

**PUBLICATIONS**

**MATHEMATIQUES**

**D'ORSAY**

87-01

SUPERCONCENTRATEURS

Alain ROUAULT.

Université de Paris-Sud  
Département de Mathématique

Bât. 425

91405 **ORSAY** France

**PUBLICATIONS**

**MATHEMATIQUES**

**D'ORSAY**

87-01

SUPERCONCENTRATEURS

Alain ROUAULT.

Université de Paris-Sud  
Département de Mathématique

Bât. 425

91405 **ORSAY** France

## SUPERCONCENTRATEURS

Alain ROUAULT  
Unité Associée 743-A.D.4  
Mathématique (Bat.425)  
91405-ORSAY Cedex

### RESUME:

Un  $n$ -superconcentrateur est un graphe réalisant certaines conditions de connectivité entre un ensemble d'entrées et un ensemble de sorties de même cardinal  $n$ . La recherche de superconcentrateurs de taille minimale a de nombreuses applications notamment algorithmiques. Nous donnons ici une synthèse des travaux récents sur le sujet: méthode non-constructiviste (via le théorème de Hall) et méthode constructiviste ; cette dernière approche, fructueuse, utilise le spectre du Laplacien d'un graphe et le théorème du flot maximal.

### ABSTRACT:

A  $n$ -superconcentrator is a graph realizing some connectivity conditions between an input set and an output set of same cardinality  $n$ . The research of minimal size superconcentrators has various applications, algorithmical for instance. We give here one synthesis of recent works on the subject: nonconstructivist method (via Hall theorem) and constructivist one; this last method uses the spectrum of the Laplacian of a graph and max-flow theorem.

CHAPITRE I: MOTIVATIONS ALGORITHMIQUES

1) COMPLEXITE-PROGRAMME EN LIGNE DROITE-JEU DE CAILLOUX.

Un des buts principaux de la théorie de la complexité est de faire comprendre pourquoi certains problèmes spécifiques sont intrinsèquement plus difficiles à résoudre que d'autres. Ceci implique deux facettes complémentaires: l'une, positive, consistant à trouver des algorithmes rapides et l'autre, négative, consistant à prouver des bornes inférieures pour la complexité intrinsèque.

Le modèle ordinaire de calcul utilisé en complexité algébrique est celui de programme en ligne droite, dont voici une description non formalisée (voir aussi [28]).

On se donne un ensemble  $I$  d'inputs ou données, un ensemble  $R$  de registres, une famille  $\mathbb{B}$  de fonctions à nombre fini d'arguments (par exemple  $\mathbb{B} = \{+, \times, -, :, ^{-1}\}$ ) et une suite finie d'instructions, chacune de la forme :

$$(1) \quad R_i \leftarrow a \quad a \in I, R_i \in R$$

ou

$$(2) \quad R_i \leftarrow f(R_{j_1}, R_{j_2}, \dots, R_{j_k}) \quad f \in \mathbb{B}, R_{j_1}, R_{j_2}, \dots, R_{j_k} \in R$$

avec possibilité que  $i=j_1$  ou...ou  $j_k$ .

Ce programme calcule la fonction  $P$  s'il existe  $i$  tel que, à une certaine étape, le contenu du registre  $R_i$  soit égal à  $P$  (quitte à ce que, une fois le programme terminé, le contenu de  $R_i$  soit différent de  $P$ ).

Il y a deux principales mesures de complexité: le temps et l'espace. Le temps d'exécution d'un tel programme est le nombre d'instructions de type (2) et l'espace correspondant est le nombre de registres utilisés.

Exemple:

Le programme défini par:

$$\mathbb{B} = \{.,^{-1}\} \quad I = \{a,b,c\}$$

$$R_1 \leftarrow a$$

$$R_1 \leftarrow R_1^{-1}$$

$$R_2 \leftarrow b$$

$$R_2 \leftarrow R_1 \cdot R_2$$

$$R_3 \leftarrow c$$

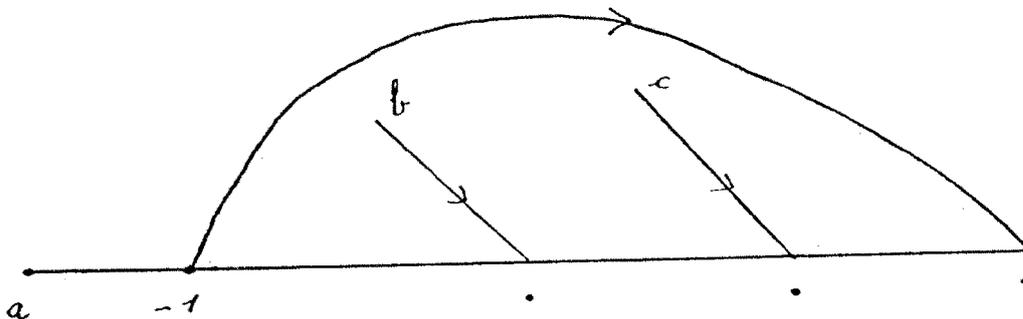
$$R_2 \leftarrow R_2 \cdot R_3$$

$$R_1 \leftarrow R_2 \cdot R_1$$

calcule la fonction  $(a^{-1} \cdot b) \cdot c) \cdot a^{-1}$

A chaque programme en ligne droite, on associe un graphe orienté acircuitique, construit séquentiellement avec un sommet par instruction et un arc allant d'une instruction  $i$  vers une  $j$  postérieure si  $i$  est la dernière avant  $j$  dont le membre de gauche intervient dans le membre de droite de  $i$ ; les types (1) donnent évidemment des sommets de demi-degré intérieur nul.

Pour notre exemple, on construit le graphe:



On peut alors relier plusieurs propriétés algébriques d'un ensemble donné  $\mathcal{F}$  de fonctions aux propriétés de connectivité du graphe de tout algorithme calculant  $\mathcal{F}$ . En fait on établit des compromis temps-espace, les deux ne pouvant être minimisés simultanément.

Une méthode pour déterminer le temps et l'espace requis pour calculer un ensemble donné de fonctions consiste à considérer un jeu de cailloux sur le graphe correspondant (voir bibliographie importante en [17]). On se donne un stock de cailloux pouvant être placés sur les sommets du graphe en une suite de coups obéissant aux règles suivantes:

a) Un caillou peut être enlevé à tout moment.

b) Si tous les prédécesseurs immédiats d'un sommet non chargé sont chargés, un caillou peut être placé dessus.

c) Dans le même cas que b), un caillou peut être transféré d'un prédécesseur vers le sommet concerné.

Le but du jeu est de charger au moins une fois chaque sommet du graphe. Chaque caillou correspond à un registre, charger un sommet correspond à mettre la sous-expression associée dans ce registre. Chaque stratégie correspond à un programme en ligne droite qui calcule l'ensemble associé d'expressions. Le temps requis par ce programme est le nombre de coups et l'espace, le nombre de cailloux présents simultanément.

## 2) PROGRAMME LINEAIRE ET CONNECTIVITE

Pour de nombreux problèmes le graphe de tout programme en ligne droite contient des sous-graphes possédant des propriétés de connectivité intéressantes. C'est le cas des programmes linéaires que nous allons définir.

Une forme linéaire en les variables  $x_1, \dots, x_n$  sur un anneau  $F$  est une expression de la forme  $\sum \lambda_i x_i$ , où  $\lambda_i \in F$  pour tout  $i$ .

Un programme linéaire sur  $F$  avec inputs  $x_1, \dots, x_n$  est un programme en ligne droite admettant pour  $\mathbb{B}$  l'ensemble des formes linéaires à  $n$  variables.

Le rapport avec la connectivité est illustrée par le lemme ([28])

LEMME 1:

Soit  $A$  une matrice  $n \times n$  et  $A'$  un mineur  $r \times r$  non-singulier de  $A$ . Sur le graphe d'un programme linéaire réalisant  $y = Ax$  avec input  $x$ , il existe alors  $r$  chemins disjoints partant de l'ensemble  $x'$  des  $r$  inputs associés aux colonnes de  $A'$  vers l'ensemble  $y'$  des  $r$  outputs associés aux lignes de  $A'$ .

Preuve:

Précisons d'abord que "chemins disjoints" signifie "sans sommet commun". D'après le théorème de MENGER, la propriété énoncée équivaut à: "au moins  $r$  sommets doivent être enlevés pour déconnecter  $x'$  et  $y'$ ".

Comme  $A'$  est régulier,  $y' = A'x'$  est un ensemble de  $r$  formes linéaires indépendantes (en les variables de  $x'$ ). Si l'enlèvement de  $r-1$  sommets séparait  $x'$  de  $y'$ , alors les  $r$  éléments de  $y'$  seraient chacun combinaison des  $r-1$  formes linéaires calculées en ces sommets, ce qui contredirait l'indépendance.  $\square$

Tous les graphes considérés désormais sont orientés, acircuitiques et ont deux ensembles disjoints  $I$  et  $O$  de sommets appelés inputs (ou sources, ou entrées, ou données) et outputs (ou puits, ou sorties, ou résultats). Les réseaux de concentration sont des graphes dans lesquels des ensembles spécifiés d'inputs doivent être connectés à des ensembles spécifiques d'outputs (par des chemins disjoints), sans plus de précisions sur les paires de sommets à connecter.

DEFINITION:

a) ([21]) Un  $(n,m)$ -CONCENTRATEUR ( $n \geq m$ ) est tel que  $|I| = n$ ,  $|O| = m$  et tout  $A \subset I$  tel que  $|A| \leq m$  peut être connecté à  $O$ .

b) ([29]) Un  $n$ -SUPERCONCENTRATEUR est tel que  $|I| = |O| = n$  et tous  $A, B$  vérifiant  $A \subset I$ ,  $B \subset O$ ,  $|A| = |B|$  peuvent être connectés

LEMME 2:

Soit  $A$  une matrice  $n \times n$  dont tous les mineurs sont non-singuliers. Alors le graphe de tout programme linéaire calculant  $y = Ax$  est un  $n$ -superconcentrateur.

Immédiat d'après le lemme 1.

3) EXEMPLE-PROBLEMATIQUE DES FAMILLES LINÉAIRES DE SUPERCONCENTRATEURS.

On peut trouver un exemple simple en retournant le problème, c'est-à-dire en se donnant un algorithme rapide pour un calcul linéaire.

L'exemple choisi est celui de la FFT ou Fast Fourier Transform ([20])

La donnée est constituée par les coefficients  $x_i$ ,  $i = 0, \dots, n-1$  d'un polynôme  $p$  de degré  $n-1$  et  $\omega$  racine  $n$ -ième de l'unité; l'objectif est le calcul de  $\bar{x}_0 = p(1), \bar{x}_1 = p(\omega), \dots, \bar{x}_{n-1} = p(\omega^{n-1})$ .

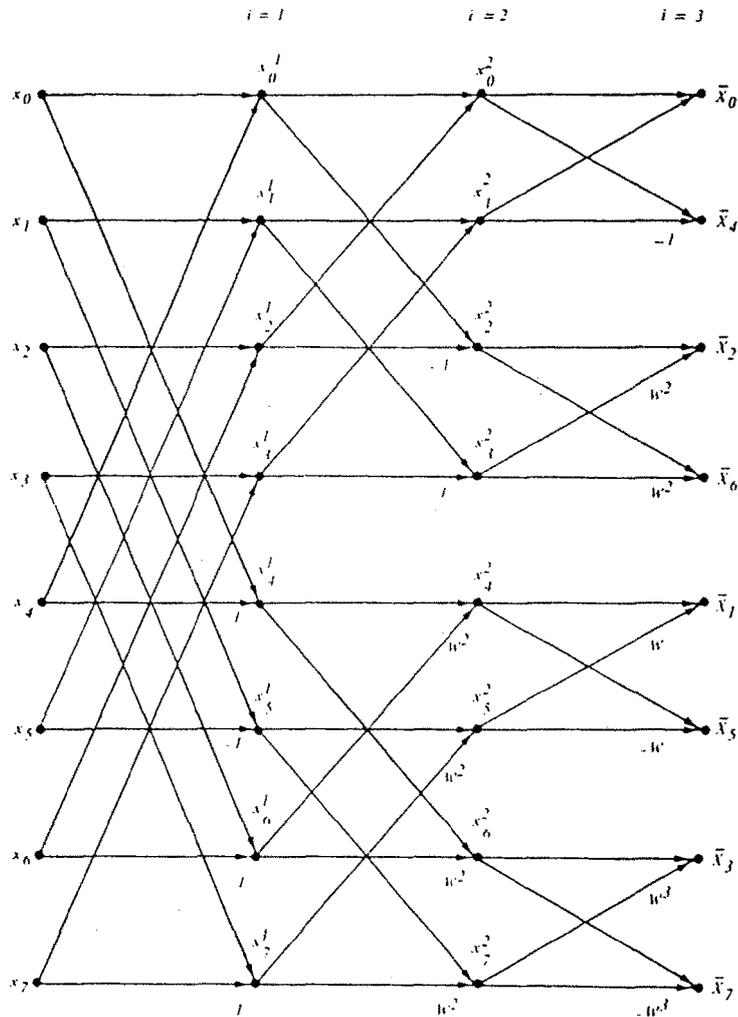
Dans le cas particulier  $n = 2^t$ , on peut écrire:

$$\bar{x}_k = \sum_{m=0}^{n/2-1} x_{2m} \omega^{2mk} + \omega^k \sum_{m=0}^{n/2-1} x_{2m+1} \omega^{2mk}$$

et comme  $\omega^{n/2} = -1$

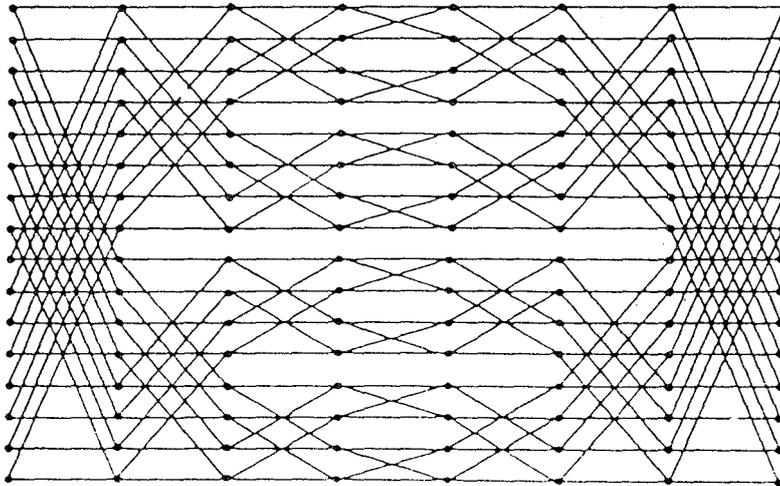
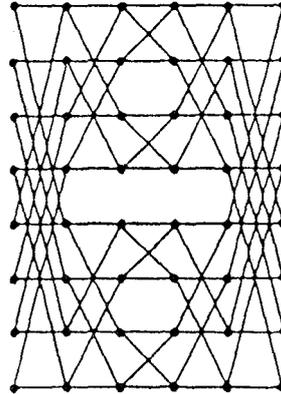
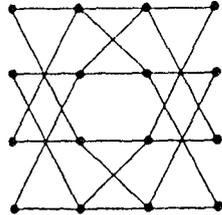
$$\bar{x}_{k+\frac{n}{2}} = \sum_{m=0}^{n/2-1} x_{2m} \omega^{2mk} - \omega^k \sum_{m=0}^{n/2-1} x_{2m+1} \omega^{2mk}$$

On est donc ramené à calculer 2 transformées de Fourier d'ordre  $n/2$ . L'algorithme final, écrit pour  $n = 8$  par exemple peut se représenter par le graphe suivant:

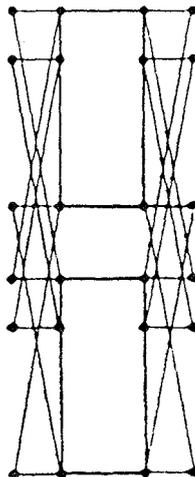


Valiant ([29]) a montré qu'un tel graphe a la propriété suivante  $\forall s \leq n$ , tout sous-ensemble de cardinal  $s$  peut être relié à  $\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_s$  par un système de chemins disjoints. En effet on applique le lemme 1 au mineur correspondant qui est un déterminant de Van Der Monde. En mettant deux tels graphes dos à dos on a la propriété de superconcentration.

Voici les graphes obtenus pour  $t = 1, 2, 3, 4$ .



Principe de récurrence :



On montre facilement que le nombre d'arêtes est  $O(n \log_2 n)$  et que la profondeur (longueur des chemins) est  $O(\log_2 n)$ .

Le problème qui se pose alors est de savoir s'il existe une famille de superconcentrateurs indexée par  $n$  ayant un nombre de sommets (ou d'arêtes) linéaire en  $n$ . En effet une réponse négative impliquerait une complexité sur-linéaire pour le calcul de fonctions usuelles. On l'a cru longtemps. En fait la réponse est positive et le calcul de la densité minimale est devenu un vaste champ d'étude ([22],[13])

La famille précédente est non-linéaire en  $n$ ; elle vérifie en fait une propriété plus forte que la superconcentration.

DEFINITION:

Un réseau est dit réarrangeable s'il satisfait la condition suivante :

$|I| = |O|$  et  $\forall A \subset I, \forall B \subset O$  avec  $|A| = |B|$  alors pour toute bijection  $f$  de  $A$  dans  $B$  il existe un ensemble de  $|A|$  chemins disjoints, chacun d'entre eux joignant un  $i$  au  $f(i)$  correspondant.

Pour ces réseaux, utiles en communications, Shannon ([26]) a donné une borne inférieure simple pour le nombre  $r(n)$  d'arêtes en fonction du nombre  $n$  de sommets; chaque système de chemins disjoints étant un sous-ensemble d'arêtes, on a:

$$2^{r(n)} \geq n! \quad \text{d'où:} \quad r(n) \geq n \log_2 n + O(n)$$

A l'heure actuelle on situe le minimum entre

$$6n \log_2 n + O(n) \quad ([24]) \quad \text{et} \quad 6n \log_3 n + O(n \sqrt{\log n}) \quad ([23])$$

## CHAPITRE II: CONSTRUCTIVITE OU NON-CONSTRUCTIVITE

Nous examinons ici les méthodes classiques - probabiliste et constructive- de mise en évidence de familles linéaires de superconcentrateurs. Le principe est toujours de bâtir un superconcentrateur par interconnexion en cascade d'éléments de base plus petits, notamment des graphes bipartis. Les propriétés exigées pour ces éléments, conformément à la définition des superconcentrateurs sont des propriétés de couplage. Nous les rendrons plus praticables en les convertissant en propriétés sur le nombre de voisins grâce au théorème de KONIG-HALL.

Un moyen commode de construire de tels bipartis consiste à se donner des permutations et (éventuellement) des congruences. Le théorème 1 du à Bassalygo [6] (voir aussi [12],[21],[22]) fonde l'existence de "bonnes" permutations. Nous citerons la construction (effective) de Gaber-Galil [13]. Nous exhiberons la récurrence permettant de passer au superconcentrateur et nous dresserons le bilan (provisoire).

### 1) RAPPELS

Etant donné un graphe simple  $G = (V, E)$  on appelle couplage un sous-ensemble  $E_0$  de  $E$  tel que deux arêtes quelconques de  $E_0$  soient toujours non-adjacentes. Un sommet  $v$  de  $V$  est saturé par un couplage  $E_0$  s'il existe une arête de  $E_0$  attachée à  $v$ . L'ensemble des voisins d'un sous-ensemble  $A$  de sommets se note  $\Gamma(A)$ .

THEOREME DE KONIG-HALL

Dans un graphe biparti  $G=(I,O;E)$  on peut coupler  $I$  dans  $O$  (c'est-à-dire trouver un couplage saturant  $I$ ) si et seulement si:

$$\forall A \subset I \quad \Gamma(A) \geq |A|$$

2) CONSTRUCTION DE BIPARTIS A L'AIDE DE PERMUTATIONS.

Soit  $n, m$ , et  $\nu$  diviseur de  $m$  et  $n$  (si  $m=n$  on choisit  $\nu=n=m$ ). On a donc  $n = q\nu$ ,  $m = p\nu$  et  $pq\nu$  est un multiple commun. A tout  $\sigma \in \mathcal{S}_{pq\nu}$  (ensemble des permutations sur  $\{1, 2, \dots, pq\nu\}$ ) on associe un graphe biparti  $(I, O; E)$  avec  $|I| = n$ ,  $|O| = m$  dans lequel chaque input  $i$  est adjacent aux outputs  $o \equiv \sigma(i') \pmod{m}$  pour un  $i' \equiv i \pmod{n}$ . Autrement dit on quotienter  $\sigma$  par les relations d'équivalence "modulo". Un tel graphe peut avoir des arêtes multiples. Si on se donne  $k$  permutations on peut considérer le graphe obtenu en superposant les  $k$  graphes correspondants; il vérifie:

$$\forall i \in I \quad d^o i = kp \quad , \quad \forall o \in O \quad d^o o = kq \quad , \quad |E| = kpq\nu$$

On se ramène ainsi à une étude sur les ensembles de permutations et on distinguera théorème d'existence et construction effective.

3) UN THEOREME D'EXISTENCE

DEFINITION:

Si  $0 < \alpha < 1$  et  $\beta > 0$ , on dit que le graphe biparti  $G = (I, O; E)$  est un  $(\alpha, \beta)$ -EXTENSEUR si on a:

$$\forall A \subset I, \quad |A| \leq \alpha |I| \quad \implies \quad |\Gamma(A)| \geq \beta |A|.$$

THEOREME (Bassalygo):

Pour tous entiers  $q, p$  et tous réels  $\alpha, \beta$  vérifiant  $0 < \alpha < p/\beta q < 1$  il existe  $\nu_0$  et pour tout  $\nu \geq \nu_0$  (il existe) un  $(\alpha, \beta)$ -extenseur, avec  $|I| = q\nu$ ,  $|O| = p\nu$ ,  $|E| = kpq\nu$  -en fait  $(kp, kq)$  régulier- dès que

$$(*) \quad k \geq \frac{H(\alpha) + p/q H(\alpha\beta q/p)}{pH(\alpha) - \alpha\beta q H(p/\beta)}, \text{ où } H(x) = -x \text{Log}x - (1-x) \text{Log}(1-x)$$

On notera un tel graphe  $g_{\alpha, \beta, q, p, \nu}$

Preuve:

L'idée consiste à utiliser 2) d'un point de vue matriciel. Un graphe biparti est complètement déterminé par la matrice  $B$  fonction de  $I \times O$  dans  $\mathbb{N}$  définie par  $b_{io}$  = nombre d'arêtes d'extrémités  $i$  et  $o$ . Si on a  $|I| = q\nu$ ,  $|O| = p\nu$ ,  $G$  vérifie la propriété d'  $(\alpha, \beta)$ -extension si et seulement si pour tout  $s \leq \alpha q\nu$ ,  $B$  ne contient pas de  $s \times (p\nu - \beta s + 1)$  mineur identiquement nul. (Sinon les  $s$ -inputs correspondants auraient au plus  $p\nu - (p\nu - \beta s + 1) = \beta s - 1$  voisins correspondant aux numéros de colonnes restants.)

A tout  $\sigma^k \in (\mathcal{S}_{pq\nu})^k$  on associe le graphe défini en 2) et sa matrice  $B$ . On dit que  $\sigma^k$  est "mauvais" s'il existe  $s \leq \alpha q\nu$  tel que  $B$  contienne un mineur nul de taille  $s \times (p\nu - \beta s + 1)$ . Nous allons montrer que (sous certaines conditions), le nombre de "mauvais" éléments est strictement inférieur à  $\text{card} (\mathcal{S}_{pq\nu})^k = \{(pq\nu)!\}^k$ . Fixons nous un tel  $s$  et un tel mineur. Le nombre de "mauvais" éléments ayant ce mineur nul est:

$$c_{p, q, \nu, s, k} = \left[ \frac{(pq\nu - ps)! (q\beta s - q)!}{(q\beta s - ps - q)!} \right]^k$$

En effet chaque coordonnée de  $\sigma^k$  doit injecter les  $ps$  éléments correspondant aux  $s$  indices de lignes du mineur dans les  $q\beta s - q$  éléments correspondant aux  $\beta s - 1$  indices de colonnes permis et bijecter les  $pq\nu - ps$  éléments restants dans les places restantes.

A  $s$  fixé, le nombre de ces mineurs potentiels est  $C_{q\nu}^s C_{p\nu}^{\beta s-1}$ . Le nombre de mauvais éléments est donc majoré par :

$$\sum_{s=1}^{\alpha q\nu} C_{q\nu}^s C_{p\nu}^{\beta s-1} \quad c_{p,q,\nu,s,k}$$

et par conséquent le problème est de rendre cette somme strictement inférieure à  $\{(pq\nu)!\}^k$ , ce qui est équivalent à montrer :

$$\sum_{s=1}^{\alpha q\nu} C_{q\nu}^s C_{p\nu}^{\beta s-1} \left[ \frac{C_{ps}^{ps}}{C_{pq\nu}^{ps}} \right]^k < 1$$

Sous les conditions du théorème, Bassalygo fournit l'évaluation

$$\alpha q\nu \sup_s C_{q\nu}^s C_{p\nu}^{\beta s-1} \left[ \frac{C_{ps}^{ps}}{C_{pq\nu}^{ps}} \right]^k < \exp - \nu F(p,q,\beta,k) + O(\text{Log } \nu)$$

avec  $F(p,q,\beta,k) > 0$ , ce qui est strictement inférieur à 1 pour  $\nu$  suffisamment grand.

Remarques :

i) On a montré en fait un résultat plus fort, à savoir que dans la classe des graphes bipartis construits à partir de permutations, la probabilité (uniforme) d'être un  $(\alpha, \beta)$ -extenseur tend vers 1 quand  $\nu$  tend vers l'infini.

ii) Si  $p = q (=1)$ , on montre facilement, avec une probabilité tendant vers 1 quand  $\nu$  tend vers l'infini on a :

$$\forall A \subset I \quad , \quad |A| \leq \alpha |I| \quad \implies \quad |\Gamma(A)| \geq \beta |A|$$

$$\forall A' \subset O \quad , \quad |A'| \leq \alpha |O| \quad \implies \quad |\Gamma(A')| \geq \beta |A'|$$

(l'événement complémentaire a en effet une probabilité majorée par  $2 \exp - \nu F(1,1,\beta,k) + O(\text{Log } \nu)$ )

4) LA CONSTRUCTION DE GABER-GALIL

DEFINITION:

Un  $(n,k,c)$ -EXTENSEUR FORT est un graphe biparti  $k$ -régulier vérifiant  $|I| = |O| = n$  et

$$\forall A \subset I \quad |\Gamma(A)| \geq |A| (1+c(1-|A|/n))$$

Un  $(n,k,c)$ -EXTENSEUR FAIBLE est un graphe biparti ne vérifiant la même propriété que pour les  $A$  tels que  $|A| \leq n/2$ .

THEOREME (Gaber-Galil)

Soit  $A_m = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^2$  et les 5 permutations sur  $A_m$  définies par:

$$\begin{aligned} \sigma_0(x,y) &= (x,y) & ; & & \sigma_1(x,y) &= (x+y,y) & ; & & \sigma_2(x,y) &= (x,x+y) & ; \\ \sigma_3(x,y) &= (x+y+1,y) & ; & & \sigma_4(x,y) &= (x, x+y+1). \end{aligned}$$

Le graphe biparti  $G = (A_m, A_m; E)$  construit à l'aide de la superposition de ces permutations (voir 2)) est un  $(n,k,c)$ -extenseur fort avec

$$n = m^2, \quad k = 5, \quad c = (2 - \sqrt{3}) / 4 \quad \square$$

La preuve ([13],[25]) s'obtient en considérant le tore  $[0,1]^2$  et les 2 automorphismes:  $\tau_1(x,y) = (x,x+y)$  et  $\tau_2(x,y) = (x+y,y)$ .

Conséquence: construction d'un  $(1/2,1)$ -extenseur.

Soit  $p > 1$  un entier fixé et soit  $n > 0$  un entier tel que  $np/(p+1)$  soit entier pair. Construisons  $G = (I, O; E)$  de la manière suivante:  $I$  est divisé en  $I'$  et  $I''$  avec  $|I'| = |O| = np/(p+1)$  et  $|I''| = n/(p+1)$ .  $I'$  et  $O$  sont reliés par un  $(np/(p+1), k, 2/(p-1))$ -extenseur fort;  $I''$  et  $O$  sont reliés par le graphe obtenu à partir de la permutation identité sur  $O$  et la congruence mod  $p$  (cf. 2)).

LEMME: G est un  $(1/2, 1)$ -extenseur et  $|E| \leq k'n$  avec  $k' = kp/(p+1)$ .

Preuve du lemme:

Soit  $X \subset I$  tel que  $|X| \leq |I|/2$ . Posons  $x = |X|$  ;  $x' = |X \cap I'|$  et  $x'' = |X \cap I''|$ . Il s'agit de montrer que  $|\Gamma(X)| \geq |X|$ . Deux cas se présentent:

- si  $x'' \geq x/p$  ,  $|\Gamma(X)| \geq |\Gamma(X \cap I'')| = p|x \cap I''| \geq |X|$

- sinon  $x' > (p-1)x/p$  donc  $x' \geq x_0 = [(p-1)x/p] + 1$ . Considérons  $Y \subset X \cap I'$  tel que  $|Y| = x_0$ . On peut écrire :

$$x_0 \leq [(p-1)|I|/2p] + 1 = [(p^2-1)|I'|/2p^2] + 1$$

(car  $|I'|$  est pair et  $[(p^2-1)j/p^2] + 1 \leq j$  )

et finalement:

$$|\Gamma(X)| \geq |\Gamma(Y)| \geq 1 + \frac{2}{p-1} \left(1 - \frac{|Y|}{|I'|}\right) |Y| \geq \frac{p}{p-1} x_0 \geq x = |X|$$

Pour  $|E|$ , il suffit de remarquer que l'extenseur donne  $kpn/(p+1)$  arêtes et l'autre graphe  $p/(p+1)$ .  $\square$

Si on sait construire un  $(r, k, c)$ -extenseur fort ( $r$  pair) alors le lemme permet d'obtenir pour  $n, p$  tels que

$$np = (p+1)r \quad , \quad p-1 \geq 2/c$$

un graphe vérifiant  $|I| = n$  ,  $|O| = r < n$  ,  $|E| \leq (k+1)r = \frac{(k+1)p}{p+1} n$  .

ayant la propriété de  $(1/2, 1)$ -extension.

Exemple: grâce au théorème de Gaber-Galil, si  $k = 5$ ,  $p = 31$  et si  $np/(p+1)$  est un carré, on a un tel graphe.

Pour  $0 < \theta < 1$ , on note  $g_c(n, \theta, k)$  un graphe biparti tel que  $|I| = n$   $|O| = \theta n$  ,  $|E| \leq kn$  et vérifiant la propriété de  $(1/2, 1)$ -extension.

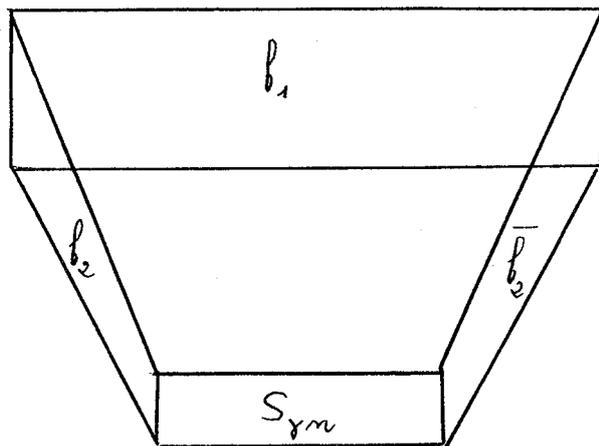
La méthode précédente permet de construire effectivement une famille  $g_c(n, \theta_n, k)$  avec  $k$  fixé,  $n$  tendant vers l'infini et  $\theta_n = \theta + o(1)$

5) CONSTRUCTIONS DE SUPERCONCENTRATEURS A PARTIR D'( $\alpha, \beta$ )-EXTENSEURS

Dans les paragraphes précédents nous avons obtenu l'existence d'une famille  $g_e(\alpha, \beta, p, q, \nu)$  d'( $\alpha, \beta$ )-extenseurs et la construction effective d'une famille  $g_c(n, \theta_n, k)$  de (1/2)-extenseurs.

Le principe de la construction de superconcentrateurs est une récurrence sur le nombre d'inputs; on construit un superconcentrateur  $S_n$  de  $n$  inputs à partir d'un ( $S_{\gamma n}$ ) de  $\gamma n$  inputs ( $\gamma < 1$ ) et de 3 extenseurs:

$f_1$	tel que	$ I  = n$	$ O  = n$
$f_2$		$n$	$\gamma n$
$\bar{f}_2$		$\gamma n$	$n$



$S_n$

On se fixe  $n_0$  et pour  $n \leq n_0$  on prendra pour  $S_n$  le graphe biparti complet.

Nous exposons 2 constructions (c-à-d.:  $f_1, f_2, \gamma$ ), celle de Pippenger (que nous détaillons) et celle de Bassalygo; puis nous dressons un bilan (provisoire).

a) Construction de Pipppenger ([22])

$f_1 = \text{Identité}$  ,  $f_2 \in g_c(n, \theta_n, k)$  ,  $\gamma = \theta_n$

On calcule le nombre d'arêtes par récurrence:

$$|E_n| \leq n + 2kn + |E_{\theta_n n}| \quad ; \quad \text{et } |E_n| \leq \text{cste pour } n \leq n_0$$

d'où

$$|E_n| \leq \frac{2k+1}{1-\theta} n + o(n)$$

Pour montrer la propriété de superconcentration, considérons les sous-ensembles  $X, Y$  vérifiant:

$$X \subset I \quad , \quad Y \subset O \quad , \quad |X| = |Y| = r \leq n.$$

Par  $f_1$ ,  $X$  s'injecte en  $X^0$  et  $Y$  en  $Y^I$ . On note

$$X_1 = X \cap Y^I \quad , \quad X_2 = X \setminus X_1 \quad , \quad Y_1 = X \cap X^0 \quad , \quad Y_2 = Y \setminus Y_1$$

qui vérifient évidemment:

$$|X_1| = |Y_1| \quad , \quad |X_2| = |Y_2| = j \leq n/2$$

D'après la définition de  $f_2$  et le théorème de König-Hall, il existe pour  $f_2$  un couplage saturant  $X_2$ .  $X_2$  est donc relié à  $j$  inputs de  $S$ . De même par  $\bar{f}_2$ ,  $Y_2$  est relié à  $j$  outputs de  $S$ . Comme  $X_1$  est trivialement relié à  $Y_1$ , on fait jouer l'hypothèse de récurrence et la démonstration est terminée.

b) Construction de Bassalygo ([6])

$f_1 \in g_e(\alpha, (1-\alpha)\alpha^{-1}, 1, 1, n)$  ,  $f_2 \in g_e(\alpha, 1, q, p, nq^{-1})$  ,  $\gamma = p/q$

c) Bilan

Grace à des choix particuliers des paramètres entrant en jeu dans les constructions précédentes et à certaines améliorations techniques (de la méthode Gaber-Galil par exemple) on peut affirmer:

- il existe une famille linéaire de superconcentrateurs de densité 30

- on peut construire effectivement une famille linéaire de superconcentrateurs de densité 123.

La méthode probabiliste peut être critiquée comme non-constructive, néanmoins elle indique que presque tous les graphes sont meilleurs que celui de Gaber-Galil. Cette remarque pourrait permettre de tourner la critique par l'argument suivant: on engendre aléatoirement un graphe -qui d'après 3) a de bonnes chances d'avoir les propriétés désirées-, puis on teste s'il les possède effectivement, sinon on recommence. Or tester la propriété de concentrateur, de  $(1/2, 1)$ -extenseurs ou de superconcentrateur est dans la classe des problèmes co-NP complets ([10] Ceci signifie que le contraire de la propriété est reconnaissable en un temps polynomial par une machine de Turing non-déterministe et que tous les autres problèmes de NP se transforment polynomialement en notre problème; autrement dit on peut considérer ce problème comme "impraticable". Alon et Milman ont montré que la méthode probabiliste était praticable à condition de repérer les propriétés d'expansion avec un autre indice, en fait la seconde valeur propre de la matrice d'adjacence.

CHAPITRE III : METHODES SPECTRALES

Nous nous intéressons ici aux relations entre les propriétés d'expansion d'un graphe (non nécessairement biparti) et le spectre de son "laplacien". Après la définition de deux notions nouvelles, l'une d'amplificateur (analogue non biparti d'extenseur fort) et l'autre (spectrale) d'agrandisseur, nous proposons un programme d'implications démontrées à l'aide de trois théorèmes importants et intéressants; deux de ces théorèmes ont d'ailleurs leur répondant et leur motivation en géométrie riemannienne.

En résumé il y a équivalence entre une forte expansion et une "seconde" valeur propre suffisamment grande

Nous en déduisons une méthode de test d'expansion de graphes engendrés aléatoirement et quelques applications à d'autres propriétés géométriques (diamètres, familles de Lévy)

1) AMPLIFICATEURS

DEFINITION 1:

Un  $(n,d,c)$ -AMPLIFICATEUR (en anglais "magnifier") est un graphe  $G = (V,E)$  avec  $|V| = n$ ,  $d^{\circ} \max = d$  et tel que :

$$\forall A \subset V, |A| \leq n/2 \implies |\Gamma(A) \setminus A| \geq c|A|$$

PROPOSITION (Alon)

- a) La double couverture d'un  $(n,d,c)$ -amplificateur est un  $(n,d+1,c)$ -extenseur faible
- b) Un  $(n,d,c)$ -extenseur fort est un  $(2n,d,c/16)$ -amplificateur

c) Soit  $G = (Y, Z; U)$  un graphe biparti  $d$ -régulier avec  $|Y|=|Z|=n$ ; si  $G$  est un  $(2n, d, c)$ -amplificateur,  $c$ 'est un  $(n, d, 2c/(d+1)(c+1))$ -extenseur fort.

La preuve, technique, est omise ici.

## 2) AGRANDISSEURS

Soit  $G = (V, E)$  un graphe, et  $|V| = n$ . La matrice d'adjacence ou matrice associée  $A(G)$  est la fonction symétrique de  $V^2$  dans  $\{0, 1\}$  définie par:

$$a_{uv} = 1 \iff uv \in E$$

Soit donnée une orientation de  $G$ . La matrice d'incidence  $C$  est la fonction de  $E \times V$  dans  $\{-1, 0, +1\}$  définie par:

$$\begin{aligned} c_{e,u} &= +1 \text{ si } u \text{ est extrémité finale de } e \\ &= -1 \text{ " " " initiale de } e \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

Définissons  $Q = C'C$ . On vérifie

$$Q = \text{diag} (d(u), u \in V) - A(G)$$

donc  $Q$  est symétrique et indépendante de l'orientation. Elle est positive en tant que forme quadratique. Comme le graphe est simple, ses valeurs propres sont:

$$0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{n-1}$$

Le vecteur constant est propre pour 0. On a  $\lambda_1 > 0$  si et seulement si le graphe est connexe. Il est commode de considérer

$$Q : L^2(V) \longrightarrow L^2(V)$$

comme l'opposé du laplacien pour  $G$  et

$$C : L^2(V) \longrightarrow L^2(E)$$

comme le gradient. On notera  $\lambda = \lambda_1(G)$ .

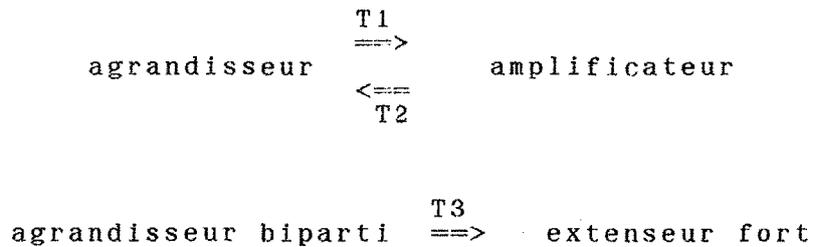
DEFINITION 2:

Un  $(n, d, \varepsilon)$ -AGRANDISSEUR (en anglais "enlarger") est un graphe à  $n$  sommets de  $d^\circ$  maximal  $d$  vérifiant:

$$\lambda \geq \varepsilon$$

3) LES IMPLICATIONS

Elles répondent au schéma suivant, dans lequel les constantes prévues par les définitions 1 et 2 sont omises.



T3 ([23]) est antérieur à T2 ([1]), mais outre l'intérêt de sa démonstration il fournit de meilleures constantes.

THEOREME 1 (Alon)

Un  $(n, d, c)$ -amplificateur est un  $(n, d, \varepsilon)$ -agrandisseur avec

$$\varepsilon = \frac{c^2}{4+2c^2}$$

THEOREME 2 (Alon-Milman)

Un  $(n, d, \varepsilon)$ -agrandisseur est un  $(n, d, c)$ -amplificateur avec

$$c = \frac{2\varepsilon}{d+2\varepsilon}.$$

THEOREME 3 (Tanner)

Soit  $G = (I, O; E)$  un graphe biparti,  $d$ -régulier avec  $|I|=|O|=n$ . Alors  $G$  est un  $(n, d, c)$ -extenseur fort avec

$$c = \frac{2d\lambda - \lambda^2}{d^2} \quad \left( \geq \frac{\lambda}{d} \right)$$

Preuve du théorème 1:

Il s'agit de l'analogie discret de l'inégalité de Cheeger ([11]) sur les variétés riemanniennes; le début de la preuve en est directement inspiré et la fin utilise le théorème du flot maximum.

Soit  $f$  fonction propre correspondant à  $\lambda$ . La fonction constante étant propre on a  $\sum_{v \in V} f(v) = 0$ . On pose  $V^+ = \{f > 0\}$ ,  $V^- = \{f \leq 0\}$  et on pour fixer les idées que  $0 < |V^+| \leq |V^-|$ . On a évidemment:

$$\lambda = \frac{\sum_{v \in V^+} Qf(v) f(v)}{\sum_{v \in V^+} f^2(v)} \quad (T1.1)$$

Nous allons montrer que si  $g = f \cdot 1_{V^+}$ , alors

$$\lambda \sum_{v \in V} g^2(v) \geq \sum_{v \in V} Qg(v) g(v) = \sum_{uv \in E} [g(u) - g(v)]^2 \quad (T1.2)$$

L'égalité résulte de la propriété  $Q = C' C$  et l'inégalité s'obtient à partir de l'écriture matricielle suivante, où  $F$  (resp.  $G$ ) est le vecteur colonne correspondant à  $f$  (resp.  $g$ ) et  $I^+$  (resp.  $I^-$ ) l'identité sur  $V^+$  (resp.  $V^-$ ) :

$$\sum_{v \in V^+} Qf(v) f(v) = (QF)' I^+ F = F' Q I^+ F = G' Q G + F' I^- Q I^+ F$$

(Comme  $I^- Q I^+$  n'a pas d'éléments diagonaux, on a :

$$F' I^- Q I^+ F = (-F I^-)' A (I^+ F) \geq 0.)$$

Nous allons maintenant appliquer le théorème du flot maximum: soit  $N = \{s, t, \bar{V}, \bar{E}, b\}$  ( $s$  est la source,  $t$  le puits,  $b$  la capacité) tel que  $\bar{V} =$  union disjointe de  $V^+$  et  $V$ , et  $\bar{E}$  défini par:

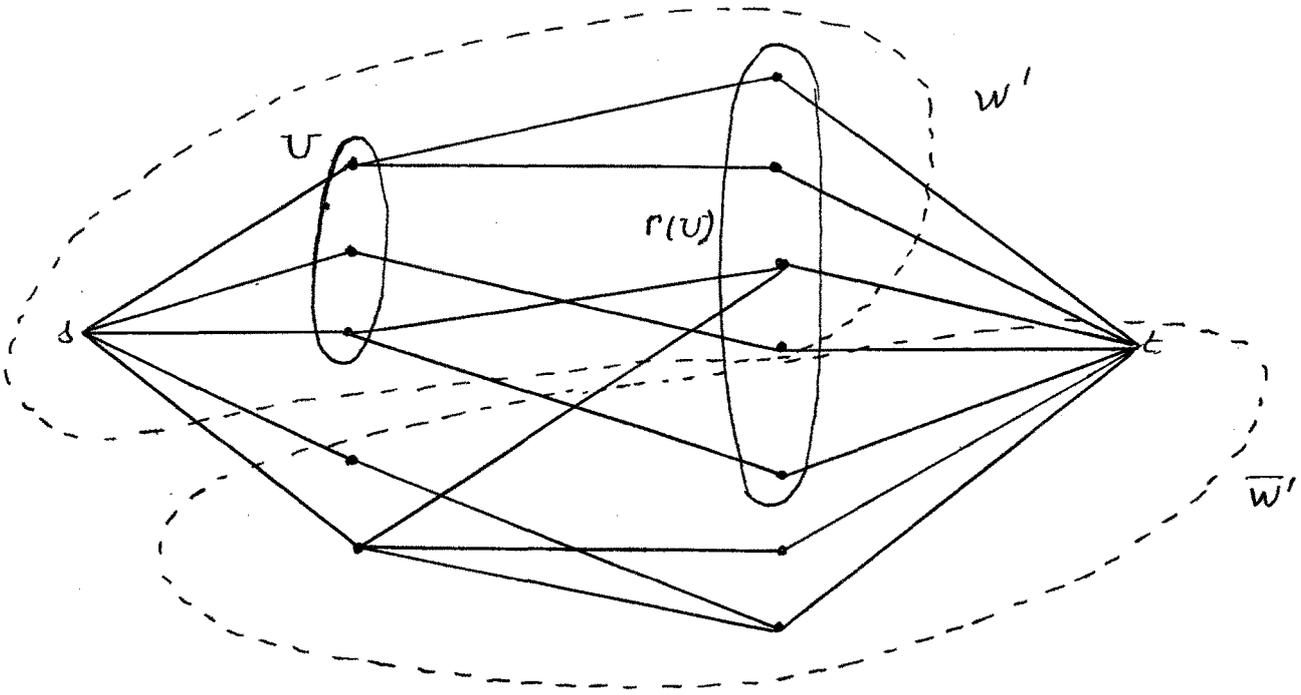
$$\begin{aligned} \forall u \in V^+ & , \quad su \in \bar{E} & \text{et} & \quad b(su) = 1+c \\ \forall v \in V & , \quad vt \in \bar{E} & \text{et} & \quad b(vt) = 1 \\ \forall u \in V^+ & , \quad uv \in \bar{E} & \text{et} & \quad b(uv) = 1 \text{ si } uv \in E \\ \forall v \in V & & & \quad b(uv) = 0 \text{ si } uv \notin E \end{aligned}$$

La coupe  $W = \{s\}$  de capacité  $(1+c)|V^+|$  est minimale. En effet si  $W'$  désigne une autre coupe, posons  $U = V^+ \cap W'$  et  $\Gamma(U)$  l'ensemble des voisins de  $U$  ( dans la composante  $V$  de  $\bar{V}$  ). On a clairement:

$$\begin{aligned} c(W', \bar{W}') &= \sum_{\substack{uv \in \bar{E} \\ u \in W', v \in \bar{W}'}} b(uv) \geq \sum_{v \in V^+ \setminus U} b(sv) + \sum_{u \in U, v \in W' \cap \Gamma(U)} b(uv) \\ & \quad + \sum_{u \in W' \cap \Gamma(U)} b(ut) \end{aligned}$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned} c (W', \bar{W}') &\geq (1+c) |V^+ \setminus U| + |\bar{W}' \cap \Gamma(U)| + |W' \cap \Gamma(U)| \\ &= (1+c) |V^+ \setminus U| + |\Gamma(U)| \end{aligned}$$



La propriété d'amplification, applicable car  $|V^+| \leq n/2$ , donne :

$$c (W', \bar{W}') \geq (1+c) |V^+|$$

Il existe donc un flot maximal de valeur  $(1+c)|V^+|$ , simultanément optimal avec la coupe  $\{s\}$ , donc une fonction  $h$  de  $\bar{E}$  (orienté) dans  $[0,1]$  vérifiant :

$$\begin{aligned} \text{i) } \sum_{v:uv \in \bar{E}} h(uv) &= 1+c \quad \text{si } u \in V^+ \\ &= 0 \quad \text{sinon} \end{aligned}$$

$$\text{ii) } \sum_{u:uv \in \bar{E}} h(uv) \leq 1 \quad \text{si } v \in V$$

( ii ) signifie que sur les arcs  $vt$  le flot maximal est compatible)

On en déduit:

$$\begin{aligned} \sum_{u,v: uv \in \bar{E}} h^2(uv) [g(u)+g(v)]^2 &\leq \sum_{u,v: uv \in \bar{E}} h^2(uv) [g^2(u)+g^2(v)] \\ &= \sum_{u \in V} g^2(u) \left[ \sum_{v: vu \in \bar{E}} h^2(vu) + \sum_{v: uv \in \bar{E}} h^2(uv) \right] \end{aligned}$$

De plus

$$\sum_{v: vu \in \bar{E}} h^2(uv) \leq (\sup h) \sum_{v: vu \in \bar{E}} h(vu) \leq 1$$

et

$$\sum_{v: uv \in \bar{E}} h^2(uv) \leq 1+c^2$$

(car sous les contraintes:

$$0 \leq h(uv) \leq 1 \quad \text{et} \quad \sum_v h(uv) = 1+c$$

le maximum de  $\sum_v h^2(uv)$  est atteint au bord, l'un des  $h$  vaut 1, la somme des autres vaut  $c$ , et la somme de ces carrés est majorée par  $c^2$ )

La conclusion provisoire est donc:

$$\sum_{u,v: uv \in \bar{E}} h^2(uv) [g(u)+g(v)]^2 \leq 2(2+c^2) \sum_{u \in V} g^2(u) \quad (T1.3)$$

Comme d'autre part  $g$  est nul hors de  $V$ , on a facilement:

$$\begin{aligned} \sum_{u,v: uv \in \bar{E}} h(uv) [g^2(u) - g^2(v)] &= \sum_{u \in V^+} g^2(u) \left[ \sum_{v \in V} h(uv) - \sum_{v \in V^+} h(vu) \right] \\ &\geq c \sum_{v \in V} g^2(v) \quad (T1.4) \end{aligned}$$

La fin de la preuve consiste à juxtaposer (T1.2), (T1.3) et (T1.4) (les ensembles de sommation étant désormais clairs):

$$\begin{aligned} \lambda &\geq \frac{\sum [g(u)-g(v)]^2}{\sum g^2(v)} \geq \frac{\sum [g(u)-g(v)]^2 \cdot \sum h^2(uv) [g(u)+g(v)]^2}{2(2+c^2) [\sum g^2(v)]^2} \\ &\geq \frac{\{ \sum h(uv) [g^2(u)-g^2(v)] \}^2}{2(2+c^2) [\sum g^2(v)]^2} \geq \frac{c^2}{4+2c^2} \end{aligned}$$

Preuve du théorème 2:

Nous avons besoin d'un lemme issu de la géométrie riemannienne.

Lemme : (Alon, Milman)

Soit  $G = (V, E)$  un graphe à  $n$  sommets, de degré maximal  $d$  et soit  $\lambda = \lambda_1(G)$ . Si  $A, B \subset V$  vérifient  $\rho = \rho(A, B) > 1$ , alors en posant  $|A| = na$ ,  $|B| = nb$ , on a:

$$b \leq \frac{1-a}{\left(1 + \frac{\lambda}{d} a \rho^2\right)} \quad \square$$

Admettant ce résultat, si  $X \subset V$ ,  $|X| \leq n/2$ , on peut prendre  $A = X$ ,  $B = V \setminus (X \cup \Gamma(X))$ . Comme on a clairement  $\rho \geq 2$ ,  $\lambda \geq \varepsilon$ , on peut écrire:

$$1 - \frac{|X| + |\Gamma(X) \setminus X|}{n} \leq \left(1 - \frac{|X|}{n}\right) \left(1 + \frac{4\varepsilon |X|}{dn}\right)^{-1}$$

d'où:

$$|\Gamma(X) \setminus X| \geq \frac{4\varepsilon}{d + \frac{4\varepsilon|X|}{n}} \left(1 - \frac{|X|}{n}\right) |X| \geq \frac{2\varepsilon}{d+2\varepsilon} |X| \quad \square$$

Preuve du lemme:

Pour toute  $f$  orthogonale à la constante 1, on a (Rayleigh):

$$\lambda \sum_{v \in V} f^2(v) \leq \sum_{v \in V} Qf(v) f(v) \quad (L1)$$

Nous allons l'appliquer à  $f = g - m$  avec

$$g(v) = a^{-1} - \rho^{-1}(a^{-1} + b^{-1}) (\rho(v, A) \wedge \rho) \quad \text{et} \quad m = n^{-1} \sum_{v \in V} g(v)$$

Si  $E(A)$  (resp.  $E(B)$ ) désigne l'ensemble des arêtes de  $G$  ayant tous leurs sommets dans  $A$  (resp. dans  $B$ ), la fonction  $g$  qui vaut  $a^{-1}$  sur  $A$  et  $-b^{-1}$  sur  $B$  vérifie:

$$\begin{aligned} Cg(e) &= 0 && \text{si } e \in E(A) \cup E(B) \\ |Cg(e)| &= \rho^{-1}(a^{-1} + b^{-1}) && \text{sinon} \end{aligned}$$

En vertu de (L1) on a donc:

$$\lambda \sum_{v \in V} (g(v) - m)^2 \leq \sum_{e \in E} |Cg(e)|^2 \leq \rho^{-2} (a^{-1} + b^{-1})^2 (|E| - |E(A)| - |E(B)|)$$

D'autre part on a facilement:

$$\begin{aligned} \lambda \sum_{v \in V} (g(v) - m)^2 &\geq \lambda \sum_{v \in A \cup B} (g(v) - m)^2 = \lambda [na(a^{-1} - m)^2 + nb(b^{-1} + m)^2] \\ &\geq \lambda n(a^{-1} + b^{-1}) \end{aligned}$$

ce qui implique:

$$\lambda n \leq \rho^{-2} (a^{-1} + b^{-1}) (|E| - |E(A)| - |E(B)|) \quad (L2)$$

Nous allons enfin utiliser l'hypothèse  $\rho > 1$ . Chaque arête de  $E \setminus (E(A) \cup E(B))$  est incidente à au moins un des  $n(1-a-b)$  sommets de  $V \setminus (A \cup B)$  donc on a  $|E| - |E(A)| - |E(B)| \leq n(1-a-b)d$  ce qui permet de conclure.  $\square$

Preuve du théorème 3:

Si  $G = (I, 0; E)$  est un graphe biparti et si  $B$  est la matrice, fonction de  $I \times 0$  dans  $\{0, 1\}$  définie par

$$b_{i0} = 1 \quad \iff \quad i0 \in E$$

on a  $A = \begin{bmatrix} 0 & B \\ B' & 0 \end{bmatrix}$  et  $\text{Sp } A$  est un ensemble symétrique (c'est une

condition suffisante pour être biparti). Si  $G$  est  $d$ -régulier,  $BB'$  qui est positive a pour spectre

$$\mu_0 = d^2 \geq \mu_1 = (d-\lambda)^2 \geq \dots$$

où  $\lambda = \lambda_1(G)$ , le vecteur constant étant propre pour  $\mu_0$ .

On confond désormais un sous-ensemble de  $I$  ou  $0$  et son vecteur ligne indicateur. Si  $X \subset I$  on a:

$$(XB)_k = \text{card} \{ i \in X : ik \in E \}$$

$$\sum (XB)_k = d|X|, \quad \{ k : (XB)_k \neq 0 \} = \Gamma(X)$$

Si on pose  $|X| = xn$  l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne:

$$||XB||^2 \geq |\Gamma(X)|^{-1} \left[ \sum (XB)_k \right]^2 = |\Gamma(X)|^{-1} (dxn)^2$$

d'où:

$$|\Gamma(X)| \geq ||XB||^{-2} (dxn)^2$$

Pour majorer  $||XB||$ , considérons  $e_i$ ,  $i = 0, \dots, n-1$  une base ortho-normée de vecteurs propres de  $BB'$  et  $\mu_i$  les valeurs propres correspondantes. On a :

$$\begin{aligned} X &= \sum \gamma_i e_i \quad , \quad \gamma_0 = X e'_0 = n^{-1/2} |X| = x n^{1/2} \\ ||XB||^2 &= (XBB')X' = \sum \mu_i \gamma_i^2 = \mu_0 x^2 n + \sum \mu_i \gamma_i^2 \\ &\leq \mu_0 x^2 n + \mu_1 \sum \gamma_i^2 = (\mu_0 - \mu_1) x^2 n + \mu_1 ||X||^2 \\ &\leq x n [(\mu_0 - \mu_1) x + \mu_1] \end{aligned}$$

d'où, en remplaçant  $\mu_0$  et  $\mu_1$  par leurs valeurs :

$$|\Gamma(X)| \geq \frac{d^2 x n}{(\mu_0 - \mu_1) x + \mu_1} = \left\{ 1 + \frac{(2d\lambda - \lambda^2)(1-x)}{d^2 - (2d\lambda - \lambda^2)(1-x)} \right\} n x$$

Or  $\lambda \leq d$  donc  $d^2 \geq 2d\lambda - \lambda^2 \geq 0$  et par suite :

$$|\Gamma(X)| \geq \left\{ 1 + \frac{2d\lambda - \lambda^2}{d^2} (1-x) \right\} n x$$

#### Comparaison des bornes de Alon-Milman et Tanner.

Soit  $G$  un graphe biparti  $d$ -régulier et  $\lambda_1(G) = \varepsilon$ . D'après le théorème 2 c'est un  $(2n, d, 2\varepsilon/d + 2\varepsilon)$ -amplificateur et d'après la proposition c) du 1) c'est un  $\{n, d, 4\varepsilon/(d+1)(d+4\varepsilon)\}$ -extenseur fort.

D'après le théorème 3) c'est un  $\{n, d, (2d\varepsilon - \varepsilon^2)/d^2\}$ -extenseur fort. On montre facilement que cette borne (de Tanner) est meilleure. C'est en effet équivalent à dire que :

$$(d-1)(2d-\varepsilon)(d+4\varepsilon) - 4d^2 \geq 0$$

ou encore

$$4\varepsilon^2(d+1) - 7\varepsilon d(d+1) - 2d^2(d-1) \leq 0$$

Les racines  $\varepsilon_0$  et  $\varepsilon'_0$  de ce trinôme vérifient :  $\varepsilon'_0 < 0 < d < \varepsilon_0$  ; comme  $\varepsilon$  est toujours inférieur à  $d$ , la propriété est donc vraie.

4) GENERATION D'EXTENSEURS FORTS.

Revenons à la problématique du chap. II 5) c). Engendrant des graphes bipartis "aléatoirement" nous ne savions pas tester leurs propriétés de concentration.

Donnons nous  $c < 1/2$  et, avec les notations de II) 3),  $\alpha = (2+c)/4$ ,  $\beta = 1+c$ ,  $p = q = 1$  et  $k$  vérifiant (\*). D'après la remarque 2), presque tout graphe obtenu en engendrant aléatoirement  $k$  permutations vérifie la propriété (\*\*). Montrons qu'alors  $c$ 'est un  $(2\nu, k, c)$ -amplificateur.

Soit  $X \subset I \cup O$ ,  $|X| \leq \nu$ ,  $X_1 = X \cap I$ ,  $X_2 = X \cap O$ . Si  $|X_1| \vee |X_2| \leq \alpha\nu$  alors

$$|\Gamma(X) \setminus X| \geq \beta|X_1| - |X_2| + \beta|X_2| - |X_1| = c|X|.$$

Sinon on a par exemple  $|X_1| > \alpha\nu$  donc  $|X_2| \leq (1-\alpha)\nu$  et

$$|\Gamma(X) \setminus X| \geq |\Gamma(X_1) \setminus X_2| \geq \beta\alpha\nu - (1-\alpha)\nu \geq c\nu \geq c|X|.$$

Grace au théorème 1,  $c$ 'est un  $(2\nu, k, \varepsilon(c))$ -agrandisseur, ce qui nous conduit aux extenseurs forts via le théorème 3.

La méthode proposée est la suivante:

- engendrer  $k$  permutations
- calculer la valeur propre principale  $\lambda$  du graphe biparti associé
- si  $\lambda < \varepsilon(c)$ , recommencer
- si  $\lambda \geq \varepsilon(c)$ , on a construit un  $(\nu, k, \chi)$ -extenseur fort avec

$$\chi \geq k^{-2} (2k\lambda - \lambda^2) \geq \frac{c^2}{(4+2c^2)k^2} \left( 2k - \frac{c^2}{4+2c^2} \right) = \chi(c, k)$$

Exemple numérique:

$$k = 3, c = 1/8, \varepsilon(c) = 1/258, \chi(c, k) = 0.025.$$

5) QUELQUES CONSEQUENCES DU LEMME D'ALON-MILMAN.

a) Augmentation du coefficient d'expansion.

D'après le théorème 2,  $c$  croît avec  $e/d$  et donc on peut se demander comment, à partir d'un graphe à faible valeur propre  $\lambda$ , en construire un autre ayant une amplification plus forte.

On rappelle que la puissance  $k$ -ième d'un graphe  $G = (V, E)$  est le graphe  $G^k = (V, E_k)$  où  $uv \in E_k$  si et seulement si  $\rho(u, v) \leq k$ .

Théorème : (Alon)

Soit  $G = (V, E)$  de degré maximal  $d$ , tel que  $|V| = n$  et  $\lambda = \lambda_1(G)$ .

Alors  $G^k$  est un  $(n, d', c')$ -amplificateur, avec

$$d' \leq d \{1 + (d-1) + \dots + (d-1)^{k-1}\} \quad \text{et} \quad c' = \frac{\lambda(k+1)^2}{2d + \lambda(k+1)^2}$$

Pour atteindre un  $c'$  donné il faut prendre  $k = \Omega(d/\lambda)$ .

Démonstration:

Elle est analogue à celle du théorème 2. Soit  $A \subset V$  avec  $|A| \leq n/2$  et  $B = V \setminus (A \cup \Gamma_{G^k}(A))$ . Comme  $\rho(A, B) \geq k+1$  par définition de  $G^k$ , il suffit d'appliquer le lemme d'Alon-Milman.

b) Autres propriétés géométriques liées à  $\lambda_1(G)$  ([5])

Le lemme d'Alon-Milman peut être amélioré. Le théorème qui suit constitue la base d'une majoration du diamètre (voir corollaire) et de résultats sur les familles (concentrées) de Lévy de graphes.

Théorème :

Sous les conditions du lemme, si  $\rho \geq 1$ , on a :

$$b \leq (1-a) \exp - \{ \lfloor \rho \sqrt{\lambda / 2d} \rfloor \log(1+2a) \}$$

Preuve :

En appliquant (L) à  $A = \{u\}$ ,  $B = V \setminus \{u\}$  on montre que, pour  $n \geq 2$

$$\mu \stackrel{\text{déf}}{=} \sqrt{2d / \lambda} \geq 1$$

Pour  $F \subset V$  et  $r \in \mathbb{R}_+$  notons

$$W_r(F) = \{ v \in V : \rho(v, F) \leq r \} \text{ et } f_r = |W_r(F)| / n$$

Pour  $0 \leq j < k \stackrel{\text{déf}}{=} \lfloor \rho / \mu \rfloor$ , on a sous les conditions énoncées :

$$s = \rho( W_{j\mu}, V \setminus W_{(j+1)\mu}(A) ) > \mu \geq 1$$

d'où, en appliquant le lemme d'Alon-Milman

$$(1-a_{j\mu}) / (1-a_{(j+1)\mu}) \geq 1 + \frac{\lambda_1}{d} a_{j\mu} s^2 \geq 1 + \frac{\lambda_1}{d} a \mu^2 = 1+2a.$$

En remarquant que  $B \subset V \setminus W_{k\mu}$  et en itérant, on aboutit au résultat.

$k\mu$

Corollaire :

Soit  $G = (V, E)$  un graphe connexe de degré maximal  $d$ . Si  $|V| = n$  et  $\lambda = \lambda_1(G)$ , le diamètre de  $G$  est majoré par :

$$2 \lfloor \sqrt{2d / \lambda} \log_2 n \rfloor \quad \square$$

Preuve:

Soit  $\rho = \sqrt{2d/\lambda} \log_2 n$ . Si  $A \subset V$  vérifie  $|A| \geq n/2$ , alors

$W_{\lfloor \rho \rfloor}(A) = V$ . En effet si  $B = V \setminus W_{\lfloor \rho \rfloor}(A)$ , le théorème précédent donne

$$b \leq 1/2 \exp -\lfloor \log_2 n \rfloor \log 2 < n^{-1}, \text{ d'où } b = 0.$$

On a enfin la suite d'implications:

$$v \notin W_{\lfloor \rho \rfloor}(V \setminus W_{\lfloor \rho \rfloor}(v)) \implies W_{\lfloor \rho \rfloor}(V \setminus W_{\lfloor \rho \rfloor}(v)) \neq V$$

$$\implies V \setminus W_{\lfloor \rho \rfloor}(v) < n/2 \implies W_{\lfloor \rho \rfloor}(v) \geq n/2$$

$$\implies W_{\lfloor \rho \rfloor}(W_{\lfloor \rho \rfloor}(v)) = V$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ALON N. Eigenvalues and expanders.  
Preprint (1984)
- [2] ALON N. Expanders, sorting in rounds and superconcentrators of limited depth.  
Preprint (1984)
- [3] ALON N., GALIL Z., MILMAN V.D. Better expanders and superconcentrators.  
Preprint (1985)
- [4] ALON N., MILMAN V.D. Eigenvalues, expanders and superconcentrators, Proceedings 25<sup>th</sup> Ann. Symp. on Found. of Comp. Sci. pp.320-322, Florida (1984).
- [5] ALON N., MILMAN V.D.  $\lambda_1$ , isoperimetric inequalities for graphs and superconcentrators.  
Journ. of Combin. Theory B 38, pp 73-88 (1985).
- [6] BASSALYGO L.A. Asymptotically optimal switching circuits.  
Prob. of Inform. Transm., 17 pp 206-211 (1981)
- [7] BASSALYGO L.A., PINSKER M.S. Complexity of an optimum nonblocking switching network without reconnections.  
Prob. of Inform. Transm. pp. 64-66 (1973)
- [8] BENES V.E. Mathematical theory of connecting networks and telephone traffic.  
Academic Press, Londres New-York (1965)
- [9] BIGGS N. Algebraic graph Theory.  
Cambridge Univ. Press, (1974)
- [10] BLUM M., and alt. The complexity of testing whether a graph is a superconcentrator.  
Inform. Process. Letters 13, pp 164-167 (1981)
- [11] CHEEGER J. A lower bound for the smallest eigenvalue of the laplacian.  
in Prob. in Analysis (ed. R.C. GUNNING) Princeton Univ. Press, pp 195-199 (1970)

- [12]CHUNG F.K.R. On concentrators,superconcentrators,generalizers and nonblocking networks.  
Bell Syst. Techn. Journ. 58 pp 1765sq (1978)
- [13]GABBER G.,GALIL Z. Explicit construction of linear sized superconcentrators.  
Journ. of Comp. and Syst. Sci. 22 pp 407-420 (1981)
- [14]GROMOV M. Filling Riemannian manifolds.  
Journ. of Diff. Geom. 18 pp 1-147 (1983)
- [15]GROMOV M.,MILMAN V.D. A topological application of the isoperimetric inequality.  
Amer. Journ. of Math. 105 pp 843-854 (1983)
- [16]JA'JA J. Time-space tradeoffs por some algebraic problems.  
Proc. 12<sup>th</sup> Ann. ACM Symp. on Theor. of Comp. pp 339-350 (1980)
- [17]LENGAUER T.,TARJAN R.E. Asymptotically tight bounds on time-spece tradeoffs in a pebble game.
- [18]LEVY P. Problemes concrets d'analyse fonctionnelle.  
Gauthier- Villard, Paris 1951.
- [19]MARGULIS G.A. Explicit construction of concentrators.  
Prob. of Inf. Transm. pp 323-332 (1975).
- [20]NUSSBAUMER H.J. Fast Fourier Transform and convolution algorithms  
Springer Verlag (1982)
- [21]PINSKER M. On the complexity of a concentrator.  
7<sup>th</sup> Intern. Teletraffic Conf., Stockholm, 1973, 318/1-318/4.
- [22]PIPPENGER N. Superconcentrators.  
SIAM Journ. Comp. 6 pp 298-304 (1977)
- [23]PIPPENGER N. On rearrangeable and non blocking switching networks  
Journ. on Comp. and Syst. Sci. 17 pp 145-162 (1978)
- [24]PIPPENGER N. A new lower bound for the number of switches in rearrangeable networks.  
SIAM Journ. on Alg. Disc. Meth. Vol.1 n°2 (1980)
- [25]PIPPENGER N. Telephone switching networks.  
Proc. of Symp. in Appl. Math. 26 pp 101-133 (1982)
- [26]SHANNON C.E. Memory requirements in a telephone exchange.  
Bell Syst. Tech. Journ. 29 ,pp.343-349 (1950).

- [27]TANNER R.M. Explicit construction of concentrators from generalized n-gons.  
SIAM Journ. on Alg. Disc. Meth. 5 pp 287-293 (1984)
- [28]TOMPA M. Time-space tradeoffs for computing functions, using connectivity properties of their circuits.  
Journ. of Comp. and Syst. Sci. 20 pp 118-132 (1980)
- [29]VALIANT L.G. Graph theoretic properties in computational complexity.  
Journ. of Comp. and Syst. Sci. 13 pp 278-285 (1976)
- [30]VALIANT L.G. Graph theoretic arguments in low level complexity.  
Lect. Notes in Computer Science 53 pp 162-176 (1977) □