N un sous-module tertiaire de M ; si les idéaux à gauche de A qui sont annulateurs d'éléments de M/N vérifient la condition de chaîne descendante, N est un sous-module isotypique de M .

- Démonstration .

Soit $E\,(M/N) = \bigoplus_{i \in I} E_i$ une décomposition de $E\,(M/N)$ en somme directe d'injectifs indécomposables ; par hypothèse, pour tout i de I , on a $\mathrm{Ass}\,(E_i) = \{P\}$.

Soit j un élément quelconque de I, et soit

$$M'/N = (M/N) \cap E_j \neq 0 \;;$$

$\mathrm{Ass}\,(M'/N)$ étant égal à P , il existe un sous-module non nul M''/N de M'/N tel que $P = \mathrm{Ann}\,(M''/N)$.

Les annulateurs des éléments non nuls de M''/N vérifiant la condition de chaîne descendante, il existe $\bar{x}_1 \ldots\ldots \bar{x}_n$ dans M''/N, donc dans E_j, tels que $$P = \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ann} \bar{x}_i$$

On en déduit que $E\,(A/P)$ est facteur direct de $\bigoplus_{i=1}^{n} E\,(A\,\bar{x}_i)$ qui est isomorphe à E_j^n. Or (lemme 4), $E\,(A/P)$ est un A-module isotypique de type Π_o.

Ceci prouve que, pour tout j, E_j est de type Π_o, c'est-à-dire que N est Π_o-isotypique.

<u>Corollaire</u>.

<u>Soit A un anneau noethérien à gauche et à droite, tout idéal bilatère tertiaire est isotypique</u>.

<u>- Démonstration</u>.

Soit $\mathfrak{A}$ un idéal bilatère de A, et X un sous-ensemble quelconque de A;

$$\mathfrak{A} \mathbin{\dot{\cdot}} X = \{ \lambda \in A \,/\, \lambda X \subseteq \mathfrak{A} \}$$ est un idéal à gauche de A.

$$\mathfrak{A} \mathbin{\dot{\cdot}} (\mathfrak{A} \mathbin{\dot{\cdot}} X) = \{ a \in A \,/\, (\mathfrak{A} \mathbin{\dot{\cdot}} X)\, a \subseteq \mathfrak{A} \}$$

est un idéal à droite de A,

et $$\mathfrak{A} \mathbin{\dot{\cdot}} [\mathfrak{A} \mathbin{\dot{\cdot}} (\mathfrak{A} \mathbin{\dot{\cdot}} X)] = \mathfrak{A} \mathbin{\dot{\cdot}} X.$$

A étant noethérien à droite, les idéaux $\mathfrak{A} \mathbin{\dot{\cdot}} (\mathfrak{A} \mathbin{\dot{\cdot}} X)$ vérifient la condition de chaîne ascendante, donc les idéaux $\mathfrak{A} \mathbin{\dot{\cdot}} X$ vérifient la condition de chaîne descendante ; en particulier les idéaux $\operatorname{Ann}_g (A\,\bar{x}) = \mathfrak{A} \mathbin{\dot{\cdot}} x$ vérifient la c.c.d., et les hypothèses de la proposition 16 sont vérifiées.

BIBLIOGRAPHIE

*

* *

[1] AZUMAYA G. - Conections and supplementaries to my paper concerning Krull-Remak-Schmidt' s theorem (Nagoya Math . J . vol . I, 1950, p - 117-124) .

[2] BOURBAKI N. - Eléments de Mathématique, livre II, Algèbre chap . 7 2ème éd . (A.S.I. Hermann, Paris 1964) .

[3] CHAMARD J.Y. - Modules riches en co-irréductibles et sous-modules compléments (C.R. Acad . Sc . Paris, t. 264, p. 987-990, 1967) - voir aussi thèse doct . 3ème cycle , 15 Juin 1967, Fac. Sc. Poitiers -

[4] GABRIEL P. - Des catégories abéliennes (Bull. Soc. Math. Fr. vol. 90, 1962, p. 323-448) .

[5] GERMA M.C. - Modules tertiaires, modules primaires et lemme d'Artin-Rees - Séminaire d'Algèbre non commutative -Orsay- Février 68 .

[6] GOLDIE A.W. - The structure of prime rings under ascending chain conditions (Proc . London Math. Soc. vol. VIII, 1958, p. 589-608) .

[7] GRAPPY J. - Travaux de V.A. ANDRUNA KIEVIČ et R. RJABUKHIN . Séminaire d'Algèbre non commutative . Orsay - Mars 1968 .

[8] LESIEUR L. et CROISOT R. - Sur les anneaux premiers noethériens - (Ann. Ec. Norm. sup. t. 76, 1958, p. 357-360) .

[9] LESIEUR L. et CROISOT R. - Algèbre noethérienne non commutative (Mémorial Sc. Math ., Fasc. CLIV, Paris 1963) .

[10] MATLIS E. - Injective modules over noetherian rings (Pacific J. Math . 8, 1958, p. 511-528) .

[11] RENAULT G. - Etude des sous-modules compléments dans un module (Bull. Soc. Math. de France, série "Mémoires", n° 9 thèse, Paris 1966) .

[12] Séminaire d'Algèbre de POITIERS - Année 1966-67. Fasc. 1 : Modules injectifs .

Conférence n° 17 du 29 AVRIL 1968

-:-:-:-:-:-:-

COMPOSANTS ISOLES DANS LES ANNEAUX NOETHERIENS

par M. DJABALI

Exposé non rédigé constituant une introduction à la théorie de la localisation dans un anneau non commutatif par A.W. GOLDIE.

-:-:-:-:-:-:-:-:-

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

EXPOSE n° 18 du 6 MAI 1968

-:-:-:-:-:-:-:-:-

RESULTATS DE A.W. GOLDIE
concernant les anneaux principaux non
commutatifs [I]

par B. LEMONNIER

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

Rappelons que pour un anneau A les trois propriétés suivantes sont équivalentes (A sera dit, pour abréger, anneau de Goldie) :

1) A est semi-premier, ${}_A A$ est de dimension finie (toute somme directe d'idéaux à gauche est finie), les annulateurs à gauche satisfont à la condition maximale.

2) A semi-premier, ${}_A A$ de dimension finie, l'idéal singulier à gauche de A est nul $(J({}_A A) = 0)$.

3) A admet un anneau total de fractions à gauche semi-simple.

Pour $1 \Longleftrightarrow 3$, voir II. Pour $1 \Longrightarrow 2$, voir III. Montrons $2 \Longrightarrow 1$.

Soit S une partie de A, posons $G = 0^{\cdot}.S$. Si G' est un idéal à gauche extension essentielle de G, alors (puisque $J({}_A A) = 0$) G' est extension rationnelle de G. L'endomorphisme $\hat{s} : x \longrightarrow xs$ $(s \in S)$ est nul sur G donc aussi sur G'. Conclusion $G' = G$. N'admettant pas d'idéal à gauche extension essentielle propre, G est un complément à gauche. Or la condition de dimension finie pour ${}_A A$ implique la condition maximale sur les compléments à gauche (II, lemme 1.3.).

<u>Exemple</u> : Un anneau semi-premier et noethérien à gauche est un anneau de Goldie (notamment un anneau semi-premier principal).

<u>Remarque</u> : On utilisera le fait suivant : si G est un annulateur à gauche dans un anneau de Goldie A, alors il existe $t \in A$ tel que $G = 0^{\cdot}.t$ et $G \oplus At < {}_A A$; voir II p.p. 208-209. Il s'ensuit d'ailleurs que, $\forall\, a \in A$ $\dim {}_A Aa + \dim {}_A(0^{\cdot}.a) = \dim {}_A A$. En effet il existe t tel que $0^{\cdot}.t = 0^{\cdot}.a$ d'où ${}_A At \approx {}_A Aa$) et $0^{\cdot}.t \oplus At < {}_A A$ (d'où $\dim {}_A(0^{\cdot}.t) + \dim {}_A At = \dim {}_A A$).

§ 1. <u>ANNEAUX PRINCIPAUX A GAUCHE SEMI-PREMIERS</u>.

<u>LEMME 1</u> : Soient A un anneau semi-premier et I un idéal bilatère de A :

a) l'annulateur à gauche de I,

b) l'annulateur à droite de I,

c) le complément à gauche de I (il est unique),

d) le complément à droite de I (il est unique),

sont identiques. Cet idéal sera dit <u>idéal annulateur</u>.

Démonstration :

Soit K un idéal à gauche alors

$I \cap K = 0 \Longrightarrow IK = 0 \Longrightarrow (KI)^2 = 0 \Longrightarrow KI = 0 \Longrightarrow K \subseteq 0 \cdot\!\!. I$.

Mais $(I \cap 0 \cdot\!\!. I)^2 = 0$ donc $I \cap 0 \cdot\!\!. I = 0$. Ainsi a) = c) . De même b) = d) . Ensuite $I \cap 0 .\!\cdot I = 0$ donc $0 .\!\cdot I \subseteq 0 \cdot\!\!. I$. Finalement a) = b) .

LEMME 2. Si A est un anneau de Goldie, alors les idéaux annulateurs minimaux sont en nombre fini, leur somme est directe et essentielle dans A.

Démonstration :

L'existence d'idéaux annulateurs minimaux est assurée puisque la condition maximale sur les annulateurs à gauche implique la condition minimale pour les annulateurs à droite, dont les idéaux annulateurs font partie. Soit $A_1, \ldots, A_s$ une famille d'idéaux annulateurs maximale pour la propriété d'avoir une somme directe. Alors $A_1 \oplus \ldots \oplus A_s$ est essentielle dans A , sinon cette somme, qui est un idéal bilatère, admettrait un complément $\neq 0$ qui (Lemme 1) serait un idéal annulateur et contiendrait un idéal annulateur minimal $\neq 0$, impossible par construction de $A_1, \ldots, A_s$. Enfin soit B un idéal annulateur minimal (non nul). On ne peut avoir $B.A_i = 0$, $1 \leqslant i \leqslant s$, puisque dans ce cas B serait un complément de $A_1 \oplus \ldots \oplus A_s$. Donc $B.A_{i_0} \neq 0$ pour un certain i_0 . Donc $B \cap A_{i_0} \neq 0$, donc $B = A_{i_0}$.

LEMME 3. Si A est un anneau de Goldie, $Aa < A \Longrightarrow a$ est régulier.

Démonstration :

On a vu que $\dim_A(Aa) + \dim_A(0 \cdot\!\!. a) = \dim_A A$, l'hypothèse équivaut à

$\dim_A(Aa) = \dim_A A$. Donc $0 \cdot . a = 0$. Enfin $J(_A A) = 0$ montre que $0 . \cdot a = 0$. (Si $x \in 0 . \cdot a$, $x \neq 0$; $Aa\, x = 0$ et Aa est essentiel dans A, x serait singulier).

THEOREME A. Un anneau semi-premier principal à gauche est composé direct d'anneaux premiers principaux à gauche en nombre fini.

Démonstration :

Considérons la somme S des idéaux annulateurs minimaux (lemme 2) $S = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_s < {}_A A$, cet idéal est principal : $S = Ac$, et c est régulier (lemme 3). L'endomorphisme $\hat{c}$ de $_A A$ défini par $x \longrightarrow xc$ est injectif, donc $\hat{c}^{-1}(A_1) \oplus \hat{c}^{-1}(A_2) \oplus \dots \oplus \hat{c}^{-1}(A_s) = A$. Mais l'idéal A_1 est l'annulateur de $A_2 \oplus \dots \oplus A_s$ donc $xc \in A_1 \iff (A_2 \oplus \dots \oplus A_s)\, xc = 0 \iff (A_2 \oplus \dots \oplus A_s)x = 0$ puisque c est régulier. Donc $\hat{c}^{-1}(A_i) = A_i$, $1 \leq i \leq s$. Ainsi $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_s$ Les idéaux bilatères A_i s'annulant deux à deux, A est composé direct des anneaux A_i. A étant principal, les anneaux A_i le sont aussi. Montrons enfin que les A_i sont premiers. Soient deux idéaux bilatères, B et B', de A_1 ; ce sont aussi des idéaux de A ; supposons $B . B' = 0$ et $B \neq 0$, alors $B \subseteq 0 : B'$ donc $A_1 \subseteq 0 : B'$, donc $B'^2 = 0$, donc $B' = 0$.

§ 2. ANNEAUX UNITAIRES PRINCIPAUX A GAUCHE ET PREMIERS.

LEMME 4. Dans un anneau A unitaire principal à gauche et semi-premier,

1) tout annulateur à gauche est engendré par un idempotent,

2) tout annulateur à gauche minimal est co-irréductible.

Démonstration :

1) Soit I un annulateur à gauche, il existe un élément $t \in A$ tel que $I = 0^{\cdot}.t$ et $0^{\cdot}.t \oplus At < A$. ${}_A A$ étant principal $0^{\cdot}.t \oplus At = Ac$ et (lemme 3.) c est régulier. On peut donc écrire $t = xc$ $(x \in A)$ et $c = v + at$ $(v \in 0^{\cdot}.t \;,\; a \in A)$. D'où $(xa - 1)t = - xv \in 0^{\cdot}.t \cap At = 0$ donc $xa - 1 \in 0^{\cdot}.t$ donc $0^{\cdot}.t + Axa = A$. Supposons $bxa \in Axa \cap 0^{\cdot}.t$ alors $bxat = 0$ d'où $bt = 0$ d'où $bx = 0$ $(t = xc)$, finalement $Axa \cap 0^{\cdot}.t = 0$. Ainsi I est facteur direct de ${}_A A$; I est donc engendré par un idempotent.

2) ${}_A A$ étant de dimension finie, si l'annulateur à gauche minimal I n'est pas co-irréductible il contient un idéal à gauche U co-irréductible et non nul. A étant semi-premier $U^2 \neq 0$, $Uu \neq 0$ pour un certain $u \in U$. Alors $(0^{\cdot}.u) \cap I = 0$, puisque I était minimal ; $\dim {}_A I + \dim {}_A (0^{\cdot}.u) \leq \dim {}_A A$; ce qui, joint à $\dim 0^{\cdot}.u + \dim Au = \dim {}_A A$, montre que $\dim I = 1$. I est donc co-irréductible.

Désormais nous supposons que A est principal à gauche, premier et unitaire. On a vu (Lemme 4,1) que les annulateurs à gauche sont des compléments, or ${}_A A$ étant de dimension finie, les idéaux à gauche compléments vérifient la condition minimale. Considérons un annulateur à gauche minimal ; il s'écrit Ae où e est un idempotent (lemme 4,1). Nous allons étudier le bimodule eA , eAe-module à gauche, A-module à droite ; et notamment l'action de A sur le eAe-module eA .

LEMME 5.

1) Tout idéal à gauche non nul dans Ae a une intersection non nulle avec eAa. 2) L'anneau eAe est un domaine de Ore.

Démonstration :

Soit I un idéal à gauche non nul dans Ae et supposons $I \cap eAe = 0$ alors $eI = 0$ donc $Ae.I = 0$, ce qui impliquerait $I = 0$ puisque A est premier. Montrons maintenant que eAe est intègre ; supposons $exe.eye = 0$ et $exe \neq 0$. Alors $(0 \cdot. eye) \cap eAe \neq 0$ et à fortiori $(0 \cdot. eye) \cap Ae \neq 0$; mais Ae est un annulateur minimal donc $0 \cdot. eye \supseteq Ae$, d'où $eye = eeye = 0$. Enfin eAe vérifie la condition des multiples communs à gauche ; en effet soient exe et eye non nuls ; l'idéal Ae est co-irréductible (lemme 4,2), donc $Aexe \cap Aeye$ est un idéal à gauche non nul qui de plus est dans Ae , donc , d'après le début, $Aexe \cap Aeye \cap eAe \neq 0$; on peut trouver a_1 et $a_2 \in A$ avec $0 \neq a_1 exe$ $= a_2 eye \in eAe$ d'où $ea_1 exe = ea_2 e\, eye \neq 0$.

On dira qu'une partie $(a_1, \dots, a_k)$ de eA est eAe-libre quant toute relation $\xi_1 a_1 + \dots + \xi_k a_k = 0$ avec $\xi_i \in eAe$, $1 \leq i \leq k$, exige $\xi_i = 0$, $1 \leq i \leq k$.

<u>LEMME 6</u>. Pour que $(a_1, \dots, a_k)$ soit eAe-libre il faut et il suffit que la somme des idéaux $Aa_1, \dots, Aa_k$ soit directe.

Démonstration :

Nécessité : Supposons $x_1 a_1 + \dots + x_k a_k = 0$, $x_1, \dots, x_k \in A$ et par exemple $x_1 a_1 \neq 0$. Alors $\{x \in Ae \mid xa_1 \in Aa_2 + \dots + Aa_k\}$ est un idéal à gauche non nul dans Ae , il existe (lemme 5,1) $\xi \in eAe$ tel que $\xi a_1 \in Aa_2 + \dots + Aa_k$ avec $\xi \neq 0$. Donc $\xi a_1 \in eAe\, a_2 + \dots + eAe\, a_k$ ce qui contredit l'hypothèse $(a_1, \dots, a_k)$ eAe-libre. La condition est suffisante :

si $Aa_1 + \ldots + Aa_k$ est directe, à fortiori la somme $eAe\, a_1 + \ldots + eAe\, a_k$ est directe, il s'ensuit que $(a_1, \ldots, a_k)$ est eAe-libre. En effet si $\xi a = 0$ ($\xi \in eAe$, $a \in eA$, $a \neq 0$) et $\xi \neq 0$ alors $(0^{\cdot}.a) \cap Ae \neq 0$, donc $0^{\cdot}. a \supseteq Ae$ puisque Ae est annulateur à gauche minimal, donc $ea = a = 0$. Donc $\xi a = 0$ et $a \neq 0$ impliquent $\xi = 0$.

LEMME 7. Si $n = \dim {}_A A$, il existe une base $(a_1, \ldots, a_n)$ de eA sur eAe, telle que $Aa_1 \oplus \ldots \oplus Aa_n = A$.

Démonstration :

Remarquons d'abord que tout idéal à gauche I non nul de A a une intersection non nulle avec eA . Sinon on aurait $I \cap eA = 0 \Longrightarrow eI = 0 \Longrightarrow Ae.I = 0$ $\Longrightarrow Ae.I = 0 \Longrightarrow I = 0$ puisque A est premier.

Posons $n = \dim {}_A A$. Il existe n idéaux à gauche non nuls co-irréductibles $I_1, \ldots, I_n$ tels que $I_1 \oplus \ldots \oplus I_n$ soit essentiel dans A . D'après la remarque du début $I_i \cap eA \neq 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Soit $d_i \in I_i \cap eA$, $d_i \neq 0$. Les idéaux Ad_i sont non nuls (A est unitaire) et $Ad_1 \oplus \ldots \oplus Ad_n$ est encore essentiel dans A , chaque Ad_i étant essentiel dans I_i . Mais A est principal, donc il existe $c \in A$ tel que $Ad_1 \oplus \ldots \oplus Ad_n = Ac$, et c est régulier (lemme 3). On en déduit $d_i = a_i c$ où $a_i \in A$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Puisque $d_i \in eA$, $d_i = a_i c$ implique $ea_i c = a_i c$ d'où $a_i = ea_i \in eA$. Montrons que $(a_1, \ldots, a_n)$ est une base de eA sur eAe . En effet $Ac = Aa_1 c \oplus \ldots \oplus Aa_n c$ implique, puisque c est régulier, $A = Aa_1 \oplus \ldots \oplus Aa_n$. On en déduit, en tenant compte des égalités $a_i = ea_i$, $eA = eAe\, a_1 \oplus \ldots \oplus eAe\, a_n$. Ainsi eA est un eAe-module libre de dimension n , et $(a_1, \ldots, a_n)$ en est une base qui répond à la condition du lemme.

<u>LEMME 8</u>. Soit $(a_1, \ldots, a_n)$ une base de eA sur eAe telle que $Aa_1 \oplus \ldots \oplus Aa_n = A$. Alors quelques soient $b_1, \ldots, b_n \in eA$ il existe un élément unique $x \in A$ tel que $a_i x = b_i$, $1 \leq i \leq n$.

<u>Démonstration</u> :

$A = Aa_1 \oplus \ldots \oplus Aa_n$ permet d'écrire $1 = x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n$ où les $x_i \in Ae$. De plus $(x_i a_i)^2 = x_i a_i$ et $x_i a_i x_j a_j = 0$ $(i \neq j)$. De la première égalité on tire $(a_i x_i a_i x_i - a_i x_i) a_i = 0$ où le facteur de gauche appartient à eAe. Donc $(a_i x_i)^2 = a_i x_i$; mais $a_i x_i \in eAe$ et le seul idempotent du domaine eAe est e, ainsi $a_i x_i = e$, $1 \leq i \leq n$. De la seconde égalité on tire $a_i x_i a_i x_j a_j = 0$, or $a_i x_i = e$. Donc $a_i x_j a_j = 0$ et, puisque $a_i x_j \in eAe$, $a_i x_j = 0$, $(i \neq j)$.

Posons $x = x_1 b_1 + \ldots x_n b_n$, on a bien $a_i x = a_i x_i b_i = eb_i = b_i$. Enfin x est unique : supposons $a_i y = 0$, $1 \leq i \leq n$, $y \in A$; alors $(\sum_{i=1}^{n} Aa_i) y = 0$, donc $Ay = 0$ et $y = 0$.

<u>THEOREME B</u>.

Un anneau A unitaire, premier et principal à gauche est anti-isomorphe à l'anneau des matrices carrées d'ordre n sur un domaine de Ore noethérien à gauche, n étant la dimension de A comme module à gauche sur lui-même.

<u>Démonstration</u> :

Tenant compte des lemmes 5 et 8, il reste à montrer que eAe est noethérien à gauche. Pour le faire donnons-nous un idéal à gauche I de l'anneau eAe. Puisque A est principal à gauche, $AI = Aa$ pour un certain a, qui peut être pris dans Ae. Alors

$$I = eAe\, I = eA\, I = eAa = [(eAe)a_1 + \dots + (eAe)a_n]a$$

avec les notations du lemme 8. Ainsi I est engendré par les éléments $a_1 a, \dots, a_n a$ de eAe.

§ 3. ANNEAUX UNITAIRES, PRINCIPAUX A GAUCHE ET NOETHERIENS A DROITE.

(Hypothèse du paragraphe 3).

LEMME 9. L'anneau A étant supposé principal à gauche, noethérien à droite, unitaire, pour tout $a \in A$ il existe $v \in A$ tel que $(\bigcap_{n=1}^{\infty} Aa^n) \cdot (1 - av) = 0$.

Démonstration :

A étant principal à gauche $\bigcap_{n\,1}^{\infty} Aa^n = Ab$ où $b \in A$.

Montrons d'abord que (1) $Aba = Ab$. Puisque $Ab \subseteq \dots \subseteq Aa^2 \subseteq Aa$, on a $Aba \subseteq Ab$. Par construction de b, $b = a_m a^m$ où $a_m \in A$, $m \geq 1$. A étant noéthérien à gauche il existe un entier n tel que $a_{n+1} \in Aa_1 + \dots + Aa_n$, soit $a_{n+1} = b_1 a_1 + \dots + b_n a_n$, $b_i \in A$, $1 \leq i \leq n$; d'où

$$b = a_{n+1} a^{n+1} = b_1 a_1 a^{n+1} + \dots + b_n a_n a^{n+1} = b_1 ba^n + \dots + b_n ba \in Aba .$$

Ainsi $Ab \subseteq Aba$.

Montrons maintenant que (2) $0 \cdot a^k \cap Ab = 0$ pour tout $k \geq 0$. En effet les annulateurs $0^{\cdot}_{\cdot} a^k$ forment une suite croissante d'idéaux à gauche, il existe un entier k_0 tel que $0^{\cdot}_{\cdot} a^{k_0} = 0^{\cdot}_{\cdot} a^k$ pour tout $k \geqslant k_0$. Alors $0^{\cdot}_{\cdot} a^{k_0} \cap Aa^{k_0} = 0$, en effet $xa^{k_0} \in 0^{\cdot}_{\cdot} a^{k_0} \Longrightarrow x \in 0^{\cdot}_{\cdot} a^{2k_0} = 0^{\cdot}_{\cdot} a^{k_0} \Longrightarrow xa^{k_0} = 0$. Comme pour tout k $0^{\cdot}_{\cdot} a^k \subseteq 0^{\cdot}_{\cdot} a^{k_0}$; et $Ab \subseteq Aa^{k_0}$, (2) est prouvé.

D'après (1), $Aba^k = Ab$ d'où $b = c_k a^k$ avec $c_k \in Ab$, $k \geqslant 0$; de $c_k a^k = c_{k+1} a^{k+1}$ on tire $c_k - c_{k+1} a \in (0^{\cdot}_{\cdot} a^k) \cap Ab$, donc, d'après (2), $c_k = c_{k+1} a$, $k \geqslant 0$. La suite des idéaux à droite $c_k A$ est donc croissante ; A étant noethérien à droite il existe un entier p tel que $c_{p+1} A = c_p A$, c'est-à-dire $c_{p+1} = c_p v$ où $v \in A$. Mais $c_p = c_{p+1} a$ montre que $Ac_{p+1}(1-av) = 0$. Montrons enfin que $Ab = Ac_{p+1}$. Puisque $Aba^k = Ab$, $k \geqslant 0$, $ba^{p+1} = xb = xc_{p+1} a^{p+1}$, avec $x \in A$. D'où $b - xc_{p+1} \in (0^{\cdot}_{\cdot} a^{p+1}) \cap Ab = 0$. Ainsi $Ab \subseteq Ac_{p+1}$. Comme $c_{p+1} \in Ab$, on a bien $Ab = Ac_{p+1}$.

<u>LEMME 10</u>. Soit P un idéal premier non nul d'un anneau A unitaire, premier, principal à gauche et noethérien à droite. Alors l'anneau $A/_P$ est simple.

<u>Démonstration</u> :

Il suffit de montrer que $A/_P$ (qui est un anneau de Goldie premier) coïncide avec son anneau de fractions à gauche. Il suffit donc de montrer que tout élément régulier c de $\bar{A} = A/_P$ est inversible dans $\bar{A}$. $\bar{A}c$ est essentiel dans $\bar{A}$, la préimage de $\bar{A}c$ par l'homomorphisme $A \to \bar{A}$ est un idéal à gauche de A, soit Aa, qui contient P et qui est essentiel dans A. Puisque $\bar{A}c$ est essentiel dans $\bar{A}$ et $\bar{A}\bar{a} = \bar{A}c$, $\bar{a}$ est régulier dans $\bar{A}$. L'implication $\bar{x}\bar{a} = 0 \Longrightarrow \bar{x} = 0$ montre que $Aa \cap P \subseteq Pa$, mais Aa contient P, donc

$P \subseteq Pa \subseteq P$. On en déduit $P = Pa = Pa^n \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} Aa^n$. Le lemme 9 montre qu'il existe $v \in A$ tel que $(\bigcap_1^{\infty} Aa^n) \cdot (1-av) = 0$, à fortiori $P.(1-av) = 0$, comme $P \neq 0$ et A premier, c'est que $av = 1$. Ainsi a est inversible dans A , $\bar{a}$ l'est donc dans $\bar{A}$, $\bar{A}c = \bar{A}\bar{a} = \bar{A}$ montre que c est bien inversible dans $\bar{A}$.

<u>LEMME 11</u>. Si A vérifie l'hypothèse du § 3 , si P et P' sont deux idéaux premiers avec $P' \subset P$, alors $P'P = P'$.

<u>Démonstration</u> :

Soit $\varphi : A \longrightarrow A/_{P'} = \bar{A}$ l'homomorphisme canonique. $\bar{A}$ est un anneau principal à gauche premier. Dans un tel anneau tout idéal bilatère non nul est essentiel, sinon cet idéal admettrait un idéal annulateur non nul (lemme 1) ce qui contredit l'hypothèse que l'anneau est premier. Donc $\varphi(P)$ qui est un idéal bilatère non nul puisque $P' \subset P$ est essentiel dans $\bar{A}$. Posons $P = Aa$, $\bar{A}.\varphi(a)$ étant essentiel dans $\bar{A}$, $\varphi(a)$ est régulier dans $\bar{A}$, donc pour $x \in A$ $\varphi(x)\ \varphi(a) = 0 \Longrightarrow \varphi(x) = 0$ ce qui montre que $AP \cap P' \subseteq P'P$. Donc $P \cap P' = P' \subseteq P'.P \subseteq P'$.

<u>LEMME 12</u>. Si A vérifie l'hypothèse du § 3 , si P et P' sont deux idéaux premiers alors ou bien ils sont emboités, ou bien $P + P' = A$ (P et P' co-maximaux).

<u>Démonstration</u> :

Les idéaux premiers de A contiennent N , le radical nilpotent de A . Leurs images par l'homomorphisme canonique $A \longrightarrow \frac{A}{N}$ sont encore des idéaux premiers, enfin cet homomorphisme conserve par passage aux préimages l'inclusion ou la co-maximalité pour deux idéaux premiers. On supposera donc $N = 0$, c'est-à-dire A semi-premier.

Dans ce cas (théorème A) , A est le composé direct de s anneaux $A_1, \dots, A_s$ qui vérifient toujours les hypothèses du § 3 et sont premiers. Posons $P_i = A_1 \oplus \dots \oplus A_{i-1} \oplus A_{i+1} \oplus \dots \oplus A_s$, $1 \leq i \leq s$. Puisque $A/P_i \approx A_i$, les idéaux P_i sont premiers.

Soit P un idéal premier de A , $P = Q_1 \oplus \dots \oplus Q_s$ où Q_i est un idéal premier de l'anneau A_i . A/P est composé direct des anneaux A_1/Q_1 , ... , A_s/Q_s . A/P étant premier, il faut qu'au plus un des anneaux A_i/Q_i soit non nul . Donc P contient l'un des idéaux P_i .

Soient P et P' deux idéaux premiers de A . Si P et P' ne contiennent pas le même idéal P_i , alors $P + P' = A$. Supposons maintenant que P et P' contiennent le même idéal P_i . Supposons par exemple $P \neq P_i$, c'est-à-dire $P_i \subset P$. Le lemme 10 s'applique à l'anneau A/P_i c'est-à-dire $\frac{P+P'}{P_i} \subseteq \frac{P}{P_i}$, donc $P' \subseteq P$.

<u>LEMME 13</u>. Si A vérifie l'hypothèse du § 3 , si I est un idéal bilatère $\cap$-irréductible de A . Alors I est primaire à droite.

<u>Démonstration</u> :

On peut supposer $I = 0$, sinon la démonstration serait faite dans A/I .

Soient I_1 et I_2 deux idéaux bilatères tels que $I_1 \neq 0$ et $I_1 . I_2 = 0$.
$I_2 = Aa$ pour un certain $a \in A$. I_2 étant bilatère, $I_2^n = Aa^n$. Il existe un entier n tel que $Aa^n \cap 0 \cdot\!\!. a^n = 0$ (démonstration du lemme 9). Puisque 0 est $\cap$-irréductible on en déduit $I_2^n = 0$, ou $0 \cdot\!\!. a^n = 0$. Dans le deuxième cas remarquons que $a^n A \subseteq Aa^n$ donc $I_1 I_2^n = 0$ implique à fortiori $I_1 a^n A = 0$, donc $I_1 \subseteq 0 \cdot\!\!. a^n$, donc $I_1 = 0$ contrairement à l'hypothèse.

<u>LEMME 14</u>. Si A vérifie l'hypothèse du § 3 et si I désigne un idéal bilatère primaire à droite, alors I est primaire à gauche. De plus l'anneau $A/_I$ est premier, sinon il est primaire (le quotient par son radical nilpotent est un anneau simple).

<u>Démonstration</u> :

Il suffit de faire la démonstration dans le cas $I = 0$. Soit N le radical nilpotent de A.

N est premier. En effet supposons avoir deux idéaux bilatère J et K tels que $J.K \subseteq N$; soit n le plus petit entier tel que $(JK)^n = 0$ $(= J(KJ)^{n-1}K)$.
Si $J(KJ)^{n-1} \neq 0$ c'est que K est nilpotent (0 est primaire à droite).
Si $J(KJ)^{n-1} = (JK)^{n-1}J = 0$ c'est que J est nilpotent, puisque $(JK)^{n-1} \neq 0$.

Si $N = 0$, le lemme est démontré.

Si $N \neq 0$ nous allons montrer que $\bar{A} = A/_N$ est un anneau simple en montrant que l'anneau premier principal à gauche $\bar{A}$ coïncide avec son anneau total de fractions à gauche. Soient φ l'homomorphisme canonique $A \to \bar{A}$ et $c \in \bar{A}$ un élément régulier. Puisque A est principal à gauche on trouve $a \in A$ tel que $\varphi^{-1}(\bar{A}c) = Aa$, alors $\varphi(a)$ est régulier dans $\bar{A}$, $(\bar{A}.\varphi(a) = \bar{A}c$ est essentiel dans $\bar{A}$) . Pour $x \in A$ l'implication $\varphi(x)\varphi(a) = 0 \Longrightarrow \varphi(x) = 0$ montre que $Aa \cap N \subseteq N$ donc $N = Na$. D'après le lemme 9, il existe $w \in A$ tel que $(\bigcap_1^\infty Aa^n)(1-aw) = 0$, d'où $N.(1-aw) = 0$ et, puisque 0 est primaire à droite et $N \neq 0$, $(1-aw)$ est nilpotent; aw est donc inversible dans A , a l'est aussi ; finalement $\bar{A}c = \varphi(Aa) = \varphi(A) = \bar{A}$ ce qui montre que c est bien inversible dans $\bar{A}$.

Il reste à montrer que 0 est primaire à gauche, toujours quand $N \neq 0$. Supposons $J.K = 0$, $K \neq 0$, et J non nilpotent. D'après ce qui précède N est un idéal bilatère maximal de A , donc $J + N = A$; on en déduit, puisque N est nilpotent, $J = A$ contraire à $K \neq 0$ et $J.K = 0$. Ainsi $J.K = 0$ et $K \neq 0$ implique J nilpotent.

Remarque :

Dans le cas $N \neq 0$, A étant noethérien à droite et à gauche et $\frac{A}{N}$ étant semi-simple (et même simple), A est donc artinien à gauche et à droite. Donc, dans l'énoncé du lemme, A/I est artinien à gauche et à droite (IV).

THEOREME C. Un anneau unitaire principal à gauche et noethérien est isomorphe à un anneau composé direct d'anneaux principaux à gauche qui sont premiers ou primaires.

Démonstration :

Puisque A est noethérien bilatère, 0 admet une $\cap$-décomposition réduite (1) $0 = Q_1 \cap \dots \cap Q_n$ où les idéaux bilatères Q_i sont $\cap$-irréductibles donc primaires à gauche et à droite (lemmes 13 et 14) .

Posons $P_i = \text{rad}\, Q_i$ (somme des idéaux bilatères nilpotents modulo Q_i). P_i/Q_i est le radical nilpotent de l'anneau A/Q_i, P_i/Q_i est donc premier dans A/Q_i (démonstration du lemme 14), donc P_i est un idéal premier de A.

D'après le lemme 12, deux idéaux P_i et P_j $(i \neq j)$ sont ou emboités ou co-maximaux. Montrons qu'ils ne peuvent être emboités. Si on avait par exemple $P_i \subseteq P_j$ on aurait (lemme 11) $P_i = P_i P_j$. Mais il existe un entier k tel que $P_j^k \subseteq Q_j$, d'où $Q_i \subseteq P_i = P_i P_j^k \subseteq Q_j$ contraire au fait que (1) est réduite. Ainsi les idéaux P_i sont deux à deux co-maximaux.

Il s'ensuit que les idéaux Q_i sont eux aussi deux à deux co-maximaux. En effet pour i et j donnés, $i \neq j$, il existe un entier m tel que $P_i^m \subseteq Q_i$ et $P_j^m \subseteq Q_j$, d'où $A = (P_i + P_j)^m \subseteq Q_i + Q_j$.

Finalement (démonstration classique) A est isomorphe au composé direct des anneaux A/Q_i qui, d'après le lemme 14, vérifient les conditions du théorème.

<u>Corollaire</u> :

Un anneau unitaire principal à gauche et noethérien à droite est le composé direct d'un anneau principal à gauche semi-premier et d'un anneau principal à gauche, artinien à droite et à gauche.

<u>Démonstration</u> :

Utiliser la remarque qui suit le lemme 14.

REFERENCES

I. A.W. GOLDIE. Non commutative principal ideal rings. Arch. Math. XIII, 1962, pp. 213-221 .

II. A.W. GOLDIE. Semiprime rings with maximum condition. Proc. Lond. Math. Soc. (3) 10 (1960) pp. 201-220.

III. L. LESIEUR et R. CROISOT. Coeur d'un module - J. Math. Pures et Appl. tome XLII, Fasc. 4, 1963, p. 398 - Prop. 5.1 .

IV. BOURBAKI. Algèbre. Chap. 8, § 6, n° 5, Prop. 12 .

-§-§-§-§-§-§-§-

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 19 du 2D MAI 1968

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

The Transfer Ideal

by A.W. GOLDIE

-:-:-:-:-

We deal with a ring R which is right noetherian (denote this property by max-γ). I am not sure whether we need, R has 1, but certainly R must have regular elements.

Let A be an ideal of R, the term 'ideal' means 'two-sided ideal'.

Set $\mathcal{C}'(A) = (c \in R | cx \in A , x \in R , \Longrightarrow x \in A)$

$'\mathcal{C}(A) = (c \in R | xc \in A , x \in R \Longrightarrow x \in A)$

$\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}'(A) \cap {}'\mathcal{C}(A)$

N is the nil radical of R and $N^{\rho} = 0$, $N^{\rho-1} \neq 0$, $\rho > 0$.

<u>Lemma1</u>. (1) Let $a \in R$, $c \in \mathcal{C}'(0)$. Then $a \in R$, $c \in \mathcal{C}(N)$ exist with

$$ac_1 = ca_1$$

(2) $\mathcal{C}'(0) \subseteq \mathcal{C}(N)$.

<u>Proof</u>. Set $T_{\kappa} = \ell(N^{\kappa}) = (x \in R | xN^{\kappa} = 0) : k = 0, 1, \ldots, \rho$ and $T_0 = 0$. Now, when $c \in \mathcal{C}'(0)$

$$cx \in \ell(N^{\kappa}) \Longrightarrow cxN^{\kappa} = 0 \Longrightarrow x \in \ell(N^{\kappa})$$

So $\mathcal{C}'(0) \subseteq \mathcal{C}'(T_{\kappa})$. Thus in the ring R/T_{κ} the natural image of cR is generated by an element, which is not a left zero divisor, so this image is an essential right ideal of R/T_K. In other words, we may say,

"$cR + T_K$ is essential over T_K".

Let $a \in R$, $aN^{K+1} = 0$, set $E = (x \in R | ax \in cR + T_K)$; thus $E \supseteq N$.

Let I be a right ideal of R with $E \cap I = N$. If $aI \not\subset T_K$ then

$$aI + T_K \cap cR + T_K \supsetneq T_K .$$

Thus $i \in I$ exists with $ai = cy + t_K$ $t_K \in T_K$, $y \in R$, and $ai \notin T_K$.

Now $i \notin N$ and $i \in I \cap E = N$; a contradiction. Thus $aI \subset T_K$ and $I = N$ must be true. It follows that E is essential over N, that is, E/N is an essential right ideal in ring R/N, so E contains an element of $\mathcal{C}(N)$. Thus have an equation

$$ad_K = cy_1 + t_K ; \quad t_K \in T_K, \ d_K \in \mathcal{C}(N), \ y \in R .$$

Apply the metho successively, then

$$t_K d_{K-1} = cy_2 + t_{K-1} \quad ; \quad t_{K-1} \in T_{K-1}, \ d_{K-1} \in \mathcal{C}(N), \ y_2 \in R$$

$$\vdots$$

$$t_1 d_0 = cy_{K+1} \quad ; \quad t_1 \in T_1, \ d_0 \in \mathcal{C}(N), \ y_{K+1} \in R .$$

Then $ac_1 = ca_1$, where $c_1 = d_K d_{K-1} \dots d_0 \in \mathcal{C}(N)$.

But any element $a \in R$ satisfies $aN^{K+1} = 0$ for some $k+1 = 0, \dots, \rho$ and hence (1) is proved.

To prove (2) choose $a \in \mathcal{C}(N)$, then $ca_1 \in \mathcal{C}(N)$, so if we set

$$a_1 x \in N, \ x \in R,$$

then $ca_1 x \in N$ and so $x \in N$. Thus $a_1 \in \mathcal{C}(N)$.

Let $cy \in N$ and suppose that $yc_2 = a_1 z + n$, $n \in N$, $c_2 \in \mathcal{C}(N)$ (use R/N has right quotient ring)). Then $cyc_2 \in N$, so $ca_1 z \in N$, so $z \in N$ (since $ca_1 \in \mathcal{C}(N)$) so $z \in N$. But then $yc_2 \in N$ and $y \in N$, as $c_2 \in \mathcal{C}(N)$. Thus $cy \in N \Longrightarrow y \in N$ and so $c \in \mathcal{C}'(N)$ and, of course, $\mathcal{C}'(N) = \mathcal{C}(N)$. This gives (2).

<u>Lemme 2.</u> Let R have a night quotient ring Q.

(1) Let P be a prime ideal of R, then PQ is a prime ideal of Q and

$$PQ \cap R = P \iff \mathscr{C}(0) \subseteq \mathscr{C}(P)^{\neq}$$

(2) Let P' be a prime ideal of Q, then $P' \cap R$ is a prime ideal of Q and

$$P' = (P' \cap R)Q .$$

$\neq$ This condition holds for minimal prime ideals of R. See Canadian notes.

Proof.

(1) Let $c \in \mathscr{C}(0)$, $p \in P$, and $c^{-1}p = ad^{-1}$ $a \in R$, $d \in \mathscr{C}(0)$. As $ca \in P$, and $\mathscr{C}(0) \subset \mathscr{C}(P)$, deduce $a \in P$. Thus $QP \subset PQ$.

Let $x \in PQ \cap R$, $x = pc^{-1}$, $p \in P$, $c \in \mathscr{C}(0)$. Then $xc \in P$, so we have

$$PQ \cap R = P .$$

Let A, B be ideals of Q and $AB \subset PQ$. Then $(A \cap R)(B \cap R) \subset PQ \cap R = P$ $\Longrightarrow A \cap R \subset P$, $A \subset PQ$; or $B \subset PQ$. So PQ is a prime ideal in Q.
The conserve is easy.

(2) Let V be nil radical of $P' \cap R$, $V^{\rho} \subset P' \cap R$, V ideal in R.
Now $\mathscr{C}(0) \subset \mathscr{C}(P' \cap R) \subset \mathscr{C}(V)$ by lemma 1.
Thus $QV \subset VQ$, $(VQ)^{\rho} \subset P'$, $VQ \subset P'$, $V = P' \cap R$.
Hence $P' \cap R$ is a finite $\cap$ of primes of R. Let $P' \cap R = P_1 \cap \dots \cap P_s$.
Then $\mathscr{C}(0) \subset \mathscr{C}(P' \cap R) = \mathscr{C}(P_1) \cap \dots \cap \mathscr{C}(P_s)$, using fact that P_2 are minimal primes of $P' \cap R$.
Then $P' = (P' \cap R)Q = P_1Q \cap \dots \cap P_sQ = P'_1 \cap \dots \cap P'_s$, and P'_i are prime ideals of Q.
But $P'_1 \dots P'_s \subset P'$, so $P'_1 \subset P'$, say, $P'_1 = P'$ and $P' \cap R = P'_1 \cap R = P_1$.

A right ideal H_0 <u>transfers $\mathscr{C}(0)$</u> if $\mathscr{C}(0) + H_0 = \mathscr{C}(0)$.

This is taken to mean that $c + h_0$ $c \in \mathscr{C}(0)$, $h_0 \in H_0$, is also in $\mathscr{C}(0)$.

The sum of all such H_0 also transfers $\mathscr{C}(0)$ (not max-γ needed) and we call it <u>the transfer right ideal of</u> R. Denote by H'.

A similar idea can be defined in which H_o etc. are two-sided ideals of R, again a unique maximal one is obtained, call it the transfer ideal of R and denote by H.

Clearly $H \subseteq H'$, but I do not know when $H = H'$.

ex. If R is a quotient ring, that is, $\mathcal{C}(0)$ is the set of units of R, then $H = H'$ = the Jacobson radical of R.

Lemma 3.

(1) $H = 0$ if and only if R is semi-prime.

(2) $H' = 0$ ....

Proof.

Let R be semi-prime. Then H' is not an essential right ideal, for if $c \in H'$, $c \in \mathcal{C}(0)$, then $c = h'$ and $c - h' \in \mathcal{C}(0)$; a contradiction. So H' not essential $\exists$ a right ideal V in R with $H' \oplus V$ essential. ~~Again~~ V meets $\mathcal{C}(0)$, V essential, $H' = 0$. Then $H \subset H'$ is also 0.

Let R be not semi-prime, $N^{\rho} = 0$, $N^{\rho-1} \neq 0$. Then $N^{\rho-1} \subseteq H \subseteq H'$. For let $v \in N^{\rho-1}$, $c \in \mathcal{C}(0)$, $(c + v)x = 0$. As $c \in \mathcal{C}(N)$, $c + v \in \mathcal{C}(N)$, $x \in N$. But $vx = 0$, so $cx = 0$, $x = 0$. Thus $c + v \in \mathcal{C}'(0)$. Similarly $c + v \in {}'\mathcal{C}(0)$, so

$$c + v \in \mathcal{C}(0) \quad \forall v \in N^{\rho-1}$$

$\therefore N^{\rho-1} \subset H$.

Lemma 4.

Let R have right quotient ring Q. Then $R/_H$ is a semi-prime ring. In particular $H \geqslant N$.

Proof.

Let J be the Jacobson radical of Q. Then $HQ = J$, $J \cap R = H$. Consider $h \in H$, $c \in \mathcal{C}(0)$, $h + c \in \mathcal{C}(0)$ so $h + c$ is unit in Q, so $1 + hc^{-1}$ is unit in Q. Thus HQ is a quasi-regular right ideal of Q and $HQ \subset J$.

Let $j \in J \cap R$ then $jc^{-1} \in J$ $\forall c \in \mathcal{C}(0)$ so $\exists q \in Q$ with $q(1 + jc^{-1}) = 1$.

Thus $q(j + c) = c$, so that $j + c = q^{-1}c$ is a unit of Q , hence $c + j \in \mathcal{C}(0)$. But $J \cap R$ is an ideal of R hence $J \cap R \subseteq H$.

Thus $HQ \subseteq J$, $J \cap R \subseteq H \implies J \cap R = H$ and $HQ = J$.

However J is a semi-prime ideal of Q and is a finite $\cap$ of prime ideals of Q . Thus $J = P'_1 \cap \dots \cap P'_s$ and $H = (P'_1 \cap R) \cap \dots \cap (P'_s \cap R)$, so H is a semi-prime ideal of R.

Note.

If we examine Small's example $\begin{pmatrix} a & \underline{b} & a' & \underline{b'} \\ 0 & \underline{c} & 0 & \underline{c'} \\ 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{f} \end{pmatrix}$ where $a, a', e \in \mathbf{Z}$

$\underline{b}, \underline{c}, \underline{b'}, \underline{c'}, \underline{f}, e \in \mathbf{Z}_{(p)}$

This ring is right and left noetherian

$$\mathcal{C}(0) = \mathcal{C}'(0) \quad ; \quad {}'\mathcal{C}(0) = \mathcal{C}(N) \cdot$$

It has a right quotient ring as $ac_1 = ca_1$ $\forall c \in \mathcal{C}(0)$ $(c_1 \in \mathcal{C}(0))$.

" not left " " $c_1 a = a_1 c$ $\forall c \in {}'\mathcal{C}(0)$ $c_1 \in {}'\mathcal{C}(0) = \mathcal{C}(N)$.

(use lemma 1).

If we factor out the ideal $(x \in R | cx = 0 ; c \in {}'\mathcal{C}(0))$, then for the factor ring we have a right and left quotient ring.

So clearly it is more important to have a right left noetherian ring in which the conditions on $\mathcal{C}'(0)$ and ${}'\mathcal{C}(0)$ are destroyed. I do not know of one.

Lemma 5.

Let R have right quotient ring Q. Then $\mathcal{C}(0) \subset \mathcal{C}(H)$ and $H = H'$.

Proof.

Let $c \in \mathcal{C}(0)$, $cx \in H \Longrightarrow x \in QH \subset J \Longrightarrow x \in J \cap R = H$.

Thus $\mathcal{C}(0) \subset \mathcal{C}'(H)$ and, as H is a semi-prime ideal, $\mathcal{C}'(H) = \mathcal{C}(H)$.

Let $h' \in H'$ then $c + h'y \in \mathcal{C}(0)\ \forall\, h' \in H'$, $y \in R$; thus $\exists\, q_y \in Q$ with $q_y(c + h'y) = 1$ and $q_y(1 + h'yc^{-1}) = c^{-1}$. But as y varies over R, yc^{-1} can be any element q of Q, hence $1 + h'q$ is a unit of Q, so that $h'Q \subset J$. Hence $h' \in J \cap R = H$.

Summary of Lemma 4 and 5.

Necessary conditions for R with max-γ to have a quotient ring are

(1) H is a semi-prime ideal of R

(2) $H = H'$

(3) $\mathcal{C}(0) \subseteq \mathcal{C}(H)$.

These conditions night not be independent. I would say $(1) + (3) \Longrightarrow (2)$ but have not checked this yet.

Lemma 6.

Let R have max-γ. Then if $ab \in \mathcal{C}(0)$ we have $a \in \mathcal{C}(0)$, $b \in \mathcal{C}'(0)$.

Proof.

Let $xa = 0 \Longrightarrow xab = 0 \Longrightarrow x = 0$, $bt = 0 \Longrightarrow abt = 0 \Longrightarrow t = 0$.

$a \in {}'\mathcal{C}(0)$, $b \in \mathcal{C}'(0)$.

Let $ay = 0$; now bR is essential right ideal as $b \in \mathcal{C}'(0)$, so $bR \cap yR \neq 0$ (if $y \neq 0$). So $bz = yz' \neq 0$ some $z, z' \in R$. Then $abz = 0$, $z = 0$, contradiction, unless $y = 0$. Thus $ay = 0 \Longrightarrow y = 0$ $a \in \mathcal{C}'(0)$

$a \in \mathcal{C}(0)$.

A characterization of H' (does not need existence of Q).

Consider the right ideals or R which do not meet $\mathcal{C}(0)$. It has maximal elements, index these as $(M_\alpha\ ;\ \alpha \in \Lambda)$.

Lemma 7.

$$H' = (\cap M_\alpha \; ; \; \alpha \in \Lambda) \, .$$

Proof.

$H' \subset M_\alpha$, othewise $H' + M_\alpha$ meets $\mathcal{C}(0) \Longrightarrow M_\alpha$ meets $\mathcal{C}(0)$.

Let $(\cap M_\alpha \; ; \; \alpha \in \Lambda) \neq H'$. Then $\exists \, a \in \cap M_\alpha$, $a \notin H'$, and $c \in \mathcal{C}(0)$ with $c + a \notin \mathcal{C}(0)$; Now $(a + c)R$ does not meet $\mathcal{C}(0)$, for if $d = (a + c)x$ with $d \in (0)$ then by lemma 6 , $a + c \in \mathcal{C}(0)$, not allowed.

Choose $M_\alpha \supset (a+c)R$. Now $a \in M_\alpha$ so $ac \in M_\alpha$ and $(a + c)c \in M_\alpha$, so $c^2 \in M_\alpha \cap \mathcal{C}(0)$, not allowed . Thence

$$(\cap M_\alpha \; ; \; \alpha \in \Lambda) = H' \, .$$

Lemma 8.

Let R have right quotient ring Q and consider $(M_\alpha \; ; \; \alpha \in \Lambda) = \mathfrak{M}$.

For a given $M_\alpha \in \mathfrak{M}$, either M_α meets $\mathcal{C}(H)$, or M_α is the inverse image of a maximal right annihilator of the ring $R/_H$. In the latter case the largest two-sided ideal in M_α is a prime ; it is a minimal prime of H .

Proof.

Let $M_\alpha \cap \mathcal{C}(H)$ be empty and $\bar{M}_\alpha = \frac{M_\alpha}{H}$. As $\bar{M}_\alpha$ does not have a regular element (in $\bar{R} = \frac{R}{H}$) it must be in a maximal right annihilator, thus $\bar{u}\,\bar{M}_\alpha = \bar{0}$ for some right uniform element $\bar{u} \in \bar{R}$. The largest ideal in M_α maps into the largest ideal in $\gamma(\bar{u})$ and this is a minimal prime in the ring $R/_H$.

If M_α meets $\mathcal{C}(H)$ then $M_\alpha \supset dR + H$ for some $d \in \mathcal{C}(H)$ and for each $a \in R$ $\exists d_1 \in \mathcal{C}(H)$ with $ad_1 \in dR + H$. M_α is now a topological right ideal relative to $\mathcal{C}(H)$ and is difficult to consider in the present context.

Lemma 9.

$\mathcal{C}(0) = \mathcal{C}(H)$ wil occur iff $Q/_J$ is semi-simple artinian.

Proof.

Given $\mathscr{C}(0) = \mathscr{C}(H)$.

We know that $\quad J = HQ$.

The right quotient ring of $R/_H$ is $\cong$ to $\frac{Q}{HQ}$ under map

$$(a + H)(d + H)^{-1} \longleftrightarrow (ad^{-1} + HQ) .$$

Let $(a+H)(d+H)^{-1} = (a_1+H)(d_1+H)^{-1}$ and $(d+H)(e+H) = (d_1+H)(e_1+H)$ $\quad e, e_1, d, d_1, \in \mathscr{C}(0)$

Then $(a+H)(e+H) = (a_1+H)(e_1+H)$, so that $ae - a_1e_1 \in H$ and $de - d_1e_1 \in H$

Thus $\quad ad^{-1} - a_1d_1^{-1} = ae(de)^{-1} \equiv a_1e_1(de)^{-1} \pmod{HQ}$

$$\equiv a_1e_1(d_1e_1)^{-1} \pmod{HQ}$$

$$\in HQ$$

and conversely, so that map is $(1 - 1)$ etc.

Given $Q/_{HQ}$ is semi-simple.

Let $c \in \mathscr{C}(0)$ and $cq \in HQ$ where $q = yd^{-1}$; $y \in R$, $d \in \mathscr{C}(0)$.

Then $cy \in HQ \cap R = H$, so $y \in H$, using $\mathscr{C}(0) \subset \mathscr{C}(H)$. Thus $y \in H$ and $q \in HQ$. Hence $\mathscr{C}(H) \subset \mathscr{C}(HQ)$. Now the units of $Q/_{HQ}$ are the regular elements of $Q/_{HQ}$, as this is an artin ring. Units can be raised over the Jacobson radical HQ, so that $\mathscr{C}(HQ)$ consists of units of Q. Thus the elements of $\mathscr{C}(H)$ are units of Q, hence are regular elements in R ; $\mathscr{C}(H) \subset \mathscr{C}(0)$.

This is as far as the study of the transfer ideal has gone. One can consider it in the light of Djabali's paper and note .

Prop.

If R has max-γ and (1) F holds

(2) H is semi-prime

(3) $\mathscr{C}(0) = \mathscr{C}(H)$

then R has a quotient ring.

Proof.

Let $a \in R$, $c \in \mathscr{C}(0)$ $\exists\, a_1, c_1$ $c_1 \in \mathscr{C}(0)$ with $ac_1 = ca_1 + h$, for some $h \in H$.

Now for any $d \in \mathscr{C}(0)$ $h = (d + h) - d$ is a difference of two regular elements so $\exists\, c_2 \in \mathscr{C}(0)$ with $hc_2 \in cR$. This uses F_1 and see Djabali's paper. Then $ac_1c_2 \in cR$ and ore condition holds.

It is a weak theorem and one would at least be tempted to try to eliminate one of the conditions. F_1 is very strong, in fact too strong for a serviceable theorem. But this is a difficult problem !

-:-:-:-:-:-:-:-