UNIVERSITE DE PARIS

Faculté des Sciences d'Orsay

PUBLICATIONS DU SEMINAIRE

DE MATHEMATIQUES D'ORSAY

4ème année : 1964/65

Secrétariat Mathématique d'Orsay
1965

Intégrales Singulières

par

A. ZYGMUND

Cours rédigé par les soins de MM. Fiolet Michel
Harzallah Khélifa

Table des matières

Chapitre I.- Introduction

I.1.- Notations.

E_n désignera l'espace euclidien à n dimensions muni des opérations habituelles. La longueur ou norme de $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_n$ sera $|x| = (\sum_{j=1}^{n} x_j^2)^{\frac{1}{2}}$

Σ désignera la sphère unité : $\Sigma = \{x \; ; \; x \in E_n, \; |x| = 1\}$ si $x \neq 0$, $x' = \frac{x}{|x|} \in \Sigma$

L'intégrale étendue à l'espace tout entier $\int_{E_n}$ sera simplement notée $\int$.

Pour le calcul de cette intégrale on utilisera souvent la décomposition $dx = \rho^{n-1} d\rho \, dx'$ où $\rho = |x|$ et où dx' désigne l'élément d'aire de Σ.

A un ensemble mesurable de E_n, $|A|$ désigne sa mesure de Lebesgue.

Noyau : K est une fonction positivement homogène de degré α, i.e. $\forall \lambda$ réel positif, $\forall x \in E_n$, $K(\lambda x) = \lambda^\alpha K(x)$.

On a en particulier $K(x) = |x|^\alpha K(\frac{x}{|x|})$.

La fonction $\Omega(x) = K(\frac{x}{|x|})$ est homogène de degré zéro, donc $\Omega(x) = \Omega(x')$

Ω s'appelle la caractéristique du noyau K.

I.2.- Quelques rappels.

a) Condition de Lipschitz-Hölder : on dit qu'une fonction f vérifie une condition de Lipschitz-Hölder d'ordre $\alpha > 0$ s'il existe deux constantes C et δ telles que $|y| < \delta \Longrightarrow |f(x+y) - f(x)| \leqslant C|y|^\alpha$ on écrira alors $f \in \Lambda_\alpha$

b) Espaces L^p.

pour $1 \leqslant p < \infty$ L^p désigne l'espace des fonctions de puissance p-ième intégrable : $L^p = \left\{f \; ; \int |f(x)|^p \, dx < \infty\right\}$. Cet espace est muni de la semi-norme définie par $\|f\|_p = (\int |f(x)|^p \, dx)^{1/p}$; pour $p = \infty$, $L^\infty = \left\{f \; ; \; \|f\|_\infty = \text{ess sup}|f| < \infty\right\}$ où ess-sup $f = \text{Inf}\left\{M \; ; \left|\{x \; ; \; f(x) > M\}\right| = 0\right\}$.

Les L^p sont des espaces vectoriels semi-normés, les espaces normés associés sont des ɪpaces de Banach.

Le dual de L^p est L^q où q est le conjugué de p : $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ $(1 \leqslant p < \infty)$.

c) Convolution.

formellement $f * g$ est définie par $(f * g)(x) = \int f(y)g(x-y)dy$ on a alors les résul-
ɪts :

1) $f \in L^p$ $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $g \in L^1$ alors $f * g \in L^p$ et $\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_p \|g\|_1$

plus généralement :

2) $f \in L^p$, $g \in L^q$ $1 \leqslant p$, $q \leqslant \infty$ et $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1 \geqslant 0$

alors $f * g \in L^r$ et $\|f * g\|_r \leqslant \|f\|_p . \|g\|_q$.

.3.- Position du problème.

Beaucoup de transformations en analyse sont de la forme $f \longrightarrow f * K$ où K est
ɔmogène et de degré négatif $(-\alpha)$: $(f * K)(x) = \int f(y)\, K(x-y)dy$.

Trois cas spéciaux se présentent :

i) $\alpha = n$ l'intégrale est dite singulière. C'est la transformation de Hilbert

$f * K = \tilde{f}$

ii) $0 < \alpha < n$ l'intégrale est dite faiblement singulière

iii) $\alpha > n$ l'intégrale est dite ultrasingulière.

Le cas i) est intermédiaire entre ii) et iii) ; ce sera le seul cas étudié dans ce
ours.

On supposera Ω intégrable sur $\sum$: $\Omega \in L^1(\sum)$.

On posera $\tilde{f}_\varepsilon(x) = \int_{|x-y| \geqslant \varepsilon} f(y)K(x-y)dy$ (1).

.4.- Lemmes d'existence de $\tilde{f}_\varepsilon$.

Lemme A.- Si $f \in L^p$ $(1 \leqslant p < \infty)$, $\Omega \in L^1(\sum)$ et ε réel strictement positif fixé,
ɪlors l'intégrale (1) converge absolument pour presque tout x.

<u>Preuve</u> : Soit $I(x) = \int_{|x-y|\geqslant\varepsilon} |f(y)|\,.\,|K(x-y)|\,dy = \int_{|y|\geqslant\varepsilon} |f(x-y)|\,.\,|K(y)|\,dy.$

Soit D un ensemble mesurable borné de E_n, de diamètre δ. Posons $\rho = |y|$

t considérons l'intégrale $J = \int_D I(x)dx$

$$J = \int_D dx \int_{\substack{\rho\geqslant\varepsilon \\ y'\in\Sigma}} |\Omega(y')|\,\rho^{-n}|f(x-y')|\,\rho^{n-1}d\rho dy' = \int_{\Sigma} |\Omega(y')|\left[\int_D dx\left(\int_{\varepsilon}^{\infty}|f(x-\rho y')|\rho^{-1}d\rho\right)\right]dy'$$

a) Supposons que $p > 1$

L'inégalité de Hölder donne (q étant le conjugué de p) :

$$\left[\int_D dx\left(\int_{\varepsilon}^{\infty} |f(x-\rho y')|\,\rho^{-1}d\rho\right)\right] \leqslant A_{\varepsilon}\int_D dx\left(\int_{\varepsilon}^{\infty}|f(x-\rho y')|^p d\rho\right)^{1/p} \leqslant A_{\varepsilon}|D|^{1/q}\left(\int_D dx\int_{\varepsilon}^{\infty}|f(x-\rho y')|^p d\rho\right)^{\frac{1}{p}}$$

où $|D|$, rappelons-le, désigne la mesure de D.

Mais $\int_D dx \int_{\varepsilon}^{\infty} |f(x-\rho y')|^p d\rho \leqslant \int_D dx \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-\rho y')|^p d\rho \leqslant \delta\,\|f\|_p^p.$

Alors $J \leqslant A_{\varepsilon}|D|^{1/q}\delta^{1/p}\,\|f\|_p\,.\,\|\Omega\|_1$ où $\|\Omega\|_1 = \int_{\Sigma} |\Omega(y')|\,dy'$

'est à dire $\int_D I(x)dx < \infty$. Alors I est finie localement presque partout, donc presque partout.

b) Cas $p = 1$.

Ici $$\int_D dx \int_{\varepsilon}^{\infty}|f(x-\rho y')|\frac{d\rho}{\rho} \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int_D dx \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-\rho y')|\,d\rho \leqslant \frac{\delta}{\varepsilon}\,\|f\|_1$$

t la démonstration s'achève de la même manière.

<u>Lemme</u> B.- Si $f \in L^p$, $1 \leqslant p < \infty$, $\Omega \in L^1(\Sigma)$, Ω borné.

Alors $\forall\,\varepsilon > 0$ fixé, $\tilde{f}_{\varepsilon}$ existe partout.

<u>Preuve</u> : en effet $|\Omega(y')| \leqslant M \Longrightarrow \left|\dfrac{f(x-y)\,\Omega(y)}{|y|^n}\right| \leqslant M\,\dfrac{|f(x-y)|}{|y|^n}$

$f \in L^p$ $1 \leqslant p < \infty$. Soit q le conjugué de p : $1 < q \leqslant \infty$

alors $$\int_{|y|\geqslant\varepsilon} \frac{|f(x-y)|}{|y|^n}\,dy \leqslant \|f\|_p\left(\int_{|y|\geqslant\varepsilon}\frac{dy}{|y|^{nq}}\right)^{1/q} < \infty$$

t la fonction à intégrer est majorée en module par une fonction intégrable.

.5.- Transformée de Hilbert tronquée.

Elle est définie par (1) pour $f \in L^p$ $(1 \leqslant p < \infty)$; on peut écrire $\tilde{f}_\varepsilon$ sous la forme

$$_{\varepsilon} = f * K_\varepsilon \quad \text{où} \quad K_\varepsilon(x) = \begin{cases} K(x) & \text{si } |x| \geqslant \varepsilon \\ 0 & \text{si } |x| < \varepsilon . \end{cases}$$

La transformée de Hilbert apparait comme limite de $\tilde{f}_\varepsilon$, la limite pouvant être prise our différentes topologies : limite presque partout, limite en norme dans L^p, limite en esure, etc...

Si F est intégrable dans E_n à l'extérieur de toute sphère centrée en x alors $\int_{|x-y| \geqslant \varepsilon} F(y)dy$ a un sens ; de plus si cette expression a une limite quand tend vers zéro, on dira que l'intégrale existe en tant que valeur principale :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-y| \geqslant \varepsilon} F(y)dy = \text{V.P.} \int F(y)dy.$$

.6.- Généralités.

Le problème central réside dans la recherche des conditions d'existence de $\tilde{f}$ et de es propriétés, en particulier celles préservées par la transformation. On fera, en général, es hypothèses suivantes :

i) $\Omega \in L^1(\sum)$

ii) $\displaystyle\int_{\sum} \Omega(x')dx' = 0.$

La condition i) est naturelle ; quant à ii) les raisons en seront données un peu plus oin.

Etudions quelques cas :

a) $n = 1$ $\quad K(x) = \dfrac{\Omega(x')}{|x|} = \dfrac{C \operatorname{sgn} x}{|x|} = \dfrac{C}{x}$

$$(\operatorname{sgn} x = \text{signe de } x = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

pour $C = 1$ on a $\displaystyle \text{V.P.} \int \frac{f(y)}{x-y}\,dy = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y-x| \geqslant \varepsilon} \frac{f(y)}{x-y}dy = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^\infty \frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}\,dt$

b) $n = 2$ (1er cas non classique)

le point générique de E_2 sera noté $z = re^{i\theta}$

alors $K(z) = \dfrac{\Omega(\theta)}{r^2}$ et Ω est 2π-périodique

la série de Fourier de Ω est $\Omega \sim \sum\limits_{\substack{-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} c_\kappa e^{i\kappa\theta} = \sum{}' c_\kappa e^{i\kappa\theta}$

car $c_0 = 0$ d'après ii)

la série de Fourier de K sera alors $K \sim \dfrac{\sum' c_\kappa e^{i\kappa\theta}}{r^2}$

en particulier on peut avoir comme noyau

$$K_\kappa(z) = \frac{e^{i\kappa\theta}}{r^2} \quad (k \in Z^*)$$

pour $k = -2$, $K(z) = \dfrac{1}{z^2}$ est analytique et, formellement,

on a $\tilde{f}(z) = \displaystyle\iint \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\xi\, d\eta$ où $\zeta = \xi + i\eta$

c'est la transformation de Beurling.

c) $n > 2$ $\quad x = (x_1, \dots, x_n)$

$K_j(x) = \dfrac{x_j}{|x|^{n+1}}$ $\quad j = 1, 2, \dots, n$ noyaux de M. Riesz

$\tilde{f} = f * K_j = R_j f$ transformation de M. Riesz.

.7.- Théorème d'existence de $\tilde{f}$.

Théorème 0.- Si $f \in L^p \cap \Lambda_\alpha$ $(1 \leqslant p < \infty,\ \alpha > 0)$ $\Omega \in L^1(\Sigma)$ et $\displaystyle\int_\Sigma \Omega(y')dy' = 0$.

Alors $\tilde{f}(x) = \text{V. P.} \displaystyle\int f(x-y) \frac{\Omega(y)}{|y|^n} dy$ existe pour presque tout x. Si de plus Ω est borné, alors $\tilde{f}$ est définie partout.

Preuve : $\quad f \in \Lambda_\alpha \Longrightarrow \exists\, \delta > 0$ et $\exists C$ t.q. $|y| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x+y)-f(x)| \leqslant C|y|^\alpha$

d'après 1.4, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \tilde{f}_\varepsilon$ presque partout. Alors $\forall \varepsilon$ $0 < \varepsilon \leqslant \delta$, on peut écrire, pour tout x où $\tilde{f}_\delta$ est définie (i.e. p.p. d'après 1.4., partout si Ω est borné)

$$\tilde{f}_\varepsilon(x) = \int_{\varepsilon \leqslant |y| \leqslant \delta} [f(x-y)] \frac{\Omega(y)}{|y|^n} dy + \tilde{f}_\delta(x)$$

mais $\int_{\Sigma} \Omega(y')dy' = 0 \Longrightarrow \int_{\varepsilon\leqslant y\leqslant\delta} \frac{\Omega(y)}{|y|^n}dy = \int_{\substack{y'\in\Sigma \\ \varepsilon\leqslant\rho\leqslant\delta}} \frac{\Omega(y')}{\rho}\,d\rho dy' = 0$

alors $\tilde{f}_\varepsilon(x) = \tilde{f}_\delta(x) + \int_{\varepsilon\leqslant|y|\leqslant\delta} \left[f(x-y) - f(x)\right] \frac{\Omega(y)}{|y|^n}\,dy$.

Considérons $g(y) = \left[f(x-y) - f(x)\right]\frac{\Omega(y)}{|y|^n}$ alors $|g(y)| \leqslant C\,|\Omega(y)|\;|y|^{\alpha-n}$ et la fonction $y \rightsquigarrow C\,|\Omega(y)|\,|y|^{\alpha-n}$ est intégrable dans la boule de centre l'origine et de rayon δ car $\int_{|y|\leqslant\delta} \frac{|\Omega(y)|}{|y|^{n-\alpha}}dy = \left(\int_{\Sigma} |\Omega(y')|dy'\right)\left(\int_0^\delta \frac{d\rho}{\rho^{1-\alpha}}\right)$; il en résulte que g est aussi intégrable dans cette boule, puis que $\int_{\varepsilon\leqslant|y|\leqslant\delta} g(y)dy$ tend vers une limite finie lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$.

<u>Remarque</u> sur la nécessité de $\int_{\Sigma} \Omega(y')dy' = 0$.

Posons w_n = aire de $\Sigma = |\Sigma|$, puis $\mu = \frac{1}{w_n}\int_{\Sigma} \Omega(y')dy'$, enfin $\Omega^* = \Omega - \mu$

$\int_{\Sigma} \Omega^*(y')dy' = 0$.

Alors $\int_{\varepsilon\leqslant|y|\leqslant 1} f(x-y)K(y)dy = \int_{\varepsilon\leqslant|y|\leqslant 1} f(x-y)\frac{\Omega^*(y)}{|y|^n}dy + \mu\int_{\varepsilon\leqslant|y|\leqslant 1} f(x-y)\frac{dy}{|y|^n}$.

Si $f \in \Lambda_\alpha$ la première intégrale converge, tandis que

$$I = \int_{\varepsilon\leqslant|y|\leqslant 1} f(x-y)\frac{dy}{|y|^n} = \int_\varepsilon^1 \frac{dA(\rho)}{\rho^n} = \left[\frac{dA(\rho)}{\rho^n}\right]^1 + n\int_\varepsilon^1 \frac{A(\rho)}{\rho^{n+1}}\,d\rho = O(1) + nJ$$

(On a posé $A(\rho) = \int_{|y|\leqslant\rho} f(x+y)dy = C\rho^n + o(\rho^n)$)

alors $J = \int_\varepsilon^1 \frac{C\,d\rho}{\rho} + \int_\varepsilon^1 \frac{o(\rho^n)}{\rho^{n+1}}\,d\rho = C\,\mathrm{Log}\,\frac{1}{\varepsilon} + o(\log\frac{1}{\varepsilon})$

donc si $\mu \neq 0$, I diverge en général vers l'infini lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Chapitre II

Transformée de Hilbert dans le cas d'une variable

2.1.- Théorèmes d'existence.

Théorème 1.- Si $f \in L(-\infty, +\infty)$ alors $\tilde{f}(x) = \text{V.P.} \int \frac{f(t)}{x-t} dt$ existe presque partout.

De plus, si $E(y) = \left\{x \; ; \; |\tilde{f}(x)| > y > 0\right\}$, alors $|E(y)| \leqslant A \frac{\|f\|_1}{y}$

où A est une constante indépendante de f et de y.

Théorème 2.- F à variation bornée sur R, alors $g(x) = \text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF(t)}{x-t}$ existe presque partout. De plus, si $E(y) = \left\{x \; ; \; |g(x)| > y > 0\right\}$, alors $|E(y)| \leqslant A \frac{V}{y}$ où V est la variation totale de F.

Il est clair que le théorème 1 est une conséquence du théorème 2, car si $f \in L(-\infty, +\infty)$ alors $F : t \longrightarrow \int_{-\infty}^{t} f(u)du$ est à variation bornée sur R et $V = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)|\, du = \|f\|_1$.

Remarquons d'abord que, pour tout x, $g_\varepsilon(x) = \int_{|t-x| \geqslant \varepsilon} \frac{dF(t)}{x-t}$ a un sens. En effet, sur tout compact $K \subset \complement\,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$, la fonction $t \longrightarrow \frac{1}{x-t}$ est continue, donc l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes $\int_K \frac{dF(t)}{x-t}$ a un sens. Reste à examiner la convergence à l'infini.

Considérons $x+\varepsilon \leqslant T < T'$; alors $\left|\int_T^{T'} \frac{dF(t)}{x-t}\right| \leqslant \int_T^{T'} \frac{dV}{|x-t|} \leqslant \frac{V}{|x-T|}$.

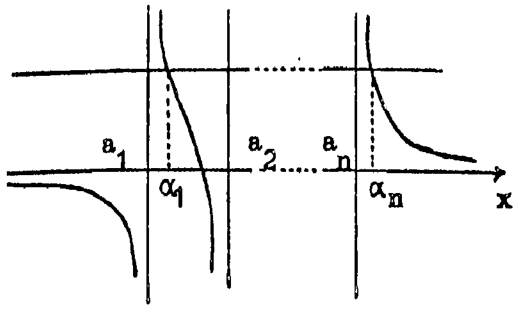
Même calcul pour $T_1' < T_1 < x-\varepsilon$. Ce qui prouve que l'intégrale est même absolument convergente.

Lemme 1.- Soit $\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\mu_j}{x-a_j}$ où $\mu_j > 0$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ et $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

Alors $e_1(y) = \left|\left\{x \; ; \; \varphi(x) \geqslant y > 0\right\}\right| = \frac{1}{y} \sum_{j=1}^{n} \mu_j$

$$e_2(y) = \left|\left\{x \; ; \; \varphi(x) \leqslant -y < 0\right\}\right| = \frac{1}{y} \sum_{j=1}^{n} \mu_j .$$

Preuve.- La fonction considérée est définie, continue, décroissante dans chaque intervalle $]-\infty, a_1[$, $]a_1, a_2[, \dots,]a_{n-1}, a_n[$, $]a_n, +\infty[$



alors $e_1(y) = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - a_j) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j - \sum_{j=1}^{n} a_j$

où les α_j sont les racines de l'équation

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\mu_j}{x-a_j} = y \Longleftrightarrow y \prod_{i=1}^{n} (x-a_i) - \sum_{j=1}^{n} \mu_j \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} (x-a_i) = 0 .$$

Alors $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = \frac{1}{y}\left[y \sum_{j=1}^{n} a_j + \sum_{j=1}^{n} \mu_j \right]$.

où le résultat pour $e_1(y) = \frac{1}{y} \sum_{j=1}^{n} \mu_j$.

Même démonstration pour $e_2(y) = \frac{1}{y} \sum_{j=1}^{n} \mu_j$.

<u>Lemme</u> 2.- Supposons qu'il existe une suite finie d'intervalles $I_i = [x_i - \delta_i , x_i + \delta_i]$,

$i = 1, 2, \ldots, n$, disjoints deux à deux et tels que $g_{\delta_i}(x_i) > \underline{y}$.

Alors $\sum_{i=1}^{n} \delta_i \leqslant 8 \frac{V}{y}$.

Preuve : L'idée est d'approcher les $g_{\delta_i}(x_i)$ par une somme de Riemann-Stieltjes

$\sum_{j=1}^{N-1} \frac{F(t_{j+1}) - F(t_j)}{x - t_j}$ et d'appliquer le lemme 1 à cette fonction.

Supposons donc d'abord F croissante (pour avoir $\mu_j = F(t_{j+1}) - F(t_j) \geqslant 0$) et cons-
ruisons la fonction qui jouera le rôle de la fonction φ du lemme 1.

Choisissons ε par les conditions $0 < \varepsilon < \min\limits_{i=1,\ldots,n} [g_{\delta_i}(x_i) - y]$.

Alors $\forall i$, $i = 1, \ldots, n$ il existe une subdivision $\sigma_i = (t_1^{(i)}, \ldots, t_{N_i}^{(i)})$ de $\overline{I_i}$
elle que pour toute subdivision σ' de $\overline{I_i}$ consécutive à σ_i, soit $\sigma' = (t'_1, \ldots, t'_{N'})$

lors $\left| \sum_{j=1}^{N'-1} \frac{F(t'_{j+1}) - F(t'_j)}{x_i - t'_j} - g_{\delta_i}(x_i) \right| \leqslant \varepsilon$.

Prenons alors $\sigma_0 = \bigcup_{K=1}^{n} (x_K - \delta_K, x_K, x_K + \delta_K)$ et $\sigma = \bigcup_{i=0}^{n} \sigma_i$, $\sigma = (t_1, \ldots, t_N)$.

Posons enfin $\mu_j = F(t_{j+1}) - F(t_j)$ $j = 1, \ldots, N-1$ $S_i = \{ j ; t_j \in]x_i - \delta_i , x_i + \delta_i[\}$

$$h_i(x) = \sum_{j \notin S_i} \frac{\mu_j}{x-t_j} \qquad \varphi_i(x) = \sum_{j \in S_i} \frac{\mu_j}{x-t_j} \qquad \varphi(x) = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu_j}{x-t_j} .$$

llors, par construction, $h_i(x_i) > y$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$.

Mais h_i est décroissante dans tout intervalle où elle est définie ; il en résulte que $\forall x \in [x_i-\delta_i , x_i]$, $h_i(x) > y$. Alors, pour un tel x, ou bien $\varphi(x) > \frac{y}{2}$, ou bien $\varphi_i(x) < -\frac{y}{2}$. Soient alors $E_o = \left\{x \ ; \ \varphi(x) > \frac{y}{2}\right\}$, $E_i = \left\{x \ ; \ \varphi_i(x) < -\frac{y}{2}\right\}$ $i = 1, \dots, n$.

On peut donc affirmer

$$\bigcup_{i=1}^{n} [x_i-\delta_i , x_i] \subseteq \bigcup_{i=o}^{n} E_i .$$

Alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \delta_i \leqslant \sum_{i=o}^{n} |E_i| \leqslant \frac{2}{y}\sum_{j=1}^{N-1} \mu_j + \frac{2}{y}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in S_i} \mu_j \leqslant \frac{4}{y}\sum_{j=1}^{N-1} \mu_j \leqslant \frac{4V}{y}$.

- Il est bien clair que si on part de F croissante, $g_{\delta_i}(x_i) < -y < 0$, on aboutit au même résultat : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \delta_i \leqslant \frac{4V}{y}$.

Soit alors F à variation bornée, $F = F_1 - F_2$ sa décomposition canonique en deux fonctions croissantes $F_1(x) = \frac{1}{2}\left[V(x) + F(x)\right]$

$F_2(x) = \frac{1}{2}\left[V(x) - F(x)\right]$ où $V(x)$ est la variation de F sur $]-\infty , x[$.

Soient alors V_j la variation totale de F_j $j = 1, 2$.

Alors par linéarité, g_{δ_i} se décompose en $g_{\delta_i} = g_{\delta_i}^{(1)} - g_{\delta_i}^{(2)}$

$g_{\delta_i}(x_i) > y \Longrightarrow$ ou bien $g_{\delta_i}^{(1)}(x_i) > \frac{y}{2}$ ou bien $g_{\delta_i}^{(2)}(x_i) < -\frac{y}{2}$.

Soient alors $I = \left\{i \ ; \ g_{\delta_i}^{(1)}(x_i) > \frac{y}{2}\right\}$, $J = \left\{i \ ; \ g_{\delta_i}^{(2)}(x_i) < -\frac{y}{2}\right\}$.

Alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \delta_i \leqslant \sum_{i\in I} \delta_i + \sum_{i\in J} \delta_i \leqslant \frac{8V_1}{y} + \frac{8V_2}{y}$ par application des résultats précédents aux fonctions croissantes F_1 et F_2.

Il n'y a plus qu'à remarquer que $V = V_1 + V_2$.

<u>Lemme</u> 3.- F à variation bornée sur $\mathbb{R}$ de variation totale V

$$g_*(x) = \overline{\lim_{\delta \to 0}} \, |g_\delta(x)| \quad ; \quad G' = \left\{x \ ; \ g_*(x) > y > 0\right\} = G'(y).$$

Alors $|G'| \leqslant 32\,\frac{V}{y}$.

Preuve : a) G' est mesurable car g_δ est mesurable, donc g_* aussi

b) $\forall x \in G'$, $\exists \delta(x)$ t. q. $g_\delta(x) > y$. Alors $\left\{]x-\delta \, , x+\delta[\right\}_{x \in G'}$ est un

recouvrement de G'

c) G' étant mesurable, $|G'|$ est aussi sa mesure intérieure

$|G'| = \sup\limits_{K \subset G'} |K|$ K compact

d) Soit $K \subset G'$, K compact $\left\{]x-\delta \, , x+\delta[\right\}_{x \in G'}$ recouvre G' donc K.

De ce recouvrement, on peut extraire un recouvrement fini $\left\{]x_i-\delta_i \, , x_i+\delta_i[\right\}$ $i = 1, \ldots, N$.

e) de ce recouvrement <u>fini</u> on peut extraire un recouvrement (fini) tel que

$i \neq j$, $I_i \cap I_j \neq \emptyset) \Longrightarrow (i-j = \pm 1)$.

Soit (I_i) $i = 1, \ldots, n$ ce recouvrement.

f) alors (I_{2j}) et (I_{2j+1}) sont deux familles d'intervalles disjoints deux à deux. La réunion de ces deux familles recouvrant K, l'une d'elle au moins recouvre au moins la moitié de K.

$|K| \leqslant 2 \sum |I_i|$, $\sum$ pour i pair ou $\sum$ pour i impair

g) alors grâce au lemme 2, on peut affirmer

$|K| \leqslant 2 \sum |I_i| \leqslant 4 \sum \delta_i \leqslant 32 \frac{V}{y}$

et l'inégalité, vraie pour tout compact $K \subset G'$, vaut pour G'.

Corollaire 1.- $G = \left\{ x \, ; \, \overline{\lim\limits_{\varepsilon, \varepsilon' \to 0}} \, |g_\varepsilon(x) - g_{\varepsilon'}(x)| > y > 0 \right\} = G(y)$.

Alors $|G| \leqslant 64 \frac{V}{y}$.

En effet $|g_\varepsilon(x)| + |g_{\varepsilon'}(x)| \geqslant |g_\varepsilon(x) - g_{\varepsilon'}(x)| \Longrightarrow 2\, g_*(x) \geqslant \overline{\lim\limits_{\varepsilon, \varepsilon' \to 0}} |g_\varepsilon(x) - g_{\varepsilon'}(x)|$

et il en résulte que $G(y) \subseteq G'(\frac{y}{2})$ d'où le résultat.

Corollaire 2.- Si $F(x) = \int^x f(t)dt$ où $f \in L^1(R)$, alors $V = \|f\|_1$

et on a la même conclusion.

Démonstration du théorème 2.

F à variation bornée $\Longrightarrow F = F_1 + F_2$ où F_1 est absolument continue et F_2 singulière.

(1). Supposons donc d'abord F absolument continue.

Alors $F(x) = \int^x f(t)dt$ où $f \in L^1(R)$ et $g_\delta = \tilde{f}_\delta$

$f \in L^1 \Longrightarrow f = f_1 + f_2$ où $\begin{cases} f_1 \text{ est en escalier} \\ \|f_2\|_1 \text{ est arbitrairement petite.} \end{cases}$

Nous nous proposons de montrer que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \tilde{f}_\varepsilon(x)$ existe pour presque tout x. Nous allons donc montrer le critère de Cauchy :

$$\overline{\lim_{\varepsilon, \varepsilon' \to 0}} |\tilde{f}_\varepsilon(x) - \tilde{f}_{\varepsilon'}(x)| = 0 \quad \text{p. p.}$$

Or $$\overline{\lim_{\varepsilon, \varepsilon' \to 0}} |\tilde{f}_\varepsilon(x) - \tilde{f}_{\varepsilon'}(x)| \leqslant \overline{\lim_{\varepsilon, \varepsilon' \to 0}} |\tilde{f}_{1\varepsilon}(x) - \tilde{f}_{1\varepsilon'}(x)| + \overline{\lim_{\varepsilon, \varepsilon' \to 0}} |\tilde{f}_{2\varepsilon}(x) - \tilde{f}_{2\varepsilon'}(x)|.$$

Si f_1, en escalier, est continue au point x, f_1 est constante sur un intervalle $]x - \eta, x + \eta[$ et dès que ε est plus petit que η, $\tilde{f}_{1\varepsilon}$ ne dépend pas de ε. Il en résulte que $\overline{\lim\limits_{\varepsilon, \varepsilon' \to 0}} |\tilde{f}_{1\varepsilon}(x) - \tilde{f}_{1\varepsilon'}(x)| = 0$ sauf peut-être aux points de discontinuité de f_1.

Montrons alors : $\forall y > 0$, $\overline{\lim\limits_{\varepsilon, \varepsilon' \to 0}} |\tilde{f}_\varepsilon(x) - \tilde{f}_{\varepsilon'}(x)| \leqslant y$ p. p.

Soient $y > 0$ et $G = \left\{x \,;\, \overline{\lim\limits_{\varepsilon, \varepsilon' \to 0}} |\tilde{f}_\varepsilon(x) - \tilde{f}_{\varepsilon'}(x)| > y\right\}$.

Alors pour toute décomposition $f = f_1 + f_2$ du type précédent,

$$G \subseteq G_1 \cup G_2 \quad \text{où} \quad \begin{cases} G_1 \text{ est l'ensemble des points de discontinuité de } f_1 \\ G_2 = \left\{x \,;\, \lim\limits_{\varepsilon, \varepsilon' \to 0} |\tilde{f}_{2\varepsilon}(x) - \tilde{f}_{2\varepsilon'}(x)| > y\right\} \end{cases}$$

en effet, $x \in G \Longrightarrow y < \overline{\lim\limits_{\varepsilon, \varepsilon' \to 0}} |\tilde{f}_\varepsilon(x) - \tilde{f}_{\varepsilon'}(x)| \leqslant \overline{\lim\limits_{\varepsilon, \varepsilon' \to 0}} |\tilde{f}_{1\varepsilon}(x) - f_{1\varepsilon'}(x)| + \lim\limits_{\varepsilon, \varepsilon' \to 0} |\tilde{f}_{2\varepsilon}(x) - \tilde{f}_{2\varepsilon'}(x)|$

alors $x \notin G_1 \Longrightarrow \overline{\lim\limits_{\varepsilon, \varepsilon' \to 0}} |\tilde{f}_{1\varepsilon}(x) - \tilde{f}_{1\varepsilon'}(x)| = 0 \Longrightarrow x \in G_2$.

Alors $|G| \leqslant |G_1| + |G_2| \leqslant 0 + \dfrac{64}{y} \|f_2\|_1$ d'après corollaire 2 lemme 3 .

Comme $\|f_2\|_1$ est arbitrairement petite, G est de mesure nulle.

Prenons maintenant une suite de y_n tendant vers zéro ; il en résulte que

$\overline{\lim}_{\varepsilon, \varepsilon' \to 0} |\tilde{f}_\varepsilon(x) - \tilde{f}_{\varepsilon'}(x)| = 0$ sauf peut-être sur une réunion dénombrable d'ensembles négligeables, donc presque partout.

(2). Considérons maintenant le cas où F est singulière. Soit $y > 0$ et considérons $G = G(y) = \left\{x ; \overline{\lim}_{\delta, \delta' \to 0} |g_\delta(x) - g_{\delta'}(x)| > y\right\}$. Soit $\varepsilon > 0$; il existe une suite finie d'intervalles fermés, disjoints deux à deux, soient $I_1, I_2, \dots, I_n$, de longueur totale inférieure à ε et tels que la variation totale de F sur le complémentaire de $I = \bigcup_{j=1}^{n} I_j$ soit aussi inférieure à ε.

Décomposons alors $F = F_1 + F_2$ où F_1 est la restriction de F à I, et posons

$$g_{i\delta}(x) = \int_{|x-t| \geqslant \delta} \frac{dF_i(t)}{x - t} \qquad i = 1, 2.$$

Enfin décomposons $G = (G \cap I) \cup (G \cap \complement I)$.

$\forall x \in \complement I$, $\exists \eta(x)$ t. q. $]x-\eta, x+\eta[\subset \complement I$; alors pour $0 < \delta \leqslant \delta' < \eta$, on a

$$g_{1\delta}(x) - g_{1\delta'}(x) = \int_{x-\delta'}^{x-\delta} \frac{dF_1(t)}{x-t} + \int_{x+\delta}^{x+\delta'} \frac{dF_1(t)}{x-t} = 0 \text{ car } F_1 = 0 \text{ sur }]x-\eta, x+\eta[.$$

Alors $G \cap \complement I = \left\{x ; x \in \complement I \text{ et } \overline{\lim}_{\delta, \delta' \to 0} |g_{2\delta}(x) - g_{2\delta'}(x)| > y\right\}$.

Il résulte alors du lemme 3 que $|G \cap \complement I| \leqslant \frac{64\varepsilon}{y}$, mais $|G \cap I| \leqslant |I| \leqslant \varepsilon$.

Alors $|G| \leqslant (1 + \frac{64}{y})\varepsilon$. Comme ε est arbitraire, G est de mesure nulle et la démonstration s'achève comme précédemment.

(3). Montrons enfin que $|E(y)| \leqslant 32 \frac{V}{y}$.

En effet, considérons $g_* = \overline{\lim}_{\delta \to 0} |g_\delta|$. Comme il existe une limite presque partout on a $g_* = g$ p. p. ; il en résulte que $|E(y)| = |G'(y)| \leqslant 32 \frac{V}{y}$ d'après le lemme 3

<u>Théorème</u> 3.- $g^* = \sup_{\delta > 0} |g_\delta|$.

Alors $\left|\left\{x ; g^*(x) > y > 0\right\}\right| \leqslant 32 \frac{V}{y}$.

<u>Preuve</u> : même démonstration que celle du lemme 3.

2.2. – Propriétés de la transformée de Hilbert d'une fonction de L^1

Théorème 4.– $f \in L^1(R)$; $\forall \eta$ t. q. $0 < \eta < 1$, $\forall I$ borné

$$g^* \text{ (et à fortiori } g_\delta \text{ et } g) \in L^{1-\eta}(I).$$

Preuve : il suffit évidemment de prouver le résultat pour g^* car $|g_\delta| \leqslant g^*$ et $|g| \leqslant g^*$. Soit ω la fonction de distribution de g^* dans I

$$\omega(y) = \left|\{x \; ; \; x \in I, \; g^*(x) > y > 0\}\right|.$$

Alors on a les deux majorations : $\omega(y) \leqslant |I|$ évidemment

$$\omega(y) \leqslant A \frac{V}{y} \text{ d'après le théorème 3}$$

g^* est mesurable positive, il suffit de prouver $J = \int_I [g^*(x)]^{1-\eta} dx$ est finie, nous allons même donner une majoration assez précise de J.

Introsuisant ω et intégrant par parties il vient :

$$J = -\int_0^\infty y^{1-\eta} d\omega(y) = \Big[-y^{1-\eta}\omega(y)\Big]_0^\infty + (1-\eta)\int_0^\infty y^{-\eta}\omega(y)dy$$

$$y \longrightarrow \infty \qquad |y^{1-\eta}\omega(y)| \leqslant \frac{AV}{y^\eta} \longrightarrow 0$$

$$y \longrightarrow 0 \qquad |y^{1-\eta}\omega(y)| \leqslant |I| y^{1-\eta} \longrightarrow 0$$

prenons alors y_0 t.q. $0 < y_0 < \infty$ que nous choisirons plus tard

$$J \leqslant (1-\eta)|I| \int_0^{y_0} y^{-\eta} dy + (1-\eta)AV \int_{y_0}^\infty y^{-1-\eta} dy$$

$$J \leqslant |I| y_0^{1-\eta} + \frac{1-\eta}{\eta} AV y_0^{-\eta} = \varphi(y_0).$$

Cela prouve déjà que J est finie. Pour obtenir une majoration de J choisissons y_0 pour rendre $\varphi(y_0)$ minimum

$$\varphi'(y) = \frac{1-\eta}{y^{\eta+1}}(y|I| - AV) \Longrightarrow \varphi(y_0) = \varphi\left(\frac{AV}{|I|}\right) = \frac{(AV)^{1-\eta}}{\eta}|I|^\eta$$

$$J \leqslant \frac{A^{1-\eta}}{\eta} |I|^\eta V^{1-\eta}$$

Exemple important. Transformée de Hilbert de la fonction caractéristique d'un intervalle.

Soient $I = (a,b)$ intervalle borné et χ_I sa fonction caractéristique

$$x \notin \bar{I}, \quad \tilde{\chi}_I(x) = \int_a^b \frac{dt}{x-t} = \operatorname{Log}\left|\frac{x-a}{x-b}\right| = \operatorname{Log}\frac{x-a}{x-b}$$

$x \in \overset{\circ}{I}$, dès que ε est assez petit, $\tilde{\chi}_{I\varepsilon}(x) = \int_a^{x-\varepsilon} \frac{dt}{x-t} + \int_{x+\varepsilon}^{b} \frac{dt}{x-t} = \mathrm{Log}\left|\frac{x-a}{x-b}\right|$

d'où le résultat : $\tilde{\chi}_I(x) = \mathrm{Log}\left|\frac{x-a}{x-b}\right|$.

Si $|x| \longrightarrow \infty$, $\tilde{\chi}_I(x) = \mathrm{Log}\left|1 + \frac{b-a}{x-b}\right| \sim \frac{|I|}{|x-b|} \sim \frac{|I|}{|x|}$ ce qui prouve que $\forall p \in]0,1]$, $\tilde{\chi}_I \notin L^p(R)$, résultat qui montre la nécessité de l'hypothèse I borné dans le théorème 4.

Exercice.- $f(x) = \frac{1}{|x|\mathrm{Log}^2(1+|x|)}$ alors $(x \longrightarrow 0) \Rightarrow (\tilde{f}(x) \sim \frac{1}{x\,\mathrm{Log}|x|})$ ce qui prouve que $\tilde{f} \notin L^1_{loc}(R)$.

On pourrait même obtenir des transformées de Hilbert qui ne soient intégrables dans aucun intervalle.

Théorème 5.- Soit $\{f_n\}_{n \in N}$ où $\forall n, \left\lceil \begin{array}{l} f_n \in L^1(R) \\ f_n \longrightarrow f \end{array}\right.$ en moyenne.

Alors $\tilde{f}_n \longrightarrow \tilde{f}$ en mesure.

Preuve : d'après le théorème 1 appliqué à $f_n - f$, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \left|\left\{x \,;\, |\tilde{f}_n(x) - \tilde{f}(x)| > \varepsilon\right\}\right| \leqslant \frac{A}{\varepsilon} \|f_n - f\|_1 \longrightarrow 0 \quad \text{avec } \frac{1}{n}.$$

Corollaire.- il existe une suite extraite $\{\tilde{f}_{n_K}\} \longrightarrow \tilde{f}$ p. p.

En effet de toute suite de fonctions convergeant en mesure, on peut extraire une sous-suite qui converge presque partout.

2.3.- Cas où $f \in L^p(R)$, $1 < p < \infty$.

Théorème 6.- $f \in L^p(R)$ $\quad 1 < p < \infty$.

Alors $\tilde{f}$ existe presque partout.

Preuve : en effet soit I intervalle borné, alors $f \in L^1(I)$

décomposons $f = f_1 + f_2$ où f_1 est la restriction de f à I

alors $f^1 \in L^1(R)$ et $\tilde{f}_1$ existe presque partout

mais $f_2 = 0$ sur I, donc $\forall x \in \overset{\circ}{I}$, $\exists \tilde{f}_2(x)$

alors $\tilde{f}$ existe presque partout dans I

prenant maintenant une suite d'intervalles dont la réunion recouvre R, il en résulte que $\tilde{f}$ existe sauf peut être sur une réunion dénombrable d'ensembles négligeables donc presque partout.

Théorème 7.- Soit $\{f_n\}_{n \in N}$, $\forall n \quad f_n \in L^p(R) \quad 1 < p < \infty, \quad f_n \longrightarrow f$ dans L^p.

Alors $\tilde{f}_n \longrightarrow \tilde{f}$ en mesure dans tout intervalle borné.

Preuve : il suffit de prouver le résultat dans le cas où l'intervalle borné est de la forme $I = [-A\ ,\ +A]$. Soient alors $J = [-2A\ ,\ 2A]$, χ_J sa fonction caractéristique. Décomposons alors $f_n = f_{1,n} + f_{2,n}$ où $f_{1,n} = f_n \chi_J$, de même pour f. Alors $f_{1,n} \in L^1(R)$. et $f_{1,n} \longrightarrow f_1$ en moyenne. En effet :

$$\int_R |f_{1,n} - f_1| = \int_J |f_n - f| \leqslant |J|^{1/q} . \left(\int_J |f_n - f|^p\right)^{1/p} \leqslant (4A)^{1/q} \|f_n - f\|_p$$

où q est le conjugué de p : $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.\right)$

Alors d'après le théorème 5, $\tilde{f}_{1,n} \longrightarrow \tilde{f}_1$ en mesure

puis $\tilde{f}_{2,n} \longrightarrow \tilde{f}_2$ uniformément dans I. En effet

$$x \in I, \quad |\tilde{f}_{2,n}(x) - \tilde{f}_2(x)| = \left|\int_{\complement J} \frac{f_{2,n}(t) - f_2(t)}{x - t}\, dt\right| \leqslant \left(\int_{\complement J} |f_{2,n} - f_2|^p\right)^{1/p} . \left(\int_{\complement J} \frac{dt}{|x-t|^q}\right)^{1/q}$$

$$|\tilde{f}_{2,n}(x) - \tilde{f}_2(x)| \leqslant \left(2\int_A^{+\infty} \frac{du}{u^q}\right)^{1/q} \|f_n - f\|_p$$

2.4.- Compléments sur les transformées de Hilbert des fonctions caractéristiques d'ensembles.

Théorème 8.- Soient E un ensemble mesurable de mesure finie $|E|$ et χ sa fonction caractéristique. Soient $\omega_1(y) = |\{x\ ;\ \tilde{\chi}(x) > y > 0\}|$; $\omega_2(y) = |\{x\ ;\ \tilde{\chi}(x) < -y < 0\}|$.

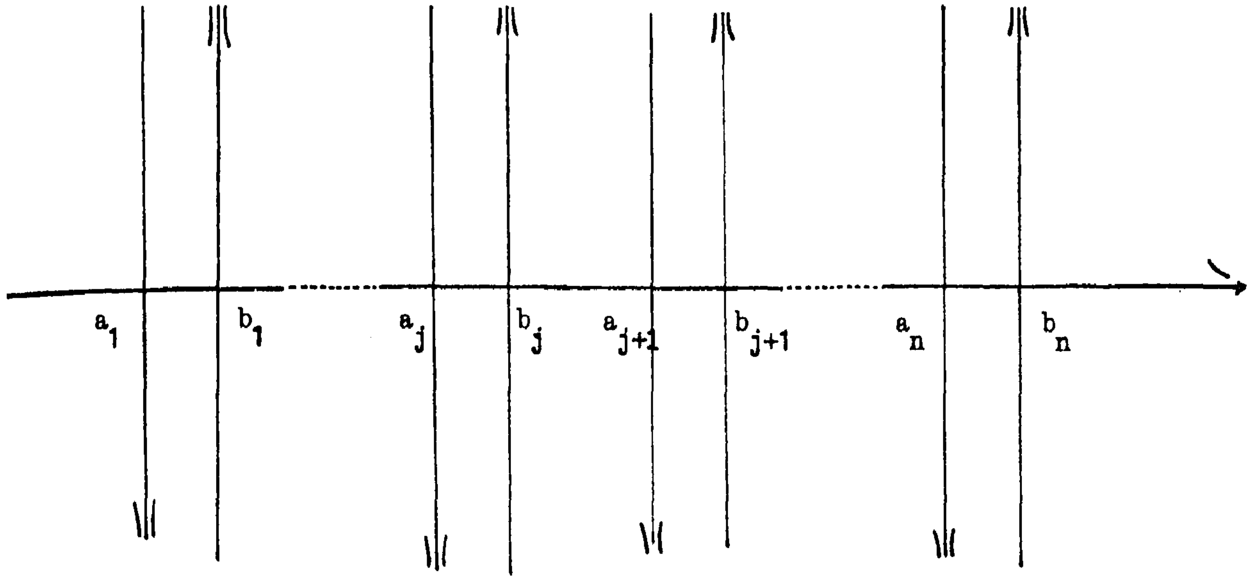
Alors $\omega_j(y) = \dfrac{|E|}{\text{sh } y} \quad j = 1, 2.$

Preuve : grâce au théorème 5, il suffit de prouver le résultat dans le cas où E est réunion finie d'intervalles bornés et disjoints ; $E = \bigcup_{j=1}^{n} I_j$

$I_j = (a_j\ ,\ b_j)$ avec $a_1 < b_1 < a_2 < \dots < b_{j-1} < a_j < b_j < a_{j+1} < \dots < b_{n-1} < a_n < b_n$.

Alors $\tilde{\chi}(x) = \sum_{j=1}^{n} \text{Log} \left|\dfrac{x-a_j}{x-b_j}\right|$ d'après exemple 2.2.

La disposition des branches infinies est alors la suivante



$\!r \neq 0$ $\tilde{\chi}(x) = y$ admet donc une racine au moins dans (a_j, b_j) $j = 1, \dots, n$; n racines au moins

une racine au moins dans (b_j, a_{j+1}) $j=1,..(n-1)$; $n-1$ racines au moins

puis une racine au moins dans $(-\infty, a_1)$ si $y < 0$

une racine au moins dans $(b_n, +\infty)$ si $y > 0$

équation admet donc au moins $2n$ racines réelles.

Montrons que cette équation admet $2n$ racines réelles au plus.

Soient (α) les racines dans E, (β) les racines dans $\complement E$

$$x \in \complement E, \quad \tilde{\chi}(x) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Log} \frac{x - a_j}{x - b_j} = y \Longleftrightarrow \prod_{j=1}^{n} \frac{x - a_j}{x - b_j} = e^y$$

$$x \in I_j \quad \tilde{\chi}(x) = \operatorname{Log} \frac{a_j - x}{x - b_j} + \sum_{\substack{i \neq j \\ i=1}}^{n} \operatorname{Log} \frac{x - a_i}{x - b_i} = y \Longleftrightarrow \prod_{i=1}^{n} \frac{x - a_i}{x - b_i} = - e^y \quad .$$

Il en résulte que les (α) et les (β) sont au plus au nombre de n respectivement.

rs $\forall y \neq 0$, $\tilde{\chi}(x) = y$ a exactement $2n$ racines.

On en déduit que $\tilde{\chi}$ est monotone dans chaque intervalle où elle est continue.

Considérons alors $y > 0$. On a $a_j < \alpha_j < b_j$ $\quad j = 1, \dots, n$

$b_j < \beta_j < a_{j+1}$ $\quad j = 1, \dots, n$ $\quad a_{n+1} = +\infty$.

Posons $A = \sum_{j=1}^{n} a_j$, $B = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Alors $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = \frac{Be^y - A}{1 - e^y}$ et $\sum_{j=1}^{n} \beta_j = -\frac{Be^y + A}{1 + e^y}$.

Puis $\omega_1(y) = \sum_{j=1}^{n} (\beta_j - \alpha_j) = \frac{2(A-B)e^y}{1 - e^{2y}} = \frac{B - A}{\operatorname{sh} y} = \frac{|E|}{\operatorname{sh} y}$.

Calcul analogue pour $y < 0$.

<u>Corollaire</u>.- Soient E un ensemble mesurable avec $0 < |E| < \infty$,

χ sa fonction caractéristique et $\omega(y) = \left|\{x \,;\, |\tilde{\chi}(x)| > y > 0\}\right|$.

Alors $\omega(y) = \frac{2|E|}{\operatorname{sh} y}$.

<u>Remarque</u> : $x = \frac{|E|}{\operatorname{sh} y}$ $y = \operatorname{Arg\,sh} \frac{|E|}{x}$ $\tilde{\chi}$ est équimesurable avec $y(x)$.

Or $y = \operatorname{Arg\,sh} \frac{|E|}{x} = \operatorname{Log}\left[\frac{|E|}{x} + \sqrt{1 + (\frac{|E|}{x})^2}\right]$

$x \longrightarrow 0$, $y \sim \operatorname{Log} \frac{1}{|x|}$

$x \longrightarrow \infty$, $y \sim \frac{|E|}{x}$.

<u>Théorème</u> 9.- Soient E un ensemble mesurable avec $0 < |E| < \infty$,

χ sa fonction caractéristique, $h^* = \operatorname{Sup}_{\delta > 0} |\tilde{\chi}_\delta|$.

Alors $\omega(y) = \left|\{x \,;\, h^*(x) > y > 0\}\right| \leqslant 16 \frac{|E|}{\operatorname{sh} \frac{y}{2}}$.

<u>Preuve</u> : grâce au théorème 5, il suffit de prouver le résultat lorsque E est réunion
inie d'intervalles bornés disjoints.

On sait déjà par le théorème 3 que H est de mesure finie (et même $|H| \leqslant \frac{32|E|}{y}$)
$x \in H$, $\exists \delta = \delta(x)$ t. q. $|\tilde{\chi}_\delta(x)| > y$ d'après la définition du Supremum. Alors
$]x-\delta, x+\delta[\}_{x \in H}$ est un recouvrement de H, et de la même manière que dans la démonstration
lemme 3, on peut affirmer : pour tout $\varepsilon > 0$, on peut extraire un recouvrement d'une
rtie de H par un nombre fini d'intervalles disjoints $(x_j - \delta_j, x_j + \delta_j)$ $j = 1, 2, \dots, n$,
ls que $|\tilde{\chi}_{\delta_j}(x_j)| > y$ et $|H| \leqslant 4 \sum_{j=1}^{n} \delta_j + \varepsilon$.

Par construction les x_j, $x_j \mp \delta_j$ sont en nombre fini ; si l'un d'eux, soit x_0, est adhérent à E, on peut retirer à E un voisinage arbitrairement petit de x_0, soit $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$. Alors le nouvel ensemble, soit E', est encore réunion finie d'intervalles disjoints, sa mesure est arbitrairement proche de celle de E, et sa fonction caractéristique, soit χ', possède aussi la propriété : $|\tilde{\chi}'_{\delta_j}(x_j)| > y$. En effet $\tilde{\chi}_{\delta_j}(x_j) - \tilde{\chi}'_{\delta_j}(x_j) = \widetilde{(\chi - \chi')}_{\delta_j}(x_j) = \tilde{\chi}''_{\delta_j}(x_j)$ où χ'' est la fonction caractéristique de $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$; alors il est immédiat que $\tilde{\chi}''_{\delta_j}(x_j) \longrightarrow 0$ quand $\alpha \longrightarrow 0$ $(j = 1, 2, \dots, n)$.

On peut dès lors supposer que E' est réunion finie d'intervalles disjoints, de mesure arbitrairement proche de celle de E, $|\tilde{\chi}'_{\delta_j}(x_j)| > y$ $j = 1, 2, \dots, n$ et que l'un quelconque des intervalles composant E' est soit à l'extérieur des $[x_j - \delta_j , x_j + \delta_j]$, soit complètement intérieur à un demi intervalle $]x_i - \delta_i , x_i[$ ou $]x_i , x_i + \delta_i[$.

Soient $E'_j = E' \cap]x_j - \delta_j , x_j + \delta_j[$, χ'_j sa fonction caractéristique

$E''_j = E' \setminus E'_j$, χ''_j sa fonction caractéristique.

Alors $\tilde{\chi}'_{\delta_j}(x_j) = \tilde{\chi}'(x_j) - (\tilde{\chi}'_j)(x_j) = (\tilde{\chi}''_j)(x_j)$; d'où $|(\tilde{\chi}''_j(x_j)| > y$; mais $(\tilde{\chi}''_j)$ est monotone sur $[x_j - \delta_j , x_j + \delta_j]$, donc l'inégalité $|(\tilde{\chi}''_j)(x)| > y$ a lieu au moins sur un demi intervalle $[x_j - \delta_j , x_j]$ ou bien $[x_j , x_j + \delta_j]$.

Soit $H''_j =]x_j - \delta_j , x_j + \delta_j[\cap \{x ; |(\tilde{\chi}''_j)(x)| > y\}$; alors les H''_j sont disjoints et $|H''_j| \geqslant \delta_j$.

Soient $H'_0 = \{x ;\ |\tilde{\chi}'(x)| > \frac{y}{2}\}$, $H'_j = \{x ;\ |(\tilde{\chi}'_j)(x)| > \frac{y}{2}\}$ alors $H''_j \subseteq H'_0 \cup H'_j$ car $(\tilde{\chi}''_j)(x) = \tilde{\chi}'(x) - \tilde{\chi}'_j(x)$; il en résulte que $\bigcup_{j=1}^{n} H''_j \subseteq \bigcup_{j=0}^{n} H'_j$.

Alors $\sum_{j=1}^{n} \delta_j \leqslant \sum_{j=1}^{n} |H''_j| = |\bigcup_{j=1}^{n} H''_j| \leqslant |\bigcup_{j=0}^{n} H'_j| = \dfrac{2|E'|}{\operatorname{sh}\frac{y}{2}} + \sum_{j=1}^{n} \dfrac{2|E'_j|}{\operatorname{sh}\frac{y}{2}} \leqslant \dfrac{4|E'|}{\operatorname{sh}\frac{y}{2}}$.

Donc $|H| \leqslant \dfrac{16|E'|}{\operatorname{sh}\frac{y}{2}} + \varepsilon$, puis $|H| \leqslant \dfrac{16|E'|}{\operatorname{sh}\frac{y}{2}}$ et enfin $|H| \leqslant 16 \dfrac{|E|}{\operatorname{sh}\frac{y}{2}}$.

2.3.- Théorème de M. Riesz.

On se propose de démontrer le théorème suivant.

<u>Théorème</u> 10.– $f \in L^p(R) \quad 1 < p < \infty$.

Alors $\tilde{f} \in L^p(R)$ et il existe une constante A_p ne dépendant que de p telle que $\|\tilde{f}\|_p \leqslant A_p \|f\|_p$ et même $\|\tilde{f}_\delta\| \leqslant A_p \|f\|_p$.

<u>Remarque</u> : le résultat précédent est en défaut pour $p = 1$: la fonction caractéristique d'un ensemble borné en donne un exemple.

L'idée de la démonstration est celle de O'Neil et Weiss (Studia Mathematica, tome XXIII, fascicule 2, 1963).

Nous établissons d'abord quelques résultats préliminaires concernant les réarrangements de fonctions.

a) <u>Réarrangements</u>.

Soient f une fonction positive définie sur E_n et ω sa distribuante

$\omega(y) = |\{x \,;\, f(x) > y\}| \qquad x \in E_n$ et $y > 0$.

Il est connu que ω est décroissante et continue plus

$\omega(y - 0) = |\{x \,;\, f(x) \geqslant y\}|$ et $\omega(y - 0) - \omega(y) = |\{x \,;\, f(x) = y\}|$.

On supposera $\omega(y) < \infty$ pour tout $y > 0$ (c'est le cas si $f \in L^p$).

<u>Lemme</u> 4.– Il existe une fonction décroissante $t \rightsquigarrow f^*(t)$, $0 < t < \infty$, équimesurable avec f, c'est à dire telle que :

$$\forall y > 0 \qquad |\{x \,;\, f(x) > y > 0\}| = |\{t \,;\, f^*(t) > y > 0\}|.$$

<u>Preuve</u> : Définissons f^* par $f^*(t_0) = \mathrm{Inf}\,\{y \,;\, \omega(y) \leqslant t_0\}$.

Alors f^* est décroissante.

Supposons y_0 point de continuité de ω et prenons $t_0 = \omega(y_0)$. Soit y'_0 la plus petite valeur y telle que $\omega(y) = t_0$. (Une telle valeur existe car ω est continue à droite). On aura alors :

$$|\{x \,;\, f(x) > y_0\}| = t_0 = |\{t \,;\, f^*(t) \geqslant y'_0\}| = |\{t \,;\, f^*(t) > y_0\}|.$$

Si y_0 n'est pas point de continuité de ω, nous pouvons trouver une suite $\{y_n\}$

e points de continuité de ω, suite décroissante vers y_0 ; cela permet alors d'établir

'égalité :

$$|\{x \,;\, f(x) > y\}| = |\{t \,;\, f^*(t) > y\}| \quad \text{pour tout} \quad y > 0.$$

<u>Corollaire</u> : Si φ est une fonction continue croissante sur R_+^*.

Alors $\displaystyle\int_{E_n} \varphi[f(x)]\,dx = -\int_0^\infty \varphi(y)\,d\omega(y) = \int_0^\infty \varphi[f^*(t)]\,dt.$

En particulier on a $\|f\|_p = \|f^*\|_p$.

Il nous sera utile d'introduire la fonction f^{**} définie sur R_+^* par $f^{**}(t) = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t f^*(s)\,ds$.

Cette fonction majore f^* ; de plus elle est continue et décroissante.

Posons $\|f^{**}\|_p = N_p(f)$.

<u>Remarque</u> : On verra plus tard que $(f_1 + f_2)^{**} \leqslant f_1^{**} + f_2^{**}$.

Alors si pour f de signe quelconque on définit f^* comme étant $(|f|)^*$, $N_p(f)$ devient une norme sur L^p.

<u>Lemme</u> 5.– $p \geqslant 1$ $\quad \|f\|_p \leqslant N_p(f)$

$p > 1$ $\quad N_p(f) \leqslant q\,\|f\|_p$ où q est le conjugué de p

(c'est à dire que pour $p > 1$, N_p et $\|\ \|_p$ sont deux normes équivalentes).

<u>Preuve</u> : $\|f\|_p \leqslant N_p(f)$ résulte du fait que $\|f\|_p = \|f^*\|_p$ et $0 \leqslant f^* \leqslant f^{**}$

la deuxième partie résulte du

<u>Lemme de Hardy</u>.– $g(t) \geqslant 0$ pour $t > 0$ et $G(t) = \displaystyle\int_0^t g(s)\,ds$

alors $\left\|\dfrac{G(t)}{t}\right\|_p \leqslant q\,\|g\|_p$ $(p > 1,\ q$ conjugué de $p)$.

<u>Preuve</u> : Supposons d'abord $g \not\equiv 0$ et g nulle au dehors de $(a\,,\,b)$ $0 < a < b < \infty$, en intégrant par parties il vient

$$\left\|\frac{G(t)}{t}\right\|_p^p = \int_0^{+\infty} t^{-p} G^p(t)\,dt = q\int_0^\infty \left[\frac{G(t)}{t}\right]^{p-1} g(t)\,dt \leqslant q\,\left\|\frac{G(t)}{t}\right\|_p^{p/q} \|g\|_p .$$

Dans le cas général, le résultat s'obtient en approchant la fonction g par une suite croissante de fonctions g_n du type précédent, les fonctions G_n correspondantes forment aussi une suite croissante et il suffit d'appliquer le théorème de Beppo-Levi.

Avant de démontrer le théorème de M. Riesz, nous démontrerons encore deux lemmes qui nous seront utiles par la suite.

<u>Lemme</u> 6.- f et g positives définies sur E_n.

$$\text{Alors} \quad \int_{E_n} f(x)g(x)dx \leqslant \int_0^\infty f^*(t)g^*(t)dt.$$

<u>Preuve</u> : se fait en plusieurs étapes.

①. f et g fonctions caractéristiques d'ensembles mesurables bornés, supposons $f = \chi_F$, $g = \chi_G$ F et G mesurables bornées. Alors $\int_{E_n} f(x)g(x)dx = |F \cap G|$ et $\int_0^\infty f^*(t)g^*(t)dt = \mathrm{Min}(|F|,|G|)$. En effet $\chi_F^*(t) = 0$ si $t \geqslant |F|$ et $\chi_F^*(t) = |F|$ si $0 \leqslant t < |F|$.

②. f et g en escalier.

On peut trouver des nombres positifs α_j, β_k $(1 \leqslant j \leqslant m,\ 1 \leqslant k \leqslant m')$ et deux familles finies d'ensembles décroissants X_{j_m} et Y_k tels que

$$X_1 \supset X_2 \supset \dots \supset X_m \ ; \quad Y_1 \supset Y_2 \supset \dots \supset Y_m \ ; \quad f = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{X_j} \ ; \ g = \sum_{k=1}^{m'} \beta_k \chi_{Y_k}$$

en effet si f prend les valeurs $0,\ a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_m$ sur les ensembles $F_0,\ F_1,\ \dots,\ F_m$ avec $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_m$; on peut poser $\alpha_1 = a_1$, $\alpha_2 = a_2 - a_1, \dots, \alpha_m = a_m - a_{m-1}$ et $X_1 = \bigcup_{j=1}^{m} F_j$, $X_2 = \bigcup_{j=2}^{m} F_j$ etc..., de même pour g.

On obtient alors :

$$\int_{E_n} f(x)g(x)dx = \sum_{j,k} \alpha_j \beta_k \int \chi_{X_j}(x)\chi_{Y_k}(x)dx \leqslant \int_0^\infty \Big[\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \ \chi_{X_j}^*(t)\Big]\Big[\sum_{k=1}^{m'} \beta_k \chi_{Y_k}^*(t)\Big]dt$$

et il reste à prouver $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{X_j}^*(t) = f^*(t)$ et l'égalité analogue pour g^*. Or cela est une conséquence immédiate de l'opération "astérisque".

③. Cas général. La fonction f peut être approchée par une suite croissante de fonctions en escalier positives $0 \leqslant f_1 \leqslant f_2 \leqslant \dots \leqslant f_m \leqslant \dots \leqslant f$ et $f_m \longrightarrow f$. Pour terminer la démonstration il suffit de remarquer que l'on a

$$0 \leqslant f_1^* \leqslant f_2^* \leqslant \dots \leqslant f_m^* \leqslant \dots \leqslant f^* \quad \text{et}$$

$$\int_{E_n} f_m g_m \leqslant \int_0^\infty f_m^* g_m^* \leqslant \int_0^\infty f^* g^*$$

où g_m et g_m^* sont définies de façon évidente.

Corollaire. Soit $g = \chi_E$ où $|E| = s$.

Alors $g^*(t) = s$ pour $0 \leqslant t < s$ et $g^*(t) = 0$ pour $t \geqslant s$ et

$$\int_E f(x)dx \leqslant \int_0^\infty f^*(t)g^*(t)dt = s\int_0^s f^*(t)dt = sf^{**}(s).$$

On a même le lemme suivant :

Lemme 7 : $sf^{**}(s) = \sup\limits_{|E|=s} \int_E f(x)dx.$

Preuve : ①. Supposons d'abord que la valeur $f^*(s_0)$ n'est prise qu'une seule fois.

Soit $E = \{x \; ; \; f(x) \geqslant f^*(s_0)\}$; on a $|\{t \; ; \; f^*(t) \geqslant f^*(s_0)\}| = s_0$ et

$$\int_E f(x)dx = \int_{f(x) \geqslant f^*(s_0)} f(x)dx = \int_{f^*(t) \geqslant f^*(s_0)} f^*(t)dt =$$

$$\int_0^{s_0} f^*(t)dt = s_0 f^{**}(s_0).$$

②. Si la valeur $f^*(s_0)$ est prise plus d'une fois, soit $s_1 = \operatorname{Inf}\{s \; ; \; f^*(s) = f^*(s_0)\}$

Alors $\displaystyle\int_0^{s_0} f^*(t)dt = \int_0^{s_1} f^*(t)dt + \int_{s_1}^{s_0} f^*(t)dt = I_1 + I_2$

mais il existe E_1, $|E_1| = s_1$, et tel que $I_1 = \displaystyle\int_0^{s_1} f^*(t)dt = \int_{E_1} f(x)dx$

soit alors E_2 un ensemble quelconque, $|E_2| = s_0 - s_1$, où la fonction f prend la valeur $f^*(s_0)$ et soit $E = E_1 \cup E_2$

alors $\displaystyle\int_E f(x)dx = \int_0^{s_0} f^*(t)dt = s_0 f^{**}(s_0).$

Corollaire : $(f_1 + f_2)^{**} \leqslant f_1^{**} + f_2^{**}$.

Remarque : il n'est pas vrai en général que $(f_1 + f_2)^* \leqslant f_1^* + f_2^*$.

il suffit pour le voir de prendre $f_1 = \chi_{[0,1]}$, $f_2 = \chi_{[1,2]}$.

b) Théorème de Riesz.

Théorème 10.- $f \in L^p(R)$ $\quad 1 < p < \infty$.

Alors $\forall \delta > 0$, $\tilde{f}_\delta \in L^p$; $\tilde{f} \in L^p$

$\|\tilde{f}_\delta\|_p \leqslant A_p \|f\|_p$; $\|\tilde{f}\|_p \leqslant A_p \|f\|_p$

où A_p désigne une constante ne dépendant que de p.

Preuve : Comme $p > 1$ les normes N_p et $\| \ \|_p$ sont équivalentes.

Il suffit donc de prouver $N_p(\tilde{f}_\delta) \leqslant A_p N_p(f)$.

La démonstration se fera en deux étapes : on prouvera d'abord $N_p(\tilde{f}_\delta) \leqslant A_p N_p(f)$ puis on prouvera que $\tilde{f}_\delta \longrightarrow \tilde{f}$ en moyenne d'ordre p.

1 . Soit donc $f \in L^p$, $1 < p < \infty$, et considérons pour δ positif fixé, $\tilde{f}_\delta$, la transformée de Hilbert tronquée. Alors $\tilde{f}_\delta$ est localement sommable.

Si χ est la fonction caractéristique d'un certain ensemble, nous admettrons que $\int \tilde{f}_\delta(x)\,\chi(x)dx = \int f(t)\,\tilde{\chi}_\delta(t)dt$, relation dont la vérification formelle est immédiate.

Rappelons que pour les fonctions de signe quelconque on définit f^* par $f^* = |f|^*$ par exemple $\tilde{\chi}^*_\delta$ représente $|\tilde{\chi}_\delta|^*$.

Considérons $I = \int_E |\tilde{f}_\delta(x)|\,dx$ et posons $E^+ = \{x \ ; \ x \in E, \ \tilde{f}_\delta(x) \geqslant 0\}$. $E^- = E \setminus E^+$

Alors $I = \int_{E^+} \tilde{f}_\delta(x)dx - \int_{E^-} \tilde{f}_\delta(x)dx = I_1 - I_2$.

Puis $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}_\delta(x)\,\chi_{E^+}(x)dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\tilde{\chi}_{E^+\delta}(t)dt$

donc $0 \leqslant I_1 \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t)\,\tilde{\chi}^*_{E^+\delta}(t)dt$.

Mais on a déjà vu que : $\left|\left\{x \ ; \ |\tilde{\chi}_{E^+\delta}(x)| > y\right\}\right| \leqslant \dfrac{A.|E^+|}{\mathrm{Sh}\,\frac{y}{2}}$.

Alors $\tilde{\chi}^*_{E^+\delta}(t) \leqslant 2 \ \mathrm{Arg\,sh}\,\dfrac{As}{t}$ où on a posé $|E| = s \geqslant |E^+|$.

Par suite $0 \leqslant I_1 \leqslant 2\int_0^\infty f^*(t) \ \mathrm{Arg\,sh}\,\dfrac{As}{t}\,dt$.

On a un résultat analogue pour I_2 et finalement

$$I \leqslant 4 \int_0^{+\infty} f^*(t) \operatorname{Arg\,sh} \frac{As}{t}\, dt .$$

Donc aussi $s\, \tilde{f}^{**}(s) = \sup\limits_{|E|=s} \int_E |\tilde{f}_\delta(x)|\, dx \leqslant 4 \int_0^\infty f^*(t) \operatorname{Arg\,sh} \frac{As}{t}\, dt$.

Intégrons alors par parties, il vient :

$$\tilde{f}_\delta^{**}(s) \leqslant 4\, A \int_0^\infty \frac{f^{**}(t)}{\sqrt{A^2 s^2 + t^2}}\, dt .$$

Pour terminer cette étape, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme de Schur.- Soit $(s,t) \rightsquigarrow K(s,t)$ une fonction positive, homogène de degré(-1)

Soient g positive et h définie par $h(s) = \int_0^\infty g(t) K(s,t) dt$.

Alors pour $p > 1$, on a $\| h \|_p \leqslant A_{K,p} \| g \|_p$ où $A_{K,p}$ est une constante ne dépendant que de K et p.

En effet $\| h \|_p = \| \int_0^\infty g(t) K(s,t) dt \|_p = \| \int_0^\infty g(t) . \frac{1}{s} K(1, \frac{t}{s}) dt \|_p = \| \int_0^\infty g(su) K(1,u) du \|_p$.

Alors en utilisant l'inégalité de Minkowski :

$$\| h \|_p \leqslant \int_0^\infty K(1,u) \| g(su) \|_p du = \| g \|_p \int_0^{+\infty} K(1,u) u^{-1/p} du = A_K \| g \|_p \, .$$

Alors théorème : appliquant le lemme de Schur avec $K(s,t) = \dfrac{4A}{\sqrt{A^2 s^2 + t^2}}$.

On peut écrire $N_p(\tilde{f}_\delta) = \| \tilde{f}_\delta^{**} \|_p \leqslant A_p \| f^{**} \|_p \leqslant A_p N_p(f)$.

②. Passons à la deuxième étape : on sait que $\tilde{f}_\delta \longrightarrow \tilde{f}$ p. p. quand $\delta \longrightarrow 0$.

On se propose de prouver que la convergence a encore lieu en moyenne d'ordre p. Mais

$$\left[\| \tilde{f}_\delta - \tilde{f} \|_p \longrightarrow 0 \text{ quand } \delta \longrightarrow 0 \right] \Longleftrightarrow \left[\| \tilde{f}_\delta - \tilde{f}_\varepsilon \|_p \longrightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \text{ et } \delta \longrightarrow 0 \right].$$

Le principe de la démonstration est de décomposer f en somme de deux fonctions de sorte que si on a $f = g + h$ alors $\| h \|_p$ soit petite et $\| \tilde{g}_\varepsilon - \tilde{g}_\delta \|_p \longrightarrow 0$ quand $\varepsilon, \delta \longrightarrow 0$.

En effet on a alors : $\overline{\lim\limits_{\varepsilon,\delta \to 0}} \| \tilde{f}_\varepsilon - \tilde{f}_\delta \|_p \leqslant 2A_p \| h \|_p$ qui peut être rendu arbitrairement petit.

Alors approchons f en moyenne d'ordre p par une fonction g indéfiniment dérivable et à support compact $(g \in C_0^\infty)$.

Soit de plus $\varphi \in C_0^\infty$, φ paire et $\varphi(0) = 1$.

Alors, à cause de la parité de φ, on a,

$$\tilde{g}_\varepsilon(x) = \int_{|x-t| \geqslant \varepsilon} \frac{g(t) - g(x)\,\varphi(x-t)}{x-t}\, dt .$$

Supposons que les supports de g et de φ soient contenus dans l'intervalle $[-A , A]$. La fonction $t \rightsquigarrow g(t) - g(x)\,\varphi(x-t)$ est nulle pour $t = x$ et a une dérivée bornée. Le théorème des accroissements finis donne alors :

$|g(t) - g(x)\,\varphi(x-t)| \leqslant M\,|x-t|$.

Par suite, pour $|x| \leqslant 2A$, on a

$$|\tilde{g}_\varepsilon(x)| \leqslant \int_{-3A}^{3A} \frac{|g(t) - g(x)\,\varphi(x-t)|}{|x-t|}\, dt \leqslant 6AM.$$

D'autre part, pour $|x| > 2A$ on a

$$|\tilde{g}_\varepsilon(x)| \leqslant \int_{|x-t| \geqslant \varepsilon} \left|\frac{g(t)}{x-t}\right| dt \leqslant \frac{1}{|x|-A} \int |g(t)|\, dt \leqslant \frac{B}{|x|}$$

où B est une certaine constante positive.

De ces deux majorations, on déduit $|\tilde{g}_\varepsilon(x)| \leqslant \dfrac{N}{1+|x|}$ où N est une constante bien choisie en fonction de A, B, M.

Or $p > 1 \Longrightarrow x \rightsquigarrow \dfrac{N}{1+|x|} \in L^p$. Alors la démonstration s'achève en utilisant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue.

Chapitre III

Transformée de Hilbert dans le cas de plusieurs variables

(noyaux impairs)

1.1.- Extension des résultats du chapitre II.

On se place dans E_n et on se propose d'examiner $\tilde{f} = f * K = \lim_{\varepsilon \to 0} \tilde{f}_\varepsilon$ où K est homogène et de degré $(-n)$ et où $\tilde{f}_\varepsilon(x) = \int_{|y| \geq \varepsilon} f(x-y)K(y)dy$.

Rappelons que si $\Omega \in L(\sum)$ et $f \in L^p$ $p \geq 1$ alors $\tilde{f}_\varepsilon$ existe presque partout et l'intégrale définissant $\tilde{f}_\varepsilon$ est même absolument convergente p. p.

Théorème 11.- Si Ω est impaire, $\Omega \in L(\sum)$, $f \in L^p$ $(p > 1)$.

Alors $\| \tilde{f}_\varepsilon \|_p \leq \frac{1}{2} A_p \|\Omega\|_1 . \|f\|_p$ où A_p est la même constante que celle du théorème de Riesz.

Preuve. Nous emploierons la méthode dite des rotations.

L'intégrale donnant $\tilde{f}_\varepsilon$ étant absolument convergente presque partout, on a en posant $\rho = |y|$, $y = \rho y'$ et en tenant compte de l'imparité de Ω :

$$\tilde{f}_\varepsilon(x) = \int_{\sum} \Omega(y')\left(\int_\varepsilon^\infty \frac{f(x-\rho y')}{\rho} d\rho\right)dy' = \frac{1}{2}\int_{\sum} \Omega(y')\left(\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{f(x-\rho y')-f(x+\rho y')}{\rho} d\rho\right)dy'$$

puis en utilisant l'inégalité de Minkowski :

$$\| \tilde{f}_\varepsilon \|_p \leq \frac{1}{2} \int_{\sum} |\Omega(y')| . \left\|\int_\varepsilon^\infty \frac{f(x-\rho y')-f(x+\rho y')}{\rho} d\rho \right\|_p dy'$$

Fixons y' sur $\sum$ et étudions

$$I = \left\|\int_\varepsilon^\infty \frac{f(x-\rho y')-f(x+\rho y')}{\rho} d\rho \right\|_p^p = \int_{E_n} \left|\int_\varepsilon^\infty \frac{f(x-\rho y')-f(x+\rho y')}{\rho} d\rho\right|^p dx$$

y' définit une direction de droite L_0 ; soit M l'hyperplan orthogonal à L_0. Par x menons la parallèle L_ξ à L_0 qui coupe M en ξ. Alors l'intégrale multiple I peut se calculer comme suit si l'on pose $x = \xi + ty'$

$$I = \int_M d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left| \int_\varepsilon^\infty \frac{f[\xi+(t-\rho)y'] - f[\xi+(t+\rho)y']}{\rho} d\rho \right|^p .$$

Considérons l'application $\varphi : R \longrightarrow R$ définie par $\varphi(u) = f(\xi + uy')$ alors

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{f[\xi+(t-\rho)y'] - f[\xi+(t+\rho)y']}{\rho} d\rho = \int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(t-\rho) - \varphi(t+\rho)}{\rho} d\rho = \tilde{\varphi}_\varepsilon(t)$$

par suite $\int_{-\infty}^{+\infty} dt \, | \quad |^p = \| \tilde{\varphi}_\varepsilon \|_p^p \leqslant A_p^p \| \varphi \|_p^p$ d'après le théorème 10 (théorème de M. Riesz du chapitre II).

Alors $$I \leqslant A_p^p \int_M d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\xi + uy')|^p du = A_p^p \| f \|_p^p$$

d'où le résultat annoncé : $\| \tilde{f}_\varepsilon \|_p \leqslant \frac{1}{2} A_p \| \Omega \|_1 \| f \|_p$.

<u>Théorème</u> 12.- K impair, $f \in L^p$ $(p > 1)$.

Alors $\lim\limits_{\varepsilon,\delta \to 0} \| \tilde{f}_\varepsilon - \tilde{f}_\delta \|_p = 0$

en particulier, $\exists \tilde{f} \in L^p$ t. q. $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \| \tilde{f}_\varepsilon - \tilde{f} \|_p = 0$.

<u>Preuve</u>. La démonstration est semblable à celle faite dans le cas $n = 1$.

On peut approcher f dans L^p par une fonction $g \in C_0^\infty$

On considère une fonction $\varphi \in C_0^\infty$, radiale $(\varphi(x) = \psi(|x|))$ et telle que $\varphi(0) = 1$.

Alors comme dans le cas $n = 1$, il existe une constante N, positive, indépendante de ε et telle que $|\tilde{g}_\varepsilon(x)| \leqslant \frac{N}{1+|x|^n} \in L^p$ $(p > 1)$; ce qui permet d'achever la démonstration comme dans le cas $n = 1$.

3.2.- <u>Quelques mots sur le cas général</u>.

Dans le cas général, on peut décomposer K en sa partie paire et sa partie impaire.

Lorsque K est pair, on a le théorème suivant que l'on démontrera plus tard (cf. chapitre V)

Théorème.- K pair, $\Omega \in L\,\mathrm{Log}^+L(\sum)$.

Alors $\|\tilde{f}_\varepsilon\|_p \leqslant B_p \|f\|_p \quad p > 1$ et $\lim\limits_{\varepsilon,\delta \to 0} \|\tilde{f}_\varepsilon - \tilde{f}_\delta\|_p = 0$.

La condition $\Omega \in L\,\mathrm{Log}^+L(\sum)$ qui signifie :

$$\int_\Sigma |\Omega(x')|\,\mathrm{Log}^+|\Omega(x')|\,dx' < \infty$$

ne peut être affaiblie. En particulier $\Omega \in L(\sum)$ ne suffit pas ; par contre, si $r > 1$, $\Omega \in L^r(\sum)$ entraine $\Omega \in L\,\mathrm{Log}^+L(\sum)$.

Contre exemple. $n = 2$, Ω mesure discrète : aux points 1 et -1 on a des masses unités, aux points i et $-i$ on a des masses (-1).

Alors, x étant complexe, $I = \int f(x-y)\,\dfrac{\Omega(dy')}{|y|^2}\,dy = \int f(x-\rho e^{i\theta})\,\dfrac{\Omega(d\theta)}{\rho}\,d\rho\,d\theta$,

soit $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\rho}\left[f(x-\rho) + f(x+\rho) - f(x-i\rho) - f(x+i\rho)\right]d\rho$

posons alors $x = \xi + i\eta$ et supposons que f ne dépende que de ξ :

$f(x) = f(\xi,\eta) = f(\xi)$; alors $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\rho}\left[f(\xi-\rho) + f(\xi+\rho) - 2f(\xi)\right]d\rho$

c'est une intégrale quasi-singulière qui peut diverger partout, même si f est continue.

3.3.- Cas des noyaux "variables".

Jusqu'ici nous n'avons envisagé que des noyaux "constants" K où $z \rightsquigarrow K(z)$ ne dépend pas de x.

Mais dans les équations différentielles à coefficients non constants s'introduisent des noyaux "variables" : $K_x(Z) = \dfrac{\Omega_x(Z)}{|Z|^n}$.

Théorème 13.- Si i) $\forall x$ l'application $z \rightsquigarrow K_x(z)$ est impaire

ii) $\sup\limits_x |\Omega_x(z)| \leqslant \Omega^*(z)$ et $\displaystyle\int_\Sigma \Omega^*(Z')\,dZ' < \infty$

iii) $f \in L^p \quad p > 1$.

Alors $\tilde{f}_\varepsilon(x) = \displaystyle\int_{|x-y|\geqslant\varepsilon} f(y)K_x(x-y)\,dy$ existe presque partout et

$$\|\tilde{f}_\varepsilon\|_p \leqslant \frac{1}{2} A_p \|\Omega^*\|_1 \|f\|_p \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon,\delta \to 0} \|\tilde{f}_\varepsilon - \tilde{f}_\delta\|_p = 0.$$

Preuve : La démonstration est identique à celle donnée dans le cas des noyaux "constants" mais on majorera ici $|\Omega_x(y')| \leqslant |\Omega^*(y')|$.

Chapitre IV

Applications de la transformation de Fourier aux intégrales singulières

4.1.- Rappels.

a) Soit f définie sur E_n ; l'intégrale de Fourier de f est, formellement,

$\hat{f}(x) = (Ff)(x) = \int f(y)e^{-2\pi i(x.y)}dy$ où $(x.y)$ désigne le produit scalaire dans E_n.

b) Si $f \in L^1$, $\hat{f}$ est continue, bornée et tend vers zéro à l'infini.

c) Si $f \in L^2$, on peut définir $\hat{f}$ dans L^2, de la manière suivante : soit f_R la fonction qui vaut $f(x)$ pour $|x| \leqslant R$, zéro sinon ; alors $f_R \in L^1$ et on peut définir $\hat{f}_R$ par $\int f_R(y)e^{-2\pi i(x.y)}dy = \hat{f}_R(x)$. On peut alors montrer l'existence d'une fonction, soit $\hat{f}$, $\hat{f} \in L^2$, et $\lim\limits_{R \to \infty} \| \hat{f} - \hat{f}_R \|_2 = 0$. On a toujours $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$ (formule de Parseval-Plancherel). Il en résulte que si $f_n \xrightarrow{L^2} f$ alors $\hat{f}_n \xrightarrow{L^2} \hat{f}$.

d) Il est important de remarquer que si $g \in L^1$ et $f \in L^1$ (resp. $f \in L^2$) alors $f * g = h \in L^1$ (resp. $h \in L^2$) et $\hat{h} = \hat{f}.\hat{g}$.

e) On peut définir, dans un sens à préciser, une formule réciproque :

$f(y) = \int \hat{f}(x)e^{2\pi i(x.y)}dx = (F^*\hat{f})(y)$ (Par exemple si $f \in L^1$, alors $f(y) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int \hat{f}(x)e^{2\pi i(x.y)}\, e^{-\varepsilon|x|}dx$).

f) Remarque : si $f \in L^p$ $1 < p < 2$, on peut écrire $f = f_1 + f_2$ où $f_1 \in L^1$ et $f_2 \in L^2$ et on peut définir $\hat{f} = \hat{f}_1 + \hat{f}_2$ indépendamment de la décomposition de f. On peut, par exemple, poser $f_1 = f$ si $|f| > 1$, 0 sinon.

4.2.- Transformée de Fourier du noyau.

Rappelons que l'on a posé $K(x) = \dfrac{\Omega(x')}{|x|^n}$ pour $x \neq 0$ avec $x' = \dfrac{x}{|x|}$ de plus $\Omega \in L^1(\Sigma)$ et $\displaystyle\int_\Sigma \Omega(x')dx' = 0.$

Soit $K_{\varepsilon,\eta}$ le noyau tronqué : $K_{\varepsilon,\eta}(x) = \begin{cases} K(x) & \text{si } \varepsilon \leqslant |x| \leqslant \eta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

alors $K_{\varepsilon,\eta} \in L^1$ et si $\tilde{f}_{\varepsilon,\eta} = f * K_{\varepsilon,\eta}$, si $f \in L^2$, alors $\tilde{f}_{\eta,\varepsilon} \in L^2$,

$$\| \tilde{f}_{\varepsilon,\eta} \|_2 \leqslant \| K_{\varepsilon,\eta} \|_1 \cdot \| f \|_2 \quad \text{et} \quad (f_{\varepsilon,\eta})^\wedge = \hat{f}.\hat{K}_{\varepsilon,\eta}.$$

<u>Lemme</u> 8. Supposons Ω borné.

Alors 1) $\hat{K}_{\varepsilon,\eta}$ est borné en x, uniformément en ε et η

2) si $\varepsilon \longrightarrow 0$ et $\eta \longrightarrow +\infty$ (simultanément ou successivement), il existe une fonction $\hat{K}$ t.q. $\hat{K}_{\varepsilon,\eta}(x) \longrightarrow \hat{K}(x)$ simplement, pour $x \neq 0$.

<u>Preuve</u> : posons $|x| = r$, $|y| = \rho$, $(x.y) = r\rho\cos\varphi$; de plus $dy = \rho^{n-1}d\rho dy'$

alors $\displaystyle\hat{K}_{\varepsilon,\eta}(x) = \int_{\varepsilon \leqslant |y| \leqslant \eta} K(y)e^{-2\pi i(x.y)}dy = \int_\Sigma \Omega(y')\left\{\int_\varepsilon^\eta e^{-2\pi i\rho r\cos\varphi}\frac{d\rho}{\rho}\right\}dy'$

et pour $r \neq 0$ $\displaystyle\hat{K}_{\varepsilon,\eta}(x) = \int_\Sigma \Omega(y')\left\{\int_{\varepsilon r}^{\eta r} e^{-2\pi i\rho\cos\varphi}\,\frac{d\rho}{\rho}\right\}dy'.$

Soit g définie par $g(\rho) = 1$ si $0 < \rho < 1$ et $g(\rho) = 0$ si $\rho > 1$. Alors

$$\int_\Sigma \Omega(y')dy' = 0 \Longrightarrow \hat{K}_{\varepsilon,\eta}(x) = \int_\Sigma \Omega(y')\left\{\int_{\varepsilon r}^{\eta r}\left[(\exp -2\pi i\rho\cos\varphi) - g(\rho)\right]\frac{d\rho}{\rho}\right\}dy'.$$

Posons $I = \{\ \}$ et prouvons que $|I| \leqslant 2\,\mathrm{Log}\,\dfrac{1}{|\cos\varphi|} + C$ pour $\cos\varphi \neq 0$, $C > 0$.

- Supposons d'abord $\varepsilon r \leqslant 1 \leqslant \eta r$

$$I = \int_{\varepsilon r}^1 \frac{\exp(-2\pi i\rho\cos\varphi) - 1}{\rho}\,d\rho + \int_1^{\eta r}\exp(-2\pi i\rho\cos\varphi)\frac{d\rho}{\rho} = I_1 + I_2.$$

Remarquons que $|1 - e^{it}| \leqslant |t|$, par suite $I_1 \leqslant 2\pi$.

Pour I_2 on a $\displaystyle I_2 = \int_{\cos\varphi}^{\eta r\cos\varphi} e^{-2\pi i\rho}\frac{d\rho}{\rho}$. Alors si $\eta r\cos\varphi > 1$ il vient :

$$|I_2| \leqslant \int_{\cos\varphi}^{1} \frac{dx}{x} + \left| \int_{1}^{r\cos\varphi} e^{-2\pi i \rho} \frac{d\rho}{\rho} \right| \leqslant \mathrm{Log} \frac{1}{|\cos \varphi|} + C_1$$

$$\text{où } C_1 = \sup_R \left| \int_1^R \frac{e^{ix} dx}{x} \right|.$$

- Si $0 < \eta r \cos \varphi \leqslant 1$ $\quad |I_2| \leqslant \int_{\cos\varphi}^{1} \frac{dx}{x} = \mathrm{Log} \frac{1}{\cos \varphi}$

- On a un résultat analogue pour $\cos \varphi < 0$, alors on peut dire

$$\varepsilon r \leqslant 1 \leqslant \eta r \Longrightarrow |I| \leqslant \mathrm{Log}\left|\frac{1}{\cos \varphi}\right| + C_1 + 2\pi$$

- Si $\varepsilon r > 1$, $\quad I = \int_{\varepsilon r}^{\eta r} = \int_1^{\eta r} - \int_1^{\varepsilon r} \Longrightarrow |I| \leqslant 2 \mathrm{Log}\left|\frac{1}{\cos \varphi}\right| + 2C_1$

- Si $\eta r < 1$ $\quad I = \int_{\varepsilon r}^{1} - \int_{\eta r}^{1} \Longrightarrow |I| \leqslant 4\pi$.

Alors dans tous les cas $|I| \leqslant 2 \mathrm{Log} \frac{1}{|\cos\varphi|} + C$ où on peut prendre $C = 4\pi + 2C_1$.

I étant majorée par une fonction intégrable sur $\sum$ et Ω étant bornée, la fonction $\widehat{K_{\varepsilon,\eta}}$ est bornée indépendamment de ε et de η.

La deuxième partie du lemme est conséquence du fait que I converge presque partout lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$ et $\eta \longrightarrow \infty$ et que I est dominée par une fonction intégrable sur $\sum$, indépendante de ε et η.

Inégalités d'Young. Rappelons :

Soient φ et ψ fonctions continues, strictement croissantes, réciproques l'une de l'autre et telles que $\varphi(0) = \psi(0) = 0$. Alors

$$\forall u, v \geqslant 0, \quad uv \leqslant \int_0^u \varphi(s)ds + \int_0^v \psi(t)dt \leqslant u\,\varphi(u) + v\,\psi(v).$$

Prenant maintenant $\varphi(u) = \mathrm{Log}(1+u) \Longrightarrow \psi(v) = e^v - 1$, on obtient

$$\forall u,v \geqslant 0, \quad uv \leqslant u \,\mathrm{Log}(1+u) + v(e^v - 1) \leqslant u\,\mathrm{Log}(1+u) + ve^v.$$

Remarque importante.

Dans la démonstration du lemme 8 on a utilisé uniquement le fait que $\int_{\Sigma} |\Omega(y')| \mathrm{Log} \left|\frac{1}{\cos\varphi}\right| dy' < \infty$. Pour cela il suffit qu'il existe $p > 1$ tel que $\Omega \in L^p(\sum)$.

Donnons même une condition moins restrictive.

Utilisant alors l'inégalité d'Young avec $u = |\Omega(y')|$, $v = \lambda \operatorname{Log}\left|\frac{1}{\cos\varphi}\right|$

où λ est un nombre strictement positif dont on se réserve le choix, il vient

$$|\Omega(y')| \operatorname{Log}\left|\frac{1}{\cos\varphi}\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}|\Omega(y')| \operatorname{Log}(1+|\Omega(y')|) + \frac{1}{|\cos\varphi|^{\lambda}} \operatorname{Log}\left|\frac{1}{\cos\varphi}\right|.$$

Or pour λ assez petit, $\frac{1}{|\cos\varphi|^{\lambda}} \operatorname{Log}\left|\frac{1}{\cos\varphi}\right|$ est intégrable sur $\sum$, il suffit donc d'assurer que $|\Omega| \operatorname{Log}(1+|\Omega|) \in L(\sum)$, ou ce qui est équivalent, car $\sum$ est compacte, que $|\Omega| \operatorname{Log}^{+}|\Omega| \in L(\sum)$. On a donc le lemme.

Lemme 8 bis.– $\Omega \in (L \operatorname{Log}^{+} L)(\sum)$, $\int_{\sum} \Omega(x')dx' = 0$; alors $\widehat{K_{\varepsilon,\eta}}(x)$ est borné en x, uniformément en ε, η et converge simplement (pour $x \neq 0$) vers une fonction $\hat{K}$.

Théorème 14.– Supposons $\Omega \in (L \log^{+} L)(\sum)$ et $\int_{\sum} \Omega(x')dx' = 0$.

Alors $\forall f \in L^2$, $\exists \tilde{f} \in L^2$ telle que $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \eta\to\infty}} \|\tilde{f}_{\varepsilon,\eta} - \tilde{f}\|_2 = 0$.

On a de plus $(\tilde{f})^{\wedge} = \hat{K}.\hat{f}$ et $\|\tilde{f}\|_2 \leqslant M \|f\|_2$ où $M = \sup\limits_{x} |\hat{K}(x)|$.

Preuve : Soit $\tilde{f}$ la fonction de L^2 définie par $(\tilde{f})^{\wedge} = \hat{K}.\hat{f}$.

Alors $(\tilde{f} - \tilde{f}_{\varepsilon\eta})^{\wedge} = \hat{f}(\hat{K} - \hat{K}_{\varepsilon\eta})$ et il en résulte que

$$\|\tilde{f} - \tilde{f}_{\varepsilon,\eta}\|_2 = \|(\tilde{f} - \tilde{f}_{\varepsilon,\eta})^{\wedge}\|_2 = \|\hat{f}(\hat{K} - \hat{K}_{\varepsilon,\eta})\|_2 .$$

Mais $|\widehat{K_{\varepsilon,\eta}}| \leqslant M$ et $\hat{K}_{\varepsilon,\eta}(x) \longrightarrow \hat{K}(x)$ $x \neq 0$. Alors par le théorème de convergence dominée de Lebesgue $\|\hat{f}(\hat{K} - \hat{K}_{\varepsilon,\eta})\|_2 \longrightarrow 0$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$ et $\eta \longrightarrow +\infty$.

La majoration résulte de : $\|\tilde{f}\|_2 = \|(\tilde{f})^{\wedge}\|_2 = \|\hat{K}\hat{f}\|_2 \leqslant M\|\hat{f}\|_2 = M\|f\|_2$.

Théorème 15.–

(1) $$\hat{K}(x) = \int_{\sum} \Omega(y')\left\{\operatorname{Log}\left|\frac{1}{\cos\varphi}\right| - \frac{i\pi}{2} \operatorname{sgn}(\cos\varphi)\right\}dy'$$

où $\operatorname{sgn}(\cos\varphi)$ désigne le signe de $\cos\varphi$ $\operatorname{sgn}(\cos\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \cos\varphi > 0 \\ 0 & \text{si } \cos\varphi = 0 \\ -1 & \text{si } \cos\varphi < 0 \end{cases}$

Preuve : La fonction $\hat{K}$ a été définie par

$$\hat{K}(x)=\lim_{\lambda\to 0}\int_{\sum}\Omega(y')\left[\int_{\lambda}^{\infty}\frac{e^{-2\pi i\rho\cos\varphi}}{\rho}\,d\rho\right]dy' .$$

L'expression entre crochets se met sous la forme $R + iI$ où R et I sont réels. Il est immédiat, par changement de variable, que $\lim_{\lambda\to 0} I = -\mathrm{sgn}(\cos\varphi)\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du = -\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(\cos\varphi)$

Quant à R, on peut l'écrire :

$$R = \int_{2\pi\lambda|\cos\varphi|}^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,dt = \int_1^{\infty}\frac{\cos t}{t}\,dt + \int_{2\pi\lambda|\cos\varphi|}^{1}\frac{\cos t-1}{t}\,dt + \int_{2\pi\lambda|\cos\varphi|}^{1}\frac{dt}{t}$$

d'où $R = \mathrm{Log}\left|\frac{1}{\cos\varphi}\right| + A(\lambda) + \int_{2\pi\lambda|\cos\varphi|}^{1}\frac{\cos t-1}{t}\,dt$ alors utilisant le fait que

$\int_{\sum}\Omega(x')dx' = 0$, on a

$$\text{partie réelle de } \hat{K} = \int_{\sum}\Omega(y')\mathrm{Log}\left|\frac{1}{\cos\varphi}\right| + \lim_{\lambda\to 0}\int_{\sum}\Omega(y')\left[\int_{2\pi\lambda|\cos\varphi|}^{1}\frac{\cos t-1}{t}\,dt\right]dy'$$

il suffit alors de remarquer que l'on peut passer à la limite sous le signe $\int$ grâce au théorème de convergence dominée.

Remarques.

- Cette formule peut servir de point de départ pour l'étude des intégrales singulières.
- $\hat{K}$ est homogène de degré zéro:

résulte de la propriété plus générale : f définie sur E_n homogène de degré $(-\alpha)$, alors $\hat{f}$ est homogène de degré $(-n+\alpha)$ car

$$\hat{f}(\lambda x) = \int f(y)e^{-2i\pi(\lambda x,y)}dy = \int f(y)e^{-2i\pi(x,\lambda y)}dy = \int \lambda^{\alpha} f(t)e^{-2\pi i(x,t)}\frac{dt}{\lambda^n} = \frac{1}{\lambda^{n-\alpha}}\hat{f}(x)$$

- Si $\Omega \in (L\,\mathrm{Log}^{+}L)(\sum)$, alors $\hat{K}$ est borné

résulte immédiatement du lemme 8 bis : $|\hat{K}_{\varepsilon,\eta}| \leqslant M$.

- $\int_{\sum}\hat{K}(x')dx' = 0$

en effet $\int_{\sum}\hat{K} = \int_{\sum}dx'\int_{\sum}\Omega(y')\left\{\mathrm{Log}\frac{1}{|\cos\varphi|} - \frac{\pi i}{2}\mathrm{sgn}\cos\varphi\right\}dy'$, soit encore

$\int_{\Sigma} \hat{K} = \int_{\Sigma} \Omega(y') \left[\int_{\Sigma} \mathrm{Log}\frac{1}{|\cos\varphi|} - \frac{\pi i}{2}\,\mathrm{sgn}(\cos\varphi)dx'\right]dy'$; mais le $[\quad]$ ne dépend évidemment pas de y' et on a donc $\int_{\Sigma} \hat{K} = \int_{\Sigma} C\,\Omega(y')dy' = 0$.

- Si K est impair, $\hat{K}(x) = -\frac{\pi i}{2}\int_{\Sigma} \Omega(y')\mathrm{sgn}(\cos\varphi)dy' = -\pi i\int_{\Sigma^+(x)} \Omega(y')dy'$

où $\Sigma^+(x)$ désigne l'hémisphère où $\cos\varphi \geqslant 0$.

4.3.- Applications.

a) Cas classique $n = 1$.

Soit $\tilde{f}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)dt}{x-t} = (Hf)(x)$.

Le facteur $\frac{1}{\pi}$ a été introduit pour des raisons de normalisation.

Soit $f \in L^2$, alors $(\tilde{f})^{\wedge}(x) = \hat{f}(x).(\frac{1}{\pi y})^{\wedge}(x) = \hat{f}(x)(-i\,\mathrm{sgn} x)$

en effet $(\frac{1}{y})^{\wedge}(x) = \mathrm{V.P.}\int \frac{1}{y}\, e^{-2\pi ixy}dy = -\pi i\ \mathrm{sgn}\ x$

alors $\|\tilde{f}\|_2 = \|(\tilde{f})^{\wedge}\|_2 = \|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$ et $H^2 f = -f$ d'où $H\tilde{f} = -f$ donc

$f(x) = -\frac{1}{\pi}\int \frac{\tilde{f}(y)}{x-y}\,dy$.

Cette dernière formule, démontrée dans le cas où $f \in L^2$, reste encore valable si $f \in L^p$ $(p > 1)$ car elle est vraie si f est bornée à support compact et H est continue.

b) Cas $n = 2$ (considéré pour la première fois par Tricomi).

Nous bénéficions ici de la théorie des séries de Fourier. Dans cette perspective, étudions le développement de la fonction $\varphi \rightsquigarrow \mathrm{Log}\left|\frac{1}{\cos\varphi}\right| - \frac{i\pi}{2}\,\mathrm{sgn}(\cos\varphi)$.

$\mathrm{Log}(1-z) = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m}$, $|z| \leqslant 1$ $z \neq 1$ pour $z = e^{2i\varphi}$ et en prenant les parties réelles : $\mathrm{Log}|2\sin\varphi| = \sum' \frac{e^{2i\mu\varphi}}{|2\mu|} \Longrightarrow \mathrm{Log}\left|\frac{1}{2\cos\varphi}\right| = \sum' \frac{e^{2i\mu\varphi}(i)^{2\mu}}{|2\mu|}$

soit enfin : $\mathrm{Log}\left|\frac{1}{2\cos\varphi}\right| = \sum{}' \frac{e^{2i\mu\varphi}(-i)^{|2\mu|}}{|2\mu|}$.

D'autre part $\mathrm{sgn}(\sin\varphi) = \frac{4}{\pi}\left[\sin\varphi + \frac{\sin 3\varphi}{3} + \ldots + \frac{\sin(2\nu+1)\varphi}{2\nu+1} + \ldots\right]$

soit $\mathrm{sgn}(\sin\varphi) = -\frac{2i}{\pi}\sum\limits_{\nu\ \text{impair}} \frac{e^{i\nu\varphi}}{\nu}$ d'où $-\frac{\pi i}{2}\mathrm{sgn}(\cos\varphi) = \sum\limits_{\nu\ \text{impair}} e^{i\nu\varphi}\frac{(-i)^{|\nu|}}{|\nu|}$.

Alors en regroupant :

$$\boxed{\log\left|\frac{1}{\cos\varphi}\right| - \frac{\pi i}{2}\cdot\mathrm{sgn}(\cos\varphi) = \mathrm{Log}\,2 + \sum{}' \frac{e^{im\varphi}}{|m|}(-i)^{|m|}.}$$

Il sera commode d'utiliser la variable complexe $(x_1,x_2) \sim x_1 + ix_2 = \rho e^{i\theta}$

$\hat{K}(x) = \int_{\Sigma} \Omega(y')G(\varphi)dy'$ où $G(\varphi) = \mathrm{Log}\left|\frac{1}{\cos\varphi}\right| - \frac{\pi i}{2}\mathrm{sgn}(\cos\varphi)$

Σ est ici le cercle unité et $\hat{K}$ étant homogène de degré zéro, $\hat{K}$ ne dépend que de θ.

Alors $\hat{K}(\theta) = \int_0^{2\pi} \Omega(t)G(\theta - t)dt$.

Soient $\Omega(\theta) \sim \sum{}' c_m e^{im\theta}$ $\left(c_o = 0 \text{ car } c_o = \int_{\Sigma} \Omega(\theta)d\theta = 0\right)$

et $G(\varphi) \sim \sum{}' \frac{1}{|m|}(-i)^{|m|}e^{im\varphi} + \mathrm{Log}\,2$.

Alors $\hat{K}(\theta) \sim 2\pi\sum{}' c_m \frac{(-i)^{|m|}}{|m|} e^{im\theta}$.

Cela montre que $\hat{K}$ est lié à la série intégrée de celle de Ω, on ne peut donc espérer que toute fonction 2π-périodique de valeur moyenne nulle soit la transformée de Fourier d'un noyau. Cependant :

<u>Théorème</u> 16.– Toute fonction 2π-périodique, de valeur moyenne nulle et de classe C^2 est le symbole d'un noyau dont la caractéristique est continue.

<u>Preuve</u> : Soit $\varphi \in C^2$, $\varphi = \sum{}' \gamma_m e^{im\theta} = 2\pi\sum{}' \frac{1}{2\pi}\frac{\gamma_m |m|}{(-i)^{|m|}}\frac{(-i)^{|m|}}{|m|}e^{im\theta}$

posons alors $\Omega = \sum{}' c_m e^{im\theta}$ où $c_m = \frac{1}{2\pi}\frac{\gamma_m |m|}{(-i)^{|m|}}$

$\varphi \in C^2 \Longrightarrow \varphi'' \in L^2(0,2\pi) \Longrightarrow \sum' |m^2 \gamma_m|^2 < \infty$

alors $\sum' |c_m| = \frac{1}{2\pi} \sum' |m \gamma_m| = \frac{1}{2\pi} \sum' |m^2 \gamma_m| \cdot \frac{1}{|m|} \leqslant \frac{1}{2\pi} (\sum' |m^2 \gamma_m|^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (\sum' \frac{1}{|m|^2})^{\frac{1}{2}} < \infty$

il en résulte que la série définissant Ω converge absolument et uniformément, d'où le résultat.

Remarque.- L'hypothèse $\varphi \in C^2$ est un peu trop forte et peut être réduite. Mais en tout cas l'hypothèse $\varphi \in C^1$ ne suffit pas.

Théorème 17.- $\hat{K}$ est continu.

Preuve : l'idée est de décomposer $\hat{K}$ en la somme d'une fonction manifestement continue et d'une fonction dont la norme uniforme peut être rendue arbitrairement petite

$$\hat{K} = \Omega * G \quad \text{où} \quad G(\varphi) = \mathrm{Log}\left|\frac{1}{\cos\varphi}\right| - \frac{\pi i}{2} \operatorname{sgn}(\cos\varphi) = g + h$$

h bornée, Ω sommable $\Longrightarrow \Omega * h$ continue ; occupons nous de $\Omega * g$,

d'après Young, $a,b,\lambda > 0 \Longrightarrow ab \leqslant \lambda a \,\mathrm{Log}(1 + \lambda a) + (e^{b/\lambda} - 1)$.

Or $\Omega \in L \log^+ L$ et $e^{|g|/\lambda}$ est sommable pour $\lambda > 1$.

Soient $F_n = \{\theta \,;\, |\Omega(\theta)| > n\}$ et χ_n sa fonction caractéristique, décomposons $\Omega = \chi_n \Omega + (1 - \chi_n)\Omega$ alors $(1 - \chi_n)\Omega$ est bornée et g est sommable donc $(1 - \chi_n)\Omega * g$ est continue. Posons $f_n = \chi_n \Omega * g$ et montrons que $\|f_n\|_\infty$ peut être rendue arbitrairement petite

$$|f_n(x)| \leqslant \int_\Sigma (|\Omega|\chi_n)(x-y)|g(y)|\,dy \leqslant \underbrace{\lambda \int_\Sigma \left[|\Omega|\chi_n \log(1+|\Omega\chi_n\lambda|)\right](x-y)\,dy}_{A} + \underbrace{\int_\Sigma (e^{|g|/\lambda}-1)(y)\,dy}_{B}$$

d'après Young :

$e^{|g|/\lambda} - 1 \longrightarrow 0$ en décroissant lorsque $\lambda \longrightarrow +\infty \Longrightarrow \int_\Sigma (e^{|g|/\lambda} - 1)(y)\,dy \longrightarrow 0$.

Soit $\varepsilon > 0$, fixons $\lambda > 1$ t. q. $|B| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Alors $A = \int_\Sigma \lambda\left[|\Omega\chi_n| \mathrm{Log}(1+|\Omega\chi_n\lambda|)\right](u)\,du$ car $\Omega\chi_n$ est périodique

$$\lambda > 1 \Longrightarrow |A| \leqslant \lambda \,\mathrm{Log}\,\lambda \int_\Sigma |\Omega\chi_n|(u)\,du + \lambda \int_\Sigma \left[|\Omega\chi_n| \mathrm{Log}(1+|\Omega\chi_n|)\right](u)\,du$$

$\Omega \in (L \log^+ L)(\Sigma) \Longrightarrow \Omega \in L(\Sigma) \Longrightarrow |\Omega|$ est fini p. p. $\Longrightarrow |\Omega| \chi_n \longrightarrow 0$ p. p. quand $n \longrightarrow +\infty$ puis $|\Omega|$ et $|\Omega| \operatorname{Log}(1+|\Omega|)$ sont des majorantes sommables $\Longrightarrow A \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$.

<u>Noyau particulier</u>. $\Omega_m(\theta) = \frac{1}{2\pi} e^{im\theta} \frac{|m|}{(-i)^{|m|}}$ pour m fixé $m \in Z^*$

alors $\hat{K}_m(\theta) = e^{im\theta} = \lambda \Omega_m(\theta)$.

Soit H_m la transformation correspondante $(H_m f)(z) = \frac{|m|}{2\pi(-i)^{|m|}} \iint f(z-\rho e^{it}) \frac{e^{imt}}{\rho} d\rho\, dt$.

Alors H_{-m} est la transformation réciproque de H_m

$$H_m = (H_1)^m .$$

<u>Application</u>. Revenons au cas général : $Hf = f * K$.

$$\widehat{Hf} = \hat{f}.\hat{K} = \hat{f}\ 2\pi \sum{}' c_m \frac{(-i)^{|m|}}{|m|} e^{im\theta} = 2\pi \sum{}' c_m \frac{(-i)^{|m|}}{|m|} \widehat{H_1^m f}$$

d'où $Hf = 2\pi \sum{}' c_m \frac{(-i)^{|m|}}{|m|} H_1^m f$ formellement et où H_1 est l'opérateur de la transformation de Riesz. Prouvons alors le :

<u>Théorème</u> 18.- $f \in L^2 \Longrightarrow \| Hf - \sum_{m=-N}^{+N}{}' 2\pi c_m \frac{(-i)^{|m|}}{|m|} R^m f \|_2 \longrightarrow 0$ quand $N \longrightarrow +\infty$.

<u>Preuve</u> : $\|(\ \ )\|_2 = \|\widehat{(\ \ )}\|_2 = \| \hat{f} \left[\hat{H} - \sum_{-N}^{+N}{}' 2\pi \frac{c_m (-i)^{|m|}}{|m|} \widehat{R^m} \right] \|_2 \leqslant \|\hat{f}\|_2 . \|[\ \ ]\|_2$.

Or $\hat{K}$ est continue $\Longrightarrow c_m = O(\frac{1}{m}) \Longrightarrow$ la série converge vers $\hat{H}$.

c) Cas général $n > 2$: $\int_{\Sigma} \Omega(x')dx' = 0$; $f \in L^2$.

La fonction f considérée est scalaire, mais K peut être vectoriel :

$K = (K_1, \dots, K_n)$; $f * K = (f * K_1, \dots, f * K_n)$.

En particulier, considérons $K(x) = \frac{x'}{|x|^n} = \frac{x}{|x|^{n+1}}$ noyau de Riesz.

On a alors $f * K = Rf = (R_1 f, \dots, R_n f)$ où $R_j f = \frac{x_j}{|x|^{n+1}} * f$.

<u>Théorème</u> 19.- $\widehat{\left(\frac{x'_j}{|x|^n}\right)} = \gamma x'_j$ où γ est une constante ne dépendant que de n.

<u>Preuve</u> : le noyau est impair $\Longrightarrow \hat{K}(x) = -\pi i \int_{\Sigma^+(x)} \Omega(y')dy'$

écrivons la démonstration dans le cas $j = 1$

pour tout système $(z_1, \ldots, z_n)$ orthonormé on a :

$$\Omega(y') = (y',x_1) = \sum_{j=1}^{n} (y',z_j).(z_j,x_1)$$

prenons alors $(z_1, \ldots, z_n)$ orthonormé avec $z_1 = Ox'$. Alors

$$\Omega(y') = (y',x')(x',x_1) + \sum_{j=2}^{n} (y',z_j)(z_j,x_1).$$

Seul le premier terme donne un résultat non nul après intégration

$$\hat{K}(x) = -\pi i\, x'_1 \int_{\Sigma^+} (y',x')dy' = -\pi i\, v_{n-1} x'_1$$

où v_{n-1} représente le volume de la boule unité de E_{n-1}.

<u>Calcul de</u> v_{n-1}. Soient v_n le volume de la boule unité de E_n

w_n l'aire de la sphère unité de E_n

- $\frac{d}{dr}(v_n r^n) = w_n r^{n-1} \Longrightarrow w_n = n\, v_n$

- $I = \int e^{-|x|^2} dx = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt\right)^n = (\sqrt{\pi})^n$

- $I = \int_{\Sigma} d\sigma \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} \rho^{n-1} d\rho = w_n \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} \rho^{n-1} d\rho = \frac{w_n}{2} \int_0^{\infty} e^{-u}\, u^{\frac{n}{2}-1} du = \frac{1}{2} w_n \Gamma(\frac{n}{2})$

- $w_n = \frac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(\frac{n}{2})} \Longrightarrow \theta_n = \frac{(\sqrt{\pi})^n}{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}$

- $\gamma = -\pi i v_{n-1} = -i \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}$.

Alors on normalise la transformation en posant en fait :

$(Rf)(x) = \frac{1}{\gamma} \int f(x-y) \frac{y}{|y|^{n+1}} dy$, et on a le théorème suivant :

<u>Théorème</u> 20.– $\sum_{j=1}^{n} R_j^2 = I$ où I désigne la transformation identique dans L^2.

<u>Preuve</u> : en effet $\widehat{(Rf)}(x) = \hat{f}(x)x'$, $\widehat{(R_j f)(x)} = \hat{f}(x)x'_j$

puis $\widehat{(R_j^2 f)(x)} = (\frac{x_j}{|x|})^2 \hat{f} \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} \widehat{(R_j^2 f)} = \hat{f} \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} R_j^2 f = f$.

Chapitre V

Etude du cas du noyau pair

5.1.- Introduction.

Soit K un noyau quelconque, $K(x) = \dfrac{\Omega(x')}{|x|^n}$, $\displaystyle\int_\Sigma \Omega(x')dx' = 0$.

On peut le décomposer en sa partie paire et sa partie impaire : $K(x) = K'(x) + K''(x)$ où $K'(x) = \frac{1}{2}\left[K(x) + K(-x)\right]$, $K''(x) = \frac{1}{2}\left[K(x) - K(-x)\right]$.

Evidemment $\displaystyle\int_\Sigma K''(x')dx' = 0$; il en résulte que $\displaystyle\int_\Sigma K'(x')dx' = 0$.

Alors d'après les résultats précédents, on a :

$$\| K'' * f \|_p < A_{p,K''} \| f \|_p \quad \text{pour} \quad f \in L^p, \ 1 < p < \infty.$$

Il ne nous reste plus qu'à examiner le cas où K est pair.

L'objet de ce chapitre est en fait de démontrer le théorème :

Théorème 21.- Soit K pair, $K(x) = \dfrac{\Omega(x')}{|x|^n}$, $\displaystyle\int_\Sigma \Omega(x')dx' = 0$; supposons $\Omega \in L^q(\Sigma)$ $(q > 1)$ et posons $\tilde{f}_\varepsilon = f * K_\varepsilon$ où K_ε est le noyau tronqué :

$$K_\varepsilon(x) = \begin{cases} K(x) & \text{si } |x| \geqslant \varepsilon \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors : i) $\| \tilde{f}_\varepsilon \|_p \leqslant A_{p,q} \| \Omega \|_q \| f \|_p \qquad 1 < p < \infty$

ii) il existe $\tilde{f} \in L^p$ t. q. $\| \tilde{f}_\varepsilon - \tilde{f} \|_p \longrightarrow 0$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$

iii) $\| \tilde{f} \|_p \leqslant A_{p,q} \| \Omega \|_q \| f \|_p$.

Idées de la démonstration.

- Le point vraiment important est le point i), et il suffit de le montrer pour un ensemble de fonctions denses dans L^p, par exemple pour $f \in C_0^\infty$.

- On a vu que $R_j f = f * C \dfrac{x_j}{|x|^{n+1}}$ où C est une constante universelle convenable et que $\displaystyle\sum_{j=1}^n R_j^2 f = f$

- Alors formellement : $Kf = \displaystyle\sum_{j=1}^n R_j^2 Kf = \sum_{j=1}^n \left[R_j(R_j K)\right] * f$ où R_j et $R_j K$ sont impairs et homogènes de degré $-n$ (cf lemmes 9 et 10 ci-dessous).

Remarque.- Le résultat (convenablement modifié quant aux majorations numériques) subsiste dans ses parties essentielles si on suppose seulement $\Omega \in (L\,\mathrm{Log}^+L)(\sum)$. De fait on aura par exemple :

i') $\|\tilde{f}_\varepsilon\|_p \leqslant A_p\left[\int_\sum |\Omega|\log^+|\Omega|\,dx' + A\right]\|f\|_p$.

Avant de passer à la démonstration du théorème annoncé, établissons les quelques résultats préliminaires suivants .

5.2.- Lemmes préparatoires.

Lemme 9.- La convolée de deux fonctions f_1 et f_2, paires ou impaires, est

- paire si f_1 et f_2 ont la même parité
- impaire dans le cas contraire.

Preuve.- $g(x) = f_1 * f_2(x) = \int f_1(y).f_2(x-y)dy$

$$g(-x) = \int f_1(y)f_2(-x-y)dy = \int f_1(-y).f_2(-x+y)dy$$ d'où le résultat.

Lemme 10.- f_j homogène sur E_n, de degré α_j $j = 1, 2.$

alors $f_1 * f_2$ est homogène de degré $\alpha_1 + \alpha_2 + n$.

Preuve.-

$$g(\lambda x) = \int f_1(y)f_2(\lambda x-y)dy = \int \lambda^{\alpha_1} f_1(t).\ \lambda^{\alpha_2} f_2(x-t)\lambda^n dt = \lambda^{\alpha_1+\alpha_2+n}\,g(x)$$

($\lambda > 0$, on a posé $y = \lambda t$).

Lemme 11.- $f \in L$, $\Omega \in L^q(\sum)$ $1 < q < \infty$

alors $R_j(K_\varepsilon f) = (R_j K_\varepsilon) * f$.

Preuve.- Remarquons d'abord que $K_\varepsilon \in L^q$. En effet :

$$\int |K_\varepsilon(x)|^q dx = \int_{|x|\geqslant\varepsilon} |K(x)|^q dx = \int_\sum |\Omega(x')|^q \left[\int_\varepsilon^\infty \frac{d\rho}{\rho^{1+n(q-1)}}\right] dx' = B\,\|\Omega\|_q < \infty .$$

On en déduit alors que $K_\varepsilon f = K_\varepsilon * f \in L^q$ $(L^q * L \subset L^q)$.

Par suite $R_j(K_\varepsilon f) = \lim_{\delta \to 0} R_{j\delta}(K_\varepsilon f)$ (limite dans L^q) où $R_{j\delta}$ est le noyau R_j tronqué à δ .

Or $\left[R_{j\delta}(K_\varepsilon f)\right](x) = \int R_{j\delta}(x-y).\left[\int f(z)K_\varepsilon(y-z)dz\right]dy = \int f(z)\left[\int R_{j\delta}(x-y)K_\varepsilon(y-z)dy\right]dz$.

L'intervertion des intégrations est justifiée par le fait que la dernière intégrale écrite converge absolument : en effet $K_\varepsilon \in L^q$ et $R_{j\delta} \in L^{q'}$ où $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'} = 1$; alors, d'après Hölder, $\int |R_{j\delta}(x-y)K_\varepsilon(y-z)|\,dy \leqslant M$, puis $f \in L^1$.

Posons $y = z + t$, il vient :

$$\left[R_{j\delta}(K_\varepsilon f)\right](x) = \int f(z)\left[\int R_{j\delta}(x-z-t)K_\varepsilon(t)dt\right]dz = \int f(z)\left[(R_{j\delta} * K_\varepsilon)(x-z)\right]dz .$$

Mais $K_\varepsilon \in L^q$ alors $R_{j\delta} * K_\varepsilon \xrightarrow[\delta \to 0]{(L^q)} R_j * K_\varepsilon$ d'après théorème 12.

Enfin $f \in L^1$ et $f*$ est alors continu de L^q dans L^q. Il en résulte que

$$\left[R_{j\delta}(K_\varepsilon f)\right] \xrightarrow[\delta \to 0]{(L^q)} (R_j * K_\varepsilon) * f = (R_j K_\varepsilon) * f .$$

<u>Lemme</u> 12.- Soit $K(x) = \dfrac{\Omega(x')}{|x|^n}$ pair homogène de degré $(-n)$.

Supposons $\Omega \in L^q(\Sigma)$ $1 \leqslant q$, $\int_\Sigma \Omega(x')dx' = 0$.

Fixons j entier, $j \in [1, n]$.

Alors il existe un noyau $\tilde{K}$ impair, homogène de degré $(-n)$, tel que $R_j * K_\varepsilon \longrightarrow \tilde{K}$ lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$ et ce dans la métrique de L^∞, sur tout compact ne contenant pas l'origine.

<u>Preuve</u>.- Pour presque tout x (et $\varepsilon < \eta$) on a :

$$\left[R_j * (K_\varepsilon - K_\eta)\right](x) = \int R_j(x-y)(K_\varepsilon - K_\eta)(y)dy = \int_{\varepsilon<|y|<\eta} R_j(x-y).K(y)dy.$$

Soit encore

$$\left[R_j * (K_\varepsilon - K_\eta)\right](x) = C\int_{\varepsilon<|y|<\eta} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}}K(y)dy = C\int_{\varepsilon<|y|<\eta}\left[\frac{x_j-y_j}{|x-y|^{n+1}} - \frac{x_j}{|x|^{n+1}}\right]K(y)dy$$

car $\int_{\varepsilon<|y|<\eta} K(y)dy = 0$. Alors par application du théorème des accroissements finis à la fonction $x \rightsquigarrow \dfrac{x_j}{|x|^{n+1}}$, on obtient $\left|\dfrac{x_j-y_j}{|x-y|^{n+1}} - \dfrac{x_j}{|x|^{n+1}}\right| \leqslant \dfrac{(n+2)|y|}{|x-\theta y|^{n+1}}$ $0 < \theta < 1$.

Nous imposant maintenant $0 < \varepsilon < \eta < \frac{1}{2}|x|$, on obtient :

$\left|\dfrac{x_j-y_j}{|x-y|^{n+1}} - \dfrac{x_j}{|x|^{n+1}}\right| \leqslant \dfrac{2(n+2)}{|x|^{n+1}}|y|$. On en déduit :

$$\left|\left[R_j * (K_\varepsilon - K_\eta)\right](x)\right| \leqslant \frac{A}{|x|^{n+1}} \int_{\varepsilon<|y|<\eta} |y|\,|K(y)|\,dy = \frac{A}{|x|^{n+1}} \int_\varepsilon^\eta d\rho \int_\Sigma |\Omega(y')|\,dy$$

Soit enfin $\left|\left[R_j * (K_\varepsilon - K_\eta)\right](x)\right| \leqslant \dfrac{A\,\|\Omega\|_1}{|x|^{n+1}}\,\eta$.

Ainsi $(R_j * K_\varepsilon)(x)$ satisfait une condition de Cauchy, par suite $R_j * K_\varepsilon$ tend, dans la métrique de L^∞ et en dehors de toute boule $|x| \leqslant \alpha$, vers une limite.

Soit $K^*(x) = \lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0} (R_j * K_\varepsilon)(x)$. Comme $R_j * K_\varepsilon$ est impair, la fonction K^* le sera aussi presque partout, i.e. $K^*(-x) = -K^*(x)$ p. p.

Quitte à chànger K^* sur un ensemble de mesure nulle, on peut supposer que $K^*(-x) = -K^*(x)$ partout.

D'autre part on a : $\forall x,\ \ \forall\lambda > 0\ \ (R_{j,\delta}K_\varepsilon)(\lambda x) = \lambda^{-n}(R_{j,\delta/\lambda}K_{\varepsilon/\delta})(x)$.

Il en résulte que pour λ fixé > 0, on a $K^*(\lambda x) = \lambda^{-n}K^*(x)$ pour presque tout x.

Ici l'ensemble exceptionnel de valeurs de x dépend de λ. Mais K^* est mesurable, de sorte que l'égalité précédente reste valable presque partout en $(\lambda\, ,\, x)$ dans le produit $]0\, ,\, +\infty[\ \times E_n$.

Soit Z l'ensemble négligeable des x tels que l'égalité n'ait pas lieu pour un ensemble de valeurs de λ de mesure strictement positive $Z = \left\{x\ ;\ \left|\left\{\lambda\ ;\ K(\lambda x) \neq \lambda^{-n}K^*(x)\right\}\right| > 0\right\}$.

Soit $\sum_\rho$ une sphère centrée à l'origine et de rayon ρ tel que $\sum_\rho \cap Z$ ait une mesure superficielle nulle (un tel ρ existe d'après le théorème de Fubini). Définissons alors $\tilde{K}$ par :

$$\tilde{K}(x) = \left(\frac{\rho}{|x|}\right)^n K^*\left(\frac{x}{|x|}\,\rho\right) \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad \frac{x}{|x|}\,\rho \notin Z \cap \textstyle\sum_\rho$$

$$\tilde{K}(x) = 0 \qquad\qquad \text{ailleurs.}$$

Il est immédiat que $\tilde{K}$ est mesurable, homogène de degré $(-n)$, impair.

Montrons que $\tilde{K} = K^*$ presque partout. En effet soit $x \neq 0$ tel que $x_0 = \dfrac{x}{|x|}\,\rho \notin Z \cap \sum_\rho$. On exclut ainsi un ensemble de mesure nulle. Alors $\tilde{K}(\lambda x_0) = \lambda^{-n}\,\tilde{K}(x_0) = \lambda^{-n}\,K^*(x_0)$, mais $\lambda^{-n}\,K^*(x_0) = K^*(\lambda x_0)$ pour presque tout λ, comme $Z \cap \sum_\rho$ est de mesure superficielle nulle, il en résulte que $\tilde{K}(x) = K^*(x)$ presque partout.

Lemme 13.- Le noyau $\tilde{K}$ défini au lemme 12 vérifie, pour $q > 1$

$$\int_{\Sigma} |\tilde{K}(x')|\, dx' \leqslant A_q \|\Omega\|_q .$$

De plus, si on pose $\Delta_\varepsilon = R_j K_\varepsilon - (\tilde{K})_\varepsilon$, on a :

$$\Delta_\varepsilon \in L^1, \qquad \|\Delta_\varepsilon\|_1 \leqslant A'_q \|\Omega\|_q .$$

Preuve : Observons d'abord que $\int_{\Sigma} |\tilde{K}(x')|\, dx' = \frac{1}{\operatorname{Log} 2} \int_{1 \leqslant |x| \leqslant 2} |\tilde{K}(x)|\, dx$. Il suffit de remarquer que K est homogène de degré $(-n)$ puis de passer en coordonnées polaires.

D'autre part, par un argument déjà utilisé dans la démonstration du lemme 12, (prendre $\eta = \frac{1}{2}$, et faire tendre ε vers zéro) pour $|x| \geqslant 1$

$$|R_j K_{\frac{1}{2}}(x) - \tilde{K}(x)| \leqslant \frac{A}{|x|^{n+1}} \|\Omega\|_1 \leqslant \frac{B_q}{|x|^{n+1}} \|\Omega\|_q \quad \text{car } \Sigma \text{ est compacte}$$

de sorte que $\int_{1 \leqslant |x| \leqslant 2} |R_j K_{\frac{1}{2}}(x) - \tilde{K}(x)|\, dx \leqslant B'_q \|\Omega\|_q .$

Puis $\int_{1 \leqslant |x| \leqslant 2} |R_j K_{\frac{1}{2}}(x)\, dx| \leqslant B \|R_j K_{\frac{1}{2}}\|_q \leqslant C_q \|K_{\frac{1}{2}}\|_q \leqslant C'_q \|\Omega\|_q$

(la première inégalité est obtenu en utilisant Hölder, la deuxième est vraie car R_j est impair, la dernière s'obtient par passage en coordonnées polaires).

Alors il en résulte immédiatement $(|\tilde{K}(x)| \leqslant |R_j K_{\frac{1}{2}}(x) - \tilde{K}(x)| + |R_j K_{\frac{1}{2}}(x)|)$ que

$$\int_{1 \leqslant |x| \leqslant 2} |\tilde{K}(x)|\, dx \leqslant A_q \|\Omega\|_q .$$

En ce qui concerne Δ_ε, on remarque d'abord que $\frac{1}{\varepsilon^n} \Delta_1(\frac{x}{\varepsilon}) = \Delta_\varepsilon(x)$ et par suite $\int |\Delta_\varepsilon(x)|\, dx = \int |\Delta_1(x)|\, dx$. Il suffit donc de prouver le résultat pour $\varepsilon = 1$

$$\|\Delta_1\|_1 = \int |R_j K_1(x) - (\tilde{K})_1(x)|\, dx \leqslant \int_{|x| \leqslant 2} |(R_j K_1)(x)|\, dx + \int_{1 \leqslant |x| \leqslant 2} |\tilde{K}(x)|\, dx + \int_{|x| \geqslant 2} |\Delta_1(x)| dx$$

soit $\|\Delta_1\|_1 \leqslant I_1 + I_2 + I_3$.

Pour I_1, on a :

$$I_1 \leqslant A \|R_j K_1\|_q \leqslant A'_q \|K_1\|_q \leqslant A''_q \|\Omega\|_q$$

par un argument déjà employé.

Pour I_2, on a :

$$I_2 \leqslant \frac{1}{\operatorname{Log} 2} \int_{\Sigma} |\tilde{K}(x')| dx' \leqslant A_q \|\Omega\|_q .$$

Pour I_3, on a :

$$I_3 = \int_{|x| \geqslant 2} |\tilde{K}(x)|\, dx \leqslant \int_{|x| \geqslant 2} A|x|^{-n-1} \|\Omega\|_1 dx \leqslant A_q \|\Omega\|_q .$$

Les constantes A_q sont évidemment différentes. En regroupant ces résultats on obtient de suite l'inégalité cherchée.

5.3.- Théorèmes.

Rappelons alors le :

Théorème 21.- Soit K pair, $K(x) = \dfrac{\Omega(x')}{|x|^n}$, $\int_{\Sigma} \Omega(x')dx' = 0$ et de plus $\Omega \in L^q(\Sigma)$, $q > 1$.

Posons $\tilde{f}_\varepsilon = f * K_\varepsilon$ où K_ε est le noyau tronqué

$$K_\varepsilon(x) = \begin{cases} K(x) & \text{si } |x| \geqslant \varepsilon \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors i) $\|\tilde{f}_\varepsilon\|_p \leqslant A_{p,q} \|\Omega\|_q \|f\|_p \quad 1 < p < \infty$

ii) il existe $\tilde{f} \in L^p$ t. q. $\|\tilde{f}_\varepsilon - \tilde{f}\|_p \longrightarrow 0$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$

iii) $\|\tilde{f}\|_p \leqslant A_{p,q} \|\Omega\|_q \|f\|_p$.

Preuve : Occupons nous de i), on a :

$$R_j \tilde{f}_\varepsilon = R_j(K_\varepsilon f) = (R_j K_\varepsilon) f = (\tilde{K})_\varepsilon f + \Delta_\varepsilon f$$

de sorte que $\|R_j \tilde{f}_\varepsilon\|_p \leqslant \|(\tilde{K})_\varepsilon f\|_p + \|\Delta_\varepsilon f\|_p$

mais $\tilde{K}$ est impair, donc :

$$\|(\tilde{K})_\varepsilon f\|_p \leqslant A_p . \int_{\Sigma} |\tilde{K}(x')|\, dx' . \|f\|_p \leqslant A'_{p,q} \|\Omega\|_q \|f\|_p$$

puis en utilisant l'inégalité de Young :

$$\|\Delta_\varepsilon f\|_p \leqslant \|\Delta_\varepsilon\|_1 \|f\|_p \leqslant A_q \|\Omega\|_q \|f\|_p$$

enfin $\|K_\varepsilon f\|_p = \|\sum_{j=1}^n R_j^2 K_\varepsilon f\|_p \leqslant A_p \sum_{j=1}^n \|R_j(K_\varepsilon f)\|_p \leqslant A_{p,q} \|f\|_p \|\Omega\|_q$.

Passons au point ii). La démonstration est analogue à celle utilisée pour prouver le théorème de M. Riesz (théorème 10) : décomposer f en une fonction g indéfiniment différentiable et à support compact et une fonction h de norme $\|h\|_p$ petite.

Alors $\tilde{g}_\varepsilon$ tend vers une limite, $\tilde{g}$, en tout point et de plus

$$|\tilde{g}_\varepsilon(x)| \leqslant \frac{N}{1+|x|^n} \qquad \text{et} \qquad \|\tilde{g}_\varepsilon - \tilde{g}\|_p \longrightarrow 0.$$

Enfin le point iii) résulte immédiatement de i) et ii).

5.4.- Extensions.

a) aux noyaux quelconques :

Théorème 22.- Soient $K(x) = \dfrac{\Omega(x')}{|x|^n}$, $\Omega \in L^q(\Sigma)$ $q > 1$, $\displaystyle\int_\Sigma \Omega(x')dx' = 0$

et $f \in L^p$, $1 < p < \infty$.

Alors i) $\|\tilde{f}_\varepsilon\|_p \leqslant A_{p,q} \|f\|_p \|\Omega\|_q$

ii) $\exists \tilde{f} \in L^p$ t. q. $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \|\tilde{f} - \tilde{f}_\varepsilon\|_p = 0$

iii) $\|\tilde{f}\|_p \leqslant A_{p,q} \|f\|_p \|\Omega\|_q$.

Preuve : il suffit de décomposer K en sa partie paire et sa partie impaire, puis d'appliquer chacun des théorèmes concernant ces cas particuliers.

b) aux noyaux "variables" :

Pour terminer ce chapitre, nous allons énoncer un théorème concernant les noyaux dits "variables", sans en donner de démonstration.

Théorème 23.- Soient $x \in E_n$, $z \in E_n$ et $K_x(z) = \dfrac{\Omega_x(z)}{|z|^n}$

avec $\displaystyle\int_\Sigma \Omega_x(z')dz' = 0$

Considérons $\Omega_*(z') = \displaystyle\sup_{x \in E_n} |\Omega_x(z')|$ et supposons $\Omega_* \in L^q(\Sigma)$

soit enfin q' le conjugué de q, $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$.

On pose $\tilde{f}_\varepsilon(x) = \displaystyle\int_{|y| \geqslant \varepsilon} f(x-y)K_x(y)dy$.

Alors si $f \in L^p$, $p > q'$, on a :

i) $\leqslant A_{p,q} \|f\|_p \|\Omega_*\|_q$

ii) $\exists \tilde{f} \in L^p$ t. q. $\|\tilde{f} - \tilde{f}_\varepsilon\|_p \longrightarrow 0$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$

iii) $\|\tilde{f}\|_p \leqslant A_{p,q} \|f\|_p \|\Omega^*\|_q$.

Chapitre VI

Opérateurs singuliers et équations aux dérivées partielles

6.1.- Algèbre des opérateurs singuliers généralisés.

a) Jusqu'ici on n'a considéré que les opérateurs du type : $K : f \rightsquigarrow K * f$ où K est singulier ; mais dans le cas général on est amené à étudier les opérateurs $K :$ $f \rightsquigarrow \mu f + H * f$ où H est singulier. On dit alors que K est un opérateur singulier généralisé. On notera $\sigma K = \mu + \hat{H}$ le symbole de K, alors

$$\widehat{Kf} = (\mu + \hat{H})\hat{f} = \sigma K \circ \hat{f} .$$

Considérons pour $n = 2$ H tel que $\hat{H} \in \mathcal{C}^2(\sum)$, $\hat{H} \neq 0$, $\hat{H}$ homogène de degré zéro, on a alors $\frac{1}{\hat{H}} \in \mathcal{C}^2(\sum)$ et $\frac{1}{\hat{H}}$ est homogène de degré zéro. Soit $\mu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\hat{H}(e^{i\theta})}$.

Considérons $\hat{G} = \frac{1}{\hat{H}} - \mu$; alors $\hat{G}$ est homogène de degré zéro, $\hat{G} \in \mathcal{C}^2(\sum)$ et $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \hat{G}\, d\theta = 0$; d'après le théorème 16 $\hat{G}$ est le symbole d'un opérateur singulier.

Par suite si $\tilde{f} = Hf$ on a $f = \mu\tilde{f} + G\tilde{f}$; en effet :

$$\tilde{f} = Hf \Longrightarrow \hat{\tilde{f}} = \widehat{Hf} \Longrightarrow \hat{f} = \frac{1}{\hat{H}}\hat{\tilde{f}} = (\mu + \hat{G})\hat{\tilde{f}} \Longrightarrow f = \mu\tilde{f} + G\tilde{f} .$$

b) Toujours pour $n = 2$. Soient H_1 et H_2 deux noyaux singuliers, $\hat{H}_i \in \mathcal{C}^2(\sum)$ pour $i = 1$ et 2 et considérons $H = H_1 H_2$. On a :

$$Hf = H_1(H_2 f) \Longrightarrow \widehat{Hf} = \hat{H}_1 \circ \widehat{(H_2 f)} = \hat{H}_1 \circ \hat{H}_2 \cdot \hat{f} = (\mu + \hat{G})\hat{f} \quad \text{où} \quad \mu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \hat{H}_1 \hat{H}_2\, d\theta .$$

Donc, en général, le produit de deux noyaux singuliers est un noyau singulier généralisé.

Plus généralement, soient $K_i = \mu_i + H_i$ $i = 1, 2$ alors

$$K_1 K_2 f = \mu f + Hf = K_2 K_1 f.$$

On a donc le résultat suivant :

<u>Théorème</u> 24.- Les opérateurs singuliers généralisés forment une algèbre commutative ; de plus si σK ne s'annule pas K est inversible dans l'algèbre.

c) Pour le cas où $n > 2$ les résultats précédents subsistent mais on ne connait pas les "meilleures" conditions à imposer aux noyaux. Cependant on peut donner le résultat suivant :

Théorème 25.– Si H est homogène de degré $(-n)$, $H \in \mathcal{C}^{\infty}(E_n \setminus \{0\})$, $\int_{\Sigma} H(x')dx' = 0$ alors $\hat{H}$ est homogène de degré zéro, $\hat{H} \in \mathcal{C}^{\infty}(E_n \setminus \{0\})$ et $\int_{\Sigma} \hat{H}(u')du' = 0$.

Réciproquement si $L \in \mathcal{C}^{\infty}(E_n \setminus \{0\})$ est homogène de degré zéro avec $\int_{\Sigma} L(x')dx' = 0$ alors $L = \hat{H}$ où H satisfait les conditions du théorème.

6.2.– Applications aux équations aux dérivées partielles.

a) Notations et rappels.

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ avec $\alpha_j \in N$; $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$ et $\alpha! = \alpha_1!\, \alpha_2! \ldots \alpha_n!$

pour $x \in E_n$ on note $x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} . x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

$$D^{\alpha} f \text{ désigne } \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\, \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} . \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} f .$$

A tout polynôme en n variables $P(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant n} a_{\alpha} x^{\alpha}$ on associe le polynôme de dérivation:

$P(D) = \sum_{|\alpha| \leqslant n} a_{\alpha} D^{\alpha}$.

Soit $f \in \mathcal{C}^{\infty}$ telle que $\forall \alpha \in N^n$ et $\forall k \in N$ on ait $(D^{\alpha} f)(x) = O(|x|^{-k})$ si $|x| \longrightarrow \infty$ on pose $\hat{f}(x) = (\mathcal{F} f)(x) = \int e^{-2\pi i(x,y)} f(y)dy$, alors

$\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^{\wedge}(x) = 2\pi i\, x_j\, \hat{f}(x)$ donc $(P(D)f)^{\wedge}(x) = P(2\pi i x).\hat{f}(x)$.

Par exemple si $P(x) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = |x|^2$ on a $P(D)f = \Delta f$ et $(\Delta f)^{\wedge}(x) = -4\pi^2 |x|^2 . \hat{f}(x)$. Si φ est "arbitraire" on définit $\varphi(D)$ par $(\varphi(D)f)^{\wedge} = \varphi(2\pi i x).\hat{f}$. Alors si on prend $\varphi : x \rightsquigarrow |x|$ on peut définir $|D| = \Lambda$.

On a ainsi $\widehat{\Lambda f} = 2\pi\, |x|\, \hat{f}$

puis $\widehat{\Lambda^m f} = (2\pi|x|)^m \hat{f}$ en particulier $\Lambda^2 = -\Delta$ et $\Lambda = (-\Delta)^{\frac{1}{2}}$.

De même

$$\left(\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f\right)^\wedge = (2\pi i x)^\alpha \hat{f} = \left(\frac{x}{|x|}\right)^\alpha . i^{|\alpha|} . (2\pi|x|)^{|\alpha|} \hat{f} = i^{|\alpha|} . \left(\frac{x}{|x|}\right)^\alpha . (\Lambda^{|\alpha|} f)^\wedge$$

mais comme $\left(\frac{x}{|x|}\right)^\alpha \in \mathcal{C}^\infty(E_n \setminus \{0\})$ et est homogène de degré zéro,

on a $\left(\frac{x}{|x|}\right)^\alpha = \sigma K_\alpha$ où K_α est un opérateur singulier généralisé

$$\text{donc } \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f = i^{|\alpha|} K_\alpha \Lambda^{|\alpha|} f .$$

b) Applications.

On se propose de trouver f telle que $P(D)f = g$ où g est donnée et P un polynôme homogène : $P(D) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha D^\alpha$.

On a $P(D) = i^m K \Lambda^m$ où $K = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha K_\alpha$ est singulier généralisé et

$$\sigma K = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha \sigma K_\alpha = \frac{P(x)}{|x|^m}$$

c'est par définition le polynôme caractéristique de l'opérateur $P(D)$.

Supposons P à coefficients constants. Si $P(x) \neq 0$ $\forall x$ alors $P(D)$ est dit elliptique ; m doit être pair et on a $\Lambda^m f = (-\Delta)^{m/2} f$.

L'équation aux dérivées partielles devient

$$K \Delta^k f = g \quad (k = m/2)$$

et comme $(P(x) \neq 0, \ \forall x) \Longrightarrow (K_{-1}$ existe$)$ on a $\Delta^k f = K_{-1} g = h$.

Supposons maintenant P à coefficients variables

$$P(D) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha (x) \, P(D).$$

On a $D^\alpha = i^m K \Lambda^m$ où K_α se met sous la forme $\mu_\alpha + H_\alpha$; alors

$$P(D)f = i^m \left[\sum_{|\alpha| = m} \left\{ a_\alpha(x) . \mu_\alpha + a_\alpha(x) . H_\alpha \right\} \right] \Lambda^m f .$$

Désignons $\Lambda^m f$ par φ, il vient

$$P(D) = f = A(x) . \varphi(x) + \int K(x, x-y) \, \varphi(y) dy$$

$$\text{où} \quad K(x, z) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) \, H_\alpha(z).$$

Chapitre VII

Quelques problèmes ouverts

7.1.-

Soit Γ une courbe fermée rectifiable simple et soit $f(\zeta)$ définie sur Γ.

On considère l'intégrale $\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{z-\zeta}$, $z\in\Gamma$.

On peut la définir comme valeur principale :

$$V.P. \int_\Gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{z-\zeta} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma\setminus A_\varepsilon}$$

A_ε étant un ε-entourage de z, un arc de Γ : A peut être l'arc de Γ centré en z et de longueur 2ε mais A_ε peut aussi être la portion de Γ comprise dans un cercle centré en z et de rayon ε. En presque tout point z de Γ les deux considérations sont les mêmes.

Si Γ est un cercle ou une droite on se trouve dans une situation connue.

Si $f\in L$, la limite existe presque partout.

La transformation $f \rightsquigarrow V.P.\int$ préserve certaines classes.

Supposons $z\in I(\Gamma)$, $I(\Gamma)$ étant la région intérieure à la courbe. La fonction $F(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{z-\zeta}$ est alors analytique (Privaloff). En presque tout point de Γ l'existence de F équivaut à l'existence d'une limite non tangentielle et on a

$$\text{pp.} \lim_{z\to\zeta_0} \left[2\pi i\, F(z)\right] = V.P.\int_\Gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta_0-\zeta}, \quad \zeta_0\in\Gamma.$$

Le problème général se réduit au cas où la tangente varie continûment $(\Gamma\in\mathcal{C}^1)$ et f est continue.

Si $\Gamma\in\mathcal{C}^{1+\varepsilon}$ (i.e. l'angle de la tangente satisfait à une condition de Lip.) le problème est résolu.

Dans le cas de plusieurs variables le problème est différent ; on est amené à étudier une convolution sphérique. La difficulté provient du fait qu'il n'existe pas de champ de vecteurs continu sur la sphère.

7.2.- (Calderon)

Soit $a(t) \in \Lambda_1$ (On a donc $\left|\frac{a(t) - a(x)}{t-x}\right| \leqslant c$).

On considère l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a(t) - a(x)}{(t-x)^2} f(t)dt$.

L'intégrale existe-t-elle (pour chaque x ou pour presque tout x).

Si oui, quelles sont ses propriétés ?

Peut-on définir cette intégrale comme opérateur ? Si oui quelles sont les propriétés (de classes de fonctions) préservées par cette opération ?

Le cas général peut se réduire au cas où $a(t) \in \mathcal{C}^1$ et f continue à support compact.

7.3.- <u>Intégrale ultrasingulière</u>.

On considère l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{x-t} dt$. Par différentiation formelle on obtient $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^{k+1}}$.

Etudier l'existence et les propriétés de ces nouvelles intégrales.

Si $k = 1$ on posera par définition $I(f) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2}dt = \int_{0}^{\infty} \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t^2}dt$

Si $f \in L$, la difficulté réside au point $t = 0$.

Etudier les conditions nécessaires et les conditions suffisantes d'existence de $I(f)$ dans un ensemble.

On voit que si f est dérivable $I(f)$ existe p.p. et si f est absolument continue on intègre par partie et on retrouve l'intégrale de Hilbert.

<u>Définition</u> (Péano). dérivée d'ordre k.

Si $f(x+t) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \frac{\alpha_j}{j!} t^j + \theta(t^k) = T_k(t) + \theta(t^k)$

alors $F(x) = \displaystyle\int^x f$ possède une dérivée d'ordre $k+1$.

Théorème.- $I(f)$ existe p.p. dans un ensemble E si et seulement si $F = \int^x f$ possède p.p. dans E une dérivée seconde de Péano.

Cas général. On posera par définition :

$$I_k(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^{k+1}} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-t)}{t^{k+1}} dt = \text{V.P.} \int \frac{f(x-t)-T_{k-1}(t)}{t^{k+1}} dt.$$

Théorème.- $I_k(f)$ existe p.p. dans E si et seulement si $F = \int^x f$ possède p.p. dans E une dérivée d'ordre k de Péano (Weiss et Zygmund, Fundamenta Math. 1960).

Soit $K(t) = \dfrac{\Omega(t)}{|t|^{n+k}}$. L'étude de $\int f(x-t)K(t)dt$ est plus difficile.

La méthode pour $n = 1$ ne s'applique plus si $n > 1$ (car on utilise pour $n = 1$, les variables complexes).

Lorsque $k = 1$ on considère $\Lambda f = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|t| \geqslant \varepsilon} \dfrac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{|t|^{n+1}} dt$.

Quelles sont les propriétés de Λ ? A-t-on une représentation ponctuelle de Λf ?

Trouver des conditions sur f dans un ensemble E pour que $\Lambda f(x)$ existe p.p. dans E.

7.4.- Cas de "noyau variable".

On pose $K(x, z) = \dfrac{\Omega_x(z')}{|z|^n}$ $\left(z' = \dfrac{z}{|z|}\right)$ et on suppose $\int_{\Sigma} \Omega_x(z')dz' = 0$.

si

On cherche la limite suivante existe :

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_{|x-y| \geqslant \varepsilon} f(y)\, K(x, x-y)dy \qquad (f \in L^p)$$

Si $p > 1$ et Ω impair en z on peut utiliser la méthode des rotations.

Si $p > 1$ et Ω pair en z le problème présente plus de difficultés.

Si $p = 1$ le problème reste ouvert (on peut, peut-être utiliser la méthode indiquée dans Acta Mathematica 1952 par Calderon et Zygmund).

On introduit en particulier $\Omega_*(z') = \sup_x |\Omega_x(z')|$

et on suppose $\Omega_* \in L^q$, $q > 1$, $p > q'$ $(\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1)$.

7.5.- On revient à $\tilde{f} = f * K$ où $K(x) = \dfrac{\Omega(x')}{|x|^n}$.

Si $f \in L$ on sait que $\tilde{f}$ existe p.p. si $\Omega \in \Lambda_\alpha$ $(\alpha > 0)$ ou même (Dini) si $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\omega(\delta)}{\delta}\, d\delta < \infty$ où ω est le module de continuité de Ω.

A-t-on de meilleures conditions d'existence ?

Bibliographie

A. Monographies

1.- CALDERON (A. P.) (en espagnol).- Integrales singulares.- Universidad de Buenos Aires, 1960.

2. MIKLIN (en russe).- Intégrales singulières dans l'espace à plusieurs dimensions. 1961.

3.- ZYGMUND (A.).- On singular integrals.- Rendiconti Matematica, Rome, 1957.

B.

1.- BESICOVITCH.- Sur la nature des fonctions à carré sommable et des ensembles mesurables.- Fundamenta Mathematicae, IV, 1924.

2.- MARCINKIEVICZ.- Sur la sommabilité forte des séries de Fourier.- J. London Math. Soc., 14, 3, 1939, pp. 162-168

3.- LOOMIS (L. H.).- A note on the Hilbert transform.- Bull. Amer. Math. Soc., 52, 1946, pp. 1082-1086.

4.- O'NEIL & WEISS.- The Hilbert Transform and rearrangement of functions.- Studia Math., XXIII, 2, 1963.

5.- CALDERON & ZYGMUND.- On the existence of certain singular integrals.- Acta Math. 88, 1952, pp. 85-139.

6.- CALDERON & ZYGMUND.- On singular integrals.- Amer. J. Math., 78, 1956, pp. 289-309.