

UNIVERSITE DE PARIS-SUD  
MATHEMATIQUES  
Bâtiment 425  
91405 ORSAY CEDEX  
(FRANCE)

—ooOoo—

SEMINAIRE D'ANALYSE  
HARMONIQUE

*Année 1989/90*

**UNIVERSITE DE PARIS-SUD**  
**MATHEMATIQUES**  
Bâtiment 425  
**91405 ORSAY CEDEX**  
**(FRANCE)**

—ooOoo—

**SEMINAIRE D'ANALYSE**  
**HARMONIQUE**

*Année 1989/90*

## TABLE DES MATIERES

Présentation du séminaire	1
A. B. ALEKSANDROV	
On the Hardy class of functions harmonic in the half-space	9
G. BOURDAUD	
Le calcul fonctionnel dans les espaces de Sobolev	11
G. DAVID & S. SEMMES	
Intégrales singulières et régularité des sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$	18
A. H. DOOLEY	
Les G-mesures	37
J.-P. KAHANE	
Une construction acrobatique de Robert Kaufman	49
P. G. LEMARIE	
Deux constructions de bases d'ondelettes : ondelettes à trace et ondelettes interpolantes	56
Lee LORCH	
Report on some higher monotonicity properties of Sturm-Liouville functions	65
V. NESTORIDIS & S. K. PICHORIDES	
The circular structure of the set of limit points of partial sums of Taylor series	71
M. PAPADIMITRAKIS	
Best uniform approximation by bounded analytic functions	78
S. K. PICHORIDES	
On a recent result of A. Giannopoulos on sections of convex symmetric bodies in $\mathbb{R}^n$	83
Martine QUEFFELEC	
Ubiquité et paradoxes des suites automatiques	87

**B. SAFFARI**

Barker sequences and Littlewood's "two-sided conjectures" on  
polynomials with  $\pm 1$  coefficients 139

**A. L. VOLBERG**

Un théorème de Dulac Ecalle Il'yashenko Martinet Moussu Ramis  
étendu aux fonctions quasi-analytiques 152

UNIVERSITE DE PARIS-SUD, ORSAY

SEMINAIRE D'ANALYSE HARMONIQUE

Année 1989-1990

—ooOoo—

On trouvera ci-dessous la liste des conférences qui ont été données dans le cadre du Séminaire d'analyse harmonique d'Orsay. La plupart d'entre elles sont accompagnées d'un résumé. Celles marquées d'un astérisque ont été rédigées et font l'objet du présent fascicule. Nous remercions vivement les conférenciers qui ont eu la gentillesse d'y participer.

*(La liste est établie alphabétiquement selon le nom des conférenciers)*

**ALEKSANDROV A. B.**

(Université de Leningrad)

**Spaces and operators related to a given inner function  
in the unit disc**

[  $\theta^*(H^p) = \{f \in L^p(\mathbf{T}), f \in H^p, \theta \bar{f} \in H_0^p\}$  where  $\theta$  is the given inner function. Given  $\alpha \in \mathbf{T} = \partial\mathbb{D}$  let  $\sigma_\alpha$  be the measure defined by

$$\operatorname{Re} \frac{\alpha + \theta}{\alpha - \theta} = \int \frac{1 - |z|^2}{|z - \zeta|^2} d\sigma_\alpha(\zeta).$$

D. Clark proved that the  $L^2(\mathbf{T}, |d\zeta|)$  and  $L^2(\mathbf{T}, d\sigma_\alpha(\zeta))$  norms are equal on  $\theta^*(H^2) \cap C(\mathbf{T})$ . The corresponding operator  $\theta^*(H^2) \rightarrow L^2(\sigma_\alpha)$  and its adjoint are investigated in the context of  $\theta^*(H^p)$  and  $L^p(\sigma_\alpha)$ . The operator  $V_\mu$  defined by  $V_\mu f = \frac{(\mu f)_+}{\mu_+}$ ,  $\mu$  being a given probability measure on  $\mathbf{T}$  and  $+$  meaning the Taylor part of the Fourier expansion, plays a central role.]

**On the Hardy class of functions harmonic in the half space<sup>(\*)</sup>**

**BOURDAUD Gérard**  
(Université de Paris 7, Jussieu)

**Calcul symbolique dans les espaces de Sobolev**

[On montre que l'espace  $H^s(\mathbb{R}^n)$  est un treillis si et seulement si  $s > \frac{3}{2}$ .]

**Le calcul fonctionnel dans les espaces de Sobolev<sup>(\*)</sup>**

[On caractérise très simplement la classe des fonctions, de la variable réelle, qui opèrent, par composition à gauche, sur l'espace de Sobolev  $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ , pour tout entier positif  $m$  et tout  $p \in [1, +\infty]$  (à l'exception des cas  $m = n/p \geq 2$ .)]

**BOURGAIN Jean**  
(Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Bures/Yvette, France)

**Problèmes de convergence presque sûre liés à la théorie des nombres**

[Voici deux exemples. On considère les sommes Riemanniennes

$$R_n f(x) = \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} f\left(x + \frac{i}{n}\right)$$

où  $f$  est une fonction dans  $L^\infty(T)$ . Les  $R_n f$  ne convergent pas presque sûrement en général. On montre que  $R_n f(x)$  a une densité logarithmique pour presque tout  $x$ . La question pour la densité usuelle reste ouverte. Soit  $0 < \xi < 1$  et  $\nu_j = 1/2(\delta_{\xi^j} + \delta_{-\xi^j})$ ,  $\mu_k = \nu_1 * \nu_2 * \dots * \nu_k$

et  $\mu = \underset{1}{*} \nu_k$ . On montre que la propriété de convergence presque sûre  $f \times \mu_k \rightarrow f * \mu$  pour

toute fonction  $f \in L^2$  est équivalente au fait que  $\xi$  est un nombre algébrique. Dans les démonstrations, on fait appel au théorème de Rota sur les contractions et des extensions de celui-ci.]

**Sur le problème de Busemann-Petty**

[C'est le problème d'existence dans  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 3$ ) de convexes symétriques  $K$  tel que  $\text{Vol}_n K = \text{Vol}_n B_n$  ( $B_n$  = la boule) et  $\text{Vol}_{n-1}(K \cap L) < \text{Vol}_{n-1}(B_n \cap L)$  pour tout sous-espace  $L$  de dimension  $n - 1$ . On considère ici le cas où  $K$  est une petite perturbation de  $B_n$  (pour la distance de Hausdorff). On montre qu'il y a des exemples en dimension  $n \geq 7$  mais qu'il n'y en a pas pour  $n = 3$ . On fait appel à des méthodes variationnelles et de l'analyse en harmoniques sphériques.]

**BYRNES J. S.**

(Prometheus Inc. and the Univ. of Massachusetts at Boston)

**Polynomials with restricted coefficients and their applications**

[To the surprise of most mathematicians, polynomials arise in a very natural way in the study of antenna arrays, digital filters, and other important objects of interest in electrical engineering. Furthermore, most electrical engineers are unaware of the large body of "pure" research, undertaken by such noteworthy mathematicians as Hardy, Littlewood, Erdős, Kahane, and Newman throughout this century, that directly relates to these applications. Thus, there are two parallel tracks of research that have been ongoing for more than fifty years, with only a minimum amount of cross-fertilization. We outline these two paths, show how their intersection has recently been enlarged, and indicate directions for future research.]

**CHRIST Michael**

(University of California at Los Angeles)

**Finite type and the  $\bar{\partial}$  equation with weights**

[The equations  $\bar{\partial}$  on domains in  $\mathbb{C}^2$  and  $\bar{\partial}_b$  on three-dimensional CR manifolds, assuming finite type, have been studied with respect to the regularity of solutions in various function spaces. In analyzing certain "model" cases by a partial Fourier transform, one is led to study  $\bar{\partial}$  on weighted spaces  $L^2(\mathbb{C}^1, e^{-\varphi})$  with  $\varphi$  subharmonic. Assuming  $\Delta\varphi$  to be a doubling measure, we obtain rather precise pointwise estimates for the relative fundamental solution of  $\bar{\partial}$ . The method is elementary and leads to a relatively simple proof of estimates for  $\bar{\partial}_b$  on the model domains. The talk will not presuppose any background in several complex variables.]

**DAVID Guy**

(Université de Paris-Sud, Orsay)

**Intégrales singulières sur des surfaces I (généralités)<sup>(\*)</sup>**

[On se demandera pourquoi chercher pour quels ensembles  $S \subset \mathbb{R}^n$  on peut définir des opérateurs bornés sur  $L^2(S)$  à partir des noyaux singuliers habituels (comme le noyau de Cauchy). On verra quelques exemples de surfaces pour lesquelles on a un résultat positif.]

**Intégrales singulières sur des surfaces II (projections)<sup>(\*)</sup>**

[On abordera de manière un peu plus précise un des aspects du problème mentionné au premier exposé : l'existence de directions telles que la projection de  $S \cap B(x, r)$  ait une mesure assez grande. On verra un théorème de P. Jones sur l'existence de restrictions bilipschitziennes à une application lipschitzienne donnée.]

**DOOLEY A. H.**

(University of New South Wales, Australie)

**Les mesures ergodiques sont de type produit faible**

[Une mesure  $\mu$ , quasi-invariante sur un produit  $X = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{\ell(n)}$ , est un produit si pour chaque  $n$ ,

$$\mu(A_1 \times \cdots \times A_n \times A_{n+1} \times \cdots) = \mu(A_1 \times \cdots \times A_n \times \mathbb{Z}_{\ell(n+1)} \times \cdots) \mu(\mathbb{Z}_{\ell(1)} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{\ell(n)} \times A_{n+1} \times \cdots).$$

Il existe des mesures ergodiques qui ne sont pas des produits, mais nous montrerons que cependant chaque mesure ergodique sur  $X$  est équivalente à une mesure  $\mu$  de type produit faible, c'est-à-dire que pour chaque  $n$  il existe  $m > n$  tel que

$$\begin{aligned} & \mu(A_1 \times \cdots \times A_n \times \mathbb{Z}_{\ell(n+1)} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{\ell(m-1)} \times \cdots \times A_m \times \cdots) = \\ & = \mu(A_1 \times \cdots \times A_n \times \mathbb{Z}_{\ell(n+1)} \times \cdots) \mu(\mathbb{Z}_{\ell(1)} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{\ell(m-1)} \times A_m \times \cdots). \end{aligned}$$

**Les G-mesures<sup>(\*)</sup>**

[Une G-mesure est une généralisation d'un produit de Riesz, où l'on remplace les  $1 + a_n \cos 3^n t$  par des fonctions  $g_n(t)$ . Quand est-ce qu'on a une limite unique ? Peut-on obtenir une mesure arbitraire ainsi ? Pour quelle suites,  $\{g_n\}$  obtient-on un produit ?]

**FAN Ai hua**

(Université de Paris-Sud, Orsay)

**Deux méthodes de décomposition des mesures selon la dimension  
(déterministe, probabiliste). Recouvrements aléatoires,  
produits de poids aléatoires indépendants.**

[Thèse disponible en publication mathématique d'Orsay, bibliothèque (bât. 425), 91405 Orsay Cedex]

**Produits de poids aléatoires indépendants,**

**et applications aux produits de Riesz et aux recouvrements aléatoires**

[Conditions d'équivalence et conditions d'orthogonalité pour des mesures aléatoires obtenues au moyen de poids aléatoires indépendants, et applications selon le titre.]

**GOUREVITCH Dimitri**

(Moscou et IHES, Paris)

**Equation de Yang-Baxter et géométrie différentielle**

[L'exposé prend les équations de Yang-Baxter et la construction des groupes quantiques à partir du début, et présente ensuite les sujets d'intérêt actuel du conférencier.]



**KAHANE Jean-Pierre**  
(Université de Paris-Sud, Orsay)

**Recouvrements aléatoires et processus de Lévy**

[Démonstration d'un théorème de Fitzsimmons, Fristedt et Shepp liant les recouvrements poissonniens et les valeurs d'un subordinateur.]

**Une construction extraordinaire de R. Kaufman<sup>(\*)</sup>**

[Il s'agit d'un ensemble de type  $M_0$ , qui reste de type  $M_0$  par tout difféomorphisme, mais tel qu'aucune mesure-pseudofonction qu'il porte ne reste mesure-pseudofonction par tout difféomorphisme. C'est un jeu de construction subtil, à partir d'ensembles self-similaires d'une part et d'ensembles à lacunes d'autre part, où les ensembles analytiques et le théorème de capacibilité de Choquet sont les ingrédients de base.]

**KAIMANOVITCH V.**

(Leningrad)

**Liouville property and entropy for random walk in random environment**

**LEDRAPPIER François**

(Université de Paris VI)

**Dimension de certains graphes de Weierstrass**

**KATZNELSON Yitzhak**

(Stanford University, USA)

**Quelques remarques sur le point de vue dynamique  
dans les problèmes combinatoires**

**LORCH Lee**

(York University, Canada)

**Higher monotonicity properties of Sturm-Liouville functions<sup>(\*)</sup>**

[The solutions of the Sturm-Liouville differential equation  $y'' + f(x)y = 0$  reflect the higher monotonicity properties of  $f'(x)$ . This has useful application to special functions. For simple monotonicity, this was initiated by Ch. Sturm (Liouville's Journal, I, 1836). Extensions to higher monotonicity began with the speaker and Peter Szegő (A. Math. 109, 1963) and imply the complete monotonicity of many quantities arising, say, from Bessel functions. Many open problems remain. Current contributors include the Canadian M. Muldoon, and J. Vosmanský, M. Hacik, F. Neuman, Z. Dozslá of Czechoslovakia.]

**MAKAROV N. G.**  
(Institut Steklov, Leningrad)

**Analyse multifractale**

**PAPADIMITRAKIS M.**  
(Université de Wisconsin-Madison, USA)

**Best uniform approximation by bounded analytic function<sup>(\*)</sup>**

[On donnera un contre exemple pour la conjecture selon laquelle, si  $f$  et  $\tilde{f}$  appartiennent à  $C(T)$  alors la meilleure approximation  $g \in H^\infty$  de  $f$  est continue. On donnera aussi deux conditions qui entraînent la continuité de  $g$ .]

**PELLER V. V.**  
(Université de Leningrad)

**Caractères bornés et continus des opérateurs de meilleure approximation  
par les fonctions méromorphes**

**PICHORIDES S. & V. NESTORIDIS**  
(Université de Crète, Grèce)

**Structure circulaire des sommes partielles des séries de Taylor.**

**Historique : le théorème de Marcinkiewicz et Zygmund.**

**Problème : une version élémentaire.<sup>(\*)</sup>**

**PICHORIDES S.**  
**Sur le théorème  $\Lambda(p)$  de Bourgain**

**Quelques remarques sur les sections des solides convexes**

[Si  $n \geq 7$  il existe deux solides  $A, B$  dans  $\mathbb{R}^n$  convexes, symétriques par rapport à l'origine, de même volume et tels que toute section de  $A$  par un hyperplan qui passe par l'origine est d'un  $(\mathbb{R}^{n-1})$  volume plus petit que le  $(\mathbb{R}^{n-1})$  volume de la section de  $B$ . (Exposé d'après le travail de A. Giannopoulos)]

## QUEFFELEC Martine

(Université de Paris-Nord, Villetaneuse)

Série de trois conférences sur le sujet suivant :

### Ubiquité et paradoxes des suites automatiques<sup>(\*)</sup>

[Qu'y a-t-il de commun entre la courbe de Von Koch, l'ensemble triadique de Cantor, le pavage de Penrose, la suite de Fibonacci, les polynômes de Rudin-Shapiro, les produits de Riesz, etc... ? Tous ces objets ont un rapport direct avec les automates ou les substitutions.

Les suites automatiques, à de nombreux égards, sont les suites les plus simples après les suites périodiques. Pourtant, comment expliquer les propriétés extrémales de la suite de Thue-Morse ou des suites de Rudin-Shapiro ?

Après l'étude combinatoire de ces suites nous poursuivons avec leur analyse spectrale dont nous donnons pour finir des applications.]

## REVESZ Szilard Gy.

(Institut Mathématique de l'Académie des Sciences de Hongrie)

### On Beurling's zeta functions

[Beurling a introduit les fonctions

$$\zeta(s) = \exp \int x^{-s} d\Pi(x) = 1 + \int x^{-s} dN(x)$$

et étudie le comportement asymptotique de  $\Pi(x)$  sous des hypothèses diverses concernant  $N(x)$  (la plus simple étant  $N(x) = Ax + O\left(\frac{x}{\log x}\right)$  avec  $\gamma > \frac{3}{2}$ ). Il s'agira ici d'hypothèses de la forme  $N(x) = xP(x) + R(x)$ , et de conclusions 1°) sur les zéros de  $\zeta(s)$  ; 2°) sur le comportement asymptotique de  $\Pi(x)$ .]

## SAFFARI Bahman

(Université de Paris Sud, Orsay)

Série de trois conférences sur le sujet suivant :

### Des travaux parallèles sur une période de 40 ans (1949-1989) : suites de Golay et les polynômes de Rudin-Shapiro.<sup>(\*)</sup>

[L'étude des couples  $P, Q$  de polynômes à coefficients  $\pm 1$  et tels que  $|P|^2 + |Q|^2 = \text{constante}$  (sur tout le cercle unité) possède au moins trois origines totalement indépendantes : (I) la spectrométrie des radiations infrarouges en 1949 ; (II) leur redécouverte en 1960 (problèmes de radars) ; (iii) les célèbres polynômes de Rudin-Shapiro en sont des cas particuliers, mais furent étudiés d'un autre point de vue par H. S. Shapiro dès 1951, en liaison avec des problèmes extrémaux de Salem et de Hardy-Littlewood et remontant à un résultat de S. N. Bernstein (1914) sur la convergence absolue des séries de Fourier. Le sujet est riche en redécouvertes, et les liens entre ces divers aspects furent mis à jour en 1987. Malgré plusieurs résultats récents (1985-1989), il subsiste des problèmes ouverts difficiles.]

**TAYLOR J. C.**

(Université McGill, Canada)

**Comportement à l'infini du mouvement brownien sur un espace symétrique**

**VAN DEN BERG M.**

(Edinburgh)

**On the spectrum of the Dirichlet Laplacian**

**VOLBERG A.**

(Institut Steklov, Leningrad)

Série de trois conférences sur les sujets suivants :

**Les fonctions presque analytiques et la mesure harmonique**

**Un théorème d'Ecalte-II'yashenko-Martinet-Ramis pour les champs quasi analytiques<sup>(\*)</sup>**

**On the harmonic measure of discontinuous fractals**

**WEN Zhi ying**

(Université de Wuhan, Hubei, Chine)

**Dimension de Hausdorff des graphes des séries trigonométriques lacunaires**

[Soit  $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \cos(\lambda_n x)$  une série trigonométrique avec  $|a_{n+1}| \leq \alpha |a_n|$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $x \in I = [0, 2\pi]$ ,  $\lambda_n \in \mathbb{R}^+$  ; et soit  $\Gamma(f, I)$  le graphe de  $f(x)$  sur  $I$ . Sous certaines hypothèses sur  $a_n$  et  $\lambda_n$ , on démontre

$$\dim \Gamma(f, I) = 2 + \liminf_{n \rightarrow \infty} \log |a_n| / \log \lambda_n$$

où  $\dim$  désigne la dimension de Hausdorff.

Comme corollaire, on démontre que : soit  $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$  une suite de nombres positifs satisfaisant  $\lambda_{n+1}/\lambda_n \uparrow \infty$  et  $\log \lambda_{n+1}/\log \lambda_n \rightarrow 1$  ; et soit  $f(x) = \sum_{n \geq 0} \lambda_n^{(s-2)n} \cos(\lambda_n x)$ , où  $1 < s < 2$ , alors

$$\dim \Gamma(f, I) = s.$$

De plus, on construit explicitement une série trigonométrique dont le graphe est de dimension 2.]

**ZINSMEISTER Michel**

(Université de Bordeaux, France)

**Absolue continuité de la valeur au bord des applications quasi conformes du disque**

ON THE HARDY CLASS OF FUNCTIONS HARMONIC IN  
THE HALF-SPACE

A. B. ALEKSANDROV

Set  $\mathbb{R}_+^{n+1} = (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n = \{(x_0, x) : x_0 > 0, x \in \mathbb{R}^n\}$ .

Let  $u$  be a harmonic function in  $\mathbb{R}_+^{n+1}$ ,  $u = \nabla u$ ,

$$H^p(\mathbb{R}^n) = \{u : u = \nabla u, Mu \in L^p(\mathbb{R}^n)\} \quad (0 < p < +\infty),$$

where  $(Mu)(x) = \sup_{|x-y|<t} |u(t, y)| \quad (x \in \mathbb{R}^n)$ ,

$$\|u\|_{H^p} = \|Mu\|_{L^p}.$$

Set  $L_{n+1}^p = \{\varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n) : \varphi_j \in L^p(\mathbb{R}^n) \quad (0 \leq j \leq n)\}$ ,

$$\|\varphi\|_{L_{n+1}^p} = \left\| \left( \sum_{j=0}^n \varphi_j^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p}.$$

Consider the operator  $T : H^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_{n+1}^p(\mathbb{R}^n)$ ,

$$(Tu)(x) = \lim_{t \rightarrow 0} u(t, x).$$

**THEOREM 1** (E. M. Stein, G. Weiss).

If  $p \in (\frac{n-1}{n}, +\infty)$  then  $T$  is an isomorphic imbedding.

If  $p \in [\frac{n-1}{n}, +\infty)$  then  $\text{Ker } T = \{0\}$ .

**COROLLARY 1.**  $T(H^p(\mathbb{R}^n)) \neq L_{n+1}^p(\mathbb{R}^n) \quad (\frac{n-1}{n} \leq p < +\infty)$ .

Set  $\mathcal{X}^p(\mathbb{R}^n) = \{\varphi_0 \in L^p(\mathbb{R}^n) : (\varphi_0, 0, \dots, 0) \in T(H^p(\mathbb{R}^n))\}$ .

Let  $X^p(\mathbb{R}^n)$  be the closure of  $\mathcal{X}^p(\mathbb{R}^n)$  in  $L^p(\mathbb{R}^n)$ .

**COROLLARY 2.**  $X^p(\mathbb{R}^n) = \mathcal{X}^p(\mathbb{R}^n) \quad (\frac{n-1}{n} < p < +\infty)$ .

COROLLARY 3.  $X^p(\mathbb{R}^n) \neq L^p(\mathbb{R}^n)$  ( $\frac{n-1}{n} \leq p < +\infty$ ).

Of course  $X^p(\mathbb{R}^n) = \{0\}$  for  $p \geq 1$ .

THEOREM 2. If  $p \in (0, \frac{n-1}{n+1})$  then  $T(H^p(\mathbb{R}^n)) = L^p_{n+1}(\mathbb{R}^n)$ .

COROLLARY 1.  $\text{Ker } T \neq \{0\}$  ( $0 < p < \frac{n-1}{n+1}$ ).

COROLLARY 2.  $X^p(\mathbb{R}^n) = X^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$  ( $0 < p < \frac{n-1}{n+1}$ ).

Let  $Tu = (T_0u, T_1u, \dots, T_nu)$ .

THEOREM 3 (H. Helson, D. Sarason, J. Neuwirth, D. J. Newman) ( $n = 1$ ). Let  $u \in H^p(\mathbb{R})$ ,  $T_0u \geq 0$  a.e.,  $T_1u = 0$  a.e.,  $p > 1/2$ . Then  $u \equiv 0$ .

THEOREM 4. Let  $u \in H^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $T_0u > 0$  a.e.,  $T_ju = 0$  a.e. ( $1 \leq j \leq n$ ),  $p \geq \frac{2n-1}{2n}$ . Suppose that  $T_0u \in L^q(\mathbb{R}^n)$  for some  $q \leq 2p - 1$ . Then  $u \equiv 0$ .

THEOREM 5. Let  $p \in (0, \frac{n}{n+1})$ . Then there exists  $u \in H^p(\mathbb{R}^n)$  such that  $T_0u \geq 0$  a.e.,  $T_ju = 0$  a. e. ( $1 \leq j \leq n$ ) and  $\text{mes}\{T_0u > t\} \sim t^{-\frac{n}{n+1}}$  ( $t \rightarrow +\infty$ ).

THEOREM 6. Let  $X$  be a subspace of  $L^q(\mathbb{R}^n)$  invariant under the translations and dilations ( $0 < q \leq 1$ ). Suppose that there exists  $f \in X \setminus \{0\}$  such that  $f \geq 0$  a.e.,  $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap X$  for some  $p \geq \frac{1+q}{2}$ . Then  $X = L^q(\mathbb{R}^n)$ .

To prove Theorem 4 it is sufficient to use Theorem 6 for  $X = X^{q_0}(\mathbb{R}^n)$  ( $\frac{n-1}{n} \leq q_0 \leq 2p - 1$ ).

URSS, 198904, LENINGRAD  
Stary Peterhof, Bibliotechnaya  
plosh 2  
Faculté de Mathématique et Mécanique  
de l'Université de Leningrad

## LE CALCUL FONCTIONNEL DANS LES ESPACES DE SOBOLEV

Gérard BOURDAUD

### 1

Nous nous proposons de déterminer les fonctions de la variable réelle qui opèrent, par composition à gauche, sur l'espace de Sobolev  $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ , où  $m$  est un entier positif et  $p \in [1, +\infty]$ .

Il n'est pas besoin d'être grand clerc pour prévoir que les résultats dépendront fortement de la position de  $m$  par rapport à la valeur critique  $n/p$ . Pour  $m > n/p$ ,  $W^{m,p}$  est une algèbre de Banach de fonctions continues bornées, ce qui a deux conséquences : d'une part on dispose d'emblée du calcul fonctionnel analytique, d'autre part les conditions pour qu'une fonction opère seront nécessairement de nature locale. En revanche, pour  $m < n/p$ , il peut arriver que le calcul fonctionnel soit trivial ; en tout cas, on doit s'attendre à trouver des conditions globales.

Rappelons tout d'abord les résultats obtenus antérieurement sur cette question. Marcus et Mizel [MM] ont caractérisé les fonctions qui opèrent sur  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ , sauf dans le cas critique  $n = p \geq 2$ . Pour  $mp \geq n$ , on sait classiquement (voir, par exemple, [A]) que toute fonction  $F$  telle que  $F^{(j)} \in L^\infty$ , pour  $j = 1, \dots, m$ , opère sur  $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ .

Pour  $1 + (1/p) < m < n/p$ , Dahlberg a observé [D] que les seules fonctions régulières qui opèrent sur  $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$  sont les fonctions linéaires ; par contre les fonctions  $C^\infty$  à support compact opèrent sur  $W^{2,1}(\mathbb{R}^n)$ . Enfin Maz'ya (voir [A]) a mis en évidence une classe de fonctions  $F$  (incluant  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ) telles que  $f \in (W^{2,p})^+$  entraîne  $F \circ f \in W^{2,p}$ . (Nous dirons encore - abusivement - qu'une telle fonction opère sur  $(W^{2,p})^+$ ).

DEFINITION. On dit qu'une fonction  $g$  appartient à  $L^p(\mathbb{R})$  localement-uniformément s'il existe une constante  $M \geq 0$  telle que

$$\int_J |g(t)|^p dt \leq M,$$

pour tout intervalle  $J$ , de longueur 1.

Avant d'énoncer les résultats obtenus, observons qu'à l'exception de  $p = +\infty$ ,  $W^{m,p}$  ne contient pas de constante non nulle ; de sorte que la condition  $F(0) = 0$  sera toujours nécessaire pour que  $F$  opère sur  $W^{m,p}$  ; nous ne la répéterons pas systématiquement.

**THEOREME 1.**

- (i) Pour  $p > n$ , ainsi que pour  $n = p = 1$ , la condition  $F' \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$  est nécessaire et suffisante pour que  $F$  opère sur  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ .
- (ii) Pour  $p < n$ , ainsi que pour  $p = n > 1$ , la condition  $F' \in L^\infty(\mathbb{R})$  est nécessaire et suffisante pour que  $F$  opère sur  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ .

**THEOREME 2.** Pour  $mp > n$  et  $m \geq 2$ , ainsi que pour  $m = n \geq 2$  et  $p = 1$ , la condition  $F^{(m)} \in L_{loc}^p(\mathbb{R})$  est nécessaire et suffisante pour que  $F$  opère sur  $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ .

**THEOREME 3.**

- (i) Pour  $1 + (1/p) < m < n/p$ , les fonctions  $t \rightarrow ct$  sont les seules fonctions qui opèrent sur  $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ .
- (ii) Pour  $1 < p < n/2$ , les conditions suivantes sont nécessaires et suffisantes pour que  $F$  opère sur  $W^{2,p}(\mathbb{R}^n)^+$  :  $F' \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$ ,  $F'' \in L_{loc}^p(]0, +\infty[)$  et  $\sup_{t>0} t^{p-1} \int_{[t,2t]} |F''(s)|^p ds < +\infty$ .
- (iii) Pour  $n > 2$ , la condition  $F'' \in L^1(\mathbb{R})$  est nécessaire et suffisante pour que  $F$  opère sur  $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ .

**THEOREME 4.** Si  $p = n/m > 1$  et  $m \geq 2$ , les conditions suivantes sont nécessaires et suffisantes pour que  $F$  opère sur  $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$  :  $F' \in L^\infty$  et  $F^{(m)}$  appartient à  $L^p(\mathbb{R})$  localement-uniformément.

Nous allons, dans les lignes qui suivent, esquisser les démonstrations de ces quatre théorèmes ; on trouvera les preuves détaillées dans un article à paraître aux *Inventiones Mathematicae*.

**2**

Dans le cas  $m \geq n/p$  - ainsi que pour  $m = 1$  - on sait classiquement ([S],[A]) que les conditions  $F^{(j)} \in L^\infty$  ( $j = 1, \dots, m$ ) suffisent pour que  $F$  opère sur  $W^{m,p}$ . Ce qui est moins connu, c'est qu'on peut, dès qu'on a  $m \geq 2$ , remplacer  $F^{(m)} \in L^\infty$  par  $F^{(m)} \in L^p$ .

Voyons d'abord le cas  $m = 2$ , où il s'agit d'estimer la norme  $L^p$  de  $(F'' \circ f) D_j f \cdot D_k f$ . Une double intégration par parties et l'inégalité de Hölder conduisent à l'estimation

$$(1) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |F'' \circ f|^p |D_j f|^{2p} dx \leq (2p-1)^p \left( \int_{|s| \leq \|f\|_\infty} |F''(s)|^p ds \right) (\|f\|_\infty)^{p-1} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |(D_j)^2 f|^p dx \right).$$



Pour  $2 > n/p$ , on en tire aussitôt que la condition  $F'' \in L^p_{loc}$  suffit pour que  $F$  opère sur  $W^{2,p}$ . Pour  $p = 1$ , l'inégalité (1) se simplifie en

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F'' \circ f| (D_j f)^2 dx \leq \|F''\|_1 \| (D_j)^2 f \|_1 ;$$

cela montre que la condition  $F'' \in L^1$  suffit pour que  $F$  opère sur  $W^{2,1}(\mathbb{R}^n)$ , quel que soit l'entier  $n$ .

Passons au cas général  $m \geq \sup(n/p, 2)$ . Soit  $F$  une fonction telle que  $F^{(m)}$  appartienne à  $L^p$  localement-uniformément et  $F' \in L^\infty$ . Un argument standard d'interpolation nous donne  $F^{(j)} \in L^\infty$  ( $j = 2, \dots, m-1$ ) ; ainsi la seule estimation non classique sera celle de

$$\mathcal{F} = \int |F^{(m)} \circ f|^p |D_j f|^{mp} dx.$$

Introduisons une partition de l'unité

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi^2(t - k) = 1 \quad (\forall t \in \mathbb{R}),$$

où  $\psi$  est une fonction positive, de classe  $C^1$ , à support compact, et posons  $H_k(t) = \int_{s \geq t} |F^{(m)}(s)|^p \psi(s - k) ds$  ; par hypothèse sur  $F$ , il existe  $M \geq 0$  tel que  $\|H_k\|_\infty \leq M$ , pour tout  $k$ . Une intégration par parties conduit à  $\mathcal{F} \leq M(\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2)$ , où

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= (mp - 1) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int \psi(f(x) - k) | (D_j)^2 f | |D_j f|^{mp-2} dx, \\ \mathcal{F}_2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int |\psi'(f(x) - k)| |D_j f|^{mp} dx. \end{aligned}$$

Le théorème de Sobolev, appliqué à  $W^{m-1,p}$  et  $W^{m-2,p}$ , donne alors

$$\mathcal{F}_1 \leq C \|f\|^{mp-1}, \quad \mathcal{F}_2 \leq C \|f\|^{mp}$$

(où  $\|f\|$  désigne la norme de  $f$  dans  $W^{m,p}$ ).

Le calcul fonctionnel sur le cône positif  $(W^{2,p})^+$  repose sur une variante de l'inégalité (1), due pour l'essentiel à Maz'ya ([MA], p. 363) :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |F'' \circ f|^p |D_j f|^{2p} dx \leq \\ (2p - 1)^p (p - 1)^{1-p} \left( \sup_{t > 0} t^{p-1} \int_{s \geq t} |F''(s)|^p ds \right) \left( \int_{\mathbb{R}^n} | (D_j)^2 f |^p dx \right), \end{aligned}$$

pour toute fonction positive  $f$ .

L'obtention de conditions nécessaires est, on s'en doute, plus subtile. Elle repose sur deux idées. La première, c'est que toute fonction qui opère le fait de façon bornée. Pour être précis, si  $F$  est une telle fonction, alors, à tout compact  $K$  de  $\mathbb{R}^n$ , sont associés des nombres positifs  $\delta$  et  $M$  tels que, pour toute fonction  $f \in W^{m,p}$ , portée par  $K$ , l'inégalité  $\|f\| \leq \delta$  entraîne  $\|F \circ f\| \leq M$  (voir [BK1]).

Supposons, pour fixer les idées, qu'on cherche à montrer  $|F(a + \lambda) - F(a)| \leq C\lambda$ , pour  $a \in \mathbb{R}$  et  $\lambda > 0$  ; il paraît judicieux de poser

$$f(x) = \lambda g(x/r) + a\varphi(x/R),$$

où  $g$  et  $\varphi$  sont des fonctions de  $W^{m,p}$ , portées par la boule unité, et  $r$  est petit devant  $R$ , lui-même inférieur à 1. L'estimation

$$(2) \quad \|\varphi(\cdot/R)\| = O(R^{(n/p)-m}) \quad (R \rightarrow 0),$$

et l'hypothèse  $m < np$  permettent de choisir  $R$  de sorte qu'on ait  $\|a\varphi(\cdot/R)\| \leq \delta/2$ . Le choix de  $r$  pose alors problème. Pour achever la démonstration, il semble souhaitable que  $\lambda r^{(n/p)-m}$  soit de l'ordre de grandeur de  $\delta$  ; mais cela peut être incompatible avec le fait que  $r$  soit petit devant  $R$ .

C'est ici qu'intervient la seconde idée, due pour l'essentiel à Igari [I]. On modifie la fonction  $f$  en posant

$$f(x) = \lambda \sum_{|k_j| \leq N} g((x/r) - k) + a\varphi(x/R)$$

(la somme est étendue aux  $k \in \mathbb{Z}^n$  tels que  $|k_j| \leq N$ , pour tout  $j = 1, \dots, n$ ). On demande alors que  $\lambda r^{(n/p)-m} N^{n/p}$  soit de l'ordre de grandeur de  $\delta$  et que  $rN$  soit petit devant  $R$ . Le choix d'un grand entier  $N$  permet de satisfaire ces deux conditions.

Les diverses conditions nécessaires sur  $F$  s'obtiennent en jouant sur les paramètres  $a$  et  $\lambda$  et sur les fonctions auxiliaires  $g$  et  $\varphi$ .

Ainsi, en prenant  $a = 0$  et  $g(x) = x_1$  au voisinage de 0, on obtient

$$(3) \quad \int_{[-\lambda, +\lambda]} |F^{(m)}(t)|^p dt \leq M_1 \lambda^{1-p(m-1)}.$$

Pour  $1 + (1/p) < m < n/p$ , la relation (3) entraîne  $F^{(m)} = 0$  ; le calcul fonctionnel est alors trivial. Pour  $m = 2$  et  $p = 1$ , la relation (3) signifie exactement  $F'' \in L^1$  !

Examinons maintenant le cas où  $F$  opère sur  $(W^{2,p})^+$ , avec  $p > 1$ . Choisissons  $a = 0$  et la fonction  $g$ , positive, telle que  $g(x) = x_1$  pour  $x_1 \in [\epsilon, 2\epsilon]$  et  $x$  voisin de 0 ; on obtient alors

$$\int_{[\lambda, 2\lambda]} |F''(t)|^p dt \leq M_2 \lambda^{1-p},$$

qui n'est autre que la condition souhaitée sur  $F''$ . Il nous reste à voir que  $F'$  est bornée ; pour cela, on prend  $a > 0$ ,  $g(x) = (x_1)^2$  et  $\varphi(x) = 1$  au voisinage de 0 ; cela nous donne

$$\int_{[a, a+\lambda]} |F'(t)|^p dt \leq M_3 \lambda ;$$

d'où  $|F'(a)| \leq (M_3)^{1/p}$ , pour presque tout  $a > 0$ .

#### 4

Il nous reste à traiter le cas critique  $p = n/m > 1$ . L'estimation (2) devient alors  $\|\varphi(\cdot/R)\| = O(1)$  ( $R \rightarrow 0$ ), de sorte qu'il n'est plus possible d'"ajuster" la norme de  $a\varphi(\cdot/R)$ . On utilise alors un autre résultat de Maz'ya ([MA], proposition 2, page 393) :

LEMME. Il existe une famille  $(\theta_\epsilon)_{0 < \epsilon \leq 1/2}$  de fonctions positives et des constantes  $C = C(n, m)$  (pour  $n > m \geq 1$ ) telles que :

- (i)  $\theta_\epsilon(x) = 1$  pour  $|x| \leq \epsilon$ ,  $\theta_\epsilon(x) = 0$  pour  $|x| \geq 1$ ,
- (ii)  $\theta_\epsilon$  appartient à  $W^{m, n/m}(\mathbb{R}^n)$ , avec une norme majorée par  $C(\log \epsilon^{-1})^{1-(n/m)}$ .

On est conduit à une nouvelle version du "peigne d'Igari" :

$$f(x) = \lambda \sum_{|k_j| \leq N} g((x/r) - k) + a\theta_\epsilon(x).$$

$\epsilon$  est choisi assez petit pour avoir  $\|a\theta_\epsilon\| \leq \delta/2$ ,  $r$  est petit devant  $\epsilon$ , enfin  $\lambda N^m$  sera de l'ordre de grandeur de  $\delta$ . Divers choix de la fonction  $g$  permettent d'obtenir les conditions nécessaires des théorèmes 1 et 4. Le lecteur trouvera les calculs détaillés dans l'article à paraître.

#### 5

Nous n'avons pas cherché à déterminer, dans tous les cas, les fonctions qui opèrent sur  $(W^{m,p})^+$ . Le résultat obtenu pour  $(W^{2,p})^+$  ( $1 < p < n/2$ ) a l'intérêt de constituer une alternative raisonnable à la trivialité du calcul fonctionnel sur  $W^{2,p}$ . Rappelons que le calcul fonctionnel est trivial sur  $(W^{m,p})^+$ , pour  $2 + (1/p) < m < n/p$  [D] ; on ignore s'il l'est également sur  $(W^{3,1})^+$ , pour  $n \geq 4$ .

Par interpolation non linéaire, les conditions suffisantes dégagées ici se répercutent sur les espaces de Besov  $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ . Nous avons déjà observé [B] que  $F'' \in L^1$  suffit pour que  $F$  opère sur  $B_1^{s,q}(\mathbb{R}^n)$  ( $1 \leq s < 2$ ) ; cette condition n'est pas nécessaire, car la fonction  $F(t) = |t|_y$  opère aussi [BM] ; par ailleurs la condition  $F' \in L^\infty$  et  $F'' \in L^\infty$  suffit également pour que  $F$  opère sur  $B_1^{s,q}(\mathbb{R})$ , pour  $1 < s < 2$ .

En combinant le théorème 3 avec le "théorème de la valeur absolue" [BM], on vérifie aussitôt que l'ensemble des conditions  $F' \in L^\infty(\mathbb{R})$ ,  $F'' \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^*)$  et  $\sup_{t>0} \int_{|s|\geq t} |F''(s)|^p ds < +\infty$ , est suffisant pour que  $F$  opère sur  $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ , pour  $p > 1$  et  $1 \leq s < 1 + (1/p)$  ; on observera que la fonction  $|t|$  les satisfait aussi.

Signalons enfin que la méthode du "peigne d'Igari" a été utilisée par Janson [J] pour décrire le calcul fonctionnel sur l'espace de Hardy-Sobolev (espace des fonctions dont les dérivées premières appartiennent à l'espace  $H^1(\mathbb{R}^n)$ ) ; elle nous a permis aussi [BK2] de décrire le calcul fonctionnel sur l'espace  $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ , pour  $0 < s < 1$ .

### Bibliographie

- [A] ADAMS, D. R. *On the existence of capacitary strong type estimates in  $\mathbb{R}^n$* . Arkiv för Mat. 14 (1976), 125-140.
- [B] BOURDAUD, G. *Fonctions qui opèrent sur les espaces de Sobolev*. Sémin. Anal. Harm., Orsay (1980-81), 6-17.
- [BK1] BOURDAUD, G. & KATEB, D. *Fonctions qui opèrent sur certains espaces de Besov*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 40 (1990), 153-162.
- [BK2] BOURDAUD, G. & KATEB, D. *Fonctions qui opèrent sur les espaces de Besov*. Proc. Amer. Math. Soc. (à paraître).
- [BM] BOURDAUD, G. & MEYER, Y. *Fonctions qui opèrent sur les espaces de Sobolev*. J. Funct. Anal. (à paraître).
- [D] DAHLBERG, B. E. J. *A note on Sobolev spaces*. Proc. Symp. Pure Math. 35 (1979), 183-185.
- [I] IGARI, S. *Sur les fonctions qui opèrent sur l'espace  $\hat{A}^2$* . Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 15 (1965), 525-536.
- [J] JANSON, S. *On functions with derivatives in  $H^1$* . Uppsala Univ., Dpt. Math., report n° 16 (1987).
- [MA] MAZ'YA, V. *Sobolev spaces*. Springer (1985).

[MM] MARCUS, M. & MIZEL, V. J. *Complete characterization of functions which act, via superposition, on Sobolev spaces.* Trans. Amer. Math. Soc. 251 (1979), 187-218.

[S] STAMPACCHIA, G. *Equations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus.* Univ. Montréal Press, Québec (1966).

Université Paris VII  
CNRS - UA 212  
Tour 45-55 5ème étage  
2 place Jussieu  
75251 PARIS CEDEX 05 (France)

## INTEGRALES SINGULIERES ET REGULARITE DES SOUS-ENSEMBLES DE $\mathbb{R}^n$

G. DAVID & S. SEMMES

### 1. Introduction

Le point de départ de cet exposé est le problème suivant. On se donne un sous-ensemble  $E$  de  $\mathbb{R}^n$ , de dimension  $d$ , et on cherche des conditions géométriques, portant sur  $E$ , qui entraînent la continuité sur  $L^2(E)$  des opérateurs définis à partir de variantes appropriées du noyau de Cauchy (nous serons un peu plus explicite au paragraphe suivant). Ce problème nous servira de prétexte pour étudier la géométrie de  $E$  sous plusieurs angles légèrement différents.

Dans cet exposé, il sera bien sûr question de conditions suffisantes pour la continuité d'opérateurs d'intégrale singulière, mais nous essaierons d'insister sur diverses manières d'aborder l'étude de la régularité d'un ensemble  $E$ . Dans la plupart des cas, la notion de rectifiabilité, ou de ressemblance à des espaces affines, jouera un rôle essentiel. Nous énoncerons ainsi un certain nombre de conditions de régularité (correspondant à des points de vue différents) ; les relations entre ces conditions ne seront données qu'à la fin de l'exposé.

Pour simplifier autant que possible la lecture de ce texte, nous omettrons bon nombre de résultats, et nous ne dirons quasiment rien des démonstrations. Pour un tour d'horizon un peu plus complet, le lecteur pourra consulter [Dv5] ; [DS4] est un autre exposé introductif avec un point de vue légèrement différent.

### 2. Noyau de Cauchy et graphes lipschitziens

La plupart des résultats de cet exposé reposent plus ou moins sur le spectaculaire résultat de Coifman, McIntosh et Meyer [CMM]. Soit  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lipschitzienne (c'est-à-dire telle que  $|A(x) - A(y)| \leq C |x - y|$  pour tout  $x$ , tout  $y$ , et une constante  $C$ ) ; munissons le graphe  $\Gamma$  de  $A$  de la mesure de longueur d'arc (notée  $dw$ ), et considérons  $\Gamma$  comme contenu dans le plan complexe.

THEOREME 1 [CMM]. *La formule*

$$(1) \quad \begin{aligned} C_{\Gamma} f(z) &= v.p. \int_{\Gamma} \frac{1}{z-w} f(w) dw \\ &=: \lim_{\epsilon \searrow 0} \left\{ \int_{\{w \in \Gamma: |w-z| > \epsilon\}} \frac{1}{z-w} f(w) dw \right\}, \end{aligned}$$

où  $f \in L^2(\Gamma, dw)$ , définit un opérateur borné sur  $L^2(\Gamma, dw)$ .

Nous utiliserons une généralisation du théorème 1 où le noyau de Cauchy  $\frac{1}{z-w}$  est remplacé par d'autres noyaux du même type, et où les dimensions de  $\Gamma$  et de l'espace ambiant sont différentes. Soient  $0 < d \leq n$  deux dimensions ; nous appellerons "bon noyau" (défini sur  $\mathbb{R}^n$  et adapté à la dimension  $d$ ) toute fonction  $K : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  qui est impaire,  $C^\infty$ , et telle que

$$(2) \quad |\nabla^j K(x)| \leq C_j |x|^{-d-j}$$

pour tout  $x \neq 0$  et tout entier  $j \geq 0$ .

THEOREME 2. Soit  $E$  le graphe d'une fonction lipschitzienne  $A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ , et notons  $dx$  la mesure de surface sur  $E$ . Alors, pour tout bon noyau  $K$ , la formule

$$(3) \quad Tf(w) = v.p. \int_E K(w-x) f(x) dx$$

définit un opérateur borné sur  $L^2(E, dx)$ .

Le théorème 2 est relativement facile à démontrer à partir du théorème 1. Lorsque  $d = 1$ , on passe du noyau de Cauchy au cas général en exprimant  $K(x)$  à partir de sommes de noyaux de Cauchy ; le passage aux dimensions supérieures se fait aisément grâce à la "méthode des rotations". Pour plus de détails, voir [CDM] et [Dv5], par exemple.

### 3. Ahlfors-régularité

On se demande maintenant pour quels ensembles  $E$  des formules comme (3) permettent de définir des opérateurs bornés sur  $L^2$ . A vrai dire, la réponse risque de dépendre du choix du noyau (ou de la classe de noyaux) qu'on considère. La plupart du temps, nous éviterons le problème en cherchant des conditions pour que (3) définisse un opérateur borné pour tout bon noyau  $K$ . Cependant, il faut dire que, lorsque  $d = 1$  et  $n = 2$ , le noyau qui nous intéresse le plus est clairement le noyau de Cauchy : c'est celui qui a des applications à des questions de capacité analytique, par exemple. On ne sait pas si la continuité de  $T$  pour  $K(z) = \frac{1}{z}$  entraîne le cas général.

Soient  $E$  un sous-ensemble fermé de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mu$  une mesure de Radon positive, sans atome, portée par  $E$ . Il est facile de montrer que, si tout bon noyau  $K$  permet de définir un opérateur borné sur  $L^2(E, d\mu)$ , alors il existe une constante  $C$  telle que

$$(4) \quad \mu(B(x, r)) \leq Cr^d \text{ pour tout } x \in E \text{ et tout } r > 0.$$

On n'a d'ailleurs pas besoin de tous les bons noyaux : le résultat vaut encore si l'on prend une famille finie de noyaux  $K$  telle que, pour un  $\delta > 0$ , il existe pour chaque point  $x \neq 0$  un noyau  $K$  de la famille tel que  $|K(x)| \geq \delta |x|^{-d}$ . En particulier, donc, le noyau de Cauchy tout seul est suffisant dans le cas où  $d = 1$  et  $n = 2$ . Voir [Dv5], ou [Se1] pour une démonstration plus simple d'un cas particulier important.

Pour simplifier un peu, nous éviterons de parler d'opérateurs de valeur principale: il nous sera plus facile de définir des opérateurs maximaux. Cependant, dans tous les cas où nous savons démontrer la continuité d'un opérateur maximal, l'existence de valeurs principales s'en déduit facilement (voir [Dv5], Proposition III-3-8). Nous noterons  $T^*(E, K, d\mu)$  l'opérateur maximal défini par

$$(5) \quad T^*(E, K, d\mu)f(x) = \sup_{\epsilon > 0} \left| \int_{\{y \in E: |y-x| > \epsilon\}} K(x-y)f(y)d\mu(y) \right|.$$

Lorsque  $d = 1$  et  $E$  est une courbe rectifiable munie de la mesure de longueur, la condition nécessaire (4) citée plus haut est aussi suffisante.

**DEFINITION 1.** Une courbe rectifiable  $E \subset \mathbb{R}^n$  est dite Ahlfors-régulière s'il existe une constante  $C \geq 0$  telle que, pour toute boule  $B(x, r) \subset \mathbb{R}^n$ , la longueur totale de la partie de  $E$  contenue dans  $B(x, r)$  est inférieure à  $Cr$ .

**THEOREME 3 [Dv1].** Si  $E$  est une courbe régulière,  $dx$  la mesure de longueur d'arc sur  $E$ , et  $K$  un bon noyau (adapté à la dimension 1), alors  $T^*(E, K, dx)$  est borné sur  $L^2(E, dx)$ .

Nous dirons deux mots de la démonstration au paragraphe 5.

Revenons au cas général. Nous allons ajouter à la condition nécessaire (4) une hypothèse de minoration de la mesure des boules rencontrant  $E$ .

**DEFINITION 2.** L'ensemble fermé  $E \subset \mathbb{R}^n$  est dit Ahlfors-régulier (de dimension  $d$ ) s'il existe une mesure de Radon positive  $\mu$ , portée par  $E$ , et telle qu'il existe  $C > 0$  avec

$$(6) \quad C^{-1}r^d \leq \mu(B(x, r)) \leq Cr^d$$

pour tout  $x \in E$  et tout  $r > 0$ .



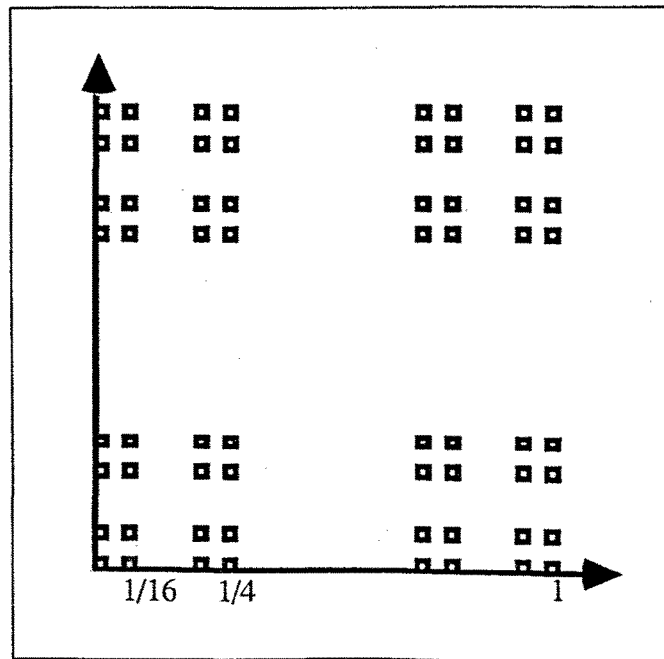
Notons que la première inégalité de (5) est automatiquement satisfaite lorsque  $d = 1$  et  $E$  est une courbe de diamètre infini munie de la longueur d'arc. Les courbes Ahlfors-régulières sont donc, logiquement, des ensembles Ahlfors-réguliers de dimension 1. D'autre part, si  $E$  est un ensemble Ahlfors-régulier,  $d\mu$  est comme dans la définition 2, et  $dx$  est la restriction à  $E$  de la mesure de Hausdorff  $d$ -dimensionnelle, alors il est assez facile de voir que  $C^{-1}d\mu \leq dx \leq Cd\mu$ . La continuité de  $T^*(E, K, d\mu)$  est donc équivalente à la continuité de  $T^*(E, K, dx)$  ; nous supposons à partir de maintenant que  $E$  est muni de la mesure  $dx$ , et nous noterons  $T^*(E, K)$  au lieu de  $T^*(E, K, dx)$ .

Une dernière remarque : nous avons décidé de donner une définition globale pour insister sur l'invariance par dilatations. Une définition locale, où  $E$  est compact et (6) est satisfaite pour  $0 < r \leq r_0$ , est aussi possible.

Notre hypothèse supplémentaire n'est bien sûr pas nécessaire à la continuité des  $T^*(E, K)$ . Elle permet toutefois d'éviter toutes sortes de dégénérescences. Pratiquement, elle implique que  $E$  est un espace de type homogène (comme dans [CW], ce qui permet d'utiliser certaines "techniques de variable réelle" sans lesquelles nous serions bien ennuyés. Malheureusement, même avec cette hypothèse supplémentaire, les  $T^*(E, K)$  ne sont pas nécessairement bornés.

#### 4. L'exemple de Garnett

C'est l'ensemble de Cantor suggéré par la figure suivante :



Cet ensemble  $G$  est un ensemble Ahlfors-régulier de dimension 1 (c'est pour cela qu'on a choisi de diviser le côté de chaque carré par 4 à chaque étape). Cependant, le noyau de

Cauchy ne définit pas un opérateur borné sur  $L^2(G)$  (voir par exemple [Dv2] ou [Jn1]). Ceci est d'ailleurs une conséquence du fait que  $E$  est de capacité analytique nulle (la propriété de  $G$  démontrée par J. Garnett dans [Ga]).

L'exemple de Garnett est, à peu de chose près, le seul exemple connu d'ensemble Ahlfors-régulier  $E$  pour lequel  $T^*(E, K)$  n'est pas systématiquement borné. La caractéristique principale de cet ensemble est, nous semble-t-il, d'être "totalement non rectifiable" (dans la terminologie de Besicovitch, on dit aussi "irrégulier", mais nous essaierons d'éviter ce terme pour ne pas créer de confusion avec la notion d'Ahlfors-régularité). On s'attend donc à ce que la notion de rectifiabilité joue un rôle non négligeable dans ce qui va suivre.

Nous n'avons malheureusement pas le temps de revenir aussi longtemps qu'il le faudrait sur la théorie de la rectifiabilité. Rappelons tout de même quelques définitions et propriétés importantes ; pour plus de détails, le lecteur pourra consulter [Fe], ou encore [Ma] ou [Fa] qui sont un peu plus facile à lire.

Soient  $d$  un entier, et  $E$  un ensemble de dimension  $d$  (par exemple, un ensemble Ahlfors-régulier). Nous dirons que  $E$  est rectifiable s'il est, à un ensemble de mesure (de Hausdorff  $d$ -dimensionnelle) nulle près, contenu dans une union dénombrable d'images de  $\mathbb{R}^d$  par des applications de classe  $C^1$ . Cette définition n'est pas la définition usuelle (qui s'énonce de préférence à partir des densités supérieure et inférieure), mais lui est équivalente. On aurait aussi pu utiliser des images de  $\mathbb{R}^d$  par des applications lipschitziennes, ou des graphes lipschitziens.

Un ensemble "totalement non rectifiable" est un ensemble de dimension  $d$  tel que son intersection avec tout ensemble rectifiable soit de mesure nulle. Ces deux classes d'ensembles ont, sur bien des points, des comportements diamétralement opposés. Par exemple, un ensemble rectifiable admet, en presque tout point, un  $d$ -plan tangent (nous omettrons la définition ; pour un ensemble Ahlfors-régulier, la définition "intuitive" est la bonne). Par contre, on peut démontrer que si  $E$  est totalement non rectifiable, il n'admet de  $d$ -plan tangent en presque aucun point. Dans le cas de l'exemple de Garnett, c'est sans doute la propriété qui saute le plus aux yeux.

Ajoutons que tout ensemble de dimension  $d$  est l'union disjointe d'un ensemble rectifiable et d'un ensemble totalement non rectifiable. Avec les définitions que nous avons choisies, cette propriété est facilement démontrée.

Revenons maintenant à la question de la continuité des  $T^*(E, K)$ . La notion de rectifiabilité n'est pas en elle-même la clé de l'énigme, ne serait-ce que parce qu'elle n'est pas une notion quantitative [en termes plus terre-à-terre, la continuité de  $T^*(E, K)$  n'est préservée ni par passage à la limite, ni par unions dénombrables]. Il nous faudra donc essayer de chercher des manières quantifiées de dire que  $E$  est rectifiable. Notons que les conditions que nous énoncerons devront, comme le problème dont nous sommes partis, être invariantes par translation et dilatation.

## 5. La technique des morceaux

Nous allons maintenant décrire rapidement un moyen de trouver des conditions suffisantes pour la continuité des  $T^*(E, K)$ . Très grossièrement, l'idée est la suivante. On se donne un ensemble  $E$  et on cherche à prouver la continuité de  $T^*(E, K)$  en comparant  $E$ , localement et à toutes les échelles, à des ensembles  $F$  pour lesquels on sait déjà que  $T^*(F, K)$  est borné.

Fixons un bon noyau  $K$  et, pour chaque  $M > 0$ , notons  $B(K, M)$  la classe des ensembles Ahlfors-réguliers  $F$  tels que  $T^*(F, K)$  ait une norme sur  $L^2(F)$  inférieure à  $M$  d'une part, et tels que  $M^{-1}r^d \leq |F \cap B(x, r)| \leq Mr^d$  pour tout  $x \in F$  et tout  $r > 0$  d'autre part (on a noté  $|\cdot|$  la mesure de Hausdorff d'un ensemble).

**THEOREME 4.** *Soient  $K$  un bon noyau et  $E$  un ensemble Ahlfors-régulier. Supposons qu'il existe  $\epsilon > 0$  et  $M > 0$  tels que, pour tout  $x \in E$  et tout  $r > 0$ , on puisse trouver  $F \in B(K, M)$  tel que  $|E \cap F \cap B(x, r)| \geq \epsilon r^d$ . Alors l'opérateur  $T^*(E, K)$  est borné sur  $L^2(E)$ , et sa norme est majorée en fonction de  $\epsilon$ ,  $M$ ,  $K$ , et la constante  $C$  de (6).*

*Remarque.* L'idée que l'on peut déduire la continuité de  $T(E, K)$  d'un bon contrôle d'une partie seulement de  $E \cap B(x, r)$ , mais pour chaque boule  $B(x, r)$ , est à rapprocher de la démonstration du théorème de John et Nirenberg sur  $BMO$  [JN]. Techniquement, le théorème se démontre en utilisant des techniques standards de la théorie des opérateurs de Calderón-Zygmund, et les "inégalités aux bons  $\lambda$ " de Burkholder et Gundy (voir [Dv3] ou [Dv5] pour les détails). L'idée d'utiliser, dans le contexte d'opérateurs d'intégrale singulière sur des ensembles, un principe de comparaison comme celui du théorème 4 est due à Coifman et Meyer [CM2].

Le lecteur sera peut-être surpris parce que l'hypothèse du théorème 2 semble moins forte que celle énoncée dans [Dv5], par exemple, où l'on suppose que  $T^*(F, K)$  est borné sur  $L^p$  pour  $1 < p < +\infty$ . Ce n'est qu'une apparence : comme  $F$  est Ahlfors-régulier, c'est un espace de type homogène, et la continuité de  $T^*(F, K)$  sur  $L^p$  découle de sa continuité sur  $L^2$  exactement comme dans  $\mathbb{R}^d$ . C'est d'ailleurs pour cette raison que nous ne nous sommes pas spécialement préoccupés de la continuité des  $T^*(E, K)$  sur  $L^p$ ,  $1 < p < +\infty$  : si  $E$  est Ahlfors-régulier, elle est équivalente à la continuité sur  $L^2$ .

Bien entendu, pour appliquer le théorème 4, on utilisera des ensembles  $F$  dont on sait déjà, pour une raison ou pour une autre, qu'ils donnent des opérateurs bornés (par exemple, des graphes lipschitziens !).

**DEFINITION 3.** *Nous dirons que l'ensemble Ahlfors-régulier  $E$  contient des morceaux de graphes lipschitziens s'il existe des constantes  $\epsilon > 0$  et  $M > 0$  telles que, pour tout  $x \in E$  et tout  $r > 0$ , on peut trouver un ensemble  $F$  tel que  $|E \cap F \cap B(x, r)| \geq \epsilon r^d$  et tel que  $F$  soit l'image, par une isométrie de  $\mathbb{R}^n$ , du graphe d'une fonction  $M$ -lipschitzienne.*

**THEOREME 5.** *Si  $E$  contient des morceaux de graphes lipschitziens, alors  $T^*(E, K)$  est borné pour tout bon noyau  $K$ .*

Le théorème 5 est bien sûr une conséquence immédiate des théorèmes 2 et 4. Nous nous sommes permis d'insister sur ce résultat parce qu'il reste, à ce jour, le moyen le plus sûr de montrer la continuité des  $T^*(E, K)$ . En fait, dans tous les cas précis où l'on sait montrer la continuité des  $T^*(E, K)$ , il existe au moins une démonstration utilisant le théorème 5. Par exemple, le théorème 3 se démontre à partir du théorème 5 et d'un argument assez facile utilisant le "lemme du soleil levant" de F. Riesz.

Nous avons annoncé plus haut des conditions géométriques sur  $E$  liées à la notion de rectifiabilité. Le théorème 5 en donne un exemple : si  $E$  est rectifiable, alors pour tout  $x \in E$  et tout  $r > 0$ , on peut trouver un  $F$  tel que  $|E \cap F \cap B(x, r)| > 0$  et qui soit l'image par une isométrie d'un graphe lipschitzien (en effet,  $E$  est contenu, à un ensemble de mesure nulle près, dans une union dénombrable de tels  $F$ ). La grande différence est, bien sûr, que dans la définition 3,  $\epsilon$  ne dépend ni de  $x$  ni de  $r$ .

## 6. Surfaces $\omega$ -régulières

Décrivons maintenant une classe d'ensembles pour lesquels les  $T^*(E, K)$  sont bornés. La raison pour laquelle le cas des courbes Ahlfors-régulières est relativement facile à traiter est que ces courbes admettent un paramétrage privilégié : le paramétrage par la longueur d'arc. Dans le cas général, même lorsque  $E$  est connexe (mais de dimension  $> 1$ ), un tel paramétrage n'existe pas toujours. On peut contourner le problème en faisant l'hypothèse supplémentaire de l'existence d'un bon paramétrage.

Pour ne pas avoir à nous restreindre à des paramétrages lipschitziens, nous allons devoir utiliser des poids de la classe  $A_\infty(\mathbb{R}^d)$  de Muckenhoupt. Rappelons que si  $\omega : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$  est une fonction localement intégrable, on dit que  $\omega \in A_\infty(\mathbb{R}^d)$  si, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un  $\delta > 0$  tel que, chaque fois que  $Q$  est un cube de  $\mathbb{R}^d$  et  $A \subset Q$  est un ensemble mesurable tel que  $|A| \leq \delta |Q|$ , alors  $\int_A \omega(x) dx \leq \epsilon \int_Q \omega(x) dx$ . Il existe de nombreuses autres définitions équivalentes de  $A_\infty$  (en particulier, le fait que  $\omega$  vérifie une inégalité de Hölder inversée), pour lesquelles nous renvoyons à [GR] ou [Jé]. Les poids  $\omega(x) = |x|^\alpha$ , pour  $\alpha > -n$ , sont des poids de  $A_\infty$  ; pour ce qui suit,  $\omega \equiv 1$  est déjà un très bon exemple.

**DEFINITION 4.** *Soit  $\omega \in A_\infty(\mathbb{R}^d)$ . Nous dirons que la fonction  $z : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un paramétrage  $\omega$ -régulier s'il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$(7) \quad |\nabla z(x)| \leq C\omega(x)^{1/d} \quad (\text{au sens des distributions})$$

et

$$(8) \quad \forall w \in \mathbb{R}^n \text{ et tout } r > 0, \int_{\{x \in \mathbb{R}^d : z(x) \in B(w, r)\}} \omega(x) dx \leq Cr^d.$$

Nous dirons que l'ensemble  $E \subset \mathbb{R}^n$  est  $\omega$ -régulier s'il existe un paramétrage  $\omega$ -régulier  $z$  tel que  $E = z(\mathbb{R}^d)$ .

Quelques explications sont peut-être utiles à ce point. Commençons par le cas particulier important où  $\omega \equiv 1$ . Dans ce cas, (7) signifie simplement que  $z$  est lipschitzienne. Si  $\mu$  est l'image par  $z$  de la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^d$ , alors (8) s'écrit  $\mu(B(w, r)) \leq Cr^d$ . De plus, soit  $w \in z(\mathbb{R}^d)$ , et soit  $x \in \mathbb{R}^d$  un point tel que  $z(x) = w$ . Alors, puisque  $z$  est lipschitzienne, la boule de centre  $x$  et de rayon  $\frac{r}{C}$  est toute entière envoyée dans  $B(w, r)$ . On en déduit aussitôt que  $\mu(B(w, r)) \geq c'r^d$ . On voit que  $E = z(\mathbb{R}^d)$  est Ahlfors-régulier, chacune des inégalités (7) et (8) contribuant à l'une des deux inégalités opposées de (6).

Le cas où  $\omega \neq 1$  est à peine plus compliqué. La distance euclidienne sur  $\mathbb{R}^d$  doit être remplacée par la "distance"  $d_\omega(x, y) = \left\{ \int_B \omega(u) du \right\}^{1/d}$ , où  $B$  est la boule de centre  $\frac{x+y}{2}$  et de rayon  $|x - y|$ , par exemple. On vérifie aisément (en utilisant tout de même le fait que  $\omega \in A_\infty$ ) que (7) est équivalent à la condition  $|z(x) - z(y)| \leq Cd_\omega(x, y)$ . Comme lorsque  $\omega \equiv 1$ , on appelle  $\mu$  l'image par  $z$  de la mesure  $\omega(x)dx$ ; (8) signifie que  $\mu(B(w, r)) \leq Cr^d$ , et (7) implique que  $\mu(B(w, r)) \geq C^{-1}r^d$  lorsque  $w \in E = z(\mathbb{R}^d)$ , de sorte que  $E$  est un ensemble Ahlfors-régulier. Notons que le choix de  $\mu$  est assez naturel :  $\omega^{1/d}$  joue le rôle de la taille du gradient de  $z$ , de sorte que  $\omega(x)$  peut être comparé au Jacobien, et l'image par  $z$  de  $\omega(x)dx$  à la mesure de surface sur  $E$ .

Les conditions (7) et (8) jouent l'une contre l'autre, de sorte que la notion de paramétrage  $\omega$ -régulier est un peu plus rigide qu'on pourrait le croire. Ainsi, si  $\omega$  est continue au point  $x$ , et  $z$  est différentiable en  $x$ , alors la différentielle  $Dz(x)$  est telle que

$$C^{-1}\omega(x)^{1/d} \|v\| \leq \|Dz(x) \cdot v\| \leq C\omega(x)^{1/d} \|v\| \quad \text{pour tout } v \in \mathbb{R}^d.$$

L'exemple simple de fonctions  $z$  bilipschitziennes (ou, plus généralement, quasisymétriques) n'est donc pas si loin du cas général.

Lorsque  $d = 1$ , le poids  $\omega$  n'est pas nécessaire, car on peut toujours remplacer  $z$  par le paramétrage  $z \circ h^{-1}$ , où  $h$  est un changement de variable sur  $\mathbb{R}$  tel que  $h' = \omega$ . On obtient alors un paramétrage de  $E$  équivalent au paramétrage par la longueur d'arc (noter que si  $z$  est 1-régulière, (7) implique que  $|z'| \geq \frac{1}{C}$ ). En somme, les courbes  $\omega$ -régulières ne sont rien d'autre que des courbes Ahlfors-régulières paramétrées de manière différente.

Quand  $d > 1$ , on ne sait pas s'il est possible de re-paramétriser toute surface  $\omega$ -régulière de manière 1-régulière. On peut toujours remplacer  $z$  par  $z \circ h^{-1}$ , où  $h$  est un changement de variable quasiconforme de  $\mathbb{R}^d$ , mais on ne sait pas s'il existe toujours un  $h$  quasiconforme dont le jacobien soit équivalent à  $\omega$ . Notons au passage que, pour certains poids  $\omega$ , il n'existe pas de paramétrage  $\omega$ -régulier ; la classe précise des poids  $\omega$  tels qu'il existe au moins un paramétrage  $\omega$ -régulier n'est pas connue (on peut quand même trouver quelques informations supplémentaires dans [DS1]).

**THEOREME 6.** Si  $\omega \in A_\infty(\mathbb{R}^d)$  et  $E$  est une surface  $\omega$ -régulière, alors  $E$  contient des

morceaux de graphes lipschitziens (et, en vertu du théorème 5, tous les  $T^*(E, K)$  sont bornés).

Les démonstrations données dans [Dv3] et [Dv4] sont loin d'être agréables. Le mieux est sans doute de consulter [Dv5], où la démonstration repose sur un résultat de P. Jones. Comme ce résultat présente un intérêt en lui-même, et est assez représentatif du type d'analyse dont on a besoin, nous allons faillir à notre décision de ne pas parler des démonstrations, et énoncer le théorème de P. Jones.

**THEOREME 7 [Jn2].** *Pour tout  $\epsilon > 0$  et toute dimension entière  $d$ , il existe un entier  $N$  ayant la propriété suivante. Pour toute application 1-lipschitzienne  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ , il existe  $N$  ensembles fermés  $A_1, \dots, A_N$ , contenus dans la boule unité, et tels que*

(9) *la restriction de  $f$  à chaque  $A_i$  est  $N$ -bilipschitzienne :  $|f(x) - f(y)| \geq N^{-1} |x - y|$  pour tous  $x, y \in A_i$ ,*

et

$$(10) \quad |f\{B(0, 1) \setminus \bigcup_{i=1}^N A_i\}| \leq \epsilon.$$

En somme, à part un morceau dont l'image a une mesure aussi petite qu'on veut, la boule unité peut être découpée en morceaux sur lesquels  $f$  est bilipschitzienne. Si on sait par ailleurs que  $|f(B(0, 1))|$  n'est pas trop petit, on en déduit l'existence d'un sous-ensemble fermé de  $B(0, 1)$ , dont la mesure n'est pas trop petite, et sur lequel la restriction de  $f$  est bilipschitzienne.

Disons deux mots de la manière dont ce théorème permet de trouver des morceaux de graphes lipschitziens dans les surfaces  $\omega$ -régulières. Soient  $z$  un paramétrage  $\omega$ -régulier,  $w$  un point de  $E = z(\mathbb{R}^k)$  et  $r > 0$ . Supposons pour simplifier que  $\omega \equiv 1$ ,  $z$  est 1-lipschitzienne,  $w = z(0)$  et  $r = 1$ . La première étape consiste à trouver un espace affine de dimension  $d$  tel que, si  $\pi$  est la projection orthogonale sur cet espace, on ait  $|\pi \circ z(B(0, 1))| \geq \delta$ , où  $\delta$  ne dépend que de la constante  $C$  de la définition 4. Cette étape est plutôt facile. On peut par exemple commencer par prouver l'existence d'une petite boule sur laquelle  $z$  est très proche d'une application affine ; on déduit ensuite de (8) que cette application n'est pas dégénérée, et il ne reste plus qu'à prendre pour sous-espace affine l'image de cette application (voir [Dv4] pour les détails).

Pour la seconde étape, on applique le théorème 7 à la fonction  $f = \pi \circ z$  (en identifiant le  $d$ -plan à  $\mathbb{R}^d$ ) avec  $\epsilon = \frac{\delta}{2}$ , par exemple. On trouve un ensemble  $A \subset B(0, 1)$ , de mesure minorée en fonction de la constante de la définition 4, et sur lequel  $\pi \circ z$  est bilipschitzienne. On en déduit aussitôt que l'ensemble  $F = z(A)$  est contenu dans (l'image par une rotation d')un graphe lipschitzien, puisque  $\pi$  est bilipschitzienne sur  $F$ . L'ensemble  $F$  est le morceau de graphe lipschitzien cherché. Le cas où  $\omega \neq 1$  ne demande que des modifications mineures.

*Remarque.* Il paraît raisonnable de penser que l'existence d'un paramétrage  $\omega$ -régulier est une condition très forte, de sorte qu'on pourrait craindre que la classe des surfaces  $\omega$ -régulières ne donne qu'une idée bien approximative de ce à quoi ressemble un ensemble Ahlfors-régulier pour lequel les  $T^*(E, K)$  sont bornés. Nous verrons au paragraphe 12 que cette crainte n'est pas fondée.

## 7. D'autres classes de surfaces

Il y a bien d'autres classes d'ensembles Ahlfors-réguliers pour lesquelles on sait, pour des raisons diverses, que les  $T^*(E, K)$  sont bornés sur  $L^2(E)$ . Nous nous contenterons de parler brièvement d'une d'entre elles ; nous renvoyons à [Dv5] pour un catalogue un peu plus complet, et à [Se1], [Se2], [Se3], [Se5], [DJ], [Dv4] pour l'étude de diverses classes.

**DEFINITION 5.** *Nous appellerons "surface de Semmes" un ensemble Ahlfors-régulier  $E$  de dimension  $d$ , contenu dans  $\mathbb{R}^{d+1}$ , et qui a la propriété suivante. Il existe  $C > 0$  tel que, pour tout  $x \in E$  et tout  $r > 0$ , on puisse trouver deux boules  $B_1$  et  $B_2$  ne rencontrant pas  $E$ , contenues dans  $B(x, r)$ , de rayon  $\frac{r}{C}$ , et qui soient contenues dans deux composantes connexes différentes du complémentaire de  $E$ .*

Comme pour les surfaces  $\omega$ -régulières, un exemple simple de surface de Semmes est l'image de  $\mathbb{R}^d$  par une application bi-lipschitzienne de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}^{d+1}$  (il faut quand même une petite démonstration pour trouver les boules  $B_1$  et  $B_2$  dans ce cas). Voir [Vä].

La définition 5 est beaucoup plus naturelle qu'il n'y paraît (nous n'aurons malheureusement pas le temps d'expliquer pourquoi). L'existence des boules  $B_1$  et  $B_2$  empêche l'ensemble  $E$  de se recroqueviller trop sur lui-même, mais on ne peut pas vraiment dire que la relation avec la notion de rectifiabilité soit aussi claire que dans les paragraphes précédents.

**THEOREME 8.** *Si  $E$  est une surface de Semmes, alors  $E$  contient des morceaux de graphes lipschitziens (et par conséquent les  $T^*(E, K)$  sont bornés sur  $L^2(E)$ ).*

La première démonstration de continuité d'opérateurs d'intégrale singulière sur les surfaces de Semmes est celle de [Se3]. Elle n'utilise pas le théorème 5 ; l'idée en est d'appliquer le théorème Tb sur l'espace de type homogène  $E$  et avec pour fonction  $b$  la normale unitaire à  $E$  (on fait l'hypothèse a priori que  $E$  est  $C^\infty$ ), considérée comme un élément de l'algèbre de Clifford. L'existence des boules  $B_1$  et  $B_2$  de la définition 5 est justement utilisée pour prouver que  $b$  est "para-accrétive". Nous disposons maintenant de plusieurs autres démonstrations (voir [Dv4], [Se7], [DJ]) ; la démonstration la plus naturelle est sans doute celle de [DS3], qui utilise une variante du théorème 7 ci-dessus.

## 8. Théorie de Littlewood-Paley

Nous abandonnons maintenant la description de conditions suffisantes, pour décrire divers moyens de mesurer la "régularité" d'un ensemble Ahlfors-régulier  $E$ . La condition qui fait l'objet de ce paragraphe peut être considérée comme une condition de Littlewood-Paley. Commençons par rappeler en un mot une interprétation possible de la théorie de Littlewood-Paley.

Etant donnée une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^d$ , il est possible de mesurer la régularité de  $f$  en décomposant  $f$  en une somme de convolutions  $f * \psi_k$ , où les  $\psi_k$  sont de la forme  $\psi_k(x) = 2^{-kd}\psi(2^{-k}x)$  et  $\psi$  est une fonction  $C^\infty$ , à support compact et d'intégrale nulle convenablement choisie. L'idée est que les  $f * \psi_k$  sont d'autant plus petites, quand  $k$  tend vers  $-\infty$ , que la fonction  $f$  est régulière.

Nous voulons faire quelque chose de semblable avec notre ensemble  $E$ . Une manière naïve de procéder serait de mesurer la taille des  $\mu * \psi_k$ , où  $\mu$  est par exemple la mesure de Hausdorff de dimension  $d$  restreinte à  $E$ . Malheureusement, même lorsque  $E$  est un sous-espace affine de dimension  $d$ , les  $\mu * \psi_k$  n'ont pas assez de décroissance (cela n'est pas surprenant, puisque la mesure de Lebesgue sur un  $d$ -plan, considérée comme mesure sur  $\mathbb{R}^n$ , est assez singulière). Par contre, si  $\psi$  est impaire, la restriction à  $E$  de  $\mu * \psi_k$  est nulle dès que  $E$  est un  $d$ -plan. On peut donc espérer que la taille de la restriction à  $E$  des  $\mu * \psi_k$  nous donnera, dans le cas général, une idée de la régularité de  $E$ , c'est-à-dire de sa ressemblance avec les  $d$ -plans, un peu comme la taille des  $f * \psi_k$  nous donnait une idée de la ressemblance de  $f$  avec les fonctions constantes.

Le fait que les estimations souhaitées doivent être invariantes par translations et dilatations rend naturelle l'utilisation de mesure de Carleson.

**DEFINITION 6.** Soit  $\mu$  une mesure positive sur  $E \times \mathbb{R}^+$ . Nous dirons que  $\mu$  est une mesure de Carleson s'il existe  $C \geq 0$  telle que

$$(11) \quad \mu(\{(x, t) \in E \times \mathbb{R}^+ : x \in E \cap B(X, R) \text{ et } 0 < t \leq R\}) \leq CR^d$$

pour tout  $X \in E$  et tout  $R > 0$ .

La condition de régularité que nous utiliserons est la suivante :

(LP) pour toute fonction  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  impaire, la mesure

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \int_E \psi_k(x-y) dy \right|^2 dx d\delta_{2^k}(t)$$

est une mesure de Carleson sur  $E \times \mathbb{R}^+$  ; on a noté  $d\delta_{2^k}$  la mesure de Dirac au point  $2^k$ , et  $\psi_k(x) = 2^{-kd}\psi(2^{-k}x)$ .



Il est assez facile de voir que cette condition est satisfaite lorsque  $E$  est un graphe lipschitzien (et  $dx$  est l'image inverse de la mesure de Lebesgue par la projection sur  $\mathbb{R}^d$ ). En fait, si  $E$  est un ensemble Ahlfors-régulier tel que  $T^*(E, K)$  est borné pour tout bon noyau  $K$ , alors  $(LP)$  est satisfaite. La démonstration assez facile utilise un argument à base de fonctions de Rademacher. La réciproque est aussi vraie (nous y reviendrons au paragraphe 12), mais plus difficile. Voir [DS2].

La condition  $(LP)$  a l'avantage, par rapport à la condition de continuité des  $T^*(E, K)$ , d'être un peu plus facile à utiliser pour en déduire des informations géométriques sur  $E$ .

## 9. Approximation par les $d$ -plans

Une autre manière d'étudier la régularité de  $E$  est de mesurer, sur chaque boule, l'écart entre  $E$  et un espace affine de dimension  $d$ . Pour mesurer cet écart, on associe à tout  $x \in E$  et tout  $t > 0$  le nombre

$$(12) \quad \beta_\infty(x, t) = t^{-1} \inf_P \left\{ \sup_{y \in E \cap B(x, t)} \text{dist}(y, P) \right\},$$

où la borne inférieure est prise sur l'ensemble des plans affines de dimension  $P$ . Le facteur  $t^{-1}$  a été ajouté pour que la mesure de l'écart entre  $E \cap B(x, r)$  et le meilleur  $d$ -plan  $P$  ainsi obtenu soit invariante par dilatation.

L'idée d'utiliser les  $\beta_\infty(x, t)$  pour étudier la régularité de  $E$ , puis en déduire des informations sur la continuité des opérateurs d'intégrale singulière sur  $E$  est due à P. Jones. Dans [Jn1], il considère le cas d'un graphe lipschitzien de dimension 1, et montre que  $\beta_\infty(x, t)^2 \frac{dx dt}{t}$  est une mesure de Carleson sur  $E \times \mathbb{R}^+$ . Il en déduit une nouvelle démonstration de la continuité de l'opérateur de Cauchy sur  $E$ .

En dimension  $d > 1$ , il convient d'utiliser des variantes de  $\beta_\infty(x, t)$  : pour des raisons liées aux indices de Sobolev,  $\beta_\infty(x, t)^2 \frac{dx dt}{t}$  n'est plus une mesure de Carleson pour tout graphe lipschitzien. On va donc mesurer l'écart entre  $E \cap B(x, t)$  et les  $d$ -plans  $P$  avec une norme différente. Pour  $1 \leq q < +\infty$ , soit

$$(13) \quad \beta_q(x, t) = t^{-1} \inf_P \left\{ t^{-d} \int_{y \in E \cap B(x, t)} \text{dist}(y, P)^q dy \right\}^{1/q}.$$

La différence entre  $\beta_\infty$  et les  $\beta_q$  n'est pas gigantesque : on montre aisément que, si  $E$  est Ahlfors-régulier, il existe  $C$  tel que

$$(14) \quad \beta_\infty(x, t) \geq C^{-1} \beta_1(x, t) \geq C^{-2} \beta_\infty(x, t)^{d+1}.$$

Lorsque  $E$  est le graphe d'une fonction lipschitzienne  $A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ , les  $\beta_q(x, t)$  sont simplement une mesure de l'écart entre la fonction  $A$  et les fonctions affines [en effet, si  $P$

est un  $d$ -plan pour lequel l'infimum de (13) est presque atteint, on vérifie aisément que  $P$  est le graphe d'une fonction affine uniformément lipschitzienne  $a$  ; l'intégrale de (13) est alors équivalente à  $\int_B |A(y) - a(y)|^q dy$ , où  $B$  est la projection sur  $\mathbb{R}^d$  de  $E \cap B(x, t)$ , et est compris entre deux boules]. Dans ce cas, l'étude des  $\beta_q(x, t)$  relève de la théorie des fonctions. Un résultat de Dorronsoro [Do] donne

$$(15) \quad \beta_q(x, t)^2 \frac{dx dt}{t} \text{ est une mesure de Carleson}$$

pour  $q \in I(d)$ , où  $I(d)$  est l'intervalle  $[1, \frac{2d}{d-2}]$  si  $d \geq 2$ , et  $I(d) = [1, +\infty]$  si  $d = 1$ .

Lorsque (15) est vérifiée, nous dirons volontiers que  $E$  vérifie un lemme géométrique (le non vient de [Jn1], où (15) est utilisé pour la première fois). Notons que la condition (15) est d'autant plus restrictive que  $q$  est grand, et qu'elle ne caractérise pas les graphes lipschitziens. Nous verrons plus loin qu'elle caractérise les ensembles sur lesquels les  $T^*(E, K)$  sont bornés.

La condition (15) est, elle aussi, une condition quantifiée de rectifiabilité. En effet, pour un ensemble Ahlfors-régulier  $E$ , l'existence d'une tangente à  $E$  en un point  $x$  entraîne  $\lim_{t \rightarrow 0} \beta_\infty(x, t) = 0$ . La condition (15), cependant, n'entraîne pas à elle seule la rectifiabilité de  $E$ .

## 10. Le voyageur de commerce

Il est difficile de résister au plaisir de citer encore un résultat de P. Jones utilisant les  $\beta_\infty(x, t)$ . Le problème classique du voyageur de commerce n'est pas tout à fait celui dont nous allons parler ici. Soit  $A \subset \mathbb{R}^2$  un ensemble compact. On cherche à savoir à quelles conditions il existe une courbe  $\Gamma$  de longueur finie contenant  $A$  et, si c'est le cas, quelle est, à une constante multiplicative près, la longueur minimale de  $\Gamma$ .

On note encore  $\beta_\infty(x, t)$  la fonction définie par (12) quand  $x \in \mathbb{R}^2$  et  $A \cap B(x, t) \neq \emptyset$ , et égale à 0 quand  $A \cap B(x, t)$  est vide.

**THEOREME 9 [Jn3].** *Soit  $A \subset \mathbb{R}^2$  un ensemble compact. Il existe une courbe  $\Gamma$  de longueur finie telle que  $\Gamma \supset A$  si et seulement si*

$$\beta(A) = \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^{\text{diam } A} \beta_\infty(x, t)^2 \frac{dx dt}{t^2} < +\infty.$$

*De plus la longueur minimale  $L$  d'une courbe  $\Gamma$  contenant  $A$  vérifie*

$$C^{-1}L \leq \beta(A) + \text{diam } A \leq CL.$$

Le théorème 9 a un intérêt même quand  $A$  est un ensemble fini (avec beaucoup de points) : la démonstration donne aussi un algorithme rapide pour trouver une courbe  $\Gamma \supset A$  de longueur  $\leq CL$ . Notons que la condition  $\beta(A) < +\infty$  est encore suffisante lorsque  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \neq 2$  ; cependant on ne sait pas si elle est nécessaire (l'argument de Jones utilise une représentation conforme).

Enonçons une version du théorème 9 avec un peu plus d'invariance vis à vis des dilatations.

**THEOREME 10 [Jn3].** *Soit  $E \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble Ahlfors-régulier de dimension 1. Il existe une courbe Ahlfors-régulière  $\Gamma$  contenant  $E$  si et seulement si  $\beta_\infty(x, t)^2 \frac{dx dt}{t}$  est une mesure de Carleson sur  $E \times \mathbb{R}^+$ .*

On déduit aussitôt de ce théorème que si  $d = 1$  et  $E$  vérifie un lemme géométrique avec  $q = +\infty$ , alors  $T^*(E, K)$  est borné pour tout  $K$ . Nous verrons plus loin que ce résultat a une réciproque et se généralise bien au cas où  $d > 1$ .

## 11. Une condition de symétrie

L'idée est encore de mesurer la ressemblance entre  $E$  et un  $d$ -plan. Cette fois, on utilise le fait qu'un plan est symétrique par rapport à chacun de ses points. Pour mesurer la symétrie de  $E$  par rapport à ses points, on pose

$$(16) \quad \gamma_q(x, t) = \left\{ t^{-2d} \int_{u \in E \cap B(x, t)} \int_{v \in E \cap B(x, t)} \{t^{-1} \text{dist}(2u - v, E)\}^q du dv \right\}^{1/q},$$

où  $1 \leq q \leq +\infty$ ,  $x \in E$  et  $t > 0$ .

Ainsi,  $\gamma_q(x, t) \equiv 0$  lorsque  $E$  est un  $d$ -plan. La condition qui nous intéresse, et sur laquelle nous reviendrons au paragraphe suivant, est

$$(Sy(q)) \quad \gamma_q(x, t)^2 \frac{dx dt}{t} \text{ est une mesure de Carleson sur } E \times \mathbb{R}^+.$$

La condition  $(Sy(q))$  est à rapprocher des conditions sur les fonctions portant sur les différences d'ordre 2 (voir [St]).

## 12. Des conditions équivalentes

Il est grand temps de dire où nous voulons en venir.

**THEOREME 11 [DS2].** Soient  $0 < d < n$  deux entiers. Pour un ensemble Ahlfors-régulier  $E$  de dimension  $d$ , les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) pour tout bon noyau  $K$ , l'opérateur  $T^*(E, K)$  est borné sur  $L^2(E)$  ;
- b)  $E$  vérifie la condition de Littlewood-Paley (LP) ;
- c)  $E$  vérifie le lemme géométrique (15) pour tout  $q \in I(d)$ , où  $I(d) = [1, \frac{2d}{d-2}]$  si  $d > 1$ , et  $I(d) = [1, +\infty]$  si  $d = 1$  ;
- d)  $E$  vérifie (15) avec  $q = 1$  ;
- e)  $E$  vérifie la condition de symétrie ( $Sy(q)$ ) pour tout  $q \in I(d)$  ;
- f)  $E$  vérifie ( $Sy(1)$ ) ;
- g) il existe un  $\omega \in A_\infty(\mathbb{R}^d)$  et un paramétrage  $\omega$ -régulier  $z : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  tel que  $E$  soit contenu dans l'image  $z(\mathbb{R}^d)$ .

Dans la condition g), on a plongé  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  de manière canonique. Lorsque  $n \geq 2d$ , on peut s'arranger pour trouver  $z$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  (au lieu de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ). Par ailleurs, on peut aussi s'arranger pour que  $\omega$  soit dans la classe  $A_1(\mathbb{R}^d)$ .

On peut énoncer plusieurs autres conditions équivalentes, comme le fait que  $E$  contienne des morceaux d'images de  $\mathbb{R}^d$  par des applications bilipschitziennes de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}^m$ ,  $m = \max(n, 2d + 1)$ .

Nous n'avons encore rien dit du cas où  $d$  n'est pas un entier. Dans ce cas, la plupart des conditions du théorème n'ont pas de sens, mais ça n'est pas grave parce que a) n'est jamais vérifiée (voir [DS2]).

Le fait que h) implique a) est bien sûr une conséquence directe du théorème 6. Pour la plupart des autres implications du théorème, il est plus pratique de passer par une autre condition équivalente, liée à la "construction de la couronne", mais dont nous n'aurons pas le temps de parler ici. Voir [DS2], ou [Dv5] pour un bref aperçu.

L'équivalence de g) avec les conditions b) - f) peut être considérée comme une généralisation du théorème de P. Jones sur le voyageur de commerce. Contrairement à ce qui se passe en dimension  $d = 1$ , on ne sait rien dire lorsque  $E$  n'est pas un ensemble Ahlfors-régulier. Bien entendu, il serait intéressant de savoir si le théorème 9 sur le voyageur de commerce admet des généralisations à plusieurs dimensions où  $E$  n'est pas nécessairement Ahlfors-régulier.

Le théorème 11 a une autre faiblesse. Dans certains cas, comme lorsque  $d = 1$  et  $n = 2$ , nous voudrions savoir si la continuité de  $T^*(E, K)$ , pour certains noyaux bien

précis (comme le noyau de Cauchy), implique les conditions a) - h). Voir [Fn] et [Se8] pour des résultats partiels allant dans cette direction.

Signalons encore que, quand  $d = 1$ , certaines démonstrations du théorème 11 peuvent être simplifiées. Appelons "symétrie faible" la condition plus faible de d) où l'on demande que, pour tout  $\epsilon > 0$ , l'ensemble  $B(\epsilon)$  des  $(x, t) \in E \times \mathbb{R}^+$  tels que  $\gamma_\infty(x, t) > \epsilon$  soit petit au sens que  $\mathbb{1}_{B(\epsilon)}(x, t) \frac{dx dt}{t}$  est une mesure de Carleson. Il est assez facile de montrer que a) implique b), qui implique la symétrie faible, qui à son tour entraîne g) (voir [DS5]).

Concluons par un exercice.

1. Montrer que l'union de deux droites du plan est contenue dans un ensemble 1-régulier du plan (c'est-à-dire une courbe Ahlfors-régulière).

2. Même question avec trois plans (disons orthogonaux) dans l'espace (indication : cette question est plus facile que la précédente).

3. Montrer que l'union de deux courbes régulières est contenue dans une courbe régulière.

4. Montrer que l'union de deux ensembles  $\omega$ -réguliers est contenue dans un ensemble  $\omega$ -régulier (peut-être contenu dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ ). Essayer d'abord en utilisant le théorème, puis sans la condition a) [l'auteur sait le faire], puis directement [l'auteur ne sait plus le faire].

5. Essayer de montrer, de la manière la plus directe possible, que les conditions a), b), e), f) sont invariantes par applications bilipschitziennes de  $\mathbb{R}^n$  (l'auteur ne sait pas le faire non plus).

## Bibliographie

- [Ah] L. AHLFORS *Zur Theorie der Uberlagerungsflächen*. Acta Math. 65 (1935), 157-194.
- [Ca] A. P. CALDERÓN *Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 74 (1977), 1324-1327.
- [Ch1] M. CHRIST *Singular integral operators*. NSF-CBMS Regional Conf. at Missoula (Montana), Aug. 1989.
- [CJS] R. R. COIFMAN, P. JONES & S. SEMMES *Two elementary proofs of the  $L^2$ -boundedness of Cauchy integrals on Lipschitz curves*. J. AMS 2, 3 (1989), 553-564.
- [CDM] R. R. COIFMAN, G. DAVID & Y. MEYER *La solution des conjectures de Calderón*. Advances in Math. 48 (1983), 144-148.

- [CMM] R. R. COIFMAN, A. McINTOSH & Y. MEYER *L'intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur  $L^2$  pour les courbes lipschitziennes*. Ann. Math. 116 (1982), 361-387.
- [CM1] R. R. COIFMAN & Y. MEYER *Au delà des opérateurs pseudo-différentiels*. Astérisque 57, Soc. Math. France, Paris 1978.
- [CM2] R. R. COIFMAN & Y. MEYER *Une généralisation du théorème de Calderón sur l'intégrale de Cauchy*. Proc. Sem. Fourier analysis, El Escorial 1979, edited by M. De Guzman and I. Peral, Asociación Matematica Española 1980.
- [CW] R. R. COIFMAN & G. WEISS *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes*. Lecture Notes in Math. 242, Springer-Verlag 1971.
- [Dv1] G. DAVID *Opérateurs intégraux singuliers sur certaines courbes du plan complexe*. Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 17 (1984), 157-189.
- [Dv2] G. DAVID *Une minoration de la norme de l'opérateur de Cauchy sur les graphes lipschitziens*. Trans. Amer. Math. Soc. 302 (1987), 741-750.
- [Dv3] G. DAVID *Opérateurs d'intégrale singulière sur les surfaces régulières*. Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., série 4, 21 (1988), 225-258.
- [Dv4] G. DAVID *Morceaux de graphes lipschitziens et intégrales singulières sur une surface*. Revista Matematica Iberoamericana 4 (1988), 73-114.
- [Dv5] G. DAVID *Wavelets and singular integrals on curves and surfaces*. A paraître, Lecture Notes in Math., Springer Verlag, 1990.
- [DJ] G. DAVID & D. JERISON *Lipschitz approximations to hypersurfaces, harmonic measure, and singular integrals*. A paraître, Indiana Univ. Math. J.
- [DJS] G. DAVID, J. L. JOURNE & S. SEMMES *Opérateurs de Calderón-Zygmund, fonctions para-accrétives et interpolation*. Revista Mat. Iberoamericana 1 (1985), 1-56.
- [DS1] G. DAVID & S. SEMMES *Strong  $A_\infty$  weights, Sobolev inequalities, and quasi-conformal mappings*. Proc. conf. Anal. and P.D.E. in honor of M. Cotlar, ed. C. Sadosky, 5, Marcel Dekker 1989, 101-111.
- [DS2] G. DAVID & S. SEMMES *Singular integrals on surfaces : au delà des graphes lipschitziens*. Preprint.
- [DS3] G. DAVID & S. SEMMES *Quantified rectifiability, Lipschitz functions, and related topics*. En préparation.

- [DS4] G. DAVID & S. SEMMES *Harmonic analysis and the geometry of subsets of  $\mathbb{R}^n$* . Proc. conf. in honor of J.-L. Rubio De Francia, El Escorial 1989.
- [DS5] G. DAVID & S. SEMMES *A écrire*.
- [Fa] K. FALCONER *The geometry of fractal sets*. Cambridge Univ. Press 1984.
- [Fn] X. FANG *The Cauchy integral of Calderón and analytic capacity*. Ph. D. Dissertation, Yale University 1990.
- [Fe] H. FEDERER *Geometric measure theory*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 153, Springer Verlag 1963.
- [GR] J. GARCIA-CUERVA & J.-L. RUBIO DE FRANCIA *Weighted norm inequalities and related topics*. North Holland math. studies, Amsterdam 1985.
- [Ga] J. GARNETT *Positive length but zero analytic capacity*. Proc. Amer. Math. Soc. 21 (1970), 696-699.
- [JN] F. JOHN & L. NIRENBERG *On functions of bounded mean oscillation*. Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961), 415-426.
- [Jn1] P. JONES *Square functions, Cauchy integrals, analytic capacity, and harmonic measure*. Proc. Conf. Harmonic analysis and partial differential equations, El Escorial 1987 (ed. J. Garcia-Cuerva), 24-68. Lecture Notes in Math. 1384, Springer Verlag 1989.
- [Jn2] P. JONES *Lipschitz and bi-lipschitz functions*. Revista Mat. Iberoamericana 4 (1988), 115-122.
- [Jn3] P. JONES *Rectifiable sets and the traveling salesman problem*. Preprint.
- [Je] J. L. JOURNE *Calderón-Zygmund operators, pseudodifferential operators and the Cauchy integral of Calderón*. Lecture Notes in Math. 994, Springer Verlag 1983.
- [McM] A. McINTOSH & Y. MEYER *Algèbre d'opérateurs définis par des intégrales singulières*. C. R. Acad. Sc. Paris 301 (1985), 395-397.
- [Mt] P. MATTILA *Lecture notes on geometric measure theory*. Universidad de Extremadura, Espagne 1986.
- [Mu] T. MURAI *A real variable method for the Cauchy transform and analytic capacity*. Lecture Notes Math. 1307, Springer Verlag 1988.

- [Se1] S. SEMMES *Chord-arc surfaces with small constant I*. To be published, *Advances in Math.*
- [Se2] S. SEMMES *Chord-arc surfaces with small constants II : good parametrizations*. A paraître, *Advances in Math.*
- [Se3] S. SEMMES *A criterion for the boundedness of singular integrals on hypersurfaces*. *Trans. Amer. Math. Soc.* 311 (1989), 501-513.
- [Se4] S. SEMMES *Square function estimates and the  $T(b)$  theorem*. A paraître, *Proc. Amer. Math. Soc.*
- [Se5] S. SEMMES *Hypersurfaces in  $\mathbb{R}^n$  whose unit normal has small BMO norm*. Preprint.
- [Se6] S. SEMMES *Differentiable function theory on nonsmooth hypersurfaces in  $\mathbb{R}^n$* . A paraître, *Indiana Univ. Math. J.*
- [Se7] S. SEMMES *Analysis vs geometry on a class of rectifiable hypersurfaces in  $\mathbb{R}^n$* . A paraître, *Indiana Univ. Math. J.*
- [Se8] S. SEMMES *Communication personnelle*.
- [St] E. M. STEIN *Singular integral and differentiability properties of functions*. Princeton Univ. Press 1970.
- [Vä] J. VÄISÄLÄ *Uniform domains*. *Tôhoku Math. J.* 40 (1988), 101-118.
- [Z] A. ZYGMUND *Trigonometric series*. Cambridge Univ. Press 1968.

Guy David  
 CNRS UA D0757  
 Université de Paris-Sud  
 Mathématiques - Bât. 425  
 91405 ORSAY CEDEX  
 (France)

S. Semmes  
 Department of Mathematics  
 Wiess school of natural sciences  
 Rice University  
 P.O. Box 1892  
 Houston Texas 77251 (USA)



## LES G-MESURES

A. H. DOOLEY

### 1. Introduction

J'ai passé le deuxième semestre de l'année scolaire 89/90 en visite à la Faculté des Sciences d'Orsay. Pendant cette période, j'ai donné deux exposés dans lesquels je cherchais à présenter des travaux communs que j'avais entrepris avec G. Brown depuis 1980 environ. Une partie de ce travail est publiée, mais une autre partie reste inédite, bien qu'elle soit actuellement en cours de rédaction. Mon but était de décrire les idées et les exemples qui nous avaient motivés sans entrer dans les démonstrations assez techniques. En préparant cette rédaction de mes exposés j'ai maintenu cette philosophie.

S'il y a un thème commun, c'est que les constructions de l'analyse harmonique classique de produits de Riesz, convolution de Bernoulli, et produit infini, sont beaucoup plus générales qu'on croyait autrefois, et que dans un certain sens toute mesure sur un espace produit infini qui est ergodique pour le groupe de changements de coordonnées finis peut être réalisée par une variation de ces constructions classiques. Par contre, un bon nombre de théorèmes classiques, notamment ceux de "dichotomie", se démontre facilement à partir de l'ergodicité.

Le plan de l'article est le suivant ; après quelques préliminaires au § 2, nous montrons dans le § 3 que toute mesure ergodique est équivalente à une mesure de type produit faible, trouvant aussi un critère utile pour l'équivalence à un vrai produit. Le § 4 introduit la notion de  $G$ -mesure ce qui est la généralisation des produits de Riesz ; le § 5 donne quelques précisions sur l'équivalence et l'orbite-équivalence des  $G$ -mesures. Finalement, au § 6 on considère la relation entre les  $G$ -mesures et les produits.

Je voudrais exprimer mes remerciements aux mathématiciens d'Orsay de m'avoir accueilli d'une façon chaleureuse. La période de mon séjour m'a beaucoup bénéficié, personnellement et professionnellement.

### 2. Notations et motivations

On se place dans le cadre suivant. Pour une suite  $\{\ell(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  d'entiers, soit  $\mathbb{Z}_{\ell(n)}$  le

groupe des entiers modulo  $\ell(n)$  et  $(X, \mathcal{C})$  l'espace borélien produit

$$X = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{\ell(i)}.$$

On considère les éléments de  $X$  comme des suites  $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ .

Soit  $\Gamma = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{\ell(i)}$  le groupe dénombrable d'éléments  $x$  de  $X$  tels qu'il existe  $N$  avec  $x_n = 0, \forall n > N$ . Alors  $\Gamma$  agit sur  $X$  comme le groupe de "changements de coordonnées finis", c'est-à-dire

$$(\gamma x)_n = \gamma_n + x_n \quad (\text{modulo } \ell(n)).$$

Une mesure  $\mu$  sur  $X$  est dite *quasi-invariante* si, pour chaque  $\gamma \in \Gamma$ ,  $\mu \circ \gamma \sim \mu$ , où  $\mu \circ \gamma(E) = \mu(\gamma^{-1}E)$ , ( $E \in \mathcal{C}$ ). Si  $\mu$  est quasi-invariante, on dira que  $\mu$  est *ergodique* si, pour chaque ensemble  $E \in \mathcal{C}$  qui est invariant pour  $\Gamma$ , on a soit  $\mu(E) = 0$ , soit  $\mu(E^c) = 0$ .

On se propose le but, sûrement très difficile à atteindre, de "décrire" en quelque sorte toutes les mesures ergodiques sur  $X$ . Pour montrer que ceci est un problème difficile mais intéressant, rappelons le théorème de Dye [D].

**THEOREME.** Soit  $(Y, S, \nu)$  un système ergodique de type II ou de type III. Alors  $(Y, S, \nu)$  est orbite-équivalent à  $(X, T, \mu)$ , où

- $X$  est comme ci-dessus ;
- $T$  est l'odomètre ;
- $\mu$  est une mesure ergodique sur  $X$ .

Il faut donner une explication des termes utilisés dans cet énoncé :  $Y$  est un espace borélien,  $S : Y \rightarrow Y$  une transformation borélienne,  $\nu$  une mesure quasi-invariante et ergodique pour le groupe engendré par  $S$ . L'odomètre est la transformation standard de  $X$  correspondant au changement d'un odomètre si l'on fait un pas. La notion d'orbite-équivalence se définit alors : on dit que  $(Y, S, \nu)$  est *orbite-équivalent* à  $(X, T, \mu)$  s'il existe une transformation borélienne inversible  $\Phi : Y \rightarrow X$  telle que  $\nu \circ \Phi \sim \mu$ , et pour  $\nu$ -presque tout  $y \in Y$ , l'image par  $\Phi$  de l'orbite  $\{S^m \cdot y : m \in \mathbb{N}\}$  est l'orbite  $\{T^m \Phi y : m \in \mathbb{N}\}$ .

Si l'on se rend compte que les orbites de  $\Gamma$  dans  $X$  coïncident avec les orbites de  $T$  dans  $X$ , on voit que notre problème équivaut à une classification de tous les systèmes ergodiques, et donc par les travaux de Connes-Krieger, à une classification soit des facteurs de type III à isomorphisme près, soit des flots de  $\mathbb{R}$  (à conjugaison près).

J'espère vous convaincre qu'en posant le problème avec  $\Gamma$  au lieu de  $T$ , on tombe sur une formalisation, notamment en ce qui concerne la structure des  $\sigma$ -algèbres, qui donne une nouvelle optique sur ce problème.

Soit donc  $\Gamma_n$  l'ensemble des éléments de  $\Gamma$  tels que  $\gamma_k = 0$  pour tout  $k > n$  ; soit  $X^n$  les éléments  $x \in X$  tels que  $x_k = 0$  pour  $k \leq n$ . Soit  $\mathcal{C}_n$  la  $\sigma$ -algèbre engendrée par les cylindres  $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times \mathbb{Z}_{\ell(n+1)} \times \cdots$ , et soit  $\mathcal{C}^n$  engendrée par les cylindres  $\mathbb{Z}_{\ell(1)} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{\ell(n)} \times A_{n+1} \times \cdots \times A_m \times \mathbb{Z}_{\ell(m+1)} \times \cdots$  pour tout  $m > n$ . (Les  $A_i$  sont des sous-ensembles des  $\mathbb{Z}_{\ell(i)}$ .) La "queue"  $\mathcal{C}^\infty = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{C}^i$  coïncide avec l'algèbre de tous les ensembles  $\Gamma$ -invariants de  $X$ . Donc, on peut espérer étudier l'ergodicité à travers les  $\mathcal{C}_n$  et les  $\mathcal{C}^n$ .

Pour une mesure  $\mu$  (quasi-invariante ou non), on pose

$$\mu^n = \frac{1}{|\Gamma_n|} \sum_{\gamma \in \Gamma_n} \mu \circ \gamma.$$

On a  $\mu^n \gg \mu$  (et  $\mu^n \sim \mu$  dans le cas quasi-invariant). L'étude des mesures  $\mu^n$ , pas si évidente si l'on pense seulement à l'odomètre, sera un de nos outils principaux.

La troisième partie de la motivation vient des exemples assez classiques. Je vous en propose trois.

**EXEMPLE 1.** Les produits. Pour chaque  $n$ , on fixe une probabilité  $\mu_i$  sur  $\mathbb{Z}_{\ell(i)}$ . Posons  $\mu = \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mu_i$  ; c'est la mesure telle que

$$\mu(A_1 \times \cdots \times A_n \times \mathbb{Z}_{\ell(n+1)} \times \cdots) = \mu_1(A_1) \mu_2(A_2) \cdots \mu_n(A_n).$$

Alors, si  $E \in \mathcal{C}^\infty$ , on a  $\mu(E) = 0$  ou  $1$  ; donc  $\mu$  est ergodique si elle est quasi-invariante, ce qui équivaut à demander que  $\mu_i\{n\} \neq 0, \forall n \in \mathbb{Z}_{\ell(i)}, \forall i$ .

**EXEMPLE 2.** Les produits de Riesz. Un produit de Riesz habite sur le cercle  $\mathbb{T}$ . Pour des suites  $\{a_i\} \subseteq [-1, 1]$ , et  $\{\Phi_i\} \subseteq [0, 1]$ , on pose

$$\mu = \text{faible}_k^* \lim \prod_{i=1}^k (1 + a_i \cos 2\pi(3^i x + \Phi_i)) dx.$$

On peut facilement avoir des produits de Riesz  $\tilde{\mu}$  sur  $X$  en posant  $\tilde{\mu} = \mu \circ q$ , où  $q$  est l'application  $X \rightarrow \mathbb{T} : x \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i}$ . (J'ai pris  $\ell(i) = 3, \forall i$  pour simplifier les notations.) Si  $\mu$  est, par exemple continue, il n'y a pas de problèmes avec les points doubles, et  $\tilde{\mu}$  est bien définie. G. Brown a montré que les produits de Riesz sont ergodiques.

**EXEMPLE 3.** Les  $g$ -mesures de Keane. Généralisant les produits de Riesz avec  $a_i = a$  (const), Keane [K] considère les mesures  $\mu = \prod_{i=1}^{\infty} g(3^i x) dx$ , où  $g$  est une fonction  $C^1$  sur le tore  $\mathbb{T}$ . On peut les transporter sur  $X = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_3$  comme ci-dessus.

Nous voudrions trouver une généralisation commune de ces exemples et comprendre en quelle mesure cette construction est générique pour les mesures ergodiques.

### 3. Mesures de type produit et de type produit faible

Dorénavant, toutes les mesures seront des probabilités.

Dans cette partie je donnerai quelques idées sur [BD1], et l'on verra comment utiliser les  $\sigma$ -algèbres  $\mathcal{C}^n$  et les mesures  $\mu^n$ . Remarquons d'abord qu'il y a une caractérisation des mesures qui sont les produits dans le sens de l'exemple 1 ci-dessus, à savoir,  $\mu$  est un produit si et seulement si  $\mu$  se "fend" suivant la règle

$$\mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B) \quad \forall n, \quad \forall A \in \mathcal{C}_n, \quad \forall B \in \mathcal{C}^n.$$

Nous dirons qu'une mesure  $\mu$  est de *type produit* si  $\forall n, \exists m > n$  avec

$$\mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B) \quad \forall A \in \mathcal{C}_m, \quad B \in \mathcal{C}^m.$$

Ceci veut dire qu'il existe un regroupement des coordonnées de  $X$ ,

$$X = (\mathbb{Z}_{\ell(1)} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{\ell(n_1)}) \times (\mathbb{Z}_{\ell(n_1+1)} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{\ell(n_2)}) \times \cdots$$

tel que  $\mu$  soit un produit par rapport aux nouvelles fentes  $n_1, n_2, \dots$

Finalement,  $\mu$  est de *type produit faible* si  $\forall n \exists m > n$  avec

$$\mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B) \quad \forall A \in \mathcal{C}_n, \quad B \in \mathcal{C}^m.$$

Un exemple de Krieger [K2] montre qu'il existe une mesure ergodique qui n'est orbite-équivalente à aucune mesure de type produit.

Par contre, nous avons montré dans [BD1].

**THEOREME A.** Soit  $(X, \Gamma, \mu)$  comme dans le § 2, avec  $\mu$  quasi-invariant. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- i)  $\mu$  est ergodique ;
- ii) il existe  $\nu \sim \mu$ ,  $\nu$  de type produit faible (" $\sim$ " veut dire équivalence des mesures au sens traditionnel.)

La démonstration (ii) $\Rightarrow$ (i) est facile. En fait, si  $\nu$  est de type produit faible et  $E \in \mathcal{C}^\infty$ , pour toute fonction  $\mathcal{C}_n$ -mesurable,  $f$ ,

$$\int_E f(x) d\nu(x) = \int f(x) \chi_E(x) d\nu(x) = \int f(x) d\nu(x) \int \chi_E(x) d\nu(x).$$

Choisissant une suite de fonctions  $f$  qui tendent vers  $\chi_E$ , on voit que  $\int_E d\nu = (\int_E d\nu)^2$ , de sorte que  $\nu(E) = 0$  ou  $1$ .

Prouver l'autre direction est plus difficile, et utilise l'idée des "fentes" des mesures. Si  $\mu$  est une mesure sur  $X$ ,  $n > 0$  on définit  $\hat{\mu}_{,n}$  sur  $X$  par

$$\hat{\mu}_{,n}(A \cap B) = \mu(A)\mu(B) \quad A \in \mathcal{C}_n, \quad B \in \mathcal{C}^n.$$

C'est la fente en  $n$  de  $\mu$ .

On a le lemme suivant.

LEMME. Si  $\mu$  est  $\Gamma$  quasi-invariant,  $\hat{\mu}_{,n} \sim \mu$ .

Preuve. On fait une désintégration de  $\mu$  par rapport à la projection  $\Pi : X \rightarrow X_n$ ; on a

$$\int_{X_n \times X^n} f(x, y) d\mu(x, y) = \int_{X_n} \int_{X^n} f(x, y) d\mu^x(y) d\nu(x)$$

et

$$\int f(x, y) d\hat{\mu}_{,n}(x, y) = \int \int \int f(x, y) d\mu^\omega(y) d\nu(\omega) d\nu(x).$$

Or, la  $\Gamma$ -invariance de  $\mu$  implique que  $\forall x, y, \mu^x \sim \mu^\omega$ . Il en résulte que

$$\frac{d\hat{\mu}_{,n}}{d\mu}(x, y) = \int \frac{d\mu^\omega}{d\mu^x}(y) d\nu(\omega).$$

Les fonctions  $\frac{d\hat{\mu}_{,n}}{d\mu}$  vont être l'outil principal une fois démontré le théorème suivant.

THEOREME B. Soit  $\mu$  une mesure quasi-invariante sur  $X$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) Il existe  $\nu \sim \mu$ ,  $\nu$  de type produit ;
- ii) Il existe une suite  $\{n_i\}$  d'entiers telle que

$$\frac{d\hat{\mu}_{,n_i}}{d\mu} \rightarrow 1, \quad \mu \text{ p. p.}$$

Démonstration par abus de notation. L'implication (i)  $\Rightarrow$  (ii) est triviale.

Supposons donc  $\frac{d\hat{\mu}_{,n_i}}{d\mu} \rightarrow 1, \mu$ -p. p. Soit  $f_{\ell}^{n, m} = \frac{(d\mu|_{\mathcal{C}^n})^\wedge_{\ell}}{d\mu|_{\mathcal{C}^n}} \cdot \frac{(d\mu|_{\mathcal{C}^n})^\wedge_{m}}{d\mu|_{\mathcal{C}^\ell}}$ , pour  $n < \ell < m$ .

Alors  $\lim_{\ell, m \rightarrow 0} f_{\ell}^n f_{m}^m$ . On choisit une sous-suite  $\{n_{k_i}\}$  de  $\{n_i\}$  telle que  $g = \sum_{i=1}^{\infty} f^{n_{k_i}} n_{k_{i+1}} n_{k_{i+2}}$  converge presque partout. En écrivant

$x$  pour les coordonnées de  $n$  à  $\ell$   
 $y$  pour les coordonnées de  $\ell + 1$  à  $m$   
 $z$  pour les coordonnées de  $m + 1$  à  $\infty$ , on voit que

$$f^n f^m f^{\ell} f^m = \frac{dx d(y, z)}{d(x, y, z)} \cdot \frac{dy dz}{d(y, z)} = \frac{dx dy dz}{d(x, y, z)}.$$

Ce calcul montre "par abus de notation" que  $g\mu$  est de type produit.

C'est un résultat préliminaire, non sans intérêt lui-même. On en verra des applications au § 6.

La démonstration du théorème A est du même genre, mais un peu plus compliquée. Cette fois, on remarque que si  $\mu$  est ergodique,

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{(d\hat{\mu} |_{C^j \wedge C_k \vee C^{\ell}})^{\wedge, k}}{d\mu |_{C^j \wedge C_k \vee C^{\ell}}} = 1.$$

On pose

$$g(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \Phi_{i_{2n-1} i_{2n}}^{i_{2n-2} i_{2n}}(x)$$

où

$$\Phi_{k\ell}^{ij} = \frac{(d\mu |_{C^i})^{\wedge, k}}{d\mu |_{C^i}} \cdot \left( \frac{(d\mu |_{C^i \wedge C_{\ell}^j})^{\wedge}}{d\mu |_{C^i \wedge C_{\ell}^j}} \right)^{-1} \left( \frac{(d\mu |_{(C^i \wedge C_k) \vee (C^j \wedge C_{\ell})})^{\wedge, k}}{d\mu |_{(C^i \wedge C_k) \vee (C^j \wedge C_{\ell})}} \right).$$

Comme dans la démonstration du théorème B, on choisit la suite  $\{i_n\}$  telle que le produit dans la définition de  $g$  converge. On vérifie que  $g \cdot \mu$  est de type produit faible.

Les deux théorèmes énoncés ci-dessus sont curieux. La caractérisation des mesures ergodiques est exacte, dans le sens qu'il n'y a pas de "ε", mais il semble difficile de contrôler la croissance de la suite d'entiers  $m(n)$  définie par

$$\nu(A \cap B) = \nu(A)\nu(B) \quad A \in C_n, \quad B \in C^{m(n)}$$

( $m(n)$  minimal avec cette propriété).

Il est d'ailleurs curieux de se demander la forme exacte de la mesure de type produit faible qui est équivalente à un produit de Riesz. Que peut-on dire de la suite  $\{m(n)\}$  dans ce cas ? Quand est-ce qu'un produit de Riesz est équivalent à une mesure de type produit ?

Ces théorèmes ont des applications aux algèbres de von Neumann. En particulier, on peut raffiner un théorème de Powers, voir [BD1].

#### 4. Les G-mesures

Les questions posées à la fin du § 3 semblant assez difficiles, on voudrait développer un nouveau point de vue sur les mesures ergodiques. Poussé par les trois classes d'exemples du § 2, et par la représentation des dérivées de Radon-Nicodým comme produit infini trouvée dans le § 3, on décida de chercher une généralisation de la construction de produit de Riesz que je discuterai ci-dessous. En fait, on trouvera des mesures plus générales que les mesures ergodiques.

DEFINITION. Une famille  $G = (G_n)$  de fonctions sur  $X$  est dite "compatible" si

$$\forall m > n, \forall \gamma \in \Gamma_n, \forall x \in X, \quad G_n(\gamma x) G_m(x) = G_m(\gamma x) G_n(x),$$

et normalisée si

$$\forall n, \forall x \in X, \quad \frac{1}{|\Gamma_n|} \sum_{\gamma \in \Gamma_n} G_n(\gamma x) = 1.$$

Etant donné une telle famille, on dira qu'une probabilité  $\mu$  est une  $G$ -mesure si

$$\forall n, \quad \frac{d\mu}{d\mu^n} = G_n \quad (\mu\text{-p.p.}).$$

On montre facilement que si  $G_{n-1}(x) = 0$ , alors  $G_n(x) = 0$ ; donc posant

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{G_n(x)}{G_{n-1}(x)} & \text{si } G_{n-1}(x) \neq 0 \\ 1 & \text{si } G_{n-1}(x) = 0, \end{cases}$$

on a  $G_n(x) = g_1(x) \cdots g_n(x)$ , où  $g_n(x)$  ne dépend que des coordonnées  $(x_n, x_{n+1}, \dots)$ , et  $\frac{1}{|\Gamma_n|} \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_{\ell(n)}} g_n(\gamma x) = 1$ .

Pour pouvoir comparer les fonctions  $g_n$ , on considère les applications  $q_n : X^n \rightarrow \mathbb{T} : (x_{n+1}, x_{n+2}, \dots) \rightarrow \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{x_j}{\ell(n+1) \cdots \ell(j)}$ . On dira que  $G$  est  $q$ -continue si, pour chaque  $n$ , et pour chaque  $\gamma \in \Gamma_n$ , il existe une fonction  $g'_n(\gamma, \cdot) : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que  $g_n(x_n, x_{n+1}, \dots) = g'_n(x_n, q_n(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots))$ . On a le

**THEOREME C.** Soit  $\mu$  une probabilité sur  $X$ . Il existe une probabilité  $\nu \sim \mu$  et une famille compatible normalisée de fonctions continues  $G = (G_n)$  telle que  $\nu$  est une  $G$ -mesure. Si  $\mu$  se comporte bien par rapport aux points doubles de  $q : X \rightarrow \mathbb{T}$  dans le sens que  $q(x) = q(y) \Rightarrow \mu(\{x\}) = \mu(\{y\})$ , on peut trouver une famille de fonctions  $q$ -continues.

La démonstration repose sur plusieurs applications du théorème de Lusin.

On s'intéresse à savoir quelles sont les  $G$ -mesures ergodiques, ou plus généralement les  $G$ -mesures qui sont triviales sur  $C^\infty$ . (Ces dernières ne sont pas forcément quasi-invariantes.) On sait en effet que pour une famille  $G$  fixe de fonctions compatibles et normalisées, s'il existe une unique  $G$ -mesure, elle doit être triviale sur  $C^\infty$ . Par contre, s'il existe deux limites inéquivalentes, leurs combinaisons convexes sont des  $G$ -mesures qui ne sont pas ergodiques. Dans le cas d'unicité, on dira qu'on a l'*ergodicité unique*. Il est équivalent de dire que pour toute  $f \in C(X)$ , la suite dans  $C(X)$  définie par

$$A(n, x)(f) = \frac{1}{|\Gamma_n|} \sum_{\gamma \in \Gamma_n} G_n(\gamma x) f(\gamma x) \quad (*)$$

converge, soit uniformément, soit pour tout  $x \in X$ , vers une constante. (La constante, bien entendu, sera  $\int f d\mu$ .)

Dans le cas d'ergodicité unique, donc, on retrouve la représentation souhaitée :

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f(x) g_1 \cdots g_n(x) dx.$$

Remarquons aussi que la fonction  $x \rightarrow A(n, x)(f)$  n'est autre que la fonction conditionnée  $E_\mu(f, C^n)$ .

Il est intéressant de se demander des conditions sur les  $G_n$ , ou ce qui est équivalent, sur les  $g_n$ , qui garantissent l'ergodicité unique. L'idée de Keane [Ke] est de travailler sur la somme (\*), en appliquant le théorème d'Arzelà-Ascoli. Cette idée générale marche assez bien dans notre cadre, sauf qu'il faut identifier tous les espaces  $X^n$  à  $T$  en utilisant les applications  $q_n$ .

Pour cet exposé je me bornerai au cas où  $\forall x \in X, \liminf_n g_n(x) > 0$ , bien que la moitié du travail de [BD3] concerne le cas où les  $g_n$  ont des zéros. (Je laisserai au lecteur intéressé la tâche de poursuivre ce cas !) A cette hypothèse, on joint la condition (E)  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{|\Gamma_{n-1}|} \sum_{\gamma \in \Gamma_{n-1}} |G_n(\gamma x) - G_n(\gamma y)| < \epsilon$$

quand  $|q_n(x_{n+1}, \dots) - q_n(y_{n+1}, \dots)| < \delta$ , et  $x_1 = y_1, x_2 = y_2 \cdots x_n = y_n$ . On a

**THEOREME D.** Si  $\liminf_n g_n(x) > 0, \forall x \in X$ , alors la condition (E) est suffisante pour l'ergodicité unique.

La condition (E), elle-même, n'est toujours pas facile à vérifier. Une circonstance où elle est vérifiée est si les fonctions  $g'_n(\gamma, \cdot)$  sont uniformément lipschitziennes sur  $T$ . (Ce critère généralise des conditions de Keane, Ledrappier, Walters ainsi que les résultats classiques sur les produits de Riesz.)



## 5. Equivalence et orbite-équivalence

La notion de  $G$ -mesure bien précisée, plusieurs questions se posent naturellement. D'abord, si  $\mu$  est une  $G$ -mesure uniquement ergodique, et  $\nu$  est une  $F = (F_n)$ -mesure uniquement ergodique, peut-on généraliser le "critère de Kakutani" pour singularité/continuité absolue. (On sait la dichotomie d'après l'ergodicité.) Nous avons pu démontrer dans [BD3]

**THEOREME E.** Soit  $\{g_n\}, \{f_n\}$  les suites associées à  $G, F$  comme ci-dessus. Soit  $C$  l'ensemble des points où la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ell(n)} \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^{\ell(n)}} \left( \sqrt{f_n(\gamma x)} - \sqrt{g_n(\gamma x)} \right)^2$$

converge. Alors, soit  $\mu(C) = 0$  auquel cas  $\nu \sim \mu$ , ou  $\mu(C) = 1$  auquel cas  $\nu \perp \mu$ .

Une autre question assez brûlante, suivant la théorie du § 2, est de pouvoir calculer les classes d'orbite-équivalence des  $G$ -mesures. Suivant Araki et Woods, Krieger [K] a introduit la notion d'ensemble ratio  $r(X, T, \mu)$ . C'est un sous-ensemble de  $[0, \infty]$  dont l'intersection avec  $(0, \infty)$  est un sous-groupe fermé. De plus, c'est un invariant de l'orbite-équivalence. Plus précisément

$(X, \Gamma, \mu)$ est de type	$II_1$	si	$r(X, \Gamma, \mu) = \{1\}$
" " "	$III_1$	"	$r(X, \Gamma, \mu) = (0, \infty)$
" " "	$III_\lambda (0 < \lambda < 1)$	"	$r(X, \Gamma, \mu) = gp\{\lambda\}$
" " "	$III_0$	"	$r(X, \Gamma, \mu) = \{0, 1, \infty\}$ .

La définition de  $r(X, \Gamma, \mu)$  est ;  $r \in r(X, \Gamma, \mu)$  si  $\forall A$  avec  $\mu(A) > 0$ ,  $\exists B \subseteq A$  avec  $\mu(B) > 0$  et  $\exists \gamma \in \Gamma$  avec  $\left| \frac{d\mu \circ \gamma}{d\mu}(x) - r \right| < \epsilon, \forall x \in B$ .

Dans [BD3], nous montrons que  $r(X, \Gamma, \mu)$  est engendré par les produits infinis de la forme  $\prod_{j=n}^{\infty} \frac{g_j(x)}{g_j(y)}$ ,  $x, y \in X^n$ . Il s'ensuit que, du moins dans le cas d'une  $g$ -mesure ( $g_j = g \forall j$ ) soit  $(X, \Gamma, \mu)$  est de type  $III_1$  (si l'image de  $g$  contient un intervalle), soit  $(X, \Gamma, \mu)$  est de type  $III_\lambda$  (si l'image de  $g$  consiste en les multiples de  $\lambda$  et  $\frac{\lambda}{1+\lambda}$  pour  $0 < \lambda < 1$ .) En particulier, le produit de Riesz  $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a \cos 3^k t)$  est de type  $III_1$ , donc, selon un théorème de Connes-Krieger, il est orbite-équivalent à une mesure de type produit! Peut-on espérer d'explicitier l'application  $\Phi$  qui établit cette orbite-équivalence ?

## 6. Les $G$ -mesures et les produits

Tout nous pousse vers une résolution de la question suivante : une  $g$ -mesure (et plus particulièrement le produit de Riesz mentionné à la conclusion du § 4) peut-elle être

équivalente à une mesure de type produit ? (Ca serait sérieux si tous les travaux sur les produits de Riesz ne concernaient que des produits !) Disons tout de suite que la réponse sera "quelquefois non".

L'idée pour trouver une réponse à notre question est d'appliquer le critère du théorème B. En fait,  $\mu$  est équivalente à une mesure de type produit si et seulement s'il existe une suite  $k_n \rightarrow \infty$  telle que

$$\int \left( \frac{d\hat{\mu}_{k_n}}{d\mu} \right)^2 d\mu \rightarrow 1 \quad \text{quand } u \rightarrow \infty.$$

Or, pour une  $G$ -mesure  $\mu$

$$\frac{d\hat{\mu}_{k_n}(x)}{d\mu} = |\Gamma_k| \sum_{\gamma \in \Gamma_k} \mu(\gamma X^k) \chi_{\gamma X^k}(x) (G_k(x))^{-1}$$

( $\chi_{\gamma X^k}$  étant la fonction caractéristique de l'ensemble  $\gamma X^k$ ), et donc

$$\int \left( \frac{d\hat{\mu}_{k_n}}{d\mu} \right)^2 d\mu = |\Gamma_k|^2 \sum_{\gamma \in \Gamma_k} (\mu(\gamma X^k))^2 \int_{\gamma X^k} \frac{d\mu^k(x)}{g_1 \cdots g_k(x)}. \quad (**)$$

Supposons d'abord que les  $g_j$  soient lipschitziennes d'ordre  $\alpha$ , avec constante de Lipschitz  $K_j$ . Posons

$$C_k = \sum_{j=0}^{k-1} K_j \left( \prod_{t=j}^k \ell(t) \right)^{-\alpha}.$$

Alors une estimation tout à fait standard donne

$$\left| \int \left( \frac{d\hat{\mu}_{k_n}}{d\mu} \right)^2 d\mu - 1 \right| < \max(|e^{c_k} - 1|, |e^{-c_k} - 1|).$$

Donc, si l'on peut trouver une suite  $\{k_n\}$  telle que  $C_{k_n} \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ ,  $\mu$  est équivalente à une mesure de type produit.

Dans le cas particulier du produit de Riesz,

$$\nu = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k \cos(3^k t + \Phi_k)),$$

on voit que  $\nu$  est équivalente à une mesure de type produit si  $a_k \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow \infty$ .

Cherchons maintenant un résultat dans l'autre sens. Avant de considérer les produits de Riesz, remarquons qu'il est facile de trouver une mesure de type produit faible qui n'est

pas de type produit. Avec  $X = \prod^{\infty} \mathbb{Z}_2$ , on identifie  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  à  $\mathbb{Z}_4$  qu'on suppose muni d'une mesure  $\mu$  qui n'est pas un produit. Alors  $\otimes^{\infty} \mu$  définit une mesure,  $\mu_{\infty}$ , de type produit sur  $X$ . Soit maintenant  $\Phi : X \rightarrow X$  la fonction induite par la permutation infinie des entiers (23)(45)(67) ... Alors  $\mu_{\infty} \circ \Phi$  est une mesure sur  $X$  qui n'est manifestement pas de type produit. (Les entiers où  $\mu_{\infty}$  est fendu sont exactement ceux échangés par  $\Phi$ . Donc, selon la parité de  $n$ ,  $\frac{d\mu_{\infty}}{d\mu}$  est soit une fonction soit une autre ; ni l'une ni l'autre pouvant être 1.)

On a le sentiment que le produit de Riesz  $\mu = \prod^{\infty} (1 + a \cos 3^k t)$  est loin d'être un produit. Précisons cette idée, en démontrant qu'il n'y a pas de permutation infinie  $\Phi$  telle que  $\mu \circ \Phi$  est de type produit. En fait, on montrera un peu plus.

Rappelons le groupe plein  $[\Gamma]$  de  $\Gamma$ . C'est l'ensemble des automorphismes  $\Phi$  de  $X$  tels que  $\forall x \in X, \exists \gamma = \gamma(x) \in \Gamma$  avec  $\Phi x = \gamma x$ . Un élément du normalisateur  $\mathcal{N}[\Gamma]$  de  $[\Gamma]$  établit une orbite-équivalence. Nous allons définir un certain sous-groupe de  $\mathcal{N}[\Gamma]$ , noté  $\mathcal{N}_f([\Gamma])$ , le normalisateur finitaire. Il se compose de tous les  $\Phi$ , continus, tels que  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists N(n) > n$  avec

- i)  $\Phi^{-1} \Gamma_n \Phi \subseteq [\Gamma_{N(n)}]$ , et
- ii)  $\Phi \Gamma_n \Phi^{-1} \subseteq [\Gamma_{N(n)}]$ .

Ce groupe contient les permutations infinies et beaucoup d'autres transformations.

Notre théorème final se démontre par l'inégalité de Hölder, appliquée à trouver des inégalités de la forme

$$\int G_n(\gamma, x) d\tilde{\mu}^n(x) \int \frac{d\tilde{\mu}^n}{G_n(\gamma, x)} \geq 1 + \epsilon.$$

Les détails sont assez compliqués, et font partie d'une publication future.

**THEOREME F.** *Supposons  $\ell(k) = \ell$  (constante  $\forall k$ ), et soit  $\mu$  une  $g$ -mesure sur  $X$ . Supposons qu'il existe  $\Phi \in \mathcal{N}_f([\Gamma])$  tel que  $\mu \circ \Phi$  est équivalent à une mesure de type produit. Alors  $\mu$  est égale à une mesure de type produit.*

Fixons donc une  $g$ -mesure  $\mu$  qui n'est pas un produit. Supposons que l'image de  $g$  contient un intervalle. (Tel sera le cas pour le produit de Riesz  $\prod^{\infty} (1 + a \cos 3^k t)$ .) Les remarques du § 4 prouvent qu'il existe une orbite-équivalence  $\Phi : X \rightarrow X$  telle que  $\mu \circ \Phi$  est de type produit. Le théorème F montre que  $\Phi$  n'appartient pas au normalisateur finitaire, ce qui implique que  $\Phi$  est vachement plus compliqué qu'une permutation infinie.

## Références

- [BD1] G. BROWN & A. H. DOOLEY Ergodic measures are of weak product type. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 98 (1985), 129-145.
- [BD2] G. BROWN & A. H. DOOLEY Odometer on  $G$ -measures. J. Ergod. Th. Dyn. Systems, à paraître.
- [BD3] G. BROWN & A. H. DOOLEY Dichotomy for  $G$ -measures. Preprint 1990.
- [D] H. DYE On groups of measure preserving transformations I. Amer. J. Math. 85 (1959), 119-159.
- [Ke] M. KEANE Strongly mixing  $g$ -measures. Invent. Math. 16 (1972), 309-324.
- [K1] W. KRIEGER On the Araki-Woods asymptotic ratio set and non-singular transformations of a measure space. In Springer Verlag notes 160 (1970), 158-177.
- [K2] W. KRIEGER On entropy and generators of measure preserving transformations. Trans. Amer. Math. Soc. 149 (1970), 453-464. Erratum 168 (1972), 519.
- [S] A. V. SKOROHOD Integration in Hilbert space. Springer Verlag 1974.

School of Mathematics  
University of New South Wales  
P.O. Box 1  
Kensington, N.S.W. 2033  
(Australia)

## UNE CONSTRUCTION ACROBATIQUE DE ROBERT KAUFMAN

Jean-Pierre KAHANE

## 1. Notations, contexte et histoire

La thèse de G. Cantor répondait affirmativement à la question : si une série trigonométrique converge vers zéro partout, est-ce nécessairement la série nulle ? Peu après, Cantor observait que la réponse subsiste si on suppose seulement que la série converge vers zéro sauf en un point, ou sauf sur un ensemble convenable. Les ensembles convenables ont été appelés ensembles d'unicité, ou ensembles  $U$ . Les autres, ensembles de multiplicité, ou ensembles  $M$ . Les dénombrables sont des ensembles  $U$  (Cantor l'avait montré pour les dénombrables compacts), les ensembles de mesure nulle au sens de Lebesgue sont des ensembles  $M$ . Il existe des ensembles  $M$  de mesure nulle (Menchoff), et des ensembles  $U$  parfaits (Rajchman). L'ensemble triadique de Cantor  $E_{1/3}$  est un ensemble  $U$  (Rajchman), et l'ensemble  $E_{2/5}$  ( $= \{\sum_1^\infty \pm (\frac{2}{5})^m\}$ ) un ensemble  $M$  (Nina Bari). Pour les ensembles  $E_\xi$  ( $= \{\sum_1^\infty \pm \xi^m\}$ ), qu'on dirait aujourd'hui self-similaires dans le rapport  $\xi$ , ils sont de type  $U$  si  $\xi^{-1} \in S$ , la classe des entiers algébriques dont les autres conjugués sont de module strictement inférieur à 1, et de type  $M$  si  $\xi^{-1} \notin S$  (Salem-Zygmund).

Voici un autre exemple de type  $U$ . On dit qu'un compact  $K$  sur  $\mathbb{R}$  est un ensemble de Kronecker si toute fonction continue de module 1 sur  $K$  est approchable uniformément par des exponentielles imaginaires. Tout ensemble de Kronecker est de type  $U$  (Varopoulos). Et voici toute une classe d'ensembles de Kronecker. Désignons par  $L$  (ensemble à lacunes) un compact sur  $\mathbb{R}$  ayant la propriété suivante : il existe deux suites positives  $(\epsilon_j)$  et  $(\ell_j)$  tendant vers 0,  $\epsilon_j = o(\ell_j)$ , tels que pour chaque  $j$  on puisse recouvrir  $L$  par des intervalles de longueurs  $\epsilon_j$  dont les distances mutuelles dépassent  $\ell_j$ . Désignons par  $\mathcal{D}^1$  l'ensemble des fonctions réelles de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ , à dérivée strictement positive. Considérons  $L$  comme fixe,  $\mathcal{D}^1$  comme espace de Baire. Alors, génériquement quand  $\varphi \in \mathcal{D}^1$  (on dit aussi : pour quasi toute  $\varphi \in \mathcal{D}^1$ ),  $\varphi(L)$  est un ensemble de Kronecker (R. Kaufman 1967) [1].

Les exemples de type  $M$  que j'ai donnés ( $E_\xi$  avec  $\xi^{-1} \notin S$ ) sont en réalité de type  $M_0$ . Cela veut dire qu'ils portent des mesures  $\mu \neq 0$  dont les transformées de Fourier  $\hat{\mu}(u)$  tendent vers zéro à l'infini. On va appeler  $R$  (comme Rajchman) la classe de ces mesures. Pour montrer que  $E_\xi$  est un ensemble  $M_0$  quand  $\xi \notin S$ , on considère la mesure de probabilité standard sur  $E_\xi$  (celle qui donne des masses égales à des portions égales), et on vérifie

$$\hat{\mu}(u) = \prod_1^\infty \cos u \xi^m = o(1) \quad (u \rightarrow \infty).$$

Les compacts de  $\mathbb{R}$  qui ne sont pas de type  $M_0$  sont, par définition, de type  $U_0$ . Ainsi  $M_0 \subset M$ ,  $U \subset U_0$  (je me borne maintenant aux compacts de  $\mathbb{R}$ ). Les inclusions sont strictes (Piatetskii-Shapiro ; voir aussi Körner et Kaufman, Astérisque 1972).

Dans la suite, il sera surtout question des mesures de Rajchman (classe  $R$ ) et des ensembles de multiplicité au sens strict (type  $M_0$ ). Signalons (on ne s'en servira pas) une intéressante caractérisation des mesures de Rajchman : ce sont les mesures qui sont nulles sur tous les ensembles  $U_0$  (Russell Lyons 1985) [4].

Remarquons que, si  $\mu \in R$  et  $\psi \in L^1(\mu)$ ,  $\psi\mu \in R$  ; en particulier,  $|\mu| \in R$ .

Revenons aux ensembles  $E_\xi$  ( $\xi^{-1} \notin S$ ) et à la classe  $\mathcal{D}^1$ . Non seulement  $E_\xi \in M_0$ , mais, pour toute  $\varphi \in \mathcal{D}^1$ ,  $\varphi(E_\xi) \in M_0$  (R. Kaufman 1976) [2]. En voici la démonstration, utile pour ce qui va suivre. Choisissons  $\mu$ , la mesure de probabilité standard sur  $E_\xi$ , et son image  $\nu$  par  $\varphi$ . Ainsi

$$\hat{\nu}(u) = \int e^{iu\varphi(x)} \mu(dx),$$

et il s'agit de montrer  $\hat{\nu}(u) = o(1)$  ( $u \rightarrow \infty$ ). On suppose  $0 < a < \varphi' < b$ , et on va désigner par  $\omega(\cdot)$  le module de continuité de  $\varphi'$ . Fixons  $u \sim \xi^{-\nu}$  ( $\sim$  veut dire que le rapport est borné). Ecrivons  $\mu = \lambda_1 * \lambda_2$  avec

$$\hat{\lambda}_1(\cdot) = \prod_{m \geq m(\nu)} \cos(\xi^m \cdot)$$

$m(\nu)$  étant choisi de telle façon que  $\nu - m(\nu) \rightarrow \infty$  et

$$(*) \quad \omega(\xi^{m(\nu)}) \xi^{m(\nu) - \nu} = o(1).$$

Alors

$$\begin{aligned} \hat{\nu}(u) &= \int \int e^{iu\varphi(x+y)} \lambda_1(dx) \lambda_2(dy) \\ &= \int e^{iu\varphi(x+y)} \lambda_1(dx) = \int e^{iu(\varphi(y) + x\varphi'(y+\theta x))} \lambda_1(dx) = \\ &= e^{iu\varphi(y)} \int e^{iux\varphi'(y)} e^{iux(\varphi'(y+\theta x) - \varphi'(y))} \lambda_1(dx) \\ &= O(\hat{\lambda}_1(u\varphi'(y)) + u\delta\omega(\delta)) \end{aligned}$$

où  $\delta$  est la longueur du support de  $\lambda_1$ , donc  $\delta \sim \xi^{m(\nu)}$ . Le premier terme tend vers zéro parce que  $u\varphi'(y) \sim \xi^{-\nu}$  et  $\nu - m(\nu) \rightarrow \infty$ , et le second terme tend vers zéro à cause de (\*). Finalement  $\hat{\nu}(u) = o(1)$ .

A la lueur de ce résultat R. Kaufman introduit deux définitions et notations.  $M_0(\mathcal{D}^1)$  est l'ensemble des  $E$  compacts sur  $\mathbb{R}$  tels que, pour toute  $\varphi \in \mathcal{D}^1$ ,  $\varphi(E)$  est de type  $M_0$ .

$M_0^0(\mathcal{D}^1)$  est l'ensemble des  $E$  compacts qui portent une mesure de probabilité  $\mu$  dont les images par toutes les  $\varphi \in \mathcal{D}^1$  sont des mesures de Rajchman. Je viens de montrer que  $E_\xi \in M_0^0(\mathcal{D}^1)$  quand  $\xi \notin S$ , et on a évidemment

$$M_0^0(\mathcal{D}^1) \subset M_0(\mathcal{D}^1).$$

## 2. Le problème et sa solution

**Problème :** a-t-on  $M_0^0(\mathcal{D}^1) \neq M_0(\mathcal{D}^1)$  ?

**Réponse :** oui (R. Kaufman 1990) [3].

La démonstration est à la fois naturelle et acrobatique. Elle consiste, naturellement, à construire un compact  $F$ ,  $F \in M_0(\mathcal{D}^1)$ ,  $F \notin M_0^0(\mathcal{D}^1)$ .

On part d'un  $\xi \notin S$ , disons  $\xi = \frac{2}{5}$ . Tous les ensembles qu'on va construire seront des parties de  $E_\xi$ . Voici les étapes de la construction.

1. Soit  $\mathcal{S}$  l'ensemble des applications strictement croissantes de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ , appliquant 0 sur 0. Soit  $\sigma \in \mathcal{S}$ , et  $k$  l'application "réciproque" :

$$k_N = \sup\{n : \sigma(n) \leq N\}.$$

On désigne par  $L_\sigma$  la réunion des intervalles d'entiers  $[4^N, 4^N + k_N]$  (les "lacunes") et on considère la partie "lacunaire" de  $E_\xi$  (en vérité, du type  $L$ ), obtenue en imposant le signe – comme coefficient de  $\xi^m$  quand  $m \in \Lambda$  ; c'est

$$K(\sigma) = \left\{ \sum_{m \notin L_\sigma} \pm \xi^m \right\} - a_\sigma$$

avec

$$a_\sigma = \sum_{m \in L_\sigma} \xi^m.$$

2. Soit  $u(k, \ell)$  des parties infinies disjointes de  $\mathbb{N}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ,  $\ell$  entier  $\leq k$ ). Etant donné  $k, \ell \leq k$ , et  $n \in \mathbb{N}$ , posons

$$N = u(k, \ell, n) \quad (n\text{-ième terme de } u(k, \ell))$$

$$J(k, \ell, n) = [2 \times 4^N, 2 \times 4^N + N].$$

Définissons maintenant les parties suivantes de  $E_\xi$  :

$$M_k^\ell(\sigma) = \left\{ \sum \pm \xi^m ; m \notin \bigcup_{n \leq \sigma(k)} J(k, \ell, n) \right\}$$

avec

$$a_k^\ell(\sigma) = \left\{ \sum \xi^m ; m \in \bigcup_{n < \sigma(k)} J(k, \ell, n) \right\}$$

$$M_k(\sigma) = \bigcup_{1 \leq \ell \leq k} M_k^\ell(\sigma)$$

$$M(\sigma) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} M_k(\sigma)$$

$$K'(\sigma) = K(\sigma) \cap M(\sigma)$$

3.

$$F = \overline{\bigcup_{\sigma \in S} K'(\sigma)}.$$

Reste, bien sûr, à comprendre pourquoi  $F \in M_0(\mathcal{D}^1)$  et  $F \notin M_0^0(\mathcal{D}^1)$ .

### 3. Essayons de comprendre

Comment R. Kaufman a-t-il pu en arriver là, et pourquoi sa construction marche-t-elle?

**Première idée** Partons de  $E_\xi$ . J'ai démontré (suivant [2]) que c'est un ensemble de type  $M_0^0(\mathcal{D}^1)$ . Pour démontrer simplement  $E_\xi \in M_0$ , il suffit de suivre Salem, qui observe que, lorsque  $\xi^{-1} \notin S$ ,

$$\sum_0^\infty \sin^2 v \xi^{-m} = \infty$$

uniformément par rapport à  $v \in [\xi, 1]$ . Ainsi, quand  $u = v \xi^{-\nu}$ ,

$$\hat{\mu}(u) = \prod_1^\nu \cos u \xi^m \prod_{\nu+1}^\infty \cos u \xi^m = \hat{\mu}(v) \prod_0^{\nu-1} \cos v \xi^{-m}$$

et il suffit de constater que

$$\prod_0^{\nu-1} \cos^2 v \xi^{-m} \leq \exp \left( - \sum_0^{\nu-1} \sin^2 v \xi^{-m} \right)$$



pour conclure.

L'idée est qu'on peut créer des lacunes dans  $E_\xi$ , et rester dans  $M_0$ . Désignant par  $L$  une réunion d'intervalles entiers dont les longueurs tendent vers l'infini, soit

$$E_\xi L = \left\{ \sum_{m \notin L} \pm \xi^m \right\}$$

$$\hat{\mu}_L(u) = \prod_{m \notin L} \cos u \xi^m ;$$

ainsi le support de  $\mu_L$  est  $E_\xi L$ . On a maintenant

$$\begin{aligned} |\hat{\mu}_L(u)|^2 &\leq \prod_{1 \leq m \leq \nu, m \notin L} \cos^2(v \xi^{m-\nu}) \\ &\leq \exp(\text{card}(L \cap [1, \nu]) - \sum_0^{\nu-1} \sin^2 v \xi^{-m}) \end{aligned}$$

et on peut choisir  $L$  assez dispersée pour que ce dernier membre soit  $o(1)$ . Ainsi  $E_\xi L$  ( $E_\xi$  rendu "lacunaire" au moyen des "lacunes" que sont les intervalles d'entiers constituant  $L$ ) est de type  $M_0$ .

Mais, parce que les "lacunes" tendent vers l'infini,  $E_\xi L$  est un ensemble de type  $L$ . Donc, par le théorème de R. Kaufman 1967, quasi toute  $\varphi \in \mathcal{D}^1$  le transforme en un Kronecker. Donc  $E_\xi L$  n'est pas de type  $M_0(\mathcal{D}^1)$ . Cette idée se trouve déjà chez R. Kaufman 1976 [2].

Observons que l'ensemble  $K(\sigma)$  défini dans la partie 2 n'est autre que  $E_\xi L_\sigma$ .

Deuxième idée. Partons maintenant des  $K(\sigma)$  ( $= E_\xi L_\sigma$ ). Que peut-on dire de leur réunion

$$\kappa(S) = \bigcup_{\sigma \in S} K(\sigma) \quad ?$$

La notation explique déjà la démarche de R. Kaufman. Il pose

$$\kappa(B) = \bigcup_{\sigma \in B} K(\sigma)$$

pour toute partie  $B$  de  $S$ , et il va tenter d'approcher, dans un sens convenable,  $\kappa(S)$  par des  $\kappa(C)$ ,  $C$  désignant un compact dans  $S$ .

De façon précise, soit  $\mu$  une mesure positive sur  $\mathbb{R}$ ,  $\mu^*$  la mesure extérieure associée. On vérifie que l'application

$$B \rightarrow \varphi(B) = \mu^*(\kappa(B))$$

est une capacité sur  $S$  [il y a beaucoup de définitions ; la plus simple est celle que donne P. A. Meyer :  $\varphi$ , application croissante de  $\mathcal{P}(S)$  dans  $\mathbb{R}^+$ , est une capacité si elle est continue pour les suites croissantes,  $\varphi(\lim \uparrow B_n) = \lim \uparrow \varphi(B_n)$ , et continue pour les suites décroissantes de compacts,  $\varphi(\lim \downarrow C_n) = \lim \downarrow \varphi(C_n)$ ]. Par le théorème de Choquet,

$$\varphi(S) = \sup \varphi(C).$$

Or  $\varphi(S) = \mu(\kappa(S))$ , parce que  $\kappa(S)$  est analytique, donc universellement mesurable. Quant à  $\varphi(C)$ , c'est un certain  $\mu(K(\sigma_C))$ . Cela est à la fois crucial et très simple : l'application  $\sigma \rightarrow K(\sigma)$  est croissante et continue, de  $S$  dans l'espace des compacts sur  $\mathbb{R}$  muni de la topologie de Hausdorff. Un compact  $C$  dans  $S$  a un plus grand élément  $\sigma_C$  ; donc  $\{K(\sigma)\}_{\sigma \in C}$  admet  $K(\sigma_C)$  comme plus grand élément, donc  $\kappa(C) = K(\sigma_C)$  et  $\varphi(C) = \mu(K(\sigma_C))$ .

Ainsi, si une mesure  $\mu$  charge  $\kappa(S)$ , elle charge aussi un  $K(\sigma)$ . Comme  $K(\sigma)$  est de type  $L$ , quasi toute  $\varphi \in \mathcal{D}^1$  transforme  $\mu$  en une mesure qui n'appartient pas à  $R$ .

**Troisième idée.** C'est un perfectionnement de la première. A la fin de la partie 1, on a montré que  $E_\xi \in M_0^0(\mathcal{D}^1)$  en vérifiant que, pour toute  $\varphi \in \mathcal{D}^1$ , l'image de la mesure standard sur  $E_\xi$  par  $\varphi$  appartient à  $R$ . Cela tient au fait que

$$(**) \quad \hat{\lambda}_1(u\varphi'(y)) + u\delta\omega(\delta) = o(1).$$

Remplaçons maintenant  $E_\xi$  par  $E_\xi L$  et  $\mu$  (la mesure standard sur  $E_\xi$ ) par  $\mu_L$ . Si  $\varphi$ , donc  $\omega(\cdot)$ , est donné, on peut imposer à  $L$  une condition de dispersion qui garantisse qu'en choisissant

$$\hat{\lambda}_1(\cdot) = \prod_{m \geq m(\nu), m \notin L} \cos(\xi^m \cdot)$$

avec une suite  $m(\nu)$  convenable vérifiant (\*), on ait encore (\*\*).

En conséquence, pour toute  $\varphi \in \mathcal{D}^1$ , il existe un  $K(\sigma)$  ( $= E_\xi L_\sigma$ ) tel que l'image de la mesure standard sur  $K(\sigma)$  par  $\varphi$  appartient à  $R$ . Donc,  $\varphi \in \mathcal{D}^1$  étant donnée, il existe un  $K(\sigma)$  tel que  $\varphi(K(\sigma)) \in M_0$ .

A ce stade, on voit que l'ensemble analytique  $\kappa(S)$  jouit des deux propriétés que nous voulons établir pour  $F$  : son image par toute  $\varphi \in \mathcal{D}^1$  porte une mesure de Rajchman non nulle ; mais, toute mesure qui la charge est transformée, par quasi toute  $\varphi \in \mathcal{D}^1$ , en une mesure  $\notin R$ .

**Quatrième idée.** Il serait donc naturel de considérer  $F_0 = \overline{\kappa(S)}$ , et de distinguer, pour toute mesure  $\mu$  portée par  $F_0$ , la partie qui charge  $\kappa(S)$  et celle qui charge  $F_0 \setminus \kappa(S)$ . Le malheur est que  $F_0 = E_\xi$ . En effet, pour des  $\sigma$  tels que  $\sigma(1) \rightarrow \infty$ ,  $K(\sigma)$  tend vers

$E_\xi$ . L'idée est donc de remplacer  $K(\sigma)$  par  $K'(\sigma) = K(\sigma) \cap M(\sigma)$ , de telle façon que l'ensemble  $F = \overline{\bigcup_{\sigma \in S} (K(\sigma) \cap M(\sigma))}$  soit contenu dans la réunion de  $\kappa(S)$  et d'une réunion dénombrable d'ensembles de type  $L$ .

Le choix le plus simple de  $M(\sigma)$  doit faire apparaître un ensemble de type  $L$  quand  $\sigma(k) \rightarrow \infty$  ; c'est donc, assez naturellement,

$$M(\sigma) = \bigcap_{k=1}^{\infty} M_k(\sigma)$$

$M_k(\sigma)$  étant une partie de  $E_\xi$  ayant au moins une grande lacune quand  $\sigma(k)$  est grand, et toutes les lacunes introduites étant disjointes.

Un tel choix simple permettra bien de montrer  $F \notin M_0^0(\mathcal{D}^1)$ , mais l'introduction de  $M(\sigma)$  ruine l'argument selon lequel, pour toute  $\varphi \in \mathcal{D}^1$ ,  $F$  porte une mesure dont l'image par  $\varphi$  est dans  $R$ . L'introduction des  $M_k^\ell(\sigma)$  a pour but de moyennner par rapport à  $\ell$  au moment de l'estimation des transformées de Fourier des mesures, et, ainsi, de réduire la perte à quelque chose qui tend vers 0 quand  $u \rightarrow \infty$ .

### Références

- [1] R. KAUFMAN A functional method for linear sets. *Israël J. Math.* 5 (1967), 185-187.
- [2] R. KAUFMAN Bernoulli convolutions and differentiable functions. *Trans. Amer. Math. Soc.* 217 (1976), 99-104.
- [3] R. KAUFMAN Bernoulli convolutions - an application of set theory in analysis. *Coll. Mathem.*, volume en l'honneur de A. Zygmund, 1990 ou 1991.
- [4] R. LYONS Fourier-Stieltjes coefficients and asymptotic distribution modulo 1. *Ann. Math.* 122 (1985), 155-170.

CNRS UA D0757  
 Université de Paris-Sud  
 Mathématique (Bât. 425)  
 91405 ORSAY CEDEX (France)

## DEUX CONSTRUCTIONS DE BASES D'ONDELETTES : ONDELETTES A TRACE ET ONDELETTES INTERPOLANTES

Pierre Gilles LEMARIE

Le but de cet exposé est de décrire deux constructions récentes (début 1989) de bases d'ondelettes et par ces exemples de donner une idée de la souplesse des algorithmes de construction utilisés. Nous commençons par rappeler brièvement les notions de base pour la construction des bases classiques d'ondelettes (analyse multi-résolution, filtres miroirs en quadrature,...) puis nous évoquerons les "ondelettes" sur un ouvert borné (et plus particulièrement les "ondelettes à trace" pour analyser les fonctions de  $H^1(\Omega)$ ) et les ondelettes interpolantes sur  $\mathbb{R}$ .

### 1. Les formalismes "classiques" de construction de bases d'ondelettes

Rappelons d'abord la définition d'une base d'ondelettes de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Il s'agit d'une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  formée par les translatées-dilatées dyadiques  $\psi_{\epsilon,j,k}$  ( $\epsilon \in E_n = \{1, 2, \dots, 2^n - 1\}$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $k \in \mathbb{Z}^n$ ) d'un nombre fini ( $2^n - 1$ ) de fonctions "mères"  $\psi_\epsilon$  :

$$(1) \quad \psi_{\epsilon,j,k}(x) = 2^{jn/2} \psi(2^j x - k) \quad (\epsilon \in E_n, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n).$$

On demande de plus aux fonctions  $\psi_\epsilon$  d'être régulières, localisées et oscillantes (les dérivées  $\frac{\partial^\alpha \psi_\epsilon}{\partial x^\alpha}$  existent pour  $|\alpha| \leq N_0$  et sont bornées et à décroissance rapide à l'infini ; les moments  $\int x^\alpha \psi_\epsilon dx$  sont nuls pour  $|\alpha| \leq N_1$ ). Les fonctions  $\psi_{\epsilon,j,k}$  ont alors de remarquables propriétés d'analyse fonctionnelle (elles forment par exemple une base inconditionnelle des espaces de Besov homogènes  $\dot{B}_q^{\alpha,p}$  pour  $|\alpha| < \inf(N_0, N_1 + 1)$ ).

L'ancêtre de ces bases peut être trouvé dans le système de Haar (1909). Les premières bases régulières ont été introduites par J. O. Strömberg (1981) [17]. Puis vinrent les bases de Lemarié-Meyer (1985) [13] et Battle-Lemarié (1986) [1], [8]. Toutes ces bases avaient une caractéristique commune : le cas multi-dimensionnel s'obtenait à partir du cas uni-dimensionnel (donc d'une base  $\psi_{j,k}$  de  $L^2(\mathbb{R})$ ) à l'aide d'une seconde fonction  $\varphi$  en posant :

$$(2) \quad \psi_\epsilon = \psi^{(\epsilon_1)}(x_1) \cdots \psi^{(\epsilon_n)}(x_n), \quad \psi^{(0)} = \varphi, \quad \psi^{(1)} = \psi, \quad \epsilon_i = 0 \text{ ou } 1, \quad \epsilon \neq (0, \dots, 0).$$

(Par exemple, pour le système de Haar,  $\varphi = \chi_{[0,1]}$  et  $\psi = \chi_{[0,1/2]} - \chi_{[1/2,1]}$ ). Pour obtenir une base de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , il fallait que la fonction  $\varphi$  vérifie les conditions suivantes : les  $\varphi(x-k)$  forment une famille orthonormée et  $\varphi$  est orthogonale à tous les  $\psi_{j,k}$  pour  $j \geq 0$  et  $k \in \mathbb{Z}$  (ce qui entraîne l'orthogonalité des  $\psi_{\epsilon,j,k}$ ,  $\epsilon \in E_n$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $k \in \mathbb{Z}^n$ ) et de plus toute fonction orthogonale aux  $\psi_{j,k}$  pour  $j \geq 0$  et  $k \in \mathbb{Z}^n$  se décompose sur la famille  $\varphi(x-k)$  (ce qui entraîne la complétude des  $\psi_{\epsilon,j,k}$ ).

Toujours en 1986, S. Mallat [14] remarqua qu'il était beaucoup plus simple de décrire (et de construire) la fonction  $\varphi$  que la fonction  $\psi$ . En effet, puisque  $\varphi(\frac{x}{2})$  est orthogonale aux  $\psi_{j,k}$  pour  $j \geq 1$  par simple changement de variable, la fonction  $\varphi$  vérifie les deux conditions suivantes :

(3.1) la famille  $\varphi(x-k)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) est orthonormale

(3.2) la fonction  $\varphi$  vérifie l'équation d'auto-similarité suivante :

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \varphi(x-k) \text{ pour une suite } a_k \in \ell^2(\mathbb{Z}).$$

Si de plus on suppose  $\hat{\varphi}$  continue en 0 (par exemple  $\varphi \in L^1$ ) alors il existe une fonction  $\psi$  associée à  $\varphi$  telle que la famille  $\psi_{j,k}$  soit une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$ . La fonction  $\psi$  est donnée par :

$$(4) \quad \psi(x) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \bar{a}_{1-k} \varphi(x-k)$$

et l'on voit que  $\psi$  hérite de la régularité et de la localisation de  $\varphi$  : si  $\varphi$  est de classe  $C^k$  et que ses  $k$  dérivées sont à décroissance rapide il en va de même pour  $\psi$  et de plus les moments de  $\psi$  d'ordre  $\leq k$  seront nuls.

Il existe deux autres façons d'introduire la fonction  $\varphi$ , l'axiomatique des analyses multi-résolution (qui met l'accent sur l'espace  $V_0$  engendré par les  $\varphi(x-k)$  dans  $L^2$  et ses dilates dyadiques ; l'analyse par ondelettes se présente alors comme un outil d'approximation des fonctions) et celle des filtres miroirs en quadrature (qui met l'accent sur les coefficients  $(a_k)$  de l'équation (3.2) ; ces coefficients  $(a_k)$  et les coefficients  $(-1)^k \bar{a}_{1-k}$  de l'équation (4) sont les réponses impulsionnelles de deux filtres miroirs en quadrature et l'analyse par ondelettes se présente alors comme un algorithme de traitement numérique du signal). Ces deux présentations sont longuement décrites et analysées dans le livre d'Y. Meyer [15].

Une analyse multi-résolution de  $L^2(\mathbb{R})$  est la donnée d'une suite de sous-espaces fermés  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  qui vérifie les propriétés suivantes :

- (i) la suite  $(V_j)$  est une suite d'approximations successives de  $L^2(\mathbb{R})$  :  $V_j \subset V_{j+1}$ ,  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$  et  $\bigcup_j V_j$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R})$  de sorte que si  $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$  on a  $L^2 = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j$  (les sommes étant orthogonales) ;

(ii)  $V_{j+1}$  se déduit de  $V_j$  par une dilatation de facteur 2 :

$$f \in V_{j+1} \text{ ssi } f\left(\frac{x}{2}\right) \in V_j.$$

(iii)  $V_0$  a une base de Riesz de la forme  $(g(x-k))_{k \in \mathbb{Z}}$ , c'est-à-dire que l'application  $(\lambda_k) \rightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda_k g(x-k)$  est un isomorphisme de  $\ell^2(\mathbb{Z})$  sur  $V_0$ . De plus on supposera  $g$  régulière et localisée.

Dans ce cas  $V_0$  a une base orthonormée de la forme  $\varphi(x-k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , avec  $\varphi$  régulière et localisée et  $W_0$  a une base orthonormée  $\psi(x-k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , avec  $\psi$  régulière, localisée et oscillante.

Les relations (3.2) et (4) se lisent alors de la manière suivante : si on note pour  $f \in L^2$ ,  $S_j(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{j,k} \varphi_{j,k}$  son projeté sur  $V_j$  et  $D_j(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_{j,k} \psi_{j,k}$  celui sur  $W_j$  alors on a :

$$\alpha_{j-1,k} = \sqrt{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \overline{a_{p-2k}} \alpha_{j,p}$$

$$\beta_{j-1,k} = \sqrt{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} (-1)^p a_{1+2k-p} \alpha_{j,p}$$

tandis que  $\sum_k |\alpha_{j-1,k}|^2 + \sum_k |\beta_{j-1,k}|^2 = \sum_p |\alpha_{j,p}|^2$  : les suites  $\alpha_{j-1,k}$  et  $\beta_{j-1,k}$  s'obtiennent de  $\alpha_{j,k}$  par filtrage et décimation ( $(\alpha_{j,k}) \rightarrow \gamma_{j,k} = (\sqrt{2} \overline{a_{-k}}) * (\alpha_{j,k}) \rightarrow \alpha_{j-1,k} = \gamma_{j,2k}$ ) et il y a conservation de l'énergie. C'est la définition des filtres miroirs en quadrature. La fonction  $m_0(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{-ik\xi}$  qui décrit ces filtres joue alors un rôle fondamental dans la théorie des ondelettes. Pour engendrer des filtres miroirs en quadrature,  $m_0$  doit vérifier :

$$(5) \quad |m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1.$$

Par ailleurs (3.2) donne par transformation de Fourier  $\hat{\varphi}(2\xi) = m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$  d'où :

$$(6) \quad \hat{\varphi}(\xi) = \hat{\varphi}(0) \prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$$

(en fait  $|\hat{\varphi}(0)| = 1$  et on peut donc supposer  $\hat{\varphi}(0) = 1$ ). Si  $\varphi$  est à décroissance rapide,  $m_0$  est  $C^\infty$  et si les moments de  $\psi$  sont nuls jusqu'à l'ordre  $k$  alors  $m_0$  a un zéro de multiplicité  $(k+1)$  en  $\pi$ . Tous les filtres en quadrature ne proviennent pas d'analyse multi-résolution et le problème de caractériser ceux qui en proviennent a été résolu par A. Cohen [3]. Enfin, c'est cette approche par les filtres miroirs en quadrature qui a permis à I. Daubechies en 1987 de construire des bases d'ondelettes régulières à support compact [4].

La notion d'analyse multi-résolution se généralise immédiatement à  $\mathbb{R}^n$  en demandant que  $V_0$  ait une base de Riesz de la forme  $(g(x-k))_{k \in \mathbb{Z}^n}$ .  $V_0$  a encore une base orthonormée

$(\varphi(x - k))_{k \in \mathbb{Z}^n}$  et  $W_0$  a une base  $(\psi_\epsilon(x - k))_{\epsilon \in E_n, k \in \mathbb{Z}^n}$ . Un cas simple d'analyse multi-résolution à  $n$  dimensions consiste à prendre pour  $V_0^{(n)}$  le complété dans  $L^2$  de  $V_0^{(1)} \otimes \dots \otimes V_0^{(1)}$  où  $V_0^{(1)}$  est associé à une analyse multi-résolution à une dimension. Les fonctions  $\psi_\epsilon$  qui engendrent  $W_0^{(n)}$  sont alors données par la formule (2) à partir des fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  liées à  $V_0^{(1)}$ . Néanmoins d'autres exemples d'analyse multi-résolution peuvent être construits, notamment celle que j'ai introduite en 1987 sous le nom de surfaces-splines. (Pour d'autres constructions, voir la thèse de S. Jaffard [6]).

Dans  $\mathbb{R}$ , la théorie des fonctions splines, introduites il y a plusieurs décennies dans le cadre de l'approximation des fonctions, fournit un exemple très simple d'analyse multi-résolution.  $V_0$  sera l'espace des splines de degré  $k$  à noeuds dans  $\mathbb{Z}$ , c'est-à-dire que  $f \in V_0$  si et seulement si  $f \in L^2 \cap C^{k-1}$  et si la restriction de  $f$  à tout intervalle  $[p, p+1]$  ( $p \in \mathbb{Z}$ ) est une fonction polynôme de degré  $\leq k$ . On peut de manière équivalente dire que  $f \in V_0$  si et seulement si  $f \in L^2$  et  $f^{(k+1)}$  est une somme de masses de Dirac placées sur  $\mathbb{Z}$ .

Dans  $\mathbb{R}^n$  on peut définir de même des splines en prenant des produits tensoriels. Mais on peut aussi définir une surface-spline à noeuds dans  $\mathbb{Z}^n$  comme une fonction  $f \in L^2$  telle que  $(-\Delta)^N f$  soit une somme de masses de Dirac placées sur  $\mathbb{Z}^n$ . Si  $N > \frac{n}{4}$ , l'espace  $V_0$  ainsi introduit est non nul et engendre une analyse multi-résolution. La formule d'auto-similarité (3.2) provient alors essentiellement du fait que  $(-\Delta)$  est un opérateur (différentiel) invariant par translation et homogène sous l'effet des dilatations tandis que  $\mathbb{Z}^n + \mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}^n$  et  $2\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{Z}^n$ . (Cette construction peut alors s'étendre au cadre des groupes de Lie stratifiés pour lesquels on dispose d'un opérateur différentiel hypoelliptique, le sous-laplacien, à la fois invariant par translation à gauche et homogène pour les dilatations et, si les constantes de structures sont rationnelles, d'un sous-groupe analogue à  $\mathbb{Z}^n$  [10]).

## 2. Ondelettes dans un ouvert borné

Parler d'ondelettes dans un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  ne peut être qu'un abus de langage puisque cet ouvert n'est stable ni par translation ni par dilatation. Cependant, pour les propriétés d'analyse fonctionnelle des bases  $\psi_{\epsilon, j, k}$ , nous n'avons pas besoin de la forme spécifique de ces bases mais seulement d'estimations uniformes par rapport aux indices. Une base hilbertienne de  $L^2(\Omega)$  sera une base "d'ondelettes" si elle est composée de fonctions régulières  $(\psi_{j, k})$  ( $j \geq j_0, k \in X_j$ ) localisées ( $\psi_{j, k}$  étant localisée autour du point  $k$  à une échelle  $\frac{1}{2^j}$ , c'est-à-dire que : pour  $|\alpha| \leq N_0$ ,

$$\left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \psi_{j, k}(x) \right| \leq C 2^{j \frac{n}{2}} 2^{j|\alpha|} \exp - D |2^j(x - k)|$$

pour deux constantes  $C$  et  $D$  indépendantes des indices  $j$  et  $k$ ) et "oscillantes" (ce qui veut dire que les fonctions basse-fréquence s'approximeront assez bien par les ondelettes grande-échelle  $\psi_{j, k}, j < j_1$ ). Un exemple-type de telles bases sera le système de Franklin sur l'intervalle d'après le théorème de Cieselski [2].

Reprenons par exemple le cas des surfaces-splines. On veut définir un espace  $V_j$  de fonctions "simples" à résolution  $\frac{1}{2^j}$  sur un ouvert lipschitzien borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ . Pour cela on pose  $Y_j$  l'ensemble des points dyadiques  $\frac{k}{2^j}$  tels que  $\frac{k}{2^j} \in \Omega$  et  $d(\frac{k}{2^j}, \partial\Omega) \geq \frac{1}{2^j}$ ; alors on dira que  $f \in V_j$  ssi  $f \in H_0^N(\Omega)$  et  $(-\Delta)^N f$  est, dans  $\Omega$ , une somme de masses de Dirac aux points de  $Y_j$ . Un cas particulier très simple est le cas de  $k \in Y_j$  et  $(-\Delta)^N f_k = \delta_k$ ; les  $f_k$ ,  $k \in Y_j$ , forment une base de  $V_j$  et donc les  $(f_k)_{k \in X_j}$  où  $X_j = Y_{j+1} \setminus Y_j$  forment un supplémentaire de  $V_j$  dans  $V_{j+1}$ . Les  $(f_k)$  forment un système complet dans  $L^2$ , pour  $k \in \bigcup_j Y_j$ , et on obtient une base hilbertienne de  $L^2$  en ordonnant les  $f_k$  et en appliquant l'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Bien sûr, on ordonne les  $f_k$  de manière à ce que si  $f_k \in V_j$  et  $f_{k'} \in V_{j+p}$  avec  $k' \notin Y_j$  alors  $f_k \leq f_{k'}$ . La base  $(\psi_k)_{k \in \cup Y_j}$  obtenue vérifie que les  $\psi_k$ ,  $k \in X_j$ , forment une base de  $W_j$ .

Il s'agit bien d'une base d'ondelettes : la régularité (appartenance à  $H_0^N$ ) et l'oscillation (traduite par l'orthogonalité de  $\psi_k$ ,  $k \in X_j$ , avec  $V_j$ ) sont immédiates. La localisation se voit à l'aide d'un changement de base : en effet la définition de  $f_k$ ,  $k \in X_j$ , ne fait pas intervenir les points de  $Y_j$  et donc pas d'échelle  $\frac{1}{2^j}$ . Mais l'espace engendré par  $f_k$  et ses prédécesseurs peut se réécrire comme l'espace des surfaces-splines d'interpolation à échelle  $\frac{1}{2^j}$ , engendré par les fonctions  $\Delta_{k,k'}$  ( $k' \leq k$ ) ci-dessous :

- $\Delta_{k,k'}$ ,  $k' < k$ , vérifie que  $(-\Delta)^N \Delta_{k,k'}$  est une somme de masses de Dirac aux points  $k'' < k$  et de plus  $\Delta_{k,k'}(k') = 1$ ,  $\Delta_{k,k'}(k'') = 0$  pour  $k'' < k$ ,  $k'' \neq k'$ .
- $\Delta_{k,k}$  vérifie les mêmes conditions ( $\Delta_{k,k}(k) = 1$ ,  $\Delta_{k,k}(k'') = 0$ ) avec  $k'' \leq k$ .

On peut alors montrer, suivant les techniques de [9] et [10], que les  $\Delta_{k,k'}$  sont localisées autour de  $k'$  à échelle  $\frac{1}{2^j}$  et que cette localisation persiste à travers l'orthonormalisation.

De plus cette base d'ondelettes  $(\psi_k)$  est une base inconditionnelle des espaces  $H_0^m(\Omega)$  pour  $m < N$ . En effet, de l'oscillation des  $\psi_k$ , on obtient que  $\psi_k$  se représente sous la forme  $\psi_k = \sum_{|\beta|=m} \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} (\psi_{k,\beta}) 2^{jm}$  où  $\psi_{k,\beta}$  (définie sur  $\mathbb{R}^n$ ) est encore localisée autour de  $k$  à échelle  $\frac{1}{2^j}$  ( $k \in X_j$ ) :  $|\psi_{k,\beta}(x)| \leq C 2^{j\frac{n}{2}} \exp(-D |2^j(x-k)|)$ , régulière et oscillante. On obtient alors que  $f \in H_0^m(\Omega)$  si et seulement si  $\sum_k 4^{jm} | \langle f | \psi_k \rangle |^2 < +\infty$ .

Y. Meyer et S. Jaffard ont proposé une construction analogue de bases d'ondelettes en considérant pour  $V_j$  l'espace des splines "traditionnels" sur  $\frac{1}{2^j} \mathbb{Z}^n$  à support dans  $\Omega$ . A nouveau, ils obtiennent une base de  $H_0^m(\Omega)$  [7].

Le problème était alors de regarder si on pouvait construire une base d'ondelettes sur  $\Omega$  qui soit aussi une base inconditionnelle de  $H^m(\Omega)$  (fonctions à traces sur le bord). En effet, l'oscillation d'une ondelette sert essentiellement à faire une intégration par parties (et donc à exploiter la régularité de la fonction analysée) ; or une intégration par parties dans  $H^m(\Omega)$  fait intervenir des termes de traces sur le bord. Une analyse par ondelettes de  $H^m(\Omega)$  semblait donc devoir faire jouer un rôle spécial à  $\partial\Omega$ .



Bizarrement, il n'en est peut-être rien. J'ai en effet construit une base d'ondelettes dans un polygone de  $\mathbb{R}^2$  qui est une base inconditionnelle de  $H^1$  [11]. L'idée est toujours de construire une analyse multi-résolution  $V_j$  et les espaces  $W_j$  correspondants ; le problème réside alors essentiellement dans l'estimation suivante : si  $f \in H^m(\Omega)$  alors

$$\sum_j 4^{jm} \|D_j f\|_2^2 < \infty$$

où  $D_j$  est le projecteur sur  $W_j$ . En fait, on construit deux analyses résolutions : on part d'une triangulation  $\mathcal{T}_0$  de  $\Omega$  et d'une triangulation  $\tilde{\mathcal{T}}_0$  de  $\tilde{\Omega}$  où  $\tilde{\Omega} \supset \bar{\Omega}$  et telle que  $\tilde{\mathcal{T}}_0$  induise  $\mathcal{T}_0$  sur  $\Omega$  ; on raffine alors les  $\mathcal{T}_j$  et  $\tilde{\mathcal{T}}_j$  en  $\mathcal{T}_{j+1}$  et  $\tilde{\mathcal{T}}_{j+1}$  en divisant chaque triangle de la triangulation en 4 triangles égaux ; enfin  $V_j$  est l'espace des fonctions continues sur  $\Omega$  et affines sur chaque triangle de  $\mathcal{T}_j$  et  $\tilde{V}_j$  est l'espace des fonctions continues sur  $\tilde{\Omega}$ , nulles sur  $\partial\tilde{\Omega}$  et affines sur chaque triangle de  $\tilde{\mathcal{T}}_j$ . La construction des ondelettes associées est de pure routine. Enfin, si  $f \in H^m(\Omega)$ , on étend  $f$  en  $\tilde{f} \in H_0^m(\tilde{\Omega})$  ; Si  $R$  désigne l'opérateur de restriction à  $\Omega$  des fonctions définies sur  $\tilde{\Omega}$  et  $\tilde{S}_j$  le projecteur sur  $\tilde{V}_j$ , alors  $D_j \circ R \circ \tilde{S}_j = 0$  et donc :

$$\|D_j f\|_2 = \|D_j \circ R \circ \sum_0^\infty \tilde{D}_{j+p} \tilde{f}\|_2 \leq \sum_0^\infty \|\tilde{D}_{j+p} \tilde{f}\|_2$$

ce qui suffit puisqu'on sait analyser les fonctions nulles sur le bord de  $\tilde{\Omega}$  :

$$\sum_j 4^{jm} \|D_j f\|_2^2 \leq \left( \frac{1}{1-2^{-m}} \right)^2 \sum_p \|\tilde{D}_p \tilde{f}\|_2^2 4^{pm} \leq C \|(-\Delta)^m \tilde{f}\|_2^2.$$

### 3. Ondelettes interpolantes

Revenons aux bases d'ondelettes définies sur  $\mathbb{R}$ . Un cas intéressant est lorsque l'analyse multi-résolution ( $V_j$ ) est engendrée par une "interpolante" :  $V_0$  a une base de Riesz  $(\Lambda(x-k))$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , où  $\Lambda(0) = 1$ ,  $\Lambda(k) = 0$ ,  $k \in \mathbb{Z}^*$ . Cela revient à dire que l'échantillonnage  $f \rightarrow (f(k))_{k \in \mathbb{Z}}$  est un isomorphisme de  $V_0$  sur  $\ell^2(\mathbb{Z})$ . C'est le cas par exemple des splines de degré impair (théorie des splines cardinaux lagrangiens de I. J. Schönberg [16]) mais pas de ceux de degré pair.

L'existence de cette interpolante peut se révéler pratique pour des calculs, puisque pour les petites échelles ( $j$  grand) on peut remplacer la projection sur  $V_j$  par l'échantillonnage aux points  $\frac{k}{2^j}$  :  $S_j f$  est à peu près égale à  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{2^j}\right) \Lambda(2^j x - k)$ . Par ailleurs, on dispose facilement d'un supplémentaire de  $V_0$  dans  $V_1$  en considérant l'espace engendré par les  $\Lambda(2x-k)$ ,  $k$  impair. En particulier, si  $X_0$  est l'espace engendré par  $V_0$  et les  $\Lambda(2x-k)$ ,  $k < 0$ , et si  $P_0$  est le projecteur sur  $X_0$ , alors  $\psi = \Lambda(2x-1) - P_0(\Lambda(2x-1))$  est une ondelette (à une normalisation près). Cette construction d'ondelettes s'étend facilement à

$\mathbb{R}^n$ , voire à d'autres cadres ; c'est cette construction que nous avons décrite dans la section précédente (ondelettes sur un ouvert).

Enfin l'étude d'interpolantes auto-similaires :

$$\Lambda(0) = 1, \Lambda(k) = 0 \ (k \in \mathbb{Z}^*), \Lambda\left(\frac{x}{2}\right) = \Lambda(x) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Lambda\left(k + \frac{1}{2}\right) \Lambda(x - 2k - 1)$$

a été menée par G. Deslauriers et S. Dubuc [5] pour la construction de courbes fractales ("schéma d'interpolation dyadique") et par I. Daubechies pour la construction d'ondelettes à support compact [4] : si  $\varphi$  est associée à une analyse multi-résolution alors  $\Lambda = \varphi * [\bar{\varphi}(-x)]$  est une interpolante auto-similaire mais tandis que le comportement de  $\varphi$  est décrit par des équations quadratiques, celui de  $\Lambda$  est décrit par des équations linéaires (plus faciles à résoudre....).

La question que G. Malgouyres et moi nous sommes alors posée était de savoir s'il existait de bonnes analyses multi-résolution pour lesquelles on avait  $\Lambda = \varphi$ . Ce qui revient à dire que l'échantillonnage  $f \rightarrow (f(k))_{k \in \mathbb{Z}}$  est une isométrie de  $V_0$  sur  $\ell^2(\mathbb{Z})$ . La réponse est positive, comme on va le voir ci-dessous [12].

La fonction  $m_0$  associée à  $\varphi$  doit vérifier :

$$\begin{aligned} |m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 &= 1 \text{ (orthogonalité des } \varphi(x - k)) \\ m_0(\xi) + m_0(\xi + \pi) &= 1 \text{ (} \varphi \text{ interpolante)} \\ m_0(0) &= 1 \\ m_0(-\xi) &= \overline{m_0(\xi)} \text{ (} \varphi \text{ à valeurs réelles).} \end{aligned}$$

$m_0$  peut alors se représenter sous la forme  $m_0(\xi) = \frac{\lambda(\xi + \pi)}{\lambda(\xi + \pi) + i\lambda(\xi)}$  où  $\lambda(\xi)$  est à valeurs réelles,  $\lambda(\xi)^2 + \lambda(\xi + \pi)^2 > 0$ ,  $\lambda(-\xi) = -\lambda(\xi)$  et  $\lambda(\xi + 2\pi) = -\lambda(\xi)$ .

Si  $\lambda$  est nulle sur  $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$  et  $C^\infty$ ,  $\hat{\varphi}$  est portée par  $[-\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$  et  $C^\infty$  et donc  $\varphi$  est dans la classe de Schwartz des fonctions  $C^\infty$  à décroissance rapide.

Si  $\lambda(\xi) = \left(\sin \frac{\xi}{2}\right)^{2N+1}$  alors  $\varphi$  est de classe  $C^{N-1}$  et à décroissance exponentielle ainsi que ses  $(N - 1)$  premières dérivées. De plus le filtre associé à la fonction  $m_0$  vérifie :

$$|m_0(e^{-i\xi})|^2 = \frac{1}{1 + \left| \frac{1 - e^{-i\xi}}{1 + e^{-i\xi}} \right|^{4N+2}} ;$$

c'est l'analogie discret d'un filtre de Butterworth (on retrouve un filtre de Butterworth  $|H(\omega)|^2 = (1 + \omega^{4N+2})^{-1}$  en utilisant la transformation de Cailey  $\omega = i \frac{1 - Z^{-1}}{1 + Z^{-1}}$ ).

Une propriété curieuse de ces ondelettes interpolantes est que l'échantillonnage  $f \rightarrow (f(k + 1/2))_{k \in \mathbb{Z}}$  est encore isométrique de  $V_0$  sur  $\ell^2$  puisque si  $f \in V_0$ ,  $f(\frac{x}{2}) \in V_{-1} \subset V_0$  et donc :

$$2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(k)|^2 = 2 \|f(x)\|_2^2 = \|f(\frac{x}{2})\|_2^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(\frac{k}{2})|^2.$$

En conclusion, nous espérons avoir montré par ces divers exemples que la construction de bases d'ondelettes suit un algorithme suffisamment souple pour pouvoir s'adapter à des demandes très différentes. Je terminerai par une remarque de G. Malgouyres sur la résolution de l'équation (5) :  $|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1$ .

Si l'on cherche une solution sous forme d'une fraction rationnelle en  $e^{i\xi}$  :  $m_0(\xi) = \frac{A(e^{-i\xi})}{B(e^{-i\xi})}$  (qui correspond, si  $B$  n'a pas de 0 dans le disque unité, à une programmation récursive du filtrage associé à  $m_0$ ), on a une solution très simple en posant :

$$|B(e^{-i\xi})|^2 = |A(e^{-i\xi})|^2 + |A(-e^{-i\xi})|^2$$

(le théorème de Riesz nous permet de passer à la "racine carrée") de sorte que  $A$  étant à peu près arbitraire, on peut jouer sur le choix de ses coefficients pour imposer des conditions a priori et on dispose donc d'autant de degrés de liberté que de coefficients de  $A$ .

### Références

- [1] G. BATTLE *A block spin construction of ondelettes. Part I : Lemarié functions.* Comm. Math. Phys. (1987), 601-615.
- [2] Z. CIESELSKI *Properties of the orthonormal Franklin system.* Studia Math. 23 (1963), 289-323.
- [3] A. COHEN *Thèse.* Ceremade, Paris Dauphine, 1990.
- [4] I. DAUBECHIES *Orthonormal bases of compactly supported wavelets.* Comm. Pure Appl. Math. 46 (1988), 909-996.
- [5] G. DESLAURIERS & S. DUBUC *Interpolation dyadique ; Fractals. Dimensions non entières et applications.* Paris, Masson, 1987, 44-45.
- [6] S. JAFFARD *Thèse.* Ecole Polytechnique, Centre de Math. Appl., 1989.
- [7] S. JAFFARD & Y. MEYER *Bases d'ondelettes sur un ouvert borné.* J. Math. Pures Appl. 68 (1988), 95-108.

- [8] P. G. LEMARIE *Ondelettes à localisation exponentielles*. J. Math. Pures Appl. 67 (1988), 227-236.
- [9] P. G. LEMARIE *Théorie  $L^2$  des surfaces splines*. Preprint, 1987.
- [10] P. G. LEMARIE *Bases d'ondelettes sur les groupes de Lie stratifiés*. Bull. SMF 117 (1989), 211-232.
- [11] P. G. LEMARIE *Deux bases d'ondelettes pour un polygone de  $\mathbb{R}^2$* . Preprint, 1989.
- [12] P. G. LEMARIE & G. MALGOUYRES *Ondelettes sans peine*. Preprint, 1989.
- [13] P. G. LEMARIE & Y. MEYER *Ondelettes et bases hilbertiennes*. Rev. Mat. Iberoamericana 2 (1986), 1-18.
- [14] S. MALLAT *A theory for multi-resolution signal decomposition : the wavelet representation*. IEEE Trans. PAMI 2 (7) (1989).
- [15] Y. MEYER *Ondelettes et opérateurs*. Paris, Hermann, 1990.
- [16] I. J. SCHOENBERG *Cardinal interpolation and spline functions*. J. Approx. Theory 2 (1969), 167-206.
- [17] J. O. STROMBERG *A modified Franklin system and higher order systems*. Conference on Harmonic analysis in honor of Antoni Zygmund, vol. 2, Waldsworth, 475-493.

UA CNRS D 0757  
 Université de Paris-Sud  
 Mathématiques - Bât. 425  
 91405 ORSAY CEDEX (France)

## REPORT ON SOME HIGHER MONOTONICITY PROPERTIES OF STURM-LIOUVILLE FUNCTIONS

Lee LORCH

### 1. Introduction

The ordinary differential equation

$$(1) \quad a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0,$$

connecting position, velocity and acceleration, or other related rates of change, reflects important natural phenomena and so plays a significant role in applications and in the internal dynamics of mathematics. Rewritten in the self-adjoint form

$$(2) \quad (gy')' + f(x)y = 0$$

or, requiring only a minor change in notation and solution, as

$$(3) \quad y'' + f(x)y = 0,$$

it takes, in either presentation, the form in which Sturm and Liouville initiated its modern study. (2) and (3) are known as Sturm-Liouville equations, their solutions as Sturm-Liouville functions.

These savants probed deeply their properties in classic papers which launched Liouville's *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* in 1836 [6].

They introduced a then new approach, now so standard that the contemporary reader may not realize its boldness and novelty : instead of seeking to dispose of the differential equations by finding solutions (when possible explicitly), they determined properties of the solutions by direct examination of the coefficients  $f(x)$  and  $g(x)$ . Important quantitative and qualitative information emerges.

Results for form (2) are found in Sturm's classic work [8]. For simplicity, form (3) will be considered here.

One of the simplest results is a corollary of the Sturm Comparison Theorem. It is convenient to present it in the notation of differences :  $\Delta^0 x_k = x_k, \Delta^{n+1} x_k = \Delta^n x_{k+1} - \Delta^n x_k, k, n = 0, 1, 2, \dots$

If  $f'(x) > 0$  [ $< 0$ ], then  $(-1)\Delta^2 x_k > 0$  [ $\Delta^2 x_k > 0$ ], where  $\{x_k\}$  is the increasing sequence of zeros of a solution  $y(x)$  of (3).

This formulation suggests new problems which appear to have been addressed for the first time in a 1963 publication [4], i.e., would information on the higher derivatives of  $f(x)$  imply regularity properties of the higher differences of  $\{x_k\}$  ?

## 2. Data collection

Tables already in existence for zeros of Bessel functions and the classical orthogonal polynomials made it easy to formulate conjectures.

For the Bessel functions  $J_\nu(x)$  and  $Y_\nu(x)$ , Watson's labours provided much material [11]. For these functions

$$f(x) = 1 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}, \quad f'(x) = \frac{2(\nu^2 - \frac{1}{4})}{x^3}$$

so that both cases of Sturm's cited result arise, one when  $\nu^2 > \frac{1}{4}$ , the other when  $\nu^2 < \frac{1}{4}$ .

They also provided a pedagogic opportunity. A major obstacle in teaching mathematics is to disabuse students of the belief that mathematics was inscribed whole on the back of the tablets handed down to Moses on Mt Sinai, to persuade them that it is a human endeavour, and a constantly growing one at that. What some human beings discover and create, others are willing to understand.

This is a particularly urgent need among students whose lives have been blighted by racism, and whose prior education in and out of the classroom, has reflected these despicable circumstances.

When Peter Szegő and I began our work on this topic in the mid 1950s, I was teaching at Philander Smith College in Little Rock, Arkansas, a city soon to become notorious throughout the world when the Governor of that state mobilized the National Guard to prevent African-American students from attending Little Rock Central High School. The College was a small, privately financed school for African-American students.

My most advanced students were happy to learn something that no one else had yet learned. So they constructed tables of the successive (higher) differences of the zeros  $j_{\nu k}$ ,  $y_{\nu k}$  of  $J_\nu(x)$  and  $Y_\nu(x)$ , respectively.

We were testing the conjecture that, for  $x_k$  a positive zero of  $J_\nu(x)$  or  $Y_\nu(x)$ , and all  $n$ ,

$$(4) \quad (-1)^n \Delta^{n+1} x_k > 0 \quad \text{when} \quad \nu^2 > \frac{1}{2}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

and

$$(5) \quad (-1)^n \Delta^{n+2} x_k > 0 \quad \text{when} \quad \nu^2 < \frac{1}{2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Among the very large number of data thus assembled, all but a very few indeed satisfied the foregoing conjectures. This surely would convince any engineer of the validity of the conjectures.

Looking carefully at the mere handful of exceptions, it turned out that all of them originated in three or four entries in Watson's tables. Altering these items slightly (one or two units in the third or fourth decimal place) would eliminate all the exceptions.

D. H. Lehmer was kind enough to recalculate those zeros and found that they did require changes to the suspect values.

With all exceptions now eliminated, to the delight of my students as to Peter Szegő and myself, surely any physicist would now believe the conjectures - and it encouraged us to attempt mathematical proofs.

### 3. Some theorems

Peter Szegő pointed out that we should try a generalization of  $\Delta x_k$ , by defining

$$M_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} W(x) |y(x)|^\lambda dx, \quad \lambda > -1,$$

where, initially, we used  $W(x) \equiv 1$ . For  $\lambda = 0$ ,  $M_k = \Delta x_k$ . The conjecture (4) asserts that  $\{\Delta x_k\}$  is "completely monotonic", i.e., that all odd differences of  $\{\Delta x_k\}$  are negative, all even ones, positive. A function  $\varphi(x)$  is called "completely monotonic",  $0 < x < \infty$ , if  $(-1)^n \varphi^{(n)}(x) \geq 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $0 < x < \infty$ .

Indeed the results hold when it is assumed and inferred that the order of monotonicity is finite. Without reporting the most general results already established, I quote the following from [5].

**THEOREM A.** *Suppose that, for  $x$  in an interval  $I$ , there exists a pair of linearly independent solutions of (3),  $y_1, y_2$ , such that, with  $p(x) = y_1^2(x) + y_2^2(x)$ ,*

$$(-1)^n p^{(n)}(x) > 0, \quad n = 0, 1, \dots, N,$$

*and that  $W(x) > 0$ ,  $(-1)^n W^{(n)}(x) \geq 0$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ .*

Then  $(-1)^n \Delta^n M_k > 0$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ ;  $k = 1, 2, \dots$

This remains valid if all the factors  $(-1)^n$  are deleted simultaneously.

This may sound pretty far from the corollary of the Sturm Comparison Theorem cited in the Introduction, but a deep theorem due to P. Hartman [3] yields as a corollary to part of Theorem A the following :

**THEOREM B.** *If  $f'(x)$  and  $W(x)$  are completely monotonic over the interval  $0 < x < \infty$  and  $0 < f(\infty) \leq +\infty$ , then the sequence  $\{M_k\}$  is completely monotonic.*

Other general results are found in the References (and in their references). Being of the same nature, I do not quote them here.

#### 4. Applications

Conjecture (4), in even more general form (with  $\{x_k\}$  the sequence of positive zeros of an arbitrary solution of the Bessel equation, not merely  $J_\nu$  or  $Y_\nu$ ), follows at once from Theorem B, since  $f'(x) = 2(\nu^2 - \frac{1}{4})/x^3$  is completely monotonic for  $\nu^2 > \frac{1}{4}$ . It follows also from Theorem A [4] on applying Nicholson's integral representation of  $x[J_\nu^2(x) + Y_\nu^2(x)]$ .

A whole host of other complete monotonicity properties of Bessel functions, generalized Airy functions and other special functions can be inferred from these theorems and related results. Again, the details can be found in [1,2,4,5,7,9,10] and the literature cited there. They include such properties of the areas bounded by successive arches, the differences of the zeros of derivatives of the solution functions, the sequence of the squares of their extrema, etc.

They do not include a proof of the complete conjecture (5), to which theorems quoted above are not directly applicable.

However, M. E. Muldoon [7] has established (5) for part of the  $\nu$  range : he has proved (5) for  $\frac{1}{3} \leq |\nu| < \frac{1}{2}$ . Z. Dosla (cf. [1] and her other papers) has shown that (5) holds asymptotically, i.e., from a certain index (depending on  $\nu$ ) on, she has demonstrated a weaker form of (5). Again, their results apply to arbitrary cylinder functions, not only to  $J_\nu$  and  $Y_\nu$ .

A result that follows from Theorem A (and to which Theorem B is inapplicable) is due to L. Durand [2]. He verified a conjecture in [4] to the effect that all differences of zeros of Hermite polynomials are non-negative. For this, Theorem A is required with the factors  $(-1)^n$  deleted throughout. The requisite property of  $p(x)$  follows from an integral representation discovered by Durand.



## 5. Open problems

I offer a small selection of the numerous questions yet to be settled.

1. Prove that  $\{\Delta^2 c_{\nu k}\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , is completely monotonic when else  $0 \leq \nu < \frac{1}{3}$ , (as when  $\frac{1}{3} \leq \nu \leq \frac{1}{2}$ ), or, more generally, that  $\{\Delta M_k\}$  is completely monotonic for  $0 \leq \nu < \frac{1}{3}$ , where

$$M_k = \int_{c_{\nu k}}^{c_{\nu, k+1}} W(x) |C_\nu(x)|^\lambda dx, \quad \lambda > -1$$

and  $W(x)$  is completely monotonic, where  $c_{\nu k}$  is the  $k$ -th positive zero of  $C_\nu(x)$ .

2. Prove that  $\Delta^n \rho_k \geq 0$ ,  $n, k = 1, 2, \dots$ , for  $\rho_k$  the zeros of  $L_n^{(\alpha)}(x)$ ,  $\alpha > -1$ ,  $P_n(\cos \theta)$ ,  $P_n^{(\lambda)}(\cos \theta)$ ,  $0 < \lambda < 1$ , and for appropriate  $\alpha, \beta$  in the case of  $P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta)$ . Here these expressions denote the usual classical orthogonal polynomials.

3. For what boundary conditions is it true that the eigenvalues  $\lambda_k$  for  $y'' + f(x)y = \lambda y$ , have the property that  $\{\Delta \sqrt{\lambda_k}\}$  form a completely monotonic sequence when  $f'(x)$  is completely monotonic?

4. Extend the results reported here to operators more general than these used here.

## 6. Postscript

The work published in Acta Math. [4] was supported by a National Science Foundation grant to Philander Smith College. The (Little Rock) Congressman Alford made a speech in Congress denouncing this grant because I had been attacked by the Congressional Committee on Un-American Activities. Details are in the Congressional Record, 1957.

## References

- [1] Z. DOSLA *Monotonicity properties of the linear combinations of derivatives of some special functions*. Diff. Equa. & Appl. I & II, Angel Kancher Tech. Univ. Ruse (1987), 583-586.
- [2] L. DURAND *Nicholson type integrals for products of Gegenbauer functions and related topics*. In "Theory & Appl. of Special Functions", ed. R. Askey (1975), 353-374.
- [3] P. HARTMAN *On differential equations and the function  $J_\mu^2 + Y_\mu^2$* . Amer. J. Math. 83 (1961), 154-188.
- [4] L. LORCH & P. SZEGÖ *Higher monotonicity properties of Sturm-Liouville functions*.

Acta Math. 109 (1963), 55-73.

- [5] L. LORCH, M. MULDEEN & P. SZEGÖ *Higher monotonicity properties of Sturm-Liouville functions, III & IV.* Canadian J. Math. 22 (1970), 1238-1265 ; 24 (1972), 349-368.
- [6] J. LUTZEN *J. Liouville, a biography.* Springer-Verlag, 1990.
- [7] M. E. MULDEEN *Higher monotonicity properties of Sturm-Liouville functions. V.* Proc. Royal Soc. Edinburgh, Sect. A, 77 (1977/1978), 23-37.
- [8] Ch. STURM *Sur les équations différentielles du second ordre.* J. Math. Pures & Appl. 1 (1836), 106-186.
- [9] J. VOSMANSKY *Certain higher monotonicity properties of Bessel functions.* Arch. Math. (Brno) 13 (1977), 55-67.
- [10] J. VOSMANSKY & A. LAFORGIA *Higher monotonicity of generalized ?? functions.* Rend. Mat. (7), 4 (1984/5), 241-256.
- [11] G. N. WATSON *A treatise on the theory of Bessel functions.* 2nd ed., Cambridge University Press, 1944.

York University  
Department of Mathematics  
4700 Keele Street  
North York•Ontario•Canada•M3J 1P3

**THE CIRCULAR STRUCTURE OF THE SET OF LIMIT POINTS  
OF PARTIAL SUMS OF TAYLOR SERIES**

**V. NESTORIDIS & S. K. PICHORIDES**

**1. The Marcinkiewicz-Zygmund theorem**

We consider a Taylor series  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$  with complex coefficients  $c_k$  and write as usually  $S_n(z)$ ,  $\sigma_n(z)$  for its partial sums and  $C - 1$  means, or  $S_n(x)$ ,  $\sigma_n(x)$  if  $z = e^{ix}$  ( $\sigma_n = \frac{1}{n+1}(S_0 + \dots + S_n)$ ). The principal object of investigation in this talk is the set  $L(x)$  of limit points of the sequence  $\sigma_n(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . The main result concerning  $L(x)$  is due to Marcinkiewicz and Zygmund ([4]). This result is, in our minds, less known than it deserves, and runs as follows :

**THEOREM.** *If  $E = \{x : \sigma_n(x) \text{ converges finitely}\}$ , then for almost all  $x \in E$  the set  $L(x)$  is of "circular structure" centered at  $\sigma(x) = \lim \sigma_n(x)$ , i.e. for every  $a \in L(x)$  the whole circumference  $\{z : |z - \sigma(x)| = |a - \sigma(x)|\}$  is contained in  $L(x)$ .*

Thus for almost all  $x$  for which the series is  $C - 1$  summable the set  $L(x)$  may be one circumference, one disc, one ring (all centered at  $\sigma(x)$ ) or a union of such sets. The proof is neither easy nor particularly difficult and its main ingredient is the use of one of the so called Rogosinski's theorems

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ implies } S_n(x + a_n) - [S_n(x) - \sigma(x)]e^{ina_n} \rightarrow \sigma(x), \quad n \rightarrow \infty.$$

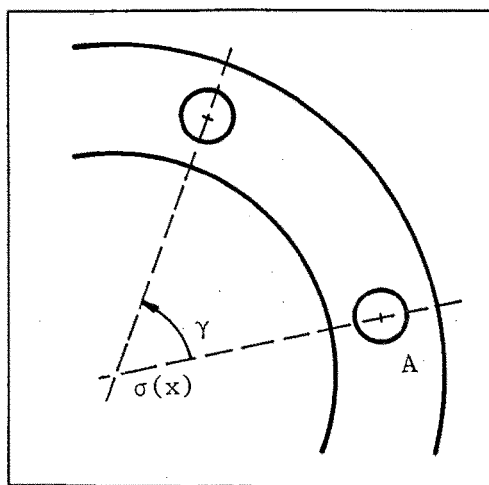


Fig. 1

Loosely speaking we prove that for almost all  $x$  in  $E$ , if the sequence  $\{S_n(x)\}$  avoids finally a disc  $A$  (see fig. 1), then for any angle  $\gamma$  it will avoid finally the disc which results from  $A$  by a  $\gamma$ -rotation around  $\sigma(x)$ . Next we consider discs  $A$  with rational radii, rational distances from  $\sigma(x)$ ,  $\dots$  in such a way that outside denumerably many exceptional sets of measure zero the above described situation arises (see [6] Ch. XIII, § 6 for the details).

## 2. The equidistribution problem

Here is a problem posed to one of us in 1969 by A. Zygmund. Sometimes it is called Rogosinski's problem. We do not know more on the origin of it.

*Are the partial sums appearing in the M-Z theorem angularly equidistributed almost everywhere in  $E$  ?*

As it stands the question is not rigorously stated and, in particular when  $\sigma(x) \in L(x)$ , one has to proceed first to a careful formulation. A conceptually simpler question could be:

*Is it true that for almost all  $x \in E$*

$$\frac{1}{N} \text{Card}\{n \leq N : \text{Re}[S_n(x) - \sigma(x)] > 0\} \rightarrow 1/2, \quad N \rightarrow \infty ?$$

This is conceivably a very difficult question and very little progress has been made up to now towards its answer. It appears that up to 1983 there is only one attempt in this direction, when J.-P. Kahane proved a partial result hinting towards an affirmative answer. Roughly speaking Kahane introduces for each complex sequence  $\{z_n\}$  and each compact subset  $K$  of the extended complex plane "suitable upper densities"  $\bar{d}(\{z_n\}, K)$  and proves that, under the conditions of the M-Z theorem, for almost all  $x \in E$ ,  $\bar{d}(\{S_n(x)\}, K_1) = \bar{d}(\{S_n(x)\}, K_2)$  for any compact sets  $K_1, K_2$  which are obtained the one from the other by a rotation around  $\sigma(x)$  (see [1]). The proof follows the general lines of the M-Z proof and it seems very difficult to see how, if at all possible, this argument can be pushed even further.

## 3. The examples

Before presenting some more recent developments we note that there are very few concrete examples, where we can have a clear picture of the set  $L(x)$ . Essentially all of them are combinations of geometric progressions. Here are some of them.

The simplest example is the geometric series  $1+z+z^2+\dots+z^n+\dots$ . Here  $\sigma(x) = \frac{1}{1-e^{ix}}$ ,  $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$  and  $S_n(x) = \sigma(x) - e^{i(n+1)x}\sigma(x)$ . Thus  $L(x)$  consists, if  $x \not\equiv 0$ , of one circumference of radius  $\frac{1}{|1-e^{ix}|}$  centered at  $\frac{1}{1-e^{ix}}$ .

Our next example is the series  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ , with  $a_k = a + b$ , if  $k$  odd, and  $a_k = a$ , if  $k$  even. A trivial computation shows that if  $\bar{a}b \notin \mathbb{R}$ ,  $L(x)$  consists of two circumferences (which degenerate to one if  $\bar{a}b \in \mathbb{R}$ ).

Another type of examples is given by the series  $(1+z+z^2+\dots)+a\{1+e^{i\lambda}z+(e^{i\lambda}z)^2+\dots\}$ ,  $0 < a < 1$ ,  $\lambda$  real incommensurable to  $\pi$ . If in addition  $x, \lambda$  are linearly independent over the rationals, it is easy to see that  $L(x)$  is in general a non degenerate ring.

More or less obvious combinations of the above examples lead to sets  $L(x)$  containing more than one circumferences and rings. Note that in all these cases the answer to the equidistribution problem is in the affirmative.

#### 4. E. Katsoprinakis result

We start with one more remark on the above examples : *not only the limit points but the partial sums themselves lie on  $L(x)$* . Two years ago E. Katsoprinakis, answering in his Ph. D. thesis a question posed by one of us, succeeded in proving that these examples essentially exhaust the set of Taylor series whose partial sums (not merely their limit points) lie on a finite union of circumferences. More precisely his result is the following (see [2]).

**THEOREM.** *If  $E$  is non denumerable and  $x \in E$ , then the following are equivalent : (i)  $S_n(x)$  lie on a finite number of circumferences (depending on  $x$  and, a priori, not necessarily concentric) ; (ii) There is a real  $\theta$  such that the sequence  $\{c_k e^{ik\theta}\}$  is, except for a finite number of terms, periodic.*

This result means that the geometric assumption that  $S_n$ 's lie on a finite number of circumferences is a very strong one. It implies in particular  $C - 1$  summability, angular equidistribution a. e. and moreover shows that the series represents a rational function of a special form. More precisely it is the Taylor development of a rational function  $\frac{P(z)}{Q(z)}$ ,  $P, Q$  polynomials, centered at  $a = 0$ , with  $Q(z) = 1 - (e^{i\theta}z)^m$  for some positive integer  $m$  and real  $\theta$ . This remark poses a new problem : *characterize all rational functions by geometric properties of the set of their partial sums*. The interesting case in this question is when the poles of the rational function lie on the unit circumference.

Several other questions were raised after the above theorem was proved. Some of them have already been answered by E. Katsoprinakis and one of us ([3], [5]). We review these more recent developments in the next paragraph.

We close this section by proving a very special case of Katsoprinakis theorem. Namely we prove the theorem under the additional assumptions : all coefficients  $c_n$  are  $\neq 0$  and for every  $x \in E$  the  $S_n$ 's lie on one circumference. Although the proof in the general case

is by no means a routine extension of this special one, some of the main ingredients of the proof in the general case will be present in it. Omitting from  $E$  an at most denumerable set we may assume further that for all  $m \neq n$ ,  $S_m(x) \neq S_n(x)$ .

If  $m_1 < m < n < n_1$ , then the cross ratio  $\frac{S_m - S_{m_1}}{S_m - S_n} : \frac{S_{n_1} - S_{m_1}}{S_{n_1} - S_n}$  is real. This statement, which is equivalent to the fact that the  $S_n$ 's lie on one circumference, lead to a polynomial equation valid for uncountably many  $x$ 's. It follows that the corresponding coefficients are zero, which in turn leads to relations of the form  $\sum_{j=0}^{s-1} \bar{c}_{n-j} c_{n+s-j} = \sum_{j=0}^{s-1} \bar{c}_{m-j} c_{m+s-j}$ , valid for  $s = 1, 2, \dots, N$  (for suitable  $N \geq 1$ ). On taking  $s = 1$  we obtain  $\bar{c}_0 c_1 = \bar{c}_1 c_2$ ,  $\bar{c}_1 c_2 = \bar{c}_2 c_3$ ,  $\bar{c}_2 c_3 = \bar{c}_3 c_4, \dots$  and hence  $|c_0| = |c_2| = \dots = \alpha$  and  $|c_1| = |c_3| = \dots = \beta$ . We write now  $c_{2n} = \alpha \omega_{2n}$ ,  $c_{2n+1} = \beta \omega_{2n+1}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  and take, obviously without loss of generality,  $\omega_0 = 1$ . It is very easy (simple algebraic manipulations) to see that the above mentioned relations imply  $\omega_2 = \omega_1^2$ ,  $\omega_3 = \omega_1^3$ ,  $\omega_4 = \omega_1^4, \dots$ , i.e. our series has the desired form  $\alpha(1 + (z\omega_1)^2 + (z\omega_1)^4 + \dots) + \beta((z\omega_1) + (z\omega_1)^3 + \dots)$ .

## 5. Some further developments

Now we give a sketch of the proof of a result which answers in the affirmative a question of J.-P. Kahane. For the details see [3]. Notice that the proof follows different lines than that of Katsoprinakis. In [2] the geometric hypotheses are translated to relations on the coefficients, while in [3] on the roots of certain polynomials.

**THEOREM ([3]).** *Let  $\sum_0^\infty a_n z^n$  be a power series with complex coefficients. Let  $E$  be an infinite subset of the unit circle  $T$  and  $S$  an infinite subset of  $\{0, 1, 2, \dots\}$ . We suppose that, for every  $z$  in  $E$ , there is a circle  $C(z)$ , such that,  $S_\nu(z) = \sum_0^\nu a_n z^n \in C(z)$  for all  $\nu$  in  $S$ . Then there is a real number  $\theta$  and a natural number  $n_0$ , such that, the sequence  $e^{i n \theta} \cdot a_n$ ,  $n \geq n_0$  is periodic.*

### Sketch of the proof

If all but a finite number of  $a_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  vanish, then we obviously have the result; this allows us to consider that  $a_\nu \neq 0$  for every  $\nu \in S$ . This assures that the partial sums  $S_\nu$ ,  $\nu \in S$  are two by two distinct polynomials. Let  $S = \{\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \dots\}$  be ordered in the usual way; we consider the partial sums  $S_{\nu_1}$ ,  $S_{\nu_2}$ ,  $S_{\nu_3}$ . For all  $z$ , but a finite number, the complex numbers  $S_{\nu_1}(z)$ ,  $S_{\nu_2}(z)$ ,  $S_{\nu_3}(z)$  determine uniquely a circle  $D(z)$  containing them. By our hypothesis  $D(z) \equiv C(z)$  for all  $z$  in  $E$  except a finite set. We find polynomials  $A$ ,  $Q$  and a natural number  $\lambda = \min\{n > \nu_1; a_n \neq 0\}$ , such that, the center of  $D(z)$  ( $z \in T$ ) is  $S_{\nu_1}(z) + z^\lambda \frac{A(z)}{Q(z)}$  and its radius  $\left| \frac{A(z)}{Q(z)} \right|$ . The rational function  $\frac{A}{Q}$  is regular at the origin, it is uniquely determined by  $S_{\nu_1}$ ,  $S_{\nu_2}$ ,  $S_{\nu_3}$  and we have  $\deg A < \deg Q$ ,  $A(0)Q(0) \neq 0$ . We may also assume that the polynomials  $A$  and  $Q$  do not have common factors.

We observe that the polynomials  $S_\nu$ ,  $\nu \in S$  are "continuations" of the family  $\mathcal{D}(z)$  in the following sense :

DEFINITION. Let  $A$ ,  $Q$ ,  $\lambda$  and  $\mathcal{D}(z)$ ,  $z \in T$  be as above. A polynomial  $R$  is called a continuation of  $\mathcal{D}(z)$ , if the following two conditions are satisfied :

- i)  $R$  is of the form  $R(z) = S_{\nu_1}(z) + z^\lambda P(z)$ , where  $P$  is a polynomial ;
- ii)  $R(z) \in \mathcal{D}(z)$  holds for infinitely many  $z$  in  $T$ .

For any continuation  $R = S_{\nu_1} + z^\lambda P$  we have  $\left| [S_{\nu_1}(z) + z^\lambda P(z)] - [S_{\nu_1}(z) + z^\lambda \frac{A(z)}{Q(z)}] \right| = \left| \frac{A(z)}{Q(z)} \right|$  for infinitely many  $z$  in  $T$ . This yields that the rational function  $\frac{PQ-A}{A}$  is unimodular on  $T$  and hence it is the quotient of two finite Blaschke products. More precisely, because the denominator is the known polynomial  $A$ , by the reflection principle we have  $\frac{PQ-A}{A} = \gamma z^k \frac{Z}{A}$ , where  $|\gamma| = 1$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  and  $Z$  varies in a finite set of polynomials satisfying  $\deg Z = \deg A$ ,  $Z(0) \neq 0$ . Since  $\deg Q > \deg P$ , we see that  $k > \deg P$ . This fact together with the relation  $P = \frac{A}{Q} + \gamma z^k \frac{Z}{Q}$  implies that  $P$  is a partial sum of the Taylor development of  $\frac{A}{Q}$  ; it turns out that the continuation  $R(z) = S_{\nu_1}(z) + z^\lambda P(z)$  is a partial sum of the Taylor series of the center function  $S_{\nu_1}(z) + z^\lambda \frac{A(z)}{Q(z)}$ . Thus we have :

PROPOSITION. Let  $A$ ,  $Q$ ,  $\lambda$  and  $\mathcal{D}(z)$  be as above. Then we have :

- i) Every continuation of  $\mathcal{D}(z)$  is a partial sum of the Taylor development of the center function  $S_{\nu_1} + z^\lambda \frac{A}{Q}$  ;
- ii) Any two different continuations have different degrees.

Since  $S_\nu$  is a continuation of  $\mathcal{D}(z)$ , for all  $\nu$  in the infinite set  $S$  and  $S_\nu$ ,  $\nu \in S$  are two by two distinct, the initial  $\sum_0^\infty a_n z^n$  coincides with the Taylor development of the center function  $S_{\nu_1} + z^\lambda \frac{A}{Q}$ .

We recall that every continuation  $R = S_{\nu_1} + z^\lambda P$  satisfies  $PQ = A + \gamma z^k Z$ , where  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $|\gamma| = 1$  and for the polynomial  $Z$  there are finitely many choices. Since there are infinitely many continuations, there are at least two distinct continuations  $R_1 = S_{\nu_1} + z^\lambda P_1$  and  $R_2 = S_{\nu_2} + z^\lambda P_2$  with the same polynomial  $Z$ . Thus we have  $P_1 Q = A + \gamma z^k Z$  and  $P_2 Q = A + \delta z^\mu Z$  with  $|\gamma| = |\delta| = 1$ ,  $k, \mu \in \mathbb{Z}$ . It follows that  $A(z)[1 - \frac{\delta}{\gamma} z^{\mu-k}] = [P_2(z) - \frac{\delta}{\gamma} z^{\mu-k} P_1(z)]Q(z)$ , where no factor vanishes. Since  $A$  and  $Q$  do not have common factors, we see that  $Q$  is a divisor of  $1 - \frac{\delta}{\gamma} z^{\mu-k} \equiv 1 - (e^{i\theta} z)^\rho$  ; the theorem follows by developing the center function  $S_{\nu_1}(z) + z^\lambda \frac{A(z)}{Q(z)} \equiv S_{\nu_1}(z) + z^\lambda \frac{\tilde{A}(z)}{1 - (e^{i\theta} z)^\rho}$ .

The previous results deal with the strong hypothesis that the partial sums themselves

belong to a circle or to a finite number of circles. In what follows we consider the case where all limit points of the partial sums belong to one circle. A natural question is whether such a series is the sum of a convergent one and another one of the previous type. The answer to this question is negative as the following example shows.

PROPOSITION ([5]). Let  $a_0 = 1$  and  $a_n = e^{i(1+1/2+\dots+\frac{1}{n})}$  for  $n \geq 1$ . Then we have :

- i) For almost all  $z$  in  $T$  the circle  $C(z)$  with center  $\frac{1}{1-z} \sum_0^\infty (a_n - a_{n-1})z^n$  ( $a_{-1} = 0$ ) and radius  $|\frac{1}{1-z}|$  contains all limit-points of the sequence  $S_\nu(z) = \sum_0^\nu a_n z^n$ .
- ii) There is no decomposition  $a_n = b_n + c_n$  with  $c_n \rightarrow 0$  and  $b_n$ , such that, for some  $\theta \in \mathbb{R}$  and  $n_0$  the sequence  $e^{in\theta} b_n$ ,  $n \geq n_0$  is periodic.

The additional assumption  $\liminf |a_n| > 0$  leads in this case to the following positive result.

THEOREM ([5]). Let  $\sum_0^\infty a_n z^n$  be a power series, such that  $\liminf |a_n| > 0$  and let  $E$  be an infinite subset of the unit circle. Then a) and b) are equivalent.

- a) There is a finite set  $\Omega \subset E$ , such that, for every  $z$  in  $E - \Omega$  one circle  $C(z)$  contains all limit-points of the sequence  $S_N(z) \equiv \sum_0^N a_n z^n$ ,  $N = 0, 1, 2, \dots$
- b) The sequences  $|a_{2n}|$ ,  $|a_{2n+1}|$  and  $\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}$  converge to finite limits and there is a finite set  $G \subset E$ , such that the series  $\sum_0^\infty (a_n - a_{n-2} e^{i2\theta}) z^n$  converge for every  $z$  in  $E - G$ , where  $\theta = \text{Arg} \lim \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}$  and  $a_{-2} = a_{-1} = 0$ .

Under the above conditions the series  $\sum_0^\infty a_n z^n$  is  $C - 1$  summable in  $E$  except on a finite set and the angular distribution of the partial sums  $S_N$  around the  $C - 1$  sum is uniform for almost all  $z$  in  $E$ .

The method of proof of the last theorem is to approximate the circle  $C(z)$  by the circles determined by three consecutive partial sums of the series  $\sum_0^\infty a_n z^n$ . For the centers and radii of these circles one can write down explicit formulas. The approximation is possible, because the condition  $\liminf |a_n| > 0$  assures that the partial sums  $S_{\nu-1}$ ,  $S_\nu$ ,  $S_{\nu+1}$  stay far away from each other.

## References

- [1] KAHANE, J.-P. *Sur la structure circulaire des ensembles de points limites des sommes partielles d'une série de Taylor*. Acta Scient. Math. Szeged 45 (1983), 247-251.



- [2] KATSOPRINAKIS, E. *On a theorem of Marcinkiewicz and Zygmund for Taylor series.* Arkiv for Mat. 27 (1989), 105-126.
- [3] KATSOPRINAKIS, E. & NESTORIDIS, V. *Partial sums of Taylor series on a circle.* Ann. Inst. Fourier 39 (1989), 715-736.
- [4] MARCINKIEWICZ J. & ZYGMUND, A. *On the behaviour of trigonometric and power series.* Trans. Amer. Math. Soc. 50 (1941), 407-453.
- [5] NESTORIDIS, V. *Limit points of partial sums of Taylor series.* (to appear).
- [6] ZYGMUND, A. *Trigonometric series, vol. I & II.* Cambridge Univ. Press (1968).

**Added to the proof.** During the writing of this article E. Katsoprinakis announced (in an Analysis conference in Thessaloniki) an extension of the main result in [5]. He considered the case when the limit points of  $\{S_n\}$  lie on a finite number (uniformly bounded in  $x$ ) of concentric circumferences and claimed that the coefficients of such series necessarily satisfy conditions analogous to those in (b) of the theorem on page 11.

V. Nestoridis & S. K. Pichorides

*(permanent address)*  
University of Crete  
Department of Mathematics  
Iraklion - Crete - Greece

**BEST UNIFORM APPROXIMATION  
BY BOUNDED ANALYTIC FUNCTIONS**

**M. PAPADIMITRAKIS**

Let  $T = \{z = e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ ,  $L^\infty(T)$  the space of bounded measurable functions on  $T$ ,  $H^\infty(T)$  the subalgebra of  $L^\infty(T)$  consisting of non-tangential limits of bounded analytic functions in the unit disc and let  $\|f\|_\infty$  be the essential-supremum norm of  $f \in L^\infty(T)$ . Let  $C(T)$  be the space of continuous functions on  $T$ .

It is well-known that every  $f \in L^\infty(T)$  has at least one best approximation  $g \in H^\infty(T)$ , in the sense that :

$$d = \|f - g\|_\infty = \inf \|f - h\|_\infty, \quad h \in H^\infty(T)$$

and that, by duality :

$$(*) \quad d = \sup \left| \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) F(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} \right|, \quad f \in H^1(T), \quad F(0) = 0, \quad \|F\|_1 \leq 1.$$

Here  $H^1(T)$  is the Hardy space of all non-tangential limits of functions  $F$  analytic in the unit disc with :

$$\|F\|_1 = \sup_{0 < r < 1} \int_0^{2\pi} |F(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} < +\infty.$$

If, moreover,  $f \in C(T)$  then the best approximation  $g$  of  $f$  is unique and there is at least one  $F$  which attains the supremum in (\*). In this case we get :

$$f(e^{i\theta}) - g(e^{i\theta}) = \|f - g\|_\infty \cdot \frac{\overline{F(e^{i\theta})}}{|F(e^{i\theta})|}, \quad \text{for a. e. } \theta$$

which implies :

$$|f(e^{i\theta}) - g(e^{i\theta})| = d, \quad \text{for a. e. } \theta.$$

The problem is under what intrinsic conditions on  $f$  enough regularity of  $g$ , for example continuity of  $g$ , is implied.

It is known that :

**THEOREM (Carleson-Jacobs).** *If  $f$  is Dini-continuous, i.e. if  $\int_0 \frac{\omega(t)}{t} dt < +\infty$ , where  $\omega(t) = \sup |f(e^{i\theta}) - f(e^{i\varphi})|, |e^{i\theta} - e^{i\varphi}| \leq t$  is the modulus of continuity of  $f$ , then  $g$ , its best approximation, is continuous.*

On the other hand, the Dini-continuity of  $f$ , implies the continuity of  $\tilde{f}$ , the (harmonic) conjugate of  $f$ . It had been conjectured that the continuity of  $\tilde{f}$  and the continuity of  $g$  are equivalent. D. Sarason has given an example where  $g$  is continuous but  $\tilde{f}$  is not.

Here I will construct a function  $f \in C(T)$ , with  $\tilde{f} \in C(T)$  but with  $g \notin C(T)$ . More precisely, we'll construct  $f$ , such that :

- (a)  $\tilde{f}$  (the complex conjugate)  $\in A(T) = H^\infty(T) \cap C(T)$  ;
- (b)  $f(1) = 0$  ;
- (c)  $g \notin C(T)$ .

Then (a) implies that  $\tilde{f} = -i \cdot f \in C(T)$ .

- (d) We'll also normalize  $f$  so that  $\|f - g\|_\infty = 1$ .

Before actually constructing  $f$ , let me give some consequences of (a), (b), (d).

A certain lemma (Carleson-Jacobs) if applied says in particular that there exists  $\delta > 0$  with :

- (1)  $|g(z)| \geq 1/2, \forall z \in W = \{z = re^{i\theta} : |e^{i\theta} - 1| < \delta, 1 - \delta < r < 1\}$ .

Now, every  $g \in H^\infty(T)$  can be decomposed as :

$g(z) = A(z) \cdot I(z)$  where :

$$A(z) = \exp \int_0^{2\pi} \log |g(e^{i\theta})| \cdot \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \cdot \frac{d\theta}{2\pi}$$

$$I(z) = B(z) \cdot \exp - \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu(\theta)$$

with  $B(z)$  a Blaschke product and  $d\mu$  a positive singular measure on  $T$ .

Condition (1) implies that,  $B(z)$  has no zeros on  $W$  and  $d\mu(\theta)$  is supported outside  $T \cap \partial W$ . Hence  $I(z)$  can be analytically extended across  $\partial W \cap T$ . Condition (1) also implies

that a branch of  $\log g(z)$  is well defined in  $W$  and that

$$\log g(z) = \int_{|e^{i\theta}-1|<\delta} \log |g(e^{i\theta})| \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \cdot \frac{d\theta}{2\pi} + R(z), \quad z \in W$$

where  $R(z)$  is the integral over  $|e^{i\theta}-1| \geq \delta$  plus the  $\log I(z)$ .

From  $|f(e^{i\theta}) - g(e^{i\theta})| = 1$  for a. e.  $\theta$  we get

$$|g|^2 = 1 + 2\operatorname{Re}(\bar{f} \cdot g) - |f|^2, \quad \text{a. e.}$$

Calling  $x = 2\operatorname{Re}(\bar{f} \cdot g) - |f|^2$  and expanding

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

we eventually get :

$$\log |g| = \operatorname{Re}(\bar{f}g) - 1/2\operatorname{Re}(\bar{f}g)^2 - |f|^2 + O(|f|^3), \quad \text{a. e.}$$

Observe that :  $\bar{f} \cdot g \in H^\infty(T)$ ,  $(\bar{f} \cdot g)^2 \in H^\infty(T)$ . Hence :

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(\bar{f}g) \cdot \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \cdot \frac{d\theta}{2\pi} = \bar{f}(z) \cdot g(z)$$

with a similar equation for  $(\bar{f} \cdot g)^2$ . Therefore

(2)

$$\begin{aligned} \log g(z) - \bar{f}(z) \cdot g(z) + 1/2(\bar{f}(z) \cdot g(z))^2 &= - \int_{|e^{i\theta}-1|<\delta} |f(e^{i\theta})|^2 \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \frac{\partial \theta}{2\pi} + \\ &+ \int_{|e^{i\theta}-1|<\delta} O(|f|^3) \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \frac{d\theta}{2\pi} + R^*(z), \quad z \in W \end{aligned}$$

where  $R^*(z) = R(z) +$  integrals extending over  $|e^{i\theta}-1| \geq \delta$ . Thus  $R^*(z)$  remains bounded as  $z = r \rightarrow 1$ .

Now, let me actually construct  $f$ .

Let

$$\begin{aligned} u(e^{i\theta}) &= -\alpha_1 \cdot \log |\log(\sin \theta)|, \quad 0 \leq \theta < 1/2 \\ &= -\alpha_2 \cdot \log |\log |\sin \theta||, \quad 2\pi - 1/2 < \theta \leq 2\pi \end{aligned}$$

and defined in the remaining part of  $(0, 2\pi)$  so that it is smooth in  $(0, 2\pi)$ .  $\alpha_1, \alpha_2$  are positive constants. Let  $u(z)$  be the harmonic extension of  $u(e^{i\theta})$ , and  $\tilde{u}(z)$  its harmonic conjugate.

Let  $f(z) = \exp(u(z) - i\tilde{u}(z))$ .

Since  $u$  is smooth in  $(0, 2\pi)$ ,  $\tilde{u}$  is continuous on  $T \setminus \{1\}$ . Also :

$$|f(z)| = \exp u(z) \rightarrow 0 \quad \text{as } z \rightarrow 1.$$

Therefore

$$\bar{f} \in A(T), \quad f(1) = 0.$$

Now, assume :  $\frac{1}{3} < \alpha_1 \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < \alpha_2$ .

Then :

$$\int_{0 < \theta < 1/2} \frac{|f(e^{i\theta})|^3}{\theta} d\theta < +\infty, \quad \int_{2\pi - 1/2 < \theta < 2\pi} \frac{|f(e^{i\theta})|^3}{|\sin \theta|} d\theta < +\infty$$

but :

$$\int_{0 < \theta < 1/2} \frac{|f(e^{i\theta})|^2}{\theta} d\theta = +\infty, \quad \int_{2\pi - 1/2 < \theta < 2\pi} \frac{|f(e^{i\theta})|^2}{|\sin \theta|} d\theta < +\infty.$$

The last two imply :

$$|\widetilde{f}|^2(r) \rightarrow +\infty \quad \text{as } r \rightarrow 1.$$

Then (2) implies, for  $\cong = r$ , that :

$$\arg g(r) \rightarrow -\infty, \quad \text{as } r \rightarrow 1.$$

Hence  $g \notin C(T)$ .

For the background of this problem and for the theorems of Carleson and Jacobs one is referred to :

L. CARLESON & S. JACOBS *Best uniform approximation by analytic functions*. Ark. Mat. 10 (1972), 219-229.

J. GARNETT *Bounded analytic functions*. New York, Academic Press, 1981.

For the counterexample and for additional sufficient conditions for the continuity of  $g$ , we refer to :

M. PAPADIMITRAKIS *Best uniform approximation by bounded analytic functions*. Proc. Amer. Math. Soc. 103 (1988), 882-886.

Washington University  
Department of Mathematics  
Campus Box 1146  
St. Louis, Missouri 63130  
USA

ON A RECENT RESULT OF A. GIANNOPOULOS ON SECTIONS  
OF CONVEX SYMMETRIC BODIES IN  $\mathbb{R}^n$

S. K. PICHORIDES

1. The problem and the main results

H. Buseman and C. Petty in a 1956 article ([4]) asked the following interesting question.

*Is it true that for any two convex bodies  $A, B$  in  $\mathbb{R}^n$ , symmetric with respect to the origin, the inequality  $V_{n-1}(A \cap L) < V_{n-1}(B \cap L)$ , for all  $(n-1)$ -dimensional subspaces  $L$ , implies  $V_n(A) < V_n(B)$  ?*

Here and in what follows  $V_k$  denotes the  $k$ -dimensional volume in  $\mathbb{R}^k$ .

It is very easy to see that the answer is YES if  $n = 2$ , but the first result in this direction for  $n > 2$  had to wait for almost 20 years. In 1975 D. Larman and C. Rogers ([6]) obtained the, rather surprising, result that for  $n \geq 12$  the answer is NO. In 1988 K. Ball ([2]) extended this result for  $n \geq 10$  and a few months ago A. Giannopoulos for  $n \geq 7$  ([5]). J. Bourgain obtained the same result ( $n \geq 7$ ) by a different method ([3]). It appears that for  $n = 6, 5, 4$  and, the obviously very interesting case,  $n = 3$  the answer is not known.

In what follows we sketch the ideas behind these developments, with more emphasis on Giannopoulos work, and offer some related comments. We note that in all these cases the body  $B$  is a ball of  $\mathbb{R}^n$ .

2. The D. Larman & C. Rogers result

The argument of these authors is probabilistic in nature and runs roughly as follows.

We put  $2N$  points  $u_1, \dots, u_N, -u_1, \dots, -u_N$  on the surface of  $B_n$  and consider the  $2N$  spherical caps  $C(u_j), C(-u_j), j = 1, 2, \dots, N$ , of angular radius  $\epsilon$  centered at these points (reminder : if  $\alpha \in \mathbb{R}^n, |\alpha| = 1, C(\alpha) = \{x \in B_n : \alpha \cdot x \geq \cos \epsilon\}$ ). A suitable dilation of the set  $B_n$  minus the union of these caps gives a convex body  $A$  symmetric with respect to the origin such that  $V_n(A) = V_n(B_n)$ . The idea behind the proof is to show that, if  $n > 11$ , some choice of  $u_1, \dots, u_N$  guarantees that  $V_{n-1}(A \cap L) < V_{n-1}(B_{n-1})$ , for all  $(n-1)$ -dimensional subspaces. The necessary computations to make this idea work are

greatly simplified (it is probably more accurate to say “they become doable”) if these caps do not overlap. For this reason we consider the “fictitious” volumes

$$\bar{V}_n(A) = V_n(B_n) - \sum_{j=1}^N V_n \{C(u_j) \cup C(-u_j)\}$$

$$\bar{V}_{n-1}(A \cap L) = V_{n-1}(L \cap B_n) - \sum_{j=1}^N V_{n-1} \{L \cap [C(u_j) \cup C(-u_j)]\}.$$

Of course in the case of non overlapping caps the volumes  $\bar{V}_n, \bar{V}_{n-1}$  coincide with the real ones  $V_n, V_{n-1}$ . We also consider  $M$   $(n-1)$ -dimensional subspaces  $L_1, \dots, L_M$ , with roughly uniformly distributed, on the surface of  $B_n$ , unit normals, and numbers  $a > b$  “slightly” larger than the average of  $\bar{V}_{N-1}(A \cap L)$ . This average is taken under the assumption of uniform distribution, on the surface of  $B_n$ , of  $u_1, \dots, u_N$  and it is obviously independent of  $L$ .

The proof will be finished if we can choose the parameters  $\epsilon, N, M, a, b$  in such a way that

- (i) with probability  $> 1/2$  the caps are non overlapping ;
- (ii) with probability  $< 1/2, \bar{V}_{N-1}(A \cap L_j) > b$ , for all  $j = 1, 2, \dots, M$  ;
- (iii) the validity of the inequality in (ii) implies that with probability  $< 1/2, \bar{V}_{N-1}(L \cap A) > a$ , for all  $L$  ;
- (iv)  $\lambda^{n-1}a < V_{n-1}(B_{n-1})$ , where  $\lambda$  is the dilation ratio which guarantees the equality  $V_n(\lambda A) = V_n(B_n)$ .

It turns out, after some delicate and accurate estimations, that the hypothesis  $n \geq 12$  makes it possible to satisfy simultaneously all these conditions for some suitable values of the parameters.

REMARKS. (i) This proof is rather inflexible, at least if one insists on the requirement of non overlapping. On the other hand this requirement is practically indispensable, since otherwise we encounter serious technical difficulties.

(ii) A closer look on the proof reveals an interesting feature. There is  $\epsilon_0$  such that any  $\epsilon < \epsilon_0$  gives a desired counterexample. In other words suitable small perturbations of the unit ball give good choices for the required convex body. We shall see in the next paragraphs that K. Ball and A. Giannopoulos choices were far from being small perturbations of  $B_n$ .

### 3. The K. Ball & A. Giannopoulos results

In 1986 K. Ball ([1]) proved that if  $Q_n$  is the unit cube centered at the origin of  $\mathbb{R}^n$  and  $L$  any  $(n-1)$ -dimensional subspace, then  $V_{n-1}(L \cap Q_n) \leq \sqrt{2}$ . In 1988 ([2]) he



observed that the sequence  $a_n = \lambda^{n-1} V_{n-1}(B_{n-1})$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , where  $\lambda = \{V_n(B_n)\}^{-1/n}$ , is increasing. Since  $V_n(\lambda B_n) = 1 = V_n(Q_n)$  and  $a_{10} = 1,420\dots > \sqrt{2}$ , the choice  $A = Q_n$ ,  $B = \lambda B_n$  shows that the answer to the Busemann-Petty question is NO, if  $n \geq 10$ .

This remarkably neat example is essentially different from the Larman Rogers examples, since the cube cannot be considered a "small" perturbation of the ball.

A few months ago A. Giannopoulos considered cylinders  $A_n = A_n(a, b) = \{(x_1, \dots, x_n) : |x_n| \leq b, x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq a^2\}$  and proved that, if  $n \geq 7$ , there are  $a = a(n)$ ,  $b = b(n)$  such that  $V_n(A_n) = V_n(B_n)$ , but  $V_{n-1}(A_n \cap L) < V_{n-1}(B_{n-1})$  for all  $(n-1)$ -dimensional subspaces  $L$ . Thus the answer to the Buseman-Petty question is NO for all  $n \geq 7$ . The strategy of the proof has certain similarities with the one in K. Ball's work and in fact it was motivated by it. However the required estimates are more delicate and direct computation has replaced the, rather superficial, probabilistic arguments in [1].

Naturally we consider separately the cases where  $L$  meets or not the bases of the cylinder  $A_n$ . In the first case we find  $V_{n-1}(A_n \cap L) = 2v_{n-2}a^{n-2}bf\left(\frac{b \cot \varphi_L}{a}\right)$ , where  $v_{n-2} = V_{n-2}(B_{n-2})$ ,  $\varphi_u$  the (acute) angle between the  $x_n$  axis and the normal to  $L$  and the function  $f$  is given by the formula

$$f(x) = \sqrt{1+mx^2} \frac{1}{x} \int_0^x (1-t^2)^{(n-2)/2} dt, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (f(0) = 1),$$

with  $m = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ . In the second case we find  $V_{n-1}(L \cap A_n) \leq 2v_{n-2}a^{m-2}bf(1)$ . Thus the maximum of the volumes of the sections  $L \cap A_n$  equals  $2v_{n-2}a^{n-2}b \|f\|_\infty$  and the rest of the proof consists in showing that for suitable  $a, b$ , if  $n \geq 7$ , this quantity is less than  $V_{n-1}(B)$ , where  $B$  is the ball in  $\mathbb{R}^n$  with volume equal to that of  $A_n$ . A careful study of  $f$  shows that it is decreasing in  $[0, 1]$  if and only if  $m < \frac{n-2}{3}$ . If  $n \geq 8$  it turns out that there are  $a, b$  such that  $m < \frac{n-2}{3}$  and  $2v_{n-2}a^{n-2}bf(0) < V_{n-1}(B)$  and so the case  $n \geq 8$  is settled. We refer to [5] for the details. Here we mention only that the proof is reduced to that for  $n = 8$  which follows from the arithmetic inequality  $\sqrt{2}v_7^7 v_8^8 < v_7^{15}$  or, equivalently,

$$2 \left( \frac{1225}{4096} \pi \right)^7 = 1,29274\dots < \sqrt{2} \frac{32}{35} = 1,29299\dots$$

The case  $n = 7$  cannot be reduced to the case of monotonic  $f$  ( $m < \frac{5}{3}$ ) and a more careful study of  $f$  is needed. This is done in [5], where it is shown that a certain arithmetic inequality, which takes the final form  $0,999998\dots < 1$  (!), allows the desired choice of  $a, b$ .

## References

- [1] K. M. BALL Cube slicing in  $\mathbb{R}^n$ . Proc. Amer. Math. Soc. 97 (1986), 465-473.
- [2] K. M. BALL Some remarks on the geometry of convex sets. Springer Lecture Notes 1317 (1988), 224-231.

- [3] J. BOURGAIN (oral communication).
- [4] H. BUSEMANN & C. PETTY Problems on convex bodies. *Math. Scand.* (1956), 88-94.
- [5] A. GIANNOPOULOS A note on a problem of H. Busemann and C. Petty concerning sections of convex symmetric bodies. To appear in the December 1990 issue of *Mathematika*.
- [6] D. LARMAN & C. ROGERS The existence of a centrally symmetric convex body with central sections that are unexpectedly small. *Mathematika* 22 (1975), 164-175.

CNRS UA D0757  
Université de Paris-Sud  
Mathématiques (Bât. 425)  
91405 ORSAY CEDEX (France)

et

*(Permanent address)*  
University of Crete  
Department of Mathematics  
Iraklion, Crete, Greece

## UBIQUITE ET PARADOXES DES SUITES AUTOMATIQUES


Martine QUEFFELEC


### 1 - INTRODUCTION

Qu'y a-t-il de commun entre la courbe de Von Koch, l'ensemble triadique de Cantor, le pavage de Penrose, la suite de Fibonacci, les polynômes de Rudin-Shapiro, les produits de Riesz, etc ...

Tous ces objets ont un rapport direct avec les automates ou les substitutions :

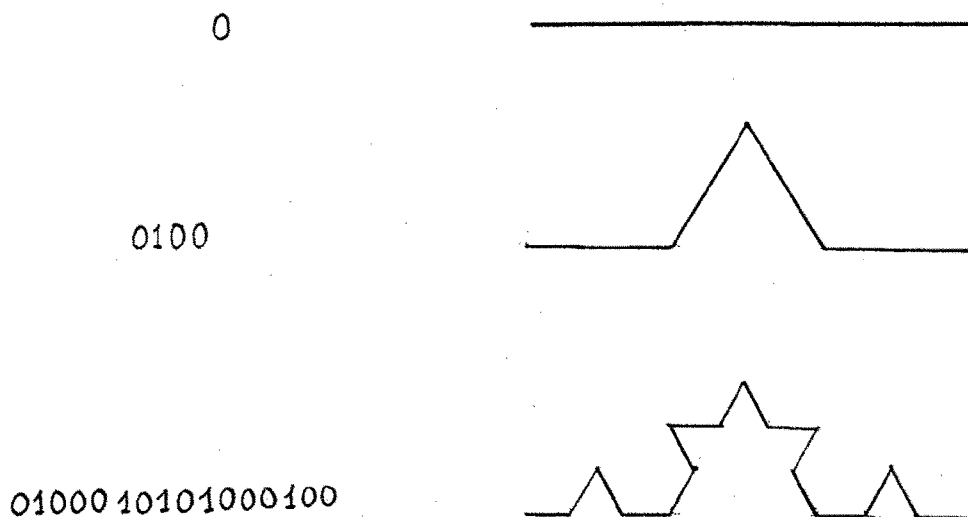
La courbe de Von Koch : On part de 0; qu'on remplace à la première étape par le mot 0100; à la deuxième étape, chaque 0 est remplacé par le mot 0100 et chaque 1 par le mot 0101, obtenant ainsi 0100010101000100 etc ... Pour représenter la courbe de Von Koch on interprète 0 et 1 géométriquement :

0 signifie : on avance d'une unité et on se tourne de  $\frac{\pi}{3}$  vers la gauche. 

1 signifie : on avance d'une unité et on se tourne de  $\frac{2\pi}{3}$  vers la droite. 

Il faut réduire l'unité d'un tiers à chaque étape, et se ramener en 0 par translation de 1.

Ainsi



Pour une généralisation du procédé voir [18] [65].

Ensemble triadique de Cantor

On considère la règle de construction suivante :  $0 \rightarrow 000$  et  $1 \rightarrow 101$  et on part de 1 à l'étape 0.

A l'étape 1 on a 101

A l'étape 2 on a 101000101

etc ... à l'étape  $n$ , le mot obtenu a  $3^n$  lettres, qui sont 0 ou 1.

On pose

$$I_j^{(n)} = \left[ \frac{j}{3^n}, \frac{j+1}{3^n} \right]$$

$$C_n = \bigcup \left\{ I_j^{(n)}, j \text{ tels que la } j^{\text{ème}} \text{ lettre du } n^{\text{ème}} \text{ mot soit } 1, 0 \leq j < 3^n \right\}.$$

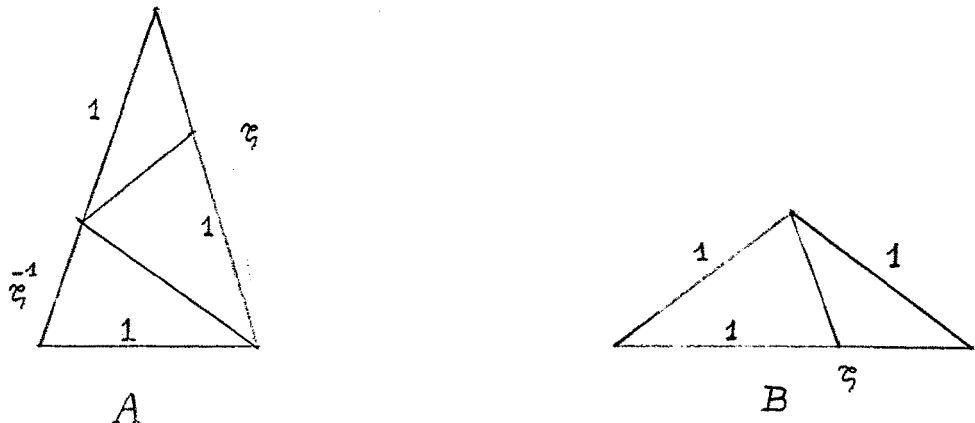
$C_n$  décroît vers  $C$ , l'ensemble triadique de Cantor. M. Dekking s'est inspiré de cette construction pour fabriquer des Cantor aléatoires du plan.[21]

Pavage de Penrose [8], [20], [23], [46], [48]

En 1974 Penrose a construit un pavage non périodique du plan possédant la symétrie pentagonale. Le point de départ est le fait qu'un pentagone (régulier) se décompose en 6 pentagones et 5 triangles. Itérant cette décomposition, accompagnée d'une homothétie de rapport  $1 + \zeta = \zeta^2$  à chaque étape, il obtient finalement le pavage. Il remarque que ceci peut s'obtenir comme un assemblage de 2 types de pièces qui s'échangent par la substitution

$$\begin{aligned} A &\rightarrow AAB \\ B &\rightarrow AB \end{aligned}$$

comme ces 2 triangles d'or.



Le rapport de leur fréquence étant  $\zeta \notin \mathbb{Q}$ , le pavage ne peut être périodique.

## Suite de Fibonacci

Considérons la règle de substitution

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow 01 \\ \zeta \\ 1 \longrightarrow 0 \end{array}$$

En itérant cette règle à partir de 0, on obtient les mots

$$0, 01, 010, 01001, 01001010, \dots$$

dont les longueurs sont respectivement

$$F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, \dots$$

car plus généralement, si  $\zeta^n(0)$  désigne le  $n^e$  mot,

$$\zeta^n(0) = \zeta^{n-1}(0)\zeta^{n-1}(1)$$

par juxtaposition, et de même  $\zeta^n(1) = \zeta^{n-1}(0)$ .

D'où,  $|\zeta^n(0)|$ , la longueur de  $\zeta^n(0)$ , vérifie  $|\zeta^0(0)| = 1$ ,  $|\zeta(0)| = 2$  et  $|\zeta^n(0)| = |\zeta^{n-1}(0)| + |\zeta^{n-2}(0)|$  l'équation de la suite de Fibonacci  $(F_n)_{n \geq 1}$ .

On pourra l'obtenir à l'aide d'un autre automate, comme suite d'indices des apparitions de la lettre 1 dans une suite infinie de 0 - 1, comme ci-dessous.

## Suite des carrés [12]

On considère l'alphabet  $\{a, b, c\}$  et la règle  $\zeta \quad a \rightarrow ab, \quad b \rightarrow ccb, c \rightarrow c$ . On part de  $a$ ; le mot  $\zeta^n(a)$  commence par  $\zeta^{n-1}(a)$  et à l'infini on obtient une suite  $\zeta^\infty(a)$  dans laquelle  $b$  apparaît aux indices  $n^2$ .

Pour le vérifier, il suffit de noter qu'entre deux  $b$  consécutifs apparaît une plage de  $c$  de longueur  $2n$ , ceci pour tous les  $n$  successivement.

On pourrait multiplier les exemples où apparaissent naturellement les suites automatiques (modèle d'Ising, équation de Schrödinger, itération de fonctions [1] [2] [3] [4] [6] [58] [63]) et on en verra d'autres en cours d'exposé, les produits de Riesz intervenant lors de l'étude spectrale de ces suites.

## 2 - LA SUITE DE THUE-MORSE

Les suites périodiques sont les suites les plus simples. On peut le voir de 2 façons : le  $n^{\text{e}}$  terme d'une suite périodique est connu, dès qu'on connaît la période (un nombre fini de termes) et l'entier  $n$ ; ou bien, si  $\Omega_n$  est l'ensemble des mots de longueur  $n$  de la suite,  $|\Omega_n|$  est borné (en fait égal à la longueur de la période). A l'opposé sont les suites aléatoires ou les suites au hasard.

Les suites définies par un automate fini (uniform tag-machine) sont les plus simples, de ce point de vue, après les suites périodiques. Pourtant, on peut construire ainsi des suites non ultimement périodiques, non presque-périodiques au sens de Besicovitch, et même certaines "simulent" le hasard.

Avant de les étudier en général, commençons par la suite de Thue-Morse  $\in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  définie par la substitution  $0 \rightarrow 01 \quad 1 \rightarrow 10$  ou par la propriété miroir, en partant de 0 : en effet, si  $\bar{\omega}$  désigne le mot  $\omega$  dans lequel on a échangé 0 et 1 ,

$$\zeta(\bar{\omega}) = \overline{\zeta(\omega)}$$

et

$$\begin{aligned} \zeta^n(0) &= \zeta^{n-1}(0)\zeta^{n-1}(1) \\ &= \zeta^{n-1}(0)\overline{\zeta^{n-1}(0)}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi la suite infinie de premiers termes

0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 0 1 1 0 ...

Cette suite fut construite par Thue en 1906 [62], et redécouverte par Morse en 1921 [44], (en fait elle apparaît déjà en 1856 dans une caractérisation de Prouhet) pour fournir une suite  $\infty$  à 2 symboles, sans chevauchement, c'est-à-dire, sans mot de la forme

$$b_0 b_1 \dots b_k b_0 b_1 \dots b_k b_0 \quad \text{ou} \quad BBb_0$$

(plus généralement un chevauchement est un mot de la forme  $\omega\omega'\omega\omega'$ ).

Remarque : Une propriété plus forte pour une suite ne prenant qu'un nombre fini de valeurs est de ne pas posséder de carré, c'est-à-dire de mot de la forme  $\omega\omega$ . Evidemment, une suite à 2 symboles ne peut être sans carré.

Pour la suite de Morse, à l'aide de la propriété miroir il est facile de décrire tous les carrés : ce sont les mots de la forme

$$\begin{array}{ll} \zeta^n(0)\zeta^n(0) & \text{de longueur } 2^{n+1} \\ \zeta^n(1)\zeta^n(1) & \text{de longueur } 2^{n+1} \\ \zeta^n(010)\zeta^n(010) & \text{de longueur } 3 \cdot 2^{n+1} \end{array}$$

car 00, 11, 010010 apparaissent dans la suite, et engendrent tous les carrés.

Avant de démontrer le résultat de Thue, notons une propriété extrême de la suite de Morse.

THÉORÈME ([5]). — Soit  $x$  une suite  $\in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ , construite à l'aide d'une substitution différente de l'identité, qui est sans chevauchement; alors  $x = m$  ou  $\bar{m}$ .

Démonstration de la propriété de non-chevauchement : Comme on peut s'y attendre, par propriété d'auto-similarité, le résultat va découler du fait que 000 (et 111) n'apparaissent pas dans la suite c'est-à-dire de la propriété pour les mots de longueur 1. 000 n'apparaît pas dans  $m$  puisque  $m$  est la juxtaposition de mots de longueur 2 pris parmi 01 et 10.

Supposons qu'il existe  $k$  et un mot de longueur  $k, \omega$ , tel que  $\omega\omega\omega_0$  soit un mot de  $m (\in \Omega(m))$  si  $\omega$  commence par  $\omega_0$ . On va montrer que  $k$  est nécessairement pair et qu'alors il existe un chevauchement de mot de longueur  $\frac{k}{2}$ , d'où la preuve.

a) Supposons  $k = 2p + 1$  et notons  $b = \omega\omega\omega_0$  où l'on a supposé par exemple  $\omega_0 = 0$ . On va situer ce mot  $B$  par rapport à la décomposition de  $m$  en mots de longueur 2

$$m \text{ s'écrit encore } \zeta(0)\zeta(1)\zeta(1)\zeta(0)\zeta(1) \dots \text{ puisque } m = \zeta(m).$$

Or il y a 2 façons de grouper 2 à 2 les lettres de  $B$ .

\* Si  $\omega_0 = 0$  est le début de  $\zeta(0)$

$$\begin{aligned} B &= \underbrace{0\omega_1\omega_2\omega_3}_{\alpha_0} \dots \underbrace{\omega_{2p}\omega_0}_{\alpha_1} \underbrace{\omega_1\omega_2}_{\alpha_2} \dots \underbrace{\omega_{2p-1}\omega_{2p}\omega_0}_{\alpha_p} \\ &= \zeta(\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p \alpha_{p+1} \dots) \end{aligned}$$

$\alpha_0 = 0$  donc  $\omega_1 = 1$ ;  $\omega_2 = 0$  (en considérant  $\alpha_{p+1}$ ) et donc  $\alpha_1 = 0$ ,  $\omega_3 = 1$  puis  $\omega_4 = 0$  (en considérant  $\alpha_{p+2}$ ) et  $\alpha_2 = 0$  mais il est impossible d'avoir 000 dans la suite  $m$ .

\* Si  $\omega_0 = 0$  est la fin de  $\zeta(1)$

$$\begin{aligned} B &= \underbrace{0}_{\alpha_0} \underbrace{\omega_1\omega_2\omega_3}_{\alpha_1} \dots \underbrace{\omega_{2p-1}\omega_{2p}}_{\alpha_2} \underbrace{0\omega_1\omega_2\omega_3}_{\alpha_3} \dots \\ &= \zeta(\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots) \end{aligned}$$

On montre de la même façon que  $\alpha_0 = 1, \omega_1 = 1, \alpha_1 = 1, \omega_2 = 0, \omega_3 = 1$  et  $\alpha_2 = 1$  et 111 apparaîtrait dans  $m$ .

b)  $k$  est donc égal à  $2p$ .

\* Si  $\omega_0 = 0$  est le début de  $\zeta(0)$

$$\underbrace{\omega_0\omega_1}_{\alpha_0} \underbrace{\omega_2\omega_3}_{\alpha_1} \cdots \underbrace{\omega_{2p-2}\omega_{2p-1}}_{\alpha_{p-1}} \underbrace{\omega_0\omega_1}_{\alpha_0} \cdots \underbrace{\omega_{2p-2}\omega_{2p-1}}_{\alpha_{p-1}} \underbrace{\omega_0}_{\alpha_0}$$

On voit facilement que  $\alpha_0 \dots \alpha_{p-1} \alpha_0 \dots \alpha_{p-1} \alpha_0$  est un chevauchement de mot de taille  $p = \frac{k}{2}$ .

\* Si  $\omega_0 = 0$  est la fin de  $\zeta(1)$

$$\underbrace{\omega_0}_{\alpha_0} \underbrace{\omega_1\omega_2}_{\alpha_1} \cdots \underbrace{\omega_{2p-3}\omega_{2p-2}}_{\alpha_{p-1}} \underbrace{\omega_{2p-1}\omega_0}_{\alpha_{p-1}} \underbrace{\omega_1\omega_2}_{\alpha_1} \cdots \underbrace{\omega_{2p-1}\omega_0}_{\alpha_0}$$

On voit que nécessairement  $\omega_{2p-1} = 1$  et  $\omega_{2p-1}\omega_0 = \zeta(1)$  d'où la même conclusion.  $\diamond$

En 1912 Thue a construit à partir de la suite de Morse, une suite infinie à 3 symboles sans carré : à l'aide de la compression de blocs  $011 = a, 01 = b, 0 = c$  définie par les apparitions de 0 dans  $m$ , on obtient la suite

$$a b c a c b a b c b a c a b c a c b a \dots$$

Il est facile de voir qu'il n'y a pas de doublet de lettres : 00 est toujours suivi de 1 dans  $m$  et  $c$  est suivi de  $a$  ou  $b$ . 0101 est le début de 01011, puisque  $m$  n'a pas de chevauchement et  $b$  est suivi de  $a$  ou  $c$ .

Enfin 011011 n'apparaît pas dans  $m$  car il devrait être suivi de 1 par non chevauchement, ce qui est impossible.

Le cas général s'en déduit pareillement.

Cette suite s'obtient aussi bien par la règle de substitution  $a \rightarrow abc \quad b \rightarrow ac \quad c \rightarrow b$ , en partant de  $a$ .

Pour terminer, revenons à la propriété extrême de la suite de Morse dégagée par Prouhet [49].  $m$  est l'unique suite de  $\pm 1$  telle que, pour chaque  $n \geq 1$

$$\sum_{1 \leq k \leq 2^n} m_k k^j = 0 \quad \text{pour } j < n$$

(en notant  $m = m_1, m_2, \dots$ ).



### 3 - SUITES AUTOMATIQUES

Il y a plusieurs façons de décrire les suites automatiques.

Point de vue automate : Un automate fini - de longueur  $q$  - ou q-automate est la donnée d'un alphabet fini  $A$ , de  $q$  instructions

$$\varphi_0 \dots \varphi_{q-1} : A \rightarrow A$$

et d'une application

$$h : A \rightarrow \mathbb{C}.$$

Soit  $\alpha \in A$ . A chaque  $n \in \mathbb{N}$ , on associe

$$u_n = \varphi_{\varepsilon_k} \circ \dots \circ \varphi_{\varepsilon_0}(\alpha)$$

où

$$n = \sum_0^k \varepsilon_j q^j$$

est la décomposition de  $n$  en base  $q$

La suite  $v$  de composante  $v_n = h(u_n)$  est dite q-automatique.

Point de vue substitution : Une substitution est une application de  $A$  dans  $A^*$ , l'ensemble des mots construits sur  $A$ , qui se prolonge à  $A^*$  par juxtaposition. Si  $\zeta(\alpha)$  commence par  $\alpha$ ,  $\zeta^n(\alpha)$  commence par  $\zeta^{n-1}(\alpha)$  et si  $|\zeta^n(\alpha)| \rightarrow +\infty$ ,  $\zeta^n(\alpha)$  converge vers une suite  $\infty$  à valeurs dans  $A$ ,  $u$ , qui vérifie  $\zeta(u) = u$ .  $u$  est point fixe de la substitution  $\zeta$  (ou à défaut d'une itérée de  $\zeta$ ).

Si  $|\zeta(\alpha)| = q$  pour tout  $\alpha \in A$ ,  $\zeta$  est dite longueur q. La suite  $v$  est définie par la substitution  $\zeta$  s'il existe  $h : A \rightarrow \mathbb{C}$  telle que  $v_n = h(u_n)$  où  $u = \zeta(u)$ .

**THÉOREME [10].** — *Les suites définies par  $\zeta$  de longueur  $q$  et l'automate d'instructions  $\varphi_j : \alpha \rightarrow \zeta(\alpha)_j$  ( $j^e$  lettre du mot  $\zeta(\alpha)$ )  $0 \leq j \leq q-1$  sont les mêmes.*

Plus généralement ([24]) :

Critère de Cobham :  $(u_n)$  est q-automatique  $\iff$  l'ensemble des suites  $\{u(q^k n + m)_n \geq 0$  où  $k \geq 0, m < q^k\}$  est fini.

#### Exemples

1) Morse :  $\varphi_0 = id$ ,  $\varphi_1$  est la permutation (10); si on utilise la première définition, partant de 0,

$$m_n = \varphi_{\varepsilon_k} \circ \dots \circ \varphi_{\varepsilon_0}(0) \quad \text{avec} \quad n = \sum_0^k \varepsilon_j 2^j$$

et  $m_n$  est le nombre de 1 modulo 2 dans le développement binaire de  $n$ . On en déduit

$$\begin{aligned} m_{2n} &= m_n \\ m_{2n+1} &= 1 - m_n \end{aligned}$$

Sous cette forme il est facile de voir que  $m$  n'est pas périodique. Si  $k$  était la longueur de la période,  $m_{n+k} = m_n \quad \forall n$  et en prenant  $n = k - 1$  on obtient une contradiction

$$m_{k-1} = m_{2k-1} = 1 - m_{k-1}.$$

2) Rudin-Shapiro : On rappelle que la suite  $(r_n)$  à valeurs  $\pm 1$  est ainsi définie : pour  $n < 2^k$ , les nombres  $r_n$  sont les coefficients du polynôme trigonométrique  $P_k$  de degré  $2^k - 1$  construit à l'aide des formules de récurrence

$$\begin{aligned} P_{k+1}(t) &= P_k(t) + e^{i2^k t} Q_k(t) \\ Q_{k+1}(t) &= P_k(t) - e^{i2^k t} Q_k(t) \quad k \geq 1 \\ P_0(t) &= Q_0(t) = 1 \end{aligned}$$

Brillhart et Carlitz remarquent dans [7], que si  $n$  se décompose en  $\sum_0^k \varepsilon_j 2^j$ ,

$$r_n = (-1)^{\varepsilon_0 \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{k-1} \varepsilon_k}$$

autrement dit  $r_n = (-1)^{f(n)}$  où  $f(n)$  est le nombre de 11 dans l'écriture binaire de  $n$ .

En particulier  $r_{2a+b} = (-1)^{ab} r_a$ . Soit

$$r_{2n} = r_n, \quad r_{2n+1} = (-1)^n r_n.$$

En utilisant le critère de Cobham, on peut montrer que la suite  $(r_n)$  est 2-automatique, puisque, par récurrence sur  $k$  on vérifie aisément que  $(r_{2^k n + \varepsilon})_{n \geq 0}$  est l'une des 4 suites  $(r_n)$ ,  $(-r_n)$ ,  $((-1)^n r_n)$  ou  $((-1)^{n+1} r_n)$ .

Reste à trouver l'automate : si  $V_n$  désigne le bloc des coefficients de  $P_n$ , et  $W_n$  le bloc des coefficients de  $Q_n$  de longueur respective  $2^n$ , on a :

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= V_n \cdot W_n \\ W_{n+1} &= V_n \cdot \overline{W_n} \\ V_0 &= W_0 = 1. \end{aligned}$$

( $\overline{W}$  est le mot  $W$  dans lequel on a échangé 1 et -1).

$V_n$  est une suite de mots  $\in \{11, -11, 1-1, -1-1\}$  qu'on note  $a, \bar{b}, b, \bar{a}$ , commençant ainsi 11 1-1 11 -11 11 1-1 -1-1 1-1...

soit  $aba\bar{b}ab\bar{a}b\bar{a}b\bar{a}b\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}$  d'où la substitution

$$\begin{aligned} a &\longrightarrow ab \\ b &\longrightarrow a\bar{b} \\ \bar{b} &\longrightarrow \bar{a}b \\ \bar{a} &\longrightarrow \bar{a}\bar{b} \end{aligned}$$

et la suite de Rudin-Shapiro s'obtient en projetant  $a, b$  sur 1,  $\bar{a}, \bar{b}$  sur  $-1$ .

3) Les suites de Morse et Rudin-Shapiro admettent une description arithmétique liée au développement en base 2. Ceci est typique : une suite  $r$ -automatique reconnaît des motifs dans l'écriture  $r$ -adique des nombres. Voici 2 autres exemples arithmétiques.

\* Soit  $u_n$  le premier chiffre non nul dans le développement de  $n!$  en base  $q$ . Pour  $q = 3$  on obtient une suite de Morse généralisée, engendrée par la substitution de longueur 9

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow 001110110 \\ 1 &\longrightarrow 110001001 \end{aligned}$$

et pour  $q = 10$  la longueur est  $5^5 = 3125$  [17].

\* Les entiers sommes de 3 carrés sont les entiers différents de  $4^n(8k + 7)$ . Or le développement binaire de  $4^n(8k + 7)$  se termine par 111 puis une plage paire de 0.

La fonction indicatrice des sommes de 3 carrés est reconnue par l'automate  $0 \rightarrow 01 \quad 1 \rightarrow 02 \quad 2 \rightarrow 03 \quad 3 \rightarrow 43 \quad 4 \rightarrow 51 \quad 5 \rightarrow 41$ ; si  $u = \zeta^\infty(0)$ ,  $f(n) = 1$  pour  $u_n \in \{0, 1, 2, 4\}$ , est cette fonction. [12]

4) Suites sturmiennes : Soit  $\alpha \notin \mathbb{Q}$  et  $0 < \alpha < 1$  et soit  $I$  l'intervalle  $[1 - \alpha, 1)$ . On définit

$$x_n^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } n\alpha \notin I \pmod{1} \\ 1 & \text{si } n\alpha \in I \pmod{1} \end{cases}$$

Pour certains  $\alpha$ , ces suites sont engendrées par une substitution sur l'alphabet  $\{0, 1\}$ . (Pour les autres, elles sont engendrées par une suite de substitutions associées au développement modifié en fraction continue de  $\alpha$  [36]).

On appellera suites sturmiennes les suites engendrées par une substitution de la forme

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \overbrace{0 \dots 00}^{m+1} 1 \quad \text{si } m \geq 1 \\ 1 &\longrightarrow \underbrace{0 \dots 0}_m 1 \end{aligned}$$

ou  $0 \rightarrow 01$ ,  $1 \rightarrow 0$ . Elles sont du type précédent. On aura besoin du :

Rappel : Soit  $\alpha \in [0, 1]$  et son développement en fraction continue

$$\alpha = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} = [a_1 a_2 \dots] \text{ où } a_1 = \left[ \frac{1}{\alpha} \right]$$

et

$$a_j = \left[ \frac{1}{T^{j+1}(\alpha)} \right] \text{ où } T(\alpha) = \frac{1}{\alpha} - \left[ \frac{1}{\alpha} \right].$$

On définit les approximations rationnelles de  $\alpha$  à l'aide de  $p_0 = 0$ ,  $q_0 = 1$ ,  $p_1 = 1$ ,  $q_1 = a_1$

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \\ p_n & q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n & q_n \\ p_{n-1} & q_{n-1} \end{pmatrix}$$

On sait que  $|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}}$  et que cette approximation est la meilleure au sens

$$\|q_n \alpha\| \leq \|k \alpha\| \quad \forall k \in [1, \dots, q_{n+1}].$$

On va établir

THÉORÈME [43]. — Soient  $\zeta_m$  la substitution

$$\begin{array}{l} 0 \rightarrow \overbrace{0 \dots 0}^{m+1} 0 \ 1 \\ 1 \rightarrow \overbrace{0 \dots 0}^m 1 \end{array}$$

et  $\alpha_m$  le nombre irrationnel  $\frac{m+2-\sqrt{m^2+4m}}{2}$ .

Sont équivalents (en omettant l'indice  $m$ )

(a)  $u = \zeta^\infty(0)$

(b)  $u_n = 1_I(n\alpha)$

(c)  $u_n = [(n+1)\alpha] - [n\alpha]$ .

Démonstration : On fait  $m = 1$  pour simplifier.  $\alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$  et dans ce cas la suite  $q_n$  n'est autre que la suite de Fibonacci  $(F_n)_{n \geq 2}$ .

(b) et (c) sont équivalents en toute généralité puisque  $u_n = 1 \iff n\alpha - [n\alpha] \in [1 - \alpha, 1] \iff$  il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $m + 1 - \alpha \leq n\alpha < m + 1$ ; ainsi  $m + 1 \leq (n + 1)\alpha$  et  $m = [n\alpha]$ .

Par ailleurs  $[(n + 1)\alpha] - [n\alpha] \in \{0, 1\}$  puisque

$$0 \leq [(n + 1)\alpha] - [n\alpha] \leq (n + 1)\alpha - [n\alpha] = \{n\alpha\} + \alpha < 2$$

et  $[(n + 1)\alpha] - [n\alpha] = 1$  signifie qu'il existe  $m$  tel que  $m \leq n\alpha < m + 1 \leq (n + 1)\alpha$ , ou  $m + 1 - \alpha \leq n\alpha < m + 1$  qui est la condition ci-dessus.

Pour montrer l'équivalence entre (a) et (b), on va montrer que la suite  $(\mathbf{1}_I(n\alpha))_n = (v_n)_n$  vérifie

$$v_{k+q_n} = v_k \quad \forall k, 1 \leq k < q_{n+1} - 1 \text{ et } n \geq 0.$$

Par c)

$$\begin{aligned} v_{k+q_n} &= [(q_n + k + 1)\alpha] - [(q_n + k)\alpha] \\ &= [q_n\alpha - p_n + (k + 1)\alpha] - [q_n\alpha - p_n + k\alpha] \end{aligned}$$

Or  $q_n\alpha - p_n = (-1)^n \|q_n\alpha\|$  et  $\|(k + 1)\alpha\| > \|q_n\alpha\|$  si  $k + 1 < q_{n+1}$ . On en déduit  $v_{v+q_n} = v_k$  pour ces valeurs de  $k$ .

On a posé  $u = \zeta_1^\infty(0) = 00100101001001010010100 \dots$

Or  $u$  n'est autre que  $\zeta^\infty(0)$  précédée de 0 où  $\zeta$  est la substitution de Fibonacci ( $\zeta_1$  et  $\zeta^2$  engendrent les mêmes suites). Il est facile de vérifier  $v_n = u_n$  sur les premiers termes. On va établir par récurrence sur  $n \geq 3$

$$W_{k+F_n} = W_k \quad 0 \leq k < F_{n+1} - 1,$$

en posant

$$W = \zeta^\infty(0)$$

ce qui établira l'équivalence.

C'est vrai pour  $n = 3$  et supposons le résultat pour  $n - 1 \geq 3$ . Si  $k < F_{n+1} - 1$ ,  $F_n + k < F_{n+2} - 1$

$$\begin{aligned} W_{[0, F_{n+2}[} &= \zeta^{n+2}(0) = \zeta^{n+1}(0)\zeta^n(0) \\ &= \zeta^n(0)\zeta^{n-1}(0)\zeta^n(0) \end{aligned}$$

et  $W_{F_n+k} = (\zeta^{n-1}(0)\zeta^n(0))_k$ .

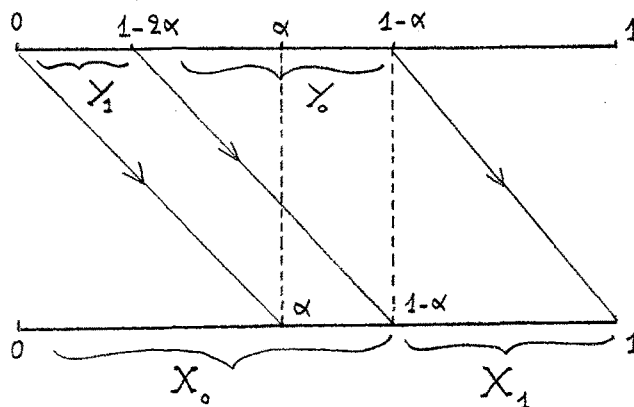
Si  $k < F_{n-1}$ ,  $W_{F_n+k} = (\zeta^{n-1}(0))_k = W_k$ .

Si  $k \geq F_{n-1}$ ,  $k = j + F_{n-1}$  où  $j < F_n - 1$  et  $W_{F_n+k} = (\zeta^n(0))_j = W_j = W_{j+F_{n-1}}$  par hypothèse de récurrence et là encore  $W_{F_n+k} = W_k$ .

Remarque [52] Lorsque  $\alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$  et  $I = (1-\alpha, 1)$ , la suite obtenue  $(u_n)$  est le codage de la rotation  $x \xrightarrow{R_\alpha} x + \alpha$ . Pour le voir géométriquement, notons

$$X_0 = [0, 1-\alpha)$$

$$X_1 = (1-\alpha, 1]$$



On considère l'itinéraire de 0 sous l'action de la rotation  $R_\alpha$ , et on le code ainsi :

$$\begin{aligned} x_n &= 0 \text{ si } R_\alpha^n(0) \in X_0 \\ &= 1 \text{ si } R_\alpha^n(0) \in X_1 \end{aligned}$$

$X_0 = Y_0 \cup Y_1$  où  $Y_0$  est l'image réciproque de  $X_1$  par  $R_\alpha$ , et  $Y_1$  la trace sur  $X_0$  de l'image réciproque de  $X_0$ .

Notons que  $\frac{|X_1|}{|I|} = \frac{|Y_1|}{|X_0|}$  car  $\alpha = \frac{1-2\alpha}{1-\alpha}$  ou  $\alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0$  et le codage induit sur  $X_0$  est le même. Ceci caractérise le système défini par la suite  $(u_n)$ .

#### 4 - PROPRIÉTÉS COMBINATOIRES DES SUITES DÉFINIES PAR q-AUTOMATE

On va se restreindre à une classe d'automates pour lesquels l'étude des suites engendrées, ne dépend pas du point de départ. On exclura ainsi l'automate

$$\begin{aligned} a &\longrightarrow ab \\ b &\longrightarrowccb \\ c &\longrightarrow c \end{aligned}$$

On suppose donc que  $\zeta$  est irréductible, c'est à dire pour tous  $\alpha$  et  $\beta$  il existe  $k$  tel que  $\zeta^k(\beta)$  contient  $\alpha$ . En fait, si  $\zeta(0)$  commence par 0,  $\zeta$  possède la propriété plus forte de primitivité : il existe  $k$  tel que pour tout  $(\alpha, \beta)$ ,  $\zeta^k(\beta)$  contient  $\alpha$ . On considère alors  $M = M(\zeta)$  la matrice  $s \times s$  de coefficient

$$M_{\alpha\beta} = \text{nombre d'apparitions de } \alpha \text{ dans } \zeta(\beta)$$

Comme  $M(\zeta^n) = M^n(\zeta)$ , l'hypothèse de primitivité signifie que  $M^k$  est à coefficients  $> 0$  pour un  $k \geq 1$ .

Exemple : La matrice de la substitution de Morse est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et c'est aussi bien la matrice de la substitution

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow 01 \\ 1 &\longrightarrow 01 \end{aligned}$$

qui n'engendre que des suites périodiques.

Pourtant l'étude de la matrice seule permet d'établir deux résultats très importants.

a) Tout bloc qui apparaît dans la suite  $u = \zeta(u)$ , apparaît avec des lacunes bornées.

Démonstration : Il suffit de remarquer que 0 apparaît avec des lacunes bornées, car,  $u = \zeta^n(u)$  et donc il en sera de même de  $\zeta^n(0)$  puis de tout mot puisque contenu dans  $\zeta^n(0)$  pour  $n$  assez grand. Or  $\zeta^k(\alpha)$  contient 0 pour tout  $\alpha$  et  $u$  est la juxtaposition de mots de la forme  $\zeta^k(\alpha)$  d'où le résultat.

b) Chaque bloc admet une fréquence (et même uniforme) c'est à dire

$$\frac{1}{N} \text{Card}\{k < N, u_k \dots u_{k+|B|} = B\} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \ell(B)$$

si  $B$  est un bloc de  $u$ .

En combinant avec a) on voit que cette fréquence est  $> 0$ .

Démonstration : C'est le théorème de Perron-Frobenius appliqué à  $M$ . On sait qu'une telle matrice possède une valeur propre dominante,  $> 1$ , simple et admettant un vecteur propre à composantes  $> 0$ . Soit  $\theta$  cette valeur propre ( $q$  si la substitution est de longueur  $q$ ); on en déduit  $M = \theta P_\theta + N$  où  $NP_\theta = P_\theta N$  et  $\rho(N)$ , le rayon spectral de  $N$ , est  $< \theta$ .

Donc  $M^n = \theta^n P_\theta + N^n$ ; si  $e_\beta$  est le vecteur dont toutes les coordonnées sont nulles sauf celle d'indice  $\beta$  qui vaut 1  $\frac{1}{\theta^n} M^n e_\beta \sim P_\theta e_\beta$ ; or si  $L(\omega)$  est le vecteur dont la composante d'indice  $\alpha$  est le nombre de  $\alpha$  dans le mot  $\omega$ ,  $L(\zeta^n(\beta)) = M^n e_\beta$  par définition de  $M$ .

Finalement  $\frac{1}{\theta^n} L(\zeta^n(\beta)) \rightarrow P_\theta e_\beta$  et  $\frac{1}{|\zeta^n(\beta)|} L_\alpha(\zeta^n(\beta)) \rightarrow d_\alpha > 0$  indépendante de  $\beta$  où  $\sum_\alpha d_\alpha = 1$ .

D'où le résultat pour les lettres : on déduit le résultat pour les mots de manière analogue en considérant une substitution sur l'alphabet des mots de longueur  $\ell$  donnée [50].

Cas non primitif : Dans ce cas les lettres ne jouent pas le même rôle : certaines peuvent disparaître après itération de  $\zeta$  sur une lettre, d'autres peuvent avoir une densité asymptotique nulle, ou ne pas avoir de densité asymptotique :

Exemple :

$$A = \{a, b, c\} \quad \text{et} \quad \zeta \quad \begin{array}{l} a \longrightarrow ab \\ b \longrightarrow bc \\ c \longrightarrow cc. \end{array}$$

Si  $u = \zeta^\infty(a)$ ,  $a$  disparaît dans  $u$  et  $b$  y apparaît une infinité de fois avec densité nulle (elle apparaît aux indices  $2^n$ ).

Ces suites ont été étudiées par Cobham [12] : si  $u$  est engendrée par une substitution non nécessairement primitive, toute lettre de  $u$  admet une densité logarithmique, i.e.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \sum_{\substack{k \leq n \\ u_k = a}} \frac{1}{k} \quad \text{existe}$$

(à défaut de densité asymptotique).

De la matrice  $M$  de la substitution, on peut extraire une sous-matrice irréductible  $M_1$  voire primitive en considérant une puissance convenable de  $M$  et  $M_1$ . Cobham démontre alors :



Si  $a$  apparaît dans  $u$ , il existe  $p$  un entier  $\geq 0$ , un réel  $s \in [0, 1]$  tel que  $\text{Card}\{n \leq N, u_n = a\}$  soit de l'ordre de  $N^s(\text{Log } N)^p$  pour  $N$  assez grand. Les paramètres  $s$  et  $p$  se calculent à l'aide de la valeur propre de Perron-Frobenius de  $M_1$ .

Exemple : Dans l'exemple qui a servi à construire l'ensemble de Cantor,  $0 \rightarrow 000$ ,  $1 \rightarrow 101$  et  $u = \zeta^\infty(1)$ ,

$$\text{Card}\{n \leq N, u_n = 1\} \text{ est de l'ordre de } N^{\frac{\log 2}{\log 3}}$$

La première question qui se pose est celle-ci : comment savoir si les suites obtenues sont ou ne sont pas ultimement périodiques. Il est en effet facile d'engendrer des suites périodiques à l'aide d'automates finis. Par exemple

$$\begin{array}{ccc} 0 \rightarrow & 010 & 0 \rightarrow & 01 \\ & & \text{ou} & \\ 1 \rightarrow & 101 & 1 \rightarrow & 01 \end{array}$$

et en longueur variable

$$\begin{array}{ccc} 0 \rightarrow & 010 & 0 \rightarrow & 01010 \\ & & \text{ou} & \\ 1 \rightarrow & 1 & 1 \rightarrow & 101 \end{array}$$

pour ne citer que des suites à 2 symboles.

En longueur constante, Dekking a donné une caractérisation des points fixes de substitution qui sont ultimement périodiques. Elle fait intervenir la hauteur d'une substitution [16] [50].

### Fonction complexité

Un moyen de mesurer l'irrégularité de la suite  $u$ , est d'étudier la fonction  $(p(n))_{n \geq 1}$  où  $p(n)$  est le nombre de mots (intervalles) de longueur  $n$  apparaissant dans  $u$  que l'on note  $|\Omega_n|$ .

Puisque  $p(n+m) \leq p(n)p(m)$ , la limite de  $\frac{1}{n} \text{Log} p(n)$  existe et on l'appelle l'entropie topologique de  $u$ . Les suites d'entropie nulle sont dite déterministes. On peut décrire les suites à valeurs dans un ensemble fini, ultimement périodiques, à l'aide de la fonction  $(p(n))$

PROPOSITION [14]

Pour  $y \in A^{\mathbb{N}}$  où  $A$  est un ensemble fini, sont équivalentes

(a)  $p(n+1) = p(n)$  pour  $n$  assez grand

(b)  $p(n) \leq n$

(c)  $y$  est ultimement périodique.

Démonstration : c)  $\Rightarrow$  b)  $\Rightarrow$  a) sont faciles à établir. Reste a)  $\Rightarrow$  c)

a) Signifie que chaque mot de  $\Omega_n$  se prolonge d'une seule façon par une lettre à droite en un mot de  $\Omega_{n+1}$ .

Supposons  $|\Omega_n| = K$ , et considérons les  $K + 1$  mots de  $\Omega_n$ ,

$$\begin{array}{cccc} y_0 & \cdots & y_{n-1} & \\ y_1 & \cdots & y_n & \\ \vdots & & & \\ y_K & \cdots & y_{K+n-1} & \end{array}$$

Deux d'entre eux coïncident, soit  $y_p \cdots y_{p+n-1} = y_q \cdots y_{q+n-1}$ . Par prolongement unique à droite en un mot de  $y$  de longueur  $n + 1$ , nécessairement  $y_{p+n} = y_{q+n}$  et on recommence avec  $y_{p+1} \cdots y_{p+n}$  et  $y_{q+1} \cdots y_{q+n}$  ce qui établit la périodicité.

Le résultat suivant est surprenant :

PROPOSITION. — *Les suites sturmiennes non périodiques vérifient  $p(n) = n + 1$ , pour tout  $n$ .*

Elle va résulter d'un lemme que vérifient les suites sturmiennes.

Notation : Si  $A$  est un mot de  $u$  on note  $N_1(A)$  le nombre de 1 dans  $A$ .

LEMME. — *Pour tous  $n$  et  $A, B \in \Omega_n$ ,  $|N_1(A) - N_1(B)| \leq 1$ .*

Démonstration de la proposition : On raisonne par l'absurde. Supposons  $p(n) = n + 1$  et  $p(n + 1) \geq n + 3$ . Il existe alors  $(n + 3)$  mots distincts de  $\Omega_{n+1}$  de la forme

$$B_1 \dots B_{n+3}$$

qu'on écrit

$$b_1 A_1 \dots b_{n+3} A_{n+3} \quad \text{où} \quad A_j \in \Omega_n$$

Il y a donc  $(n + 1)$  mots distincts parmi les  $A_j$ . Ou bien 3 d'entre eux coïncident - mais les  $B_j$  ne seraient plus distincts puisque  $b_j = 0$  ou 1 - ou bien il y a deux couples de  $A_j$  identiques, disons :

$$A_1 = A_2 = C \quad , \quad A_3 = A_4 = D. \quad C \neq D.$$

Par contre

$$\begin{aligned} b_1 A_1 &= b_1 C \neq b_2 A_2 = b_2 C \\ b_3 A_3 &= b_3 D \neq b_4 A_4 = b_4 D \end{aligned}$$

et  $0C, 1C, 0D, 1D$  figurent parmi les  $B_j$  avec  $C \neq D$ . Ceci contredit le lemme; en effet  $N_1(C)$  et  $N_1(D)$  diffèrent d'au plus 1 et donc deux mots parmi  $0C, 1C, 0D, 1D$  ont deux 1 d'écart.

On va établir le lemme pour la suite de Fibonacci.

Démonstration du lemme : Il se démontre également par récurrence sur  $n$ . On vérifie facilement le lemme pour les premières valeurs de  $n$ . Supposons le résultat acquis jusqu'à l'ordre  $n$ . Soient  $A, B \in \Omega_{n+1}$ .

S'ils commencent ou finissent par une même lettre, le résultat se déduit de l'hypothèse de récurrence, et, clairement, le seul cas à étudier reste celui-ci

$$\begin{aligned} A &= a_0 a_1 \cdots a_n & \text{avec } a_0 &= 0 = a_n \\ B &= b_0 b_1 \cdots b_n & \text{avec } b_0 &= 1 = b_n \end{aligned}$$

Notons  $k = N_1(A)$ ,  $j = N_1(B)$ ; on a déjà, en notant  $A = A^* a_n = A^* 0$  et  $B = b_0 B^* = 1 B^*$ ,

$$|N_1(A^*) - N_1(B^*)| \leq 1 \quad \text{puisque} \quad |A^*| = |B^*| = n$$

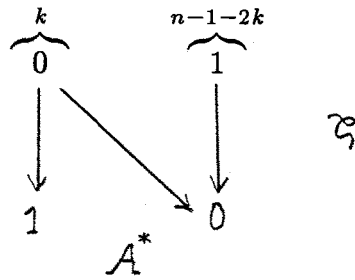
soit  $|k - (j - 1)| \leq 1$ , ou  $j - k = 0, 1, 2$ .

Le seul cas à éliminer est le cas  $j = k + 2$ . Pour cela on décompose  $A$  et  $B$  en mots de la forme  $\zeta(0)$  et  $\zeta(1)$ . C'est facile pour la suite de Fibonacci, puisque 0 est toujours le début d'un substitué  $\zeta(0)$  ou  $\zeta(1)$ , tandis que 1 est toujours la fin de  $\zeta(0)$ . On a ainsi

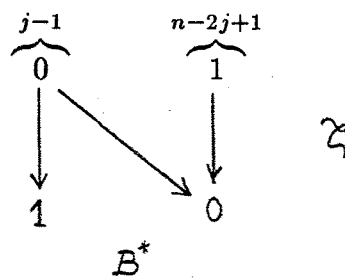
$$\begin{aligned} A &= \zeta(\alpha_1) \cdots \zeta(\alpha_{n-k-1}) 0 = A^* 0 \\ B &= 1 \zeta(\beta_1) \cdots \zeta(\beta_{n-j}) = 1 B^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{avec } N_1(\alpha_1 \cdots \alpha_{n-k-1}) &= n - 2k - 1 \\ \text{et } N_1(\beta_1 \cdots \beta_{n-j}) &= n - 2j + 1 \end{aligned}$$

En effet, les  $k$  lettres 1 et les  $n - k - 1$  lettres 0 de  $A^*$  proviennent de  $k$  lettres 0 et  $n - 2k$  lettres 1 avant substitution, suivant le schéma



On a de même pour  $B^*$



On a supposé  $j = k + 2$ .

$\beta_0 \beta_1 \cdots \beta_{n-j}$  avec  $\beta_0 = 0$  et  $\alpha_1 \cdots \alpha_{n-k-1} \in \Omega_{n-k-1}$ .

Par hypothèse de récurrence,  $|N_1(\beta_0 \cdots \beta_{n-j}) - N_1(\alpha_1 \cdots \alpha_{n-k-1})| \leq 1$  soit  $|n - 2j + 1 - (n - 2k - 1)| \leq 1$  puisque  $\beta_0 = 0$ .

Ceci est impossible puisque  $n - 2j + 1 - n + 2k + 1 = -2$ .  $\diamond$

Autres exemples

1) (Rauzy [53]). Pour la suite de Toeplitz associée à la substitution

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow 0010 \\ 1 &\longrightarrow 1010 \end{aligned}$$

on peut montrer que :

$$\begin{aligned} p(n+1) - p(n) &= 2 && \text{si } 2^k \leq n < \frac{3}{2} 2^k \\ &= 1 && \text{sinon} \end{aligned}$$

D'où  $1 \leq \underline{\lim} \frac{p(n)}{n} \leq \overline{\lim} \frac{p(n)}{n} \leq 2$  sans que  $(p(n))$  soit polynômiale.

2) (Rauzy [53]). Soit  $I$  l'intervalle  $[\frac{1}{2}, 1)$  du tore et considérons la suite  $\mathbf{1}_I(n\pi)$  $_{n \geq 0}$ . C'est une suite de 0 - 1 pour laquelle  $p(n) = 2n$  mais qui n'est pas automatique.

3) Les suites sturmiennes, dans [14], sont définies comme les suites de 0 – 1 vérifiant le lemme. Leur terminologie provient de l'étude des solutions de l'équation différentielle

$$y'' + \varphi(x)y = 0$$

où  $\varphi$  est continue et 1-périodique, et du nombre de zéros d'une telle solution dans les intervalles  $[n, n + 1)$ .

Il existe une caractérisation due à Camion et Pierre, des suites de 0 – 1 pour lesquelles  $p(n) = n + 1$ . Ce sont les suites de la forme

$$\lfloor (n+1)\alpha + \beta \rfloor - \lfloor n\alpha + \beta \rfloor \quad \text{ou} \\ \lceil (n+1)\alpha + \beta \rceil - \lceil n\alpha + \beta \rceil$$

pour un  $\alpha \in [0, 1]$  et  $\beta \in \mathbb{R}$ . ( $\lceil x \rceil$  étant le plus petit entier  $\geq x$  et  $\lfloor x \rfloor$  le plus grand entier  $\leq x$ ) [9]

### Cas général des suites automatiques

PROPOSITION. — Soit  $u$  une suite engendrée par une substitution primitive. Il existe  $C > 0$  constante telle que

$$p(n) \leq Cn.$$

Démonstration : En longueur constante  $q$ , les mots de la forme  $\zeta^k(\alpha)$  sont de longueur  $q^k$ . Un mot de longueur  $q^k$  est donc contenu dans un mot de la forme  $\zeta^k(\alpha\beta)$  où  $\alpha\beta$  est un mot de longueur 2 de  $u$ . On en déduit que

$$p(q^k) \leq q^k p(2).$$

Maintenant, si  $q^{k-1} \leq n \leq q^k$ ,  $p(q^{k-1}) \leq p(n) \leq p(q^k) \leq q^k p(2) \leq q \cdot n p(2)$ . D'où  $C \leq q p(2)$ .

En longueur variable, sachant que

$$\lim_n |\zeta^n(\alpha)| = +\infty$$

pour tout  $\alpha$ , à  $n$  donné on peut toujours associer  $p$  tel que

$$\inf_{\alpha \in A} |\zeta^{p-1}(\alpha)| \leq n \leq \inf_{\alpha \in A} |\zeta^p(\alpha)|.$$

De la même façon

$$p(n) \leq p(2) \cdot \sup_p |\zeta^p(\alpha)|.$$

Comme

$$\frac{|\zeta^p(\alpha)|}{\theta^p} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \ell(\alpha),$$

$$a \theta^p \leq \inf_{\alpha} |\zeta^p(\alpha)| \leq \sup_{\alpha} |\zeta^p(\alpha)| \leq b \theta^p \quad \text{pour } p \text{ grand}$$

et

$$p(n) \leq p(2) \cdot b \theta^p \leq \frac{b}{a} p(2) \theta \cdot n.$$

COROLLAIRE. — *Ces suites sont d'entropie nulle.*

Une seconde question surgit : lors de la démonstration du théorème de Thue ou du lemme sur les suites sturmiennes, on a situé un mot par rapport à la décomposition de  $u$  en mots de la forme  $\zeta(\alpha)$   $\alpha \in A$ , qui sont bien connus. L'unicité d'une telle décomposition n'est pas évidente en général, et elle est fautive bien sûre si la suite engendrée est périodique.

Pour les substitutions de longueur constante, non périodiques et injectives sur les lettres  $J$ . Martin a établi ce résultat sous la forme :

THEOREME. — *Il existe  $K = K(\zeta)$  tel que l'examen de  $K$  lettres suivant une lettre donnée permet de décider si elle est ou non le début d'un substitué.*

Le résultat en longueur variable n'est pas connu. (Voir [45]).

Prenons l'exemple de la suite de Morse : 0 (ou 1) peut être le début ou la fin d'un substitué; il faut pour le décider regarder au plus les trois lettres suivantes :

en effet si l'on a  $\underline{00}$   $\underline{0}$  n'est pas le début d'un substitué, et si l'on a  $\underline{01}$  on ne peut décider; ce mot peut être à l'intérieur de  $\zeta(11) = 1010$ .

Si l'on a  $\underline{011}$   $\underline{0}$  est le début de  $\zeta(0)$  car 11 n'est pas un substitué.

Si l'on a  $\underline{010}$  on ne peut conclure :  $\underline{0101}$  est un substitué tandis que  $\underline{0100}$  n'en est pas.

Plus généralement, on peut construire des suites "automatiques" en se donnant une application de  $A^d \rightarrow A^*$  que l'on itère sur un mot initial. Un exemple célèbre est la suite de Kolakowski [38].

A l'origine c'est une suite  $\in \{1, 2\}^{\mathbb{N}}$  dont les premiers termes sont

$$u = \underbrace{22}_2 \underbrace{11}_2 \underbrace{2}_1 \underbrace{1}_1 \underbrace{22}_2 \underbrace{1}_1 \underbrace{22}_2 \underbrace{11}_2 \underbrace{2}_1 \underbrace{11}_2 \underbrace{22}_2 \underbrace{1}_1 2 \dots$$

La suite qui compte les longueurs des mots de 1 ou 2 consécutifs, dans  $u$ , est  $u$  elle-même.

On peut montrer que  $u$  est engendrée par l'automate généralisé

$$11 \longrightarrow 21$$

$$22 \longrightarrow 2211$$

$$12 \longrightarrow 211$$

$$21 \longrightarrow 221$$

La seule chose connue à ce jour est que  $u$  n'est pas ultimement périodique. On ne sait rien sur la fréquence des blocs, ni la fonction complexité.

5 - PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES DES SUITES AUTOMATIQUES (NON PÉRIODIQUES)

Une suite de 0 – 1 (ou ne prenant qu'un nombre fini de valeurs 0, 1, ..., s – 1) peut être considérée comme le développement en base 2 (ou s ≥ 2) d'un nombre réel. Il est tentant de relier la complexité de la suite - et du développement, à la nature arithmétique de ce nombre.

On sait peu de choses en dehors du cas rationnel. Un nombre algébrique irrationnel - mal approchable par des rationnels - devrait avoir, quant à ses digits en toute base, un comportement aléatoire ce qui s'exprimerait par la propriété de normalité.

DÉFINITION. — Un nombre  $x \in [0, 1]$  est normal en base 2 (ou s) si la fréquence de tout mot de longueur k dans le développement de x en base 2 (ou s) est  $\frac{1}{2^k}$  (ou  $\frac{1}{s^k}$ ).

Mais les seuls nombres normaux connus à ce jour, sont des variations autour du nombre de champernowne

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 ...

Les travaux de Mendès-France et Cie, Loxton et Van der Poorten vont un peu dans ce sens puisque ils établissent [40] :

THÉORÈME. — Sous certaines hypothèses sur l'automate, le nombre  $\sum u_n x^n$  est rationnel ou transcendant pour tout  $x < 1$  algébrique et u suite automatique.

(Dekking [15] avait établi la transcendance du nombre

$$\sum m_n 2^{-n} \quad m_n \in \{\mp 1\}.$$

Comme presque tous les nombres sont transcendants ce n'est pas vraiment une surprise, mais ceci prouve que les nombres algébriques irrationnels n'ont pas un développement automatique.

Pour cela on note que la fonction génératrice d'une suite automatique est transcendante. En effet, par un théorème de Polya-Szegö-Carlson, si  $u_n$  ne prend qu'un nombre fini de valeurs la série entière  $\sum u_n z^n$  est soit rationnelle (et alors  $(u_n)$  est ultimement périodique), soit transcendante (car le cercle unité est une coupure).

Exemple : Morse : si  $m_n \in \{\pm 1\}$  ,  $\sum_{n \geq 0} m_n z^n = B(z)$  vérifie

$$B(z^2) = \frac{1}{1-z} B(z) \quad |z| < 1 \quad \text{soit} \quad B(z) = \prod_{j=0}^{+\infty} (1 - z^{2^j}).$$

Pour Rudin-Shapiro :  $B(z) = B(z^2) + z B(-z^2)$ .



Pour établir leur résultat, Loxton et Van der Poorten, montrent que plus généralement les fonctions indicatrices de chaque lettre satisfont un système d'équations fonctionnelles (système de Mahler) et appliquent une technique de Mahler. Notons

$$f_\alpha(z) = \sum_{n \geq 0} u_{\alpha,n} \cdot z^n$$

où  $u_\alpha(n) = u_{\alpha,n} = 1$  si  $u_n = \alpha$ , 0 sinon. Or par construction,

$$u_{\alpha q+b} = \zeta(u_\alpha)_b = \alpha \text{ si } u_\alpha = \beta \text{ et } \zeta(\beta)_b = \alpha$$

si bien que

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} u_{\alpha,n} z^n &= \sum_{a,b} u_{\alpha, aq+b} z^{aq+b} \\ &= \sum_b \left( \sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha, \beta, b} u_{\beta, a} z^{aq} z^b \right) \\ &= \sum_\beta \sum_b g_{\alpha, \beta, b} \left( \sum_a u_{\beta, a} z^{aq} \right) z^b \\ &= \sum_\beta \left( \sum_b g_{\alpha, \beta, b} z^b \right) f_\beta(z^q) \end{aligned}$$

où

$$g_{\alpha, \beta, b} = \begin{cases} 1 & \text{si } \zeta(\beta)_b = \alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et  $F(z) = R(z)F(z^q)$ .

6 - PRESQUE-PÉRIODICITÉ DE CERTAINES SUITES AUTOMATIQUES

Ayant éliminé le cas des suites périodiques automatiques, on peut se demander si de telles suites ne sont pas presque périodiques au sens suivant.

DÉFINITION. —  $(u_n)$  est moyenne-presque périodique si  $\forall \varepsilon > 0$ , il existe un ensemble d'entiers  $E_\varepsilon$  relativement dense telle que

$$\overline{\lim} \frac{1}{N} \sum_{n < N} |u_n - u_{n+k}| \leq \varepsilon \quad k \in E_\varepsilon$$

car de telles suites sont d'entropie nulle ([51]).

Mendès et Cie établissent, en utilisant la définition arithmétique que la suite de Morse n'est pas moyenne-presque-périodique.

Cette propriété est équivalente au fait que la mesure  $\sigma_u$  de corrélation - lorsqu'elle existe - est discrète, où  $\sigma_u$  est définie alors par

$$\hat{\sigma}_u(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n < N} u_{n+k} \bar{u}_n \quad , \quad \hat{\sigma}_u(-k) = \overline{\hat{\sigma}_u(k)}$$

pour  $u_n$  bornée dans  $\mathbb{C}$ .

C'est une mesure  $\geq 0$  sur  $\mathbb{T}$  de masse

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n < N} |u_n|^2 .$$

Or, sous l'hypothèse de primitivité faite sur la substitution,  $\zeta$  admet une mesure de corrélation.

En effet, si

$$v = h(u), \quad v = \sum_{\alpha \in A} h(\alpha) u_\alpha \quad \text{où} \quad u_\alpha(n) = 1 \quad \text{si} \quad u_n = \alpha \quad \text{et} \quad 0 \quad \text{sinon,}$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{n < N} v_{n+k} \bar{v}_n &= \sum_{\alpha, \beta} \frac{1}{N} \sum_{n < N} h(\alpha) \overline{h(\beta)} u_\alpha(n+k) u_\beta(n) \\ &= \sum_{\alpha, \beta} h(\alpha) \overline{h(\beta)} \frac{1}{N} \text{Card}(n < N, u_{n+k} = \alpha, u_n = \beta). \end{aligned}$$

Et  $\frac{1}{N} \text{Card}(n < N, u_{n+k} = \alpha, u_n = \beta)$  converge vers la fréquence d'apparitions du mot  $\underbrace{\beta * \dots * \alpha}_{k-1}$  dans la suite  $u$ .

Finalement,

$$\sigma_v = \sum_{\alpha, \beta} h(\alpha) \overline{h(\beta)} \sigma_{\alpha\beta}$$

On voit apparaître une matrice de mesures  $(\sigma_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta \in A}$  qui va jouer un rôle fondamental dans l'étude spectrale des suites automatiques.

Auparavant revenons sur les deux exemples fondamentaux que sont la suite de Morse et la suite de Rudin-Shapiro.

Puisque leur mesure de corrélation existe, on peut la calculer en se restreignant à des sous-suites :

Morse : Considérons la suite de Morse sur  $\pm 1$ .  $m_n = (-1)^{S_2(n)}$ . Cette suite est de moyenne nulle ce qui entraîne que  $\sigma_m$  ne charge pas 0 (compte tenu de l'identité

$$\sigma_u\{0\}^{1/2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left| \sum_{n < N} u_n \right|$$

valable dans ce cas).

Par ailleurs, on vérifie facilement que lorsque  $\sigma_u$  existe,

$$\sigma_u = \lim_{N \rightarrow \infty} w^* \frac{1}{N} \left| \sum_{n < N} u_n e^{int} \right|^2$$

En utilisant ici la propriété miroir de  $u = \zeta^\infty(0)$ ,

$$u_{[0, 2^{n+1}[} = \zeta^{n+1}(0) = \zeta^n(0) \cdot \zeta^n(1) = \zeta^n(0) \overline{\zeta^n(0)}$$

et

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k < 2^{n+1}} m_k e^{ikt} \right|^2 &= \left| \sum_{k < 2^n} m_k e^{ikt} - \sum_{k < 2^n} m_k e^{i(k+2^n)t} \right|^2 \\ &= |1 - e^{i2^n t}|^2 \left| \sum_{k < 2^n} m_k e^{ikt} \right|^2 \\ &= 4 \sin^2 2^{n-1} t \left| \sum_{k < 2^n} m_k e^{ikt} \right|^2 \\ \Rightarrow \frac{1}{2^{n+1}} \left| \sum_{k < 2^{n+1}} m_k e^{ikt} \right|^2 &= (1 - \cos 2^n t) \frac{1}{2^n} \left| \sum_{k < 2^n} m_k e^{ikt} \right|^2 \end{aligned}$$

et en itérant,

$$\sigma_u = \lim_{n \rightarrow \infty} w^* \prod_{j=0}^n (1 - \cos 2^j t)$$

produit de Riesz construit sur  $\{2^n\}$ , mesure continue singulière. En particulier la suite de Morse n'est pas moyenne-presque périodique.

Rudin-Shapiro - Kamae a calculé sa mesure de corrélation en utilisant la définition arithmétique de  $(r_n)$ . Mais considérons plutôt

$$P_n(t) = \sum_{k < 2^n} r_k e^{ikt} \quad \text{et} \quad Q_n(t)$$

définissant la suite.

$$|P_n(t)|^2 + |Q_n(t)|^2 = 2^{n+1}$$

et

$$|P_{n+1}(t)|^2 - |Q_{n+1}(t)|^2 = 4Re(\bar{\gamma}_n P_n \bar{Q}_n(t)) = 2W_n(t)$$

où

$$\gamma_n(t) = e^{i2^n t}$$

de sorte que

$$|P_{n+1}(t)|^2 = 2^{n+1} + W_n(t).$$

Ici aussi

$$\begin{aligned} \sigma_r\{0\} = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_r &= \lim_{n \rightarrow \infty} w^* \frac{|P_{n+1}(t)|^2}{2^{n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} w^* \left(1 + \frac{W_n(t)}{2^{n+1}}\right). \end{aligned}$$

On va montrer que  $\frac{1}{2^{n+1}} W_n^\wedge(\ell) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ ,  $\ell$  fixé.

Considérons  $\bar{\gamma}_n \bar{Q}_n P_n$  à spectre dans  $] -2^{n+1}, 0[$

$$\begin{aligned} (P_n \bar{\gamma}_n \bar{Q}_n)^\wedge(\ell) &= \sum_{\substack{j+k=\ell \\ j \in [0, 2^n[}} P_n^\wedge(j) (\bar{\gamma}_n \bar{Q}_n)^\wedge(k) \\ &= \sum_{\substack{-2^{n+1}+1 \leq k \leq -2^n \\ \ell-k \in [0, 2^n[}} (\bar{\gamma}_n \bar{Q}_n)^\wedge(k) \cdot P_n^\wedge(\ell-k) \\ &= \sum_{\substack{\ell-2^n < k \leq \ell \\ k \in [1-2^{n+1}, -2^n]}} P_n^\wedge(\ell-k) Q_n^\wedge(k+2^n) \\ &= \begin{cases} \sum_{\ell-2^n < k \leq -2^n} P_n^\wedge(\ell-k) Q_n^\wedge(k+2^n) & \text{si } \ell > -2^n \\ \sum_{-2^{n+1} < k \leq \ell} P_n^\wedge(\ell-k) Q_n^\wedge(k+2^n) & \text{si } \ell < -2^n \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |(P_n \bar{\gamma}_n \bar{Q}_n)^\wedge(\ell)| \leq \begin{cases} |\ell| & \text{si } -2^n \leq \ell < 0 \\ |2^{n+1} - \ell| & \text{si } -2^{n+1} < \ell \leq -2^n \end{cases}$$

Ce qui donne le résultat. (En fait on a exactement

$$W_{n+1}^\wedge(\ell) = W_n^\wedge(\ell) \quad \text{si } |\ell| < 2^{n-1}.$$

Fixons  $-2^{n-1} < \ell < 0$ ;

$$W_n^\wedge(\ell) = \sum_{k=\ell-2^{n+1}+1}^{-2^n} r_{\ell-k} \cdot r'_{|k|-2^n} \quad \text{si } Q_n(t) = \sum_{k < 2^n} r'_k e^{ikt}$$

$$h = \ell - k \in [2^n - |\ell| + 1, 2^n] \quad \text{tandis que } |k| - 2^n \in [0, |\ell|].$$

Sous l'hypothèse  $|\ell| < 2^{n-1}$ ,  $r'_{|k|-2^n} = r_{|k|-2^n}$  par construction de  $Q_n$ , et on trouve

$$\sum_{h=2^n-|\ell|+1}^{2^n} r_h \cdot r_{h+|\ell|-2^n} = W_{n+1}^\wedge(\ell).$$

Il s'ensuit que  $\sigma_r = \lambda$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{T}$ .

### Observations :

1 ) Les deux suites ne sont donc pas moyenne-presque périodiques et d'une certaine façon la suite de Rudin-Shapiro simule le hasard ( $r_{n+k}$  est indépendante de  $r_n$  si  $k \geq 1$  alors que par construction  $r_{n+k}$  dépend de  $r_n$ !). D'où l'idée de construire des Browniens déterministes [33], [34] et [22].

2 ) Sous l'hypothèse que la moyenne est nulle (variables centrées) la mesure de corrélation est pure. La loi de Wintner-Jessen dit qu'un produit de convolution de mesures discrètes sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{T}$ ,  $*\mu_n$ , est soit discrète - soit continue singulière - soit absolument continue. Elle a été améliorée par Brown et Moran (utilisant un résultat difficile de Taylor) qui ont remarqué que la bonne hypothèse - pour assurer la pureté d'une mesure est la D-ergodicité (ergodicité par rapport à groupe dénombrable de translations). La suite de Morse à valeurs  $\pm 1$  est q-multiplicative et la corrélation d'une telle suite est toujours D-ergodique ( $D = gp(\frac{1}{q^n} n \geq 0)$ ).

Ce n'est pas le cas de la suite de Rudin-Shapiro. La D-ergodicité peut tout de même s'expliquer dans ce cas. (Voir paragraphe 7).

A ce stade il est plus simple d'étudier  $\overline{O(u)}$  l'orbite de  $u$  sous le shift unilatéral  $T$ , fermée dans  $A^{\mathbb{N}}$

$$x \in X = \overline{O(u)} \iff x = \lim T^{n_j} u$$

et donc pour  $n, m, x_{[m,n]}$  est un mot de  $u$ .

Sous l'hypothèse de primitivité, il existe une unique mesure invariante sur  $X$ ,  $\mu$ , définie sur les cylindres de  $X$

$$[\alpha_0 \cdots \alpha_k] = \{x \in X \text{ telle que } x_0 = \alpha_0 \cdots x_k = \alpha_k\}$$

par  $\mu[\alpha_0 \cdots \alpha_k] =$  fréquence du mot  $\alpha_0 \cdots \alpha_k$  dans la suite  $u$ . Le fait que  $u$  soit d'entropie nulle entraîne que  $T$  est presque sûrement inversible pour  $\mu$ .

On peut donc prolonger  $u$  à gauche et définir un système  $(X, T)$  avec  $T$  inversible sur  $X$ .

Etudier le système  $(X, \mu, T)$  revient à étudier toutes les suites  $x \in X$  à la fois.

Si  $u$  a une mesure de corrélation discrète, il en est de même de toute suite  $x \in X$  autrement dit, le système est à spectre discret.

Cela signifie aussi qu'il existe une base de  $L^2(X, \mu)$  constituée de fonctions propres pour  $U : f \rightarrow f \circ T$  opérateur unitaire de  $L^2$ .

On connaît des systèmes discrets  $= (\mathbb{T}, R_\alpha, \lambda)$  où  $R_\alpha : x \rightarrow x + \alpha$  car les caractères forment une base de fonctions propres de  $L^2(\mathbb{T})$  pour  $f \rightarrow f \circ R_\alpha$ , de groupe de valeurs propres  $\mathbb{Z}\alpha$ .

Autre exemple :  $\mathbb{Z}_q$  l'ensemble des entiers  $q$ -adiques ( $q \geq 2$ ) qu'on peut identifier à  $\{0 \cdots q-1\}^{\mathbb{N}}$  muni de l'addition à retenue.  $\mathbb{Z}_q$  est un groupe compact additif contenant  $\mathbb{N}$  comme sous-groupe dense. On note  $\tau$  l'application  $\omega \rightarrow \omega+1$  : si  $\omega = (q-1 \cdots q-1, j \cdots)$  où  $j < q-1$ ,  $\tau(\omega) = (0 \cdots 0, j+1, \cdots)$ ;

$(\mathbb{Z}_q, \tau, m)$  où  $m$  est la mesure de Haar de  $\mathbb{Z}_q$ , est un système dynamique ergodique discret appelé odomètre en base  $q$ . (En fait tout système ergodique discret est métriquement isomorphe à une rotation sur un groupe métrique compact).

Le spectre du système - ou de  $\tau$  - est l'ensemble des valeurs propres, c'est-à-dire ici le groupe des rationnels  $q$ -adiques

$$D_q = \left\{ \frac{e^{2\pi i k}}{q^n} \quad k \geq 0 \right\}.$$

Or pour tout système défini par une substitution  $\zeta$  de longueur  $q$ , il y a une projection naturelle sur le facteur discret  $(\mathbb{Z}_q, m, \tau)$ ; si cette projection est un isomorphisme (en mesure) le système  $(X, \mu, T)$  est discret lui-aussi.

PROPOSITION. — L'application  $\varphi$  définie par  $\varphi(T^n u) = n$  est une application uniformément continue de  $O(u)$  sur  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_q$  qui se prolonge en une application continue surjective de  $O(u)$  sur  $\mathbb{Z}_q$ .

Démonstration : Cela résulte de la reconnaissabilité; si  $T^n u$  est assez proche de  $T^m u$  pour que  $u_{[n, n+K]} = u_{[m, m+K]}$  où  $K \geq$  indice de reconnaissabilité de  $\zeta^k$ , alors

$$d_{\mathbb{Z}_q}(n, m) \leq \frac{1}{q^k}$$

(car  $n$  et  $m$  sont simultanément multiples de  $q^k$ ).

Autrement dit, si  $T^{n_j} u$  converge dans  $X$ ,  $n_j$  converge dans  $\mathbb{Z}_q$ .

De plus le diagramme commute :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & X \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \mathbb{Z}_q & \xrightarrow{\tau} & \mathbb{Z}_q \end{array}$$

et  $\varphi \mu = m$ .

Exemple : Considérons la substitution de Toeplitz.

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow 01 \\ 1 \longrightarrow 00 \end{array}$$

$$(*) \quad \begin{cases} |\varphi^{-1}(z)| = 1 & \text{si } z \in \mathbb{Z}_2 \setminus \mathbb{Z} \\ = 2 & \text{si } z \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Comme  $\mathbb{Z}$  est de  $m$ -mesure nulle dans  $\mathbb{Z}_2$ ,  $\varphi$  est inversible en mesure et le système engendré est discret.

On en déduit que la suite 0100010101000100010001100... est moyenne-presque périodique [32].

Revenons sur (\*). Soit  $x \in X$  telle que  $\varphi(x) = 0$ .  $x = \lim T^{n_j} u$  et donc  $x_{[0...]} = u_{[0...]}$  puisque  $n_j = 0 \quad \forall j$ .

Mais il y a 2 façons de prolonger à gauche  $u$  en une suite de  $X$ . Si  $x$  est un tel prolongement,  $x[-m, n]$  est un mot de  $u$ ,  $m, n \geq 0$ . On peut prolonger par  $\lim \zeta^{-2n}(0)$  ou  $\lim \zeta^{-2n-1}(0)$  qui se terminent par 0 ou 1

0  
01  
0100  
01000101  
000100010101000100

Par contre si  $\varphi(x) = \omega$  mot infini de 0, 1, on voit de proche en proche que les composantes  $x_n$  sont uniquement déterminées.

Pour la substitution de morse, tout nombre  $q$ -adique a 2 relèvements.

Dekking a trouvé un critère, ne portant que sur  $\zeta$ , assurant que le système  $(X, \mu, T)$  est discret :

THÉORÈME [16]. —  $(X, \mu, T)$  est discret  $\iff \zeta$  admet une coïncidence, i.e. il existe  $k \geq 1$  et  $j < q^k$  tels que  $\zeta^k(\alpha)_j = \zeta^k(\beta)_j$  pour tous  $\alpha, \beta \in A$ .

### Exemples

1 )  $\zeta$  de Toeplitz.

2 )  $\zeta$  :  $\begin{array}{l} 0 \longrightarrow 11 \\ 1 \longrightarrow 21 \\ 2 \longrightarrow 10 \end{array}$  est discrète puisque  $\zeta^2 \begin{array}{l} 0 \longrightarrow 2121 \\ 1 \longrightarrow 1021 \\ 2 \longrightarrow 2111 \end{array}$  a une coïncidence

Donnons une idée de la démonstration de  $\Leftarrow$  dans le cas de la substitution de Toeplitz. On appelle  $C_n$  le nombre de coïncidences à l'ordre  $n$  entre les blocs  $\zeta^n(0)$  et  $\zeta^n(1)$

$$C_1 = 1, \quad C_{n+1} = C_n + 2^n \quad \text{et en itérant,} \quad C_{n+1} = 2^{n+1} - 1.$$

On va en déduire la presque périodicité de  $u = \zeta^\infty(0)$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ , et  $n$  tel que  $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ . On prend  $E = \{2^n j, j \in \mathbb{Z}\}$  comme ensemble relativement dense associé.

$$\frac{1}{N} \sum_{k < N} |u_k - u_{k+j2^n}| = \frac{1}{N} \sum_{\ell < \frac{N}{2^n}} \sum_{u_k \in \zeta^n(u_\ell)} |u_k - u_{k+j2^n}|$$



car  $u = \zeta^n(u) = \zeta^n(u_0) \cdot \zeta^n(u_1) \cdots \zeta^n(u_\ell) \cdots$

Mais lorsque  $u_k \in \zeta^n(u_\ell), u_{k+j2^n} \in \zeta^n(u_{\ell+j})$  et  $u_k = u_{k+j2^n}$  pour  $C_n$  d'entre eux au moins

$$\implies \frac{1}{N} \sum_{k < N} |u_k - u_{k+j2^n}| \leq \frac{1}{N} \sum_{\ell < \frac{N}{2^n}} 1 < \varepsilon.$$

Le système est par conséquent discret.

COROLLAIRE. — Une substitution dont les instructions sont des bijections de  $A$  sur  $A$  n'est jamais discrète.

### Cas des substitutions de longueur variable

Il n'existe plus, dans ce cas, de résultat analogue à celui de Dekking, lisible sur  $\zeta$ , mais un algorithme pour décider cas par cas [43][50] ou le retour à la méthode utilisée pour la substitution de Toeplitz.

Exemples : 1) Reprenons l'exemple de la substitution sturmienne

$$\begin{aligned} \zeta_1 : 0 &\longrightarrow 001 \\ 1 &\longrightarrow 01 \end{aligned}$$

de matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

avec, pour valeurs propres  $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ .

$$u = \zeta_1^\infty(0) \text{ est aussi la suite } (1_I(n\alpha))_n \text{ où } \alpha = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ et } I = [1 - \alpha, 1).$$

Soit  $X = \overline{O(u)}$ . Si  $x \in X, x = \lim_{k \rightarrow \infty} T^{n_k} u$ ; on vérifie que  $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k \alpha$ , modulo 1 existe (à rapprocher de la proposition).

En effet, supposons que la suite  $(n_k \alpha)$  ne converge pas modulo 1. Il existerait  $\varepsilon > 0, k$  et  $\ell$  arbitrairement grands avec

$$\varepsilon \leq |n_k \alpha - n_\ell \alpha| \leq 1 - \varepsilon \quad (\text{modulo } 1).$$

Soit alors  $m$  tel que  $(j\alpha)_{j \leq m}$  soit  $\varepsilon/2$ -dense. Mais si  $k$  et  $\ell$  sont suffisamment grands,  $(T^{n_k} u)_{[0, m]} = (T^{n_\ell} u)_{[0, m]}$  c'est-à-dire les points  $n_k \alpha + j\alpha$  et  $n_\ell \alpha + j\alpha, 0 \leq j \leq m$ , tombent simultanément dans  $I \pmod{1}$  ce qui est impossible.

Posant alors  $\varphi(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} n_k \alpha \pmod{1}$  si  $T^{n_k} u \rightarrow x$ , on vérifie que :

- $\varphi$  est continue de  $X$  dans  $\mathbb{T}$
- $\varphi \circ T = R_\alpha \circ \varphi$  où  $R_\alpha : x \rightarrow x + \alpha$  dans  $\mathbb{T}$ .
- $\varphi \mu = \lambda$ ,  $\mu$  l'unique mesure invariante sur  $X$ ,  $\lambda$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{T}$
- $\{y \in \mathbb{T} / \text{Card } \varphi^{-1}(y) > 1\}$  est dénombrable.

On prouve ainsi que la substitution  $\zeta_1$  est discrète [43].

2) Considérons :

$$\begin{aligned}\zeta : 0 &\longrightarrow 01010 \\ 1 &\longrightarrow 011\end{aligned}$$

On utilise dans ce cas un résultat de B. Host [30] :

Si  $\zeta$  est primitive sur  $\{0, 1\}$ ,  $\lambda$  est une valeur propre de l'opérateur associé  $\iff \lambda^{|\zeta^n(0)|} \longrightarrow 1$  et  $\lambda^{|\zeta^n(1)|} \longrightarrow 1$ .

Or dans cet exemple, on vérifie par récurrence que :

$$|\zeta^n(0)| = 2 |\zeta^n(1)| - 1$$

C'est vrai en effet pour  $n = 1$ , et

$$\begin{aligned}|\zeta^{n+1}(0)| &= 2 |\zeta^n(1)| + 3 |\zeta^n(0)| \\ &= 2 |\zeta^{n+1}(1)| + |\zeta^n(0)| - 2 |\zeta^n(1)| \\ &= 2 |\zeta^{n+1}(1)| - 1.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que si  $\lambda$  est valeur propre,

$$\lambda^{|\zeta^n(0)|} = \lambda^{2|\zeta^n(1)|-1} \longrightarrow 1 \quad \text{et} \quad \lambda^{-1}$$

soit  $\lambda = 1$ .

$\zeta$  n'est pas discrète, la seule mesure discrète que l'on puisse obtenir étant  $\delta_0$ .

## 7 - MATRICE DE CORRÉLATION

Dans le cas général, le calcul des mesures de corrélation n'a aucune raison de se faire aussi bien que dans les exemples de Morse et Rudin-Shapiro. Mais si l'on note  $\Sigma$  la matrice de mesures de corrélation  $(\sigma_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta \in A}$  apparues en début de paragraphe 6, définies par  $\sigma_{\alpha\beta}^{\wedge}(k) = \lim N^{-1} \text{Card}\{n < N, u_{n+k} = \alpha, u_n = \beta\}$ ,  $\Sigma$  est toujours calculable; elle possède en effet les propriétés suivantes :

a) la symétrie hermitienne soit  ${}^t\bar{\Sigma} = \Sigma$  car  $\sigma_{\alpha\beta}^{\wedge}(-k) = \sigma_{\alpha\beta}^{\wedge}(k)$  est réel.

b)  $\sum_{\alpha,\beta} \sigma_{\alpha\beta} = \delta_0$ .

c)  $\Sigma$  est un produit de Riesz matriciel : à une constante multiplicative près,  $\Sigma$  est la limite  $w^*$  du produit de matrices

$$\frac{1}{q^{n+1}} R^*(e^{it}) R^*(e^{iq^1t}) \cdots R^*(e^{iq^n t}) R(e^{iq^n t}) \cdots R(e^{iq^1t}) R(e^{it})$$

où

$$R(z)_{\alpha\beta} = \begin{cases} z^j & \text{si } \beta \text{ est la } j^{\text{ème}} \text{ lettre de } \zeta(\alpha), \text{ ou } \varphi_j(\alpha) = \beta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Observations : 1) de la limite précédente, on tire seulement

$$\frac{1}{q} R^*(e^{it}) \Sigma' R(e^{it}) = \Sigma$$

où  $\Sigma'$  est constituée des mesures  $\pi(\sigma_{\alpha\beta})$  définies par

$$\begin{aligned} \pi(\sigma_{\alpha\beta})^{\wedge}(k) &= 0 \quad \text{si } q \text{ ne divise pas } k \\ \pi(\sigma_{\alpha\beta})^{\wedge}(qm) &= \sigma_{\alpha\beta}^{\wedge}(m). \end{aligned}$$

2) Si  $\Sigma$  possède la propriété de mélange fort des produits de Riesz sous la forme  $\Sigma^{\wedge}(aq^n + b) \longrightarrow \Sigma^{\wedge}(b)\Sigma^{\wedge}(a)$  avec  $\Sigma^{\wedge}(0)$  inversible, alors  $\Sigma$  est diagonalisable en base scalaire, et sur la diagonale apparaissent de véritables produits de Riesz. C'est le cas pour l'automate de Morse et les automates commutatifs (lorsque les  $\varphi_j$  commutent entre elles).

3) L'intérêt du calcul de  $\Sigma$  est qu'il permet l'étude spectrale de l'opérateur unitaire  $U$  défini sur  $L^2(X, \mu)$  par  $Uf = f \circ T$ ; les invariants spectraux, que sont le type spectral maximal, et la multiplicité spectrale se calculent à l'aide  $\Sigma$ .

Exemples : 1) Morse; on calcule facilement

$$\Sigma = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \delta + \rho & \delta - \rho \\ \delta - \rho & \delta + \rho \end{pmatrix}$$

où  $\rho = \prod_j (1 - \cos 2^j t)$ ,  $\delta = \delta_0$ . On va voir comment on peut déduire de  $\sigma$  des propriétés combinatoires de  $m = \zeta^\infty(0)$ .  $\sigma_{\alpha\beta}^\wedge(1)$  représente la fréquence d'apparition de  $\beta\alpha$  dans la suite  $m = \zeta^\infty(0)$  et  $\sigma_{\alpha\beta}^\wedge(2)$ , la fréquence d'apparition de  $\beta * \alpha$  dans  $m$ . On peut calculer à l'aide de  $\rho$  la fréquence d'apparition des mots de proche en proche. Par exemple

$$\begin{aligned} * \sigma_{11}^\wedge(1) &= \text{fréquence de } 11 \\ &= \frac{1}{4} (\delta + \rho)^\wedge(1) = \frac{1}{4} (1 + \rho^\wedge(1)) \end{aligned}$$

or  $\rho$  vérifie

$$\begin{cases} \rho^\wedge(2n) &= \rho^\wedge(n) \\ \rho^\wedge(2n+1) &= -\frac{1}{2}(\rho^\wedge(n) + \rho^\wedge(n+1)). \end{cases}$$

Faisons  $n = 0$ ; il vient  $2\rho^\wedge(1) = -1 - \rho^\wedge(1)$  et  $\rho^\wedge(1) = -\frac{1}{3} \implies \sigma_{11}^\wedge(1) = \frac{1}{6}$ .

$$\begin{aligned} * \sigma_{00}^\wedge(2) &= \text{fréquence de } 010 \text{ puisque } 000 \text{ n'apparaît pas} \\ &= \frac{1}{4} (\delta + \rho)^\wedge(2) \\ &= \frac{1}{4} (1 + \rho^\wedge(2)) \\ &= \frac{1}{4} (1 + \rho^\wedge(1)) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$* \sigma_{00}^\wedge(3) = \text{fréquence de } 0010, 0100, 0110.$$

Mais  $0110 = \zeta^2(0)$  et sa fréquence est celle de  $11$ ,  $\frac{1}{6}$ . Par ailleurs  $0010$  et  $0100$  ont même fréquence  $f$ . Comme  $\sigma_{00}^\wedge(3) = \frac{1}{4} (1 + \rho^\wedge(3))$  où  $\rho^\wedge(3) = -\frac{1}{2}(\rho^\wedge(1) + \rho^\wedge(2)) = +\frac{1}{3}$ ,  $\sigma_{00}^\wedge(3) = \frac{1}{3}$  et  $f = \frac{1}{12}$ .

Le système associé à l'automate de Morse est l'exemple le plus simple de système à spectre simple (de multiplicité 1) et singulier (avec une partie discrète non réduite à  $\delta_0$ ).

2) Automates bijectifs : (les  $\varphi_j$  sont des bijections de  $A$ ). Lorsque l'automate est commutatif (et nécessairement bijectif à cause de la primitivité), on n'obtient jamais la mesure de Lebesgue mais des produits de Riesz singuliers de la forme

$$\varphi = \prod_n P(q^n t) \quad \text{où} \quad P(t) = \frac{1}{q} \left| \sum_0^{q-1} z_k e^{ikt} \right|^2 \quad \text{et} \quad |z_k| = 1, z_0 = 1.$$

Ainsi pour  $\zeta$  :  $0 \rightarrow 010$  , la matrice  $\Sigma$  est diagonalisable  
 $1 \rightarrow 121$   
 $2 \rightarrow 202$

avec sur la diagonale  $\delta_0, \rho_1, \rho_2$  où

$$\begin{aligned} \rho_1 & \text{ est défini à partir de } & P_1(t) &= \frac{1}{3} |1 + je^{it} + e^{2it}|^2 \\ \rho_2 & & P_2(t) &= \frac{1}{3} |1 + j^2e^{it} + e^{2it}|^2 \end{aligned}$$

Or  $P_1 = P_2$  et  $\rho_1 = \rho_2$ ; cette substitution fournit un exemple de système à spectre singulier, de multiplicité 2.

$$\begin{array}{l} \text{Considérons} \\ \zeta : \end{array} \begin{array}{l} 0 \longrightarrow 0 \ 1 \ 2 \ \cdots \ q-1 \\ 1 \longrightarrow 1 \ 2 \ \cdots \ 0 \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ q-1 \longrightarrow q-1 \ 0 \ \cdots \ q-2 \end{array}$$

$\zeta^\infty(0)$  est la suite ( $Sq(n)$  modulo  $q$ ) où  $Sq(n)$  est la somme des chiffres en base  $q$  et les produits de Riesz de  $\Sigma$  sont

$$\rho_\omega = \prod_n P_\omega(q^n t) \quad \text{où} \quad P_\omega^{(t)} = \frac{1}{q} |1 + \omega e^{it} + \cdots + \omega^{q-1} e^{i(q-1)t}|^2$$

$\omega$  décrivant les racines  $q^e$  de l'unité. Ici encore le spectre est simple et singulier car  $\rho_\omega \perp \rho_{\omega'}$  si  $\omega \neq \omega'$ .

Dans le cas non commutatif, on peut obtenir la mesure de Lebesgue; c'est ce qui se passe

$$\text{avec } \zeta : \begin{array}{l} 0 \longrightarrow 001 \\ 1 \longrightarrow 122 \\ 2 \longrightarrow 210 \end{array} \quad , \quad \text{plus précisément la matrice } \Sigma \text{ a pour expression}$$

$$\frac{1}{9} \begin{pmatrix} \delta + 2\lambda & \delta - \lambda & \delta - \lambda \\ \delta - \lambda & \delta + 2\lambda & \delta - \lambda \\ \delta - \lambda & \delta - \lambda & \delta + 2\lambda \end{pmatrix}$$

et la multiplicité est 2.

2) Rudin-Shapiro et papiers pliés : On a obtenu la suite de Rudin-Shapiro à l'aide

$$\begin{array}{l} \text{de l'automate } \\ a \longrightarrow ab \\ \bar{b} \longrightarrow a\bar{b} \\ b \longrightarrow \bar{a}b \\ \bar{a} \longrightarrow \bar{a}\bar{b} \end{array} \quad (\text{plus simplement } a \rightarrow ab, \quad b \rightarrow a\bar{b})$$

et en projetant  $a, b$  sur 1,  $\bar{a}, \bar{b}$  sur -1.

Si on part de  $a \rightarrow ab, b \rightarrow \bar{a}b$ , la même projection fournit la suite de papiers pliés.

Ces 2 automates engendrent la même matrice  $\Sigma$  (à une permutation près des vecteurs de base), de la forme :

$$\frac{1}{8} \begin{pmatrix} \omega + \lambda & \gamma\omega & \gamma\omega & \omega - \lambda \\ \bar{\gamma}\omega & \omega + \lambda & \omega - \lambda & \bar{\gamma}\omega \\ \bar{\gamma}\omega & \omega - \lambda & \omega + \lambda & \bar{\gamma}\omega \\ \omega - \lambda & \gamma\omega & \gamma\omega & \omega + \lambda \end{pmatrix}$$

où  $\omega = \frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_\pi)$  et  $\gamma(t) = e^{it}$ .

On retrouve en particulier que la suite de Rudin-Shapiro a pour mesure de corrélation la mesure de Lebesgue.

8 - EXTENSION D'ODOMÈTRES

Soit  $(Y, \nu, S)$  un système dynamique.  $G$  un groupe compact abélien,  $m_G$  la mesure de Haar de  $G$  (notée  $m$ ). On se donne  $\varphi : Y \rightarrow G$  mesurable et on définit un nouveau système dynamique  $(Y \times G, m \otimes \nu, S_\varphi)$  où

$$S_\varphi(x, g) = (Sx, g \varphi(x))$$

On vérifie que  $m \otimes \nu$  est  $S_\varphi$ -invariante.

Mais, lorsque  $S$  est  $\nu$ -ergodique,  $S_\varphi$  ne l'est pas forcément pour  $m \otimes \nu$ .

THÉORÈME (Anzaï). —  $S_\varphi$  est ergodique si et seulement si  $\forall \gamma \in \hat{G}, \gamma \neq 1$ , l'équation  $\gamma(f(x)) = \phi(x)\phi(Sx)^{-1}$  n'a pas de solution mesurable (i.e.  $\gamma(f)$  n'est pas un cobord).

L'exemple le plus simple consiste en  $(Y, \nu, S)$  discret et  $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

Même dans ce cas l'étude spectrale est inconnue. C'est à dire que faire une extension par un groupe, aussi simple soit-il, peut tout bouleverser.

Helson et Parry [29] ont montré qu'avec une  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -extension de système discret on peut obtenir une composante de Lebesgue de dimension infinie.

Dans le cas  $G = Y = \mathbb{T}$  et  $Sx = x + \alpha$ , les propriétés de l'extension découlent des propriétés arithmétiques de  $\alpha$  [35].

Un système associé à une substitution de longueur  $q$  est une extension au dessus du facteur discret qu'est l'odomètre en base  $q$ , et dont le nombre de feuillets est  $C(\zeta) = \inf_{n,j,\alpha} \text{Card}$  de lettres distinctes dans  $\zeta^n(\alpha)_j$ . Elle est facile à décrire dans le cas des substitutions commutatives et dans le cas de Rudin-Shapiro.

Exemples : 1) Morse - Le facteur discret est l'odomètre en base 2,  $(\mathbb{Z}_2, m_2, \tau)$  où  $\tau$  est d'addition de 1 avec retenue. De plus  $C(\zeta) = 2$  et donc  $\tau_\varphi : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  est définie par

$$\tau_\varphi(x, \varepsilon) = (x + 1, \varepsilon\varphi(x)). \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

et en itérant  $\tau_\varphi^n(x, \varepsilon) = (x + n, \varepsilon\varphi(x)\varphi(x+1)\cdots\varphi(x+n-1))$  où  $\varphi^{(n)}(x) = \varphi(x)\varphi(x+1)\cdots\varphi(x+n-1)$  est le cocycle de Morse. Il vérifie en effet  $\varphi^{(n+m)}(x) = \varphi^{(n)}(x+m)\varphi^{(m)}(x)$ .

Les 2 systèmes  $(X, \mu, \tau)$  et  $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, m_2 \otimes \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1}), \tau_\varphi)$  sont métriquement isomorphes et en particulier,

$$m_n = (-1)^{S_2(n)} = \pi(\tau_\varphi^n(0, 1)), \quad \text{la seconde composante de } \tau_\varphi^n(0, 1).$$

On vérifie ainsi que  $\varphi(x) = (-1)^{k+1}$  si  $k$  est l'indice du premier 0 dans l'écriture dyadique

de  $x$ , i.e.  $x = \underset{0}{1} \cdots \underset{k-1}{1} 0 x_{k+1} \dots$

En effet,  $\varphi(x) = (-1)^{\sum_i^{(x+1)_i - \sum_i x_i}$  avec  $x+1 = 0 \cdots 0 \underset{k}{1} x_{k+1}, \dots$ , et  $\varphi(0) \cdots \varphi(n-1) = (-1)^{\sum_i^{n_i}} = m_n$ .

2) Rudin-Shapiro : Ici aussi  $C(\zeta) = 2$  et sur  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,

$$\tau_\varphi(x, \varepsilon) = (x+1, \varepsilon \psi(x)).$$

On peut trouver l'expression de  $\psi$  à l'aide de la définition arithmétique de la suite de Rudin-Shapiro.

Ainsi  $\psi(x) = (-1)^{\sum_i^{(x+1)_{i+1}(x+1)_i - \sum_i x_{i+1} x_i}} = (-1)^{\omega(x)}$ .

Or si  $k$  est l'indice du premier 0 dans  $x$ ,  $k \geq 1$ ,

$$\omega(x) = x_{k+1} + \sum_{i \geq k+1} x_i x_{i+1} - (k-1 + \sum_{i \geq k+1} x_i x_{i+1})$$

et  $\psi(x) = \underline{(-1)^{k+1}(-1)^{x_{k+1}}}$  si  $k \neq 0$ ,  $\underline{(-1)^{x_1}}$  si  $k = 0$ .

Notons que  $\psi$  vérifie l'équation  $\psi(2x+1) = \psi(x)\psi(2x)$ , équation qui, alliée à  $\psi(0 x_0 x_1 \cdots) = (-1)^{x_0}$  redonne par récurrence l'expression de  $\psi$ .

L'intérêt de ce point de vue est que le système considéré est plus concret que le système  $(X, \mu, T)$  associé à  $\zeta$ .

De plus, le système engendré par une suite  $q$ -multiplicative c'est-à-dire vérifiant  $u(aq^n + b) = u(aq^n)u(b)$ ,  $b < q$ ,  $q \geq 2$ , est une extension finie d'un facteur discret, également.

On peut expliquer maintenant, la pureté de la mesure de corrélation de la suite de Rudin-Shapiro. Elle résulte du résultat suivant :

PROPOSITION [31]. — soit  $(X, \mu, T)$  une extension par un cocycle  $\varphi$  d'un système ergodique discret, de groupe de valeurs propres  $D$ .

Alors :

a)  $\sigma_m$ , le type spectral maximal de  $(X, \mu, T)$  est quasi-invariant par les translations de  $D$ , plus précisément

$$\sigma_m \sim \sum_{d \in D} 2^{-d} \sigma * \delta_d$$

où  $\hat{\sigma}(n) = \int_Y \varphi^{(n)}(x) d\nu(x)$  si  $(Y, \nu, S)$  est le système discret.



b)  $\sigma$  est  $D$ -ergodique.

Revenons au cas particulier du système de Rudin-Shapiro.

Si  $u_n = \psi^{(n)}(x) \quad x \in \mathbb{Z}_2$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{n < N} u_{n+k} u_n &= \frac{1}{N} \sum_{n < N} \psi^{(n+k)}(x) \psi^{(n)}(x) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n < N} \psi^{(k)}(x+n) \quad \text{par propriété de cocycle} \\ &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{Z}_2} \psi^{(k)}(x) dm(x) = \hat{\sigma}(k) \end{aligned}$$

par unique ergodicité de  $x \rightarrow x + 1$ , sur  $(\mathbb{Z}_2, m)$ .

La mesure de corrélation de  $(r_n) = (\psi^{(n)}(0))$  est  $D$ -ergodique et donc pure.

Il y a plusieurs suites d'entiers associées naturellement à un automate :

- les indices d'apparition d'une ou plusieurs lettres (exemple des carrés, ou des sommes de 3 carrés)
- le nombre d'apparitions d'une lettre dans le mot  $u_{[0,n]}$
- la longueur des mots  $|\zeta^n(\alpha)|$  en longueur variable (Fibonacci).

Toutes ces suites sont reliées entre elles : notons deux résultats de Cobham [12] concernant un q-automate non nécessairement primitif :  $\pi(\alpha, n)$  est le nombre de  $\alpha$  dans  $u_{[0,n]}$ , aux places  $\alpha_j$ .

THÉORÈME 1. — Si  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(\alpha, n)}{\log n} = +\infty$ ,  $\underline{\lim}_{j \rightarrow \infty} (\alpha_{j+1} - \alpha_j) < +\infty$ .

Exemple : La suite des carrés (associée à une substitution de longueur variable) n'est pas q-automatique. En effet,  $x$  étant la suite indicatrice des carrés,  $x$  est telle que

$$\pi(1, n) \sim \sqrt{n} \quad \text{et pourtant} \quad \underline{\lim}_{j \rightarrow \infty} (\alpha_{j+1} - \alpha_j) = +\infty$$

THÉORÈME 2. — Si  $\alpha$  est de fréquence nulle dans  $u$ , alors

$$\sum_{\substack{u_i = \alpha \\ i > 0}} \frac{1}{i}$$

converge.

Etudier leur distribution peut se faire en regardant leur transformée de Fourier au sens

$$\sum_{k < N} e^{2\pi i n_k x}$$

Comme ces suites sont croissantes, on sait que pour presque tout  $x$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k < N} e^{2\pi i n_k x}$$

est nulle.

Démonstration : Considérons  $f_N(x) = \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N^2-1} e^{2\pi i j n_k x}$

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f_N(x)|^2 dx &= \frac{1}{N^4} \sum_{k,\ell} \int_0^1 e^{2\pi i j (n_k - n_\ell) x} dx \\ &= O\left(\frac{1}{N^2}\right). \end{aligned}$$

$$\sum_N \int_0^1 |f_N(x)|^2 dx = \int_0^1 \sum_N |f_N(x)|^2 dx < +\infty \text{ et } f_N(x) \longrightarrow 0 \text{ presque sûrement.}$$

Ensuite on interpole : si  $N^2 \leq M < (N+1)^2$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} \sum_0^{M-1} e^{2\pi i j n_k x} &= \frac{1}{M} \left( \sum_0^{N^2-1} + \sum_{N^2}^{M-1} \right) \\ &= \frac{N^2}{M} \left( \frac{1}{N^2} \sum_0^{N^2-1} \right) + \frac{1}{M} \sum_{N^2}^{M-1} \end{aligned}$$

de sorte que les deux termes  $\xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0$  presque sûrement.

On dit que la suite  $\{n_k x\}$  est équirépartie mod 1 presque sûrement.

Rappel : Une suite de nombre réels  $(u_n)$  est équirépartie modulo 1 si, pour tout  $I$  intervalle de  $\mathbb{T} \sim [0, 1]$ ,

$$\frac{1}{N} \text{Card}\{n < N, u_n \in I \text{ mod } 1\} \longrightarrow \ell(I)$$

et par le critère de Weyl,  $(u_n)$  est équirépartie mod 1.

$\iff$  pour tout  $j \neq 0$ ,

$$\lim \frac{1}{N} \sum_{n < N} e^{2\pi i j u_n} = 0$$

$\iff \forall f \in C[0, 1]$ ,

$$\lim \frac{1}{N} \sum_{n < N} f(u_n) = \int f(t) dt.$$

Ce théorème est le premier théorème ergodique.

Dans le cas particulier des suites  $(n_k x)$  on sait donc que  $(n_k x)$  est équirépartie mod 1 pour presque tout  $x$ , si  $n_k$  est croissante. On sait parfois préciser l'ensemble des  $x$  en question. Ainsi on voit facilement que  $(n x)$  est équirépartie mod 1  $\iff x \notin \mathbb{Q}$ .

Autre exemple :  $(2^k x)$  est équirépartie mod 1  $\iff x$  est normal en base 2.

Le cas des suites d'entiers associées à un automate (ou une substitution de longueur variable) a été étudié par Mauduit [41], [42]. En longueur constante, notant toujours  $\alpha_n$  les indices d'apparition de  $\alpha$  dans  $u$ , il montre que  $(\alpha_n x)$  est équirépartie mod 1 pour  $x \notin \mathbb{Q}$  à condition que  $\log \alpha_n$  croisse moins vite que toute puissance de  $n$  (hypothèse satisfaite si l'automate est primitif). La nécessité de cette condition apparaît avec l'étude de suites telles que  $(2^k x)$ .

Ici encore  $\left( \sum_{n < N} e^{2\pi i \alpha_n x} \right)_\alpha = F(x)$  vérifie une équation fonctionnelle du type équation de Mahler.

Discrépance : Si  $(u_n)$  est équirépartie modulo 1, on considère

$$D_N(I) = \text{Card}\{n < N, u_n \in I(\text{mod } 1)\} - N \ell(I)$$

On sait (Schmidt [57]) que pour toute suite  $u$ , il existe une infinité de  $N$  tels que  $\sup_I D_N(I) > C \log N$ .

Mais  $D_N(I)$  peut être très petit pour certains  $\alpha$  et  $I$  : Considérons  $u_n = n\alpha$  et  $I = [1 - \alpha, 1]$ ,  $0 < \alpha < 1$  irrationnel. On sait qu'alors  $\mathbf{1}_I(n\alpha) = [(n+1)\alpha] - [n\alpha]$  si bien que

$$\begin{aligned} D_N(I) &= \sum_{n < N} \mathbf{1}_I(n\alpha) - N\alpha \\ &= [N\alpha] - N\alpha \end{aligned}$$

et  $|D_N(I)| < 1$ .

(Rappelons que ces suites  $(\mathbf{1}_I(n\alpha))$  sont aussi engendrées par une suite de substitutions).

**DÉFINITION.** — On dit que  $I$  est un intervalle à reste borné pour  $(u_n)$  si  $D_N(I) = O(1)$ .

En 1966 Kesten a établi le résultat conjecturé par Erdős et Szűsz, concernant la suite  $(n\alpha)$ ;  $\alpha \notin \mathbb{Q}$  :

$$D_N(I) = O(1) \iff \ell(I) \in \mathbb{Z}\alpha \pmod{1}.$$

Il utilise pour cela le développement en fraction continue de  $\alpha$ .

L'implication  $\Leftarrow$  était connue depuis Hecke [28]. Si  $\ell(I) \in \mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}$ ;  $|D_N(I)| \leq |h|$  où  $h$  est l'unique entier tel que  $\ell(I) - h\alpha \in \mathbb{Z}$ . (la démonstration découle de l'identité

$$\mathbf{1}_{[a,b[}(x) - (b-a) = \langle x-b \rangle - \langle x-a \rangle.$$

Quelques années plus tard, Shapiro et Furstenberg [27], Petersen [47], indépendamment remarquent que le bon cadre est celui de la théorie ergodique : notons  $R : x \rightarrow x + \alpha$  de  $\mathbb{T}$  dans  $\mathbb{T}$ , et  $f$  la fonction  $\mathbf{1}_I - \ell(I)$ . On voit que :

$$D_N = \sum_{n=0}^{N-1} f \circ R^n(0)$$

est une somme de Birkhoff.

L'hypothèse  $D_N = O(1)$  entraîne  $\| \sum_0^{N-1} f \circ R^n \|_\infty = O(1)$ .

En effet, pour  $x = j\alpha$ ,

$$\left| \sum_0^{N-1} f \circ R^n(j\alpha) \right| = \left| \sum_{k=j}^{j+N-1} f(k\alpha) \right| \leq \left| \sum_0^{N+j-1} \right| + \left| \sum_0^{j-1} \right| = O(1).$$

Comme les  $(j\alpha)$  sont denses et la fonction  $\sum_{n=0}^{N-1} f \circ R^n$  n'a qu'un nombre fini de sauts, on obtient une borne uniforme en  $x$ . A fortiori la norme  $L^2$  est bornée.

On va pouvoir utiliser la théorie spectrale des opérateurs unitaires : notons  $U = U_R$  l'opérateur  $f \rightarrow f \circ R$ , unitaire sur  $L^2(\mathbb{T}, m)$ . Le lemme suivant est classique.

LEMME 1. — Soit  $U$  une isométrie sur un espace de Hilbert  $H$ , et soit  $x \in H$ , alors :

$$\sum_{n=0}^{N-1} U^n x$$

est bornée dans  $H$  si et seulement si  $x$  est un  $U$ -cobord de  $H$ , i.e. il existe  $y \in H$  avec  $x = y - Uy$ .

Démonstration : Ceci reste vrai si  $U$  est une application linéaire continue sur  $X$  dual d'un espace de Banach : on appelle  $K$  l'enveloppe convexe fermée  $\sigma(X, X')$  des sommes

$$S_n(x) = \sum_0^{N-1} U^n(x).$$

On considère l'application affine

$$v = U + x, \quad v(S_n(x)) = x + U(S_n(x)) = S_{n+1}(x) \quad \text{et} \quad v(K) \subset K.$$

Par le théorème de Markov-Kakutani,  $v$  a un point fixe  $y$  et  $y = U(y) + x$ . ◇

Ici on en déduit  $f(x) = g(x + \alpha) - g(x)$  soit

$$e^{2\pi i f(x)} = G(x + \alpha) \overline{G(x)} = e^{2\pi i \ell(I)}$$

Cela signifie que  $G$  est une fonction propre associée à la valeur propre  $e^{2\pi i \ell(I)}$  pour  $U_R$  sur  $L^2(\mathbb{T})$ . Or les valeurs propres de la rotation irrationnelle sur  $L^2$  sont les nombres  $e^{2\pi i m\alpha}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  et  $\ell(I) \in \mathbb{Z}\alpha \bmod 1$ .

Un problème de P. Liardet

Considérons la suite d'entiers  $(S_q(n))_{n \geq 0}$  où  $q$  entier  $\geq 2$  où  $S_q(n)$  est la somme des chiffres en base  $q$ .

Ce n'est pas une suite croissante, mais par la propriété

$$S_q(mq + r) = S_q(m) + r \quad \text{si } r < q$$

on peut montrer que  $(S_q(n)\alpha)$  est équirépartie mod 1 si  $\alpha \notin \mathbb{Q}$ .

Quels sont les intervalles à restes bornés pour  $S_q(n)\alpha \pmod 1$ ?

On ne peut plus utiliser directement le lemme car  $\text{Card}\{n < N, S_q(n)\alpha \in I \pmod 1\}$  ne s'écrit plus comme une somme de Birkhoff sur  $(\mathbb{T}, R, m)$ .

Il faut trouver un autre système dynamique pour lequel ceci est possible. Voici l'idée extraite de [39].

Posons  $u_n = e^{2\pi i S_q(n)\alpha}$ ; ce n'est pas une suite automatique au sens précédent, tout simplement parce que  $u_n$  prend une infinité de valeurs.

Mais la suite  $(u_n)$  est engendrée par un automate compact (ou par une extension d'une rotation de groupe compact). On choisit un alphabet compact, ici  $A = \mathbb{T}$ , et  $q$  instructions  $\varphi_0, \dots, \varphi_{q-1}$  continues de  $A$  dans  $A$ , ici

$$\varphi_j : x \rightarrow x + j\alpha \quad 0 \leq j \leq q-1.$$

A tout  $n = \sum_{j < k} n_j q^j$  on associe  $\Phi_n = \varphi_{n_k} \circ \varphi_{n_{k-1}} \circ \dots \circ \varphi_{n_0}$ . Ainsi  $u_n = \Phi_n(0)$ .

Prenons  $X = \overline{O(u)}$  et  $T$  le shift sur  $X$ . On peut montrer qu'il existe une unique mesure  $\mu$   $T$ -invariante sur  $X$  définie par  $\mu(F) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n < N} F(T^n u)$ ,  $F \in C(X)$ .

De plus, pour tout  $y \in X$ , et  $F$  bornée, continue  $\mu$ -p.p.,

$$\frac{1}{N} \sum_{n < N} F(T^n y) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_X F d\mu$$

Posons alors  $\pi(y) = y_0$  la projection de  $X$  sur  $\mathbb{T}$  et  $F = f \circ \pi$  où  $f = \mathbb{1}_I - \ell(I)$ .

$D_N = \sum_0^{N-1} F(T^n u)$  et  $D_N = O(1)$  entraîne que  $\sum_{n < N} F(T^n y)$  est bornée uniformément sur  $X$ , a fortiori dans  $L^2(X, \mu)$ .

Le lemme 1 donne cette fois

$$F = f \circ \pi = G - G \circ T \quad \text{où } G \in L^2(X, \mu).$$

On en déduit que  $\ell(I)$  est valeur propre de  $U = U_T$  sur  $L^2(X, \mu)$  et donc  $\ell(I)$  est un rationnel  $q$ -adique soit :

$$\ell(I) = \frac{p}{q^r} \pmod{1}.$$

Pour avoir une caractérisation de ces  $I$ , il faut poursuivre avec

LEMME 2. — Si  $U$  est une isométrie sur l'espace de Hilbert  $H$ ,

$$F = G - UG \iff \frac{1}{\sin^2 \pi t} \in L^1(\sigma_F)$$

où  $\sigma_F$  est la mesure spectrale de  $F$  définie par

$$\hat{\sigma}_F(n) = \langle U^n F, F \rangle_H \quad n \geq 0$$

prolongée par  $\hat{\sigma}_F(-n) = \overline{\hat{\sigma}_F(n)}$ .

Démonstration : Il est facile d'établir pour  $F = G - UG$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_F(n) &= 2\hat{\sigma}_G(n) - \hat{\sigma}_G(n-1) - \hat{\sigma}_G(n+1) \\ &= \int (2e^{2\pi i n t} - e^{2\pi i (n-1)t} - e^{2\pi i (n+1)t}) d\sigma_G \\ &= \int e^{2\pi i n t} \cdot 4 \sin^2 \pi t d\sigma_G \end{aligned}$$

i.e.  $\sigma_F = 4 \sin^2 \pi t \cdot \sigma_G$  en particulier  $\sigma_F\{0\} = 0$  et

$$\| \sigma_G \| = \| G \|_{L^2}^2 = \int \frac{d\sigma_F(t)}{4 \sin^2 \pi t}.$$

Réciproquement, supposons  $\frac{1}{\sin^2 \pi t} \in L^1(\sigma_F)$

$$\| F + UF + \dots + U^{n-1}F \|_2^2 = \| \sigma_{F+UF+\dots+U^{n-1}F} \|$$

Or, par l'isométrie  $[U, F] = \overline{\text{ev}}(U^n F, n \geq 0) \iff L^2(\sigma_F)$

$$\sigma_{\varphi(F)} = |\varphi|^2 \sigma_F$$

et

$$\begin{aligned} \sigma_{F+UF+\dots+U^{n-1}F} &= |1 + e^{2\pi i t} + \dots + e^{2\pi i (n-1)t}|^2 \sigma_F \\ &= \left| \frac{e^{2\pi i n t} - 1}{e^{2\pi i t} - 1} \right|^2 \sigma_F \end{aligned}$$

La densité  $\left| \frac{e^{2\pi i n t} - 1}{e^{2\pi i t} - 1} \right|^2$  est  $\leq \frac{1}{\sin^2 \pi t}$ ; elle est donc uniformément bornée en  $n$  par hypothèse, et les sommes  $F + UF + \dots + U^{n-1}F$  sont bornées dans  $L^2$  ce qui donne le résultat via le lemme 1.  $\diamond$

Dans l'exemple qui nous intéresse, par définition de  $\mu$

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_F(k) &= \int F \circ T^k \overline{F} d\mu \\ &= \lim \frac{1}{N} \sum_{n < N} F(T^{n+k}u) \overline{F(u)} \\ &= \lim \frac{1}{N} \sum_{n < N} f(u_{n+k}) \overline{f(u_n)} \\ &= \hat{\sigma}_{f(u)}(k)\end{aligned}$$

Il reste à calculer la mesure de corrélation de la suite  $f(u)$  et décider si  $\frac{1}{\sin^2 \pi t} \in L^1(\sigma_{f(u)})$ . Pour cela décomposons dans  $L^2(\mathbb{T})$ ,

$$f(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} \hat{1}_I(m) e^{2\pi i m t}$$

de sorte que  $\sigma_{f(u)} = \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} |\hat{1}_I(m)|^2 \sigma_{e_m}$  où  $\sigma_{e_m}$  est la mesure de corrélation de la suite  $(e^{2\pi i m \alpha S_q(n)})$ .

Ici apparaissent les produits de Riesz. Si on pose  $z = e^{2\pi i m t}$

$$\sigma_{e_m} = \prod_{n \geq 0} P_z(q^n t) = \rho_z,$$

où  $P_z = \frac{1}{q} |1 + z e^{2\pi i t} + z^2 e^{2\pi i 2t} + \dots + z^{q-1} e^{2\pi i (q-1)t}|^2$

PROPRIETES de  $\rho_z$ . —

a)  $\rho_z$  est invariante pour la transformation  $x \rightarrow qx \text{ mod } 1$

Démonstration : Notons  $\rho = P(t) \cdot \rho_1$  où  $\rho_1 = \prod_{n \geq 1} P(q^n t)$  a pour coefficients de Fourier :

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_1(\ell) &= 0 && \text{si } q \times \ell \\ &= \hat{\rho}\left(\frac{\ell}{q}\right) && \text{sinon.}\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\hat{\rho}(aq + b) &= \sum_{j+\ell=aq+b} \hat{P}(j) \hat{\rho}_1(\ell) \\ &= \hat{P}(b) \hat{\rho}(a) + \hat{P}(b-q) \hat{\rho}(a+1)\end{aligned}$$

car  $sp P \subset ]-q, q[$ , et  $\ell = aq$  ou  $aq + q$ .

En particulier  $\hat{\rho}(aq) = \hat{\rho}(a)$  et  $\rho_1 = \rho * \omega_q$ ,  $\omega_q$  mesure de Haar de  $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ .



b)  $\rho_z$  est D-ergodique où  $D = gp(\frac{1}{q^n})$  i.e.  $\rho(E) = 0$  ou 1 si  $E + d = E$  [50]. Ainsi, par a),  $\rho_z$  est soit discrète (si  $z^{q-1} = 1$ ) soit continue singulière (sinon).

c)  $\rho_z$  est D-quasi-invariante, i.e.  $\rho * \delta_d \sim \rho$  si  $d \in D$ . On note plus généralement  $\rho = P_n \cdot \rho_n = P_n \rho * \omega_{q^n}$ .

Démonstration : Il suffit de vérifier que  $\rho * \delta_d \ll \rho$ . Or si  $\rho$  est continue,  $P_n$  est non-nul  $\rho$ -presque sûrement de sorte que  $\rho_n \ll \rho$  et

$$\rho * \delta_d \ll \rho * \omega_{q^n} = \rho_n \quad \text{pour } n \text{ assez grand}$$

$$\ll \rho$$

Si  $\rho$  est discrète, par D-ergodicité elle est portée par une classe de  $D$  et  $\rho$  est D-quasi-invariante.

LEMME 3. —  $\frac{1}{\sin^2 \pi t} \in L^1(\rho_z) \iff \frac{\sin^2 \pi q \beta}{\sin^2 \pi \beta} < 1 \quad (\beta = m\alpha)$ .

Démonstration : On pose

$$J_k = \int_{1/q^k}^{1/q^{k-1}} \frac{1}{|t|^2} d\rho(t) = \int_{I_k} \frac{1}{|t|^2} d\rho(t)$$

de sorte que

$$\frac{1}{\sin^2 \pi t} \in L^1(\rho) \iff \sum_k J_k < +\infty$$

On va comparer  $J_k$  et  $J_{k+1}$ .

Par a),  $\int h(qt) d\rho(t) = \int h(t) d\rho(t)$  soit

$$\begin{aligned} J_k &= \sum_{j=0}^{q-1} \int_{1/q^{k+1}+j/q}^{1/q^k+j/q} \frac{1}{|qt|^2} d\rho(t) \\ &= \frac{1}{q^2} \sum_{j=0}^{q-1} \int_{I_{k+1}} \frac{1}{|t|^2} d(\rho * \delta_{j/q}) \\ &= \frac{1}{q} \int_{I_{k+1}} \frac{1}{|t|^2} \frac{1}{P(t)} d\rho(t) \quad \text{par c).} \end{aligned}$$

Lorsque  $k$  est grand,  $P(t) \sim P(0)$  sur  $I_{k+1}$  et

$$J_k \sim \frac{1}{q P(0)} J_{k+1}$$

Or

$$\begin{aligned} P(0) &= \frac{1}{q} |1 + z + \dots + z^{q-1}|^2 = \frac{1}{q} \left| \frac{e^{2\pi i q \beta} - 1}{e^{2\pi i \beta} - 1} \right|^2 \\ &= \frac{1}{q} \frac{\sin^2 \pi q \beta}{\sin^2 \pi \beta} \end{aligned}$$

On en déduit  $\frac{J_{k+1}}{J_k} \sim \left(\frac{\sin \pi q \beta}{\sin \pi \beta}\right)^2$  et  $\sum J_k$  converge  $\iff |\sin \pi q \beta| < |\sin \pi \beta|$  car il n'y a jamais égalité ( $\beta \notin \mathbb{Q}$ ).  $\diamond$

Or  $\beta = m\alpha, \alpha \notin \mathbb{Q}$ ; si  $m\alpha$  est proche de 0,  $qm\alpha$  également, la condition du lemme 3 n'est pas satisfaite et  $\int \frac{1}{\sin^2 \pi t} d\sigma_{e_m}$  diverge pour un  $m$  au moins.

Rappelons que  $\sigma_{f(u)} = \sum_{m \neq 0} |\hat{\mathbf{1}}_I(m)|^2 \sigma_{e_m}$  où

$$|\hat{\mathbf{1}}_I(m)| = \left| \frac{\sin \pi m \ell(I)}{\pi m} \right|$$

et  $\ell(I)$  rationnel  $q$ -adique.

Or pour  $\alpha$  irrationnel, on peut trouver une suite  $(m_k), m_k \alpha \rightarrow 0 \pmod{1}$  et  $m_k$  premier avec  $q$ . Ainsi  $\hat{\mathbf{1}}(m) \neq 0$  et  $\int \frac{1}{\sin^2 \pi t} d\sigma_{e_m} = +\infty$  pour un  $m$  au moins;  $I$  n'est pas à restes bornés.

Conclusion : Les seuls intervalles à restes bornés pour  $u$  sont les intervalles de mesure 0 ou 1.

Pour d'autres problèmes et résultats sur les ensembles à restes bornés voir [26], [54].

## RÉFÉRENCES

- [1] ALLOUCHE J.P., COSNARD M. : Itérations de fonctions unimodales et suites engendrées par automates. C.R. Acad. Sc. Paris, 296, (1983).
- [2] ALLOUCHE J.P., MENDES FRANCE M. : Suite de Rudin-Shapiro et modèle d'Ising. Bull. S.M.F. 113, 273-283, (1985).
- [3] ALLOUCHE J.P., MENDES FRANCE M. : Quasi-crystal Ising chain and automata theory. J. Stat. Phys. Vol. 42 (1986).
- [4] ALLOUCHE J.P., PEYRIERE J. : Sur une formule de récurrence sur les traces de produits de matrices associés à certaines substitutions. C.R.Acad. Sc., serie B, t. 302, p. 1135-1136, (1986).
- [5] BERSTEL J. : Sur les mots sans carré définis par un morphisme. Springer Lecture Notes in Computer Science, Vol. 71, p. 19-25, (1979).
- [6] BOMBIERI E., TAYLOR J.E. : Quasicrystals, tilings and algebraic number theory : some preliminary connections. Contemporary Math. Vol. 64, p. 241-264, (1987).
- [7] BRILLHART J., CARLITZ L. : Note on the Rudin-Shapiro polynomials. Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 25, p. 114-118, (1970).
- [8] DE BRUIJN N.G. : Algebraic theory of Penrose's non-periodic tilings of the plane. Indag. Math., 43, p.39-66, (1981).
- [9] CAMION, PIERRE L. : Rapport de D.E.A. Univ. Paris VI - Octobre 1979.
- [10] CHRISTOL G., KAMAE T., MENDES FRANCE M. RAUZY G. : Suites algébriques, automates et substitutions. Bull. S.M.F. 108, 401-419, (1980).
- [11] COBHAM A. : On the base dependence of sets of numbers recognisable by finite automata. Math. Systems theory, Vol. 3, p. 186-192, (1969).
- [12] COBHAM A. : Uniform tag sequences. Math. systems theory, Vol. 6, p. 164-192, (1972).
- [13] CORNFELD J.P., FOMIN S.V., SINAI Y.G. : Ergodic theory. Springer Verlag, (1982).
- [14] COVEN E.M., HEDLUND G.A. : Sequences with minimal block growth. Math. Systems Th. 7, 138-153, (1973).
- [15] DEKKING F.M. : Transcendance du nombre de Thue-Morse. C.R.A.S., Vol. 285, p. 157-160, (1977).

- [16] DEKKING F.M. : The spectrum of dynamical systems arising from substitutions of constant length. *Zeit. Wahr.*, 41, 221-239, (1978).
- [17] DEKKING F.M. : Regularity and irregularity of sequences generated by automata. *Sem. th. nombres Bordeaux exp. n°9*, (1979-1980).
- [18] DEKKING F.M. : Recurrent sets. *Adv. in Math.*, Vol. 44, p. 78-104, (1982).
- [19] DEKKING F.M., MENDES FRANCE M., VAN DER POORTEN A.J. : Folds!, *Math. intelligencer*, Vol. 4, p. 130-138, 173-181, 190-195, (1982).
- [20] DEKKING F.M. : Pentagon tiling. *Nieuw Archief Voor Wiskunde*, Vol. 4, p. 63-69, (1983).
- [21] DEKKING F.M., GRIMMETT G.R. : Superbranching processes and projections of random Cantor sets. *Prob. theory. Rel. fields*, Vol. 78, p. 335-355, (1988).
- [22] DUMONT J.M., THOMAS A. : Systèmes de numération et fonctions fractales relatifs aux substitutions. *Th. comp. Science*, Vol. 65, p. 153-169, (1989).
- [23] DUNEAU M., KATZ A. : Quasiperiodic patterns and icosahedral symmetry. *J. Physique*, Vol. 47, p. 181-196, (1986).
- [24] EILENBERG S. : Automata, languages and machines. Vol. A, Academic press, (1974).
- [25] FERENCZI S. : Systèmes de rang fini. Thèse d'Etat Univ. Aix-Marseille 2 (1990).
- [26] FERENCZI S. : Bounded remainder sets. *Prépublications mathématiques de Marseille*, 90-3.
- [27] FURSTENBERG H., KEYNES M., SHAPIRO L. : Prime flows in topological dynamics. *Israel J. Math.* Vol. 14, p. 26-38, (1973).
- [28] HECKE E. : Analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod. eins. *Abh. Math. Semin. Hamburg Univ.*, p. 54-76, (1922).
- [29] HELSON H., PARRY W. : Cocycles and spectra. *Arkiv för Mat.*, Vol. 16, p. 195-206, (1978).
- [30] HOST B. : Valeurs propres des systèmes dynamiques définis par des substitutions de longueur variable. *Erg. th. et dyn. Sys.* 6, 529-540, (1986).
- [31] HOST B., MELI J.F., PARREAU F. : Non singular transformations and spectral analysis of measures. *Pré-publ. Univ. Paris-Nord*, n°90 - 5, (1990).
- [32] JACOBS K., KEANE M. : 0-1 sequences of Toeplitz type. *Z. Wahrsch. Verw. Geb.*, Vol. 13, p. 123-131, (1969).

- [33] KAMAE T. : A characterization of self-affine functions. Japan J. appl. Math., Vol. 3, p. 271-280, (1986).
- [34] KAMAE T., KEANE M. : A class of deterministic self-affine Processes. (Preprint).
- [35] KATOK A.B., STEPIN A.M. : Approximations in ergodic theory. Russian Math. Surveys 22, 77-102, (1967).
- [36] KEANE M. : Irrational rotations and quasi-ergodic measures. Publ. Sem. math. Rennes, Vol. 1, p. 17-26 (1971).
- [37] KESTEN H. : On a conjecture of Erdős and Szűsz related to uniform distribution mod.1, Acta Arith. 14, p. 26-38, (1973).
- [38] KOLAKOWSKI : Self generating runs. Prob. 5304, Solution : Amer Math. Monthly, Vol. 73, p. 681-682, (1966).
- [39] LIARDET P. : Regularities of distribution. Compositio math., Vol. 61, p. 267-293, (1987).
- [40] LOXTON J.H., Van der POORTEN A.J. : Arithmetic properties of the solutions of a class of functional equations. J. Reine Angew. Math. 330, p. 159-172, (1982).
- [41] MAUDUIT C. : Automates finis et ensembles normaux. Ann. Ins. Fourier 36, 1-25, (1986).
- [42] MAUDUIT C. : Sur l'ensemble normal des substitutions de longueur quelconque. J. Number Theory, Vol. 29, p. 235-250, (1988).
- [43] MICHEL P. : Coincidence values and spectra of substitutions. Zeit. Wahr. 42, 205-227, (1978).
- [44] MORSE M. : Recurrent geodesics on a surface of negative curvature. Trans. A.M.S. 22, 84-100, (1921).
- [45] MOSSE B. : en préparation
- [46] PENROSE R. : Pentaplexity. Math. Intelligencer, Vol. 2, p. 32, (1979).
- [47] PETERSEN K. : On a series of cosecants related to a problem in ergodic theory. Compositio math., Vol. 26, p. 313-317, (1973).
- [48] PEYRIERE J. : Frequency of patterns in Penrose tilings. Prepubl. Univ. Paris-Sud (85, t.31).
- [49] PROUHET E. : Mémoire sur quelques relations entre les puissances des nombres. C.R. Acad. Sci. Paris 33, p. 31, (1851).
- [50] QUEFFELEC M. : Substitution dynamical systems - Spectral analysis. Lecture Note

Series in Math., n°1294, Springer-Verlag, (1987).

[51] RAUZY G. : Nombres normaux et processus déterministes. Acta Arith. Vol. 29, p. 211-225, (1976).

[52] RAUZY G. : Echanges d'intervalles et transformations induites. Acta Arith. Vol. 34, p. 315-328, (1979).

[53] RAUZY G. : Suites à termes dans un alphabet fini. Sémin. théorie des nombres, Bordeaux, exp. 25 (1982-1983).

[54] RAUZY G. : Ensembles à restes bornés. Sémin. théorie des nombres, Bordeaux, exp. 24, p. 1-12 (1983-1984).

[55] RAUZY G. : Structure des systèmes dynamiques définis par substitutions (preprint).

[56] RUDIN W. : Some theorems on Fourier coefficients. Proc. A.M.S. 10, 855-859, (1959).

[57] SCHMIDT W.M. : Irregularities of distribution. Quart. J. Math. Oxford Ser. Vol. 19, p. 181-191, (1968).

[58] SENECHAL M., TAYLOR J.E. : Quasicrystals : the view from Les Houches. Math. Intelligencer, Vol. 12, p. 54-64, (1990).

[59] SHAPIRO H.S. : Extremal problems for polynomials and power series. M.I.T. Master's thesis, Cambridge, Mass., (1951).

[60] STOLARSKY K.B. : Beatty sequences, continued fractions and certain shift operators. Canad. Math. Bull. Vol. 19, p.473-482, (1978).

[61] SZUSZ P. : Über die verteilung der Vielfachen einer komplexen Zahl nach dem Modul des Einheitsquadrates. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 5, p. 35-39, (1954).

[62] THUE A. : Über unendliche zeichenreihen. Selected math. papers, Oslo, (1977).

[63] THURSTON W. : Groups, tilings and finite state automata. Summer 1989, A.M.S. Colloquium lectures (preprint).

[64] WEN Zhi-Ying, Wen Zhi-Xiong : Des remarques sur les suites engendrées par des substitutions composées. Ann. Fac. Sci. Toulouse, Vol. 9, p. 56-65, (1988).

[65] WEN Zhi-Ying : Substitutions, fractals et dimensions. Habilitation Univ. Paris-Sud (1990).

Université de Paris-Nord  
Centre Scientifique et Polytechnique  
Département de Mathématiques  
Avenue Jean-Baptiste Clément  
93430 VILLETANEUSE (France)

## BARKER SEQUENCES AND LITTLEWOOD'S "TWO-SIDED CONJECTURES" ON POLYNOMIALS WITH $\pm 1$ COEFFICIENTS

B. SAFFARI

### 1. Introduction

One purpose of this elementary seminar note is to mention two conjectures going back to the 1960's, both still unproved to the end of 1990, and to give a very simple proof of the (apparently unnoticed) fact that *at least one of them is true*. These two conjectures are :

(A) TURYN'S CONJECTURE (around 1960 ?) : There are only a finite number of binary Barker sequences. (The definition of Barker sequences will be recalled in § 3).

(B) LITTLEWOOD'S TWO-SIDED CONJECTURE (1966) : For infinitely many integers  $n$ , there is a polynomial  $P$  of degree  $n$ , with *all* its coefficients equal to  $\pm 1$ , such that

$$A\sqrt{n+1} \leq |P(e^{it})| \leq B\sqrt{n+1} \quad (\text{on the whole unit circle})$$

where  $A$  and  $B$  are positive *absolute* constants.

This note may also be considered as the embryo of a somewhat expository note, in that we first recall (in § 3) a few facts about Barker sequences ; then, in § 4, we recall the two versions (i.e., strong and weak) of Littlewood's two-sided conjectures ; in § 5 we mention some partial results for the Littlewood conjectures ; in § 6 we prove the theorem mentioned at the beginning of this introduction.

I wish to thank J.-L. Nicolas and A. M. Odlyzko for bibliographical information.

### 2. Terminology

We define the *length*  $L(P)$  of a polynomial  $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$  with complex coefficients by

$$L(P) = \sum_{k=0}^n |a_k|.$$

This follows the standard terminology (of Number Theory). We also set, as usual,

$$\|P\|_2 = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(e^{it})|^2 dt \right)^{1/2} = \left( \sum_{k=0}^n |a_k|^2 \right)^{1/2},$$

and

$$\|P\|_\infty = \max_{0 \leq t < 2\pi} |P(e^{it})|.$$

$P$  is called a *unimodular polynomial* if all its coefficients  $a_k$  have modulus one. Thus, for any unimodular polynomial,

$$\begin{aligned} L(P) = \|P\|_2^2 &= \deg P + 1 = \text{number of terms in } P(z) \\ &= \text{length of the finite sequence } \{a_0, a_1, \dots, a_n\}. \end{aligned}$$

$P$  is called a  $\pm 1$  polynomial if  $a_k = \pm 1$  for all  $k = 0, 1, \dots, n$ .

### 3. Barker sequences

Historically, such sequences arose from telecommunication engineering. Shortly after the publication of Barker's paper [1] in 1953, it became customary to say that a finite sequence  $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  all of whose terms are  $\pm 1$  is a *Barker sequence* if the autocorrelation coefficients

$$(1) \quad c_j = \sum_{k=0}^{n-j} a_k a_{k+j}$$

satisfy

$$|c_j| \leq 1 \text{ for all } j = 1, 2, \dots, n$$

or, equivalently,

$$c_j = \pm 1 \text{ or } 0 \quad (\text{for } j = 1, 2, \dots, n)$$

since here  $c_j$  is an integer for all  $j$ . (The "central" autocorrelation  $c_0$  satisfies, of course,  $c_0 = n + 1 = \text{length of the } \pm 1 \text{ sequence}$ ).

It has been proved by Storer and Turyn [21], and independently by Poliak and Moshetov [16], that there are only five possible *odd* values  $\geq 3$  for the length  $L = n + 1$ , namely  $L = 3, 5, 7, 11, 13$ . As for *even* lengths, there are only two such values of  $L$  which have been discovered so far, namely  $L = 2$  and  $L = 4$ . Turyn has shown that if there is another Barker sequence (necessarily of even length), then  $L$  must be quite large. Turyn's work has been somewhat refined by recent (unpublished) work. There is also overwhelming theoretical evidence (among which D. J. Newman's conjecture for the  $L^1$  norm of  $\pm 1$  polynomials, which I hope to treat in detail elsewhere) for the truth of the following conjecture:



CONJECTURE (Turyn and others) : *There are only a finite number of Barker sequences.*

This conjecture is generally believed to be true, and also its stronger form which asserts that *there are no Barker sequences of even length  $> 4$ .*

The Barker sequences (and their generalizations) have been the object of much research and many publications, both from the communication engineering view-point and the pure mathematics view-point. We shall not attempt here to give a list of those contributions. Instead, we just mention a couple of open problems (conjectures) on “generalized Barker sequences”. A finite sequence  $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  of complex numbers is called a “generalized Barker sequence” if  $|a_k| = 1$  for all  $k = 0, 1, \dots, n$  and if the autocorrelation coefficients

$$c_j = \sum_{k=0}^{n-j} \bar{a}_k \cdot a_{k+j}$$

satisfy

$$|c_j| \leq 1 \text{ for all } j = 1, 2, \dots, n.$$

(Again,  $c_0 = n + 1$  obviously). A generalized Barker sequence all of whose terms are  $d^{\text{th}}$  roots of 1 (for a fixed integer  $d \geq 2$ ) is called a “ $d$ -phase Barker sequence”. In the case  $d = 2$ , the “classical”  $\pm 1$  Barker sequences mentioned at the beginning of this § 3 are naturally referred to as “binary Barker sequences”. (In general, a binary sequence is any sequence taking only two values).

To the best of my knowledge, for no value of the integer  $d \geq 2$  it is known whether there are infinitely many or only a finite number of  $d$ -phase Barker sequences. I am one of those who conjecture that the number of  $d$ -phase Barker sequences is finite (but, of course, depends on  $d$ ).

On the other hand one would conjecture that the set of lengths of all possible generalized Barker sequences is unbounded *if no additional condition whatsoever is imposed*. An additional condition may change things drastically. Thus we have the following result :

**THEOREM.** *If a generalized Barker sequence  $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  is self-inversive, that is, satisfies*

$$(2) \quad a_{n-k} = \bar{a}_k \text{ for all } k = 0, 1, \dots, n$$

*then the length  $n + 1$  cannot exceed 2, (that is, we have  $n = 0$  or  $n = 1$ ).*

This result and some of its generalizations are corollaries of a 1989 theorem due to Fredman, Saffari and Smith [8]. (The paper [8] is in French, because of its appearing in the Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, but I also wrote an English translation of the manuscript). Yet, in contrast to the above result on *self-inverse* generalized Barker sequences, the following problem remains open :

PROBLEM. Do there exist generalized Barker sequences  $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  of arbitrarily large lengths which are *palindromic* (or *symmetric*), i. e. such that

$$(3) \quad a_{n-k} = a_k \quad (\text{for all } k = 0, 1, \dots, n) ?$$

This problem was mentioned to me in 1988 by Dr. Ning Zhang and is due (if my memory is faithful) to Prof. S. W. Golomb (or to S. W. Golomb and R. A. Scholtz). Anyway, despite my pledge not to give in this note any references to work on Barker sequences, I cannot refrain from quoting the very interesting 1965 paper [11] of Golomb and Scholtz.

Let us emphasize that conditions (2) and (3) (i.e. self-inversiveness and symmetry) are, in fact, very different and require different methods of attack.

To finish this § 3, let us return to the *binary* Barker sequences and just mention a few additional facts about such sequences :

FACT 1. If there is any (binary) Barker sequence of length  $L > 13$ , then  $L$  is of the form

$$(4) \quad L = 4s^2 \quad \text{where } s \text{ is some odd integer.}$$

This has been proved in 1965 by Turyn [22] on considering  $(v, k, \lambda)$  cyclic difference sets related to Barker sequences.

FACT 2. The length  $L$  of a (binary) Barker sequence *cannot* be of the form

$$L = 4p^\alpha \quad \text{where } p \text{ is a prime number.}$$

This is due to Richard Turyn, but I cannot find the reference (and unfortunately I did not contact Turyn to ask him). This reference will be given, however, in a forthcoming expository paper [14] by S. Y. R. Li and Ning Zhang.

FACT 3. If there is any (binary) Barker sequence of length  $L > 13$ , then  $L$  is not divisible by any prime  $p \equiv 3 \pmod{4}$ .

This is proved, as a corollary of a much more general result on "Golay complementary sequences", in the 1990 paper [5] by Eliahou, Kervaire and Saffari. A much simpler proof of this same result (again, in the more general context of Golay sequences) will appear in a forthcoming paper [6] of Eliahou, Kervaire and Saffari. I presented an oral exposition of that very nice simple proof of Kervaire in the Harmonic analysis seminar at Orsay [19]. The

previous proof was due to Shalom Eliahou, who improved on weaker results of Kervaire and myself.

The next "Fact" assumes the definition of the monoid of Golay pairs of complementary sequences. For a quite thorough treatment of the subject we refer to [6]. Since "Fact 4" below is unrelated to the analytic problems of § 4, 5 and 6, the reader may ignore "Fact 4" and move to § 4.

**FACT 4.** If there is any binary Barker sequence of length  $L > 13$  (so that  $L = 4s^2$ ,  $s$  odd, by Fact 1), then there exists a Golay pair  $(G_1, G_2)$  of common length  $L/2 = 2s^2$ , and  $(G_1, G_2)$  is necessarily irreducible in the monoid of all Golay pairs.

**COROLLARY** (to Facts 1, 2, 4) :

(A) *If the monoid of all Golay pairs is finitely generated, then there are only a finite number of binary Barker sequences. In fact, if the monoid of all Golay pairs contains only a finite number of (necessarily irreducible) elements whose length is of the form  $2s^2$ , where  $s > 3$  is odd and not a prime power, then there are only a finite number of binary Barker sequences.*

(B) *If the monoid of all Golay pairs has no (necessarily irreducible) element whose length is of the form  $2s^2$ , with  $s \geq 65$ , odd and not a prime power, then there are no binary Barker sequences of length  $> 13$ . (Remark :  $s \geq 65$  implies  $2s^2 \geq 8450$ ).*

**REMARK.** The argument leading to part (B) of this corollary also yields : *If there is any binary sequence of length  $L > 13$ , then necessarily  $L \geq 16900$ . In fact, the sequence of candidates for  $L$  reads : {16 900, 28 900, 84 100, 136 900, 168 100, etc.}.*

#### 4. Littlewood's "two-sided conjectures"

**The weak version :** For infinitely many integers  $n$ , there is some  $\pm 1$  polynomial  $P$  of degree  $n$ , such that

$$A\sqrt{n+1} \leq |P(e^{it})| \leq B\sqrt{n+1} \quad (\text{on the whole unit circle})$$

where  $A$  and  $B$  are positive absolute constants.

**The strong version :** For every integer  $n \geq 2$ , there is some  $\pm 1$  polynomial  $P$  of degree  $n$ , such that

$$C\sqrt{n+1} \leq |P(e^{it})| \leq D\sqrt{n+1} \quad (\text{on the whole unit circle})$$

where  $C$  and  $D$  are positive absolute constants.

Both of these versions are due to Littlewood [15]. There are several reasons for considering the weak version as well as the strong version, among which :

(A) Even the “weak version” remains unsolved to this date (end of 1990).

(B) Quite conceivably the “weak version” might hold true with *better* constants (*A* and *B*) than the respective constants (*C* and *D*) of the “strong version”. One reason for suspecting such a phenomenon is the analogy with the supremum norm conjectures for  $\pm 1$  polynomials on the unit circle. (Cf. the appendix). Thus, if in addition to a proof of Littlewood’s two-sided conjecture(s) we also look for best possible constants, then the distinction between the weak and strong versions might be essential.

(C) Assuming the truth of the weak conjecture, we do obtain some partial information for every  $n \geq 2$ , as shown in our Theorem 1 (in § 5).

### 5. Partial results for Littlewood’s “two-sided conjectures”

There are several such results which deserve to be recalled in a systematic exposition of the subject. In this note we just quote three breakthroughs, due to Körner [13], Kahane [12] and Beck [2].

**KORNER’S THEOREM.** *For all integer  $n \geq 2$ , there is a unimodular polynomial  $P$  of degree  $n$  such that :*

$$C\sqrt{n+1} \leq |P(e^{it})| \leq D\sqrt{n+1} \quad (\text{on the whole unit circle})$$

where *C* and *D* are absolute positive constants.

This theorem of Körner actually proved another conjecture of Littlewood formulated in the same paper [15], which was the analogue of (the strong version of) the two-sided conjecture, but for the class of unimodular polynomials instead of the class of  $\pm 1$  polynomials. For the latter class the problem appears to be much tougher. Körner used a construction of Byrnes [3] and probabilistic ideas. That same year (1979-1980) Kahane [12] substantially refined Körner’s method and proved the following extremely surprising result :

**KAHANE’S THEOREM.** *There is a sequence  $\epsilon_n > 0$  with  $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$ , such that for each integer  $n \geq 2$  there is some unimodular polynomial  $P$  satisfying*

$$(1 - \epsilon_n)\sqrt{n+1} \leq |P(e^{it})| \leq (1 + \epsilon_n)\sqrt{n+1} \quad (\text{on the whole unit circle}).$$

Actually Kahane obtained *quantitative* estimates for  $\epsilon_n$ , both in [12] and afterwards.

A by-product of Kahane's theorem is the disproof of the 1957 conjecture of Erdős on the sup-norm of unimodular polynomials (see Problem 22 in [7]). The Erdős conjecture and some of its variations will be dealt with elsewhere. (See also [8]). I coined the term "Kahane's ultra-flat polynomials" to describe the unimodular polynomials  $P$  of Kahane's theorem. They have some remarkable properties and will be studied elsewhere.

Very recently (May 1990) Beck added more sophisticated ingredients to Kahane's method and obtained [2] :

**BECK'S THEOREM.** *For sufficiently large (integer)  $d$ , say  $d \geq 300$ , and sufficiently large  $n \geq n_0(d)$ , there is a polynomial  $P$  of degree  $n$ , all of whose coefficients are  $d^{\text{th}}$  roots of 1, such that :*

$$C\sqrt{n+1} \leq |P(e^{it})| \leq D\sqrt{n+1} \quad (\text{on the whole unit circle})$$

where  $C$  and  $D$  are absolute positive constants.

The value  $d = 300$  in Beck's theorem can be lowered somewhat, but the theoretical limit to his approach is  $d = 3$ , so the case  $d = 2$  (that is, Littlewood's two-sided conjecture for  $\pm 1$  polynomials) probably requires completely new ideas.

It is worth noting that all of these remarkable three theorems (of Körner, Kahane and Beck) are "ineffective", in that they prove the existence of  $P$  by probabilistic methods without providing explicit constructions of such  $P$ .

For  $\pm 1$  polynomials there are several partial results in the literature, but those pertaining to the lower bound are quite weak (except in [4], but there simultaneous upper bound conditions are not considered). Here is an observation (of myself, unless it is not new) establishing a (very loose) link between the two versions (i.e. weak, resp. strong) of Littlewood's two-sided conjecture :

**THEOREM 1.** *Suppose that the weak form of Littlewood's two-sided conjecture for  $\pm 1$  polynomials is true. Then there is a sequence  $\epsilon_n > 0$  with  $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$  such that for all integers  $n \geq 2$  we can find some  $\pm 1$  polynomial of degree  $n$  satisfying :*

$$(n+1)^{1/2-\epsilon_n} \leq |P(e^{it})| \leq (n+1)^{1/2+\epsilon_n} \quad (\text{on the whole unit circle}).$$

This result is extremely unsatisfactory as far as the upper bound is concerned). (If the lower bound condition is ignored, one has of course the upper bound  $B\sqrt{n+1}$ ,  $B$  = some absolute constant, see the appendix). For this reason I shall not prove Theorem 1 here, but hope to replace it by a sharper result in a new version of this note. Let us nevertheless mention that the proof of (the present form of) Theorem 1 uses largely the method of proof of Theorems 2.4 and 2.5 of the interesting paper [4].

**6. Barker polynomials of length greater than 13 :  
An analytic observation.**

To any Barker sequence  $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  we assign the "Barker polynomial":

$$(5) \quad P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k.$$

We now state and prove the result mentioned at the beginning of the introduction :

**THEOREM 2.** *Either there are only a finite number of binary Barker sequences. Or else, if there is an infinite sequence of binary Barker sequences of respective lengths  $L_1, L_2, \dots, L_p, \dots$ , with  $\lim_{p \rightarrow \infty} L_p = \infty$ , then the corresponding Barker polynomials given by (5) (with of course  $n + 1 = L_p$ ) satisfy:*

$$(6) \quad A_n \sqrt{n+1} \leq |P(e^{it})| \leq B_n \sqrt{n+1} \quad (\text{on the whole unit circle})$$

with

$$(7) \quad \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \sqrt{1 - \theta} = 0.579\dots \\ \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \sqrt{1 + \theta} = 1.289\dots \end{cases}$$

where

$$(8) \quad \theta = \sup_{\alpha > 0} \frac{(1 - \cos \alpha) \sin \alpha}{\alpha} = \sup_{\beta > 0} \frac{2 \cos \beta \sin^3 \beta}{\beta} = 0.6639\dots$$

(6) implies an affirmative answer to the weak form of Littlewood's problem, with constants  $A$  and  $B$  as close as we wish to the two respective numerical values (7).

*Proof of Theorem 2.* It is extremely simple. Let  $P$  be our Barker polynomial given by (5), with  $n$  arbitrarily large. Of course  $n$  is odd, since the length  $L = n + 1$  must be even. Let us recall two facts about  $P$ . The first fact is that (for  $n \geq 3$ )  $L$  is a multiple of 4 :

$$(9) \quad L = 4m.$$

Of course (9) is just a weak form of (4), but for the reader's convenience we shall give here a straightforward (and well known) direct proof of (9). It is as follows : from the definition of Barker sequences we immediately see that the autocorrelation coefficients  $c_j$  satisfy, for even  $L$  (i.e., odd  $n$ ) :

$$(10) \quad \begin{cases} c_j = 0 & \text{for even } j \neq 0 \\ c_j = \pm 1 & \text{for odd } j \quad (j = 1, 3, \dots, n). \end{cases}$$

We only use the top line equalities in (10) (i.e.,  $c_j = 0$  for even  $j \neq 0$ ). On setting  $j = 2\ell$  and on splitting the sum in the right side of (1) as two sums corresponding to even and odd subscripts  $k$ , we can rewrite the top line equalities in (10) as :

$$(11) \quad \sum_{h=0}^{(n-1-2\ell)/2} a_{2h}a_{2h+2\ell} + \sum_{h=0}^{(n-1-2\ell)/2} a_{2h+1}a_{2h+1+2\ell} = 0 \quad (\text{for all } \ell = 0, 1, \dots, \frac{n-1}{2}).$$

(11) means that the two finite  $\pm 1$  sequences  $\{a_0, a_2, \dots, a_{n-1}\}$  and  $\{a_1, a_3, \dots, a_n\}$  of common length  $(n+1)/2$  form a pair of *Golay complementary sequences*. Equivalently, if we write  $P(z)$  as a sum of an even polynomial and an odd polynomial :

$$(12) \quad P(z) = S(z^2) + zT(z^2),$$

then the fact that  $\{a_0, a_2, \dots, a_{n-1}\}$  and  $\{a_1, a_3, \dots, a_n\}$  form a Golay pair of complementary sequences is equivalent to the identity

$$(13) \quad |S(\zeta)|^2 + |T(\zeta)|^2 = n+1 \quad (\text{for all } \zeta \in \mathbf{C} \text{ with } |\zeta| = 1)$$

and also to the identity

$$(14) \quad |P(\zeta)|^2 + |P(-\zeta)|^2 = 2(n+1) \quad (\text{for all } \zeta \in \mathbf{C} \text{ with } |\zeta| = 1).$$

Now it is well known (and easily proved, by Golay himself [10] as early as 1951) that the common length of a pair of Golay complementary sequences is even. Thus  $(n+1)/2$  is even, hence  $n+1 \equiv 0 \pmod{4}$ , hence the desired relation (9).

The second fact we use (Storer and Turyn [21]) is this : with  $n = 4m$ , we have

$$(15) \quad c_{4m-j} = -c_j \quad (\text{for all } j = 1, 2, \dots, 4m-1).$$

Of course  $c_j$  is of interest for odd values of  $j$  only, since here  $c_j = 0$  for even  $j \neq 0$ . (15) easily follows from the definition of the autocorrelations  $c_j$  and by using the following straightforward lemma : If  $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_N\}$  is a  $\pm 1$  sequence of length  $N$ , then

$$(16) \quad \epsilon_1 \epsilon_2 \dots \epsilon_N = (-1)^{(N-S)/2} \quad \text{where } S = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_N.$$

Let us now prove Theorem 2. We have, for all real  $t$ ,

$$(17) \quad |P(e^{it})|^2 = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt}.$$

Here the central autocorrelation coefficient is  $c_0 = n+1 = L = 4m$ , and otherwise  $c_{-k} = c_k$ . Thus, on setting

$$(18) \quad f(t) = |P(e^{it})|^2 - 4m,$$

we have from (17) :

$$\begin{aligned}
f(t) &= 2 \sum_{k=1}^n c_k \cos kt \quad (\text{with } n = 4m - 1) \\
&= 2 \sum_{k=1}^{2m-1} c_k (\cos kt - \cos(4m - k)t) \quad (\text{because of (15)}) \\
&= 2 \sum_{h=1}^m c_{2h-1} (\cos(2h-1)t - \cos(4m - 2h + 1)t) \\
&\quad (\text{because } c_j = 0 \text{ for even } j \neq 0) \\
&= 4 \sum_{h=1}^m c_{2h-1} \sin 2mt \sin(2m - 2h + 1)t \\
&= 4(\sin 2mt) \sum_{h=1}^m c_{2m-2h+1} \sin(2h-1)t.
\end{aligned}$$

We use this to crudely majorize  $|f(t)|$  :

$$|f(t)| \leq 4 |\sin 2mt| \cdot \sum_{h=1}^m |\sin(2h-1)t| \leq 4m\theta_m$$

where

$$\theta_m = \max_{0 \leq t \leq 2\pi} \left( \frac{1}{m} |\sin 2mt| \cdot \sum_{h=1}^m |\sin(2h-1)t| \right).$$

A computation shows that

$$\begin{aligned}
\lim_{m \rightarrow \infty} \theta_m &= \sup_{\alpha > 0} \left( |\sin \alpha| \cdot \int_0^1 |\sin \alpha x| dx \right) \\
&= \sup_{\gamma > 0} \frac{(1 - \cos \gamma) \sin \gamma}{\gamma} \\
&= \sup_{\beta > 0} \frac{2 \cos \beta \sin^3 \beta}{\beta} = 0.6639 \dots
\end{aligned}$$

whence (6) with  $A_n = \sqrt{1 - \theta_m}$ ,  $B_n = \sqrt{1 + \theta_m}$ .

This completes the proof of Theorem 2.

REMARK. By refining the above calculations one can replace the numerical constants of equalities (7) and (8) by better constants.



## 7. Appendix : Upper bound problems for $\pm 1$ polynomials on the unit circle.

Let

$$K_n = \min_P (\|P\|_\infty / \|P\|_2) = \min_P (\|P\|_\infty / \sqrt{n+1})$$

where the minimum is taken over the set of all  $\pm 1$  polynomials  $P$  of given degree  $n$ . There are many interesting (and mostly open) problems on the behaviour of  $K_n$ , among which :  
*What are the exact values of*

$$K^+ = \limsup_{n \rightarrow \infty} K_n \quad \text{and} \quad K^- = \liminf_{n \rightarrow \infty} K_n ?$$

(Trivially  $1 \leq K^- \leq K^+$ ). Since the exact determination of  $K^+$  and  $K^-$  seems exceedingly difficult, as sharp as possible upper bounds and lower bounds for *both* of  $K^+$  and  $K^-$  would be most welcome.

*Lower bound* results are so far quite poor : The *Erdős conjecture* [7] of 1957 for  $\pm 1$  polynomials, that is,

$$(19) \quad K^- > 1$$

is still unsolved, and so is the weaker conjecture

$$(20) \quad K^+ > 1.$$

The *upper bound* results are less disappointing. Shapiro [20] proved in 1951 (via the consideration of the famous "Rudin-Shapiro polynomials", known to Golay [9], [10] in a different form as early as 1949, and rediscovered by Rudin [17] in 1959) that

$$(21) \quad K^- \leq \sqrt{2} \quad \text{and} \quad K^+ \leq 2 + \sqrt{2}.$$

I proved [18] in 1987 that

$$K^+ \leq \sqrt{2},$$

but I no longer believe in my conjecture that  $K^+ = \sqrt{2}$ . There is some evidence that  $K^+ < \sqrt{2}$ .

It is *not* known whether  $K^+ = K^-$ . (If we had  $K^+ \neq K^-$ , the truth of Conjecture (20) would of course follow !). No upper bound better than (21) is known for  $K^-$ . If there were infinitely many Barker sequences (which is very unlikely), then by Theorem 2 of this note we would have  $K^- \leq 1.289 \dots$

These problems on  $K_n$  and related matters on  $\pm 1$  polynomials will be treated in detail elsewhere.

## References

- [1] R. H. BARKER *Group synchronizing of binary digital systems*, in "Communication Theory", pp. 273-287. London, Butterworth, 1953.
- [2] J. BECK "*Flat*" polynomials on the unit circle - on a problem of Littlewood. To appear.
- [3] J. S. BYRNES *On polynomials with coefficients of modulus one*. Bull. London Math. Soc. 9 (1977), 171-176.
- [4] F. W. CAROLL, D. EUSTICE & T. FIGIEL *The minimum modulus of polynomials with coefficients of modulus one*. J. London Math. Soc. 16 (1977), 76-82.
- [5] S. ELIAHOU, M. KERVAIRE & B. SAFFARI *A new restriction on the lengths of Golay complementary sequences*. J. Combinatorial Theory, series A, 55 (1990), 49-59.
- [6] S. ELIAHOU, M. KERVAIRE & B. SAFFARI *On Golay polynomial pairs*. Advances Appl. Math. (to appear, probably in 1991).
- [7] P. ERDOS *Some unsolved problems*. Michigan Math. J. 4 (1957), 291-300.
- [8] M. L. FREDMAN, B. SAFFARI & B. SMITH *Polynômes réciproques : conjecture d'Erdős en norme  $L^4$ , taille des autocorrélations et inexistence des suites de Barker*. C. R. Acad. Sc. Paris 308 (1989), 461-464.
- [9] M. J. E. GOLAY *Multislit spectrometry*. J. Opt. Soc. America 39 (1949), 437-444.
- [10] M. J. E. GOLAY *Static multislit spectrometry and its application to the panoramic display of infrared spectra*. J. Opt. Soc. America 41 (1951), 468-472.
- [11] S. W. GOLOMB & R. A. SCHOLTZ *Generalized Barker sequences*. IEEE Trans. Information Theory, IT-11 (1965), 533-537.
- [12] J.-P. KAHANE *Sur les polynômes à coefficients unimodulaires*. Bull. London Math. Soc. 12 (1980), 321-342.
- [13] T. KORNER *On a polynomial of J. S. Byrnes*. Bull. London Math. Soc. 12 (1980), 219-224.
- [14] S. Y. R. LI & NING ZHANG *Expository paper on Barker sequences* (in preparation).

- [15] J. E. LITTLEWOOD *On polynomials  $\sum \pm z^m$ ,  $\sum \exp(\alpha_m i) z^m$ ,  $z = e^{\theta i}$* . J. London Math. Soc. 41 (1966), 367-376.
- [16] И. В. ПОЛЯК & Р. В. МОШЕТОВ *Scientific transactions of the Radio-Engineering Institute of the Acad. Sci. USSR* 1, 124-159.
- [17] W. RUDIN *Some theorems on Fourier coefficients*. Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), 855-859.
- [18] B. SAFFARI *Structure algébrique sur les couples de Rudin-Shapiro. Problème extrémal de Salem sur les polynômes à coefficients  $\pm 1$* . C. R. Acad. Sc. Paris 304 (1987), 127-130.
- [19] B. SAFFARI *Analytic problems related to Golay sequences and Rudin-Shapiro polynomials*. Sémin. Anal. Harm. Orsay, 1989.
- [20] H. S. SHAPIRO *Extremal problems for polynomials and power series*. M. S. Thesis, MIT, 1951.
- [21] J. STORER & R. TURYN *On binary sequences*. Proc. Amer. Math. Soc. 12 (1961), 394-399.
- [22] R. TURYN *Character sums and difference sets*. Pacific J. Math. 15 (1965), 319-346.

CNRS UA D0757  
 Université de Paris-Sud  
 Mathématiques (Bât. 425)  
 91405 ORSAY CEDEX (France)

UN THEOREME DE  
DULAC-ECALLE-IL'AYSHENKO-MARTINET-MOUSSU-RAMIS  
ETENDU AUX FONCTIONS QUASIANALYTIQUES

A. L. VOLBERG

1. Introduction

Nous considérons ici un système d'équations différentielles

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(x, y) \\ \dot{y} &= \beta(x, y) \end{aligned} \right\} (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (1.1)$$

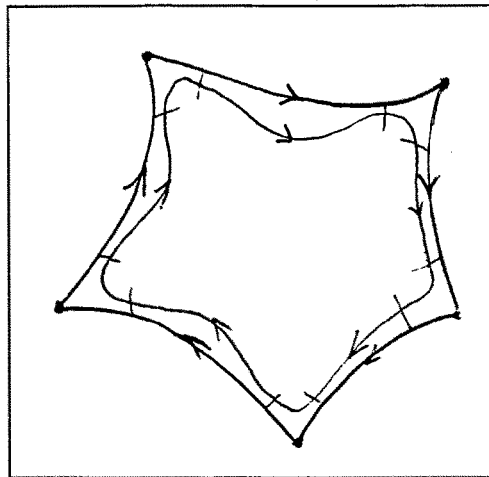
où  $\alpha, \beta$  sont des fonctions réelles et appartiennent à une classe de Carleman  $C\{M_n\}$  très lisse, c'est-à-dire très proche de la classe analytique (on précisera cette notion plus loin). Nous supposons que ce système n'a que des singularités très simples, c'est-à-dire que toutes les singularités sont non dégénérées.

Notre but est de démontrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de cycles limites pour ce système dans toute partie bornée de  $\mathbb{R}^2$ .

Rappelons qu'une caractéristique est une courbe intégrale réelle définie par un système (1.1). Une caractéristique fermée sera dite cycle. S'il n'y a pas d'autres cycles dans un voisinage d'un cycle donné on l'appelle un cycle limite. Une union connexe finie de points singuliers et de caractéristiques qui vont d'un point à un autre sera dite polycycle. Sur la notion de transformation de monodromie d'un cycle, voir par exemple [1].

La transformation de monodromie d'un polycycle peut être définie pareillement en utilisant une demie-transversale au lieu d'une transversale (voir le dessin). Mais nous voulons avertir le lecteur qu'il y a des polycycles qui n'admettent pas de transformation

de monodromie.



Dessin1

Lorsque, dans la suite, on parlera de polycycle, on supposera toujours qu'il admet une transformation de monodromie.

Etant donné une suite  $\{M_n\}$ , on définit la classe de Carleman sur  $\mathbb{R}^2$  par :  $C\{M_n\} = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^2) : \exists B_f, C_f < \infty : |f^{(n)}(x)| \leq B_f C_f^{|n|} M_{|n|}\}$ . Nous ne considérons que

les classes de Carleman régulières, c'est-à-dire telles que la suite  $m_n = \frac{M_n}{n!}$  possède les propriétés suivantes :

- 1)  $m_n^2 \leq m_{n-1} m_{n+1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ;
- 2)  $\sup \left( \frac{m_{n+1}}{m_n} \right)^{1/n} < \infty$  ;
- 3)  $\lim m_n^{1/n} = \infty$ .

Les propriétés des classes de Carleman régulières s'expriment adéquatement au moyen d'un poids

$$w(x) = w_{\{M_n\}}(x) = \inf_n x^n \frac{M_n}{n!}$$

associé à  $\{M_n\}$ . Par exemple,  $C\{M_n\}$  est une classe quasianalytique si et seulement si [2]

$$\int_0^1 \log \log \frac{1}{w(x)} dx = \infty.$$

Dans le cas  $M_n = n!$  on a  $w(x) \equiv 0$  et  $C\{n!\}$  est la classe de toutes les fonctions analytiques sur  $\mathbb{R}^2$ . Il est assez naturel de généraliser un théorème de Dulac-Ecalle-Il'yashenko-Martinet-Moussu-Ramis (DEIMMR) [3], [6] qui vaut pour les champs analytiques au cas des champs quasianalytiques.

Nous présentons ici un théorème de cette sorte où il s'agit de champs très lisses n'ayant que des points singuliers non-dégénérés. Cela généralise le résultat de [4]. Pour la démonstration nous nous inspirons de l'article d'Il'yashenko [4]. Les fonctions presque

analytiques [7] [8] interviennent assez naturellement et on doit les traiter comme dans [7], [10].

**THEOREME 1.** *Soient des fonctions  $\alpha, \beta$  très lisses, c'est-à-dire que  $\alpha, \beta$  appartiennent à  $C\{M_n\}$  avec un poids associé assez petit :*

$$w(x) \leq \exp(-\exp \frac{1}{x^{16}}).$$

*Alors tout polycycle du champ (1.1) admet un voisinage sans cycle limite.*

**THEOREME 2.** *Soient  $\alpha, \beta$  des fonctions comme au Théorème 1. Alors dans toute partie bornée de  $\mathbb{R}^2$  le champ (1.1) n'a qu'un nombre fini de cycles limites.*

## 2. Résultats complémentaires

Bien que le mémoire de Dulac [1] soit consacré à des champs analytiques, le résultat principal est vrai pour tous les champs  $C^\infty$  et peut être formulé comme suit.

**THEOREME (Dulac).** *S'il y a une suite de cycles limites convergeant vers un polycycle d'un champ  $C^\infty$  n'ayant que des points singuliers de multiplicité finie, alors la transformation de monodromie est l'identité plus un reste plat.*

On déduit le Théorème 2 du Théorème 1 comme dans [4]. On peut se borner à considérer des polycycles ayant une transformation de monodromie [4]. Comme tous les points singuliers sont non-dégénérés le polycycle ne contient que des points-selles.

## 3. Idée de la preuve du Théorème 1

Soit  $m$  la transformation de monodromie. Le théorème de Dulac affirme que

$$|m(x) - x| = o(x^n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

Si nous pouvions prolonger la fonction (3.1)  $\xi \rightarrow m(e^{-\xi})$  depuis l'axe  $\mathbb{R}_+$  en une fonction holomorphe dans une région qui coïncide presque avec le demi-plan droit, nous pourrions

conclure que  $\mu(\xi) = m(e^{-\xi}) - e^{-\xi} \equiv 0$  à l'aide du principe de Phragmén-Lindelöf. C'est

ce qu'Il'yashenko a fait dans [4]. Cependant le cas quasianalytique ne nous permet pas de le faire. Mais il se trouve qu'on peut prolonger  $\mu$  en une fonction dont la  $\bar{\partial}$ -dérivée décroît très vite quand on s'éloigne vers l'infini. L'application d'une version presque analytique du principe de Phragmén-Lindelöf achèvera la démonstration.

#### 4. Localisation

Nous répèterons mot à mot les raisonnements de la section 2.6 de [4]. Soit  $C$  un polycycle (admettant une transformation de monodromie) dont tous les sommets sont des selles. Soit  $\Gamma$  une demie-transversale analytique de ce cycle et soit  $\delta_{c,\Gamma}$  la transformation de monodromie,  $\delta_{c,\Gamma} : \Gamma \rightarrow \Gamma$ . Comme tous les champs envisagés sont très lisses,  $\delta_{c,\Gamma}$  est la composition des lois de correspondance (pour toutes les selles) et des applications très lisses (voir le dessin 1).

Numérotions les secteurs hyperboliques des selles selon l'ordre naturel de parcours. Soient  $\Gamma_j, \Gamma'_j$  deux demie-transversales analytiques telles que les caractéristiques atteignent le  $j$ -ième secteur à travers  $\Gamma_j$  et le quittent à travers  $\Gamma'_j$ . L'application

$$\delta_j : \Gamma_j \rightarrow \Gamma_j$$

est appelée loi de correspondance. Soit

$$f_j : \Gamma'_j \rightarrow \Gamma_{j+1}$$

l'application de transport le long des caractéristiques. On peut la prolonger (sans violer la lissitude) des demie-transversales aux transversales. On peut choisir  $\Gamma_1 = \Gamma$  et écrire

$$\delta_{c,\Gamma} = f_n \circ \delta_n \circ \dots \circ f_1 \circ \delta_1. \quad (4.1)$$

Fixons sur toutes les  $\Gamma_j, \Gamma'_j$  des coordonnées locales à valeurs dans  $(0, \epsilon]$ . Faisons le changement de variables :  $e(\xi) = e^{-\xi}$ ,  $\xi \geq \log \frac{1}{\epsilon}$ . Puis posons :

$$\Delta_i = e^{-1} \circ \delta_i \circ e, \quad F_i = e^{-1} \circ f_i \circ e.$$

Alors (4.1) devient

$$\stackrel{\text{def}}{\Delta_{c,\Gamma}} = e^{-1} \circ \delta_{c,\Gamma} \circ e = F_n \circ \Delta_n \circ \dots \circ F_1 \circ \Delta_1. \quad (4.2)$$

Il est avantageux d'analyser  $\Delta_j$  pour des systèmes réduits à des formes spéciales. Et on peut réduire un système à une telle forme à l'aide d'un changement de coordonnées appartenant à la même classe de Carleman que les fonctions de la partie droite du système (1.1).

La proposition suivante est exactement analogue à la proposition qui se trouve aux pages 68-77 du mémoire de Dulac.

LEMME 4.1. Soit (1.1) un champ qui appartient à une classe  $C\{M_n\}$  régulière ayant un point-selle singulier en l'origine avec  $-\lambda < 0$  comme nombre caractéristique. Alors il existe un changement des coordonnées locales de la même classe  $C\{M_n\}$  qui réduit la système donné à un système

$$\begin{cases} \dot{z} = z \\ \dot{\omega} = -\omega(\lambda + z^n \omega f(z, \omega)), \quad f \in C\{M_n\} \end{cases} \quad (4.3)$$

où  $n \geq \lambda$ .

Grâce à ce lemme on peut considérer toutes les lois de correspondance dans (4.2) comme des lois de correspondance de systèmes du type (4.3).

### 5. Prolongement des lois de correspondance à une région qui est presque le demi-plan droit.

Soit

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{u} = -u(\lambda + x^n u f(x, u)) \end{cases} \quad (5.1)$$

un système avec  $n \geq \lambda$ . On peut supposer (par un changement d'échelle), que

$$\max_{|x| \leq 1, |u| \leq 1} |f(x, u)| \leq \min\left(\frac{\lambda}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

Nous allons considérer le cas  $\lambda > 1$ . L'autre cas est absolument analogue.

.1. On peut prolonger (voir E. M. Dyn'kin [11]) la fonction  $f(x, u)$  en une fonction  $f(z, \omega)$  de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{C}^2$  telle que

$$|D\bar{\partial}_z f(z, \omega)| + |D\bar{\partial}_\omega f(z, \omega)| \leq W(C_f \max(|\operatorname{Im} z|, |\operatorname{Im} \omega|)). \quad (5.2)$$

Réciproquement  $f(x, u)$  peut être reconstruire à partir de  $f(z, \omega)$  à l'aide de la formule de Martinelli-Bochner, voir par exemple [12], [13].

Autour d'un point  $\zeta = \xi + i\eta$  dans le demi-plan droit, fixons un voisinage

$$\text{def } G_\zeta = \{(z, \omega) : |z| < 2, |\omega| < 2, |\operatorname{Im} z| < e^{-\frac{\zeta}{4}}, |\operatorname{Im} \omega| \leq e^{-\frac{\zeta}{4}}\}$$



def  
du carré  $\mathbb{Q} = \{(x, u) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |u| \leq 1\}$ .

La formule de Martinelli-Bochner dont nous venons de parler montre immédiatement qu'il y a une fonction  $f_\zeta$  holomorphe sur  $G_\zeta$  et telle que :

$$|f - f_\zeta| \leq B_f \omega(C_f |e^{-\zeta/4}|) \text{ sur } G_\zeta. \quad (5.3)$$

A partir du système

$$\begin{cases} \dot{z} = z \\ \dot{\omega} = -\omega(\lambda + z^n \bar{\omega} f_\zeta(z, \omega)) \end{cases} \quad (5.1_C)$$

On peut considérer trois systèmes complexes avec un temps réel. Ecrivons ces systèmes (la quantité  $\eta(\xi)$  figurant dans le deuxième système sera définie plus loin).

$$\begin{cases} \dot{z}_I = z_I \\ \dot{\omega}_I = -\omega_I(\lambda + z_I^n \bar{\omega}_I f_\zeta(z_I, \omega_I)) \\ z_I(0) = e^{-\zeta}, \omega_I(0) = 1, \\ 0 \leq t \leq \frac{\xi}{2} \end{cases} \quad (5.1_{C,I})$$

$$\begin{cases} \dot{z}_{II} = iz_{II} \\ \dot{\omega}_{II} = -\omega_{II}(\lambda + z_{II}^n \bar{\omega}_{II} f_\zeta(z_{II}, \omega_{II})) \\ z_{II}(0) = e^{-\zeta} e^{\xi/2}, \omega_{II}(0) = \omega_I(\frac{\xi}{2}) \\ 0 \leq t \leq \eta \leq \eta(\xi) \end{cases} \quad (5.1_{C,II})$$

$$\begin{cases} \dot{z}_{III} = z_{III} \\ \dot{\omega}_{III} = -\omega_{III}(\lambda + z_{III}^n \bar{\omega}_{III} f_\zeta(z_{III}, \omega_{III})) \\ z_{III}(0) = z_{II}(\eta) = e^{-\xi/2}, \omega_{III}(0) = \omega_{II}(\eta) \\ 0 \leq t \leq \frac{\xi}{2} \end{cases} \quad (5.1_{C,III})$$

Alors

$$z_{III}(\xi/2) = 1$$

et pour  $\zeta = \xi + i\eta$  avec  $|\eta| \leq \eta(\xi)$  la fonction

$$\text{def} \\ \ell(\zeta) = \omega_{III}(\xi/2)$$

sera le prolongement de la loi de correspondance que nous cherchons. Ce que nous devons démontrer en premier, c'est que les points  $(z_I, \omega_I)$ ,  $(z_{II}, \omega_{II})$ ,  $(z_{III}, \omega_{III})$  ne quittent pas  $G_\zeta$ . Cela dépend bien sûr de la taille de  $\eta(\xi)$ . Nous allons voir que  $\eta(\xi) = e^{-\frac{\lambda}{3}\xi}$  convient.

On pose

$$z(s) = \begin{cases} z_I(s), & 0 \leq s \leq \xi/2 \\ z_{II}(s - \frac{\xi}{2}), & \frac{\xi}{2} \leq s \leq \frac{\xi}{2} + \eta \\ z_{III}(s - \frac{\xi}{2} - \eta), & \frac{\xi}{2} + \eta \leq s \leq \xi + \eta, \end{cases}$$

$$\omega(s) = \begin{cases} \dots \\ \dots \\ \dots \end{cases}$$

Les fonctions  $z, \omega$  seront continues si les points  $(z_i, \omega_i)$ ,  $i = I, II, III$ , ne quittent pas  $G_\zeta$ .

Le raisonnement qui suit est emprunté à Il'yashenko [4]. On pose

$$u(s) = \lambda \log z(s) + \log \omega(s), \quad 0 \leq s \leq \xi + \eta.$$

Alors ( $\gamma = i$  ou 1)

$$|\dot{u}| = \left| \lambda \frac{\dot{z}}{z} + \frac{\dot{\omega}}{\omega} \right| = |\gamma\lambda - \gamma(\lambda + z^n \omega f_\zeta(z, \omega))| \leq |z^n \omega| \leq |z^\lambda \omega| = |e^u|. \quad (5.4)$$

La dernière inégalité découle de l'inégalité  $n \geq \lambda$  (voir le lemme 4.1).

def

Si  $v(s) = |u(s) - u(0)|$  on déduit de (5.4) que

$$|\dot{v}(s)| \leq |\dot{u}| \leq |e^u| = e^{Re u} \leq e^{Re u(0) + |u - u(0)|} \leq e^{-\lambda \xi} e^v.$$

C'est-à-dire :

$$ds \geq e^{\lambda \xi} e^{-v} dv.$$

Alors

$$\int_0^{v(\xi+\eta)} e^{-r} dr \leq e^{-\lambda \xi} (\xi + \eta(\xi))$$

et le choix  $\eta(\xi) = e^{-\frac{\lambda}{3}\xi}$  donne

$$v(s) \leq 6e^{-\frac{2}{3}\lambda \xi} \leq e^{-\frac{\lambda}{2}\xi}, \quad 0 \leq s \leq \xi + \eta \leq \xi + \eta(\xi), \quad \xi \geq \xi_\lambda. \quad (5.5)$$

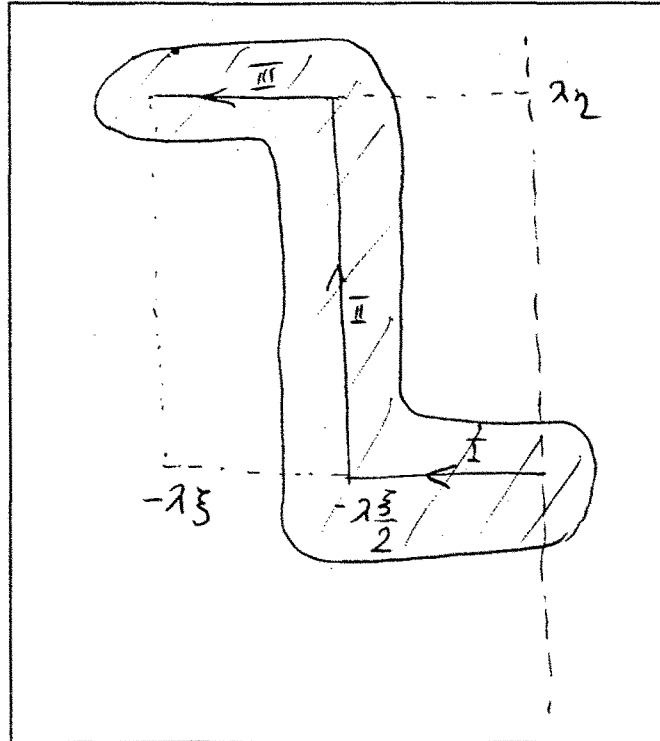
Cela signifie que

$$\left| \lambda \log \frac{z(0)}{z(s)} - \log \frac{\omega(s)}{\omega(0)} \right| \leq e^{-\frac{\lambda}{2}\xi}, \quad 0 \leq s \leq \xi + \eta, \quad \eta \leq \eta(\xi). \quad (5.6)$$

Reportons-nous au dessin 2 où  $\lambda \log \frac{z(0)}{z(s)}$  parcourt les flèches I, II, III et  $\log \omega(s)$  se trouve dans la région hachurée qui est un  $e^{-\frac{\lambda}{2}\xi}$ -voisinage des flèches. Donc

$$|\omega_{II}(s)| \leq 2e^{-\frac{\lambda}{2}\xi} \quad , \quad |\omega_{III}(s)| \leq 2e^{-\frac{\lambda}{2}\xi}$$

$$|\sin \omega_I(s)| \leq |\omega(s)| \cdot \sin e^{-\frac{\lambda}{2}\xi} \leq 2e^{-\frac{\lambda}{2}\xi}.$$



Dessin 2

Nous devons encore vérifier une inégalité  $|\omega(s)| \leq 1$ . L'astuce consiste ici (voir Il'yachenko [4]) à calculer  $(|\omega|^2)$  :

$$\left(\frac{1}{2} |\omega|^2\right)' = -|\omega|^2 \operatorname{Re}(\lambda - z^n \omega f_s(z, \omega)) < 0.$$

Ainsi, la loi de correspondance pour le système (5.1<sub>R</sub>) vient d'être prolongée à une région

$$\text{def} \quad \Pi_\lambda = \{\zeta = \xi + i\eta : \xi \geq \zeta_\lambda, |\eta| \leq \eta(\xi) = e^{-\frac{\lambda}{2}\xi}\}.$$

## 6. Estimation de la $\bar{\partial}$ -dérivée du prolongement

Fixons un point  $\tau$  dans  $\prod_\lambda$  et considérons les systèmes (5.3<sub>C,I</sub>), (5.3<sub>C,II</sub>), (5.3<sub>C,III</sub>) avec  $f_\tau$  à la place de  $f_\xi$  et avec les données initiales

$$z^\tau(0) = e^{-\tau} \quad , \quad \omega^\tau(0) = 1$$

où

$$\stackrel{\text{def}}{\zeta \in \mathcal{D}_\tau} = \left\{ \zeta : |e^{-\zeta} - e^{-\tau}| < \frac{1}{2} |e^{-\tau}| \right\}.$$

Les temps dans les systèmes parcourent les intervalles  $0 \leq t \leq \frac{\text{Re } \zeta}{2}$ ,  $0 \leq t \leq \text{Im } \zeta$ ,  $0 \leq t \leq \frac{\text{Re } \zeta}{2}$ . Nous obtenons une fonction

$$L^\tau(\zeta) = \omega_{III}^\tau\left(\frac{\text{Re } \zeta}{2}\right)$$

holomorphe dans  $\mathcal{D}_\tau$ .

En effet, on peut démontrer, suivant la démarche du § 5 que les points  $(z_I^\tau, \omega_I^\tau)$ ,  $(z_{II}^\tau, \omega_{II}^\tau)$ ,  $(z_{III}^\tau, \omega_{III}^\tau)$  ne quittent pas  $G_\tau$  si  $\zeta \in \mathcal{D}_\tau$ ,  $z_I^\tau(0) = e^{-\tau}$ ,  $\omega_I^\tau(0) = 1$ . Mais on peut considérer le système (5.1<sub>C</sub>) (avec  $f_\tau$  à la place de  $f_\zeta$ ) comme un système à temps complexe. La dépendance analytique des solutions par rapport aux données initiales est donc manifeste. Utilisant les notions du § 5 nous obtenons

$$\left. \begin{aligned} |(\omega^\tau(s) - \omega(s)) \cdot | &= | \gamma(\lambda(\omega(s) - \omega^\tau(s)) + (z(s)^n \omega(s) f_\zeta(z(s), \omega(s)) \\ &\quad - z(s)^n \omega^\tau(s) f_\tau(z(s), \omega^\tau(s)) | \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

où  $\gamma = 1$  sur la première ou la troisième partie du chemin et  $\gamma = i$  sur la deuxième.

On déduit de (5.3) et (6.1) que

$$|(\omega_\tau - \omega) \cdot | \leq C_1 |\omega^\tau - \omega| + Bw(C_2 |e^{-\zeta/4}|).$$

Comme  $\omega^\tau(0) - \omega(0) = 0$  nous obtenons

$$\begin{aligned} |L^\tau(\zeta) - \ell(\zeta)| &= \left| \omega_{III}^\tau\left(\frac{\text{Re } \tau}{2}\right) - \omega_{III}^\tau\left(\frac{\text{Re } \tau}{2}\right) \right| \leq \frac{2B}{C_1} w(C_2 |e^{-\zeta/4}|) e^{C_1(\xi + e^{\frac{1}{3}\xi})} \leq \\ &\leq w(C_3 |e^{-\zeta/4}|) \end{aligned}$$

si  $w(x) \leq 0 \left( e^{-\left(\frac{1}{2}\right)^N} \right)$  pour tous  $N$ .

Ainsi pour un point  $\tau$  arbitraire de  $\prod_\lambda$  il existe une fonction  $L^\tau$  holomorphe dans un voisinage  $\mathcal{D}_\tau$  et telle que

$$|L^\tau(\zeta) - \ell(\zeta)| \leq w(C_3 |e^{-\zeta/4}|), \quad \zeta \in \mathcal{D}_\tau. \quad (6.2)$$

Soit  $\psi$  une fonction  $C^\infty$  avec un assez petit support et telle que  $\int \psi = 1$ . Il est clair que la  $\bar{\partial}$ -dérivée de la fonction

$$k(\zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \int \psi(\tau - \zeta) \ell(\tau) d\mu_2(\tau)$$

satisfait à une estimation

$$|\bar{\partial}k(\zeta)| \leq w(C_4 |e^{-\zeta/4}|). \quad (6.3)$$

## 7. Encore un prolongement

Soit  $B = \{\zeta : \xi \geq \xi_\lambda, |\eta| \leq e^{-\xi}\}$ . Pour construire un nouveau prolongement  $K_B$  de la loi de correspondance nous répéterons tous les raisonnements du § 5. Mais le voisinage

$$G_{\zeta,B} = \{(z, \omega) : |z| < 2, |\omega| < 2, |Im z| < |Im e^{-\zeta}|^{1/8}, \\ |Im \omega| \leq |Im e^{-\zeta}|^{1/8}\}$$

remplace maintenant  $G_\zeta$ .

On définit la fonction  $f_{\zeta,B}$  à partir de  $f$  et  $G_{\zeta,B}$  par le même procédé exactement qui définit  $f_\zeta$  à partir de  $f$  et  $G_\zeta$ .

Il faut vérifier que les solutions des systèmes (5.1<sub>C,I</sub>), (5.1<sub>C,II</sub>), (5.1<sub>C,III</sub>) ne quittent pas le domaine  $G_{\zeta,B}$  (qui est beaucoup plus étroit que  $G_\zeta$ ). Puis on posera  $\ell_B(\zeta) = \omega_{III,B}(\xi/2)$ . Nous allons le vérifier, par exemple, pour la première partie du chemin.

De

$$\lambda + \frac{\dot{\omega}}{\omega} = \dot{u} = -z^n \omega f_{\zeta,B}(z, \omega)$$

on déduit que

$$Im \frac{\dot{\omega}}{\omega} = -Im(z^n \omega f_{\zeta,B}(z, \omega)). \quad (7.1)$$

Soit  $\alpha = \arg \omega$  alors (7.1) devient

$$\dot{\alpha} = -Im(z^n |\omega| e^{i\alpha} f_{\zeta,B}(z, |\omega| e^{i\alpha})).$$

D'où

$$|\dot{\alpha}| \leq C_n |Im e^{-\zeta}| e^{\xi/2} + |\alpha| \leq C_n |Im e^{-\zeta}| + |\alpha|^{1/2}$$

sur l'intervalle  $0 \leq t \leq \xi/2$ . Cela implique que

$$|\alpha(\xi/2)| \leq C_n |Im e^{-\xi}|^{1/2} e^{\xi/2} \leq C_n |Im e^{-\xi}|^{1/4}$$

si  $|\eta| \leq e^{-\xi}$ , c'est-à-dire si  $\zeta \in B$ .

Une vérification toute analogue montre que les points  $(z_{II}, \omega_{II}), (z_{III}, \omega_{III})$  ne quittent pas  $G_{\zeta, B}$ .

En répétant le raisonnement du § 6 on vérifie que pour un point  $\tau$  arbitraire de  $B$  il existe une fonction  $L^{\tau, B}$  holomorphe dans  $\mathcal{D}_{\tau} = \{\zeta : |e^{-\tau} - e^{-\zeta}| < \frac{1}{2} |e^{-\tau}|\}$  et telle que

$$|L^{\tau, B}(\zeta) - \ell_B(\zeta)| \leq w(C |Im e^{-\zeta}|^{1/8}). \quad (7.2)$$

Soit  $\psi$  une fonction  $C^{\infty}$ , vérifiant  $\int \psi = 1$ , et de support assez petit. Soit  $\psi_{\zeta}(\cdot) = \psi(\frac{\cdot}{\zeta})$ . On pose

$$k_B(\zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \int \psi_{\zeta}(\zeta - \tau) \ell_B(\tau) dm_2(\tau), \quad \zeta \in B.$$

Alors

$$\begin{aligned} |\bar{\partial} k_B(\zeta)| &\leq \frac{w(C e^{-\xi/8} \sin^{1/8} \eta)}{\eta^3} \\ &\leq w(C' e^{-\xi/8} \eta^{1/8}). \end{aligned} \quad (7.3)$$

## 8. Un théorème de comportement obligé

**THEOREME 3.** Soit  $\mu$  une fonction  $C^{\infty}$  sur

$$\varphi = \{\zeta : \zeta > C, |\eta| < e^{\alpha \xi}\}$$

et soit

$$|\bar{\partial} \mu(\zeta)| \leq \varphi(\xi) \quad (8.1)$$

où  $\varphi$  est une fonction telle que

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{t}{5}\right)^{1/t} &\leq \varphi\left(\frac{t}{4\sqrt{2}}\right), \\ \varphi\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{a}{2}} &\leq \varphi\left(\frac{t}{4}\right) \end{aligned} \quad (8.2)$$

pour une constante  $a$  absolue assez petite. Si

$$\mu(\xi) = O(e^{-\xi^n}), \quad \xi \rightarrow \infty, \quad \forall n, \quad (8.3)$$

alors

$$|\mu(\xi)| \leq C \varphi\left(\frac{\xi^{1/2}}{16}\right). \blacksquare$$

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{L}$  un réseau de carrés de côtés égaux à 1 et couvrant le demi-plan droit. Il sera commode de convenir que si  $\mathbb{R}_+ \cap Q \neq \emptyset$ ,  $Q \in \mathcal{L}$ , alors le centre  $C_Q$  de  $Q$  appartient à  $\mathbb{R}_+$ . Les carrés de cette sorte seront appelés  $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ .

Pour  $Q \in \mathcal{L}$  on pose  $\gamma_{Q,\lambda} = \partial(\lambda(Q - C_Q) + C_Q)$ ,  $1/2 \leq \lambda \leq 1$ . Un carré  $Q \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$  est dit mauvais si

$$|\{\lambda \in [1/2, 1] : \gamma_{Q,\lambda} \cap \{\zeta : |\mu(\zeta)| < \varphi\left(\frac{\zeta^{1/2}}{4}\right)\} \neq \emptyset| \geq \frac{1}{4}. \quad (8.5)$$

Sinon on dit que  $Q$  est bon.

Nous allons considérer deux cas.

**Premier cas.** Il existe un nombre infini de carrés mauvais.

Si  $Q$  est mauvais alors

$$|\mu(C_Q + it)| \leq \varphi^a \left( \frac{C_a^{1/2}}{4} \right), \quad |t| \leq 1/2$$

d'où

$$|\mu(C_a + it)| \varphi \left( \frac{C_a^{1/2}}{5} \right), \quad |t| \leq 1/2, \quad C_Q \geq \text{const}_{\varphi}. \quad (8.6)$$

On considère

$$\mu_{\Delta_a} = \mu(\xi) - \int_{\Delta_Q} \frac{\bar{\partial}\mu(t)}{t - \zeta} d_2(t)$$

où  $\Delta_a$  est un carré  $[\frac{C_a}{4}, C_a] \times [-\frac{3}{2}C_Q, \frac{3}{8}C_Q]$ .

La fonction  $\mu_{\Delta_Q}$  est holomorphe sur  $\Delta_Q$  et (8.6) implique que

$$|\mu_{\Delta_a}(C_Q + it)| \leq \varphi \left( \frac{C_a^{1/2}}{5} \right) + C_Q \varphi \left( \frac{C_a}{4} \right) \leq 2\varphi \left( \frac{C_Q^{1/2}}{5} \right). \quad (8.7)$$

D'où

$$|\mu_{\Delta_a}(x + it)| \leq \varphi \left( \frac{C_a^{1/2}}{5} \right)^{1/C_Q} \leq \frac{1}{2} \varphi \left( \frac{C_a^{1/2}}{\sqrt{2.4}} \right),$$

$$\frac{C_Q}{2} \leq x \leq C_Q, \quad |t| \leq \frac{1}{2}.$$

Cela signifie que

$$|\mu(x + it)| \leq \frac{1}{2} \varphi \left( \frac{C_a^{1/2}}{\sqrt{2.4}} \right) + C_Q \varphi \left( \frac{C_Q}{4} \right) \leq \varphi \left( \frac{C_Q^{1/2}}{4\sqrt{2}} \right)$$

pour  $\frac{C_Q}{2} \leq x \leq C_Q$ ,  $|t| \leq \frac{1}{2}$ .

En particulier

$$|\mu\left(\frac{C_Q}{2} + it\right)| \leq \varphi\left(\frac{C_Q^{1/2}}{\sqrt{2}}/4\right). \quad (8.8)$$

La comparaison de (8.6) et (8.8) montre que nous pouvons itérer le raisonnement. Dans le premier cas on a donc

$$|\mu(x)| \leq \varphi\left(\frac{x^{1/2}}{8}\right), \quad x \geq x_0.$$

**Deuxième cas.** Moyennant un déplacement vers la droite le long de  $\mathbb{R}_+$  on peut supposer que tous les carrés de  $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$  sont bons.

Soit

$$\tilde{O} = \{\zeta : \xi > \xi_\lambda, |\eta| < \xi^2\}.$$

On appelle un carré  $Q \in \mathcal{L}$  singulier si

$$|\{\lambda \in [1/2, 1] : \gamma_{Q,\lambda} \cap \{\zeta : |\mu(\zeta)| \leq \varphi(\frac{\xi}{2})\} \neq \emptyset\}| \geq \frac{1}{4}. \quad (8.9)$$

Nous allons démontrer qu'il n'y a pas de carrés singuliers. Soit  $Q$  un carré singulier et soit  $(\xi_Q, \eta_Q)$  les coordonnées de son centre  $C_Q$ . On pose  $R_Q = [\xi_Q, \xi_Q^2] \times [-\xi_Q^2, +\xi_Q^2]$  et

$$\overset{\text{def}}{\mu_{R_Q}} = \mu(\zeta) - \int_{R_Q} \frac{\bar{\partial}\mu(\tau)}{\tau - \zeta} dm_2(\tau).$$

C'est une fonction holomorphe sur  $R_Q$  et

$$|\mu_{R_Q}(\zeta)| \leq |\mu(\zeta)| + \xi_Q^2 \varphi(\xi_Q), \quad \zeta \in Q.$$

Soit  $E_Q = \{\zeta \in Q : |\mu(\zeta)| < \varphi(\frac{\xi}{2})\}$  alors on a

$$\zeta \in E \Rightarrow |\mu_{R_Q}(\zeta)| \leq 2\varphi\left(\frac{\xi}{2}\right). \quad (8.10)$$

Le lemme de Hall [14] (avec (8.9)) affirme que la mesure harmonique de  $E$  par rapport à la région  $Q \setminus E$  est minorée par une constante absolue positive. Cela implique

$$|\mu_{R_Q}(\zeta)| \leq \left(2\varphi\left(\frac{\xi_Q}{2}\right)\right)^{\frac{4}{\xi_Q^2}} \leq \varphi\left(\frac{(Re \zeta)^{1/2}}{2}\right)^{\frac{4}{Re \zeta}} \leq \varphi\left(\frac{(Re \zeta)^{1/2}}{4}\right) \quad (8.11)$$



Dans le 2-voisinage du centre de  $R_Q$ .

Ici nous venons d'utiliser (8.2). La dernière inégalité affirme que les carrés de  $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$  situés dans le 2-voisinage du centre de  $R_Q$  sont mauvais. Cela contredit nos hypothèses. Donc tous les carrés de  $\mathcal{L}$  sont non-singuliers.

Maintenant soient  $\mathcal{L}^{\alpha,\beta}$  les réseaux de carrés qu'on obtient à l'aide des déplacements de pas  $\alpha, \beta$  de  $\mathcal{L}$  le long des axes.

Il est évident que nous venons de vérifier que ou bien

$$|\mu(x)| \leq \varphi\left(\frac{x^{1/2}}{8}\right), \quad x \geq x_0, \quad (8.12)$$

ou bien tous les carrés de tous les réseaux  $\mathcal{L}^{\alpha,\beta}$  ( $\alpha = -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}$ ;  $\beta = -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}$ ) sont non-singuliers. Soient  $\{q^{\alpha,\beta}(Q)\}_{\alpha,\beta=-1/3,0,1/3}$  neuf petits carrés formant un carré  $Q \in \mathcal{L}$  et soit  $Q^{\alpha,\beta}$  un carré de  $\mathcal{L}^{\alpha,\beta}$  contenant  $q^{\alpha,\beta}(Q)$  pour carré central; par exemple,  $Q^{0,0} = Q$ .

On pose

$$\lambda^{\alpha,\beta,Q}(\zeta) = \{\lambda \in [1/2, 1] : \zeta \in \gamma_{Q^{\alpha,\beta},\lambda}\}, \quad \alpha, \beta = -1/3, 0, 1/3; \quad Q \in \mathcal{L};$$

$$G^{\alpha,\beta,Q} = \cup\{\gamma_{Q^{\alpha,\beta},\lambda} : |\mu(\zeta)| \geq \varphi\left(\frac{\zeta}{2}\right) \text{ sur } \gamma_{Q^{\alpha,\beta},\lambda}\}.$$

Soit  $\chi^{\alpha,\beta,Q}$  la fonction caractéristique de  $G^{\alpha,\beta,Q}$ . Soit  $C^{\alpha,\beta,Q}$  une fonction support dans  $G^{\alpha,\beta,Q}$  et telle que

$$C^{\alpha,\beta,Q}(z) dm_2(z) = \frac{\chi^{\alpha,\beta,Q} d\lambda^{\alpha,\beta,Q} \wedge dz}{2\pi i |\{\lambda : \gamma_{Q^{\alpha,\beta},\lambda} \subset G^{\alpha,\beta,Q}\}|}. \quad (8.13)$$

Comme tous les carrés sont non-singuliers, on a

$$|C^{\alpha,\beta,Q}| \leq A_{\text{abs}}; \quad \alpha, \beta = -1/3, 0, 1/3; \quad Q \in \mathcal{L}. \quad (8.14)$$

Posons :

$$S^{\alpha,\beta,Q}(\zeta) = \int_{q^{\alpha,\beta}(Q)} \frac{\bar{\partial}\mu(u)}{u - \zeta} dm_2(u).$$

Puis définissons la fonction

$$\mathbb{E}(\zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{\alpha, \beta = -1/3, 0, 1/3 \\ Q \in \mathcal{L}}} C^{\alpha,\beta,Q}(\zeta) S^{\alpha,\beta,Q}(\zeta),$$

$$\nu(\zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \mu(\zeta) - \frac{1}{\pi} \int \frac{\bar{\partial}\mu(z)}{z-\zeta} dm_2(z) + \frac{1}{\pi} \int \frac{\Xi(z)}{z-\zeta} dm_2(z).$$

Nous allons démontrer deux choses :

- 1) les fonctions  $\nu$  et  $\mu$  sont très proches sur  $\mathbb{R}_+$  ;
- 2) la fonction  $\nu$  a une estimation de type (8.12).

LEMME 8.1. Pour  $\zeta \notin Q^{\alpha,\beta}$

$$\int_{q^{\alpha,\beta}(Q)} \frac{\bar{\partial}\mu(z)}{z-\zeta} dm_2(z) = \int_{G^{\alpha,\beta,Q}} \frac{S^{\alpha,\beta,Q}(z)C^{\alpha,\beta,Q}(z)}{z-\zeta} dm_2(z). \quad \blacksquare$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} & \int C^{\alpha,\beta,Q}(z) \frac{1}{z-\zeta} S^{\alpha,\beta,Q}(z) = \\ &= \int_{G^{\alpha,\beta,Q}} C^{\alpha,\beta,Q}(z) \frac{1}{z-\zeta} \int_{q^{\alpha,\beta}(Q)} \frac{\bar{\partial}\mu(u)}{u-z} = \int_{q^{\alpha,\beta}(Q)} \bar{\partial}\mu(u) \int C^{\alpha,\beta,Q}(z) \\ & \quad \cdot \frac{1}{z-\zeta} \cdot \frac{1}{u-z} dm_2(z) = \int_{q^{\alpha,\beta}(Q)} \bar{\partial}\mu(u) \int C^{\alpha,\beta,Q}(z) \\ & \quad \cdot \left( \frac{1}{z-\zeta} + \frac{1}{u-z} \right) \frac{1}{u-\zeta} dm_2(z) = \\ &= \int \frac{\bar{\partial}\mu(u)}{u-\zeta} \int \frac{C^{\alpha,\beta,Q}(z)}{z-\zeta} + \int \frac{\bar{\partial}\mu(u)}{u-\zeta} \int \frac{C^{\alpha,\beta,Q}(z)}{u-z}. \end{aligned}$$

La première intégrale est nulle pour  $\zeta \notin Q^{\alpha,\beta}$ , et la deuxième est égale à  $\int_{q^{\alpha,\beta}(Q)} \frac{\bar{\partial}\mu(u)}{u-\zeta} dm_2(u)$ . \blacksquare

Maintenant on peut estimer la différence :

$$\pi |\nu(\zeta) - \mu(\zeta)| = \left| \sum_{\alpha,\beta,Q} \left( \int_{q^{\alpha,\beta}(Q)} \frac{\bar{\partial}\mu(z)}{z-\zeta} - \int \frac{C^{\alpha,\beta,Q}(z)S^{\alpha,\beta,Q}(z)}{z-\zeta} \right) \right|.$$

Le lemme 8.1 affirme que toutes les expressions dans les parenthèses sauf celles pour lesquelles  $\zeta \in Q^{\alpha,\beta}$  sont nulles. Le nombre des expressions non-nulles est inférieur à 9. Donc

$$\pi |(\zeta) - \mu(\zeta)| \leq A_1 \varphi(\xi - A_2) \leq \frac{1}{2} \varphi\left(\frac{\xi}{2}\right). \quad (8.15)$$

Pour obtenir une estimation de type (8.12) pour  $\nu$  on a besoin du lemme suivant.

LEMME 8.2.  $|\bar{\partial}\nu(w)/\nu(w)| \leq A_3, \quad w \in \tilde{O}. \blacksquare$

Démonstration. Soit  $w = u + iv \in Q_0^{\alpha_0, \beta_0}$ . Alors

$$\begin{aligned}
 |\bar{\partial}\gamma(w)| &= |\Xi(w)| \leq \sum_{\substack{\alpha, \beta, Q \\ Q^{\alpha, \beta} \cap Q_0^{\alpha_0, \beta_0} \neq \emptyset}} |C^{\alpha, \beta, Q}(w)| |S^{\alpha, \beta, Q}(w)| \leq \\
 &\leq A_{\text{abs}} \sum |S^{\alpha, \beta, Q}(w)| \leq A_{\text{abs}} \varphi(u - A_5) \leq \\
 &\quad \dots \\
 &\quad \dots \\
 &\leq \varphi\left(\frac{u}{2}\right) \cdot \frac{1}{(1+u^2)^2}. \tag{8.16}
 \end{aligned}$$

De (8.15) et (8.16) on déduit

$$|\mu(w)| \geq \varphi\left(\frac{u}{2}\right) \Rightarrow \left| \frac{\bar{\partial}\nu(w)}{\nu(w)} \right| \leq \frac{2}{(1+u^2)^2}.$$

Et si  $|\mu(w)| < \varphi\left(\frac{u}{2}\right)$ , on a

$$\bar{\partial}\nu(w) = \Xi(w) = 0$$

car le support de  $\Xi$  se trouve dans

$$\bigcup_{\alpha, \beta, Q} G^{\alpha, \beta, Q} \subset \left\{ \zeta : |\mu(\zeta)| \geq \varphi\left(\frac{\xi}{2}\right) \right\}. \quad \blacksquare$$

La fonction

$$g(\zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi} \int_{O=\{w=u+iv: |v| \leq u^2\}} \frac{\bar{\partial}\nu(w)}{\nu(w)} \frac{1}{w-\zeta} dm_2(u)$$

vérifie l'estimation :

$$|g(\zeta)| \leq \int_{\{u+iv: u \geq u_0, |v| \leq u^2\}} |\dots| \leq \int_{u_0}^{\infty} \frac{u^2}{(1+u^2)^2} du < \infty. \tag{8.17}$$

On pose

$$\tilde{\nu}(\zeta) = \nu(\zeta) e^{g(\zeta)}.$$

Comme la  $\bar{\partial}$ -dérivée (au sens des distributions) de cette fonction est nulle on en déduit facilement que  $\tilde{\nu}$  est une fonction holomorphe sur  $\tilde{O}$ .

De (8.15) et (8.17), (8.3) on tire que

$$|\tilde{\nu}(x)| \leq O(e^{-nx}), \quad n = 1, 2, \dots$$

Cela implique que  $\tilde{\nu} \equiv 0$ . Utilisant encore une fois (8.15) nous obtenons  $|\mu(x)| \leq \varphi\left(\frac{x}{2}\right)$ .  $\blacksquare$

## 9. Un théorème d'unicité

**THEOREME 4.** Soit  $\mu$  une fonction  $C^\infty$  sur

$$B = \{\zeta : \xi > C, |\eta| < e^{-\xi}\}.$$

Et soit

$$|\bar{\partial}\mu(\zeta)| \leq \psi(\eta) \tag{9.1}$$

où

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x) e^{-N \frac{\log 1/x}{x}} = 0 \quad \forall N > 0. \tag{9.2}$$

Si

$$\mu(\xi) = 0 \left( e^{-ne^\xi} \right), \quad \xi \rightarrow \infty, \quad \forall n, \tag{9.3}$$

alors

$$\mu(\xi) \equiv 0. \quad \blacksquare \tag{9.4}$$

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{F}$  un réseau de rectangles  $R$  qui couvrent

$$\tilde{B} = \{\zeta : \zeta > C, |\eta| < e^{-2\xi}\}$$

et tels que

- a) leurs côtés sont parallèles aux axes,
- b) le rapport des côtés est borné par des constantes absolues,
- c) le diamètre et la distance à  $\mathbb{R}_+$  sont comparables.

Soient  $a_R, b_R$  les côtés de  $R$ , soit  $C_R$  le centre de  $R$ .

Les symboles  $\text{proj}_\xi, \text{proj}_\eta$  dénotent les projections sur les axes  $\xi, \nu$ .

Un rectangle  $R$  est dit mauvais, si

$$\begin{aligned} \text{proj}_\xi \{ \zeta \in R : |\mu(\zeta)| < \psi\left(\frac{\eta}{4}\right) \} &\geq \frac{|a_R|}{4} \\ \text{Proj}_\eta \{ \zeta \in R : |\mu(\zeta)| < \psi\left(\frac{\eta}{4}\right) \} &\geq \frac{|b_R|}{4} \end{aligned} \tag{9.5}$$

Sinon il est dit bon.

Nous allons considérer deux cas.

**Premier cas.** Il existe un nombre infini de mauvais rectangles.

Si  $R$  est mauvais, alors

$$|\mu(\zeta)| \leq \psi^a\left(\frac{\eta_R}{A_1}\right), \quad \zeta \in R,$$

d'où

$$|\mu(\zeta)| \leq \psi\left(\frac{\eta_R}{A_2}\right), \quad \zeta \in R, \quad (9.6)$$

si  $|C_R| \geq \text{const}_\psi$ . Considérons une fonction

$$\mu_{A_R} = \mu(\zeta) - \int_{\Delta_R} \frac{\bar{\partial}\mu(\tau)}{\tau - \zeta} dm_2(\tau)$$

où  $\Delta_R = \left[0, \xi_R + \frac{|a_R|}{2}\right] \times \left[-\frac{|b_R|}{2} + \eta, \eta + \frac{|b_R|}{2}\right]$ . La fonction  $\mu_{\Delta_R}$  est holomorphe sur  $\Delta_R$  et, de (9.6) on déduit que

$$|\mu(\xi_R + it)| \leq \psi\left(\frac{\eta_R}{A_2}\right) + \xi_R \psi\left(\frac{\eta_R}{A_3}\right) \leq \psi\left(\frac{\eta_R}{A_2}\right) + A_4 \log \frac{1}{\eta_R} \psi\left(\frac{\eta_R}{A_3}\right) \leq \psi\left(\frac{\eta_R}{A_5}\right). \quad (9.7)$$

Maintenant utilisons (9.2) pour obtenir

$$\zeta \in A_R \Rightarrow |\mu(\zeta)| \leq \psi\left(\frac{\eta_R}{A_5}\right) e^{\xi_R/\eta_R} \leq \psi\left(\frac{\eta_R}{A_5}\right) e^{A_6 \frac{\log 1/\eta_R}{\eta_R}} = o(1).$$

Donc (9.4) est vérifié dans le premier cas.

**Deuxième cas.** Moyennant un déplacement vers la droite le long de  $\mathbb{R}_+$  on peut supposer que tous les rectangles de  $\mathcal{F}$  sont bons. Maintenant on peut répéter à la lettre le raisonnement du Théorème 3 pour démontrer qu'il existe une fonction  $\nu$  telle que

$$\nu(\xi) = \mu(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}_+, \quad \xi \geq C. \quad (9.8)$$

$$|\bar{\partial}\nu(w)/\nu(w)| \leq 2. \quad (9.9)$$

L'égalité (9.8) est analogue à l'inégalité (8.15). Mais il y a une différence (qui permet d'obtenir l'égalité au lieu d'une inégalité) et c'est la suivante : aucun rectangle de  $\mathcal{F}$  n'intersecte  $\mathbb{R}_+$ .

La fonction

$$q(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_{\tilde{B} = \{w = u + iv : |v| < e^{-2u}\}} \frac{\bar{\partial}\nu}{\nu}(w) \frac{1}{w - \zeta} dm_2(w)$$

est bornée sur  $\tilde{B}$ . La fonction

$$\tilde{\nu}(\zeta) = \nu(\zeta) e^{q(\zeta)}$$

est holomorphe sur  $\tilde{B}$ . Le principe de Phragmén-Lindelöf, joint à (9.3) et (9.8), donne  $\tilde{\nu}(\xi) \equiv 0$ . D'où  $\mu(\xi) \equiv 0$ . •

## 10. Fin de la démonstration du Théorème 1

Soit  $-\lambda_j$  la valeur caractéristique de la  $j$ -ième selle du polycycle  $C$ . On déduit de (5?6) que (voir les notions du § 4)

$$\Delta_j(\zeta) = \lambda_j \zeta + o(1). \quad (10.1)$$

Il est évident qu'il y a un prolongement propre  $F_j(\zeta)$  de la fonction  $F_j(\xi)$  vérifiant

$$F_j(\zeta) = \zeta + o(1). \quad (10.2)$$

Les estimations

$$|\bar{\partial}\Delta_j(\zeta)| \leq \varphi(\xi) \quad (10.3)$$

ont été démontrées dans le § 5. Les mêmes estimations ont lieu pour  $|\bar{\partial}F_j(\zeta)|$ . Cela, joint à (10.1) et (10.3), montre que la fonction

$$\stackrel{\text{def}}{\mu}(\zeta) = e \circ \Delta_{C,\Gamma}(\zeta) - e^{-\zeta} = e \circ F_n \circ \Delta_n \circ \dots \circ F_1 \circ \Delta_1 - e^{-\zeta}$$

satisfait à toutes les conditions du Théorème 3 (il s'agit ici des prolongements  $F_j(\zeta)$ ,  $\Delta_j(\zeta)$ ). Par un raisonnement tout analogue, on vérifie que  $\mu_B(\zeta)$  satisfait à toutes les conditions du Théorème 4 si

$$\stackrel{\text{def}}{\mu_B}(\zeta) = e \circ F_n \circ \Delta_{n,B} \circ \dots \circ F_1 \circ \Delta_{1,B} - e^{-\zeta}$$

(il s'agit ici d'autres prolongements, notamment ceux du § 7).

Donc, si la classe  $C\{M_n\}$  est telle que le poids associé vérifie :

$$w\left(Ae^{-\frac{\xi^{1/2}}{4}}\right) = o\left(e^{-ne^\xi}\right), \quad \xi \rightarrow \infty, \quad \forall n,$$

$$w\left(\eta^{\frac{1}{8}}\right)e^{-N\frac{\log 1/\eta}{\eta}} = o(1), \quad \eta \rightarrow 0, \quad \forall N$$

on aura

$$e \circ \Delta_{C,\Gamma}(\xi) = e^{-\xi},$$

c'est-à-dire

$$\delta_{C,\Gamma} = id. \quad \bullet$$

Compte tenu de [15] on peut espérer étendre le cas général du théorème DEIMMR aux champs quasianalytiques.

Je tiens en conclusion à remercier le département de mathématiques d'Orsay et en particulier MM. J.-P. Kahane, P. Assouad, J. Ecalle, M. Margenstern, N. Sibony pour leur accueil et de stimulantes discussions. Je voudrais remercier Mme Dumas pour la frappe rapide et méticuleuse de cet article.

## Références

- [1] H. DULAC *Sur les cycles limites*. Bull. Soc. Math. France 51 (1923), 45-188.
- [2] E. M. DYN'KIN *Functions with given estimate for  $\partial f/\partial \bar{z}$ , and N. Levinson's theorem*. Mat. sb. 89 (1972), 182-190 ; English transl. in Math. of the USSR Sb. 18 (1972).
- [3] Yu. S. IL'YASHENKO *Finiteness theorems for limit cycles*. Uspekhi Matem. Nauk 42 (1987), p. 223.
- [4] Yu. S. IL'YASHENKO *Limit cycles of polynomial vector fields with non-degenerate singular points on the real plane*. Funk. anal. i ego pril. 18 (1984), 32-42 ; English transl. in Funct. Anal. and its Appl., January 1985, 199-209.
- [5] J. ECALLE, J. MARTINET, R. MOUSSU, J.-P. RAMIS *Non-accumulation des cycles-limites I, II*. C. R. Acad. Sc. Paris 304, n° 13, 14, 375-377, 431-434.
- [6] J. ECALLE *Solution du problème de Dulac et accéléro-sommation de l'application de retour*. Soumis aux Publ. Math. d'IHES, Colloque R. Thom, t. II, janvier 1990.
- [7] A. L. VOLBERG *The logarithm of an almost analytic function is summable*. English transl. in Soviet Math. Dokl. 26 (1982), 238-243.
- [8] A. L. VOLBERG *Denseness of the polynomials on a system of rays*. English transl. in Soviet Math. Dokl. 29 (1984), 342-347.
- [9] A. A. BORICHEV, A. L. VOLBERG *Uniqueness theorems for almost analytic functions*. Algebra and Analysis 1 (1989), 144-176.
- [10] A. A. BORICHEV *Boundary uniqueness theorems for almost analytic functions and asymmetric algebras of sequences*. Matem. Sb. 136 (1988), 324-340.
- [11] E. M. DYN'KIN *Pseudoanalytic extension of smooth functions. The uniform scale*. Amer. Math. Soc. Transl. 115 (1980), 35-58.
- [12] W. RUDIN *Function theory in the ball of  $\mathbb{C}^n$* . Springer-Verlag, 1980.
- [13] St. KRANTZ *Function theory of several complex variables*. New York, Wiley, 1982.
- [14] J. GARNETT *Bounded analytic functions*. New York, Academic Press, 1981.
- [15] A. L. VOLBERG *The Lojasiewicz inequality for very smooth functions*. LOMI preprint, E-15-1988, Leningrad, 1989.

U.S.S.R.  
Leningrad, 191011  
Fontanka 27  
LOMI



n° d'impression 1160  
4ème trimestre 1990

