UNIVERSITÉ PARIS XI

U.E.R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

La presque périodicité et les coalgèbres injectives

Andrew TONGE

Analyse Harmonique d'Orsay
1976

LA PRESQUE-PERIODICITE ET LES COALGEBRES INJECTIVES

par Andrew TONGE

Injective coalgebras were defined in [8], where we showed them to be closed translation invariant subspaces of the continuous functions on compact semigroups. The purpose of this paper is to bring out connections between injective coalgebras and various notions of almost periodicity. In particular, we identify certain cofree injective coalgebras as the almost periodic functions on appropriate topological semigroups. From this we are able to deduce the existence of the cofree injective coalgebra on an arbitrary Banach space

Nous reprenons l'étude des coalgèbres injectives, amorcée dans [8], où nous les avons identifiées à des sous-espaces fermés invariants par translation des fonctions continues sur des semigroupes compacts. Ici nous montrons quelques liens entre les coalgèbres injectives et des notions de la presque-périodicité. En particulier, nous identifions certaines coalgèbres injectives colibres aux fonctions presque-périodiques sur des semigroupes topologiques convenables. Nous en déduisons l'existence de la coalgèbre injective colibre sur un espace de Banach quelconque.

I. INTRODUCTION.

Esquissons quelques notions essentielles.

Soient E et F deux espaces de Banach. B_E désigne la boule unité de E, dont le dual s'écrit E'. Il y a plusieurs façons de définir une norme "raisonnable" sur le produit tensoriel $E \otimes F$, mais nous ne nous intéresserons qu'à deux d'entre elles. Si $\tau \in E \otimes F$, on pose

$$\|\tau\|_{\varepsilon} = \sup\{|\langle \tau, e' \otimes f' \rangle| : e' \in B_{E'} , f' \in B_{F'}\} \text{ et}$$

$$\|\tau\|_{\pi} = \sup\{|\langle \tau, \Phi \rangle|\}$$ où Φ parcourt les formes bilinéaires sur $E \times F$ de norme ≤ 1.

$\|.\|_{\varepsilon}$ est la plus petite des normes raisonnables, et $\|.\|_{\pi}$ est la plus grande. Le complété $E \check{\otimes} F$ de $(E \otimes F , \|.\|_{\varepsilon})$ s'appelle produit tensoriel injectif de E et F ; leur produit tensoriel projectif $E \hat{\otimes} F$ est le complété de $(E \otimes F , \|.\|_{\pi})$. Bien entendu, le dual de $E \hat{\otimes} F$ est l'espace des formes bilinéaires continues sur $E \times F$, muni de la norme habituelle. Nous nous servirons de deux propriétés du produit tensoriel injectif :

(P) Si E_1 et F_1 sont des sous-espaces fermés de E et F, resp., alors $E_1 \check{\otimes} F_1$ est isométriquement un sous-espace fermé de $E \check{\otimes} F$.

(Q) $E' \check{\otimes} F'$ est isométriquement un sous-espace fermé de $(E \hat{\otimes} F)'$.

Nous nous bornerons à une des plusieurs versions équivalentes de la propriété d'approximation de Banach (PAB). Remarquons d'abord qu'un élément de $E \otimes F$ peut être considéré comme application linéaire $E' \to F$. Nous dirons que E satisfait à la PAB si pour tout Banach F on peut identifier $E \check{\otimes} F$ à $KW(E',F)$, l'espace des applications linéaires continues compactes de $(E' , \sigma(E',E))$ dans $(F, \sigma(F,F'))$, muni de la norme uniforme. Il est toujours vrai que $E \check{\otimes} F \subseteq KW(E',F)$.

Pour les détails, nous renvoyons à [5].

Une coalgèbre injective est un Banach C auquel on associe une application linéaire $N : C \to C \check{\otimes} C$ de norme ≤ 1 (c'est-à-dire une contraction) et $e \in C'$

de norme 1 qui rendent commutatifs les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "N"] \arrow[d, "N"'] & C \check{\otimes} C \arrow[d, "I \check{\otimes} N"] \\
C \check{\otimes} C \arrow[r, "N \check{\otimes} I"'] & C \check{\otimes} C \check{\otimes} C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] \arrow[dd, "N"] & \\
\mathbb{C} \check{\otimes} C & & C \check{\otimes} \mathbb{C} \\
& C \check{\otimes} C \arrow[ul, "e \check{\otimes} I"] \arrow[ur, "I \check{\otimes} e"'] &
\end{tikzcd}$$

I désigne ici l'application identique $C \to C$, et C s'identifie de façon naturelle à $C \check{\otimes} \mathbb{C}$ et $\mathbb{C} \check{\otimes} C$.

N est la <u>comultiplication</u> de C, et e est la <u>coidentité</u>.

L'exemple prototype d'une coalgèbre injective est $C(S)$ l'espace des fonctions continues sur un semigroupe compact S, muni de la norme uniforme. (Il convient de dire que tout semigroupe topologique S est supposé unitaire, et que la multiplication est une application continue $S \times S \to S$).

Observant que $C(S) \check{\otimes} C(S)$ est isométriquement isomorphe à $C(S \times S)$, on pose

$(Nf)(s,t) = f(st)$ et $e(f) = f(1)$ $\forall\, s,t \in S$ $\forall\, f \in C(S)$.

Un résultat simple mais fondamental est la

PROPOSITION 1.1 [8]. <u>Le dual d'une coalgèbre injective admet une structure naturelle d'algèbre de Banach. La boule unité, munie de la topologie weak *, est un semigroupe compact</u>.

Signalons que si $x,y \in C'$, leur produit xy se définit par

$\langle c\,,\, xy \rangle = \langle Nc\,,\, x \otimes y \rangle$ $\forall\, c \in C$.

Notons aussi que la coidentité de C n'est autre que l'identité de C'.

Désormais, il sera commode de ne considérer que les algèbres de Banach commutatives (avec une identité normalisée) et les coalgèbres injectives cocommutatives (c'est-à-dire celles dont les duaux sont des algèbres de Banach commutatives). Egalement, tout semigroupe topologique sera abélien.

Un atome de la coalgèbre injective C est un élément a tel que $Na = a \otimes a$. Il est clair que les atomes de C sont des éléments du spectre de C'. Les atomes de $C(S)$ sont précisément les semicaractères de S.

Si R_1 et R_2 sont des algèbres de Banach, $ALG(R_1, R_2)$ désigne l'espace des contractions d'algèbres $R_1 \to R_2$, c'est-à-dire les contractions multiplicatives qui envoient l'identité sur l'identité. D'autre part, si C et D sont des coalgèbres injectives, $COALG(C,D)$ désigne les contractions de coalgèbres $C \to D$, c'est-à-dire les contractions telles que

$$N_D f = (f \check{\otimes} f) N_C \qquad \text{et} \qquad e_D f = e_C .$$

On vérifie aussitôt la

PROPOSITION 12. *Le transposé f' d'une contraction de coalgèbres f est une contraction d'algèbres.*

Enfin, nous entendons par homomorphisme de semigroupes topologiques une application continue multiplicative qui envoie l'identité sur l'identité.

Ce travail a été fait à McGill University, Montréal et à la Faculté des Sciences d'Orsay. J'ai beaucoup profité de plusieurs discussions avec A. Atzmon, T. Fox et S. W. Drury qui m'a suggéré le sujet ; je les remercie, ainsi que le SRC qui m'a accordé une bourse.

2. LE CODUAL D'UNE ALGEBRE DE BANACH.

On a vu que le dual d'une coalgèbre injective est une algèbre de Banach. Donc on pourrait espérer que le dual d'une algèbre de Banach soit une coalgèbre injective. Bien que ce soit un faux espoir, on peut en tirer quelque chose d'intéressant.

Soit R une algèbre de Banach. Désignons sa multiplication par $M : R \hat{\otimes} R \to R$. Si φ est dans le spectre de R, on voit aussitôt que $M'\varphi = \varphi\otimes\varphi \in R'\check{\otimes}R' \subseteq (R \hat{\otimes} R)'$ S'appuyant sur (P), on se sert du lemme de Zorn pour démontrer que parmi les sous-espaces fermés de R', il existe des espaces maximaux qui sont des coalgèbres injectives pour la comultiplication M'. Mais il est clair que la fermeture de la somme de deux tels espaces est toujours une coalgèbre injective. On vient de démontrer la

PROPOSITION 2.1. <u>Il existe dans</u> R' <u>un sous-espace fermé maximal unique qui est une coalgèbre injective pour la comultiplication</u> M'.

DEFINITION. Cet espace s'appelle <u>codual</u> de R. Il est noté R^{∇}.

On va examiner R^{∇} de plus près.

A tout élément φ de R, on peut associer une application linéaire $\tilde{\varphi} : R \to R'$ de norme $\|\varphi\|$. $\tilde{\varphi}$ est définie par

$$\langle\tilde{\varphi}(x),y\rangle = \langle\varphi , xy\rangle \qquad \forall\, x,y \in R.$$

Suivant Kitchen [6], nous dirons que φ est <u>presque-périodique</u> si $\tilde{\varphi}$ est une application compacte. Les éléments presque-périodiques de R' constituent un sous-espace fermé que nous désignerons par $AP(R)$.

THEOREME 2.2. <u>Si</u> R <u>est une algèbre de Banach, alors</u> $R^{\nabla} \subseteq AP(R)$. <u>Si, de plus,</u> $AP(R)$ <u>satisfait à la</u> PAB, <u>on a</u> $R^{\nabla} = AP(R)$.

Nous avons besoin du

LEMME 2.3. <u>Soit</u> E <u>un sous-espace fermé du Banach</u> F. <u>Si</u> E <u>satisfait à la</u> PAB, <u>alors</u> $(E \check{\otimes} F) \cap (F \check{\otimes} E) = E \check{\otimes} E$.

<u>Démonstration</u>. D'après (P), on a $E \check{\otimes} E \subseteq (E \check{\otimes} F) \cap (F \check{\otimes} E)$ Supposons donc qu'il existe $\xi \in (E \check{\otimes} F) \cap (F \check{\otimes} E)$ tel que $\xi \notin E \check{\otimes} E$. Remarquons que la topologie $\sigma(E,E')$ sur E est précisément celle induite par $(F,\sigma(F,F'))$. Or, $\xi \in E \check{\otimes} F$ entraîne que $\xi \in KW(E',F)$. Si l'image de ξ était dans E, on aurait $\xi \in E \check{\otimes} E$, d'après l'hypothèse que E satisfait à la PAB. Ceci étant faux, il existe $u \in F'$ tel que $\xi(u) \notin E$. Par conséquent, il existe $v \in E^o$ - l'ensemble polaire de E - tel que $\langle \xi(u), v \rangle \neq 0$, c'est-à-dire $\langle \xi, u \otimes v \rangle \neq 0$. Mais puisque $E' = F'/E^o$, nous pouvons choisir $w \in F'$ tel que $\langle \xi, w \otimes v \rangle \neq 0$. D'autre part, comme $\xi \in F \check{\otimes} E$ et $v \in E^o$, on a $\langle \xi, w \otimes v \rangle = 0$. Cette contradiction nous amène à l'égalité voulue.

<u>Démonstration de 2.2</u>. Rappelons que $(R \hat{\otimes} R)'$ est isométriquement isomorphe à $L(R,R')$, l'espace des applications linéaires continues $R \to R'$, muni de la norme uniforme. Cette identification associe à $M'\varphi \in (R \hat{\otimes} R)'$ l'élément $\tilde{\varphi}$ de $L(R,R')$ pour tout φ dans R'.

Soit donc $\varphi \in R^{\nabla}$. On a $M'\varphi \in R^{\nabla} \check{\otimes} R^{\nabla} \subseteq R' \check{\otimes} R'$, et on en déduit que $\tilde{\varphi}$ est compacte. La première partie est démontrée.

Supposons maintenant que $AP(R)$ satisfait à la PAB et que $\varphi \in AP(R)$. D'après 2.3, il nous suffit de démontrer que $M'\varphi \in (AP(R) \check{\otimes} R') \cap (R' \check{\otimes} AP(R))$. Pour des raisons de symétrie, nous n'avons qu'à établir que $M'\varphi \in R' \check{\otimes} AP(R)$, ou en d'autres termes, que pour tout $r\in R$, l'application $\widetilde{\widetilde{\varphi}(r)}$ est compacte.

Il est immédiat que $\widetilde{\widetilde{\varphi}(r)}(s) = \widetilde{\varphi}(rs)$ $\forall\, s\in R$. Soient alors (s_n) une suite dans B_R et $r\in R$. Comme $\widetilde{\varphi}$ est compacte et (rs_n) est une suite bornée, on peut extraire une sous-suite de Cauchy de $\widetilde{\varphi}(rs_n) = \widetilde{\widetilde{\varphi}(r)}(s_n)$. Nous en déduisons que $\widetilde{\varphi}(r)$ est compacte ce qui achève la démonstration.

Donnons deux exemples.

EXEMPLE 2.4. Si K est un compact, $C(K)$ est une algèbre de Banach pour la multiplication ponctuelle. Kitchen [6] prouve que $AP(C(K)) = M_d(K)$, les mesures discrètes sur K. D'après 2.2, on a $[C(K)]^{\nabla} = M_d(K)$.

Soit $f \in C(S)$, où S est un semigroupe topologique. Si $s\in S$, on définit $f_s\in C(S)$ par

$$f_s(t) = f(st) \qquad \forall\, t \in S$$

f est dite presque-périodique si la fermeture de $\{f_s : s\in S\}$ est compacte dans $C(S)$ [1,2]. L'ensemble $AP(S)$ des fonctions presque-périodiques sur S est un sous-espace fermé de $C(S)$.

Supposons maintenant que S soit muni de la topologie discrète. $\ell^1(S)$ devient une algèbre de Banach pour la convolution :

Si $a = (a_s)_{s\in S}$, $b = (b_s)_{s\in S} \in \ell^1(S)$, alors $a * b = (\sum_{u.v=s} a_u b_v)_{s\in S}$.

EXEMPLE 2.5. $[\ell^1(S)]^{\nabla} = AP(S)$.

Démonstration. Puisqu'il est bien connu que $AP(S)$ satisfait à la PAB, il suffit, d'après 2.2, de démontrer que $AP(\ell^1(S)) = AP(S)$. On sait que $[\ell^1(S)]' = C(S)$. Si $s\in S$, définissons $e_s \in \ell^1(S)$ par $(e_s)_t = 0$ si $s \neq t$, $e_s(s) = 1$. $B_{\ell^1(S)}$ est l'enveloppe convexe équilibrée fermée de $\{e_s : s\in S\}$. Mais si $\varphi\in C(S)$, alors $\tilde{\varphi}(e_s) = \varphi_s$, et il est clair que la fermeture de $\{\varphi_s : s\in S\}$ est l'enveloppe convexe équilibrée fermée de $\{\varphi_s : s\in S\}$. Cette enveloppe est compacte si et seulement si $\{\varphi_s : s\in S\}$ est relativement compact. C'est exactement la condition que φ soit presque-périodique.

REMARQUE. Désignons par $FAP(R)$ la fermeture du sous-espace de R' comprenant les éléments φ tels que $\tilde{\varphi}$ soit de rang fini. On peut démontrer que $FAP(R)$ est une coalgèbre injective et que $FAP(R) \subseteq R^{\nabla} \subseteq AP(R)$. Il serait intéressant de savoir dans quelles conditions on a $FAP(R) = AP(R)$.

Donnons maintenant une caractérisation plus abstraite de R^{∇}.

THEOREME 2.6. <u>Soit</u> R <u>une algèbre de Banach</u>.

(1) <u>Il existe un semigroupe discret</u> S <u>tel que</u> R <u>soit un quotient (par un idéal fermé</u> I) <u>de</u> $\ell^1(S)$.

(2) <u>Si</u> $AP(R)$ <u>satisfait à la PAB, alors</u> $R^{\nabla} = AP(S) \cap I^o$.

<u>Démonstration</u>. Soit S le semigroupe libre engendré par l'ensemble $B = B_R$. Si $s\in S$ est le produit formel $b_1 \dots b_N$, on lui associe $\varphi(s) \in B$, le produit dans R. Puisque $\|\varphi(s)\| \leq 1 \ \forall s\in S$, on peut prolonger φ en une application linéaire continue $\Phi : \ell^1(S) \to R$:

$$\Phi((\lambda_s)_{s\in S}) = \sum_{s\in S} \lambda_s \varphi(s).$$

Il est immédiat que Φ est un épimorphisme d'algèbres qui envoie $B_{\ell^1(S)}$ sur B_R. On en déduit que R est isométriquement isomorphe à $\ell^1(S)/I$, où $I = \ker \Phi$.

La démonstration de (2) est facile dès qu'on sait que si R_2 est un quotient de R_1 par l'épimorphisme d'algèbres π, alors $\pi'(R_2^\nabla)$ est isométriquement un sous-espace de R_1^∇. De plus, $\pi'(R_2^\nabla)$ est une coalgèbre injective pour la comultiplication induite par celle de R_1^∇. Ce fait sera démontré dans 4.2.

3. LES COALGEBRES INJECTIVES COLIBRES ET LES FONCTIONS PRESQUE-PERIODIQUES.

Tout d'abord, il nous faut une définition.

DEFINITION. Soient B un espace de Banach, C une coalgèbre injective et $P : C \to B$ une contraction. Alors le couple (C,p) est dit <u>coalgèbre injective colibre sur</u> B si quels que soient D une coalgèbre injective et $f : D \to B$ une contraction, il existe une contraction de coalgèbres unique $F : D \to C$ rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[dr, "p"'] & & D \arrow[ll, "F"'] \arrow[dl, "f"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Dès qu'on sait démontrer l'existence d'une coalgèbre injective colibre sur B, il est clair qu'elle est unique, à une isométrie de coalgèbres près. Dorénavant, nous parlerons de <u>la</u> coalgèbre injective $\mathcal{C}(B)$ sur B.

Bien qu'on ait défini de tels objets, il n'est pas évident qu'ils existent. Le théorème d'existence apparaîtra dans la suite comme corollaire d'une identification de certaines coalgèbres injectives colibres aux fonctions presque-périodiques sur des semigroupes topologiques convenables.

Si nous avions défini nos coalgèbres en termes du produit tensoriel projectif $\hat{\otimes}$, nous aurions pu utiliser un résultat dans [3] pour démontrer le théorème d'existence. Malheureusement, la méthode de Fox s'appuie sur des propriétés très particulières de $\hat{\otimes}$; elle ne marchera pas dans notre cas.

Enonçons le résultat principal.

THEOREME 3.1. Désignons par ℓ^∞_K les fonctions bornées sur K lettres. Alors $\mathcal{Q}(\ell^\infty_K)$ est l'espace des fonctions presque-périodiques sur le semigroupe libre sur K lettres (muni de la topologie discrète).

Pour démontrer ce théorème, nous nous servons d'une généralisation due à De Leeuw et Glicksberg du compactifié de Bohr d'un groupe localement compact abélien. Plus précisément :

THEOREME DG [1]. (i) Soit S un semigroupe topologique. Alors, il existe γS un semigroupe compact et $i_S : S \to \gamma S$ un monomorphisme dense tels que quels que soient T un semigroupe compact et $\varphi : S \to T$ un homomorphisme, il existe un homomorphisme unique $\Phi : \gamma S \to T$ de sorte que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "i_S"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & \gamma S \arrow[dl, "\Phi"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

(ii) L'espace $AP(S)$ des fonctions presque-périodiques sur S s'identifie à l'espace des fonctions continues sur γS, muni de la norme uniforme.

Le couple $(\gamma S, i_S)$ - ou simplement γS - s'appelle <u>compactifié presque-périodique de</u> S. γS est unique, à un isomorphisme près.

Donnons un exemple. Soit $\mathbb{Z}^+$ le semigroupe additif discret des entiers non négatifs. Alors, [4], $\gamma\mathbb{Z}^+$ est la fermeture de $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ dans le semigroupe compact $\alpha\mathbb{Z}^+ \times \gamma\mathbb{Z}$, où $\alpha\mathbb{Z}^+$ désigne le compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{Z}^+$ et $\gamma\mathbb{Z}$ désigne le compactifié de Bohr de $\mathbb{Z}$.

<u>Démonstration du Théorème</u> 3.1. Nous identifions le semigroupe libre sur K lettres à $S = \sum_{k \in K} \mathbb{Z}^+$, le sous-semigroupe de $\prod_{k \in K} \mathbb{Z}^+$ comprenant les éléments $(n_k)_{k \in K}$ qui n'ont qu'un nombre fini de n_k différents de zéro ; muni de la topologie discrète. Nous écrivons $e_j = (\delta_{jk})_{k \in K}$, et nous allons systématiquement confondre les éléments de S et leurs images par i_S dans γS.

Munissons $AP(S) = C(\gamma S)$ de la comultiplication habituelle N ; la coidentité e est l'application qui associe à tout élément de $AP(S)$ sa valeur en $\vec{0}$.

Définissons $p : C(\gamma S) \to \ell^\infty_K$ par

$$[p(u)]_k = u(e_k) \qquad \forall\, k \in K \qquad \forall\, u \in C(\gamma S).$$

Il est évident que p est une contraction.

Soient D une coalgèbre injective et $f : D \to \ell^\infty_K$ une contraction. Nous cherchons une contraction de coalgèbres $F : D \to C(\gamma S)$ telle que $pF = f$. D'après 1.1, $B_{D'}$ est un semigroupe compact. A tout $k \in K$ on associe $f_k \in B_{D'}$ défini par :

$$\langle f_k , d \rangle = [f(d)]_k \qquad \forall\, d \in D.$$

Soit $\vec{n} = (n_k)_{k \in K} \in S$. Définissons $\varphi : S \to B_{D'}$ par

$$\varphi(\vec{n}) = \prod_{k \in K} (f_k)^{n_k}$$

En effet, $(f_k)^o$ étant l'identité, il s'agit d'un produit fini, donc bien défini. Comme S est un semigroupe discret, on voit que φ est un homomorphisme. Par conséquent, le théorème DG nous permet de définir $\Phi : \gamma S \to B_{D'}$ l'homomorphisme unique tel que $\Phi i_S = \varphi$.

Soit $d \in D$. On définit une application $F(d) : C(\gamma S) \to \mathbb{C}$ par :

$$F(d)(\sigma) = \langle \Phi(\sigma), d \rangle \quad \forall\ \sigma \in \gamma S.$$

On verra que F est bien l'application voulue.

D'abord, soient $\sigma_o \in \gamma S$ et $\varepsilon > 0$. Posons

$$U_\varepsilon = U_\varepsilon(\sigma_o, d) = \left\{ \sigma \in \gamma S : \ |\langle \Phi(\sigma), d \rangle - \langle \Phi(\sigma_o), d \rangle| < \varepsilon \right\}.$$

Puisque Φ est continue, on sait que U_ε est un voisinage de σ_o. Mais

$$|F(d)(\sigma) - F(d)(\sigma_o)| < \varepsilon \quad \forall\ \sigma \in U_\varepsilon ,$$

et on en déduit que $F(d) \in C(\gamma S)$.

On vérifie immédiatement que $F : D \to C(\gamma S)$; $d \to F(d)$ est une contraction. Si on identifie $C(\gamma S) \check{\otimes} C(\gamma S)$ à $C(\gamma S \times \gamma S)$, on a pour tout $d \in D$ et $\sigma, \tau \in \gamma S$:

$$\begin{aligned}
[(F \check{\otimes} F) N_D(d)](\sigma, \tau) &= \langle N_D(d) \ , \ \Phi(\sigma) \otimes \Phi(\tau) \rangle \\
&= \langle d \ , \ \Phi(\sigma)\, \Phi(\tau) \rangle = \langle d, \Phi(\sigma\tau) \rangle = F(d)(\sigma\tau) \\
&= [NF(d)](\sigma, \tau)
\end{aligned}$$

d'où $NF = (F \check{\otimes} F) N_D$. Il est clair que $eF = e_D$, et il en résulte que F est une contraction de coalgèbres.

Or, quels que soient $k \in K$ et $d \in D$, on a

$$\begin{aligned}
[pF(d)]_k &= F(d)(e_k) = \langle \Phi(e_k) \ , \ d \rangle = \langle \varphi(e_k) \ , \ d \rangle \\
&= f_k(d) = [f(d)]_k
\end{aligned}$$

d'où $pF = f$.

On a prouvé que F satisfait à toutes les conditions exigées. Il reste donc à démontrer que F est unique. Soit alors G une application ayant les mêmes propriétés que F Pour tout $d \in D$,

$$G(d)(\vec{0}) = e\, G(d) = e_D(d) = eF(d) = F(d)(\vec{0}),$$

et comme $pG = f = pF$, on a

$$G(d)(e_k) = [f(d)]_k = F(d)\,(e_k) \quad \forall\, k \in K.$$

Maintenant un raisonnement par récurrence montre que $G(d) = F(d)$ sur S, donc sur γS. Ceci entraîne que $G = F$ et achève la démonstration.

Pour bien exploiter le théorème 3.1, nous allons démontrer que les sous-espaces héritent des théorèmes d'existence.

LEMME 3.2. Soient (C,p) une coalgèbre injective colibre sur le Banach B et B_1 un sous-espace fermé de B. Supposons qu'il existe un atome a de C tel que $p(a) \in B_1$. Alors il existe dans C un sous-espace fermé maximal unique de sorte que :

(a) C_1 soit une coalgèbre injective pour la comultiplication induite par C,

et (b) $p(C_1) \subseteq B_1$.

Si p_1 désigne la restriction de p à C_1, alors (C_1,p_1) est une coalgèbre injective colibre sur B_1.

REMARQUE. L'énoncé n'est légitime que parce que $\check{\otimes}$ jouit de la propriété (P). On trouve dans [8] une discussion du problème de la bonne définition d'une "sous-coalgèbre".

Démonstration. Pour établir l'existence et l'unicité de C_1, il suffit de reprendre, mutatis mutandis, la démonstration de 2.1

$$\text{(i)}\quad \begin{array}{ccc} C & \xleftarrow{F} & D \\ p\downarrow & & \downarrow f \\ B & \supseteq & B_1 \end{array} \qquad\qquad \text{(ii)}\quad \begin{array}{ccc} C_1 & \xleftarrow{F} & D \\ & p_1 \searrow \quad \swarrow f & \\ & B_1 & \end{array}$$

Dans le diagramme (i), $f : D \to B_1 \subseteq B$ est une contraction, D est une coalgèbre injective et F est la contraction de coalgèbres qui rend le diagramme commutatif. On voit facilement que $\overline{F(D)}$ est une coalgèbre injective pour la comultiplication induite par C. Comme p est continue et $pF = f : D \to B_1$, on a $p(\overline{F(D)}) \subseteq B_1$. Il en résulte que $\overline{F(D)} \subseteq C_1$, et F est donc une contraction de coalgèbres qui rend le diagramme (ii) commutatif. Si G était une autre contraction de coalgèbres telle que $\begin{array}{ccc} C_1 & \xleftarrow{G} & D \\ & p_1 \searrow \ \swarrow f & \\ & B_1 & \end{array}$ commute, elle rendrait commutatif $\begin{array}{ccc} C & \xleftarrow{G} & D \\ & p \searrow \ \swarrow f & \\ & B & \end{array}$ ce qui entraînerait que $G = F$.

THEOREME 3.3. Il existe une coalgèbre injective colibre sur un Banach quelconque.

Démonstration. Soit B un Banach. Désignons la boule unité de B' par K. B est un sous-espace fermé de ℓ^∞_K ; on fait correspondre à $b \in B$ l'élément $(\langle b,k\rangle)_{k\in K}$ de ℓ^∞_K. D'après 3.1 et 3.2, il suffit - suivant les notations de 3.1 - de trouver un atome a de $\mathcal{Z}(\ell^\infty_K) = C(\gamma S)$ tel que $(a(e_k))_{k\in K} \in B$. En fait, on en trouvera une surabondance.

On sait que les atomes de $C(\gamma S)$ sont précisément les semi-caractères de γS. Si b est dans la boule unité de B, nous définissons

$$\chi_b(\vec{n}) = \prod_{k\in K} \langle b,k\rangle^{n_k} \qquad \forall\, \vec{n} = (n_k)_{k\in K} \in S.$$

X_b est alors un homomorphisme de S dans le semigroupe multiplicatif compact $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$; d'après le théorème DG, il se prolonge en un homomorphisme X_b de γS dans D ; en d'autres termes, c'est un semicaractère de γS. Mais $X_b(e_k) = \langle b,k \rangle \ \forall k \in K$, donc $(X_b(e_k))_{k\in K}$ s'identifie à $b \in B \subseteq \ell^\infty_K$.

Plus que c.q.f.d.

Signalons en passant une loi de composition pour les coalgèbres injectives colibres.

$$\mathcal{E}(B_1 \oplus_{\ell^\infty} B_2) = \mathcal{E}(B_1) \overset{\vee}{\otimes} \mathcal{E}(B_2).$$

Ceci découle (abstraitement ou directement) du fait, aisément établi, que $C \overset{\vee}{\otimes} D$ est le produit de C et D dans la catégorie des coalgèbres injectives et des contractions de coalgèbres, et du fait, bien connu, que $B_1 \oplus_{\ell^\infty} B_2$ est le produit de B_1 et B_2 dans la catégorie des espaces de Banach et des contractions.

4. UNE METHODE DIFFERENTE.

Nous nous proposons de modifier une méthode développée dans [7] qui nous permettra de retrouver le théorème 3.3. Le théorème 3.1 apparaîtra comme corollaire.

Dans un premier temps, nous montrons que les passages au dual d'une coalgèbre injective et au codual d'une algèbre de Banach donnent lieu à des foncteurs adjoints. Tout d'abord, il nous faut une construction utile du codual d'une algèbre de Banach.

Soit alors R une algèbre de Banach. Désignons sa multiplication par $M_R : R \hat{\otimes} R \to R$, et posons $N_R = M_R'$. Définissons successivement :

(1) $C_1^R = R'$

(2) $C_\omega^R = N_R^{-1}(C_\lambda^R \check{\otimes} C_\lambda^R) \cap C_\lambda^R$ si $\omega = \lambda + 1$

(3) $C_\omega^R = \cap \left\{C_\lambda^R : \lambda < \omega\right\}$ si ω est un ordinal limite.

(On se sert implicitement des propriétés (P) et (Q) de $\otimes$.)

Désignons par ζ l'ordinal tel que $C_\zeta^R = C_{\zeta+1}^R = C$.

PROPOSITION 4.1. C <u>est le codual de</u> R.

<u>Démonstration</u>. C est un sous-espace fermé de R. Identifiant $C \check{\otimes} C$ à un sous-espace fermé de $(R \hat{\otimes} \dot{R})'$, on a

$$N_R(C) = N_R(C_{\zeta+1}^R) \subseteq C_\zeta^R \check{\otimes} C_\zeta^R = C \check{\otimes} C.$$

Comme C contient le spectre de R, il en résulte que C est une coalgèbre injective. Par définition, on a $C \subseteq R^\nabla$.

On sait que $R^\nabla \subseteq C_1^R = R'$. Fixons ω et supposons que $R^\nabla \subseteq C_\lambda^R$ $\forall \lambda < \omega$.

(1) Si ω est un ordinal limite, alors $R^\nabla \subseteq \cap\left\{C_\lambda^R : \lambda < \omega\right\} = C_\omega^R$.

(2) Si $\omega = \lambda+1$, alors $R^\nabla \subseteq N_R^{-1}(R^\nabla \check{\otimes} R^\nabla) \subseteq N_R^{-1}(C_\lambda^R \check{\otimes} C_\lambda^R)$, d'où $R^\nabla \subseteq C_\omega^R$.

Par récurrence, il s'ensuit que $R^\nabla \subseteq C_\omega^R$ $\forall \omega$, et en particulier $R^\nabla \subseteq C_\zeta^R = C$, ce qui termine la démonstration.

REMARQUE. On peut démontrer que $R^\nabla = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n^R$ si ce dernier espace satisfait à la PAB.

La proposition suivante est un coanalogue de 1.2, qui affirme que le transposé d'une contraction de coalgèbres est une contraction d'algèbres.

PROPOSITION 4.2. <u>Soit</u> $f \in ALG(R,S)$, <u>où</u> R,S <u>sont deux algèbres de Banach. Posons</u> $f^\nabla = f'|_{S^\nabla}$. <u>Alors</u>

(1) $f^{\nabla}(S^{\nabla}) \subseteq R^{\nabla}$ et (2) $f^{\nabla} \in COALG(S^{\nabla}, R^{\nabla})$.

Démonstration. Encore une fois, on raisonne par récurrence. On va montrer que $f'(C^S_\omega) \subseteq C^R_\omega$ $\forall\, \omega$. D'après la définition, on a $f'(C^S_1) \subseteq C^R_1$. Supposons alors que $f'(C^S_\lambda) \subseteq C^R_\lambda$ $\forall\, \lambda < \omega$.

(a) Si ω est un ordinal limite, alors $f'(C^S_\omega) = f'(\{\cap\, C^S_\lambda : \lambda < \omega\})$ $\subseteq \cap\{f'(C^S_\lambda) : \lambda < \omega\} \subseteq C^R_\omega$.

(b) Si $\omega = \lambda + 1$ et $c \in C^S_\omega$, alors $N_S c \in C^S_\lambda \check{\otimes} C^S_\lambda$. Soient $x, y \in R$. Puisque $f \in ALG(R,S)$, on a

$$\langle N_R f'(c) - (f' \check{\otimes} f')N_S(c)\, ,\, x \otimes y\rangle = \langle f'(c), xy\rangle - \langle N_S(c), f(x) \otimes f(y)\rangle$$

$$= \langle c\, ,\, f(xy)\rangle - \langle c, f(x)f(y)\rangle = 0.$$

Il en résulte que $N_R f'(c) = (f' \check{\otimes} f')N_S(c) \in C^R_\lambda \check{\otimes} C^R_\lambda$. On trouve donc que $f'(c) \in N_R^{-1}(C^R_\lambda \check{\otimes} C^R_\lambda) \cap C^R_\lambda = C^R_\omega$.

Il s'ensuit que $f'(C^S_\omega) \subseteq C^R_\omega$ $\forall\, \omega$, et d'après 4.1 on a $f^{\nabla}(S^{\nabla}) \subset R^{\nabla}$.

Comme il est évident que $e_{S^{\nabla}} f^{\nabla} = e_{R^{\nabla}}$, le raisonnement de (b) fournit la démonstration de (2).

Soient $\mathcal{C}$ la catégorie des coalgèbres injectives et des contractions de coalgèbres et $\mathcal{A}$ la catégorie des algèbres de Banach et des contractions d'algèbres. D'après les résultats précédents, il est clair que

$$(\ )^{\nabla} : R \to R^{\nabla} \quad ; \quad f \to f^{\nabla}$$

est un foncteur contravariant $\mathcal{A} \to \mathcal{C}$ et que

$$(\ )' : C \to C' \quad ; \quad f \to f'$$

est un foncteur contravariant $\mathcal{C} \to \mathcal{A}$.

On établit une correspondance bijective entre $ALG(R\, ,\, C')$ et $COALG(C\, ,\, R^{\nabla})$

de la manière suivante :

π désigne toujours le plongement d'un Banach dans son bidual, et i désigne une inclusion. Si $f \in ALG(R,C')$, alors l'application

$$C \xrightarrow{\pi} (C')^{\nabla} \xrightarrow{f^{\nabla}} R^{\nabla}$$

est une contraction de coalgèbres. (On vérifie aussitôt que $\pi(C) \subseteq (C')^{\nabla}$). D'autre part, si $g \in COALG(C,R^{\nabla})$, alors

$$R \xrightarrow{\pi} R'' \xrightarrow{i'} (R^{\nabla})' \xrightarrow{g'} C'$$

est une contraction d'algèbres.

THEOREME 4.3. $(\ )'$ <u>et</u> $(\ )^{\nabla}$ <u>sont adjoints à droite</u>.

La démonstration ne pose pas de difficulté. Nous la laissons au lecteur.

A ce stade, on peut reprendre presque mot par mot le raisonnement des algébristes pour démontrer l'existence de $\mathcal{Z}(B'')$, où B est un Banach quelconque. Il convient cependant de dire qu'il est bien connu que l'algèbre de Banach libre sur B s'identifie à

$$S(B) = \mathbb{C} \oplus_{\ell^1} B \oplus_{\ell^1} (B \hat{\otimes} B)_{sym} \oplus_{\ell^1} (B \hat{\otimes} B \hat{\otimes} B)_{sym} \oplus_{\ell^1} \cdots\cdots$$

où, par exemple, $(B \hat{\otimes} B)_{sym}$ est le quotient de $B \hat{\otimes} B$ par l'intersection des noyaux des formes bilinéaires symétriques sur $B \times B$. La multiplication est définie à partir des relations

$$[b_1 \otimes \ldots \otimes b_n] . [b_{n+1} \otimes \ldots \otimes b_m] = [b_1 \otimes \ldots \otimes b_m]$$

où $[\ ]$ désigne une classe d'équivalence et $b_i \in B$ $(1 \leq i \leq m)$.

THEOREME 4.4. <u>Soit</u> B <u>un espace de Banach</u>. <u>Alors</u> $\mathcal{Z}(B'') = [S(B')]^{\nabla}$.

<u>Démonstration</u>. Voir [7, pp. 126-128]. Signalons cependant que l'application

$p : \mathcal{Z}(B'') \to B''$ exigée par la définition est définie par

$$[S(B')]^{\nabla} \xrightarrow[j]{} [S(B')]' \xrightarrow[i']{} B''$$

où j est l'inclusion et $i : B' \longrightarrow S(B')$; $b' \longrightarrow (0, b', 0, 0, \ldots\ldots)$.

Ceci permet de donner à nouveau une

Démonstration de 3.3. On plonge B dans son bidual. D'après 3.2 et 4.4, il suffit de trouver un atome a de $\mathcal{Z}(B'')$ tel que $p(a) \in B$. Comme précédemment, on est confus de leur profusion. Puisque $\mathcal{Z}(B'') = [S(B')]^{\nabla}$, les atomes de $\mathcal{Z}(B'')$ sont précisément les éléments du spectre de $S(B')$. Or, le dual de $S(B')$ est

$$\mathbb{C} \oplus_{\ell^\infty} B'' \oplus_{\ell^\infty} L_2(B') \oplus_{\ell^\infty} L_3(B') \oplus_{\ell^\infty} \cdots$$

où $L_n(B')$ désigne les formes n-linéaires continues symétriques sur $B' \times \ldots \times B'$. Il en résulte que les éléments du spectre de $S(B')$ sont de la forme .

$$1 \oplus \varphi \oplus (\varphi \otimes \varphi) \oplus (\varphi \otimes \varphi \otimes \varphi) \oplus \ldots$$

où φ est un élément de la boule unité de B''. D'après la définition de p, on a $p(1 \oplus \varphi \oplus (\varphi \otimes \varphi) \oplus \ldots) = \varphi$, et en prenant φ dans la boule unité de B, la démonstration s'achève.

Pour terminer, donnons une nouvelle démonstration de 3.1. Remarquons que ℓ^∞_K est un bidual et que $[\ell^1(K)]' = \ell^\infty_K$. Il s'ensuit que $\mathcal{Z}(\ell^\infty_K) = S(\ell^1(K))$, et on démontre sans difficulté que $S(\ell^1(K)) = \ell^1(S_K)$ où S_K est le semigroupe libre sur K lettres. Mais on sait déjà que $[\ell^1(S_K)]^{\nabla} = AP(S_K)$. c.q.f.d.

REFERENCES

[1] DELEEUW, K . and GLICKSBERG, I. Applications of almost periodic compactifications. Acta Math. 105 (1961), 63-97.

[2] DELEEUW, K. and GLICKSBERG, I. Almost periodic functions on semigroups. Acta Math. 105 (1961), 99-140.

[3] FOX, T Ph D. Thesis, McGill University, Montréal, 1976.

[4] HOFFMAN, K. H. and MOSTERT, P S. Elements of compact semigroups. C. E. Merrill books (1966).

[5] GROTHENDIECK, A. Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Mem. Amer. Math. Soc. 16 (1955).

[6] KITCHEN, J. Normed modules and almost periodicity. Monat. für Math. 70 (1966), 233-243.

[7] SWEEDLER, M. E. Hopf algebras. Benjamin (1969).

[8] TONGE, A. M. Translation invariance, compact semigroups and injective coalgebras. Analyse Harmonique d'Orsay, 1976, n° 185.