UNIVERSITÉ PARIS XI

U.E.R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

n^{o} 97

Propriétés asymptotiques
des vibrations du tore

Marc Frisch

Analyse Harmonique d'Orsay

1974

n° 97

Propriétés asymptotiques des vibrations du tore

Marc Frisch

Analyse Harmonique d'Orsay
1974

PROPRIETES ASYMPTOTIQUES DES VIBRATIONS DU TORE

Marc Frisch

0. INTRODUCTION.

On considère une solution $f(x,t) : \mathbf{T}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de l'équation des ondes $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ sur le tore $\mathbf{T}^n$ à n dimensions. On verra que même si ses conditions initiales sont deux fois continûment dérivables, une telle solution n'est pas nécessairement bornée (du moins en dimension assez grande : $n \geq 5$). Le problème est alors de trouver des hypothèses de régularité permettant le contrôle de la croissance asymptotique d'une solution quand $t \to \infty$.

Ainsi, posant :

$$u_o(x) = f(x,0)$$

$$u_1(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x,0)$$

on cherche s'il existe un entier k et une fonction $\omega(t)$, tels que pour toute fonction f, tout réel t et tout x de $\mathbf{T}^n$, on ait :

$$|f(x,t)| \leq |\omega(t)| (\|u_o\|_{C^k(\mathbf{T}^n)} + \|u_1\|_{C^{k-1}(\mathbf{T}^n)})$$

On montrera que si $k > \frac{n-1}{2}$, une telle majoration est possible. Au contraire, si $k < \frac{n-1}{2}$, non seulement elle ne l'est pas, mais encore pour aucun réel $\ell > 0$ ni aucune fonction $\omega(t)$, il n'existe de majoration du type suivant :

$$|f(x,t)| \leq |\omega(t)|.\|f\|_{C^k(\mathbf{T}^n \times [-\ell,\ell])}\,.$$

C'est dire que si $k < \frac{n-1}{2}$, une hypothèse de régularité consistant en la donnée de la norme C^k de la restriction de la fonction à un intervalle fini de temps ne suffit pas non plus à permettre le contrôle de la croissance asymptotique.

L'indice $\frac{n-1}{2}$ sera alors dit critique et l'utilisation des espaces de Lipschitz (Hölder) $\Lambda_\alpha(\mathbf{T}^n \times [-\ell,\ell])$ définis pour tout réel $\alpha > 0$ aura le triple avantage suivant :

i) cela permettra de cerner l'indice critique $\frac{n-1}{2}$

ii) les espaces de Lipschitz constituent un cadre naturel pour les énoncés concernant les opérateurs de dérivation ou d'intégration fractionnaires, et nous serons amenés à utiliser ceux-ci.

iii) enfin et surtout, dans le cas de la dimension $n = 2$, l'indice critique étant $\frac{1}{2}$, l'usage de la condition initiale u_1 n'est bien sûr pas adapté et ce sont les espaces $\Lambda_\alpha(\mathbf{T}^2 \times [-\ell,\ell])$ qui permettront de rendre compte de l'existence de cet indice critique.

Disons pour finir que le point de départ de ce travail est l'étude pour le tore des problèmes correspondant à ceux traités pour la sphère par Yves Meyer ([4] et [5]). Les points antipodiques y jouaient un rôle essentiel. Ici, au contraire, c'est l'inexistence de points conjugués au sens de la structure riemannienne qui explique la pathologie du comportement des solutions.

1. DEFINITIONS ET RAPPELS.

a) Laplacien sur $\mathbf{T}^n$.

Choisissons dans $\mathbf{R}^n$ un réseau maximal Γ ainsi qu'une forme quadratique définie positive de matrice (a_{ij}) dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$. Notons $|x|$ et

(x,y) la norme et le produit scalaire associés, notons Γ^* le réseau dual de Γ formé des points $m \in \mathbb{R}^n$ tels que, pour tout $m' \in \Gamma$, $(m,m') \equiv 0\ [2\pi]$. Soit alors $\mathbf{T}^n = \mathbb{R}^n/\Gamma$ le tore à n dimensions sur lequel un laplacien est défini de la manière suivante : on prend pour laplacien sur $\mathbb{R}^n$ l'opérateur différentiel $\Delta = \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$. A une fonction $f : \mathbf{T}^n \to \mathbb{C}$ correspond une fonction $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ périodique par rapport au réseau Γ, et réciproquement. Le laplacien $\tilde{\Delta}$ sur $\mathbf{T}^n$ est alors défini par $(\tilde{\Delta} f)^\sim = \Delta \tilde{f}$. Dans la suite on ne distinguera pas Δ et $\tilde{\Delta}$, f et $\tilde{f}$.

b) Espaces de Lipschitz (Hölder).

Si $0 < \alpha < 1$, on appelle $\Lambda_\alpha(\mathbf{T}^n \times [-\ell,\ell])$ l'espace des fonctions $f : \mathbf{T}^n \times [-\ell,\ell] \to \mathbb{C}$ vérifiant l'inégalité $|f(x) - f(x')| \leq C(d(x,x'))^\alpha$ pour une certaine constante C ne dépendant que de f, $d(x,x')$ désignant la distance canonique sur $\mathbf{T}^n \times [-\ell,\ell]$ identifié localement à $\mathbb{R}^n$.

Si $\alpha > 1$ et si on pose $\alpha = k + \beta$ où k est un entier et $0 < \beta \leq 1$, on a $f \in \Lambda_\alpha(\mathbf{T}^n \times [-\ell,\ell])$ si et seulement si toutes ses dérivées d'ordre k appartiennent à $\Lambda_\beta(\mathbf{T}^n \times [-\ell,\ell])$.

Convention. On note $\|f\|_{\alpha,\ell}$ la norme usuelle sur cet espace et $\|u\|_\alpha$ la norme d'une fonction $u : \mathbf{T}^n \to \mathbb{C}$ dans l'espace $\Lambda_\alpha(\mathbf{T}^n)$.

c) Solutions de l'équation des ondes.

Toute fonction continue, solution au sens des distritutions de l'équation des ondes $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ sur $\mathbf{T}^n$, admet une série de Fourier du type suivant :

$$f(x,t) \sim c + dt + \sum a_m e^{i(m,x)} e^{i|m|t} + \sum b_m e^{i(m,x)} e^{-i|m|t} .$$

Les sommes $\sum$ étant étendues à Γ^* privé de l'origine. Dans la suite cette convention restera valable pour tous les symboles $\sum$ sans indice de sommation. Il est bien connu que si $f \in C^{\infty}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R})$ les suites a_m et b_m sont à décroissance rapide sur Γ^* et que la série converge absolument vers f.

DEFINITION. Nous appellerons vibration une solution continue dont la série de Fourier vérifie $c = d = 0$.

2. RESULTATS POSITIFS.

Nous appelons ainsi les résultats qui établissent l'existence de majorations asymptotiques. Signalons tout de suite que le cas de la dimension $n = 1$ est ici sans objet (une vibration sur $\mathbb{T}$ est périodique donc bornée).

A. Cas où $n \geq 3$.

Les résultats s'énoncent à l'aide des seules conditions initiales :

THEOREME 1. Soit un entier $n \geq 3$, soit $\alpha > 0$, $\alpha \neq \frac{1}{2}$. Il existe alors une constante C telle que, pour toute vibration f sur $\mathbb{T}^n$, tout $x \in \mathbb{T}^n$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on ait :

$$|f(x,t)| \leq C(1+|t|)^{(n-1)(\frac{1}{2}-\alpha)}(\|u_o\|_{\frac{n-1}{2}+\alpha} + \|u_1\|_{\frac{n-3}{2}+\alpha} \tag{2.1}$$

où l'on a posé $u_o(x) = f(x,0)$ et $u_1(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x,0)$.

Si $\alpha = \frac{1}{2}$, l'inégalité (2.1) est remplacée par :

$$|f(x,t)| \leq C \log(2+|t|)(\|u_o\|_{\frac{n}{2}} + \|u_1\|_{\frac{n-2}{2}} . \tag{2.2}$$

Remarque. Si $\alpha > \frac{1}{2}$, le théorème montre que la vibration est bornée. D'ailleurs on a $\frac{n-1}{2} + \alpha > \frac{n}{2}$, et c'est un cas bien connu où la série de Fourier converge absolument.

Pour le cas $\alpha = 0$, n impair, précisons qu'il est facile d'obtenir la majoration suivante :

PROPOSITION 1. <u>Soit un entier impair</u> $n \geq 3$. <u>Il existe alors une constante</u> C <u>telle que pour toute vibration</u> f <u>sur</u> T^n, <u>tout</u> x <u>et tout</u> t, <u>on ait</u> :

$$(2.3) \qquad |f(x,t)| \leq C(1+|t|)^{\frac{n-1}{2}} \left(\|u_o\|_{C^{\frac{n-1}{2}}} + \|u_1\|_{C^{\frac{n-3}{2}}}\right).$$

<u>De plus le poids</u> $(1+|t|)^{\frac{n-1}{2}}$ <u>est le meilleur possible, en ce sens qu'il n'est pas possible de le remplacer par une fonction</u> $\omega(t) = o(1+|t|)^{\frac{n-1}{2}}$.

Par contre, si n est pair, aucune majoration correspondant au cas $\alpha = 0$ n'est possible :

PROPOSITION 2. <u>Soit un entier pair</u> $n \neq 2$. <u>Il n'existe aucune fonction</u> $\omega(t)$ <u>telle que, pour toute vibration</u> f <u>sur</u> T^n, <u>tout</u> x <u>et tout</u> t, <u>on ait</u> :

$$(2.4) \qquad |f(x,t)| \leq |\omega(t)| \left(\|u_o\|_{\frac{n-1}{2}} + \|u_1\|_{\frac{n-3}{2}}\right).$$

Venons-en aux démonstrations. Pour simplifier quelque peu notations et calculs, on se contentera, dans toute la suite, de prendre pour Γ le réseau des points à coordonnées multiples entiers de 2π dans R^n muni de sa base canonique et pour laplacien $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

a) Démonstration du théorème 1.

LEMME 1. [2]. <u>Soit</u> K <u>le compact de</u> R^n <u>défini par</u> $1 \leq |x| \leq 4$. <u>Désignons</u>

par $\|e^{it|x|}\|_{A(K)}$ *la borne inférieure des normes de mesures de radon bornées* μ *telles que pour tout* x *de* K *on ait* $\hat{\mu}(x) = e^{it|x|}$ *Alors, il existe deux constantes* C_1 *et* C_2 *telles que*

$$(2.5) \qquad C_1(1+|t|)^{\frac{n-1}{2}} \leq \|e^{it|x|}\|_{A(K)} \leq C_2(1+|t|)^{\frac{n-1}{2}}$$

REMARQUE. Le hessien de la fonction $x \to |x|$ est de rang $n-1$ sur le compact K. Plus généralement, si $f \in C^{\infty}(K)$ est une fonction à valeurs réelles dont le hessien est de rang k, on a :

$$C_1(1+|t|)^{k/2} \leq \|e^{itf}\|_{A(K)} \leq C_2(1+|t|)^{k/2}$$

pourvu que l'hypersurface $z = f(x)$ de $\mathbf{R}^{n+1}$ soit localement développable et admette une représentation locale par une famille à k paramètres de variétés affines de dimension $n-k$ le long desquelles l'hyperplan tangent ne varie pas [2].

Pour appliquer le lemme 1, nous aurons besoin du lemme suivant, donnant un découpage classique d'une série de Fourier en blocs dyadiques :

LEMME 2. *Il existe une suite* Δ_j *de polynômes trigonométriques définis sur* $\mathbf{T}^n$ *telle que* :

i) *les fréquences* m *du polynôme* Δ_j *vérifient* $2^j \leq |m| \leq 4.2^j$

ii) *si* $u \in \Lambda_\alpha(\mathbf{T}^n)$ *et si on pose* $v_j = u * \Delta_j$

a) *il existe une constante* C *indépendante de* f *et* j *avec*

$$(2.6) \qquad \sup_{x\in\mathbf{T}^n} |v_j(x)| \leq C\, 2^{-\alpha j}\|u\|_\alpha$$

$$(2.7) \quad b) \quad \forall x \in \mathbf{T}^n \qquad u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} v_j(x).$$

On peut construire la suite Δ_j de la manière suivante. Introduisons le noyau de la Vallée-Poussin sur le tore $\mathbb{T}$:

$$v_j(t) = 2\,K_{2^{j+1}}(t) - K_{2^j}(t) \qquad \text{pour} \quad j\in\mathbb{N}, \quad t\in\mathbb{T}$$

où $K_j(t) = \sum_{n=j}^{j} (1 - \frac{|n|}{j+1})\, e^{int}$ est le noyau de Féjer. On pose enfin

$\Delta_j(t_1, \ldots, t_n) = (\prod_{i=1}^{n} (v_{j+1}(t_i)) - \prod_{i=1}^{n} (v_{j+1}(t_i)))$, cela si $j \geq 1$ et

$\Delta_o(t_1, \ldots, t_n) = \prod_{i=1}^{n} v_1(t_i)$.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 1. Supposons d'abord que f soit une vibration de conditions initiales $u_o \in \Lambda_{\frac{n-1}{2}+\alpha}$ et $u_1 = 0$. On verra que cela ne restreint guère la généralité du calcul. Soit $\sum a_m e^{i(m,x)}$ la série de Fourier de u_o. Celle de f s'écrit alors :

$$f \sim \sum a_n \cos(|m|t)\, e^{i(m,x)}.$$

Appliquant le lemme 1, on peut trouver une famille (μ^t) $(t\in\mathbb{R})$ de mesures de Radon sur $\mathbb{R}^n$ avec :

i) $(\mu^t)^\wedge(x) = e^{it|x|}$ pour $1 \leq |x| \leq 4$

ii) $\|\mu^t\| \leq 2\,C_2(1+|t|)^{\frac{n-1}{2}}$.

Soit μ_j^t la mesure définie par $(\mu_j^t)^1(x) = (\mu^{2^j t})(2^{-j}x)$. On a alors :

(2.8) i) $(\mu_j^t)^\wedge(x) = e^{it|x|}$ pour $2^j \leq |x| \leq 4.2^j$

(2.9) ii) $\|\mu_j^t\| \leq 2\,C_2(1+2^j|t|)^{\frac{n-1}{2}}$.

Posons $v_j = u_o * \Delta_j$ et combinons les majorations (2.6) et (2.9) :

$$|(v_j * \mu_j^t)(x)| \leq C\,2^{-j(\frac{n-1}{2}+\alpha)}(1+2^j t)^{\frac{n-1}{2}}\, \|u_o\|_{\frac{n-1}{2}+\alpha}$$

soit encore

$$(2.10) \qquad |(v_j * \mu_j^t)(x)| \leq C\,2^{-\alpha j}\,(1+|t|)^{\frac{n-1}{2}}\, \|u_o\|_{\frac{n-1}{2}+\alpha}.$$

On peut alors poser $g(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty}(v_j * \mu_j^t)(x)$. En vertu de (2.8), la série de Fourier de g est alors $\sum a_m e^{i(m,x)} e^{i|m|t}$ et par suite :

$$f(x,t) = \frac{g(x,t) + g(x,-t)}{2}.$$

Par ailleurs $v_j * \mu_j^t$ est un polynôme trigonométrique qui peut s'écrire sous la forme $\sum_{m\in\Lambda_j} b_n e^{i(m,x)} e^{i|m|t}$ avec $\mathrm{card}(\Lambda_j) \leq 4^n.2^{nj}$. Donc d'après l'inégalité de Schwarz :

$$(v_j * \mu_j^t)(x)| \leq \sqrt{4^n.2^{nj}} \sqrt{\sum_{\Lambda_j} |b_m|^2} = 2^n.2^{j\frac{n}{2}}\|v_j\|_{L^2} \leq 2^n.2^{j\frac{n}{2}} \sup|v_j|$$

soit encore d'après (2.6) :

$$\text{(2.11)} \qquad |(v_j * \mu_j^t)(x)| \leq C\, 2^n\, 2^{(\frac{1}{2}-\alpha)j} \|u_o\|_{\frac{n-1}{2}+\alpha}$$

Combinant alors les majorations (2.10) et (2.11), on obtient pour tout entier k :

$$|f(x,t)| \leq C\Big(\sum_{j=0}^{k} 2^n\, 2^{(\frac{1}{2}-\alpha)j} + \sum_{j=k+1}^{\infty} 2^{-\alpha j}(1+|t|)^{\frac{n-1}{2}}\Big)\|u_o\|_{\frac{n-1}{2}+\alpha}$$

et donc si $\alpha \neq \frac{1}{2}$:

$$\text{(2.12)} \qquad |f(x,t)| \leq C\Big(2^n \frac{2^{(\frac{1}{2}-\alpha)(k+1)} - 1}{2^{\frac{1}{2}-\alpha} - 1} + \frac{2^{-\alpha(k+1)}}{1 - 2^{-\alpha}}(1+|t|)^{\frac{n-1}{2}}\Big)\|u_o\|_{\frac{n-1}{2}+\alpha}$$

On minimise cette somme en prenant pour valeur de k la partie entière du réel ℓ défini par $2^{\ell/2} = (1+|t|)^{\frac{n-1}{2}}$, d'où finalement :

$$\text{(2.13)} \qquad |f(x,t)| \leq C(1+|t|)^{(n-1)(\frac{1}{2}-\alpha)}\|u_o\|_{\frac{n-1}{2}+\alpha}$$

Si $\alpha = \frac{1}{2}$, on remplace la majoration (2.12) par :

$$|f(x,t)| \leq C\Big(2^n(k+1) + \frac{2^{-\frac{k+1}{2}}}{1 - 2^{-1/2}}(1+|t|)^{\frac{n-1}{2}}\Big)\|u_o\|_{\frac{n}{2}}$$

ce qui donne, avec le même choix de k que précédemment :

$$|f(x,t)| \leq C \operatorname{Log}(1+|t|)\|u_o\|_{\frac{n}{2}} .$$

Ceci achève la démonstration du théorème 1 dans le cas $u_1 = 0$. Il suffit maintenant d'examiner le cas où $u_o = 0$, $u_1 \in \Lambda_{\frac{n-3}{2}+\alpha}$. Mais dans ce cas, la série de Fourier de f s'écrit :

$$f \sim \sum a_m e^{i(m,x)} \sin(|m|t)$$

à condition de noter celle de u_1 sous la forme $\sum |m| a_m e^{i(m,x)}$. On est ramené au cas précédent, car on sait alors que $\sum a_m e^{i(m,x)}$ est la série de Fourier d'une fonction de $\Lambda_{\frac{n-1}{2}+\alpha}(\mathbf{T}^n)$, du moins si $\frac{n-1}{2}+\alpha$ n'est pas un entier (le théorème 3, que l'on verra plus loin, donne une généralisation de ce résultat classique). Dans le cas particulier où $\frac{n-1}{2}+\alpha$ est un entier, il n'est pas vrai en général que $h(x) = \sum a_m e^{i(m,x)}$ soit la série de Fourier d'une fonction de $\Lambda_{\frac{n-1}{2}+\alpha}$. Mais on a encore, en posant $v_j = h * \Delta_j$:

$$|v_j(x)| \leq C\, 2^{-(\frac{n-1}{2}+\alpha)j} \|u_1\|_{\frac{n-3}{2}+\alpha} .$$

Cela résulte de l'inégalité suivante, de démonstration laissée au lecteur :

$$\Big|\sum_{2^j \leq |m| \leq 2^{j+2}} a_m e^{i(m,x)}\Big| \leq C\, 2^{-j} \sup_{x \in \mathbf{T}^n} \Big|\sum_{2^j \leq |m| \leq 2^{j+2}} |m|\, a_m e^{i(m,x)}\Big|$$

on est là encore ramené aux calculs de la démonstration du cas $u_1 = 0$.

b) Démonstration de la proposition 1.

Nous allons écrire la solution f sous forme d'intégrale portant sur les conditions initiales. La majoration (2.3) résultera alors de calculs faciles que nous ne ferons qu'esquisser.

Soit donc $f(x,t)$ une vibration sur $\mathbf{T}^n$, $n \geq 3$ impair, de conditions initiales

$u_o \in C^{\frac{n-1}{2}}(\mathbb{T}^n)$ et $u_1 \in C^{\frac{n-3}{2}}(\mathbb{T}^n)$. Posons :

$$Q_i(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} u_i(x+\beta t)\, d\mu(\beta) \qquad \text{pour} \quad i = 0 \quad \text{et} \quad 1$$

où μ désigne la mesure uniforme de masse totale 1 sur la sphère $|\beta|^2 = 1$ de $\mathbb{R}^n$.

Posons également $\frac{\partial}{\partial t^2} = \frac{1}{2t}\frac{\partial}{\partial t}$. On a alors :

$$(2.11) \qquad f(x,t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(\frac{n}{2})}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{\frac{n-3}{2}}(t^{n-2}\,Q_1(x,t)) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{\frac{n-3}{2}}(t^{n-2}\,Q_o(x,t))\right)\right]$$

En effet, le même calcul que sur $\mathbb{R}^n$ ([1] ch. 6 § 12) montre que le membre de droite est une vibration sur $\mathbb{T}^n$ qui a mêmes conditions initiales que f. Or, d'après la formule de Leibniz, on peut trouver des réels a_k ne dépendant que de n, tels que :

$$(2.12) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{\frac{n-3}{2}}(t^{n-2}\,Q_i(x,t)) = \sum_{k=0}^{\frac{n-3}{2}} a_k\, t^{k+1}\, \frac{\partial^k}{\partial t^k}(Q_i(x,t)) \qquad i = 0 \quad \text{ou} \quad 1.$$

Dérivant sous les intégrales, on montre l'existence de constantes b_k avec

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial t^k}(Q_i(x,t))\right| \leq b_k\, \|u_i\|_{C^k(\mathbb{T}^n)}$$

Combinant ces majorations, on trouve l'inégalité (2.3).

Démontrons maintenant que le poids $(1+|t|)^{\frac{n-1}{2}}$ est le meilleur possible.

Considérons la fonction $U_o(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $U_o(x) = (|x| - t_o)^{\frac{n-1}{2}}$. Elle s'annule sur la sphère S_{t_o} de centre 0 et de rayon t_o. Soit s_{t_o} la surface déduite de S_{t_o} par projection canonique de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{T}^n$. Il est facile de voir que pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver un sous-ensemble A_ε de $\mathbb{T}^n$ dont la mesure du volume est ε, contenant les points doubles de la surface s_{t_o}, et une fonction $u_o(x) : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$, telle que :

i) $u_o(x) = U_o(x)$ dans un voisinage V de $s_{t_o} - (s_{t_o} \cap A_\varepsilon)$

ii) $\|u_o\|_{C^{\frac{n-1}{2}}} \leq (\frac{n-1}{2})\,!$

Soit alors f la vibration de conditions initiales u_o et $u_1 = 0$. Des majorations aisées utilisant (2.12) montrent l'existence d'une constante C telle que :

$$(2.13) \qquad \left| f(0,t_o) - t_o^{\frac{n-1}{2}} . (\tfrac{n-1}{2})\,! \right| \leq C\varepsilon.$$

Soit maintenant ω le meilleur poids possible dans l'inégalité (2.3). On a donc :

$$|f(0,t_o)| \leq |\omega(t_o)|\,\|u_o\|_{C^{\frac{n-1}{2}}}$$

ce qui entraine, d'après (2.13) :

$$t_o^{\frac{n-1}{2}} (\tfrac{n-1}{2})\,! \leq \omega(t_o)\, \tfrac{n-1}{2}\,! + C\varepsilon$$

et comme ε est arbitraire, le poids $(1 + |t|)^{\frac{n-1}{2}}$ est bien le meilleur.

c) Démonstration de la proposition 2.

Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'un poids $\omega(t)$, tel que pour toute vibration f sur $\mathbf{T}^n$ (n pair), on ait l'inégalité (2.4). Dans le cas où $u_1 = 0$, on en déduit :

$$(2.14) \qquad |f(0,t)| \leq |\omega(t)|\,\|u_o\|_{\frac{n-1}{2}}.$$

Mais, on a la formule explicite suivante :

$$(2.15) \qquad f(0,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{\Gamma(\frac{n}{2})}\left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^{\frac{n-2}{2}} (t^{n-3}\, H_o(t))\right)$$

avec :

$$\left| \begin{array}{l} Q_o(t) = \displaystyle\int_{|\beta|^2=1} u_o(\beta t)\,d\beta \\[2ex] H_o(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{s\,Q_o(s)\,ds}{\sqrt{t^2 - s^2}} \end{array} \right.$$

$$\left| \; \frac{\partial}{\partial t^2} = \frac{1}{2t} \frac{\partial}{\partial t} \right. .$$

Posons pour $s < t$:

$$\frac{s}{\sqrt{t^2-s^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t-s}} + \varphi(t,s).$$

Soit alors l'application $u_o \to \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{t} \int_o^t \frac{Q_o(s)}{\sqrt{t-s}} ds$. Pour $0 < t_1 < t_2$ et $\varepsilon > 0$, elle définit un opérateur continu de $\Lambda_{\frac{n-1}{2}}(\mathbf{T}^n)$ dans $\Lambda_{\frac{n}{2}-\varepsilon}([t_1,t_2])$. Par contre, cette assertion est fausse avec $\varepsilon = 0$ ([8], vol. II, chap. XII 8 p. 138). Donc, l'application $u_o \to \frac{\partial^n}{\partial t^n} (\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{t} \int_o^t \frac{Q_o(s)ds}{\sqrt{t-s}})$ ne définit pas un opérateur continu de $\Lambda_{\frac{n-1}{2}}(\mathbf{T}^n)$ dans l'ensemble des fonctions continues sur $[t_1 , t_2]$. En revanche, tous les autres termes qui interviennent dans l'écriture de $f(0,t)$ sont régularisants. Cela contredit l'inégalité (2.14).

B. Cas de la dimension $n = 2$.

Comme il a été dit dans l'introduction, l'utilisation de u_1 n'a plus de sens lorsqu'on s'approche de l'indice critique $\frac{1}{2}$. Le théorème 1 est alors remplacé par le théorème suivant :

THEOREME 2. Soient ℓ et α deux réels positifs, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Il existe alors une constante C telle que pour toute vibration sur $\mathbf{T}^2$, tout x et tout t, on ait :

$$(2.16) \qquad |f(x,t)| \leq C(1+|t|)^{\frac{1}{2}-\alpha} \|f\|_{\frac{1}{2}+\alpha,\ell}$$

Naturellement, si la régularité de f est plus grande $(\alpha \geq \frac{1}{2})$, on peut de nouveau vouloir recourir aux conditions initiales. La méthode développée pour le cas $n \geq 3$ s'applique alors et démontre par exemple le résultat suivant.

PROPOSITION 3. Il existe une constante C, telle que, pour toute vibration sur

$\mathbf{T}^2$, tout x et tout t, on ait :

(2.17) $$|f(x,t)| \leq C \log(2+|t|)(\|u_o\|_1 + \sup_{\mathbf{T}^2} |u_1|).$$

Démontrons maintenant le théorème 2. Considérons une vibration f sur $\mathbf{T}^2$ de série de Fourier :

$$f(x,t) \sim \sum a_m e^{i(m,x)} e^{i|m|t} + \sum b_m e^{i(m,x)} e^{-i|m|t}$$

On remarque que si $b_m = 0$ pour tout m, la méthode du cas $n \geq 3$ donne exactement le résultat cherché :

$$|f(x,t)| \leq C(1+|t|)^{\frac{1}{2}-\alpha} \|u_o\|_{\frac{1}{2}+\alpha} \leq C(1+|t|)^{\frac{1}{2}-\alpha} \|f\|_{\frac{1}{2}+\alpha, \ell}$$

Donc, la seule chose à démontrer, est la possibilité de la "séparation" des fréquences $(m, |m|)$ et $(m, -|m|)$ de f. Cela nécessite une étude locale par rapport au temps de la transformation de Hilbert dans les espaces de Lipschitz ; c'est l'objet du théorème suivant, valable en toute dimension n :

THEOREME 3. Soit $f(x,t) \sim \sum a_m e^{i(m,x)} e^{i|m|t} + \sum b_m e^{i(m,x)} e^{i|m|t}$ une vibration sur $\mathbf{T}^n$. Soient ε, ℓ, α et β des réels positifs, α et $\alpha+\beta$ n'étant pas des entiers. Il existe alors une constante C indépendante de f et de ℓ avec :

(2.18) i) $$\left\|\sum \frac{a_m}{|m|^\beta} e^{i(m,x)} e^{i|m|t} + \sum \frac{b_m}{|m|^\beta} e^{i(m,x)} e^{-i|m|t}\right\|_{\alpha+\beta, \ell} \leq C \|f\|_{\alpha, \ell+\varepsilon}$$

(2.19) ii) $$\left\|\sum a_m e^{i(m,x)} e^{i\, m\, t}\right\|_{\alpha, \ell} \leq C \|f\|_{\alpha, \ell+\varepsilon}.$$

Remarque. (2.18) reste vraie si $\alpha = 0$ avec la convention

$$\|f\|_{0, \ell+\varepsilon} = \sup_{\mathbf{T}^n \times [-\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]} |f|.$$

Montrons que l'assertion ii) découle immédiatement de l'assertion i) : soit $f \in \Lambda_\alpha\ (T^n \times [-\ell-\varepsilon\ ,\ \ell+\varepsilon])$, avec α non entier. Appliquons i) avec $\beta = 1$ et dérivons par rapport à t. Nous obtenons :

$$\left\|\sum a_m e^{i(m,x)} e^{i|m|t} - \sum b_m e^{i(m,x)} e^{-i\,m\,t}\right\|_{\alpha,\ell} \leq C \|f\|_{\alpha,\ell+\varepsilon}$$

d'où l'inégalité ii) par addition.

D'après ce qui a été dit après la proposition 3, l'assertion ii) démontre le théorème 2. Il reste donc seulement à prouver l'assertion i). Pour cela, définissons le potentiel de Bessel J_β de $\mathbb{R}^{n+1}$ $(\beta > 0)$ comme la distribution de transformée de Fourier :

$$\hat{J}_\beta(x) = \frac{1}{(1+|x|^2)^{\beta/2}}.$$

J_β a pour support singulier l'origine et est à décroissance exponentielle à l'infini. Soit $\mathcal{F}_\beta$ l'opérateur de convolution :

$$\mathcal{F}_\beta(f) = J_\beta * f.$$

Notre point de départ est alors le théorème suivant :

THEOREME 4 ([7] p. 149). <u>Soient</u> α <u>et</u> β <u>des réels positifs,</u> $\alpha+\beta$ <u>n'étant pas un entier. Alors</u> $\mathcal{F}_\beta$ <u>est un isomorphisme de</u> $\Lambda_\alpha(\mathbb{R}^{n+1})$ <u>sur</u> $\Lambda_{\alpha+\beta}(\mathbb{R}^{n+1})$.

Donnons un exemple de traduction de ce théorème dans le cas qui nous occupe :

$$\left\|\sum \frac{a_m}{(1+2|m|^2)^{\beta/2}} e^{i(m,x)} e^{i|m|t}\right\|_{\Lambda_{\alpha+\beta}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})} \leq C \left\|\sum a_m e^{i(m,x)} e^{i|m|t}\right\|_{\Lambda_\alpha(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})}$$

Le problème est alors de pouvoir "localiser en t". Cette possibilité résulte des propriétés de l'ensemble des fréquences :

Soit Λ l'ensemble des couples $(m\ ,\ \pm|m|)$ où $m \in \Gamma^*$. Nous utilisons des définitions et des résultats de [3] : il est immédiat que Λ a une densité supérieure de répartition nulle dans la direction de la dernière coordonnée. Par suite, il existe un ensemble "associé" à Λ dans toute bande délimitée par des hyperplans perpendiculaires à cette direction et d'épaisseur non nulle. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\mathbb{T}^n \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ est associé à Λ et cela veut dire :

$$\forall (b_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \ell^2(\Lambda), \qquad \exists\, \varphi \in L^2(\mathbb{T}^n \times [-\varepsilon, \varepsilon]) \text{ avec } \hat{\varphi}(\lambda) = b_\lambda .$$

L'application itérée de ce résultat a la conséquence suivante :

PROPOSITION.4. <u>Soit</u> $g \in S(\mathbb{R}^{n+1})$ <u>une fonction</u> C^∞ <u>à décroissance rapide à l'infini. Alors, il existe une fonction</u> $g_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R})$ <u>telle que</u> :

i) $\operatorname{supp} g_\varepsilon \subset \mathbb{T}^n \times [-\varepsilon, \varepsilon]$

ii) $\forall m \in \Gamma^* \quad \hat{g}(m\,,\, \pm |m|) = \hat{g}_m(m\,,\, \pm|m|)$.

Choisissons maintenant une fonction $h \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ de manière à avoir :

i) $h \equiv 1$ dans un voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^{n+1}$

ii) $\operatorname{supp} h \subset ([-\pi, \pi])^n \times [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Cela entraîne $g = (1-h)J_\beta \in S(\mathbb{R}^{n+1})$. On applique alors la proposition 4 en lui associant une fonction g_ε. On a alors pour toute vibration f :

$$J_\beta * f = (h\, J_\beta) * f + ((1-h)J_\beta) * f = (h\, J_\beta) * f + g_\varepsilon * f$$

et la localisation s'obtient en utilisant le fait que les valeurs des fonctions $hJ_\beta * f$ et $g_\varepsilon * f$ sur l'ensemble $\mathbb{R}^n \times [-\ell, \ell]$, ne dépendent de celles de f que sur l'ensemble $\mathbb{R}^n \times [-\ell-\varepsilon\,,\, \ell+\varepsilon]$. On a donc démontré :

$$\Big\| \sum \frac{a_m}{(1+2|m|^2)^{\beta/2}} e^{i(m,x)} e^{i|m|t} \Big\|_{\alpha+\beta,\ell} \le C \Big\| \sum a_m e^{i(m,x)} e^{i|m|t} \Big\|_{\alpha,\ell+\varepsilon} .$$

$$\left\|\sum \frac{a_m}{(1+2|m|^2)^{\beta/2}} e^{i(m,x)} e^{i|m|t}\right\|_{\alpha+\beta,\ell} \leq C\left\|\sum a_m e^{i(m,x)} e^{i|m|t}\right\|_{\alpha,\ell+\varepsilon}$$

Il reste pour obtenir l'inégalité (2.18) à remplacer le multiplicateur $(1+2|m|^2)^{-\beta/2}$ par $|m|^{-\beta}$. Pour cela, on le remplace d'abord par $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}|m|^\beta}$, utilisant le fait que $\dfrac{(1+2|m|^2)^{\beta/2}}{1+\sqrt{2}|m|^\beta}$ est une transformée de Fourier de mesure bornée ([7] p. 134). Puis on utilise l'identité suivante, valable pour tout entier p :

$$(\sqrt{2}\,|m|)^{-\beta} = \sum_{i=1}^{p}(1+\sqrt{2}|m|^\beta)^{-i} + \frac{\sqrt{2}}{2}|m|^{-\beta}(1+\sqrt{2}\,|m|^\beta)^{-p}. \qquad \text{CQFD.}$$

3. RESULTATS NEGATIFS.

THEOREME 5. Soit un entier $n \geq 2$. Quelle que soit la fonction $\omega : \mathbb{R} \to [1,\infty]$, et quel que soit α avec $0 < \alpha < \frac{n-1}{2}$, il existe une vibration f telle que pour tout $\ell > 0$, $f \in \Lambda_{\frac{n-1}{2}-\alpha}(\mathbb{T}^n \times [-\ell,\ell])$, mais qui n'est pas $O(\omega(t))$ $(t \to +\infty)$.

Un tel énoncé est impossible avec $\alpha < 0$ d'après les théorèmes 1 et 2. L'indice $\frac{n-1}{2}$ est donc bien critique. La démonstration du théorème 5 résulte d'une construction explicite. Pour plus de clarté, nous allons en décomposer les résultats :

THEOREME 6. Soit un entier $n \geq 2$; soit g un arc de géodésique de $\mathbb{T}^n$ issu de l'origine et de longueur finie. Soit $\beta > 0$ et α avec $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Il existe alors $R_o > 0$ et pour tout $R \geq R_o$ une vibration f sur $\mathbb{T}^n$ vérifiant les propriétés suivantes :

i) $f(0,0) = 1$ et $|f(x,t)| \leq 1$ pour tout x et tout t,

ii) si $d(x,g) \geq R^{-\alpha}$ alors $|f(x,t)| \leq R^{-\beta}$ où $d(x,g)$ désigne la distance du point x à g.

iii) f est un polynôme trigonométrique :

$$f(x,t)=\sum_{m\in M} a_m\, e^{i(m,x)}\, e^{it|m|}$$

avec $\forall m\in M \quad |m|\leq 2R$.

Disons heuristiquement qu'on a construit une vibration qui se propage, pendant un intervalle fini de temps, le long d'une géodésique, en ce sens qu'elle est faible en dehors d'un voisinage de cette géodésique. En prenant la moyenne des solutions correspondant à un nombre convenable de géodésiques, on verra qu'on obtient une vibration faible partout (pendant un intervalle fini de temps), sauf au voisinage de $x=0$, $t=0$.

THEOREME 7. Soit un entier $n\geq 2$. Soient ε, τ, T et p des réels soumis aux conditions $\varepsilon>0$, $0<\tau<T$, $0<p<\frac{n-1}{2}$. Soit V un voisinage de 0 dans $\mathbf{T}^n$. Il existe alors $R_o>0$ et pour tout $R\geq R_o$ une vibration f sur $\mathbf{T}^n$ vérifiant les assertions i) et iii) du théorème 6, et telle que

a) pour tout x et tout t avec $\tau\leq t\leq T$, on a :

$$|f(x,t)|\leq \varepsilon R^{-p}$$

b) pour tout $x\notin V$ et tout t avec $|t|\leq T$, on a :

$$f(x,t)\leq \varepsilon R^{-p}.$$

Admettons ce théorème et voyons comment le théorème 5 en résulte : appliquons à l'assertion a) la remarque qui suit le théorème 3, puis l'inégalité de Bernstein, localisée par rapport au temps suivant les techniques utilisées pour ce théorème 3. On obtient, si $2\mu<T-\tau$:

$$\|f\|_{\Lambda_p(\mathbf{T}^n\times[\tau+\mu,T-\mu])}\leq C(2R)^p \sup_{\substack{x\in\mathbf{T}^n\\ \tau\leq t\leq T}} |f|\leq 2^p C\,\varepsilon\,.$$

Moyennant un changement de variable, ce résultat se formule ainsi :

THEOREME 8. Soit un entier $n \geq 2$, soient ε, ℓ, p et t des réels soumis aux conditions $\varepsilon > 0$, $0 < \ell < t$, $0 < p < \frac{n-1}{2}$. Il existe alors une vibration f sur $\mathbf{T}^n$ avec :

i) $f(0,t) = 1$

ii) $\|f\|_{p,\ell} \leq \varepsilon$.

Par suite, il n'existe aucun poids $\omega(t)$ tel que, pour tout x, tout t et toute vibration f, on ait :

$$|f(x,t)| \leq |\omega(t)| \, \|f\|_{p,\ell}$$

et ceci implique le théorème 5 en vertu du théorème du graphe fermé.

Nous allons maintenant effectuer la construction qui démontre le théorème 7. Le théorème 6 en sera un sous produit.

Convention. Dans toute la suite, les symboles de Landau O et o serviront à comparer des fonctions de l'entier N. Ils seront toujours uniformes par rapport aux variables indépendantes de N moyennant les limitations du contexte.

La démonstration est divisée en 7 étapes :

i) Construction d'un noyau de sommation.

PROPOSITION 5. Soit $\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ une fonction à valeurs réelles et à support dans $[-1,+1]$ telle que :

a) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) \geq 0$

b) $\varphi(0) = 1$.

Posons $K_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} \varphi(\frac{k}{N})\, e^{ikx}$. On a alors :

(3.1) a) $K_N(x) = O(N)$

(3.2) b) $\frac{1}{K_N(0)} = O(N^{-1})$

c) soit $\rho \in \mathbb{R}$ tel que $0 < \rho < 1$ et posons $\eta = N^{\frac{\rho-1}{\rho+1}}$ alors si $x \in [\eta, 2\pi - \eta]$,

on a :

(3.3) $$k_N(x) = O(N\,\eta^{1+\rho})^{-N}.$$

Les assertions (3.1) et (3.2) résultent de ce que la suite $\frac{1}{N}\sum_{k=-N}^{N} \varphi(\frac{k}{N})$ a pour limite $\int_{-1}^{1} \varphi(x)\,dx$. (3.3) se vérifie en écrivant la formule de Poisson :

$$K_N(x) = N \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(N(x+2k\pi))$$

et en utilisant la décroissance rapide à l'infini de $\hat{\varphi}$.

Remarque. En vertu de l'inégalité de Bernstein, on a encore si j est un entier :

(3.4) $$\left|\sum_{k=-N}^{N} k^j \varphi(\tfrac{k}{N})\, e^{ikx}\right| = O(N^{j+1})$$

et pour tout $x \in [\eta, 2\pi - \eta]$:

(3.5) $$\left|\sum_{k=-N}^{N} k^j \varphi(\tfrac{k}{N})\, e^{ikx}\right| = N^j\, O(N\,\eta^{1+\rho})^{-N}.$$

ii) Construction des ondes f_N^k et f_N.

Considérons dans $\mathbb{R}^n$ la sphère de centre 0 et de rayon 1. Il est facile de voir que l'on peut choisir deux constantes a_n et b_n ainsi que des points α_N^k de S, k variant de 1 à N^{n-1}, de manière à satisfaire les deux inégalités suivantes :

(3.6) si $k \neq k'$ $$|\alpha_N^k - \alpha_N^{k'}| \geq \frac{a_n}{N}$$

(3.7) pour tout indice k, il existe $k' \neq k$ avec $|\alpha_N^k - \alpha_N^{k'}| \leq \frac{b_n}{N}$.

Omettant l'indice N, notons $(\alpha_{1k}, \ldots, \alpha_{nk})$ les coordonnées du point α_N^k

dans $\mathbb{R}^n$. A chacun de ces points α_N^k est associée une géodésique G_N^k du tore, obtenue par projection canonique sur T^n de la droite $0\alpha_N^k$, ainsi qu'une vibration f_N^k définie de la manière suivante :

Choisissons un réel ν vérifiant la condition :

(3.8) $$0 < p\nu < n-1-2p$$

et posons

(3.9) $$R = N^{2+\nu}.$$

Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des n-uplets d'entiers de l'intervalle $[-N , N]$; à tout n-uplet $(n_1, \ldots, n_n) \in \mathcal{N}$ associons le n-uplet suivant :

(3.10) $$(m) = (m_1, \ldots, m_n) = ([R\, \alpha_{1k}] - n_1, \ldots, [R\alpha_{nk}] - n_n)$$

où le symbole $[\ ]$ désigne la partie entière.

Remarquons que $|m| \leq 2R$ et posons :

(3.11) $$f_N^k(x,t) = \sum_{\mathcal{N}} (e^{i(m,x)}\, e^{i\, m\, t} \prod_{j=1}^{n} (\varphi(\frac{n_j}{N})))$$

(3.12) $$f_N(x,t) = \frac{\sum_{k=1}^{N^{n-1}} f_N^k(x,t)}{N^{n-1}(K_N(0))^n}$$

la normalisation a été choisie pour avoir $f_N(0,0) = 1$. Dans la suite, on se limitera au cas $t > 0$ en vertu de la remarque $f_N(x,-t) = \overline{f_N(-x,t)}$.

iii) <u>Première réduction du problème</u>.

Nous allons remplacer $|m|$ par une valeur approchée.

Posons $X_j = m_j - R\alpha_{jk}$, ce qui implique

$$|m|^2 = R^2(1 + \frac{1}{R}(\sum_{j=1}^{n} 2\, X_j\, \alpha_{jk}) + \frac{1}{R^2} \sum_{j=1}^{n} X_j^2).$$

Posons encore : $\quad h = \frac{2}{R} \sum_{j=1}^{n} X_j \alpha_{jk} + \frac{1}{R^2} \sum_{j=1}^{n} X_j^2.$

D'après (3.10) on a $\quad |X_j| \leq N+1$, donc :

$$|h| = O(N^{-(1+\nu)}). \tag{3.13}$$

Effectuons alors un développement limité au voisinage de $h = 0$:

$$\sqrt{1+h} = 1 + \frac{h}{2} + c_2 h^2 + \ldots + c_r h^r + o(h^r)$$

l'ordre r est choisi de manière à avoir :

$$r(1+\nu) > (2+\nu)(p-1). \tag{3.14}$$

On a alors en vertu de (3.9), (3.13) et (3.14) :

$$\left| |m| - R(1 + \frac{h}{2} + c_2 h^2 + \ldots + c_r h^r) \right| = O(N^{-r(1+\nu)})\, R = o(R^{-p}).$$

Donc si $|t| \leq T$:

$$\left| e^{it|m|} - e^{itR(1 + \frac{h}{2} + c_2 h^2 + \ldots + c_r h^r)} \right| = o(R^{-p}).$$

Soient g_N (respectivement g_N^k) les fonctions obtenues en remplaçant dans le membre de droite de (3.12) (respectivement (3.19)), $|m|$ par sa valeur approchée $1 + \frac{h}{2} + \ldots + c_r h^r$. On a alors, pour tout x et tout t, avec $|t| \leq T$:

$$|f_N(x,t) - g_N(x,t)| = o(R^{-p}). \tag{3.15}$$

Pour démontrer le théorème 7, il suffit donc d'étudier les fonctions g_N.

iv) Deuxième réduction du problème.

Nous allons même nous contenter pour l'instant d'étudier les fonctions h_N (respectivement h_N^k), obtenues en remplaçant comme ci-haut $|m|$ par $\sum_{j=1}^{n} X_j \alpha_{jk}$. Nous verrons en fin de démonstration comment l'étude de g_N se déduit de celle de h_N.

Etudions alors la fonctions h_N^k, dite contribution du point α_N^k :

$$h_N^k(x,t) = \sum_{\mathcal{N}} \left(e^{i\sum_{j=1}^{n}(m_j x_j + t\alpha_{jk} x_j)} \prod_{j=1}^{n} \left(\varphi\left(\frac{n_j}{N}\right)\right)\right)$$

$$= \sum_{\mathcal{N}} \left(e^{i\sum_{j=1}^{n}\left(\left|R\alpha_{jk}\right|(x_j + t\alpha_{jk}) - n_j(x_j + t\alpha_{jk}) - t\,\alpha_{jk}^2 R\right)} \prod_{j=1}^{n}\left(\varphi\left(\frac{n_j}{N}\right)\right)\right).$$

Or, l'expression $\sum_{j=1}^{n}\left(\left[R\alpha_{jk}\right](x_j + t\alpha_{jk}) - t\,\alpha_{jk}^2 R\right)$ ne dépend pas du choix du n-uplet $(n_1, \ldots, n_n)$; par suite :

$$\left|h_N^k(x,t)\right| = \left|\sum_{\mathcal{N}} \left(\prod_{j=1}^{n}\left(\varphi\left(\frac{n_j}{N}\right) e^{in_j(x_j + t\alpha_{jk})}\right)\right)\right| = \prod_{j=1}^{n} \left|K_N(x_j + t\alpha_{jk})\right|. \tag{3.16}$$

v) <u>Définition des points critiques et majoration de leur nombre</u>.

Rappelons que Γ est le réseau des points de $\mathbb{R}^n$ à coordonnées multiples entiers de 2π ; notons $d(x,\Gamma)$ la distance d'un point de $\mathbb{R}^n$ à ce réseau. Pour un choix donné de x et de t, convenons d'appeler critique un point α_N^k tel que :

$$d(x + t\,\alpha_N^k\,,\,\Gamma) < \eta. \tag{3.17}$$

Cette inégalité exprime que le point $t\alpha_N^k$ appartient à la famille des boules de rayon η, centrées en les points du réseau translaté $\Gamma - x$. D'autre part, ce point appartient à la sphère S_t de centre 0 et de rayon t. Si $|t| \leq T$, le nombre des boules de la famille qu'intersecte S_t est $O(1)$, c'est à dire est majoré uniformément en N. Majorons alors le nombre des points $t\alpha_N^k$ dans une boule . La mesure de la surface de l'intersection de S_t et d'une boule est $O(\eta^{n-1})$. Or le nombre des points $t\,\alpha_N^k$ par unité de surface de S_t en vertu de (3.6) et (3.7) est $O(\frac{N}{t})^{n-1} = O(N^{n-1})$ si $|t| \geq \tau$. Finalement le nombre des points critiques est $O(\eta N)^{n-1}$, pourvu qu'on ait $\tau \leq t \leq T$.

vi) <u>Majoration de</u> h_N <u>sous l'hypothèse</u> $\tau \leq t \leq T$.

On examine les contributions des divers points α_N^K :

a) si α_N n'est pas critique, il existe au moins un j avec $d(x_j + t\alpha_{jk}, 2\pi\mathbf{Z}) > \eta$.

Donc, en vertu de (3.1) et (3.3) :

$$\prod_{j=1}^{n} |K_N(x_j + t\,\alpha_j^k)| = O(N^{n-1})\, O(N\,\eta^{1+\rho})^{-N}.$$

b) si α_N^k est critique, on se contente de la majoration :

$$\prod_{j=1}^{n} |K_N(x_j + t\,\alpha_j^k)| = O(N^n).$$

On a vu que le nombre des points critiques est $O(\eta N)^{n-1}$. Celui des points non critiques est bien sûr majoré par N^{n-1}. Or :

$$|h_N(x,t)| \quad \leq \quad \frac{\sum_{k=1}^{N^{n-1}} \left(\prod_{j=1}^{n} |K_N(x_j + t\,\alpha_j^k)|\right)}{N^{n-1}(K_N(0))^n}.$$

Donc, en vertu de (3.2) :

$$h_N(x,t)| \; = \; \frac{O(N\eta^{1+\rho})^{-N}\, O(N^{2n-2}) + O(N\eta)^{n-1}\, N^n}{N^{2n-1}}.$$

ρ jusqu'ici n'était soumis qu'à la condition $0 < \rho < 1$. Imposons :

(3.18) $$(n-1)\left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right) > 2p + p\nu$$

ce qui est possible d'après (3.8). Cela implique $O(\eta^{n-1}) = o(R^{-p})$. En effet :

$\eta^{n-1} = N^{(n-1)\frac{\rho-1}{\rho+1}}$ et $R^{-p} = N^{-(2p+p\nu)}$. Combinant ces résultats, il vient :

(3.19) $$|h_N(x,t)| = \frac{O(N\eta)^{n-1}\, N^n}{N^{2n-1}} = o(R^{-p})$$

d'où l'assertion a) du théorème 7.

L'assertion b) est alors conséquence de ce qui précède : si $x \notin V$, il existe $t_o > 0$ tel que si $|t| \leq t_o$, si N assez grand et corrélativement η assez petit, les boules de la famille étudiée à l'étape v) aient une intersection vide avec S_t. Il n'y a pas alors de point critique et la majoration de h_N est aisée ; si $T \geq t \geq t_o$, on est ramené au cas de l'assertion a).

vii) Il reste pour compléter la démonstration du théorème 7, à montrer comment l'étude de g_N se déduit de celle de h_N. Reprenons les notations de l'étape iii), et posons :

$$\ell = it\left(\frac{1}{R}\sum_{j=1}^{n}(X_j^2) + R\,c_2h^2 + \ldots + R\,c_r\,h^r\right)$$

$$\ell' = it\left(R + \sum_{j=1}^{n} X_j\,\alpha_{jk}\right)$$

ce qui permet d'écrire $e^{itR(1+\frac{h}{2}+\ldots+c_rh^r)} = e^{\ell+\ell'}$. La majoration $|\ell| = O(N^{-\nu})$ résulte alors de (3.13). Soit g'_N la fonction obtenue en remplaçant dans le membre de droite de (3.12) $e^{it|m|}$ par une nouvelle valeur approchée : $e^{\ell'}(1 + \ell + \frac{\ell^2}{2!} + \ldots$ $\ldots + \frac{\ell^a}{a!})$. Si a est un entier choisi pour avoir $a\nu > p(2+\nu)$, on a alors :

$$\left|e^{\ell} - \left(1 + \ell + \frac{\ell^2}{2!} + \ldots + \frac{\ell^a}{a!}\right)\right| = o(\ell^a) = o(N^{-\nu a}) = o(R^{-p}).$$

On est donc ramené à l'étude de g_N, puisque

$$|g'_N(x,t) - g_N(x,t)| = o(R^{-p}).$$

Mais, remplaçant dans l'expression de h puis de ℓ, X_j par sa valeur $[R\,\alpha_{jk}] - R\,\alpha_{jk} - n_j$, on obtient l'identité suivante :

$$1 + \ell + \frac{\ell^2}{2!} + \ldots + \frac{\ell^a}{a!} = 1 + \frac{Q_o}{R} + \sum_{i=2}^{2ra} \frac{Q_i(n_1, \ldots, n_n)}{R^{i-1}} \tag{3.20}$$

où $Q_i(n_1, \ldots, n_n)$ est un polynôme homogène et de degré i en les variables $n_1, \ldots, n_n$. On remplace alors successivement dans l'expression de f_N, $e^{it|m|}$ par le produit de $e^{\ell'}$ avec chacun des monômes en les variables $(n_1, \ldots, n_n)$ du membre de droite de (3.20). On obtient d'abord une expression où $e^{it|m|}$ est remplacé par $e^{\ell'}(1 + \frac{Q_o}{R})$.

Les calculs des étapes iv) à vi) s'appliquent alors sans autres modifications que des multiplications par $(1 + \frac{Q_o}{R}) = O(1)$. Les expressions suivantes contiennent des monômes en les variables $(n_1, \ldots, n_n)$, mais d'après (3.4) et (3.5), on peut encore effectuer les calculs quitte à multiplier les membres de droite des inégalités convenables par N^i, où i est le degré du monôme. La majoration correspondant à l'un de ces monômes est donc de l'ordre de grandeur de :

$$o(R^{-p}) \frac{N^i}{R^{i-1}} = o(R^{-p}) \qquad \text{CQFD.}$$

Ajoutons que les calculs effectués démontrent le théorème 6. En effet, si $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, on peut poser $p = (n-1)\alpha$; on a bien alors $p < \frac{n-1}{2}$, ce qui permet de choisir ν et ρ comme en (3.8) et (3.18). On choisit alors un point unique α_N^k associé à l'arc de géodésique g, et une vibration $f_N = f_N^k/(K_N(0))^n$. Mais si $d(x,g) \geq R^{-\alpha}$, on a $d(x,g) \geq \eta$ et le point α_N^k n'est pas critique si $0 \leq t \leq T$. On en déduit, pour de tels x et t la majoration : $\left|\frac{h_N^k(x,t)}{(K_N(0))^n}\right| \leq R^{-\beta}$, puis $|f(x,t)| \leq R^{-\beta}$ en utilisant des développements limités à un ordre convenable. CQFD.

Signalons, pour finir, que nous ignorons si les poids figurant dans les théorèmes 1 et 2 sont les meilleurs.

Bibliographie

[1] COURANT et HILBERT Methods of mathematical physics (vol. II).

[2] DOMAR, Y. (Université d'Uppsala) Communication orale

[3] KAHANE, J.-P. Pseudopériodicité et séries de Fourier lacunaires. Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 79 (1962), 93-150.

[4] MEYER, J.-P. Trois problèmes sur les sommes trigonométriques. 1) Etude asymptotique des vibrations des sphères. Astérisque 1, SMF (1973).

[5] MEYER, Y. Théorie L^p des sommes trigonométriques apériodiques (exemple : vibration des sphères). C. R. Acad. Sc. Paris 277 (1973).

[6] MEYER Y. Nombres premiers et vibrations. Sém. Delange-Pisot-Poitou, exposé XV (1972).

[7] STEIN E. M. Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton University Press (1970).

[8] ZYGMUND, A. Trigonometric series, vol. II. Cambridge University Press (1968).