UNIVERSITÉ PARIS XI
U.E.R. MATHÉMATIQUE
91-ORSAY (FRANCE)

N° 21

séminaire

d'algèbre non commutative

(1972)

(Publications mathématiques d'Orsay)

-:- 2ème Partie -:-

-:-:-:-

TABLE DES MATIERES

-:-:-:-:-:-:-:-:-

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

CENTRE D'ORSAY

-:-:-:-

RECTIFICATIF à l'exposé n° 5 du 1.12.1971

FONCTEUR D'ENVELOPPE INJECTIVE

par Emilio VILLANUEVA NÓVOA

-:-:-:-:-

Le contenu de cette note est une rectification au mémoire "Foncteur d'enveloppe injective" dont l'objet était de résoudre le problème ouvert posé par P. Hilton sous la forme suivante (voir [1]) :

"Est-ce qu'un homomorphisme $\beta : B_1 \to B_2$ induit un homomorphisme $\gamma : E_1 \to E_2$ des extensions injectives minimales ?"

Dans le mémoire, on assure que la réponse à cette question est affirmative si on construit les enveloppes injectives canoniquement, et on y donne une construction fonctorielle. Une faute commise dans la démonstration de (3.3.9.) (p. 5.10.) fait qu'on doit restreindre la généralité de cette construction.

Cependant la construction est valable, à une rectification près, pour tous les modules à sous-module singulier nul ; c'est-à-dire, la méthode utilisée dans le mémoire pour la construction de l'enveloppe injective demeure valable pour les modules qui n'ont pas d'éléments non nuls annulés par des idéaux essentiels dans l'anneau.

Toutes les références de cette note sont à [1].

Dans (3.3.4.) (p. 5.8.) on considère $\Phi_A = \bigcup_{I \in Id(R)} Hom(I,A)$ $(Id(R) = \{I \subset R \mid I$ est idéal à gauche de $R\}$, on construit, pour chaque R-module A, le R-module libre à gauche $F\Phi_A$ et on considère le sous-module M_A de $F\Phi_A$ des éléments $x \in F\Phi_A$ qui admettent une expression (non nécessairement canonique) $x = \Sigma \mu_i f_i$, telle que pour chaque $\lambda \in \cap (I_i : \mu_i)$ on a $\Sigma f_i(\lambda\mu_i) = 0$, I_i étant le domaine de f_i. On définit $DA : F\Phi_A/M_A$ (première sous-enveloppe injective) et on démontre qu'il existe un monomorphisme $i_A : A \to DA$ qui est une extension essentielle (3.3.9.) (P.5.10.). Mais cela n'est pas vrai dans tous les cas, car si $a \in A$ est tel que $(0:a) \neq 0$, l'élément $\bar{a} \subset F\Phi_A$ peut admettre une expression

$$\bar{a} = 1.\bar{a} + 1.g - 1.g ,$$

où $g : (0:a) \to A$ est un homomorphisme (s'il en existe un), et alors

$$\forall\lambda \in R \cap((0:a):1) \cap ((0:a):(-1)) = R \cap((0:a):1) = (0:a)$$

on obtient $\bar{a}(\lambda.1) + g(\lambda.1) - g(\lambda.1) = \bar{a}(\lambda) = \lambda a = 0$.

Pour la rectification de (3.3.9.) on va faire usage du

<u>LEMME</u> : <u>Soit A un R-module à gauche unitaire (R est toujours un anneau unitaire et, en général, non commutatif). Alors tout R-homomorphisme $f : I \to A$, où I est un idéal à gauche de R, admet une extension $f' : I' \to A$, où I' est un idéal à gauche essentiel dans R.</u>

Pour un R-module A quelconque on considère $\Phi_{eA} := \bigcup_{I \in Id_e(R)} \mathrm{Hom}(I,A)$, où, maintenant, $Id_e(R)$ est l'ensemble des idéaux essentiels dans R. On construit, de façon formellement identique à celle du mémoire, le R-module DA et on établit au lieu de (3.3.9.) la proposition :

"$i_A : A \to DA$ est une première sous-enveloppe injective si $ZA = 0$"

$ZA := \{a \in A | (0:a)$ est un idéal essentiel dans $R\}$ est le sous-module singulier de A. (c'est-à-dire, on ajoute l'hypothèse $ZA = 0$ à la proposition (3.3.9.)).

En effet, i_A est maintenant un monomorphisme, car si $\bar{a} \in M_A$, $\bar{a}$ admet une expression, non nécessairement canonique :

$$\bar{a} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \bar{a} + \Sigma\nu_i f_i \quad (\text{avec } \sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1 \text{ et } \Sigma\nu_i f_i = 0 , f_i \in \Phi_{eA})$$

telle que, pour chaque $\lambda \in R \cap (\cap(I_i:\nu_i))$, ($I_i$ le domaine de f_i), on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{a}(\lambda\mu_i) + \Sigma f_i(\lambda\nu_i) = \lambda a = 0 .$$

Mais $\cap (I_i:\nu_i)$ est un idéal à gauche essentiel dans R et alors la condition $\bar{a} \in M_A$ équivaut à : $a \in ZA$ (c'est-à-dire $\mathrm{Ker}(i_A) = ZA$) . La condition $ZA = 0$ nous donne ce qu'on veut.

DA est première sous-enveloppe injective car pour cela il suffit que tout diagramme :

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & R \\ A \arrow[r, hook, "i_A"] & DA \end{tikzcd} \qquad (I \text{ idéal de } R)$$

puisse être complété à un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[d, "f'"] \\ A \arrow[r, hook, "i_A"] & DA \end{tikzcd}$$

ce qui résulte du lemme précédent.

Toutes les proposition postérieures à (3.3.9.) demeurent valables en considérant Φ_{eA} au lieu de Φ_A , et en utilisant toujours des idéaux essentiels dans R et des R-modules à sous-module singulier nul.

Les foncteurs D^{Ω} , (3.3.9.), et D^{1} , (3.5.1.), sont maintenant endofoncteurs de M_R^{o} , sous-catégorie de M_R de tous les R-modules à sous-module singulier nul. Si R est un anneau à idéal singulier nul, alors $Z(A/ZA) = 0$ pour tout R-module A , et DA est première sous-enveloppe injective de A/ZA .

En conclusion, on répond affirmativement au problème posé par P. Hilton dans le cas de R-modules A tels que $ZA = 0$.

<u>REFERENCES</u> :

[1] E. VILLANUEVA NÓVOA, "Foncteurs d'enveloppe injective". Séminaire d'Algèbre non commutative, n° 1. Conférence n° 5 du 1.12.1971. Publications mathématiques d'Orsay (1971-1972).

-:-:-:-:-:-

UNIVERSITE PARIS-SUD XI

CENTRE D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 9 du 12.1.1972

-:-:-:-:-:-:-

MODULES ET ANNEAUX QUASI-CONTINUS

par Louis JEREMY

-:-:-:-:-:-:-

I. INTRODUCTION.

Cette étude est le développement d'une note (C.R. Acad. Sc. Paris, t. 273, p. 80-83, 12 juillet 1971) dont certains résultats ont été améliorés depuis.

L'origine de ce travail est dans l'étude des articles de Yuzo Utumi sur les anneaux continus.

Nous appelons "module quasi-continu" un module stable par tout projecteur de son enveloppe injective. Un anneau unitaire A est dit "quasi-continu à gauche" (resp. à droite) si le A-module à gauche ${}_A A$ (resp. à droite A_A) est quasi-continu. Cette définition est plus générale que celle d'anneau continu à gauche donnée par Yuzo Utumi, et quand l'anneau est régulier, elles coïncident (§ III).

Carl Faith ([3], Théorème 2, p. 186) caractérise les anneaux quasi-frobénusiens par le fait que $A^{(\mathbb{N})}$ est un A-module à gauche injectif. Nous montrons que A est quasi-frobénusien si et seulement si $A^{(\mathbb{N})}$ est un A-module à gauche quasi-continu. Plus généralement, nous montrons que si M est un A-module à gauche, alors $M^{(\mathbb{N})}$ est quasi-continu si et seulement si M est Σ-quasi-injectif, ce qui étend la notion de Σ-quasi-injectivité étudiée par A. Cailleau et G. Renault [2] (Corollaire 4.4.). Nous avons été amenés à expliquer cette "densité" des projecteurs d'un module isotypique. On sait que Yuzo Utumi, prolongeant un résultat de Wolfson et Zelinsky qui concernait l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension $n>1$, a montré [11] qu'un anneau régulier auto-injectif à gauche tel que tout idéal bilatère non nul contienne un élément nilpotent non nul est engendré (en tant qu'anneau) par ses idempotents, et aussi par ses éléments inversibles. Nous prolongeons ce résultat en montrant que l'anneau des endomorphismes d'un module isotypique est toujours engendré respectivement par ses projecteurs, ses éléments inversibles, ses éléments de carré nul. En particulier, tout anneau de matrices $\mathfrak{M}_n(A)$, $n > 1$, sur un anneau A unitaire quelconque est engendré par ses matrices idempotentes (Corollaire 4.10.).

Nous étudions ensuite (§ V) quelques décompositions des anneaux quasi-continus à gauche. Nous montrons en particulier que si l'anneau A quasi-continu à gauche vérifie la condition $eAf = 0 \Longrightarrow fAe = 0$ $(e = e^2, \ f = f^2)$, alors il existe un idempotent central $e \in A$ (resp. $e' \in A$) tel que Ae soit l'idéal bilatère (resp. à gauche) maximum réduit (sans élément nilpotent $\neq 0$) de A (Corollaire 5.4.). Nous donnons une décomposition analogue quand A est quasi-continu à gauche et à droite, sans autre condition (Théorème 5.11.).

Au cours du paragraphe VI, nous étudions l'enveloppe quasi-continue d'un module et nous montrons qu'un anneau à idéal singulier nul à gauche et à droite a même enveloppe injective à gauche et à droite si et seulement si il a même enveloppe quasi-continue.

Le dernier paragraphe est une étude de l'anneau associé à un module quasi-continu. Cela nous permet de donner une décomposition des modules quasi-continus.

II. NOTATIONS ET PRELIMINAIRES.

Les anneaux considérés sont toujours unitaires, non nécessairement commutatifs. Les modules considérés sont, sauf précision contraire, des modules à gauche.

Si N est un sous-module de M, $N \prec M$ signifie que M est extension essentielle de N. $E(M)$ désigne une enveloppe injective de M.

Nous notons $j(M) = \{h \mid h \in \mathrm{End}_A M, \ \mathrm{Ker}\, h \prec M\}$ et

$S(M) = \mathrm{End}_A M/j(M)$ est l'anneau associé à M. Pour un anneau A, nous notons

${}_A A$ (resp. A_A) le A-module à gauche (resp. à droite) A ; $j({}_A A)$ est alors égal à l'idéal singulier à gauche de A.

Si $X \subset A$, nous notons $\ell(X) = \{x \in A | xX = 0\}$ et $r(X) = \{x \in A | Xx = 0\}$.

Un anneau est dit régulier (au sens de Von Neumann) si tout idéal à gauche (resp. à droite) monogène est facteur direct. Alors tout idéal à gauche (resp. à droite) de type fini est facteur direct et les idéaux à gauche (resp. à droite) forment un treillis. Quand ce treillis est complet, l'anneau régulier est dit complet ; un anneau régulier est complet si et seulement si c'est un anneau de Baer (Yuzo Utumi [11], lemme 1).

Un anneau de Baer est un anneau dans lequel tout annulateur à gauche (resp. à droite) est facteur direct [5]. Dans un anneau de Baer les idéaux à gauche (resp. à droite) facteurs directs forment un treillis complet, la borne supérieure d'une famille $(Ae_i)_{i \in I}$, $e_i = e_i^2$, étant $\bigcup_{i \in I} Ae_i = \ell r(\sum_{i \in I} Ae_i)$, la borne inférieure étant leur intersection.

Un anneau régulier complet est dit continu à gauche (resp. à droite) si le treillis de ses idéaux à gauche (resp. à droite) facteurs directs est supérieurement continu. C'est-à-dire, dans le cas du treillis des idéaux à gauche, s'il est complet et s'il satisfait la condition

$$(\bigcup a_\alpha) \cap b = \bigcup (a_\alpha \cap b)$$

pour toute chaîne (a_α) et tout élément b (Yuzo Utumi [11], p. 598). Yuzo Utumi a montré qu'un anneau régulier est continu à gauche si et seulement si tout idéal à gauche complément est facteur direct [12]. Rappelons qu'un complément dans un module est un sous-module sans extension essentielle propre. Si N et K sont deux sous-modules de M, K est appelé complément relatif de N dans M si K est maximal parmi les sous-modules X de M qui vérifiant $N \cap X = 0$. Un module est bien complémenté si l'intersection de deux compléments est un complément, ou encore si tout sous-module est essentiel dans un complément unique [8].

Rappelons que si A est un anneau tel que $j({}_A A) = 0$, et si $B = E({}_A A)$, alors B est un anneau régulier auto-injectif à gauche et $\mathrm{End}_A B = \mathrm{End}_B A$, [6].

Un idéal à gauche (resp. à droite) d'un anneau A est dit réduit s'il ne contient aucun élément nilpotent (un élément nilpotent sera toujours non nul).

III. MODULES CONTINUS - MODULES QUASI-CONTINUS.

Généralisant la notion d'anneau régulier continu, Yuzo Utumi définit et étudie les anneaux continus [14] . La définition qu'il en donne ne fait intervenir que les propriétés du A-module à gauche ${}_A A$. Aussi nous poserons :

DEFINITION 3.1. : Soit M un A-module. Il est dit continu s'il vérifie les conditions suivantes :

(C_1) Tout sous-module de M est essentiel dans un facteur direct de M ;

(C_2) Tout sous-module de M isomorphe à un facteur direct de M est facteur direct de M .

La condition (C_1) peut encore s'énoncer "Tout sous-module complément est facteur direct".

Notons que la condition (C_2) implique la condition :

(C_3) Si P et Q sont facteurs directs tels que $P \cap Q = 0$, alors $P \oplus Q$ est facteur direct (Yuzo Utumi [14]).

Un anneau est dit continu à gauche (resp. à droite) si le module ${}_A A$ (resp. A_A) est continu.

Remarquons qu'un anneau régulier vérifie toujours la condition (C_2) . La continuité d'un tel anneau se ramène donc à la condition (C_1) .

DEFINITION 3.2. : Soit M un A-module. Il est dit quasi-continu s'il vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

1) M vérifie les conditions (C_1) et (C_3) ci-dessus ;

2) Pour tout sous-module N de M , tout projecteur de N se prolonge en un projecteur de M ;

3) M est stable par tout projecteur d'une enveloppe injective E(M) ;

4) Tout facteur direct est facteur direct absolu.

Rappelons qu'un sous-module X de M est appelé facteur direct absolu si pour tout sous-module complément relatif Y de X , on a $M = X \oplus Y$. ([8], p. 13 et [4], p. 73).

L'équivalence de ces propriétés est facile à établir. On pourra se reporter à [8] (p. 13 et 14) et à [12] (Théorème 3).

Jacques Bichot, dans [1] , appelle ces modules "infra-injectifs".

Comme ci-dessus, on définit un anneau quasi-continu à gauche (resp. à droite).

On contrôlera aisément les implications suivantes pour un A-module M : Injectif $\Longrightarrow$ quasi-injectif $\Longrightarrow$ continu $\Longrightarrow$ quasi-continu .

Il existe des modules continus non quasi-injectifs ([11], p. 603, exemple 2) et des modules quasi-continus non continus (${}_{\mathbf{Z}}\mathbf{Z}$).

Un anneau régulier est continu à gauche si et seulement si il est quasi-continu à gauche.

PROPRIETE 3.3. : Nous signalons ici quelques propriétés simples des modules et anneaux quasi-continus.

1) Tout facteur direct d'un module quasi-continu (resp. continu) est quasi-continu (resp. continu).

2) Si N est un sous-module du module quasi-continu M , essentiel dans les deux facteurs directs P et Q de M , alors P est isomorphe à Q et tout supplémentaire de P est un supplémentaire de Q .

3) Une somme directe de modules quasi-continus n'est pas nécessairement quasi-continue. Par exemple le $\mathbf{Z}$-module $\mathbf{Z}^2$ n'est pas quasi-continu puisque le projecteur ${}_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}^2$ sur la droite de pente α , avec $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ et $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, ne laisse pas $\mathbf{Z}^2$ stable. Cependant ${}_{\mathbf{Z}}\mathbf{Z}$ est quasi-continu. D'ailleurs un anneau intègre A est quasi-continu à gauche si et seulement si il admet un corps de quotients à gauche. Nous verrons dans ce cas, que ${}_{A}A^2$ est quasi-continu si et seulement si A est un corps (Corollaire 4.3.).

4) Si M est un A-module à gauche quasi-continu tel que $j(M) = 0$, alors M est bien complémenté. (On montre que si N est un sous-module de M essentiel dans les facteurs directs P et Q , les projecteurs associés aux sommes directes $M = P \oplus P' = Q \oplus P'$ et d'images P' coïncident).

5) Soient A un anneau tel que $j({}_{A}A) = 0$ et $B = E({}_{A}A)$. Alors A est quasi-continu à gauche si et seulement si A contient les idempotents de B . Comme $\mathrm{End}_{A}B = \mathrm{End}_{B}B$, ce résultat est immédiat. (cf. [11], p. 603, Lemme 8 et [12], p. 66, théorème 5, quand A est régulier).

6) L'anneau produit $A \times B$ est quasi-continu à gauche si et seulement si A et B sont des anneaux quasi-continus à gauche.

7) Soit A un anneau dans lequel tout idéal à gauche complément est facteur direct (C_1). Alors A est un anneau de Baer si et seulement si $j({}_A A) = 0$. (On a donc aussi $j(A_A) = 0$).

8) Soit A un anneau dans lequel tout idéal à gauche complément est facteur direct. Si A est réduit, alors $B = E({}_A A)$ est un anneau réduit. (Comme $j({}_A A) = 0$, B est un anneau régulier. De plus les idéaux compléments de A sont bilatères car les idempotents sont centraux. [9], proposition 3.1. et théorème 4.1.).

<u>REMARQUE 3.4.</u> : Soit M un A-module à gauche bien complémenté. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1) Tout complément est facteur direct ;

2) Tout sous-module monogène est essentiel dans un facteur direct et le treillis $\mathcal{L}(M)$ des facteurs directs de M est supérieurement continu. (La démonstration de Yuzo Utumi [12], théorème 2, p. 64, faite dans le cas des anneaux réguliers s'adapte ici avec des modifications mineures).

IV. <u>QUASI-CONTINUITE DE</u> $M^{(I)}$.

Nous désignons par $M^{(I)}$ la somme directe de copies de M indexées par l'ensemble I.

Dans tout ce paragraphe, si $M = M_1 \oplus M_2$, nous appellerons p_1 (resp. p_2) la projection canonique de $M_1 \oplus M_2$ sur M_1 (resp. M_2). D'autre part, nous identifierons $\mathrm{Hom}(M_1, M_2)$ [resp. $\mathrm{Hom}(M_2, M_1)$] et son image canonique dans $\mathrm{End}_A M$, obtenue en prolongeant chaque $f \in \mathrm{Hom}(M_1, M_2)$ (resp. $g \in \mathrm{Hom}(M_2, M_1)$) par l'homomorphisme nul de M_2 (resp. M_1).

<u>LEMME 4.1.</u> : <u>Soient</u> M_1 <u>et</u> M_2 <u>deux A-modules tels que</u> $M_1 \cap M_2 = 0$ <u>et</u> f <u>un homomorphisme de</u> M_1 <u>dans</u> M_2. <u>Alors</u> f <u>est la restriction à</u> M_1 <u>d'un projecteur</u> p <u>de</u> $M = M_1 \oplus M_2$; $f = pp_1$.

On pose $p = f \oplus p_2$. Il est immédiat que $p^2 = p$ et que la restriction de p à M_1 coïncide avec f.

THEOREME 4.2. : Soit $M = M_1 \oplus M_2$ un A-module quasi-continu. Si N est un sous-module de M_1, tout homomorphisme f de N dans M_2 se prolonge en un homomorphisme de M_1 dans M_2.

D'après le lemme 4.1., il existe un projecteur p' de $N \oplus f(N)$ tel que f soit la restriction de p' à N. Comme M est quasi-continu, p' se prolonge en un projecteur p de M et f est la restriction à N de pp_1.

COROLLAIRE 4.3. : Soient A un anneau et M un A-module. Alors :

1) Si ${}_AA \times M$ est un A-module quasi-continu, M est injectif ;

2) Si M^2 est quasi-continu, M est quasi-injectif.

Pour généraliser la notion de module Σ-quasi-injectif étudiée par A.Cailleau et G.Renault [2], [2'], on peut se demander quels sont les sous-modules M tels que $M^{(I)}$ soit quasi-continu pour tout ensemble I. On obtient le résultat suivant :

COROLLAIRE 4.4. : Soit M un A-module. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1) M est Σ-quasi-injectif ;

2) $M^{(\mathbb{N})}$ est quasi-continu ;

3) $M^{(I)}$ est quasi-continu pour tout I.

La démonstration est immédiate à l'aide du corollaire 4.3.

Nous pouvons maintenant, en traduisant ce corollaire dans le cas où $M = {}_AA$, donner une caractérisation des anneaux quasi-frobénusiens qui généralise celle donnée par Carl Faith [3], (Théorème 2, p. 186).

COROLLAIRE 4.5. : Un anneau A est quasi-frobénusien si et seulement si ${}_AA^{(\mathbb{N})}$ est quasi-continu.

Le théorème 4.2. nous permet encore d'obtenir des résultats démontrés par Yuzo Utumi dans le cas des anneaux continus à gauche [14] (Corollaire 7.5., Corollaire 8.4.).

COROLLAIRE 4.6. : Soit A un anneau. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) A est auto-injectif à gauche ;
2) A^2 est un A-module quasi-continu ;
3) Pour tout entier n , ${}_A A^n$ est quasi-continu ;
4) Il existe un entier n tel que ${}_A A^n$ soit quasi-continu ;
5) L'anneau $\mathcal{M}_2(A)$ est quasi-continu à gauche ;
6) Pour tout entier n , $\mathcal{M}_n(A)$ est un anneau quasi-continu à gauche ;
7) Il existe un entier n tel que $\mathcal{M}_n(A)$ soit un anneau quasi-continu à gauche.

COROLLAIRE 4.7. : Soient N_1 et N_2 deux sous-modules d'un module quasi-continu M tels que $N_1 \cap N_2 = 0$, essentiels respectivement dans les facteurs directs P_1 et P_2 . Si N_1 est isomorphe à N_2 , alors P_1 est isomorphe à P_2 .

(On applique le théorème 4.2. et la propriété 3.3. (2°) à $P_1 \oplus P_2$).

Il en résulte, en particulier, qu'un module quasi-continu vérifie la condition :

(C_2') Si P est un facteur direct de M et N un sous-module de M isomorphe à P, tel que $N \cap P = 0$, alors N est facteur direct de P .

Ces résultats (le corollaire 4.3. par exemple) laissent supposer que les projecteurs d'un module isotypique quasi-injectif sont suffisamment nombreux pour engendrer l'anneau des endomorphismes du module ; cela nous a conduit à étudier l'anneau des endomorphismes d'un module isotypique en général.

<u>THEOREME 4.8. : Soit M un A-module. L'anneau des endomorphismes du module M^2 est engendré respectivement par ses projecteurs, ses automorphismes et ses endomorphismes de carré nul.</u>

Soit $f \in End_A M^2$. On écrit $M_2 = M_1 \oplus M_2$ où M_1 et M_2 sont isomorphes. On a $f = p_1fp_1 + p_1fp_2 + p_2fp_1 + p_2fp_2$. D'après le lemme 4.1., tout homomorphisme de M_1 dans M_2 (resp. de M_2 dans M_1) est un produit de deux projecteurs. C'est aussi la différence de deux automorphismes puisque si h est un tel homomorphisme on a $h^2 = 0$, donc $(1+h)(1-h) = (1-h)(1+h) = 1$ et $h = 1-(1-h)$. Il suffit donc de montrer que p_1fp_1 et p_2fp_2 sont dans le sous-anneau de $End_A M^2$ engendré par $Hom(M_1,M_2)$ et $Hom(M_2,M_1)$. Or, si par exemple $g \in Hom(M_1,M_2)$ et si φ est un isomorphisme de M_1 sur M_2, on a $g = \varphi^{-1}(\varphi g)$, avec $\varphi^{-1} \in Hom(M_2,M_1)$ et $\varphi g \in Hom(M_1,M_2)$, ce qui achève la démonstration.

<u>COROLLAIRE 4.9. : Soit M un A-module dont l'anneau des endomorphismes est engendré respectivement par les endomorphismes de carré nul, les projecteurs, les isomorphismes de M. Soit N un A-module isomorphe à un facteur direct de M tel que $M \cap N = 0$. Alors l'anneau des endomorphismes de $M \oplus N$ est engendré respectivement par les endomorphismes de carré nul, les projecteurs, les isomorphismes de $M \oplus N$.</u>

Il suffit de le vérifier pour $f \in Hom_A(M,N)$, $g \in Hom_A(N,M)$, $h \in End_A N$. Pour f et g le résultat se déduit directement du lemme 4.1. Soient N' un sous-module de M isomorphe à N et φ un isomorphisme de N sur N'. On a $h = \varphi^{-1}(\varphi h)$. On applique le lemme 4.1. à φ^{-1} et à φh.

<u>COROLLAIRE 4.10. : Soit M un A-module et I un ensemble de cardinal</u> > 1. <u>Alors l'anneau des endomorphismes du A-module $M^{(I)}$ est engendré respectivement par ses projecteurs, ses automorphismes, et ses endomorphismes de carré nul.</u>

<u>Application (4.11.) à la décomposition d'une matrice (2-2) en somme de produits de matrices idempotents (resp. de matrices inversibles).</u>

Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(A)$. On procède séparément avec les matrices $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

1) <u>Décomposition en sommes de produits de matrices idempotentes</u> :

La matrice idempotente associée à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ par le lemme 4.1. est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$. Alors :

$$\underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \qquad (1)$$

De même :

$$\underline{\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \qquad (2)$$

La matrice de l'isomorphisme $\varphi : A \times \{0\}$ sur $\{0\} \times A$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et celle de φ^{-1} est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors :

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} .$$

On applique respectivement (1) et (2) à ces deux matrices et on obtient

$$\underline{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \qquad (3)$$

De même $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, d'où

$$\underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \qquad (4)$$

2) <u>Décomposition en sommes de produits de matrices inversibles</u> :

On utilise la remarque faite au cours de la démonstration du théorème 4.8., indiquant que si $f \in \mathrm{Hom}(M_1,M_2)$ [resp. $\mathrm{Hom}(M_2,M_1)$] , alors $1-f$ est inversible dans $\mathrm{End}_A M^2$. On a alors

$$\underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c & 0 \end{pmatrix}} \qquad (5)$$

et

$$\underline{\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \qquad (6)$$

On a vu dans les précédents calculs que

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} .$$

En appliquant respectivement les égalités (6) et (5) à ces deux dernières matrices, on obtient :

$$\underline{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix}\right]} \qquad (7)$$

De même

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \text{ d'où}$$

$$\underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]} \qquad (8)$$

<u>REMARQUE 4.12.</u> : Le corollaire 4.9. peut être considéré comme une généralisation du résultat suivant de Yuzo Utumi ([11], théorème 2) "Tout anneau régulier A auto-injectif à gauche ne contenant aucun idéal bilatère réduit non nul est engendré respectivement par ses idempotents et par ses éléments inversibles". En effet, un tel anneau vérifie les hypothèses du corollaire 4.9. comme l'indique le théorème suivant (pour $e = 1$), établi aussi par Yuzo Utumi et dont nous proposons une autre démonstration :

<u>THEOREME 4.13.</u> : ([14], lemme 7.7.). <u>Soit A un anneau régulier auto-injectif à gauche tel que pour tout idempotent central $g \neq 0$, Ag contienne un élément nilpotent. Alors, pour tout idempotent e, il existe des idempotents</u> e_1, e_2, e_3 <u>tels que</u> :

1) $A(1-e) = Ae_1 \oplus Ae_2 \oplus Ae_3$;

2) Ae_1 <u>et</u> Ae_2 <u>sont isomorphes</u> ;

3) Ae_3 <u>est isomorphe à un facteur direct de</u> $Ae_1 \oplus Ae_2$;

4) e_3 <u>est un idempotent abélien</u> [5] .

On considère l'ensemble des couples (X,Y) d'idéaux à gauche de A isomorphes, contenus dans $A(1-e)$, et tels que $X \cap Y = 0$. Soit (Ae_1, Ae_2) un couple maximal et $1 = e+e_1+e_2+e_3$. Dans Ae_3, pour deux idempotents ε et ε', si $A\varepsilon \cap A\varepsilon' = 0$, alors $\varepsilon A \varepsilon' = 0$, et e_3 est un idempotent abélien [5]. On considère alors le couple maximal (Af, Af'), $f = f^2$, $f' = f'^2$, vérifiant $Af' \subset Ae \oplus Ae_1 \oplus Ae_2$, $Af \subset Ae_3$, Af et Af' étant isomorphes. On pose $Ae_3 = Af \oplus Ag$, $g = g^2$ et $Ae \oplus Ae_1 \oplus Ae_2 = Af' \oplus Ag'$. Le couple (Af, Af')

étant maximal, on a $gAg' = 0$. Dans Ae_3, comme $Af \cap Ag = 0$, on a $gAf = 0$, d'où $gAf' = 0$ et $AgA = Ag(Af' \oplus Ag' + Af \oplus Ag) = AgAg \subset Ag$. g est donc central dans A et $g \in e_3Ae_3$. Comme e_3 est abélien, Ag est réduit ce qui entraîne $g = 0$.

V. DECOMPOSITION DES ANNEAUX QUASI-CONTINUS A GAUCHE.

Yuzo Utumi a établi ([11], § 5) qu'un anneau régulier continu à gauche est le produit d'un anneau réduit et d'un anneau ne contenant aucun idéal bilatère réduit. Nous cherchons dans ce paragraphe, à généraliser ce résultat à certains anneaux quasi-continus à gauche. Quand l'enveloppe injective de l'anneau considéré est un anneau régulier, la propriété se déduit évidemment du résultat de Yuzo Utumi que nous venons de signaler.

LEMME 5.1. : Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux idéaux à gauche d'un anneau A , $\mathfrak{a}$ étant essentiel dans $\mathfrak{b}$. Alors $\mathfrak{a}$ est réduit si et seulement si $\mathfrak{b}$ est réduit.

Soit $\alpha \in \mathfrak{b}-\{0\}$ un élément nilpotent $(\alpha^n = 0 , \alpha^{n-1} \neq 0), n \geqslant 2)$. Il existe un $\lambda \in A$ tel que $0 \neq \lambda\alpha^{n-1} \in \mathfrak{a}$. Mais $(\alpha^{n-1}\lambda\alpha^{n-1})^2 = 0$ et comme $\alpha^{n-1}\lambda\alpha^{n-1} \in \mathfrak{a}$, $\alpha^{n-1}\lambda\alpha^{n-1} = 0$. Alors $(\lambda\alpha^{n-1})^2 = 0$ et $\lambda\alpha^{n-1} = 0$. On aboutit à une contradiction.

THEOREME 5.2. : Soit A un anneau dans lequel tout idéal à gauche complément est facteur direct. Alors, il existe un idempotent $e \in A$ tel que Ae soit un idéal à gauche réduit et tel que $A(1-e)$ ne contienne aucun idéal bilatère non nul réduit de A . De plus, $A(1-e) = \ell(Ae)$ est un idéal bilatère de A et Ae contient tout idéal bilatère réduit.

Soit $\mathfrak{a} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{a}_i$ une somme directe maximale d'idéaux bilatères réduits de A . C'est un idéal bilatère réduit. Il existe alors un idempotent $e \in A$ tel que $\mathfrak{a} < Ae$. Ae est réduit d'après le lemme 5.1. Alors $Ae = eAe$ et $A(1-e) = \ell(Ae)$ est un idéal bilatère. D'après la maximalité de $\bigoplus_{i \in I} \mathfrak{a}_i$, $A(1-e)$ ne contient aucun idéal bilatère réduit non nul, donc si $\mathfrak{b}$ est un tel idéal $\mathfrak{b}(1-e) \subset \mathfrak{b} \cap A(1-e)=0$, et $\mathfrak{b} \subset Ae$. Si A est quasi-continu à gauche et si $\mathfrak{a}$ est un idéal bilatère qui vérifie $Ae \cap \mathfrak{a} = 0$, alors $\mathfrak{a}$ est essentiel dans un facteur direct et il existe un idempotent $\varepsilon \in A$ tel que $Ae = A\varepsilon$ et $\mathfrak{a} \subset A(1-\varepsilon)$. Alors $A(1-\varepsilon) = \ell(A\varepsilon) = A(1-e)$.

REMARQUE 5.3. : Dans un anneau A quasi-continu à gauche, pour deux idempotents e et f, les conditions suivantes sont équivalentes :

1) $eAf \subset j({}_AA)$;

2) $fAe \subset j({}_AA)$;

3) Ae et Af ne contiennent pas d'idéaux à gauche de A isomorphes (Corollaire 4.7.) et elles entraînent que $Ae \cap Af = 0$. On a donc, en particulier $eAf = 0 \Longrightarrow fAe \subset j({}_AA)$.

Par la suite, nous considérerons souvent des anneaux vérifiant la propriété

$$(P) \quad eAf = 0 \Longrightarrow fAe = 0 \qquad (f = f^2 , \quad e = e^2) .$$

C'est le cas des anneaux de Baer quasi-continus à gauche (resp. à droite) et des anneaux semi-premiers.

COROLLAIRE 5.4. : Soit A un anneau quasi-continu à gauche qui vérifie la propriété (P). Alors il existe un idempotent central e tel que Ae soit l'idéal bilatère réduit maximum de A. $A(1-e)$ contient donc tous les éléments nilpotents de A. Si A est un anneau de Baer et si $B = E({}_AA)$, Be est l'idéal bilatère réduit maximum de A et $A(1-e) = B(1-e)$.

Cela se déduit immédiatement du théorème 5.2. puisqu'alors $Ae\,A(1-e) = A(1-e)Ae = 0$. Comme Ae est réduit, e est l'unique idempotent assurant une telle décomposition.

Si $j({}_AA) = 0$ l'anneau B est régulier et auto-injectif à gauche. Comme $E({}_{A(1-e)}A(1-e)) = E({}_A\, A(1-e)) = B(1-e)$ est engendré par ses idempotents (Remarque 4.12), on a $A(1-e) = B(1-e)$.

THEOREME 5.5. : Soit A un anneau quasi-continu à gauche. Alors il existe un idempotent $e \in A$ tel que l'idéal à gauche Ae soit réduit et tel que tout idéal à gauche non nul contenu dans $A(1-e)$ contienne un élément nilpotent. L'idéal $A(1-e) = \ell(Ae)$ est bilatère. C'est aussi l'idéal à gauche maximum tel que tout idéal à gauche non nul contenu dans $A(1-e)$ contienne un élément nilpotent.

La méthode de démonstration est la même que pour le théorème 5.2. Ici les idéaux $(\mathfrak{a}_i)_{i\in I}$ sont des idéaux à gauche réduits. Chaque $\mathfrak{a}_i$ $(i \in I)$ est essentiel dans un facteur direct Ae_i $(e_i = e_i^2)$. Comme A est quasi-continu à gauche, on peut choisir les $(e_i)_{i \in I}$ orthogonaux. Alors, comme ils sont réduits, pour $i \neq j$, on a encore $Ae_iAe_j = Ae_i(e_j Ae_j) = 0$ et $\bigoplus_{i\in I} Ae_i$ est réduit.

On poursuit comme dans la démonstration du théorème 5.2.

Soit $\mathfrak{J}$ un idéal à gauche de A tel que $Ae \cap \mathfrak{J} = 0$.

Il existe un idempotent ε tel que $Ae = A\varepsilon$ et $\mathfrak{J} \subset A(1-\varepsilon)$. On a encore $A(1-\varepsilon) = \ell(A\varepsilon) = A(1-e)$.

<u>COROLLAIRE 5.6.</u> : <u>Soit A un anneau quasi-continu à gauche vérifiant la propriété (P) . Alors Ae est l'idéal à gauche réduit maximum de A et e est central.</u>

Dans ce cas, les corollaires 5.4. et 5.6. donnent la même décomposition de l'anneau A car $A(1-e)Ae = Ae\, A(1-e) = 0$ et Ae est bilatère.

<u>COROLLAIRE 5.7.</u> : <u>Dans un anneau A quasi-continu à gauche vérifiant la propriété (P) les conditions suivantes sont équivalentes :</u>

1) <u>Tout idéal bilatère non nul contient un élément nilpotent</u> ;

2) <u>Tout idéal à gauche non nul contient un élément nilpotent</u> ;

3) <u>Tout idéal à gauche facteur direct de A contient un idempotent non central.</u>

1) est équivalent à 2) , car, dans ce cas, les décompositions de A données par les corollaires 5.4. et 5.6. sont les mêmes.

3) $\Longrightarrow$ 2) car A vérifie la propriété (P) , donc si e n'est pas central, $(1-e)Ae \neq 0$.

2) $\Longrightarrow$ 3) Soit $x \in A-\{0\}$ tel que $x^2 = 0$. Alors $Ax \subset \ell(x)$. Comme $x \notin j({}_AA)$ il existe un idempotent ε tel que $A\varepsilon \cap \ell(x) = 0$. $A\varepsilon x$ est isomorphe à $A\varepsilon$ et $A\varepsilon x \cap A\varepsilon = 0$. Alors $A\varepsilon x$ est facteur direct de A (Corollaire 4.7.) donc engendré par un idempotent e . e n'est pas central, sinon, si $e = \lambda x$, $e^2 = \lambda xe = \lambda ex = 0$ puisque $e \in \ell(x)$.

COROLLAIRE 5.8. : Soit A un anneau quasi-continu à gauche. Alors tout idéal à gauche non nul contenu dans $j({}_A A)$ contient un élément nilpotent.

Cela résulte du fait qu'avec les notations du théorème 5.7., on a : $Ae \cap j({}_A A) = 0$.

REMARQUE 5.9. : Soit A un anneau quasi-continu à gauche. Tout idéal à gauche facteur direct, essentiel sur $j({}_A A)$ est bilatère.

Supposons $j({}_A A) \prec Af$ $(f = f^2)$. Si Af et $A(1-f)$ contenaient deux idéaux à gauche isomorphes $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$, φ étant un isomorphisme de $\mathfrak{a}$ sur $\mathfrak{b}$ pour $x \in \mathfrak{a} \cap j({}_A A)$, on aurait $\ell(x) = \ell(\varphi(x))$ d'où $0 \neq \varphi(x) \in j({}_A A)$, ce qui est impossible donc $fA(1-f) \subset j({}_A A)$ et comme $j({}_A A) \subset Af$, $fA(1-f) = 0$. Alors $Af = \ell(A(1-f))$ est un idéal bilatère de A . De plus l'idéal à gauche nilpotent $(1-f)Af$ de A est contenu dans $j({}_A A)$.

COROLLAIRE 5.10. : Un anneau quasi-continu à gauche qui vérifie la propriété (P) se décompose en un produit d'anneaux, soit

$$A = A_1 \times A_2 \times A_3$$

où A_1 est quasi-continu à gauche, réduit, A_2 étant quasi-continu à gauche et essentiel sur $j({}_{A_2} A_2)$, A_3 étant régulier, auto-injectif à gauche dans lequel tout idéal à gauche non nul contient un élément nilpotent.

THEOREME 5.11. : Soit A un anneau dans lequel tout idéal à gauche complément et tout idéal à droite complément soient facteur direct. Alors il existe un idempotent central e tel que Ae soit l'idéal bilatère réduit maximum de A .

Suivant la démonstration du théorème 5.2., on considère une somme directe $\mathfrak{a} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{a}_i$ d'idéaux bilatères réduits de A . Avec les mêmes notations que pour cette démonstration, $\mathfrak{a}$ est essentiel dans l'idéal à gauche réduit $Ae (e = e^2)$; de plus $\mathfrak{a} \cap \ell(\mathfrak{a}) = 0$ et $\ell(\mathfrak{a}) \supset \ell(Ae) = A(1-e)$, d'où $A(1-e) = \ell(\mathfrak{a})$. De même $\mathfrak{a}$ est essentiel dans l'idéal à droite réduit $A\varepsilon$ où $\varepsilon = \varepsilon^2$ et $(1-\varepsilon)A = r(\mathfrak{a})$. Alors $A\varepsilon = \ell r(\mathfrak{a})$ est un idéal bilatère. Comme $\mathfrak{a} \prec \ell r(\mathfrak{a}) \prec Ae$, $Ae = A\varepsilon$ et Ae est bilatère, $e = \varepsilon$ est central.

COROLLAIRE 5.12. : Tout anneau de Baer quasi-continu à gauche et à droite à même enveloppe injective à gauche et à droite.

Cela résulte du théorème précédent, du corollaire 5.4., de la propriété 3.3. (9°) et de [13] (théorème 1.4.).

VI. ENVELOPPE QUASI-CONTINUE D'UN MODULE.

Par analogie avec l'enveloppe injective et l'enveloppe quasi-injective d'un module, nous nous proposons d'étudier les extensions quasi-continues minimales d'un module donné.

LEMME 6.1. : Soient M un A-module, $E(M)$ une enveloppe injective de M, $Q(M)$ l'intersection des sous-modules quasi-continus de $E(M)$ contenant M. Alors $Q(M)$ est un module quasi-continu.

La vérification est immédiate.

DEFINITION 6.2. : On appelle enveloppe quasi-continue d'un A-module à gauche M tout A-module M extension quasi-continue minimale de M. Elle est définie à un M-isomorphisme près. C'est aussi l'ensemble des éléments de la forme $\sum_{i=1}^{p} P_i(m_i)$ où les P_i sont des produits finis de projecteurs de $E(M)$ et où $m_i \in M$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$. Elle est signalée sous cette forme par G.Renault [8] (p. 14).

THEOREME 6.3. : Soit A un anneau à idéal singulier à gauche nul. Son enveloppe quasi-continue à gauche est un anneau de Baer quasi-continu à gauche.

Soient $B = E({}_A A)$, Q l'enveloppe quasi-continue de ${}_A A$ contenue dans B. Alors $1 \in Q$ et Q contiennent les idempotents de l'anneau B. On décompose alors B suivant le corollaire 5.4. L'anneau B étant engendré par ses idempotents, $Q = Qe \oplus B(1-e)$. On contrôle ensuite que les éléments de Qe sont de la forme $q = \sum_{i=1}^{p_q} a_i e_i$ où $a_i \in Ae$ et $e_i = e_i^2 \in Be$ $(1 \leqslant i \leqslant p_q)$. Il est alors immédiat que Qe est un anneau. Comme $Qe\, B(1-e) = B(1-e)Qe = 0$, Q est un anneau.

<u>COROLLAIRE 6.4.</u> : <u>Soit A un anneau à idéal singulier nul à gauche et à droite. Alors A a même enveloppe injective à gauche et à droite si et seulement si il a même enveloppe quasi-continue.</u>

Si $B = E({}_AA) = E(A_A)$ contient Q (resp. Q') enveloppe quasi-continue à gauche (resp. à droite) de ${}_AA$ (resp. A_A) on a $Q = Qe \oplus B(1-e)$ et $Q' = Q'e \oplus B(1-e)$, la décomposition de B étant la même à gauche et à droite (théorème 5.11.). On contrôle que Qe et $Q'e$ ont les mêmes éléments. La réciproque provient du corollaire 5.12.

VII. <u>ANNEAU ASSOCIE A UN MODULE QUASI-CONTINU.</u>

<u>THEOREME 7.1.</u> : ([14] , dans le cas d'un anneau). <u>Soit M un A-module continu. Alors, l'anneau associé S(M) est régulier, j(M) est égal au radical de Jacobson de l'anneau des endomorphismes de M , les idempotents de S(M) sont les classes des projecteurs de M , et l'anneau S(M) est continu à droite.</u>

Ce résultat a été obtenu indépendamment de notre étude par J. Bichot (papier non publié).

On peut par exemple reprendre la démonstration de [6] concernant l'anneau associé à un module injectif (p. 102, proposition 1). On remarque aussi que si E est une enveloppe injective de M , S(M) contient les idempotents de S(E) (cela sera démontré plus loin, proposition 7.5.). La dernière assertion résulte alors du théorème 5 de [12] (P. 66).

<u>COROLLAIRE 7.2.</u> : <u>Soit A un anneau continu à gauche et noethérien à gauche ; alors A est artinien à gauche.</u>

En effet, $A/_j(A)$ est régulier et noethérien à gauche donc semi-simple. Comme A est noethérien, $j({}_AA)$ est nilpotent, et A est artinien à gauche.

<u>COROLLAIRE 7.3.</u> : <u>Soit A un anneau continu à gauche et à droite. Alors A est quasi-frobénusien si et seulement si A est noethérien à gauche et à droite.</u>

Cela résulte du corollaire 7.2. et de [14] , théorème 7.10.

<u>COROLLAIRE 7.4.</u> : <u>L'anneau associé à un module continu indécomposable est un corps.</u>

<u>PROPOSITION 7.5.</u> : <u>Soit M un A-module à gauche quasi-continu. Alors les propriétés suivantes sont vérifiées:</u>

1) <u>l'anneau</u> $S(M)$ <u>associé à M contient les idempotents de</u> $S(E)$, <u>anneau associé à</u> $E = E(M)$;

2) <u>tout idempotent de</u> $S(M)$ <u>se relève en un projecteur de M et toute famille d'idempotents orthogonaux se relève en une famille de projecteurs orthogonaux</u> ;

3) $S(M)$ <u>est un anneau de Baer qui vérifie la propriété</u> (C_3) <u>d'addition des facteurs directs</u> ;

4) <u>les idéaux à gauche facteurs directs de</u> $S(M)$ <u>constituent un treillis supérieurement continu.</u>

On convient d'identifier $S(M)$ à son image canonique dans $S(E)$.

Les assertions 1) et 2) se déduisent des mêmes propriétés, connues pour $S(E)$ ([6], Ch. 4, Proposition 1, p. 102, et [14], théorème 6.5.) et de la stabilité de M par les projecteurs de E.

Si A est un anneau contenu dans un anneau B de Baer et s'ils ont les mêmes idempotents, il est facile de vérifier que A est de Baer.

La propriété (C_3) résulte du fait que si $\bar{e}$ et $\bar{f}$ sont deux idempotents de $S(M)$ tel que $S(M)\bar{e} \cap S(M)\bar{f} = 0$; alors $S(E)\bar{e} \cap S(E)\bar{f} = 0$, ce qui permet de trouver deux idempotents orthogonaux $\bar{\varepsilon}_1$ et $\bar{\varepsilon}_2$ tels que $S(M)\bar{\varepsilon}_1 = S(M)\bar{e}$ et $S(M)\bar{\varepsilon}_2 = S(M)\bar{f}$. Les idéaux à gauche facteurs directs de $S(M)$ constituent donc un treillis isomorphe au treillis des idéaux à gauche monogènes de $S(E)$; il est donc supérieurement continu.

<u>THEOREME 7.6.</u> : <u>Soit M un A-module dont les sous-modules à gauche compléments sont facteurs directs de M. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :</u>

1) <u>l'anneau</u> $S(M)$ <u>associé à M est réduit</u> ;

2) <u>les idempotents de</u> $S(M)$ <u>sont centraux</u> ;

3) <u>pour tout facteur direct P de M et tout</u> $f \in \mathrm{End}_A M$, $P \cap \bar{f}^1(P) \prec P$;

4) <u>pour tout facteur direct</u> $P \neq 0$ <u>de M et tout</u> $f \in \mathrm{End}_A M$, $P \cap \bar{f}^1(P) \neq 0$.

Les implications $1 \Longrightarrow 2$ et $3 \Longrightarrow 4$ sont évidentes.

$2 \Longrightarrow 3$ si $p = p^2 \in \mathrm{End}_A M$ a pour image P , on a $fp-pf \in j(M)$ et $T = P \cap \mathrm{Ker}(fp-pf) \prec P$; or $T \subset \bar{f}^1(P)$ donc $T = P \cap \bar{f}^1(P) \prec P$.

$4 \Longrightarrow 1$ soit $0 \neq \bar{f} \in S(M)$, avec $\bar{f}^2 = 0$. Soit Q un facteur direct de M essentiel sur $\mathrm{Ker}\, f$; posons $M = P \oplus Q$. Alors $P \neq 0$; soit $x \in P \cap \bar{f}^1(P) \cap \mathrm{Ker}\, f^2$. Alors $f(x) \in P \cap \mathrm{Ker}\, f = 0$ et $x \in P \cap \mathrm{Ker}\, f = 0$ d'où $P \cap \bar{f}^1(P) = 0$. Contradiction.

<u>COROLLAIRE 7.7.</u> : ([9], lemme 4.1. Cas où M est injectif). <u>Soit M un A-module à gauche tel que tout complément soit facteur direct et dont le sous-module singulier soit nul ; alors</u> $\mathrm{End}_A M$ <u>est un anneau réduit si et seulement si tout facteur direct</u> P <u>de</u> M <u>est stable par tout endomorphisme f de M</u> .

Car dans ce cas $\bar{f}^1(P)$ est un facteur direct de M et comme M est bien complémenté la condition $P \cap \bar{f}^1(P) \prec P$ s'écrit $P \cap \bar{f}^1(P) = P$.

<u>PROPOSITION 7.8.</u> : <u>Soit E un A-module injectif. Alors E se décompose en somme directe</u> $E = F \oplus F'$ <u>où les anneaux associés vérifient l'égalité</u> $S(E) = S(F) \times S(F')$, $S(F)$ <u>étant un anneau réduit et</u> $S(F')$ <u>n'ayant aucun idéal bilatère non nul réduit. De plus, F' se décompose en somme directe</u> $F' = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$ <u>où</u> E_1 <u>et</u> E_2 <u>sont isomorphes</u> , E_3 <u>étant isomorphe à un facteur direct de</u> $E_1 \oplus E_2$.

On sait que $S(E)$ se décompose en un produit de deux idéaux bilatères $S(E) = \mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_1$ étant réduit et $\mathfrak{a}_2$ n'ayant aucun idéal bilatère réduit. Il existe donc un idempotent central $\bar{u} \in S(E)$ tel que $\mathfrak{a}_1 = S(E)\bar{u}$ et

$\mathfrak{a}_2 = S(E)\,(\overline{1-u})$. De plus on peut supposer que u est un projecteur de E . On pose $u(E) = F$ et $\operatorname{Ker} u = F'$. Pour tout $x \in F$, si $f \in \operatorname{Hom}(F,F')$, $f(x) = (1-p)\,fp(x)$ et comme $\overline{p}$ est central dans $S(E)$, $(\overline{1-p})\overline{f}\overline{p} = 0$ donc $\operatorname{Ker} f \prec E$ et $f \in j(E)$. Alors $S(E) = S(F) \times S(F')$.

D'après le théorème 4.13. il existe des idempotents de $S(E)$ donc des projecteurs orthogonaux p_1, p_2, p_3 de E (proposition 7.5.) tels que $S(F') = S(F')\overline{p_1} \oplus S(F')\overline{p_2} \oplus S(F')\overline{p_3}$ où $S(F')\overline{p_1}$ et $S(F')\overline{p_2}$ sont isomorphes et $S(F')\overline{p_3}$ isomorphe à un facteur direct de $S(F')\overline{p_1} \oplus S(F')\overline{p_2}$. D'après un résultat non publié de A. Cailleau les sous-modules $E_1 = p_1(E)$ et $E_2 = p_2(E)$ sont isomorphes et $E_3 = p_3(E)$ est isomorphe à un facteur direct de $E_1 \oplus E_2$. D'autre part, on peut supposer $p_1+p_2+p_3 = 1$, d'où $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$.

<u>COROLLAIRE 7.9.</u> : <u>Soit M un A-module à gauche quasi-continu ; alors M se décompose en somme directe</u> $M = N \oplus N'$ <u>où les anneaux associés vérifient</u> $S(M) = S(N) \times S(N')$, $S(N')$ <u>étant un anneau régulier auto-injectif à gauche sans idéal bilatère réduit non nul.</u> $S(N)$ <u>étant un anneau réduit. De plus, N' se décompose en</u> $N' = M_1 \oplus M_2 \oplus M_3$ <u>où</u> M_1 <u>et</u> M_2 <u>sont isomorphes et</u> M_3 <u>est isomorphe à un facteur direct de</u> $M_1 \oplus M_2$. <u>N' est donc quasi-injectif.</u>

Les anneaux $S(M)$ et $S(E)$, où $E = E(M)$ ayant les mêmes idempotents, cela résulte de la proposition 7.8. et du corollaire 4.3.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Bichot : Essentialité et importance dans les modules (Doctorat de Spécialité, Faculté des Sciences de Lyon, 20 septembre 1968. Imprimé à Beyrouth, 1969)

[2] A. Cailleau et G. Renault : Etude des modules Σ-quasi-injectifs. C.R. Acad. Sc. Paris, t.270, pp. 1391-1394 (1er juin 1970).

[2'] A. Cailleau et G. Renault : Anneau associé à une somme directe infinie de modules quasi-injectifs. Archiv. der Mathematik, vol. XXI, 1970, fasc. 6 (pp. 561-566).

[3] C. Faith : Rings with ascending condition on annihilators. Nagoya Math. J. 27 - 1(1966), pp. 179-191.

[4] L. Fuchs : Abelian groups. Pergamm Press, 1960.

[5] I. Kaplansky : Rings of operators. W.A. Benjamin, Inc., 1968.

[6] J. Lambek : Lectures on rings and modules (Blaisdell Publishing Company) 1966.

[7] B. Osofsky : Endomorphism rings of quasi-injective modules. Can. J. Math. Vol. 20, n° 4(1968) pp. 895-903.

[8] G. Renault : Thèse Bull. Soc. Math. France, mémoire 9, supplément au numéro de mars 1967.

[9] G. Renault : Anneaux réduits non commutatifs. Journal de mathématiques pures et appliquées 46, 1967, pp. 203-214.

[10] G. Renault : Anneau associé à un module injectif. Bull. Soc. Math. 2ème série 92, 1968, pp. 53-58.

[11] Y. Utumi : On continuous regular rings and semi-simple self-injective rings. Can. J. Math. 12(1960), pp. 597-605.

[12] Y. Utumi : On continuous regular rings. Can. Math. Bull. 4(1961), pp. 63-69.

[13] Y. Utumi : On rings of which any one sided quotient rings are two-sided. Proc. Amer. Math. Soc. 14(1963), pp. 141-147.

[14] Y. Utumi : On continuous rings and self-injective rings. Trans. Amer. Math. Soc. 118(1965), pp. 158-173.

[15] Y. Utumi : On the continuity and self-injectivity of a complete regular ring. Can. J. Math. 18(1966), pp. 404-412.

-:-:-:-:-:-:-:-:-

UNIVERSITE PARIS-SUD XI

CENTRE D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 10 du 26.1.72

-:-:-:-:-:-

DEVIATION DES ENSEMBLES ORDONNES ET GROUPES ABELIENS TOTALEMENT ORDONNES.

par Benoît LEMONNIER

-:-:-:-:-:-

Un ensemble ordonné a une dérivée quand il ne contient pas de copie de l'ensemble ordonné des nombres réels dyadiques (§ 1., th. 9). A un tel ensemble sont associés deux ordinaux, sa déviation et sa codéviation, qui mesurent l'éloignement de son type d'ordre vis-à-vis du type artinien et du type noethérien. L'objet du § 1 est de donner des propriétés des ensembles qui ont une déviation et d'étudier le comportement de la déviation vis-à-vis d'opérations usuelles. Comme application, on donne l'écriture d'un ordinal en termes d'ordinaux indécomposables (prop. 12), et on caractérise les anneaux de polynômes et de séries formelles qui ont une déviation (th. 18 et 18').

Dans le § 2, on montre qu'un groupe abélien totalement ordonné dont l'ensemble ordonné sous-jacent a une déviation, est déterminé (à un isomorphisme près) par cette déviation (th. 25). On en déduit que, pour l'ordre et la multiplication, la structure du treillis des idéaux d'un anneau de valuation de déviation donnée est unique (th. 28).

L'exposé écrit et le développement de ces résultats font l'objet d'un article à paraître dans le Bulletin des Sciences mathématiques (1973). Une note aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences a été également publiée en 1972.

En outre, les références :

[1] N. BOURBAKI, Théorie des ensembles, Chapitre 3.

[2] N. BOURBAKI, Algèbre commutative, Chapitre 6.

[3] G. KRAUSE, On the Krull-dimension of left noetherian left Matlis-rings. Math. Z. 118, pp. 207-214 (1970).

[4] R. RENTSCHLER et P. GABRIEL, Sur la dimension des anneaux et ensembles ordonnés, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 265, Série A, 1967, pp. 712-715.

UNIVERSITE PARIS-SUD XI

CENTRE D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE.

Conférences n° 11-12 du
2 et 9 Février 1972

par J.M. GOURSAUD

-:-:-:-:-:-

ANNEAUX DE GROUPES SEMI-PARFAITS

A. CAS COMMUTATIF

La première partie de cet exposé est réservée à l'étude du cas commutatif faite par Sheila Woods dans [10].

A désigne un anneau unitaire, $R(A)$ son radical de Jacobson, G un groupe non nécessairement commutatif.

I. RAPPELS.

Les anneaux semi-parfaits étudiés par Bass dans [1] puis par Chamard dans [3] sont caractérisés par le théorème suivant :

THEOREME I.1. : *Pour un anneau* A , *les conditions suivantes sont équivalentes* :

a) A *est semi-parfait* ;

b) *Tout A-module à gauche de type fini possède une couverture projective* ;

c) *Tout A-module à gauche simple possède une couverture projective* ;

d) *Tout idéal à gauche* $\mathfrak{a}$ *de* A *se met sous la forme* :

$$\mathfrak{a} = Ae \oplus \mathfrak{b} \quad ;$$

e) A/R *est semi-simple et les idempotents de* A/R *se relèvent en des idempotents de* A .

Remarque 1 : Tout anneau quotient d'un anneau semi-parfait est semi-parfait, d'autre part toute chaîne croissante de facteurs directs de A est de longueur bornée par celle de A/R .

De plus, A est semi-parfait si et seulement si $M_n(A)$ est semi-parfait.

Soient A un anneau, G un groupe. On considère le A-module à gauche libre $A^{(G)}$, on le munit d'une structure d'anneau par :

$$\Sigma\, r(g)g + \Sigma\, s(g)g = \Sigma\, (r(g)+s(g))g$$

et
$$[\Sigma\, r(g)g][\Sigma\, s(h)h] = \Sigma\, t(k)k$$

avec
$$t(k) = \sum_{gh=k} r(g)s(h) .$$

On note l'anneau ainsi obtenu $A[G]$. Les coefficients commutent avec les éléments du groupe et $A[G]$ est un A-module à gauche et à droite libre. (Se reporter à [5], [6] ou [12]).

Si H est un sous-groupe de G, on note $\omega(H)$ l'idéal à gauche de $A[G]$ engendré par les éléments $(1-h)$ où h décrit H.

<u>LEMME I.2.</u> : <u>Soient</u> $A[G]$ <u>un anneau de groupe,</u> H <u>un sous-groupe de</u> G. <u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

a) $\omega(H)$ <u>est facteur direct dans</u> $A[G]$;

b) H <u>est fini et son ordre est inversible dans</u> A.

<u>LEMME I.3.</u> : <u>Soient</u> $A[G]$ <u>un anneau de groupe,</u> <u>H un sous-groupe de G,</u> <u>on a alors</u> :

a) $r(\omega(H)) = (\sum_{h\in H} h)A[G]$ <u>si H est fini</u> ;

b) $r(\omega(h)) = 0$ <u>si H est infini</u> ;

c) $A[G]/\omega(H) \simeq A\{G/H\}$;

d) <u>si</u> $H \Delta G$, $\omega(H)$ <u>est bilatère.</u>

II. <u>RADICAL DE JACOBSON DES ANNEAUX DE GROUPES.</u>

<u>THEOREME II.1.</u> : <u>Soient</u> H <u>un sous-groupe normal d'indice fini n d'un groupe G, K un corps, on a alors</u> :

$$R(K[G])^n \subset R(K[H])K[G] \subset R(K[G]) .$$

<u>De plus si n est inversible dans K, on a</u> :

$$R(K[H])K[G] = R[K[G]] .$$

Pour une démonstration de ce résultat, se reporter à [6], théorème 16.6..

PROPOSITION II.2. : *Si H est un sous-groupe de G , K un corps on a :*

$$R(K[G]) \cap K[H] \subset R(K[H]) .$$

$V = R(K[G]) \cap K[H]$ est un idéal bilatère de $K[H]$, il suffit donc de démontrer que $1-x$ est inversible dans $K[H]$ si x appartient à V . $1-x$ étant inversible dans $K[G]$, il existe un élément y de $K[G]$ tel que :

$$(1-x)y = 1 .$$

On écrit alors $y = y_1+y'$ avec $y_1 \in K[H]$ et $\mathrm{Supp}(y') \cap H = \emptyset$. On a alors :

$$(1-x)y = (1-x)y_1+(1-x)y' = 1$$

avec $\mathrm{Supp}(1-x)y' \cap H = \emptyset$. D'où $(1-x)y' = 0$ et $1-x$ est inversible dans $K[H]$.

C.Q.F.D.

PROPOSITION II.3. : *Soit A un anneau de radical de Jacobson R . On a*

$R[G] \subset R(A[G])$ *dans les deux cas suivants :*

a) *R est T-nilpotent à droite ou à gauche ;*

b) *G est localement fini.*

PROPOSITION II.4. : *Soit $K[G]$ un anneau de groupe avec G totalement ordonné. On a alors :*

$$R(K[G]) = (0) .$$

III. ANNEAUX DE GROUPES SEMI-PARFAITS COMMUTATIFS.

Dans ce paragraphe, A désigne un anneau commutatif, G un groupe commutatif.

THEOREME III.1. : *Si $A[G]$ est un anneau semi-parfait commutatif alors A est semi-parfait et G est un groupe de torsion.*

D'après la remarque 1, $A \simeq A[G]/\omega(G)$ est semi-parfait, il est donc produit fini d'anneaux locaux $A = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$. On a donc $A[G] = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i[G]$ et $A_i[G]$ est semi-parfait pour tout i . $K_i[G]$ est donc semi-parfait avec $K_i = A_i/R_i$. Soit T le sous-groupe de torsion de G , $K_i[G/T]$ est un anneau semi-parfait et semi-primitif (proposition II.4.), donc semi-simple. On a donc $G/T = \{e\}$ et G est un groupe de torsion.

Remarque 2 : Dans la démonstration de III.1., on s'est ramené à considérer $A_i[G]$, il est évident que $A[G]$ est semi-parfait si et seulement si $A_i[G]$ l'est pour tout i. On supposera donc par la suite que A est un anneau local, de corps résiduel K.

THEOREME III.2. : Soit $A[G]$ un anneau semi-parfait avec A local de corps résiduel K. On a alors :

a) Si car $K = 0$, G est fini ;

b) Si car $K = p$, $G = G_p \times H$ où G_p est un p-groupe et H un groupe fini d'ordre premier à p ;

c) $A[G]$ est semi-parfait si et seulement si $A[H]$ est semi-parfait.

COROLLAIRE III.3. : Soient A un anneau local, rad A son nilradical. $A[G]$ est semi-parfait si et seulement si $A/_{\text{rad } A}[G]$ l'est.

Il suffit de remarquer que $(\text{rad } A)[G]$ est un nilidéal de $A[G]$ et que les idempotents se relèvent modulo un nilidéal (cf. [5]).

D'après le théorème III.2., l'étude des anneaux de groupes semi-parfaits commutatifs se ramène à celle des anneaux de groupes $A[H]$ avec A local de corps résiduel K et H fini d'ordre n inversible dans A. On sait donc d'après le théorème de Maschke que $K[H]$ est semi-simple et que, d'après la proposition II.3., $R(A[H]) = R[H]$, il suffit alors d'après le théorème I.1., de relever les idempotents de $K[H]$ en des idempotents de $A[H]$. La suite de ce paragraphe est réservée à cette étude.

DEFINITION III.4. : Soit A un anneau local de corps résiduel K, un polynôme unitaire $f(X)$ de $A[X]$ vérifie le lemme de Hensel si toute décomposition de $\bar{f}(X) = g(X)h(X)$ dans $K[X]$ où g et h sont des polynômes unitaires, se relève en une décomposition

$$f(X) = g'(X)h'(X) \quad \text{dans } A[X]$$

avec $\overline{g'(X)} = g(X)$ et $\overline{h'(X)} = h(X)$.

THEOREME III.5 : Soit A un anneau local, de corps résiduel K. Alors un polynôme unitaire $f(X)$ de $A[X]$ vérifie le lemme de Hensel si et seulement si les idempotents de $K[X]/(\bar{f}(X))$ se relèvent en des idempotents de $A[X]/(f(X))$.

Démonstration : voit Azumaya [11].

<u>COROLLAIRE III.6.</u> : <u>Soient A un anneau local, G un groupe cyclique d'ordre n inversible dans A. Les assertions suivantes sont équivalentes</u> :

a) $A[G]$ <u>est semi-parfait ;</u>

b) X^n-1 <u>vérifie le lemme de Hensel.</u>

Soit H un groupe fini commutatif, alors H est somme directe finie de groupes cycliques H_i d'ordre n_i

$$H = H_1 \times \dots \times H_r$$

avec n_{i+1}/n_i. D'où H est un groupe quotient de H_1^r.

Par la suite, on démontre qu'on peut se ramener au cas cyclique en remarquant que $A[H]$ est semi-parfait si et seulement si $A[H_1]$ l'est. En fait, la seule étape difficile est de montrer que G est cyclique et si $A[G]$ est semi-parfait alors $A[G\times G]$ l'est aussi. La proposition suivante indique qu'on se ramène à ce cas-là.

<u>PROPOSITION III.7.</u> : <u>Si pour tout anneau local B, tout groupe cyclique G, on a</u> $B[G]$ <u>semi-parfait implique</u> $B[G\times G]$ <u>semi-parfait, alors</u> $A[H]$ <u>est semi-parfait si</u> $A[H_1]$ <u>l'est.</u>

Si $A[H_1]$ est semi-parfait, on démontre par récurrence que $A[H_1^r]$ l'est. Si $A[H_1^i]$ est semi-parfait, alors $A[H_1^{i-1}][H_1]$ est semi-parfait, d'où $A[H_1^{i-1}] = \oplus B_j$ sont des anneaux locaux. $B_j[H_1]$ étant semi-parfait, $B_j[H_1\times H_1]$ l'est, d'où $\oplus B_j[H_1][H_1] = A[H_1^i][H_1]$ est semi-parfait.

<u>Remarque 3</u> : On veut démontrer que si $A[G]$ est semi-parfait alors $A[G\times G]$ est semi-parfait, avec G cyclique d'ordre n.

On sait que $A[G] = \bigoplus_i A_i$ où les A_i sont des anneaux locaux. D'où $A[G\times G]$ est semi-parfait si et seulement si $A_i[G]$ est semi-parfait pour tout i. Autrement dit si X^{n-1} vérifie le lemme de Hensel dans $A_i[X]$.

D'autre part, on sait qu'il existe des polynômes $f_i(X)$ dans $A[X]$ tels que

$$\pi f_i(X) = X^n-1$$

avec $A_i \simeq A[X]/f_i(X)$ où f_i est unitaire pour tout i d'où $A \subset A_i$ et A_i est un A-module libre de type fini. A_i étant local, on a :

$$A_i/\mathrm{Rad}\ A_i \cong K[X]/\overline{f}_i(X) \quad .$$

D'où $\overline{f}_i(X)$ est irréductible dans K. En particulier pour chaque i, il existe un entier m divisant n, tel que $\overline{f}_i(X)/Z_m(X)$ le polynôme cyclotomique d'ordre m. Supposons que $\overline{f}_1(X)$ divise $Z_n(X)$. Soit $\alpha = X+f_1(X)$ dans $A[X]/f_1(X)$ alors $\alpha \dots \alpha^n$ sont des racines distinctes de X^n-1 dans l'anneau local $A[\alpha]$ d'où $(X^n-1) = \pi(X-\alpha^j)$. Donc tout polynôme unitaire $g(X)$ divisant X^n-1 se met sous la forme

$$g(X) = \prod_{j\in S} (X-\alpha^j) \quad .$$

On en déduit que

$$A_i = A[\alpha^s] \qquad \text{pour} \quad 1 < s < n$$

et

$$A \leqslant A_i \leqslant A_1 \quad .$$

D'autre part on remarque que le lemme de Hensel est vérifié par X^n-1 dans $A_1[X]$ de même que dans $A[X]$; est-il vérifié dans $A_i[X]$?

Soit H un groupe isomorphe à G, on a alors :

$$A[G\times H] = A[G][H] = A[H][G] \quad .$$

Si e' est un idempotent primitif de $K[G\times H]$, il existe un idempotent primitif e de $A[G]$ et un idempotent primitif f de $A[H]$ tels que $e' = e'\,\overline{e}\,\overline{f}$. D'où $e' \in (K[G]e)[H]$, il suffit donc de démontrer que e' se relève en un idempotent de $(A[G]e)[H]$.

<u>NOTATIONS III.8.</u> : Soit A un anneau commutatif. On note :

$I(A)$ l'ensemble des idempotents de A, ordonné par :

$e \leqslant f$ si $ef = e$. $I(A)$ est un treillis.

De plus, si A est local de corps résiduel $\overline{K}$, on note :

$F(n,A)$ l'ensemble des polynômes unitaires divisant X^n-1 dans $A[X]$, ordonné par

$$f(X) \leqslant g(X) \quad \text{si} \quad f(X)|g(X) \quad .$$

L'application φ de $F(n,A)$ dans $F(n,K)$ définie par

$$\varphi(f(X)) = \overline{f}(X)$$

est surjective et préserve l'ordre.

DEFINITION III.9. : Soit α défini à la remarque 3.

Pour $i = 1 \dots n$ on note $e_i = \frac{1}{n}\Sigma(\alpha^i)^j g^j$ avec $g \in G$.

Si $f(X) \in F(n,A[\alpha])$, et $S = \{i/f(\alpha^i) = 0\}$, on note

$$I(f) = \sum_{i\in S} e_i$$

Si $e \in I[A[\alpha][G]]$, et $T = \{i/e.e_i = e\}$.

On note $P(e) = \prod_{i\in T}(X-\alpha^i) \in F(n,A[\alpha])$.

LEMME III.10. : I et P sont des isomorphismes de treillis entre $F(n,A[\alpha])$ et $I[A[\alpha][G]]$. On a :

$$P.I(f) = f \qquad f \in F(n,A[\alpha])$$

et

$$I.P(e) = e \qquad e \in I[A[\alpha](G)].$$

DEFINITION III.11. : Un idempotent e de $K[G]$ est un m-idempotent si $P(e)$ divise $Z_m(X)$. Un idempotent $\bar{e}$ de $A[G]$ est un m-idempotent si $\bar{e}$ est un m-idempotent.

LEMME III.12. : Si e est un m-idempotent de $A[G]$, ge est une racine primitive $m^{\text{ième}}$ de l'unité dans $A[G]e$.

$P(\bar{e})$ divise X^m-1 dans $K[X]$, d'où $I(X^m-1)\bar{e} = \bar{e}$ dans $K[G]$. Or $I(X^m-1) = \frac{m}{n}(1+g^m+\dots+g^{n-m}) \in K[G]$. D'où $\frac{m}{n}(1+g^m+\dots+g^{n-m})e = e$ dans $A[G]$ et $(1-g^m)e = 0$ d'où $(ge)^m = e$. Si ge n'est pas une racine primitive, il existe r divisant m tel que $(ge)^r = e$. D'où $(g\bar{e})^r = \bar{e}$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur $\bar{e}$.

LEMME III.13. : Soient $A[G]$ un anneau semi-parfait où G est cyclique d'ordre n, H un groupe isomorphe à G. Soit e un idempotent primitif de $K[G\times H]$ tel que $e = e\bar{e}'\bar{f}'$ où e' et f' sont des idempotents de type s et t respectivement. Si s divise t, alors e se relève en un idempotent f de $A[G\times H]$.

$A[H]f'$ est un anneau local de corps résiduel $K[H]f'$. $K[H]f'$ est une extension finie de K ayant pour unité $\bar{f}'$. $P(\bar{e}',\bar{f}')$ dans $(K[H]f')[X]$ est le même que $P(e')$ dans $K[X]$, d'où $\bar{e}'\bar{f}'$ est un s-idempotent dans $(K[H]f')(G)$. D'autre part $e = e\bar{e}'\bar{f}'$, d'où $P(e)$ divise $P(\bar{e}'\bar{f}')$. e est donc un s-idempotent dans $(K[H]f')(G)$ et $P(e)$ divise X^s-1. Or hf' est une racine primitive $s^{\text{ième}}$ de l'unité et

$$X^s-1 = \pi(X-h^{it/s}\,\bar{f}) \quad \text{dans} \quad (K[H]f')(X) \;.$$

Or $P(e)$ est irréductible dans $(K[H]f')[X]$ on a donc :

$$P(e) = X-h^{it/s}\,\bar{\bar{f}}'$$

et
$$e = \frac{1}{n}\,\Sigma(h^{it/s}\,\bar{\bar{f}}')^j\,g^j$$

et e se relève en $f = \frac{1}{n}\sum_j (h^{it/s}\,f')^j\,g^j$ qui est un idempotent de $A[G]f'[H]$, car $h^t f' = f'$ et $h^{it/s}\,f'$ est une racine primitive $s^{\text{ième}}$ de l'unité dans $A[G]f'[H]$.

<u>PROPOSITION III.14.</u> : <u>Soient A un anneau local, G un groupe cyclique d'ordre n inversible dans A. Les assertions suivantes sont équivalentes</u> :

a) $A[G]$ <u>est semi-parfait</u> ;

b) $A[G\times H]$ <u>est semi-parfait avec</u> $H \cong G$.

Il suffit de montrer que les idempotents primitifs de $K[G\times H]$ se relèvent en des idempotents de $A[G\times H]$. Soit e un idempotent primitif de $K[G\times H]$. Il existe e' et f' tels que $e = e\,\bar{\bar{e}}'\,\bar{\bar{f}}'$ avec e' s-idempotent et f' t-idempotent. En général on n'a pas s divise t ou t divise s. La démonstration consiste à trouver un automorphisme θ de $A[G][H]$ tel que $\bar{\theta}(e) = \bar{\theta}(e)\bar{e}'\bar{f}''$ où f'' est un u-idempotent de $A[H]$ avec s/u, pour se ramener dans les conditions du lemme III.13.

On a $n/s = s'v$ et $n/t = t'v$.

D'où il existe a et b tels que

$$as' + bt' = 1$$

et on peut supposer $(b,n) = 1$.

Soit ξ une racine primitive $n^{\text{ième}}$ de l'unité dans $K[G]\bar{e}'$. Il existe c tel que $\xi^{n/s} = g^c\bar{e}'$, ge' étant une racine primitive $s^{\text{ième}}$ de l'unité.

e est un t-idempotent dans $(K[G]\bar{e}')[H]$ et $p(X) = P(e)(X) = \prod_{i=1}^{r}(X-\xi^{m_i\,n/t})$ dans $(K[G]\bar{e}')[X]$ où les m_i sont des entiers. On peut supposer les m_i premiers à n.

On définit $q(X)$ par :

$$q(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - g^{m_1 ac}\,\bar{e}'\xi^{bm_i\, n/t})$$

$q(X) \in (K[G]\bar{e}')[K]$ car ses coefficients sont des polynômes symétriques en les racines de $p(X)$.

Soit $u = n/v = \frac{n}{s}/\frac{s}{v} = s'v(s/v) = ss'$

$$\xi^{m_1 u} = \xi^{m_1(a\, n/s + b\, n/t)} = g_1^{m_1 ac}\,\xi^{b\, m_1\, n/t}$$

est une racine de $q(X)$, c'est aussi une racine primitive $n^{\text{ième}}$ de l'unité. Il existe donc un polynôme $q'(X) \in (K[G]e')[X]$ tel que $q'(X)$ divise $q(X)$. $I(q')$ est un u-idempotent primitif de $[K[G]e'][H]$ et $\xi^{m_1 v}$ est une racine de $q'(X)$.

D'où
$$q'(X) = \prod_{i=1}^{w} (X - g^{m_1 ac}\,\bar{e}'\,\xi^{bm_i\, n/t})$$
$$= (X - \xi^{m_1 v}) \prod_{i=2}^{w} (X - g^{m_1 ac}\,\bar{e}'\,\xi^{bm_i\, n/t}).$$

Soit $p'(X) = (X - \xi^{t' m_1 v}) \prod_{i=2}^{w} [X - (g^{m_1 ac}\,\bar{e}'\,\xi^{bm_i\, n/t})^{t'}]$.

On a $p'(X) \in [K[G]\bar{e}'][X]$, or $\xi^{m_1\, n/t} = \xi^{t' m_1 v}$ est une racine de $p'(X)$. $p(X)$ étant irréductible, $p(X)$ divise $p'(X)$. Or $d^o p(X) = r \geqslant w = d^o p'(X)$. D'où $p(X) = p'(X)$ et $q(X) = q'(X)$ est irréductible dans $(K[G]\bar{e}')[X]$. D'où $I(q) = I(q')$ est un u-idempotent primitif de $(K[G]\bar{e}')[H]$. Il existe un idempotent unique de $A[H]$ tel que $I(q) = I(q)\bar{f}''$. Comme f'' est un u-idempotent, $I(q)$ est un candidat pour $\bar{\theta}(e)$. On note $I(q) = f$.

Comme $(b,n) = 1$, h^b engendre H. On définit alors θ par

$\theta(\Sigma\, x_i\, h^{bi}) = \Sigma\, x_i (g^{cam_1} h)^i$ avec $x_i \in A[G]$. Il est immédiat de vérifier que θ est l'automorphisme cherché.

THEOREME III.15. : Soient A un anneau local de corps résiduel K, G un groupe abélien fini d'ordre n inversible dans A, d'exposant m. Les assertions suivantes sont équivalentes :

a) $A[G]$ est semi-parfait ;

b) $A/_{\mathrm{rad}\, A}[G]$ est semi-parfait ;

c) X^m-1 vérifie le lemme de Hensel.

L'hypothèse faite à la proposition III.14. $G \cong H$ est essentielle comme le montre l'exemple suivant :

Soient $G = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ et $H = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Alors $G \times H$ est cyclique d'ordre 24. Considérons l'anneau local $A = \mathbb{Z}[i]_{(2+i)}$ (le localisé de $\mathbb{Z}[i]$ par rapport à $(2+i)$). On a donc $K = A/\mathrm{Rad}\, A \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ d'où le groupe multiplicatif K^* est cyclique d'ordre 4. On a donc les décompositions suivantes dans $K[X]$:

$$X^8 -1 = (X-1)(X+1)(X-2)(X+2)(X^2-2)(X^2+2)$$

et

$$X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$$

où tous les facteurs intervenant dans les seconds membres sont irréductibles sur K. Cette décomposition se relève évidemment en une décomposition dans $A[X]$:

$$X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$$

et

$$X^8 - 1 = (X-1)(X+1)(X-i)(X+i)(X^2-i)(X^2+i)$$

D'où $A[G]$ et $A[H]$ sont semi-parfaits.

Or $(K^2)^*$ est cyclique d'ordre $5^2-1 = 24$, d'où $X^{24}-1$ se décompose en facteurs linéaires et en facteurs d'ordre 2. Le polynôme cyclomotique $\Phi_{24}(X)$ a pour ordre $\varphi(24) = 8$, donc sur $\mathbb{Q}$ si α est une racine primitive $24^{\text{ième}}$ de l'unité, on a $(Q[\alpha] : Q[i]) = 8/2 = 4$ d'où $\Phi_{24}(X)$ a un facteur irréductible d'ordre 4 dans $\mathbb{Q}[i][X]$ et il en est de même dans $A[X] \subset \mathbb{Q}[i][X]$ ce qui montre que $A[G{\times}H]$ n'est pas semi-parfait.

B. CAS GENERAL

Le premier résultat de cette partie concerne les annulateurs des idéaux à gauche engendrés par les sous-groupes finis de G, il permet d'obtenir une démonstration facile de la caractérisation des anneaux de groupes parfaits à gauche. Dans le deuxième paragraphe, nous étudions les anneaux de groupes semi-parfaits et nous démontrons que, K étant un corps de caractéristique $p \neq 0$, si G est un groupe localement fini ou localement résoluble, KG est semi-parfait si et seulement si G est extension finie d'un p-groupe. Ce résultat généralise le cas commutatif étudié par S. Woods dans [10], de même que les résultats obtenus par J. Valette dans [8].

1. Pour un sous-groupe H de G, on note ωH l'idéal à gauche de AG engendré par les éléments $1-h$ pour $h \in H$. On voit facilement que si $\{g_i\}$, $i \in I$ est un système de représentants des classes à gauche de G modulo H, les éléments $g_i(h-1)$, $i \in I$ et $h \neq 1$ forment une A-base de ωH, de même si H est fini et si $\{\bar{g}_i\}$, $i \in I$ est un système de représentants des classes à droite de G modulo H alors les éléments $(\sum_{h\in H} h)\bar{g}_i$, $i \in I$ forment une A-base de l'annulateur à droite $r(\omega H) = (\sum_{h\in H} h)AG$ de ωH [5].

<u>PROPOSITION 1.</u> : <u>Soit H un sous-groupe fini de G. On a alors</u> :

$$\ell(r(\omega H)) = \omega H .$$

<u>Démonstration</u> :

On a évidemment $\omega H \subset \ell r(\omega H)$. Soient $(g_i)_{i\in I}$ un système de représentants des classes à gauche de G modulo H et $x = \sum_{i\in I} g_i a_i$, avec $a_i \in AH$ un élément de $\ell r(\omega H)$. On a $0 = x(\sum_{h\in H} h) = \sum_{i\in I} g_i(a_i \sum_{h\in H} h)$. D'où $a_i \sum_{h\in H} h=0$ pour tout i. Or a_i s'écrit :

$a_i = \alpha_0^i + \alpha_1^i h_1 + \dots + \alpha_n^i h_n$ avec $h_j \in H$, $\alpha_j^i \in A$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$ et

$a_i(\sum_{h\in H} h) = (\sum_{j=0}^{n} \alpha_j^i)(\sum_{h\in H} h) = 0$. On en déduit immédiatement que $\sum_{j=0}^{n} \alpha_j^i = 0$, c'est-à-dire $a_i \in \omega H$ pour tout i et x appartient à ωH.

Comme corollaire, nous obtenons une démonstration simple du résultat suivant :

THEOREME 2. [G.RENAULT [7], S. WOODS [9]] : AG est parfait à gauche si et seulement si A est parfait à gauche et G est fini.

Démonstration : Si A est parfait à gauche et G est fini, alors AG est parfait à gauche. Réciproquement, soit R le radical de Jacobson de A ; $(A/R)G$ est parfait à gauche, on est donc ramené au cas où A est un corps. Si car A = 0, alors AG est premier et parfait à gauche, AG est donc semi-simple et G est fini. Si p = car A $\neq$ 0, supposons que G ne soit pas fini ; alors AG n'est pas premier et d'après [6, théorème 3.7.], G contient un sous-groupe normal fini H_1. $A[G/H_1]$ est parfait à gauche et n'est pas premier, G contient donc un sous-groupe normal fini H_2 contenant strictement H_1, on construit ainsi de proche en proche une suite croissante (H_n) de sous-groupes finis de G, ce qui donne en utilisant la Proposition 1, une suite décroissante d'idéaux monogènes de AG, contredisant le fait que AG est parfait à gauche.

2. Dans ce qui suit, K désigne un corps.

PROPOSITION 3. : Soit KG un anneau semi-parfait. Si $1 = \sum_{i=1}^{n} e_i$ est une décomposition de l'unité en idempotents primitifs orthogonaux alors pour tout sous-groupe H de G tel que H contienne le support des e_i, KH est semi-parfait et de plus

$$\text{Rad } KH = \text{Rad}(KG) \cap KH .$$

Démonstration : D'après le théorème précédent, il suffit de démontrer que pour tout i, KHe_i est un KH-module local. Soit x un élément de KHe_i, $x \notin (\text{Rad } KG \cap KH)e_i$; en particulier x n'appartient pas à $(\text{Rad } KG)e_i$, on a donc :

$$KG\, x = KH\, e_i$$

et

$$KH\, x = KH\, e_i .$$

D'où KHe_i est un module local admettant pour sous-module maximal $(\text{Rad } KG \cap KH)e_i$. Il s'ensuit que

$$(\text{Rad } KH)e_i = (\text{Rad } KG \cap KH)e_i$$

d'où

$$\text{Rad } KH = \text{Rad } KG \cap KH .$$

THEOREME 4. : Soient G un groupe localement résoluble, K un corps. Si KG est semi-parfait, alors G est localement fini.

Démonstration : A l'aide de la proposition 3, on se ramène au cas où G est un groupe de type fini résoluble. On démontre alors la propriété par récurrence sur la longueur de la suite dérivée de G. Soit D^nG le n-ième groupe dérivé de G. $K[G/_{DG}]$ est un anneau semi-parfait, donc $G/_{DG}$ est un groupe fini [2] et par conséquent DG est un groupe de type fini. Supposons que $G/_{D^nG}$ soit fini d'ordre m et que $D^{n+1}G = \{1\}$. D^nG est un groupe abélien de type fini, son sous-groupe de torsion T est un sous-groupe caractéristique, il est donc normal dans G. Montrons que $D^nG = T$. Sinon $G/_T$ contient un sous-groupe abélien libre de type fini $D^nG/_T$. On a alors d'après [5, Exercice 13, p. 162] Rad $K[D^nG/_T]=(0)$. D'autre part, d'après [6, Théorème 16.6.] on a :

$$(\text{Rad } K[G/_T])^m \subseteq (\text{Rad } K[D^nG/_T])K[G/_T] = (0) .$$

$K[G/_T]$ est donc un anneau semi-primaire et d'après le théorème 2, $G/_T$ est fini ce qui contredit l'hypothèse faite sur D^nG.

Le lemme suivant est une généralisation du lemme 13.2. de [6]. La première étape de la démonstration est identique à celle de [6]. p désigne un nombre premier.

LEMME 5. : Soient G un groupe, m un entier. G admet un p-sous-groupe d'indice au plus égal à m si et seulement si tout sous-groupe de type fini de G admet un p-sous-groupe d'indice au plus égal à m.

Démonstration : Si P est un p-sous-groupe de G tel que $[G:P] \leqslant m$, alors pour tout sous-groupe H de G on a :

$$m \geqslant [G:P] \geqslant [G \cap H : P \cap H] = [H : P \cap H] .$$

$P \cap H$ est donc un p-sous-groupe de H d'indice au plus égal à m. Réciproquement supposons que tout sous-groupe de type fini de G possède un p-sous-groupe d'indice au plus égal à m. Alors tout sous-groupe de type fini admet un p-sous-groupe normal d'indice au plus égal à $m! = n$. Pour tout sous-ensemble fini α de G, soient $G_\alpha = \langle\alpha\rangle$ le groupe engendré par les éléments de α et n_α l'indice du p-sous-groupe normal maximal P_α de G_α. Par hypothèse on a :

$$1 \leqslant n_\alpha \leqslant n .$$

Choisissons α_o tel que $n_o = n_{\alpha_o}$ soit le maximum des n_α et posons $G_o = G_{\alpha_o}$.
Si α est un sous-ensemble fini de G contenant α_o on a alors :

$$[G_\alpha : P_\alpha] = n_\alpha .$$

D'où : $n_o \geqslant n_\alpha = [G_\alpha : P_\alpha] \geqslant [G_\alpha \cap G_o : P_\alpha \cap G_o] = [G_o : P_\alpha \cap G_o]$. D'autre part, $P \cap G_o$ est un p-sous-groupe normal de G_o et :

$$n \geqslant n_o \geqslant [G_o : P_\alpha \cap G_o] \geqslant n_o ,$$

par définition de n_o. Il en résulte les relations $n_\alpha = n_o$ et $P_\alpha \cap G_o = P_o$.
Le même raisonnement montre que si α et β sont deux sous-ensembles finis de G tels que $\alpha_o \subset \alpha \subset \beta$ on a alors :

$$n_\beta = n_\alpha = n_o \qquad \text{et} \qquad P_\beta \cap G_\alpha = P_\alpha .$$

Le sous-groupe $P = \bigcup_{\alpha \supset \alpha_o} P_\alpha$ est un p-sous-groupe normal de G. En effet, soient p_{α_1} et p_{α_2} deux éléments de P, g un élément de G et $\alpha = \alpha_o \cup \{p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}, g\}$. On a alors :

$$p_{\alpha_1} \in P_{\alpha_1} \cap G = P_\alpha \qquad \text{de même} \qquad p_{\alpha_2} \in P_\alpha$$

d'où $p_{\alpha_1} p_{\alpha_2}^{-1} \in P$ et $g p_{\alpha_1} g^{-1} \in P_\alpha$. De plus $[G:P] = n_o$, sinon $[G:P] > n_o$ et G admettrait n_o+1 classes disjointes modulo P. Soient $P1, Pg_1, \dots, Pg_{n_o}$ ces classes et $\alpha = \alpha_o \cup \{1, g_1, \dots, g_{n_o}\}$. Alors G admettrait n_o+1 classes disjointes modulo P_α ce qui contredit la relation $[G_\alpha : P_\alpha] = n_o$.

Les deux lemmes qui suivent interviendront dans la démonstration du résultat principal.

LEMME 6. [4, D.B. COLEMAN, THEOREME 1.] : Pour un sous-groupe H de G les assertions suivantes sont équivalentes :

a) ωH est facteur dans AG ;

b) H est fini et son ordre est inversible dans A.

LEMME 7. : Soient KG un anneau de groupe, G un groupe fini. H et H' deux sous-groupes de G. Si $r(\omega H)$ et $r(\omega H')$ sont isomorphes, alors H et H' ont même ordre.

Démonstration : En effet, $r(\omega H)$ est un K-espace vectoriel dont une base est formée par les éléments $(\sum_{h\in H} h)g_i$, où g_i décrit un système de représentants des classes à droite de G modulo H. C'est donc un K-espace vectoriel de dimension $[G:H]$. D'où :

$$[G:H] = [G:H'] \quad \text{et} \quad |H| = |H'| .$$

Si K est un corps de caractéristique 0, G un groupe localement fini, alors KG est semi-parfait si et seulement si G est fini. Dans toute la suite, nous considérons un corps K de caractéristique non nulle.

THEOREME 8. : Soient K un corps de caractéristique p, G un groupe localement fini. Les assertions suivantes sont équivalentes :

a) KG est semi-parfait ;

b) G est extension finie d'un p-groupe.

Démonstration :

a) $\Longrightarrow$ b). Soit $\text{Ass } G = \{q/q \text{ premier}, \exists g \in G-\{1\}\ g^q = 1\}$.

Ass G est fini. En effet, KG étant semi-parfait, il existe N classes d'isomorphisme de KG-modules projectifs monogènes (N dépendant de la longueur de $KG/_{\text{Rad } KG}$). Supposons que Ass G contienne N+1 éléments distincts et différents de p, soient p_1, p_{N+1} ces éléments et $g_1,\dots,g_{N+1}$, N+1 éléments de G d'ordre respectivement $p_1,\dots,p_{N+1}$. Si H est le sous-groupe fini de G engendré par les éléments $g_1,\dots,g_{N+1}$, KH est artinien et possède au plus N classes d'isomorphismes de KG-modules à droite projectifs monogènes. Il existe donc deux entiers distincts m_o et m_1, avec $1 \leqslant m_o \leqslant m \leqslant N+1$ tels que

$$r(\omega < g_{m_o} >) \quad \text{et} \quad r(\omega < g_{m_1} >) \quad \text{soient isomorphes.}$$

On a donc d'après le lemme 7, $p_{m_o} = p_{m_1}$ ce qui est impossible, d'où $\text{card}(\text{Ass } G) \leqslant N+1$. Soit n la longueur de $KG/_{\text{Rad } KG}$, d'après la remarque faite au début du paragraphe 2, et d'après le lemme 6, pour tout nombre premier q distinct de p, un q-sous-groupe de Sylow de G est d'ordre au plus égal à q^n. Donc tout sous-groupe fini de G admet un p-sous-groupe d'indice au plus égal à $(p_1 \times \dots \times p_N)^n$. Le lemme 5 montre que G est extension finie d'un p-groupe.

b) $\Longrightarrow$ a). Soit P la p-sous-groupe normal maximal de G. Comme ωP est un nilidéal, on a $\omega P \subset \operatorname{Rad} KG$. $K[G/P]$ étant artinien et les idempotents d'un anneau se relevant modulo un nilidéal [5, Proposition 13.6.], KG est semi-parfait.

COROLLAIRE 9 (avec les hypothèses du Théorème 9) : Les assertions suivantes sont équivalentes :

a) KG est semi-parfait ;

b) Pour tout sous-groupe H de G, KH est semi-parfait.

Nous ne savons pas si ce résultat est vrai si l'on ne suppose pas G localement fini. Une réponse affirmative résoudrait une conjecture de Burgess [2] (si KG est semi-parfait alors G est un groupe de torsion).

Si AG est semi-parfait, A est semi-parfait, et A/R est semi-simple. Soit $A/R = \bigoplus_{i=1}^{k} M_{n_i}(D_i)$ la décomposition de A/R en anneaux simples où D_i est un corps. Avec les notations ci-dessus nous avons :

COROLLAIRE 10. : Soit AG un anneau de groupe semi-parfait où G est un groupe inifni localement fini. Alors les corps D_i intervenant dans la décomposition de A/R ont même caractéristique $p \neq 0$.

COROLLAIRE 11. : Soit K un corps de caractéristique p. Si KG est semi-parfait et si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

a) KG vérifie une identité polynomiale ;

b) G est localement un F.C. groupe ;

c) G est extension d'un groupe abélien par un groupe localement fini.

Alors G est extension finie d'un p-groupe.

Démonstration : Dans tous les cas considérés, tout sous-groupe de type fini de G est extension finie d'un groupe abélien, il suffit de reprendre la démonstration du théorème 4 pour montrer que G est localement fini.

Soit $\mathcal{P}$ la classe des groupes localement finis, extension finie d'un p-groupe.

<u>LEMME 12.</u> : <u>Soit H un sous-groupe normal d'un groupe G. Les assertions suivantes sont équivalentes</u> :

a) $G \in \mathcal{P}$;

b) $H \in \mathcal{P}$ <u>et</u> $G/H \in \mathcal{P}$.

<u>Démonstration</u> :

a) $\Longrightarrow$ b) : C'est immédiat.

b) $\Longrightarrow$ a) : Soit P le p-sous-groupe normal maximal de H. P est un p-sous-groupe caractéristique de H, il est donc normal dans G. Il suffit donc de montrer que $G/_P \in \mathcal{P}$. Soit $P'/_H$ le p-sous-groupe normal maximal de $G/_H$. $P'/_H$ est un p-groupe et $H/_P$ est un groupe fini, il est bien connu que $P'/_P \in \mathcal{P}$, d'où $G \in \mathcal{P}$.

Du lemme précédent découlent les résultats suivants :

<u>PROPOSITION 13.</u> : <u>Soient G un groupe localement fini, H un sous-groupe normal de G, K un corps de caractéristique p. Les assertions suivantes sont équivalentes</u> :

a) KG <u>est semi-parfait</u> ;

b) KH <u>et</u> $K[G/_H]$ <u>sont semi-parfaits.</u>

<u>Démonstration</u> :

a) $\Longrightarrow$ b) découle du théorème 8.

b) $\Longrightarrow$ a) il suffit d'appliquer successivement le lemme 10 et le théorème 8.

<u>PROPOSITION 14.</u> : <u>Soient G un groupe résoluble, K un corps de caractéristique p. Les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

a) <u>KG est semi-parfait</u> ;

b) <u>Pour tout entier</u> n, $D^nG/_{D^{n+1}G} = P_n \oplus Q_n$ <u>où</u> P_n <u>est un p-groupe et</u> Q_n <u>un groupe fini.</u>

<u>Remarque</u> : Soit KG un anneau de groupe semi-parfait où K est un corps de caractéristique p. Alors si tout sous-groupe de type fini de G est extension finie d'un p-groupe, G est extension finie d'un p-groupe. Cette assertion résulte de la proposition 3 et du lemme 5.

On peut conjecturer raisonnablement le résultat suivant :

Conjecture : Soit K un corps de caractéristique $p \neq 0$. Pour que KG soit semi-parfait, il faut et il suffit que G soit extension finie d'un p-groupe.

REFERENCES

[1] H.BASS, Finistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings. Trans. Amer. Math. Soc. 95(1960) pp. 466-468.

[2] W.D. BURGESS, On semi-perfect group rings, Canad. Math. Bull. 12(1969) pp.645-652.

[3] J.Y. CHAMARD, Anneaux semi-parfaits et presque frobénuisiens. Comptes rendus Acad. Sc. 269(1969), pp. 556-559.

[4] D.B. COLEMAN, On group rings. Canad. J. Math. 22, n° 2 (1970), pp. 249-254.

[5] J. LAMBEK, Lectures on rings and modules. Blaisdell, Waltham Mass, 1966.

[6] D.S. PASSMAN, Infinite group rings. Marcel Dekker Inc. New-York, 1971.

[7] G. RENAULT, Sur les anneaux de groupes. Comptes rendus Acad. Sc. 273 (1971), pp. 84-87.

[8] J. VALETTE, Anneaux de groupes semi-parfaits. Comptes rendus Acad. Sc. 273 (1971), pp. 339-341.

[9] S. WOODS, On perfect group rings. Proc. Amer. Math. Soc. 27, n° 1 (1971), pp. 49-52.

[10] S. WOODS, Ph. D. Mac Gill University Montréal P.Q. 1969.

[11] G. AZUMAYA, On maximally central Algebras. Nagoya. Math. Journal.

[12] P. RIBENBOIM, Rings and modules. Tracts in Math. Interscience (1969).

-:-:-:-:-:-

UNIVERSITE PARIS-SUD XI

CENTRE D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE.

Conférence n° 13 du 23 février 1972

-:-:-:-:-:-

UNE GENERALISATION D'UN THEOREME DE S.ENDO

par Annette TRICOIRE

-:-:-:-:-:-

NOTATIONS ET PRELIMINAIRES.

Un anneau unitaire est local s'il admet un seul idéal à gauche maximal - de valuation (à gauche) s'il est intègre et si le treillis des idéaux à gauche est totalement ordonné - réduit s'il ne contient pas d'élément nilpotent non nul ; dans un anneau réduit A , on a les propriétés suivantes [2] : les annulateurs (à gauche ou à droite) sont des idéaux bilatères, les idempotents sont centraux, et si de plus A est régulier (au sens de Von Neumann), tout idéal est bilatère.

On désigne par $\mathcal{F}$ la classe des anneaux unitaires tels que tout idéal à gauche soit bilatère, par $\mathcal{G}$ la classe des anneaux réduits qui appartiennent à $\mathcal{F}$ - par $\mathcal{H}$ la classe des anneaux semi-héréditaires à gauche qui appartiennent à $\mathcal{F}$.

Si S est une partie multiplicative d'un anneau unitaire A , on suppose que 1 est élément de S et que 0 n'est pas élément de S .

LEMME 1. : Soit A un élément de $\mathcal{F}$. Les assertions suivantes sont vraies :

(i) tout idéal premier est complètement premier ;

(ii) le radical premier de A est l'ensemble des éléments nilpotents.

COROLLAIRE : Soit A un élément de $\mathcal{F}$. A est réduit si et seulement si A est semi-premier.

PROPOSITION 2. : Soit A un élément de $\mathcal{G}$. Pour toute partie multiplicative S de A, A admet un anneau de fractions à gauche $S^{-1}A$.

$$\mathfrak{a}_S = \{a,\ a \in A / \exists\, s \in S,\ sa = 0\}.$$

$\mathfrak{a}_S$ est un idéal bilatère, $A/\mathfrak{a}_S$ est élément de $\mathcal{G}$ et vérifie la condition de Ore à gauche pour S.

On notera $S^{-1}M$ le module de fractions à gauche du A-module à gauche M pour S.

Si P est un idéal à gauche maximal d'un anneau A élément de $\mathcal{G}$, on notera A_P (respectivement M_P) l'anneau de fractions à gauche de A (respectivement le module de fractions à gauche du A-module à gauche M) pour $A-P$.

LEMME 3. : Soit A un anneau unitaire, à idéal singulier nul, tel que tout idéal à gauche non nul contienne un idéal bilatère non nul. A est réduit et si I et J sont des idéaux à gauche de A tels que $I \cap J = 0$, on a $IJ = JI = 0$.

Soit $x \in A$, $x^2 = 0$. Si X désigne un complément relatif de Ax dans A, il existe un idéal bilatère non nul $\mathfrak{a}$ contenu dans X tel que A soit extension essentielle à gauche de $Ax \oplus \mathfrak{a}$. La relation $(Ax \oplus \mathfrak{a})x = 0$ implique $x = 0$.

Soient I et J deux idéaux à gauche de A tels que $I \cap J = 0$. Si X désigne un complément relatif (dans A) de J contenant I, il existe un idéal bilatère non nul $\mathfrak{a}$ contenu dans J tel que A soit extension essentielle de $X \oplus \mathfrak{a}$. La relation $X \cap \mathfrak{a} = 0$ implique $\mathfrak{a}X = 0$ et en particulier $\mathfrak{a}I = 0$. I étant extension essentielle à gauche de J, il en résulte que $JI = 0$ et par suite $IJ = JI = 0$.

PROPOSITION 4. : Soit A un élément de $\mathcal{G}$. Si S désigne une partie multiplicative de A, $S^{-1}A$ est un anneau réduit tel que si x et y sont deux éléments vérifiant $S^{-1}Ax \cap S^{-1}Ay = 0$, on a $xy = yx = 0$.

Il suffit de supposer que S est formée d'éléments réguliers. Soit $s^{-1}a$ un élément de $S^{-1}A$ tel que $(s^{-1}a)^2 = 0$. Il existe $b \in A$ tel que $sa = bs$. On a alors $s^{-2}ba = 0$ ou $ba = 0$ ou $ab = 0$ ou $(sa)^2 = 0$ soit $a = 0$ et par suite $s^{-1}a = 0$.

Soit B l'anneau régulier réduit enveloppe injective à gauche de A. B est également l'enveloppe injective à gauche du $S^{-1}A$-module à gauche $S^{-1}A$, on en déduit que si x et y sont deux éléments de $S^{-1}A$ satisfaisant à $S^{-1}Ax \cap S^{-1}Ay = 0$, on a $xy = yx = 0$ (théorème 4.1 de [2]).

LEMME 5. : Soient A un élément de $\mathcal{G}$, P un idéal à gauche maximal de A, M et N deux A-modules à gauche, u un homomorphisme de M dans N tel que N soit de type fini, et $\ker u$ extension essentielle d'un sous-module de type fini. u_P désignant l'image de u par la localisation pour $A-P$, $(u_P : M_P \to N_P)$, si u_P est bijectif, il existe $f \in A-P$ tel que $u_f : M_f \to N_f$ soit bijectif.

(A_f (respectivement M_f) désignant l'anneau de fractions à gauche de A (resp. le module de fractions à gauche de M) pour $\mathcal{F} = \{f^n, n \in \mathbb{N}\}$ et u_f l'image de u par la localisation relativement à $\mathcal{F}$).

Considérons la suite exacte $0 \to \ker u \to M \xrightarrow{u} N \to \operatorname{coker} u \to 0$. On a $(\operatorname{coker} u)_P = 0$ et $(\ker u)_P = 0$. $\operatorname{Coker} u = \sum_{i=1}^{n} Ax_i$. Il existe $s_i \in A-P$ tel que $s_i x_i = 0$, en posant $s = \sum_{i=1}^{n} s_i$, on a $s \operatorname{coker} u = 0$ puisque tout idéal à gauche de A est bilatère. D'autre part $\ker u$ est extension essentielle du sous-module $K = \sum_{i=1}^{m} Ay_i$, il existe $\sigma \in A-P$ tel que $\sigma K = 0$; soit $x \in \ker u$, il existe un idéal à gauche J essentiel dans A tel que $Jx \subset K$ et par suite $\sigma Jx = 0$ ou $Jx\sigma = 0$ ou $x\sigma = \sigma x = 0$ puisque l'idéal singulier à gauche de A est nul, on a donc $\sigma \ker u = 0$. Posons $f = s\sigma$, on a alors $f \operatorname{cocker} u = f \ker u = 0$ et par suite $u_f : M_f \to N_f$ est bijective.

REMARQUE 6. : Soient A un élément de $\mathcal{G}$ et E un A-module à gauche libre de rang fini. Pour tout A-module à gauche F, et pour tout idéal à gauche maximal P, le A_P-module à gauche $\operatorname{Hom}_{A_P}(E_P, F_P)$ s'identifie au A_P-module à gauche $A_P \otimes \operatorname{Hom}_A(E, F)$.

LEMME 7. : Soient A un élément de $\mathcal{G}$, M un A-module à gauche, N un sous-module de M et x un élément de M. Pour que x appartienne à N il faut et il suffit que pour tout idéal à gauche maximal P de A, l'image x_P de x dans M_P appartienne à N_P.

Ce lemme est une extension aux éléments de $\mathcal{G}$ de la proposition 19 (§ 2, n° 8 de [4]).

LEMME 8. : Soient A un élément de $\mathcal{G}$, E et F deux A-modules à gauche libres de rang fini, G un A-module à gauche, et $u : E \to G$, $v : E \to F$ des homomorphismes. Il existe un homomorphisme $w : F \to G$ tel que $w \circ v = u$ si et seulement si pour tout idéal à gauche maximal P, il existe un A_P-homomorphisme $w^P : F_P \to G_P$ tel que $w^P \circ v_P = u_P$.

w existe si et seulement si u appartient à l'image de l'application :

$$\bar{v} : \mathrm{Hom}_A(F,G) \to \mathrm{Hom}_A(E,G)$$

définie par $\bar{v}(\varphi) = \varphi \circ v$.

Si on identifie $\mathrm{Hom}_{A_P}(F_P,G_P)$ (resp. $\mathrm{Hom}_{A_P}(E_P,G_P)$) à $A_P \otimes {}_A\mathrm{Hom}_A(F,G)$ (resp. $A_P \otimes {}_A\mathrm{Hom}_A(E,G)$), l'application $\bar{v}_P : \mathrm{Hom}_{A_P}(F_P,G_P) \to \mathrm{Hom}_{A_P}(E_P,G_P)$ définie par $\bar{v}_P(\psi) = v_p \circ \psi$ se trouve identifiée à $1 \otimes \bar{v} : A_P \otimes {}_A\mathrm{Hom}_A(F,G) \to A_P \otimes_A \mathrm{Hom}_A(E,G)$ et par suite l'image de u dans $A_P \otimes_A \mathrm{Hom}(E,G)$ s'identifie à $1 \otimes u$. Le lemme résulte alors du lemme 7.

PROPOSITION 9. : Soient A un élément de $\mathcal{G}$ et E un A-module à gauche de présentation finie. E est projectif si et seulement si pour tout idéal à gauche maximal P de A, F_P est projectif.

E admet une présentation finie, il existe donc une suite exacte du type:

$$A^m \xrightarrow{g} A^n \xrightarrow{f} E \to 0 \quad .$$

Pour tout idéal à gauche maximal P de A, on a la suite exacte :

$$A_P^m \xrightarrow{g_P} A_P^n \xrightarrow{f_P} E_P \to 0 \quad .$$

E_P étant projectif, $\mathrm{Im}\, g_P = \ker f_P$ est un A_P-module projectif. Il existe donc $\varphi^P : A_P^n \to A_P^m$ tel que $\varphi^P \circ g_P = \mathrm{id}_{A_P^n}$. D'après le lemme 8, il existe $\varphi : A^n \to A^m$ tel que $\varphi \circ g = \mathrm{id}_{A^m}$. Posons alors $\psi = g \circ \varphi$, si i désigne l'injection canonique de $\mathrm{Im}\, g = \ker f$ dans A^n, on a $\psi \circ i = \mathrm{id}_{\mathrm{Im}\, g}$ et par suite E est projectif.

REMARQUE 10. : Soit A un élément de $\mathcal{G}$. Si I désigne un idéal à gauche de type fini de A, et $\mathrm{Ann}_A I$ l'annulateur de I dans A, pour toute partie multiplicative S de A, on a $S^{-1}(\mathrm{Ann}_A I) = \mathrm{Ann}_{S^{-1}A}(S^{-1}I)$.

2. ETUDE DES ELEMENTS DE $\mathcal{H}$.

PROPOSITION 11. : Soit A un élément de $\mathcal{H}$. Pour toute partie multiplicative S de A, $S^{-1}A$ est un anneau semi-héréditaire à gauche tel que si x et y sont deux éléments satisfaisant à $S^{-1}Ax \cap S^{-1}Ay = 0$, on a $xy = yx = 0$.

A est réduit. Soit x un élément de A vérifiant $x^2 = 0$; si e désigne un idempotent qui engendre l'annulateur à gauche de x, $x \in Ae$, $x = \lambda e$ et $e\lambda e = 0$. Or $Ae = eA$ puisque $eA \subset Ae$, $(1-e)A \subset A(1-e)$ et $A = Ae \oplus A(1-e) = eA \oplus (1-e)A$, il existe donc $\mu \in A$ tel que $\lambda e = e\mu$, on en déduit $e\mu = \lambda e = 0$.

La proposition 11 résulte alors de la proposition 4.

PROPOSITION 12. : Soit A un élément de $\mathcal{H}$. L'anneau total de fractions à gauche de A est fortement régulier (i.e. régulier, réduit) et pour tout idéal à gauche maximal P de A, A_P est un anneau de valuation à gauche.

Soit R l'ensemble des éléments réguliers de A. Si $r^{-1}a$ désigne un élément de $R^{-1}A$, $R^{-1}Ar^{-1}a = R^{-1}Aa$; si $\mathrm{Ann}_A a$ est l'annulateur de a, $Aa \oplus \mathrm{Ann}_A a$ est isomorphe à A, donc engendré par un élément régulier et par suite $R^{-1}(Aa \oplus \mathrm{Ann}_A a) = R^{-1}Aa \oplus \mathrm{Ann}_{R^{-1}A}\, a$ et $R^{-1}A$ est régulier.

Soit P un idéal à gauche maximal ; A_P admet un seul idéal à gauche maximal $\mathcal{P} = A_P P$. A_P est un anneau local, semi-héréditaire à gauche, il est donc intègre. D'après un théorème de Kaplansky : "dans un anneau local A, tout A-module projectif est libre", on peut affirmer que tout idéal à gauche de type fini de A_P est libre. Soit $I = A_Px+A_Py$ un idéal à gauche de A_P engendré par deux éléments non nuls. I est libre de rang 1 d'après la proposition 11 et par suite tout idéal à gauche de type fini est monogène. On en déduit que A_P est un anneau de valuation à gauche.

<u>LEMME 13.</u> : <u>Soit A un élément de $\mathfrak{F}$ admettant un anneau total de fractions à gauche F régulier. A est réduit et pour toute partie multiplicative S de A, l'anneau $S^{-1}A$ admet pour anneau total de fractions à gauche l'anneau $F/F\mathfrak{a}_S$ où $\mathfrak{a}_S = \ker(A \to S^{-1}A)$, $F/F\mathfrak{a}_S$ étant l'anneau de fractions à gauche de F pour S.</u>

Soit R l'ensemble des éléments réguliers de A. $R^{-1}A = F$

$$\mathfrak{a}_S = \{a \in A / \exists s \in S\ ,\ sa = 0\}\ .$$

On a $\mathfrak{a}_S = F\mathfrak{a}_S \cap A$; en effet, soit $\xi \in F\mathfrak{a}_S \cap A$:

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i a_i \qquad \xi_i \in F\ ,\quad a_i \in \mathfrak{a}_S$$

il existe $r \in R$ tel que $r\xi_i \in A$ quel que soit $i = 1,\ldots,n$. Il existe alors $s \in S$ tel que $sr\xi = 0$ ou $s\xi = 0$ et par suite $\xi \in \mathfrak{a}_S$.

$A/\mathfrak{a}_S$ peut être considéré comme sous-anneau de $F/F\mathfrak{a}_S$ par l'isomorphisme $A/\mathfrak{a}_S = A/F\mathfrak{a}_S \cap A \xrightarrow{\sim} F\mathfrak{a}_S+A/F\mathfrak{a}_S$. $F/F\mathfrak{a}_S$ est un anneau régulier contenu dans l'anneau total de fractions de $A/\mathfrak{a}_S$, il lui est égal et par suite $F/F\mathfrak{a}_S$ est l'anneau total de fractions de $S^{-1}A$.

<u>PROPOSITION 14.</u> : <u>Soit A un élément de $\mathfrak{F}$ admettant un anneau total de fractions à gauche F régulier et tel que pour tout idéal à gauche maximal P, A_P soit un anneau intègre. Pour tout $x \in A$, l'annulateur de x est facteur direct de A.</u>

Soit $x \in A$. A est extension essentielle à gauche de $\mathrm{Ann}_A x \oplus \mathrm{Ann}_A(\mathrm{Ann}_A x)$ (où $\mathrm{Ann}_A \Sigma$ désigne l'annulateur dans A de $\Sigma \subset A$).

Si R désigne l'ensemble des éléments réguliers de A, on a $F=R^{-1}A$ et :

$$R^{-1}(\mathrm{Ann}\ x) \oplus R^{-1}(\mathrm{Ann}_A\ \mathrm{Ann}_A x) = R^{-1}A$$

où

$$R^{-1}(\mathrm{Ann}_A\ \mathrm{Ann}_A x) = R^{-1}Ax\ .$$

Soit e un idempotent de $R^{-1}A$ tel que $R^{-1}Ax = R^{-1}Ae$.

Si $I = \mathrm{Ann}_A x \oplus \mathrm{Ann}_A(\mathrm{Ann}_A x)$ est un idéal distinct de A , il existe un idéal à gauche maximal P de A tel que I soit contenu dans P. En localisant relativement à $A-P$, si x_P désigne l'image de x dans A_P par l'application $(A \to A_P)$, on a $x_P \neq 0$ et $\mathrm{Ann}_{A_P}(x_P) = (\mathrm{Ann}_A(x))_P = 0$. Il en résulte que :

$$I_P = (\mathrm{Ann}_A\ \mathrm{Ann}_A x)_P \subset A_P P .$$

D'autre part le corps de fractions à gauche de A_P étant $F_P = F/F\mathfrak{a}_P$ où $\mathfrak{a}_P = \ker\ (A \to A_P)$ on a

$$(R^{-1}Ae \oplus R^{-1}A(1-e))_P = (R^{-1}Ae)_P = F_P e_P = F_P .$$

Il existe alors $s \in A-P$ tel que $se = s$ et par suite

$$(Ase)_P = (As)_P = A_P$$

et $(Ase)_P \subset (\mathrm{Ann}_A\ \mathrm{Ann}_A\ x)_P$ puisque $se \in Fe \cap A = \mathrm{Ann}_A(\mathrm{Ann}_A x)$

soit

$$(\mathrm{Ann}_A(\mathrm{Ann}_A(x))_P = A_P$$

ce qui est contradictoire.

On a donc $\mathrm{Ann}_A x \oplus \mathrm{Ann}_A\ \mathrm{Ann}_A x = A$.

<u>COROLLAIRE</u> : <u>Soit A un élément de $\mathfrak{F}$ admettant un anneau total de fractions F régulier et tel que pour tout idéal à gauche maximal P de A , A_P soit un anneau de valuation à gauche. Alors A est semi-héréditaire à gauche.</u>

Montrons qu'un idéal à gauche de type fini de A est de présentation finie, et pour obtenir le résultat, il suffira d'appliquer la proposition 9. Soit I un idéal à gauche de type fini de A . Si P est un idéal à gauche maximal de A et si $\mathrm{Ann}_A(I)$ n'est pas contenu dans P on a $I_P = 0$. Supposons que $\mathrm{Ann}_A(I)$ soit contenu dans P , I_P est alors un A_P-module libre de rang 1 et il existe $x \in I$ tel que $I_P = A_P x_P$ (x_P étant l'image canonique de x dans A_P par $(A \to A_P)$). Considérons la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \ker u \longrightarrow A \xrightarrow{u} I \longrightarrow \mathrm{coker}\ u \longrightarrow 0$$

définie par $u(1) = x$, $\ker u = \mathrm{Ann}_A x$; l'anneau total de fractions à gauche de A

étant régulier, $\ker u$ est extension essentielle d'un sous-module monogène. Par localisation relativement à $A-P$, on obtient la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow A_P \xrightarrow{u_P} I_P \longrightarrow 0 \quad .$$

D'après le lemme 5, il existe $f \in A-P$ tel qu'on ait la suite exacte

$$0 \longrightarrow A_f \xrightarrow{u_f} I_f \longrightarrow 0 \quad .$$

Considérons l'ensemble $\mathcal{F} = \{f,\ f \in A/I_f$ est un A_f-module libre de rang 0 ou 1$\}$.

On a $\quad A = \sum_{f \in \mathcal{F}} A_f = \sum_{i=1}^{n} Af_i$

Posons $\quad B = \prod_{i=1}^{n} A_{f_i}$.

B est un A-module à droite fidèlement plat, en effet soit $\mathfrak{m}$ un idéal à gauche maximal de A, il existe $i \in \{1,\dots,n\}$ tel que $f_i \notin \mathfrak{m}$, on a alors

$$B \otimes_A \mathfrak{m} \subset (A_{f_i}\mathfrak{m}) \prod_{j \neq i} A_{f_j} \subsetneq B \quad .$$

On en déduit ([3], § 3, n° 6, proposition 11) que I est de présentation finie car $B \otimes_A I$ est de présentation finie (car c'est un B-module projectif).

<u>THEOREME 1.</u> : <u>Soit A un élément de</u> $\mathcal{F}$. <u>Les propositions suivantes sont équivalentes</u> :

(i) <u>A est semi-héréditaire à gauche</u> ;

(ii) <u>A admet un anneau total de fractions à gauche régulier et pour tout idéal à gauche maximal P, A_P est un anneau de valuation à gauche.</u>

3. Soit K la classe des anneaux unitaires tels que tout idéal à gauche non nul contienne un idéal bilatère non nul et tel que pour tout idéal bilatère non nul $\mathfrak{a}$, l'anneau $A/\mathfrak{a}$ soit noethérien à gauche et auto-injectif à gauche.

<u>LEMME 15.</u> : <u>Soit A un élément de K. Tout idéal bilatère non nul de A est produit fini et commutatif d'idéaux bilatères premiers, et tout idéal bilatère premier non nul est maximal.</u>

<u>PROPOSITION 16.</u> : <u>Soit A un élément non premier de K . A est unisériel</u> [5] .

Il existe des idéaux bilatères premiers non nuls P_i et des entiers n_i, $1 \leq i \leq k$, tels que

$$0 = P_1^{n_1} \cap \dots \cap P_k^{n_k} = P_1^{n_1} P_2^{n_2} \dots P_k^{n_k} .$$

A est alors isomorphe à l'anneau $\bigoplus_{i=1}^{k} (A/P_i^{n_i})$ qui est unisériel.

<u>PROPOSITION 17.</u> : <u>Soit A un élément de K tel que pour tout idéal bilatère maximal P , A/P soit un corps. Si de plus A est premier, A admet un anneau total de fractions à gauche régulier et pour tout idéal bilatère maximal P , A_P est un anneau de valuation à gauche.</u>

Tout idéal à gauche de A est bilatère. Soit I un idéal à gauche non nul, il existe un idéal bilatère non nul $\mathfrak{a}$ contenu dans I . On a

$\mathfrak{a} = P_1^{n_1} \cap \dots \cap P_k^{n_k}$ où les P_i sont des idéaux premiers de A et

$A/\mathfrak{a} = A/P_1^{n_1} \oplus \dots \oplus A/P_k^{n_k}$. Si P est un idéal premier non nul de A , A/P^n est un anneau artinien local et principal, tout idéal de A/P^n est bilatère. Tout idéal à gauche de $A/\mathfrak{a}$ est donc bilatère. Il en résulte que I est bilatère.

Si de plus A est premier, A est intègre. A admet alors un anneau de fractions à gauche pour toute partie multiplicative de A . Soit A_P l'anneau de fractions à gauche de A pour A-P , P étant un idéal premier non nul de A . A_P est un anneau de valuation à gauche, en effet soit I un idéal à gauche de A_P , il existe un idéal bilatère J de A tel que $I = A_P J$, or

$J = P_1^{n_1} \cap \dots \cap P_k^{n_k} \cap P^n = P_1^{n_1} \dots P_k^{n_k}$ où les P_i sont des idéaux premiers de A distincts de P ; puisque $P_i \cap (A-P) \neq \emptyset$, $A_P J = A_P P^n = (A_P P)^n = I$.

De plus, on a $A = \bigcap_{P \in \mathcal{P}} A_P$ où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des idéaux premiers de A . En effet, on a $A \subset \bigcap_{P \in \mathcal{P}} A_P$. Soit $x \in \bigcap_{P \in \mathcal{P}} A_P$, pour tout $P \in \mathcal{P}$ il existe $s_P \in A-P$, $s_P x \in A$. On a :

$$A = \sum_{P \in \mathcal{P}} As_P = \sum_{i=1}^{n} As_{P_i} \quad \text{et par suite}$$

$$x \in Ax \subset (\sum_{i=1}^{n} As_{P_i})x \subset A$$

d'où $$A = \bigcap_{P \in \mathcal{P}} A_P \ .$$

<u>THEOREME 2.</u> : <u>Soit A un élément premier de K tel que pour tout idéal bilatère premier non nul, A/P soit un corps. Alors A est héréditaire à gauche.</u>

Ceci est un corollaire du théorème 1 car A est noethérien à gauche.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. ENDO, Journal Math. Soc. Japan 13, n° 2 (1961) page 109.

[2] G. RENAULT, Journal de Math. Pures et Appliquées (1967), 47, page 203.

[3] N. BOURBAKI, Algèbre commutative, Chapitre I.

[4] N. BOURBAKI, Algèbre commutative, Chapitre II.

[5] K. ASANO, Osaka Math. Journal. 1, (1949), page 52.

[6] G.O. MICHLER, Proc. London Math. Soc. (3), 19 (1969), page 421.

-:-:-:-:-

UNIVERSITE PARIS-SUD XI

CENTRE D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE.

Conférence n° 14 du 8 mars 1972

-:-:-:-:-:-:-

SOUS-MODULES POLYEDRAUX D'UN MODULE

par Jacques RAVEL.

-:-:-:-:-:-

Dans tout cet exposé, les notions latérales seront entendues à gauche, et on considèrera des modules unitaires sur l'anneau unitaire A.

On dit qu'une intersection $N = \bigcap_{i\in I} N_i$ de sous-modules d'un module M est <u>réduite</u> si, pour tout élément i_o de I, $\bigcap_{i\in I-\{i_o\}} N_i \neq N$.

En étudiant la réduction des intersections, on peut se poser la question de savoir quels sont les sous-modules N d'un module M tels que <u>toute</u> intersection de sous-modules de M égale à N puisse être réduite.

<u>DEFINITION</u> : On dit qu'un sous-module N d'un module M est <u>polyédral</u> dans M si <u>toute</u> intersection de sous-modules de M égale à N se réduit à une intersection finie.

Nous montrerons que ces sous-modules polyédraux sont précisément ceux qui répondent à la question posée plus haut.

Rappelons d'abord une notion classique.

<u>DEFINITION</u> : On dit qu'un sous-module N d'un module M est <u>complètement irréductible</u> (dans M) s'il n'est pas intersection de sous-modules de M le contenant strictement.

Il est équivalent de supposer qu'il y a un plus petit sous-module $\bar{N}$ de M contenant N strictement, donc que M/N a un plus petit sous-module non nul [1] ou, d'une façon qui n'est plus sophistiquée qu'en apparence seulement, que M/N

est extension essentielle d'un module simple.

Les sous-modules complètement irréductibles de M sont précisément les sous-modules de M maximaux parmi ceux qui ne contiennent pas un élément donné de M [cette remarque, si évidente qu'elle puisse sembler, n'en simplifie pas moins la détermination des connexes complètement irréductibles de $\mathbb{R}^n$, qui sont les unions de n demi-espaces ouverts dont chacun est contenu dans la frontière du précédent et a une dimension de moins. Un autre exemple éclairant est celui des idéaux premiers de Goldman, dont Jean Guéridon a parlé au Séminaire Dubreil-Pisot [2] et qui sont les éléments complètement irréductibles du treillis des idéaux semi-premiers de l'anneau].

Il s'ensuit, comme on sait ([3]), que tout sous-module est intersection de (donc des) sous-modules complètement irréductibles le contenant.

Ce qu'on sait moins, c'est que la notion d'idéal complètement irréductible permet une démonstration rapide du théorème suivant.

<u>THEOREME 1.</u> : Pour un anneau A, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) les modules simples sont injectifs.

2) tout idéal complètement irréductible est maximal.

3) tout idéal est intersection d'idéaux maximaux.

Que 1) $\Longleftrightarrow$ 3) constitue le théorème de Villamayor, que l'on démontre usuellement en adaptant au cas non commutatif une preuve dûe à Kaplansky.

1) $\Longrightarrow$ 2) Si I est complètement irréductible, il existe un simple essentiel dans A/I ; ce simple, étant injectif, est égal à A/I, d'où la maximalité de I .

2) $\Longrightarrow$ 3) Tout idéal étant intersection des idéaux complètement irréductibles le contenant.

3) $\Longrightarrow$ 1) Soit x un élément non nul de l'enveloppe injective $\hat{S}$ d'un simple S : on a, S étant essentiel dans $\hat{S}$, $Ax \cap S \neq 0$, donc $Ax \cap S = S$ et $S \subseteq Ax \subseteq \hat{S}$; par connexité ([4]) de l'essentialité, S est essentiel dans Ax, qui est isomorphe à $A/_{An(x)}$, d'où la complète irréductibilité de $An(x)$. Etant intersection d'idéaux maximaux, $An(x)$ est égal à l'un de ces idéaux, d'où la simplicité de Ax, l'égalité $Ax = S$, le fait que x appartient à S,

l'inclusion $\hat{S} \subseteq S$, l'égalité $S = \hat{S}$ et l'injectivité de S .

Venons-en maintenant à nos sous-modules polyédraux.

THEOREME 2. : Pour un sous-module N d'un module M , les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) N est polyédral dans M .
2) M/N est extension essentielle d'un semi-simple de dimension finie.
3) N est intersection finie de sous-modules complètement irréductibles dans M .
4) toute intersection de sous-modules de M égale à N peut être réduite.

1) $\Longrightarrow$ 3) Par définition de la polyédralité, N étant intersection des sous-modules complètement irréductibles de M le contenant.

3) $\Longrightarrow$ 2) Si $N = \bigcap_{i=1}^{n} N_i$, on a $M/N = M/\bigcap_{i=1}^{n} N_i \leqslant \prod_{i=1}^{n} M/N_i$, produit direct fini isomorphe à la somme directe $\bigoplus_{i=1}^{n} M/N_i$. Si les $(N_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont complètement irréductibles dans M , soit $S_i = \overline{N_i}/N_i$ le simple essentiel dans M/N_i $(1\leqslant i\leqslant n)$: l'essentialité étant compatible avec la somme directe, $\bigoplus_{i=1}^{n} S_i$ est essentiel dans $\bigoplus_{i=1}^{n} M/N_i$.

Mais un semi-simple essentiel dans un module R est nécessairement le socle $S(R)$ de R[étant bien sûr contenu dedans, il rencontre, donc contient tout simple éventuel contenu dans R] . Si $Q \leqslant R$, $S(Q) = S(R) \cap Q$ est essentiel dans $R \cap Q = Q$, l'essentialité étant compatible avec l'intersection finie ; enfin, la dimension de $S(Q)$ est encore plus finie que celle de $S(R)$, ce qui achève de prouver l'implication.

2) $\Longrightarrow$ 1) Démontrons d'abord la :

PROPOSITION : Pour que l'essentialité soit compatible avec l'intersection (finie ou non) dans un module M, il faut et il suffit que le socle de M soit essentiel dans M.

La nécessité tient à ce que l'intersection des sous-modules de M essentiels dans M est le socle de M. Pour la suffisance, il convient de remarquer que dans un module dont le socle est essentiel, l'essentialité est équivalente à la conjonction de l'inclusion et de l'égalité des socles [si N est essentiel dans N', le socle de N, étant essentiel dans N, est essentiel dans N', donc est le socle de N' ; inversement, si $S(N) = S(N')$, $S(N)$ est essentiel dans N', donc N également, dès lors qu'il est contenu dans N'].

Si donc N_i est essentiel dans N'_i pour tout i de I, on a $(\forall i \in I) S(N_i) = S(N'_i)$, d'où $S(\bigcap_{i\in I} N_i) = \bigcap_{i\in I} S(N_i) = \bigcap_{i\in I} S(N'_i) = S(\bigcap_{i\in I} N'_i)$ et l'essentialité de $\bigcap_{i\in I} N_i$ dans $\bigcap_{i\in I} N'_i$.

Nous aurons aussi besoin du résultat suivant :

PROPOSITION : Pour qu'un module M soit artinien, il faut et il suffit que tous les sous-modules de M soient polyédraux dans M.

C'est suffisant, l'intersection d'une suite décroissante se réduisant à une sous-intersection finie, donc à l'un de ses termes, d'où la stationnarité des suites décroissantes.

Inversement, une intersection $N = \bigcap_{i\in I} N_i$ qui ne se réduit à aucune sous-intersection finie donne lieu à une suite infinie strictement décroissante [on prend pour L_o l'un des N_i ; si L_n a été défini comme intersection finie de certains N_i, on n'a pas $(\forall j \in I) L_n \cap N_j = L_n$, sans quoi $(\forall j \in I) L_n \subseteq N_j$, d'où $L_n \subseteq N$ et $L_n = N$; on choisit donc j_o de I tel que $L_n \cap N_{j_o} \subsetneq L_n$, et on pose $L_{n+1} = L_n \cap N_{j_o}$].

Dans le même ordre d'idées, on voit qu'un module est noethérien si et seulement si toute somme de sous-modules se réduit à une sous-somme partielle finie : une somme finie de modules artiniens étant un module artinien, un module noethérien a toujours un plus grand sous-module artinien.

Après avoir remarqué que "N est polyédral dans M" équivaut à "0 est polyédral dans M/N", nous pouvons maintenant démontrer que 2) $\Longrightarrow$ 1) en prouvant que 0 est polyédral dans un module M qui est extension essentielle d'un semi-simple de dimension finie.

$$\text{Si}\quad 0 = \bigcap_{i\in I} N_i \ ,\ \text{on a}\quad 0 = S(0) = S(\bigcap_{i\in I} N_i) = \bigcap_{i\in I} S(N_i)\ .$$

Or, pour un module semi-simple, les deux conditions de chaîne sont équivalentes, et équivalentes au fait qu'il est de dimension finie. Dans le module artinien qu'est le socle de M, l'intersection $0 = \bigcap_{i\in I} S(N_i)$ se réduit à une sous-intersection finie $0 = \bigcap_{i\in I_o} S(N_i)$.

L'essentialité du socle se transmettant aux sous-modules, $S(N_i)$ est essentiel dans N_i pour tout i de I_o, d'où l'essentialité de $0 = \bigcap_{i\in I_o} S(N_i)$ dans $\bigcap_{i\in I_o} N_i$, donc la nullité de $\bigcap_{i\in I_o} N_i$ et le résultat annoncé.

Toute intersection finie pouvant être réduite, on a 1) $\Longrightarrow$ 4). Montrons que 4) $\Longrightarrow$ 3) : N, étant intersection, est intersection réduite de sous-modules complètement irréductibles, soit $N = \bigcap_{i\in I} N_i$. On a $M/N \leqslant \prod_{i\in I} M/N_i$: en vertu de la réduction, l'image de M/N dans ce produit rencontre tous les M/N_i [puisque $\bigcap_{j\in I-\{i\}} N_j \neq N$, $\bigcap_{j\in I-\{i\}} N_j \supsetneq N$: si $x \in \bigcap_{j\in I-\{i\}} N_j - N$, l'image de $\bar{x}$ dans $\prod_{i\in I} M/N_i$ a toutes ses composantes nulles, sauf celle d'indice i].

Il s'ensuit que M/N contient une famille de simples $(S_i)_{i\in I}$ dont la somme est directe, puisqu'ils sont contenus dans les facteurs d'un produit direct.

Si I était infini, il contiendrait une partie dénombrable et M/N contiendrait une famille $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de simples dont la somme serait directe, donnant lieu à l'intersection nulle emboitée $0 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} S'_n$ (où $S'_n = \bigoplus_{p\geqslant n} S_p$), intersection qui ne saurait être réduite. En remontant dans M, on obtiendrait une intersection emboitée égale à N, qui ne pourrait non plus être réduite, contrairement à l'hypothèse, d'où la finitude de I.

Notons que les modules dans lesquels on peut réduire <u>toutes</u> les intersections sont précisément les modules <u>artiniens</u>.

Remarquons que si N est un sous-module polyédral de M, toute intersection réduite de sous-modules de M égale à N est finie : en fait, on peut montrer que cette propriété caractérise les sous-modules N de M qui sont intersection finie de sous-modules irréductibles de M, c'est-à-dire de codimension finie [voir Earl ([5]) pour la théorie de la dimension].

Nous allons maintenant montrer que l'écart entre les anneaux artiniens et noethériens tient à la polyédralité de certains idéaux.

> <u>THEOREME 3.</u> : Pour qu'un anneau A soit artinien, il faut et il suffit qu'il soit noethérien, et que les idéaux de sa chaîne des socles soient polyédraux.

La chaîne des socles se définit par récurrence transfinie : Σ_0 est le socle de A, $\Sigma_{\alpha+1}/\Sigma_\alpha$ celui de A/Σ_α et, si α est un ordinal limite, $\Sigma_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \Sigma_\beta$.

Ses termes sont des idéaux <u>bilatères</u> de A.

Pour la suffisance, il faut rappeler que si N et M/N sont artiniens, M l'est aussi.

Le sous-module Σ_0 du module noéthérien A est noéthérien : étant semi-simple, il est aussi artinien.

De même, le sous-module Σ_{n+1}/Σ_n du module A/Σ_n, qui est noethérien, étant quotient du noethérien A, est noethérien, et de plus semi-simple, donc artinien. Ainsi, si Σ_n est artinien, Σ_{n+1} l'est aussi, d'où par récurrence l'artinianité des $(\Sigma_n)_{n\in N}$.

Cette chaîne croissante de sous-modules du module noethérien A est stationnaire à partir d'un certain rang n_0 ; son point culminant Σ_{n_0} étant polyédral, A/Σ_{n_o} est extension essentielle de son socle $\Sigma_{n_o+1}/\Sigma_{n_o} = \Sigma_{n_o}/\Sigma_{n_o} = 0$ donc est nul et $A = \Sigma_{n_o}$ est artinien. Pour la nécessité, il suffit de remarquer que tous les idéaux d'un anneau artinien sont polyédraux, et que tout anneau artinien est noethérien.

Donnons une nouvelle démonstration de ce dernier point : la famille topologisante (cf. [6]) $\mathcal{M}$ engendrée par les idéaux maximaux est formée des intersections finies d'idéaux maximaux, qui sont aussi les idéaux I de A tels que A/I soit semi-simple.

Lorsque A est artinien, $\mathcal{M}$ est l'ensemble des idéaux contenant le radical de Jacobson R de A , qui est alors nilpotent. Si $R^n = 0$, $0 \in \mathcal{M}^n$ et $A = Cl_{\mathcal{M}^n}(0) = Cl^n_{\mathcal{M}}(0) = \Sigma_{n-1}$ [$\mathcal{F}$ étant une famille topologisante, on pose $Cl_{\mathcal{F}}(0) = \{x \in A | An(x) \in \mathcal{F}\}$] . Or une récurrence tout à fait semblable à celle faite plus haut montre que $(\forall n \in N)(\Sigma_n$ est noethérien), d'où le résultat.

La démonstration se fait donc comme dans le cas commutatif, les modules semi-simples se substituant ici aux espaces vectoriels pour assumer l'équivalence des conditions de chaîne, et les familles topologisantes apparaissant là où il y avait des produits.

On peut se demander jusqu'à quel point un idéal contenant un idéal polyédral est polyédral. C'est ce qu'essaie de préciser le théorème suivant :

<u>THEOREME 4.</u> : Pour un anneau A , les conditions suivantes sont équivalentes :

1) tout idéal contenant un idéal polyédral est polyédral.
2) les idéaux polyédraux coïncident avec les idéaux co-artiniens.
3) tout sous-module de type fini de l'enveloppe injective d'un module semi-simple de dimension finie est artinien.

1) $\Longrightarrow$ 2) Si K est un idéal polyédral, soit $\bigcap_{\alpha\in I} J_{\alpha/K} = J_{/K}$ une intersection dans $A_{/K}$: on a $\bigcap_{\alpha\in I} J_\alpha = J \supseteq K$, donc J est polyédral et est intersection d'un nombre fini de J_α ; si $J = \bigcap_{\alpha\in I_o} J_\alpha$, on a aussi

$\bigcap_{\alpha\in I_0} J_\alpha/K = J/K$ et toute intersection dans A/K se réduit à une intersection finie, d'où l'artinianité de A/K.

Inversement, un sous-module co-artinien d'un module M est polyédral dans M [un artinien est toujours extension essentielle de son socle, (tout élément artinien d'un treillis ayant un semi-simple essentiel, vu [4]) socle qui, étant artinien aussi, est de dimension finie].

2) $\Longrightarrow$ 3) L'artinianité se conservant par somme finie, il suffit de prouver que tout sous-module cyclique de l'enveloppe injective d'un module semi-simple de dimension finie est artinien. Si $x \in \widehat{\bigoplus_{i=1}^{n} S_i} = \bigoplus_{i=1}^{n} \widehat{S_i}$, $x = \bigoplus_{i=1}^{n} x_i$ et l'annulateur de x est intersection (nécessairement finie) de ceux des annulateurs des x_i qui sont distincts de A. Mais, pour ceux-ci, $A/An(x_i)$ est extension essentielle d'un module simple, étant isomorphe au sous-module non nul Ax_i de $\widehat{S_i}$, qui est extension essentielle du simple S_i. Il en résulte la complète irréductibilité des $An(x_i)$, la polyédralité de $An(x)$, donc sa co-artinianité, et enfin l'artinianité de Ax qui est isomorphe à $A/An(x)$.

3) $\Longrightarrow$ 2) Si K est polyédral, A/K est extension essentielle d'un semi-simple de dimension finie, donc est un sous-module cyclique de l'enveloppe injective d'un semi-simple de dimension finie, donc est artinien, et K est co-artinien.

2) $\Longrightarrow$ 1) Si l'idéal J contient un idéal polyédral K, A/J, en tant que quotient de l'artinien A/K, est artinien, et le co-artinien J est polyédral.

<u>Exemples d'anneaux vérifiant les propriétés précédentes</u> :

1) Les anneaux artiniens.

2) Les anneaux de Villamayor.

3) Les anneaux noethériens commutatifs [d'après un résultat de Matlis selon lequel les sous-modules artiniens d'un module noethérien sur un anneau commutatif noethérien sont les extensions essentielles des sous-modules semi-simples]

PROPOSITION : Si M est un module noethérien, le point culminant de la chaîne des socles de M est le plus grand sous module artinien de M.

Par récurrence, on voit que les éléments $(\Sigma_n)_{n\in N}$ de la chaîne des socles du module noethérien M sont artiniens ; or le point culminant Σ_{n_o} de la chaîne des socles est un sous-module artinien maximal de M : c'est donc le plus grand [qu'il soit maximal se voit en considérant un sous-module artinien N de M contenant Σ_{n_o} : N/Σ_{n_o} est artinien, donc extension essentielle de son socle, qui est contenu dans le socle $\Sigma_{n_o+1}/\Sigma_{n_o}$ de M/Σ_{n_o} ; puisque $\Sigma_{n_o+1} = \Sigma_{n_o}$, ce socle est nul, donc $N/\Sigma_{n_o} = 0$ et $N = \Sigma_{n_o}$] .

Nous allons maintenant nous poser la question de savoir dans quels modules tous les sous-modules sont intersection réduite de sous-modules complètement irréductibles.

DEFINITION : On dit qu'un module M est semi-artinien si pour tout sous-module propre N de M $M/_N$ a un sous-module simple.

On rencontre ces modules dans la littérature sous le nom de "modules de torsion" : ce sont effectivement les modules de torsion correspondant à la famille topologisante et idempotente $\mathcal{S}$ des idéaux co-semi-artiniens de A. Tout sous-module, tout quotient d'un module semi-artinien est semi-artinien. Toute somme directe (donc toute somme) de modules semi-artiniens est un module semi-artinien : tout module M a donc un plus grand sous-module semi-artinien $\mathcal{S}(M)$, qui est la somme de ses sous-modules semi-artiniens.

On dit qu'un anneau A est éclatant si, pour tout A-module M, $\mathcal{S}(M)$ est un facteur direct de M.

Un anneau semi-artinien [au sens de Popescu] est évidemment éclatant [étant tel que $(\forall M)\ (\mathcal{S}(M) = M)$]. En 1967, en [7], Dickson a conjecturé que tout anneau éclatant est semi-artinien. Ceci a été démontré pour les anneaux commutatifs noethériens (Dickson), pour les anneaux commutatifs réguliers - au sens de Von Neumann - (Euelberth) et pour une classe d'anneaux non nécessairement commutatifs, incluant les précédents dans le cas commutatif, par Teply, en [8].

Nous avons prouvé que la conjecture de Dickson n'est pas toujours vérifiée.

LEMME : Un module semi-artinien est extension essentielle de son socle.

Soit Σ le socle du module semi-artinien M : si K est une extension essentielle maximale de Σ dans M, et si K' est un complément de K dans M, $K \oplus K'$ est essentiel dans M, donc $K \oplus K'/_K$ est essentiel dans $M/_K$ [vu [9], K étant un complément].

Si K était différent de M, $M/_K$ contiendrait un sous-module simple que rencontrerait (donc contiendrait) le sous-module essentiel $K \oplus K'/_K$ de $M/_K$. K' étant isomorphe à $K \oplus K'/_K$, contiendrait également un sous-module simple, nécessairement contenu dans Σ, donc dans K, donc dans $K \quad K' = 0$, absurdement.

Il s'ensuit qu'un anneau sur lequel les semi-simples sont injectifs est éclatant [Si M est un module sur un tel anneau, (M) est extension essentielle de son socle, qui est injectif, donc est égal à ce socle, donc est injectif, donc est facteur direct de M] .

On a donc le résultat suivant :

PROPOSITION : Un anneau de Villamayor noethérien est éclatant.

[Sur un anneau de Villamayor, les simples sont injectifs ; sur un anneau noethérien, toute somme directe d'injectifs est un injectif].

Mais un tel anneau n'est pas nécessairement semi-artinien, comme nous allons le montrer maintenant.

PROPOSITION : Pour qu'un module noethérien M soit artinien, il faut et il suffit qu'il soit semi-artinien.

La condition est nécessaire, un module artinien étant semi-artinien.

Elle est suffisante, la chaîne des socles d'un module M semi-artinien ne pouvant culminer qu'en M .

Ainsi, pour qu'un anneau de Villamayor noethérien soit semi-artinien, il faut et il suffit que ce soit un anneau de Villamayor artinien, donc un anneau semi-simple [en tant qu'extension essentielle d'un socle injectif].

Or, ce n'est par exemple pas le cas de l'anneau des polynômes à une indéterminée sur un corps différentiel universel non commutatif, pour lequel nous suggérons l'appellation d' "anneau de Cozzens".

Un tel anneau est à idéaux tous principaux (donc noethérien), de Villamayor, sans diviseur de zéro, sans être un corps, puisqu'on peut y définir une notion de degré possédant les propriétés habituelles : il n'est donc pas semi-simple [étant sans diviseur de séro, A est indécomposable, et serait alors simple ; l'anneau opposé serait l'anneau des endomorphismes d'un module simple, donc un corps].

Venons en maintenant au résultat suivant :

<u>THEOREME 5.</u> : Pour que tout sous-module d'un module M soit intersection <u>réduite</u> de sous-modules complètement irréductibles de M, il faut et il suffit que M soit semi-artinien.

Nécessairement, si $N < M$ est intersection réduite de sous-modules complètement irréductibles $(N_i)_{i\in I}$ de M, on a

$M/N \leqslant \prod_{i\in I} M/N_i$ et, par réduction, l'image isomorphe de M/N rencontre les M/N_i, donc contient au moins un simple, et M est semi-artinien. Inversement, si M est semi-artinien, il est extension essentielle de son socle $\bigoplus_{i\in I} S_i$, et on peut représenter 0 comme intersection réduite de compléments K_i des S_i([5]). Soit s_i un élément non nul de S_i : un complément K_i de S_i étant maximal tel que $K_i \cap S_i = 0$, donc tel que $s_i \notin K_i$, est complètement irréductible. On en déduit le résultat annoncé, un quotient d'un semi-artinien étant semi-artinien, et l'image réciproque d'un complètement irréductible étant complètement irréductible.

Indiquons, pour finir, que les modules semi-artiniens sont ceux qui possèdent une chaîne maximale bien ordonnée de sous-modules, et que le théorème de Jordan Hölder y est vérifié sous une forme très atténuée ([10]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Jean GUERINDON, Propriétés d'irréductibilité dans les modules, théorie multiplicative, S-normalité. (Thèse 1958).

[2] Jean GUERINDON, Anneaux de Goldman. Séminaire Dubreil-Pisot 1969-1970, n° 9.

[3] L.LESIEUR et R.CROISOT, Algèbre noethérienne non commutative, Gauthier-Villars (1963).

[4] Jacques RAVEL, Injectivité, généralisations et applications, Extensions essentielles dans un treillis de Johnson. Thèse de 3ème Cycle (Lyon 1966).

[5] Jacques FORT , Sommes directes de sous-modules co-irréductibles d'un module. Séminaire Dubreil-Pisot 1966-1967, n° 3.

[6] Pierre GABRIEL, Des catégories abéliennes. Bull. Soc. Math. France 90 (1962) pp. 323-448.

[7] S.E. DICKSON , Noetherian splitting rings are artinian J.London Math. Soc. 42(1967) pp. 732-736.

[8] MARK L. TEPLY, On non commutative splitting rings J.London Math. Soc. (2) 4(1971), pp. 157-164.

[9] Guy RENAULT , Etude des sous-modules comppléments dans un module. Thèse (1966).

[10] Jacques RAVEL, Modules semi-artiniens [§ 4 d'un article non publié].

-:-:-:-:-:-:-

UNIVERSITE DE PARIS-SUD XI

CENTRE D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 15 du 15.3.72
(non rédigée)

CERTAINES ALGEBRES DE TYPE FINI QUI SONT DES ALGEBRES DE JACOBSON

par J.P. DELALE

UNIVERSITE PARIS-SUD XI

CENTRE D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 16 du 22.3.72

-:-:-:-:-

ANNEAUX PRESIMPLIFIABLES

par Alain BOUVIER

Exposé de résultats nouveaux sur les anneaux présimplifiables qui sont, en grande partie, publiés dans le Séminaire d'Algèbre non Commutative 1971/1972 : "Modules - Anneaux" du Département de Mathématiques de l'Université Claude Bernard à LYON I, 14, boulevard du 11 Novembre 1918 à VILLEURBANNE, Conférences 6 et 8 des 7 et 28 Janvier 1972.

Voir bibliographie page suivante.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALLARD J.C., Demi-groupes D-atomiques. Comptes-rendus 273, série A, 1971, pp. 661-273; série A, 1971, p. 1171.

[2] ALLARD J.C., Remarque sur les anneaux de fractions des anneaux D-atomiques. (à paraître).

[3] ATIYAH M.F., MACDONALD I.G. Introduction to commutative algebra. Addison-Wesley, Pub. et Company.

[4] BOURBAKI, Algèbre commutative, Chap. 2-3 et 7. Hermann.

[5] BOUVIER A., Sur les anneaux de fractions des anneaux atomiques présimplifiables. Bull. Sc. Math. 2ème série, 95 (1971), p. 371.

[6] BOUVIER A., Anneaux présimplifiables et anneaux atomiques. Séminaire Lesieur, n° 5 (1971).

[7] BOUVIER A., Anneaux de Gauss. C.R. Acad. Sc. t. 273, Série A, p. 443 (1971).

[8] BOUVIER A., FAISANT A., Propriétés des demi-groupes de fractions. Pub. Dépt. Math. Université de Lyon I.

[9] CLIFFORD, Arithmetic and ideal theory of commutative semi-group. Annals of Math. Vol. 39, n° 3, 1938, p. 594.

[10] FLETCHER C.R., Unique factorization rings. Proc. Comb. Phil. Soc. 1969, 65, p. 579.

[11] FLETCHER C.R., The structure of unique factorization rings. Proc. Comb. Phil. Soc. 1970, 67, p. 535.

[12] FLETCHER C.R., Equivalent condition for unique factorization. Pub. Départ. Math. Université de Lyon I.

[13] FLETCHER C.R., Euclidien rings. J.London Math. Soc. (2), 4 (1971), p. 79.

[14] GELFAND I.M., RAIKOV D.A., CHILOV G.E. Les anneaux normés commutatifs. Gauthier-Villars.

[15] LAMBEK, Lectures on rings and modules. Blaisdell publicing company.

[16] MATSUMURA H., Commutative algebra. Benjamin.

[17] SAMUEL P., Anneaux factoriels. Soc. Math. de Sao Paulo.

[18] SAMUEL P., Anneaux euclidiens. Journal of Algebra, vol. 19, n° 12, (1971), p. 282.

[19] ZARISKI O., SAMUEL P., Commutative algebra. Von Nostrand.

[20] NORTHCOTT D.G., Ideal Theory. Cambridge, University Press.

UNIVERSITE PARIS-SUD XI

CENTRE D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE.

Conférence n° 17 du 12
et 19 Avril 1972

-:-:-:-:-:-:-

- I - ANNEAUX DE FRACTIONS GENERALISES

par M. DJABALI

-:-:-:-:-:-:-:-

Diverses interprétations ont été données de la notion d'anneau de fractions généralisé. Dans cet exposé nous reprenons l'interprétation de J. Lambek [5] en l'explicitant à la lumière de la théorie de P. Gabriel [1] .

Tous les anneaux considérés sont supposés unitaires.

Soient A un anneau et E l'enveloppe injective de la structure de A-module à gauche définie sur A (notée ${}_A A$) .

DEFINITION 1.1. : Un idéal à gauche I de A est dit dense si l'on a

$$\mathrm{Hom}_A(A/_I, E) = 0 .$$

Cela revient à dire que si $h \in \mathrm{Hom}_A(A,E)$ et si $h(I) = 0$ alors $h(A) = 0$. On a manifestement le résultat suivant.

PROPOSITION 1.2. : Pour qu'un idéal I soit dense il faut et il suffit que le seul élément x de E tel que $Ix = 0$ soit l'élément nul.

PROPOSITION 1.3. : Un idéal dense est essentiel dans A .

Se reporter à [5] , exercice 5, p. 100.

Ainsi si l'idéal singulier à gauche de A est nul, les idéaux denses sont tous les idéaux essentiels de A .

Notation : Dans la suite nous appellerons F le système des idéaux denses de A .

Avant de poursuivre, rappelons la définition suivante.

DEFINITION 1.4. : Soit F un système d'idéaux à gauche de A. On dit que F est topologisant s'il vérifie les conditions :

(I) si $I \in F$ et si $J \supset I$ alors $J \in F$.

(II) si I et $J \in F$ alors $I \cap J \in F$.

(III) si $I \in F$ et si $x \in A$ alors l'idéal $I^{\bullet}.\, x = \{\lambda \in A, \lambda x \in I\}$ appartient à F.

Exemples :

(I) le système des idéaux à gauche essentiels est topologisant.

(II) si A possède un anneau de fractions (à gauche) classique alors le système de tous les idéaux qui contiennent un élément régulier est topologisant.

PROPOSITION 1.5. : Le système des idéaux denses est topologisant.

Pour la démonstration nous renvoyons à [5] p. 37 et p. 96.

PROPOSITION 1.6. : Soit M un A-module à gauche. L'ensemble des éléments x de M tels que $\mathrm{Ann}\, x \in F$ est un sous-module de M, noté $FT(M)$.

DEFINITION 1.7. :

M est dit de F-torsion si $M = FT(M)$.

M est dit libre de F-torsion si $FT(M) = 0$.

PROPOSITION 1.8. : Pour que M soit de F-torsion il faut et il suffit que $\mathrm{Hom}_A(M,E) = 0$.

La démonstration est immédiate.

THEOREME 1.9. : Le système F est idempotent au sens de [1].

Rappelons qu'il faut montrer que pour une suite exacte $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ on a l'équivalence : M de F-torsion $\Longleftrightarrow$ M' et M'' de F-torsion. Ceci découle immédiatement des définitions et de la proposition précédente.

COROLLAIRE : Si M est un A-module, $M/_{FT(M)}$ est libre de F-torsion.

Notation : Si M est un A-module nous noterons M_F le localisé de M par rapport au système topologisant et idempotent F.

Rappelons la construction de M_F telle qu'elle est définie dans [1]. Soit M_1 le module $M/_{FT(M)}$. Soit $E(M_1)$ l'enveloppe injective de M_1. Dans ces conditions on a :

$$M_F = \{x \in E(M_1),\ \exists I \in F \text{ tel que } Ix \in M_1\}.$$

On peut aussi écrire :

$$M_F \supset M_1 \quad \text{et} \quad M_F/_{M_1} = FT(E(M_1)/_{M_1}).$$

Il est immédiat que M_F est libre de F-torsion. D'autre part si M est libre de F-torsion on a $M \subset M_F$.

Dans la suite nous noterons A_F le localisé de ${}_AA$. On a donc $A \subset A_F$.

THEOREME 1.10. :

(I) A_F peut être muni d'une structure d'anneau prolongeant celle de A.

(II) Si M est un A-module à gauche M_F peut être muni d'une structure de A_F-module à gauche prolongeant sa structure de A-module.

(III) Si M et N sont des A-modules et si $h \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$, on peut lui faire correspondre un A_F homomorphisme de M_F dans N_F noté h_F.

DEFINITION 1.11. :

L'anneau A_F est appelé anneau de fractions généralisé de A.

Le A_F-module M_F est appelé module de fractions de M.

Foncteur localisation : On vérifie immédiatement que la correspondance $M \to M_F$ et $h \to h_F$ définit un foncteur de la catégorie des A-modules à gauche dans la catégorie des A_F-modules à gauche. Ce foncteur est appelé foncteur localisation : il est exact à gauche mais en général il n'est pas exact (cf. [3] p. 26).

Remarques :

(I) Pour que I soit un idéal dense il faut et il suffit que l'on ait $I_F = A_F$.

(II) Dans le cas où A est à idéal singulier à gauche nul on a $A_F = E$. Ce résultat est bien connu et on sait de plus que E est un anneau régulier.

(III) Dans le cas où A possède un anneau de fractions classique cet anneau peut s'interpréter comme le localisé par rapport au système topologisant (et manifestement idempotent) de tous les idéaux qui contiennent un élément régulier. Le localisé d'un module n'est autre que le module de fractions.

Signalons que dans ce cas tout idéal qui contient un élément régulier est dense (cf. [5], p. 109). Ceci prouve que lorsqu'il existe un anneau de fractions classique cet anneau est contenu dans l'anneau de fractions généralisé.

- II - APPLICATION AUX ANNEAUX NOETHERIENS.

Rappelons que L. Small a caractérisé dans [6] les anneaux noethériens (à gauche) qui possèdent un anneau de fractions classique artinien (à gauche) : il faut et il suffit que tout élément régulier modulo le radical nilpotent soit régulier. Une caractérisation des anneaux noethériens (à gauche) qui possèdent un anneau de fractions généralisé artinien (à gauche) pourrait être la suivante : il faut et il suffit que tout idéal dense du quotient par le radical nilpotent se "relève" en un idéal dense. Nous ne pouvons démontrer un tel résultat que dans le cas où le foncteur localisation est exact. Nous allons donc commencer par examiner des conditions pour que le foncteur localisation soit exact, et ceci plus particulièrement dans le cas d'un anneau noethérien. Signalons quand même que le problème a été étudié et résolu dans sa généralité par M. Hacque [4] et O. Goldmann [3] .

<u>DEFINITION 2.1.</u> : Soit M un A-module à gauche. Si N est un sous-module de M nous dirons que N est "projectif sous M" si, quel que soit le diagramme

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r] & M \arrow[d, "\varphi"] & \\ & S \arrow[r] & R \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où S et R sont des A-modules, les lignes sont exactes et $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(M,R)$, alors il existe $\psi \in \mathrm{Hom}_A(N,S)$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & M \arrow[d, "\varphi"] & \\ & S \arrow[r] & R \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Il est clair que s'il existe un module projectif situé entre N et M , N est projectif sous M .

La caractérisation classique d'un module projectif se généralise immédiatement de la manière suivante.

THEOREME 2.2. : Pour que N soit projectif sous M il faut et il suffit qu'il existe une famille x_λ, $\lambda \in \Lambda$, d'éléments de M et une famille φ_λ, $\lambda \in \Lambda$ d'homomorphismes de N dans A tels que pour tout $x \in N$ on ait :

(I) $\varphi_\lambda(x) = 0$ excepté pour un nombre fini d'indices

(II) $x = \Sigma\, \varphi_\lambda(x) x_\lambda$.

En particulier si M est de type fini l'ensemble Λ peut être supposé fini.

DEFINITION 2.3. : Nous dirons qu'un anneau vérifie la condition (E) si pour tout idéal dense I il existe un idéal dense J projectif sous I.

THEOREME 2.4. : Soit A un anneau. Pour que le foncteur localisation défini dans la première partie soit exact, il faut et il suffit que A vérifie la condition (E).

Pour démontrer que la condition est suffisante il suffit de transcrire la démonstration de [1] p. 415.

Pour démontrer que la condition est nécessaire nous allons nous inspirer d'une démonstration de O. Goldmann.

Soit I un idéal dense et x_λ, $\lambda \in \Lambda$ un système de générateurs de I. Nous pouvons donc écrire une suite exacte $L \xrightarrow{\varphi} I \longrightarrow 0$ où L est un module libre de base y_λ, $\lambda \in \Lambda$ avec $\varphi(y_\lambda) = x_\lambda$. Le foncteur localisation étant exact φ_F définit une surjection de L_F sur $I_F = A_F$. Soit $y \in L_F$ tel que $\varphi_F(y) = 1$. L étant un A-module libre est libre de F-torsion. Donc $L \subset L_F$. Il existe un idéal dense J tel que $Jy \subset L$. En appliquant φ_F à cette inclusion on voit que $J \subset I$. D'autre part J est projectif sous I. En effet si $x \in J$ xy s'écrit d'une manière unique sous la forme $xy = \Sigma\, a_\lambda y_\lambda$. Les applications $x \xrightarrow{\varphi_\lambda} a_\lambda$ sont des homomorphismes et on a bien $x = \Sigma\, \varphi_\lambda(x) x_\lambda$.

PROPOSITION 2.5. : Soit A un anneau noethérien à gauche vérifiant la condition (E). Alors si I est un idéal dense $I_F = A_F I$.

En effet I contient un idéal dense J projectif sous I. Comme I est de type fini il existe des éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de I et des homomorphismes $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ de J dans A tels que pour tout $x \in J$ on ait $x = \varphi_1(x)x_1 + \ldots + \varphi_n(x)x_n$. Il existe des éléments $f_1, \ldots, f_n$ appartenant à A_F tels que l'on ait pour tout $x \in J$: $\varphi_1(x) = xf_1, \ldots, \varphi_n(x) = xf_n$ (cf. [5]). Alors il est clair que $1 - \Sigma f_i x_i$ est annulé par J. Cela prouve que $1 = \Sigma f_i x_i$ (prop. 1.2.). On a bien $A_F = A_F I$. Mais on sait que $A_F = I_F$ d'où le résultat.

<u>COROLLAIRE</u> : Soit M un A-module libre de F-torsion. Alors :

(I) Si X est un sous-module de M on a : $X_F = A_F X$.

(II) Si Y est un sous-A_F-module de M_F on a :

$$Y = (Y \cap M)_F = A_F(Y \cap M) \quad .$$

Montrons la première égalité : nous savons déjà que $M \subset M_F$. Nous savons aussi que $A_F X \subset X_F$ (cf. [1]). Réciproquement si $x \in X_F$ il existe un idéal dense I tel que $Ix \subset X$. Comme $A_F I = A_F$, $x \in A_F X$.

<u>Exemple</u> : Nous allons montrer qu'un anneau noethérien (à gauche) à idéal singulier (à gauche) nul vérifie la condition (E) .

Les idéaux denses sont les idéaux essentiels. Soit n la dimension de Goldie (à gauche) de A (pour cette notion se reporter par exemple à [2]). Si I est un idéal essentiel, I contient un idéal essentiel de la forme $Ax_1 \oplus \ldots \oplus Ax_n$, Ax_i étant coirréductible pour tout i . Comme A est supposé à idéal singulier nul pour tout i il existe un idéal à gauche non nul X_i tel que $X_i \cap \mathrm{Ann}_g(x_i) = 0$. Alors l'idéal $J = X_1x_1+\ldots+X_nx_n$ est essentiel et projectif sous I .

<u>Dans toute la suite A sera un anneau noethérien à gauche</u>.

<u>Notations</u> : N sera le radical nilpotent de A . Soit G la famille des idéaux à gauche I qui vérifient les conditions suivantes :

(I) $I \supset N$.

(II) I/N est un idéal dense de A/N .

Nous noterons donc $\bar{G}$ la famille des idéaux denses de $\bar{A} = A/N$ et les idéaux de $\bar{G}$ seront notés $\bar{I}$, I parcourant G .

<u>Caractérisation des idéaux de G</u> : Les résultats classiques de [2] nous permettent d'affirmer que les idéaux de G sont tous les idéaux I contenant N et vérifiant l'une des conditions

(I) I/N est essentiel dans A/N .

(II) I/N contient un élément régulier de A/N .

(III) I contient un idéal de la forme $Ab+N$ où b est régulier modulo N.

PROPOSITION 2.6. : Le système G est un système topologisant.

Ceci découle immédiatement du fait que $A/_N$ possède un anneau de fractions classique à gauche (cf. [2]).

THEOREME 2.7. : Soit A un anneau noethérien à gauche vérifiant la condition (E). Si tout idéal de G est dense alors A possède un anneau de fractions généralisé artinien (à gauche).

Supposons que l'on ait $N^P \neq 0$, $N^{P+1} = 0$. Considérons la suite $A_F \supset N_F \supset (N^2)_F \supset \ldots \supset (N^P)_F \supset 0$. Il suffit de montrer que $A_F/_{N_F}$, $N_F/_{(N^2)_F}$,...,$(N^P)_F$ sont des A_F-modules à gauche artiniens. Le foncteur localisation étant exact nous avons : $A_F/_{N_F} \simeq (A/_N)_F$, $N_F/_{(N^2)_F} \simeq (N/_{N^2})_F$, etc...

Le résultat découle du lemme suivant.

LEMME : Soit M un A-module à gauche de type fini tel que $NM = 0$. Alors M_F est un A_F-module à gauche artinien.

Comme les hypothèses sont également vérifiées par $M/_{FT(M)}$ nous pouvons supposer que M est libre de F-torsion. Or nous pouvons munir M d'une structure de $\bar{A}$-module à gauche en posant $\bar{\lambda}x = \lambda x$, $\forall x \in M$, $\forall \lambda \in A$ ($\bar{\lambda}$ est l'image canonique de λ dans $A/_N$). Cette structure sera notée ${}_{\bar{A}}M$. Avec l'hypothèse faite ${}_{\bar{A}}M$ est libre de $\bar{G}$-torsion. D'après le théorème de Goldie [2] $\bar{A}$ possède un anneau de fractions classique semi-simple que nous notons $\bar{A}_{\bar{G}}$ parce que c'est aussi l'anneau de fractions généralisé de $\bar{A}$. Nous pouvons dans ces conditions former le module de fractions de ${}_{\bar{A}}M$: ce module sera noté $M_{\bar{G}}$. On a $M \subset M_{\bar{G}}$. Puisque ${}_{\bar{A}}M$ est visiblement de type fini $M_{\bar{G}}$ est un $\bar{A}_{\bar{G}}$-module artinien.

Considérons maintenant M_F. On a aussi $M \subset M_F$. Considérons une suite décroissante de sous-modules du A_F-module M_F , $Y_1 \supset Y_2 \supset \ldots \supset Y_n \supset \ldots$ Nous savons que $Y_n = (Y_n \cap M)_F$, $\forall n$ (corollaire de la Prop. 2.5.). Or $X_n = Y_n \cap M$ est clairement un sous-$\bar{A}$-module de ${}_{\bar{A}}M$. La suite décroissante des sous-modules $\bar{A}_{\bar{G}}X_n$ de $M_{\bar{G}}$ est stationnaire. Il existe donc un entier n_o tel que pour $n \geqslant n_o$ on ait : $X_n \subset \bar{A}_{\bar{G}}X_{n_o}$. Cela revient à écrire que pour tout $x \in X_n$, il existe $\bar{I} \in \bar{G}$ tel que $\bar{I}x \subset X_{n_o}$. Mais ceci revient à écrire, en considérant cette fois-ci les structures de A-modules $Ix \subset X_{n_o}$. Comme par hypothèse I est dense nous en déduisons que $x \in (X_{n_0})_F$. Nous voyons donc que la suite des $(X_n)_F$ est stationnaire, ce qui prouve bien le résultat annoncé.

<u>PROPOSITION 2.8.</u> : Pour que l'on ait $G \subset F$ il faut et il suffit que l'annulateur à droite dans A de tout élément de G soit nul.

D'après la proposition 2.6., l'ensemble des $x \in E$ tels que $\mathrm{Ann}\, x \in G$ est un sous-module de E . Dire que ce sous-module est nul revient à dire que sa trace sur A est nulle.

Nous avons vu que tout idéal de G contient un idéal de la forme $Ab+N$ avec b régulier modulo N . Donc si tout élément régulier modulo N est régulier à gauche nous sommes surs que $G \subset F$. En particulier nous pouvons énoncer :

<u>PROPOSITION 2.9.</u> : Soit A un anneau noethérien à gauche vérifiant la condition (E). Si A possède un anneau de fractions classique artinien à gauche, alors l'anneau de fractions généralisé de A est artinien à gauche.

<u>THEOREME 2.10.</u> : Supposons que l'anneau de fractions généralisé de A soit artinien à gauche. Alors tout idéal de G est dense.

Il suffit de montrer que tout idéal de la forme $Ab+N$, b régulier modulo N, est dense. Ceci revient à dire que $(Ab+N)_F = A_F$. La suite décroissante des idéaux $A_F b^n$ est stationnaire. Il existe donc un entier r tel que $b^r \in A_F b^{r+1}$, c'est-à-dire que l'on peut écrire une égalité de la forme $b^r = xb^{r+1}$, $x \in A_F$. Ainsi : $(1-xb)b^r = 0$. Montrons que $1-xb \in N_F$. Il existe un idéal dense I tel que $I(1-xb) \subset A$. Mais $I(1-xb)b^r = 0$, ce qui prouve que $I(1-xb) \in N$: Nous en concluons bien que $(1-xb) \in N_F$. Alors $A_F = A_F b+N_F$. Il est immédiat que $A_F b+N_F \subset (Ab+N)_F$. Le résultat annoncé est démontré.

<u>Remarque</u> : Le théorème 2.10. est vrai même si la condition (E) n'est pas vérifiée.

<u>Exemple</u> : Nous allons donner un exemple d'application du théorème 2.7. Nous voulons un exemple où la condition (E) n'est pas vérifiée de manière évidente: il nous faut donc considérer un exemple d'anneau qui n'est pas à idéal singulier nul et où l'anneau de fractions généralisé n'est pas également un anneau de fractions classique.

Soit T l'anneau des matrices de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ où α et $\beta \in \mathbb{Z}$.

T est un anneau commutatif, unitaire et noethérien. Le radical nilpotent $N(T)$ est constitué par toutes les matrices pour lesquelles $\alpha = 0$. $N(T)$ est de carré nul. $N(T)$ est aussi l'idéal singulier de T . Tous les éléments qui n'appartiennent pas à $N(T)$ sont réguliers. T possède un anneau de fractions classique artinien $F(T)$ qui est l'ensemble de toutes les matrices de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ o & \alpha \end{pmatrix}$, où α et $\beta \in \mathbb{Q}$. Il est facile de voir que $F(T)$ est aussi l'enveloppe injective de T .

Soit maintenant A l'anneau de toutes les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ o & d \end{pmatrix}$, où a, b et $d \in T$. A est un anneau unitaire et noethérien (à gauche et à droite). Son radical nilpotent N est l'ensemble de toutes les matrices pour lesquelles a et $d \in N(T)$. N est aussi l'idéal singulier (à gauche) de A . On voit facilement que A possède un anneau de fractions classique (à gauche et à droite) qui est l'anneau de toutes les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ o & d \end{pmatrix}$ où a, b et $d \in F(T)$. Cet anneau est artinien (à gauche et à droite).

Nous nous proposons de montrer que l'anneau E de toutes les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où a, b, c et $d \in F(T)$ est l'anneau de fractions généralisé de A . Montrons d'abord que E est l'enveloppe injective de ${}_A A$. Il est immédiat que E est une extension essentielle de A . Il suffit donc de montrer que c'est un A-module à gauche injectif : pour cela montrons qu'il satisfait au critère de Baer. Soit I un idéal à gauche de A et soit f un A-homomorphisme de I dans E . Définissons un idéal à gauche X de T de la manière suivante : pour que $b \in X$ il faut et il suffit que $\begin{pmatrix} o & b \\ o & o \end{pmatrix} \in I$. Si nous remarquons que $\begin{pmatrix} o & 1 \\ o & o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} o & b \\ o & o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o & o \\ o & o \end{pmatrix}$ nous en déduisons que $f \begin{pmatrix} o & b \\ o & o \end{pmatrix}$ est de la forme $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ o & o \end{pmatrix}$. Alors les applications $b \to \alpha_1$ et $b \to \alpha_2$ sont des T-homomorphismes de X dans $F(T)$. Comme $F(T)$ est l'enveloppe injective de T nous pouvons affirmer qu'il existe deux éléments x_1 et x_2 de $F(T)$ tels que l'on ait pour tout $b \in X$, $\alpha_1 = bx_1$, $\alpha_2 = bx_2$. Maintenant soit $x = \begin{pmatrix} a & b \\ o & d \end{pmatrix}$ un élément quelconque de I . En le multipliant à gauche successivement par $\begin{pmatrix} 1 & o \\ o & o \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} o & o \\ o & 1 \end{pmatrix}$ nous voyons que $\begin{pmatrix} a & b \\ o & o \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} o & o \\ o & d \end{pmatrix}$ sont des éléments de I . Puisque $\begin{pmatrix} o & o \\ o & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} o & o \\ o & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o & o \\ o & d \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} o & o \\ o & d \end{pmatrix}$ est de la forme $\begin{pmatrix} o & o \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$. Puisque

$\begin{pmatrix} o & 1 \\ o & o \end{pmatrix}\begin{pmatrix} o & o \\ o & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o & d \\ o & o \end{pmatrix}$ on voit que : $\beta_1 = dx_1$, $\beta_2 = dx_2$. Considérons maintenant $f\begin{pmatrix} a & b \\ o & o \end{pmatrix}$. On a $\begin{pmatrix} 1 & o \\ o & o \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ o & o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ o & o \end{pmatrix}$ d'où $f\begin{pmatrix} a & b \\ o & o \end{pmatrix}$ est de de la forme $\begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ o & o \end{pmatrix}$. Définissons un idéal à gauche Y de T de la manière suivante : pour que $a \in Y$ il faut et il suffit qu'il existe $b \in T$ tel que $\begin{pmatrix} a & b \\ o & o \end{pmatrix} \in I$. Supposons que $\begin{pmatrix} a & b \\ o & o \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a & b' \\ o & o \end{pmatrix}$ appartiennent à I : il en est alors de même pour $\begin{pmatrix} o & b-b' \\ o & o \end{pmatrix}$. Posons $f\begin{pmatrix} a & b \\ o & o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ o & o \end{pmatrix}$ et $f\begin{pmatrix} a & b' \\ o & o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma'_1 & \gamma'_2 \\ o & o \end{pmatrix}$. Nous avons l'égalité $\begin{pmatrix} \gamma_1-\gamma'_1 & \gamma_2-\gamma'_2 \\ o & o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (b-b')x_1 & (b-b')x_2 \\ o & o \end{pmatrix}$. Nous en déduisons que $\gamma_1-bx_1 = \gamma'_1-b'x'_1$, $\gamma_2-bx_2 = \gamma'_2-b'x'_2$. La conclusion de ceci est que γ_1-bx_1 et γ_2-bx_2 ne dépendent que de a . Il est immédiat que les applications $a \to \gamma_1-bx_1$, $a \to \gamma_2-bx_2$ sont des A-homomorphismes de Y dans $F(T)$. Donc il existe des éléments y_1 et y_2 de $F(T)$ tels que $\gamma_1-bx_1 = ay_1$, $\gamma_2-bx_2 = ay_2$. En rassemblant tous les résultats obtenus nous voyons que :

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ o & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ay_1+bx_1 & ay_2+bx_2 \\ dx_1 & dx_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ o & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} .$$

Le critère de Baer est donc bien vérifié.

Recherchons maintenant les idéaux denses de A . Un tel idéal I possède un nombre fini de générateurs $g_1,\ldots,g_n$, avec $g_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ o & d_i \end{pmatrix}$. Nous devons écrire que dans E , $\bigcap \mathrm{Ann}_d(g_i) = 0$. Remarquons d'abord que si tous les a_i appartiennent à $N(T)$ on a $Ix = 0$ pour tout élément x de la forme $\begin{pmatrix} o & \alpha \\ o & o \end{pmatrix}$, $\alpha \in N(T)$. Nous devons donc supposer que l'un au moins des a_i , disons a_1 , est un élément régulier de T . Remarquons que si I est monogène, g_1 doit être régulier : l'idéal dense Ag_1 est alors projectif. Supposons maintenant que I ait au moins deux générateurs. Posons $\frac{b_1}{a_1} = k$, $b_2 = ka_2+e_2,\ldots,b_n = ka_n+e_n$. Nous allons montrer que pour que l'idéal I soit dense, il faut et il suffit que l'un au moins des éléments $e_2,\ldots,e_n$ soit régulier.

En effet soit $f = \begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix}$ un élément tel que $g_1 f = g_2 f = \dots = g_n f = 0$. Nous avons alors $a_1(x+ky) = 0$, $a_2(x+ky) + e_2 y = 0$, $a_n(x+ky) + e_n y = 0$. Comme a_1 est supposé régulier $x+ky = 0$ d'où $e_2 y = \dots = e_n y = 0$. Si l'un au moins des $e_2, \dots, e_n$ est régulier nous avons $y = 0$ d'où $x = 0$ et pour les mêmes raisons $x' = y' = 0$. Donc I est dense. Si $e_2, \dots, e_n$ appartiennent à $N(T)$ nous pouvons trouver un élément $f \neq 0$. Il suffit de prendre pour y un élément non nul de $N(T)$, $x = -ky$ et $x' = y' = 0$.

Supposons que l'on ait e_2 régulier. I contient les éléments $g'_1 = \begin{pmatrix} a_1 & ka_1 \\ o & o \end{pmatrix}$ et $g'_2 = \begin{pmatrix} a_2 & ka_2+e_2 \\ o & o \end{pmatrix}$. Considérons l'idéal $J = Ag'_1 + Ag'_2$. Cet idéal est dense : nous allons montrer qu'il est projectif. On a d'abord $Ag'_1 \cap Ag'_2 = 0$. En effet si $h_1 g'_1 = h_2 g'_2$, $h_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ o & \delta_1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ o & \delta_2 \end{pmatrix}$, nous pouvons écrire : $\alpha_1 a_1 = \alpha_2 a_2$, $k\alpha_1 a_1 = k\alpha_2 a_2 + \alpha_2 e_2$. Alors $\alpha_2 e_2 = 0$ d'où $\alpha_2 = 0$. Donc $h_1 g'_1 = h_2 g'_2 = 0$. Maintenant montrons que Ag'_1 est projectif. En effet $x = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ o & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & ka_1 \\ o & o \end{pmatrix}$ s'écrit aussi $x = \begin{pmatrix} \alpha & o \\ o & o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & ka_1 \\ o & o \end{pmatrix}$. L'élément α est déterminé de manière unique par x puisque a_1 est régulier. De plus l'application $x \to \varphi_1(x) = \begin{pmatrix} \alpha & o \\ o & o \end{pmatrix}$ est un A-homomorphisme de Ag'_1 dans A. Pour des raisons analogues Ag'_2 est projectif.

Nous venons de voir que tout idéal dense contient un idéal dense projectif. Ainsi la condition (E) est bien vérifiée. Puisque A possède un anneau de fractions classique artinien son anneau de fractions généralisé est également artinien (Prop. 2.9.). On voit facilement que cet anneau est E.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. GABRIEL. Catégories abéliennes. Bull. Soc. Math. de France 90(1962), pp. 323-349.

[2] A.W. GOLDIE. Semi-prime rings with maximum condition, Proc. London Math. Soc., 10(1960), pp. 201-220.

[3] O. GOLDMANN. Rings and modules of quotients, J. of Algebra, t. 13(1969), pp. 10-47.

[4] M. HACQUE. Localisations exactes et localisations plates, publications du Département de Mathématiques, Fac. Sc. de Lyon, t. 6, fasc. 2(1969), pp. 97-118.

[5] J. LAMBEK. Lectures on rings and modules, Blaisdell publishing Company, 1966.

[6] L. SMALL. Orders in Artinian rings, J. of Algebra, 4(1966) pp. 13-41.

-:-:-:-:-:-

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 18 du 26.4.1972

ANNEAUX TELS QUE TOUT MODULE A GAUCHE INJECTIF SOIT PLAT

D'après T. WÜRFEL

par R. DESQ

-:-:-:-:-:-

1. ANNEAUX PRESQUE COHERENTS.

NOTATION : Si M est un A-module à gauche, si N est un sous-module de M, si $x \in M$, on pose $(N:x) = \{a \in A | ax \in N\}$.

Notation analogue pour les modules à droite.

RAPPEL : [8] Soit I une enveloppe injective de A_A, un idéal à droite D de A est dit rationnel si, $\operatorname{Hom}_A(A/_D, I) = 0$, ce qui équivaut à, $0 \neq a_1 \in A$, $a_2 \in A \Longrightarrow a_1(0:a_2) \neq 0$.

DEFINITION : [5] Un sous-module N d'un module à droite M est dense dans M si $\operatorname{Hom}_A(M/_N, I) = 0$.

Ceci équivaut à la condition : $\forall x \in M$, $(N:x)$ est un idéal rationnel. En effet, si $D = (N:x)$ est rationnel et si $\varphi \in \operatorname{Hom}_A(M, I)$ est tel que $\varphi(N) = 0$, on a $\varphi(x)D = 0$ d'où $\varphi(x) = 0$, $\varphi = 0$. Inversement, supposons $\operatorname{Hom}(M/_N, I) = 0$ et soit $\Delta = (N:x)$. Si $\psi \in \operatorname{Hom}_A(A, I)$ est tel que $\psi(\Delta) = 0$, on peut définir $\varphi : N+Ax \to I$ par $\varphi(n+ax) = \psi(a)$, on peut prolonger φ à M, on aurait $\varphi(N) = 0$ donc $\varphi = 0$, $\psi = 0$.

DEFINITIONS : [5]

- Un module M est presque de type fini (ptf) si M contient un sous-module dense de type fini.

– Un module M est presque de présentation finie (ppf) s'il existe une suite exacte $0 \to K \to F \to M \to 0$ avec F libre de type fini et K ptf.

PROPOSITION 1.1. [5] : Soit $0 \to K \to M \to N \to 0$ une suite exacte

a) Si M est ptf, N est ptf.

b) Si K et N sont ptf, M est ptf.

c) Si M est ptf et si N est ppf alors K est ptf.

NOTATION : $M^* = \mathrm{Hom}_A(M,A)$, $C_M : M \to M^{**}$ désigne l'homomorphisme canonique.

PROPOSITION 1.2. : Si P est un A-module à gauche de présentation finie, il existe une suite exacte

$$(1) \quad 0 \to P^* \to F \to U \to 0$$

où F est libre de type fini et U contenu dans un module libre. Inversement, si U est un sous-module de type fini d'un module à droite libre, il existe une suite exacte (1) avec P de présentation finie et F libre de type fini.

Si P est de présentation finie, on a une suite exacte

$$0 \to H \xrightarrow{u} L \xrightarrow{v} P \to 0$$

avec L libre de type fini. D'où :

$$0 \to P^* \xrightarrow{{}^t v} L^* \xrightarrow{{}^t u} H^* .$$

Si $U = \mathrm{Im}\,{}^t u$, on a $U \subset H^*$, mais H est de type fini, donc il existe une suite exacte $A^m \to H \to 0$, d'où $0 \to H^* \to (A^m)^*$, U est bien contenu dans un module libre $(A^m)^*$.

Inversement, U étant de type fini on peut considérer le diagramme

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[d, "P"'] & \\ 0 \arrow[r] & U \arrow[r, "i"] \arrow[d] & A^m \\ & 0 & \end{tikzcd}$$

où L est libre de type fini. Soit $\varphi = i \circ p : L \to A^m$; on a $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x))$ avec pour $1 \leqslant i \leqslant m$ $\varphi_i \in L^*$. Soit M le sous-module de L^* engendré par $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ et soit $0 \to M \xrightarrow{r} L^* \xrightarrow{s} Q \to 0$, $Q = L^*/M$ est de présentation finie.

$0 \to Q^* \xrightarrow{{}^t s} L^{**}$; $C_L : L \to L^{**}$ est un isomorphisme.

Posons $C_L(x) = \tilde{x}$. On a $x \in \operatorname{Ker} p \iff \varphi_i(x) = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$ $\iff \tilde{x}(\varphi_i) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant m \iff \tilde{x}(M) = 0 \iff \tilde{x} \in {}^t s(Q^*)$. Donc $\operatorname{Ker} p = C_L^{-1} \circ {}^t s(Q^*) \simeq Q^*$.

THEOREME 1.3. : Pour un anneau A les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) Tout sous-module de type fini d'un module à droite libre est ppf.
2) Pour tout module à droite libre F, pour tout sous-module P de type fini de F, pour tout $x \in F$, $(P:x)$ est ptf.
3) Pour tout module à droite M de présentation finie et pour tout $x \in M$, $(0:x)$ est ptf.
4) Pour tout $x \in A$, l'annulateur à droite de x est ptf et l'intersection de deux sous-modules de type fini d'un module à droite libre est ptf.
5) Le dual de tout module à gauche de présentation finie est ptf.

$1 \iff 2 \iff 4$ (Voir [5], th. 4.9. et [3] th. 2.2.).

$2 \iff 3$ On peut supposer F de type fini, la suite exacte

$$0 \to P \to F \xrightarrow{v} M \to 0 \quad \text{montre que} \quad (0:v(x)) = (P:x) .$$

$1 \Longrightarrow 5$ D'après la proposition 1.2., on a :

$$0 \to P^* \to F \to U \to 0 ,$$

U est de type fini et contenu dans un libre donc ppf, alors P^* est ptf (prop. 1.1.c).

$5 \Longrightarrow 1$ Résulte immédiatement de la proposition 1.2.

DEFINITION : Un anneau A est dit presque cohérent à droite s'il vérifie l'une des conditions équivalentes du théorème 1.3.

Problème : Peut-on, dans le théorème 1.3., remplacer 1 par 1' : Tout idéal à droite de type fini est ppf.

2. MODULES PURS.

DEFINITION : Soit M un module à gauche, un sous-module M' de M est pur dans M si, pour tout module à droite E la suite $0 \to E \otimes M' \to E \otimes M$ est exacte.

PROPOSITION 2.1. [4,1] : M' est pur dans M si et seulement si tout système fini d'équations $\sum_{j=1}^{p} a_i^j x_j = m_i'$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $a_i^j \in A$, $m_i' \in M'$, admettant des solutions dans M , admet des solutions dans M' .

DEFINITION : Une suite exacte $0 \to M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \to 0$ est pure si $u(M')$ est pur dans M .

PROPOSITION 2.2. : Soit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte.
- Si M'' est plat, cette suite est pure.
- Inversement, si cette suite est pure et si M est libre, M'' est plat.

Il suffit de considérer la suite exacte

$$\mathrm{Tor}_1(E,M) \to \mathrm{Tor}_1(E,M'') \to E \otimes M' \to E \otimes M .$$

THEOREME 2.3. [6] : Soit une suite exacte $0 \to M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \to 0$. Cette suite est pure si et seulement si pour tout module de présentation finie E la suite $0 \to \mathrm{Hom}(E,M') \to \mathrm{Hom}(E,M) \to \mathrm{Hom}(E,M'') \to 0$ est exacte.

Supposons la suite pure. Soit une suite exacte $0 \to K \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} E \to 0$ avec F libre de base (f_j) $1 \leqslant j \leqslant n$, K de type fini engendré par $K_i = \sum_j a_i^j f_j$, $1 \leqslant i \leqslant p$, et soit $\varphi \in \mathrm{Hom}(E,M'')$. F étant projectif on peut construire un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\eta"] & F \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\psi"] & E \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "u"] & M \arrow[r, "v"] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Posons $m_i' = \eta(k_i)$; $u(m_i') = \sum_j a_i^j \psi(f_j)$, $u(M')$ étant pur dans M , il existe (prop. 2.1.) $x_j' \in M'$, $1 \leqslant j \leqslant n$, tels que $m_i' = \sum_j a_i^j x_j'$. Soit $\sigma : F \to M'$ définie par $\sigma(f_j) = x_j'$, $(\psi - u\sigma)(\alpha(k_i)) = 0$ donc il existe $\tau : E \to M$, tel que

$\psi = u\sigma + \tau\beta$, $v\psi = vu\sigma + v\tau\beta$ d'où $\varphi\beta = v\tau\beta$, β étant surjectif $\varphi = v\tau$ la suite des Hom est bien exacte.

Inversement, supposons la suite des Hom exacte. Soit un système $u(m'_i) = \sum_j a_i^j m_j$, $m'_i \in M'$, $m_j \in M$, $a_i^j \in A$. Prenons F libre de base f_j , K le sous-module de F engendré par $\sum_j a_i^j f_j$, $E = F/K$, $\psi : F \to M$ définie par $\psi(f_j) = m_j$.

ψ/K applique K dans $u(M')$ donc il existe $\eta : K \to M'$ avec $\psi\alpha = u\eta$, $v\psi\alpha = 0$, donc on peut construire le diagramme (1) .

La suite des Hom étant exacte, il existe $\tau : E \to M$ avec $v\tau = \varphi$ $v(\psi - \tau\beta) = v\psi - v\tau\beta = \varphi\beta - \varphi\beta = 0$, donc il existe $\sigma : F \to M'$ tel que $\psi = \tau\beta + u\sigma$.

$u\eta = \psi\alpha = \tau\beta\alpha + u\sigma\alpha = u\sigma\alpha$, u étant injectif $\eta = \sigma\alpha$,

$u(m'_i) = \psi\alpha(\sum_j a_i^j f_j) = u\sigma\alpha(\sum_j a_i^j f_j)$ $\quad m'_i = \sum_j a_i^j \sigma(f_j)$, $\sigma(f_j) \in M'$,

donc $u(M')$ est pur dans M (prop. 1.1.).

MODULES ABSOLUMENT PURS.

DEFINITION : Un A-module M est absolument pur si, pour tout A-module de présentation finie E , $\mathrm{Ext}_A^1(E,M) = 0$.

Exemple : Tout module injectif est absolument pur.

On obtient facilement la :

PROPOSITION 2.4. : Soit M un module, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) M est absolument pur.
2) Si G est un sous-module de type fini d'un module projectif F , tout homomorphisme de G dans M peut être prolongé en un homomorphisme de F dans M .
3) Toute suite exacte $0 \to M \to M' \to M'' \to 0$ est pure.
4) Il existe une suite pure $0 \to M \to M' \to M'' \to 0$ avec M' absolument pur.

De 2 on déduit qu'une somme directe $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ est un module absolument pur si et seulement si chaque M_i est absolument pur.

<u>Remarque</u> : Si L est un A-module à gauche, notons L° le A-module à droite $\mathrm{Hom}_Z(L, Q/_Z)$ alors [2, p. 120].

$$(\mathrm{Tor}_1(E,M))^\circ \simeq \mathrm{Ext}^1(E,M^\circ)$$

donc M plat $\Longleftrightarrow$ M° absolument pur.

PROPOSITION 2.5. : <u>A est absolument pur à droite si et seulement si pour tout module à gauche P de présentation finie l'application canonique C_P de P dans son bidual est injective.</u>

Supposons A absolument pur à droite, soit une suite exacte

$$0 \to K \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} P \to 0 \quad \text{avec } F \text{ libre de type fini}$$

$$0 \to P^* \xrightarrow{{}^t v} F^* \xrightarrow{\varphi} U \to 0 \ ; \ U = \mathrm{Im}\ {}^t u, \quad \varphi(x^*) = {}^t u(x^*)$$

$$0 \to U \xrightarrow{j} K^*$$

On en déduit le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & U^* \arrow[r, "{}^t\varphi"] & F^{**} \arrow[r, "{}^{tt}v"] & P^{**} & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[u, "C"] \arrow[r, "u"] & F \arrow[u, "C_F"] \arrow[r, "v"] & P \arrow[u, "C_P"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \qquad \text{avec } C = {}^t j \circ C_K \ .$$

Si P est de présentation finie, K est de type fini, donc il existe une suite exacte $L \xrightarrow{p} K \to 0$ avec L libre de type fini, $U \xrightarrow{j} K^* \xrightarrow{{}^t p} L^*$;
j et ${}^t p$ sont des applications injectives, comme A_A est absolument pur, d'après la proposition 2.4., ${}^t({}^t p \circ j)$ est surjective.

Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
L^{**} \arrow[r, "{}^{tt}p"] & K^{**} \arrow[r, "{}^t j"] & U^* \\
L \arrow[u, "C_L"] \arrow[r, "p"] & K \arrow[u, "C_K"] \arrow[ur, "C"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

montre que C est surjectif, donc C_P est injectif.

Inversement, pour montrer que A_A est absolument pur il suffit de montrer que si U est un sous-module de type fini de A_A^m, tout élément $u^* \in U^*$ se prolonge en un élément de $(A_A^m)^*$.

Considérons les notations de la démonstration de la proposition 1.2.

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[d, "P"] & \\ 0 \arrow[r] & U \arrow[r, "i"] \arrow[d] & A^m \\ & 0 & \end{tikzcd}$$

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{r} L^* \xrightarrow{v} Q \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow Q^* \xrightarrow{\xi} L \xrightarrow{p} U \longrightarrow 0 \qquad \xi = C_L^{-1} \circ {}^t 1$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "r"] \arrow[d, dashed, "\gamma"] & L^* \arrow[r, "s"] \arrow[d, "1_{L^*}"] & Q \arrow[r] \arrow[d, "C_Q"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & U^* \arrow[r] & L^{**} \arrow[r, "{}^t\xi"] & Q^{**} & \end{tikzcd}$$

γ existe car ${}^t\xi \circ r = C_Q \circ s \circ r = 0$, $\operatorname{Im} r \subset \operatorname{Im} {}^t p$. Par hypothèse C_Q est injectif, donc γ est surjectif.

Si $u^* \in U^*$, il existe $a_i \in A$ avec $u^* = \gamma(\sum_{i=1}^{m} a_i \varphi_i)$.

Si $y = (y_1, \ldots, y_m) \in U$ on a $y = p(x)$, $i(y) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x))$, et $u^*(y) = (u^* \circ p)(x) = {}^t p(u^*)(x) = (\sum_{i=1}^{m} a_i \varphi_i)(x) = \sum_i a_i y_i$. Donc $u^* = \psi/_U$ avec $\psi : A^m \to A$ défini par $\psi(x_1, \ldots, x_m) = \sum_i a_i x_i$.

<u>THEOREME 2.6.</u> [7] : <u>Soit A un anneau, il y a équivalence des propriétés</u> :

a) <u>Tout A-module à gauche est absolument pur.</u>

b) <u>A est régulier au sens de Von Neumann.</u>

c) <u>Tout A-module à gauche est plat.</u>

d) <u>Tout idéal à gauche cyclique est absolument pur.</u>

d $\Longrightarrow$ b . Soit $x \in A$, Ax est pur dans A, donc (prop. 2.1.) de l'égalité $x = x1$ on en déduit l'existence de $y = ax \in Ax$ tel que $x = xy = xax$.

a $\Longrightarrow$ d . Evident.

b $\Longleftrightarrow$ c . Connu.

c $\Longrightarrow$ a . Proposition 2.2. et proposition 2.4.

THEOREME 2.7. [13] : Pour un anneau A les conditions suivantes sont équivalentes :

a) A est semi-héréditaire à gauche.

b) Tout sous-module de type fini d'un module projectif est projectif.

c) Tout quotient d'un module absolument pur est absolument pur.

a $\Longleftrightarrow$ b . [2].

b $\Longrightarrow$ c . Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} P & P' \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[l] \\ Q \arrow[r, "\beta"] & Q' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où P est projectif, P' de type fini, Q absolument pur. Comme P' est projectif, il existe $\gamma : P' \to Q$, tel que $\beta\circ\gamma = f$, d'après la proposition 2.4.(2) il existe $\delta : P \to Q$ tel que $\delta\alpha = \gamma$, donc $(\beta\delta)\alpha = f$ et Q' est absolument pur.

c $\Longrightarrow$ b . Considérons le même diagramme mais supposons Q injectif, alors, par hypothèse, Q' est absolument pur, donc il existe $\varphi : P \to Q'$ tel que $\varphi\alpha = f$. Comme P est projectif, il existe $\psi : P \to Q$ tel que $\beta\psi = \varphi$. Alors $\beta(\psi\alpha) = f$ et P' est projectif [2] .

THEOREME 2.8. [13] : A est noethérien à gauche si et seulement si tout module à gauche absolument pur est injectif.

Si A est noethérien, tout module absolument pur est injectif (prop. 2.4.).

Si A n'est pas noethérien, il existe une famille de modules injectifs, M_i, $i \in I$ tels que $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ ne soit pas injectif, alors que M est absolument pur.

3. THEOREME PRINCIPAL.

THEOREME 3.1. : Pour un anneau A les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) Tout A-module à gauche injectif est plat.

1') Tout A-module à gauche absolument pur est plat.

2) Tout A-module à gauche de présentation finie est contenu dans un module libre.

2') Tout A-module à gauche de présentation finie est contenu dans un module plat.

3) A est absolument pur à droite et presque cohérent à droite.

$1' \Longrightarrow 1 \Longrightarrow 2'$. Evident.

$2' \Longrightarrow 2$. Soient P un module à gauche de présentation finie, f une injection de P dans un module plat X. Soit une suite exacte $0 \to K \to F \xrightarrow{g} X \to 0$ où F est libre. Cette suite est pure (prop. 2.2.) donc (Th. 2.3.) la suite

$\mathrm{Hom}(P,F) \to \mathrm{Hom}(P,X) \to 0$ est exacte, il existe $h : P \to F$ tel que $g \circ h = f$, f étant injectif, h est injectif.

$2 \Longrightarrow 1'$. Soient X un module à gauche absolument pur et $0 \to K \to F \to X \to 0$ une suite exacte avec F libre.

Soient P un module de présentation finie et $f \in \mathrm{Hom}_A(P,X)$, d'après l'hypothèse il existe une suite exacte $0 \to P \xrightarrow{j} L$ où L est libre.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[d, dashed, "f_2"'] \arrow[dr, dashed, "f_1"] & P \arrow[l, "j"'] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[l] \\ F \arrow[r] & X \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

X étant absolument pur (prop. 2.4) f se prolonge en f_1 de L dans X, mais L étant projectif f_1 se factorise à travers F.

La suite $0 \to K \to F \to X \to 0$ est pure (th. 2.3.) et X est plat (prop. 2.2.).

$3 \Longrightarrow 2$. Soit P un module à gauche de présentation finie, A étant presque cohérent à droite (th. 1.3.) il existe un module M engendré par $f_1,\ldots,f_2$ dense dans P^*.

Soit $f : P \to A^r$ définie par $f(x) = (f_1(x),\ldots,f_1(x))$. Soit $0 \neq x \in \operatorname{Ker} f = \bigcap_{i=1}^{r} \operatorname{Ker} f_i$, C_P étant injectif (prop. 2.5.) il existe $g \in P^*$ avec $g(x) \neq 0$. L'idéal $D = (M:g)$ est rationnel, $g(x)D = 0$ car $gD \subset M$, donc $g(x) = 0$, cette contradiction montre que f est injective.

$2 \Longrightarrow 3$. Si P est un module à gauche de présentation finie, P est contenu dans un libre donc C_P est injectif et A est absolument pur à droite (prop. 2.5.).

Soit V un sous-module de type fini de P^* et une suite exacte $L \xrightarrow{p} P \to 0$ où L est libre de type fini. Si $i : V \to P^*$; $j = {}^t p \circ i$ est une application injective de V dans L^*, comme A_A est absolument pur (prop. 2.4.) t_j est surjectif. Le diagramme :

$$\begin{tikzcd} L^{**} \arrow[r, "{}^{tt}p"] & P^{**} \arrow[r, "{}^{t}i"] & V^* \\ L \arrow[u, "C_L"] \arrow[r] & P \arrow[u, "C_P"'] \arrow[ur, "d_V"'] & \end{tikzcd}$$

montre que $d_V = {}^t i \circ C_P$ est surjectif.

Comme $P \subset A^r$, il existe $f_1,\dots,f_2 \in P^*$ tels que $\bigcap_{k=1}^{r} \operatorname{Ker} f_k = 0$. Soit $U = \Sigma f_k A$, alors d_U est injectif $(d_U(x) = 0 \Longrightarrow \tilde{x}(f_k) = 0 \Longrightarrow x \in \bigcap \operatorname{Ker} f_k)$.

Si $U \subset V \subset P^*$, V étant de type fini, on a le diagramme

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "d_U"] \arrow[dr, "d_V"'] & U^* \\ & V^* \arrow[u] \end{tikzcd}$$

d_U est un isomorphisme, d_V est surjectif, donc l'application $V^* \to U^*$ est un isomorphisme. La suite exacte $0 \to U \to V \to V/U \to 0$ donne $0 \to (V/U)^* \to V^* \to U^*$, donc $(V/U)^* = 0$, on en déduit que U est dense dans P^*. En effet, autrement il existerait $0 \neq \varphi \in \operatorname{Hom}_A(P^*/U, E(A_A))$, soient $a \in A \cap \operatorname{Im} \varphi$, $v+U \in \varphi^{-1}(a)$, la restriction φ' de φ à $U+aA/U$ serait un élément non nul de $(V/U)^*$ avec $V = U+aA$.

<u>LEMME</u> : <u>Si A est absolument pur à gauche, tout module à droite ppf est de présentation finie. En particulier A est cohérent à droite si et seulement si A est p-cohérent à droite.</u>

Soit une suite exacte de modules à droite:

$$0 \to U \to F \to X \to 0 \text{ , avec } F \text{ libre de type fini,}$$

U ptf, soit V un sous-module dense dans U, de type fini

$$0 \to V \to F \to Y = F/V \to 0$$

Y est de présentation finie, donc (prop. 2.5.) $C_Y : Y \to Y^{**}$ est injectif. Si U/V était $\neq 0$, il existerait $\varphi \in Y^*$ avec $\varphi(U/V) \neq 0$, ce qui contredit V dense dans U.

COROLLAIRE : Pour un anneau A les propositions suivantes sont équivalentes :

1) Tout A-module à gauche ou à droite injectif [resp. absolument pur] est plat.
2) Tout A-module à gauche ou à droite de présentation finie est contenu dans un module libre [resp. plat].
3) A est absolument pur et cohérent à gauche et à droite.

Remarque : On peut préciser certaines propositions :

PROPOSITION 1.2. : Si P est un A-module à gauche ppf , il existe une suite exacte $0 \to P^* \to F \to U \to 0$ avec F libre tf , U contenu dans un libre.

Dans la démonstration de la proposition il faut écrire H ptf , soit H' tf dense dans H , alors $0 \to H' \to H \to H/H' \to 0$ donne $0 \to (H/H')^* \to H^* \to H'^*$ mais $\mathrm{Hom}(H/H', I) = 0$, donc :

$$(H/H')^* = 0 \ , \ 0 \to H^* \to H'^* \text{ est exacte et } U \text{ est contenu dans un libre.}$$

COROLLAIRE DU THEOREME 1.3. : Si A est presque cohérent à droite le dual de tout module à gauche ppf est ptf .

La démonstration $1 \Longrightarrow 5$ du théorème 1.3. donne bien ce résultat.

COROLLAIRE DE LA PROPOSITION 2.5. : Si A est absolument pur à droite pour tout module à gauche P ppf , l'application $C_P : P \to P^{**}$ est injective.

On complète la démonstration de cette proposition comme pour la prop. 1.2. en écrivant que $0 \to K^* \to K'^*$ est exacte où K' est tf et dense dans K .

COROLLAIRE DU THEOREME 3.1. : Si A est absolument pur à droite et presque cohérent à droite tout A-module à gauche ppf est contenu dans un module libre.

Il suffit de reprendre la démonstration de $3 \Longrightarrow 2$ du th. 3.1. en utilisant les remarques précédentes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. BOURBAKI, Algèbre commutative, Chap. 1 et 2.

[2] H. CARTAN et S. EILENBERG, Homological algebra.

[3] S.U. CHASE, Direct product of modules. Trans. Am. Math. Soc. 97(1960) pp. 457-473.

[4] P.M. COHN, On the free product of associative rings I. Math. Z 71(1959), pp. 380-398.

[5] R. DESQ, Sur les anneaux de quotients. CRAS Paris t. 272, A. (1971) pp. 199-202.

Développé dans : Publication groupe d'Algèbre de Toulouse(7).

[6] D.J. FIELDHOUSE, Pure theories. Math. Ann. 184(1969), pp. 1-18.

[7] E.R. GENTILE, Purity and algebraic closure. Rev. Un. Mat. Argentina 24 (1968), pp. 37-47.

[8] J. LAMBEK, Lectures on rings and modules.

[9] B.H. MADDOX, Absolutely pure modules. Proc. Am. Math. Soc. 18(1967), pp. 155-158.

[10] G. SABBAGH, Sur la pureté dans les modules. CRAS. Paris, t. 271 A. (1970) pp. 865-867.

[11] B.T. STENSTRÖM, Coherent rings and F P-injective modules.

[12] T. WÜRFEL, Thèse sur les anneaux absolument purs (en préparation).

[13] C. MEGIBBEN, Absolutely pure modules. Proc. AMS, 26, n° 4 (1970), pp. 561-566.

-:-:-:-:-:-:-

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférences n° 19-22

des 7-14-21-26 Juin 1972

-:-:-:-:-:-:-:-

LOCALISATION ET COMPLETION

par J. LAMBEK

-:-:-:-:-:-

Je veux remercier Monsieur L. LESIEUR pour m'avoir invité à donner ces conférences et Melle M.-F. THIBAULT pour m'avoir aidé à la version française.

Pour motiver l'exposé suivant, commençons par un exemple. Si Z est l'anneau des entiers et p un nombre premier, nous avons les immersions

$$Z \to Zp \to \hat{Z}p .$$

Ici la première flèche signifie "localisation par rapport à p", où Zp est l'anneau local de fractions de Z associé à p. On peut le considérer comme étant l'anneau des nombres rationnels avec dénominateurs non divisibles par p, ou comme étant limite directe

$$Zp = \varinjlim\{\mathrm{Hom}((n),Z) \mid p\nmid n\} ,$$

où $(n) = nZ$ est l'idéal principal engendré par n, n parcourant tous les entiers positifs non divisibles par p. La deuxième flèche signifie "complétion p-adique", $\hat{Z}p$ étant la complétion de Zp (par hasard c'est aussi la complétion de Z) dans la topologie p-adique. On connaît $\hat{Z}p$ aussi comme étant l'anneau des entiers p-adiques, et nous pouvons décrire cet anneau comme limite inverse

$$\hat{Z}p = \varprojlim \{Zp/(p^k) \mid k \geqslant 0\} ,$$

où $(p^k) = p^k Zp$ est l'idéal principal engendré par p^k, k parcourant tous les nombres naturels.

On dit en algèbre commutative qu'il faut d'abord localiser et compléter ensuite. Donc il n'est pas surprenant que l'on puisse décrire la combinaison des deux opérations par une méthode simple.

En fait, considérons le groupe de Prüfer

$$Z/(p^\infty) = \varinjlim\{Z/(p^k) \mid k \geqslant 0\} .$$

C'est la même chose que $Q^{(p)}/Z$, où $Q^{(p)}$ est le groupe de tous les rationnels qui sont puissances de p. C'est aussi l'enveloppe injective de $Z/(p)$. Alors $\hat{Z}p$ est l'anneau des endomorphismes de groupe de Prüfer $Z/(p^\infty)$.

Nous voulons généraliser ce résultat dans deux directions. D'abord, au lieu de Z nous désirons considérer un anneau arbitraire associatif avec élément unité. Le cas où R est commutatif noethérien a été considéré par Matlis. Deuxièmement, au lieu de localiser par rapport à un idéal premier, nous voulons discuter une méthode plus générale de localisation.

§ 1. LA LOCALISATION ASSOCIEE A UN INJECTIF.

A un nombre premier p on peut associer un certain nombre d'objets :

(1) l'idéal premier $(p) = pZ$,

(2) l'ensemble multiplicatif $Z-(p)$,

(3) le filtre d'idéaux $\{(n) \mid p \nmid n\}$,

(4) le module injectif $Z/(p^\infty)$.

La localisation associée à un idéal premier, et, plus généralement, à un ensemble multiplicatif, est un procédé classique bien connu dans le cas des anneaux commutatifs. Bourbaki et Gabriel ont considéré la localisation par rapport à certains filtres d'idéaux à droite. La localisation associée aux injectifs fut introduite par Findlay et l'auteur. (Les arguments utilisés dans la situation spéciale considérée s'appliquent dans un cas général). Ces deux méthodes sont équivalentes, ainsi que la méthode des radicaux de torsion (Gabriel, Maranda, Goldman). De plus, on peut exprimer ces résultats dans le langage des théories de torsion.

Décrivons la localisation par rapport à un injectif. Soit I un module injectif donné. (Tous modules considérés sont des R-modules à droite). On appelle un module <u>module de torsion</u> (par rapport à I) si $\mathrm{Hom}_R(A,I) = 0$. On dit que A est <u>sans torsion</u> s'il est isomorphe à un sous-module de I^α pour un certain nombre cardinal α . On dit que A est <u>divisible</u> si $I(A)/A$ est sans torsion. Ici, et il en sera toujours ainsi dans cet exposé, $I(A)$ est l'enveloppe injective de A .

On peut faire des objections à l'utilisation des injectifs, parce qu'ils sont trop grands. En fait, toute l'information sur un injectif I est contenue dans chaque sous-module essentiel de I . Soit $I = I(M)$, l'enveloppe injective de M , alors A est module de torsion si et seulement si

$$\forall_{a \in A} \ \forall_{0 \neq m \in M} \ \exists_{r \in R} \ ar = 0 \ \text{et} \ mr \neq 0 .$$

Un module A est divisible si et seulement si pour tout idéal à droite D tel que R/D est de torsion on a

$$\forall_{f \in \mathrm{Hom}_R(D,A)} \ \exists_{a \in A} \ \forall_{d \in D} \ f(d) = ad .$$

Retenons les injectifs pour faire l'exposé aussi bref que possible.

On voit facilement que tout module A a un seul sous-module $T(A)$, qu'on appelle <u>le sous-module de torsion</u> de A, tel que $T(A)$ est de torsion et $A/T(A)$ est sans torsion. En fait

$$T(A) = \{a \in A \mid \mathrm{Hom}_R(aR, I) = 0\} .$$

En posant :

$$T(I(A)/A) = D(A)/A ,$$

où $A \subseteq D(A) \subseteq I(A)$, nous obtenons <u>l'enveloppe divisible</u> $D(A)$ de A. D n'est pas un foncteur, mais la restriction de D aux modules sans torsion est un foncteur, et nous obtenons un foncteur Q, qu'on appelle <u>localisation</u> (par rapport à I), défini pour les objets par

$$Q(A) = D(A/T(A)) .$$

En fait, l'inclusion

$$\{\text{module sans torsion}\} \to \text{Mod } R$$

a l'adjoint à gauche $A \mapsto A/T(A)$, et l'inclusion

$$\{\text{modules divisibles sans torsion}\} \to \{\text{modules sans torsion}\}$$

a l'adjoint à gauche $B \mapsto D(B)$. Alors le composé des deux adjoints $A \mapsto Q(A)$ nous donne l'adjoint à gauche de l'inclusion

$$\{\text{modules divisibles sans torsion}\} \to \text{Mod } R .$$

Nous préférons regarder Q comme foncteur de Mod R dans lui-même. Ainsi Q est idempotent et exact à gauche, mais il n'est pas exact à droite en général. (Cependant le réflecteur $A \mapsto Q(A)$ est exact à gauche et à droite). On appelle $Q(A)$ <u>module de fractions</u> de A (par rapport à I). $Q(R)$ est un anneau, <u>l'anneau de fractions à droite</u> de R. L'homomorphisme canonique $R \to Q(R)$ est un homomorphisme d'anneaux, tout module divisible sans torsion est un $Q(R)$-module et tout R-homomorphisme entre modules divisibles sans torsion est un $Q(R)$-homomorphisme.

§ 2. CAS SPECIAUX DE LOCALISATION.

D'abord donnons deux exemples. Si $R = Z$ et $I = Q$, les mots "torsion" et "divisible" ont la signification usuelle. Si $R = Z$ et $I = (Z/p^{\infty})$, ils signifient "p-torsion" et "p-divisible".

Etant donné un injectif I , on obtient le filtre

$$\mathfrak{D}(I) = \{D \leqslant_d R \mid \mathrm{Hom}_R(R/D, I) = 0\} .$$

Ceci est un filtre "idempotent" dans le sens de Bourbaki. Dans l'autre direction, étant donné un filtre $\mathfrak{D}$ idempotent, on peut former l'injectif

$$I_{\mathfrak{D}} = \Pi\{I(R/K) \mid K \leqslant_d R \text{ et } \forall_{r \notin K} r^{-1}K \notin \mathfrak{D}\} ,$$

où $r^{-1}K = \{s \in R \mid rs \in K\}$. On peut voir facilement que

$$\mathfrak{D}(I_{\mathfrak{D}}) = \mathfrak{D} ,$$

mais $I_{\mathfrak{D}(I)}$ est seulement "similaire" à I , deux injectifs étant appelés <u>similaires</u> s'ils engendrent la même localisation Q , c'est-à-dire, si chacun est isomorphe à un sous-module d'une puissance de l'autre.

Définissant

$$L(A) = \varinjlim\{\mathrm{Hom}_R(D, A) \mid D \in \mathfrak{D}\}$$

et

$$T(A) = \{a \in A \mid a^{-1}0 \in \mathfrak{D}\} ,$$

on peut démontrer que :

$$Q(A) = L(A/T(A)) = L(L(A)) .$$

Quand Σ est un sous-ensemble multiplicatif de R , on peut définir le filtre idempotent

$$\mathfrak{D}(\Sigma) = \{D \leqslant_d R \mid \forall_{r \in R} r^{-1}D \cap \Sigma \neq \emptyset\} ,$$

et on écrit : $I_{\Sigma} = I_{\mathfrak{D}(\Sigma)}$.

La définition de $\mathfrak{D}(\Sigma)$ peut être simplifiée à

$$\mathfrak{D}(\Sigma) = \{D \leqslant_d R \mid D \cap \Sigma \neq \emptyset\}$$

si et seulement si R vérifie la <u>condition de Ore à droite</u> par rapport à Σ , c'est-à-dire :

(*) $$\forall_{r \in R} \ \forall_{\sigma \in \Sigma} \ \exists_{r' \in R} \ \exists_{\sigma' \in \Sigma} \ r\sigma' = \sigma r' .$$

Si $h: R \to R_I$ est un homomorphisme d'anneaux, On dit qu'il est un anneau classique de fractions à droite par rapport à Σ si

(a) $\forall_{r\in R}\ h(r) = 0 \Longrightarrow \exists_{\sigma\in\Sigma}\ r\sigma = 0$,

(b) $\forall_{\sigma\in\Sigma}\ h(\sigma)$ est inversible,

(c) $\forall_{q\in R_\Sigma}\ \exists_{r\in R}\ \exists_{\sigma\in\Sigma}\ q = h(r)h(\sigma)^{-1}$.

Gabriel a démontré ([Ga], p. 415, Proposition 5) que R possède un anneau classique de fractions à droite pour Σ si et seulement si R satisfait (*) et

(**) $\forall_{r\in R}(\exists_{\sigma\in\Sigma}\ \sigma r = 0 \Longrightarrow \exists_{\sigma'\in\Sigma}\ r\sigma' = 0)$.

Il est évident qu'alors $R_\Sigma = Q(R)$, où Q est la localisation associée à I_Σ .

On peut utiliser l'argument de [LM1] , Proposition 5.5., pour démontrer que (*) implique (**) si R est noethérien à droite : Supposons que $\sigma r = 0$ et choisissons $\sigma_1 \in \Sigma$ tel que l'annulateur à droite de σ_1 soit maximal et contienne l'annulateur de σ . Alors $\sigma_1 r = 0$. Mais par (*) il existe $r' \in R$ et $\sigma' \in \Sigma$ tel que $\sigma_1 r' = r\sigma'$, alors $\sigma_1{}^2 r' = \sigma_1 r\sigma' = 0$. Maintenant l'annulateur à droite de $\sigma_1{}^2$ contient celui de σ_1 , donc les deux sont identiques par suite du choix de σ_1 . Alors $0 = \sigma_1 r' = r\sigma'$, et nous avons démontré (**).

Dans la situation considérée ci-dessus, R_Σ et plat comme R-module à gauche. En général un R-module à gauche F est plat si et seulement si le R-module à droite

$$F^* = \mathrm{Hom}_Z(F, Q/Z)$$

est injectif.

On peut se demander quand la localisation peut être définie par rapport à un injectif F^* où F est plat. Dans ce cas, un module à droite A est de torsion si et seulement si $A \otimes_R F = 0$, et un idéal à droite D de R appartient au filtre idempotent associé si et seulement si $DF = F$.

C'est certainement le cas si Q est la localisation par rapport à I_Σ , où Σ vérifie (*) et (**). Dans ce cas, I_Σ est similaire à $R_\Sigma{}^*$.

Un autre exemple est $Q \cong \mathrm{id}$, le foncteur identité sur Mod R. Dans ce cas, on peut obtenir Q d'un injectif F^*, où F est un R-module à gauche libre.

Schelter et Roberts ont démontré que tout injectif est similaire à un module F^*, où F est plat, si R est commutatif noethérien ou si le filtre $\mathfrak{D}(I)$ a une base dénombrable.

Cependant, si R est l'anneau des fonctions continues réelles sur l'intervalle $[0,1]$, ils ont démontré que l'enveloppe injective de R (R étant considéré comme R-module à droite) n'est pas similaire à un module de la forme F^* où F est plat.

§ 3. EXACTITUDE DE LOCALISATION.

Nous nous intéressons à trouver des exemples où la localisation Q, considérée comme foncteur de Mod R dans lui-même, est exacte et non pas seulement exacte à gauche. On peut voir facilement que les conditions suivantes sont équivalentes.

(a) Le foncteur Q est exact.

(b) La classe des modules divisibles sans torsion est fermée sous les convoyaux.

(c) Tout module-quotient sans torsion d'un module divisible sans torsion est divisible.

(d) $I(A)/A$ est divisible pour tout module A divisible sans torsion.

Goldman a trouvé une autre condition équivalente, que nous ne donnerons pas ici, mais qui est évidemment vérifiée si R est héréditaire à droite.

On sait ([La3], Proposition 2.4.), que tout module divisible (par rapport à I) est injectif si et seulement si le sous-module singulier de I est nul, c'est-à-dire, quelque soit $0 \neq i \in I$, $i^{-1}0$ n'est pas un idéal à droite essentiel de R. Dans ce cas, évidemment $I(A)/A = 0$ pour tout module A divisible ; alors le foncteur Q est exact par suite de la condition (d) ci-dessus.

Nous pouvons nous demander quand Q préserve toutes les colimites. On peut voir facilement que les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) Q préserve toutes les colimites.

(b) La classe des modules divisibles sans torsion est fermée sous les colimites.

(c) Tout $Q(R)$-module est sans torsion.

(d) $Q \cong (-) \otimes_R Q(R)$.

(e) Pour tout idéal à droite D dans le filtre $\mathfrak{D}$ on a $DQ(R) = Q(R)$.

La dernière condition est celle de Walker et Walker. Evidemment, elle est vérifiée si $Q(R) = R_\Sigma$, donc si R est noethérien à droite et vérifie la condition de Ore pour Σ et $I = I_\Sigma$.

Il existe donc plusieurs exemples où le foncteur Q est exact. Mais Michler en a trouvé un où Q n'est pas exact.

Il y a plusieurs raisons de désirer savoir si Q est exact. Nous nous intéressons principalement à l'exactitude de la localisation afin de pouvoir l'utiliser dans le § 6 ci-dessous, mais nous pouvons aussi en déduire que

$$Q(A) \cong A \otimes_R Q(R)$$

pour tout module A de présentation finie.

§ 4. LA TOPOLOGIE ASSOCIEE A UN INJECTIF.

Etant donné un R-module à droite injectif I , on peut définir sur tout R-module à droite A une topologie, la topologie <u>I-adique</u>. Elle est définie en spécifiant un système fondamental de voisinages ouverts de 0 , qui consiste en tous les noyaux des homomorphismes $A \to I^n$ où n est un naturel. On voit facilement que, sous cette topologie, A devient un groupe topologique, R un anneau topologique, et alors A un R-module topologique. De plus, tout R-homomorphisme est continu dans la topologie I-adique.

Puisque I est injectif, l'observation suivante est triviale : Si A est muni de la topologie I-adique, la topologie induite sur un sous-module quelconque est aussi la topologie I-adique. Une telle proposition n'est pas vraie en général pour la topologie P-adique, topologie qu'on associe classiquement à un idéal premier P , le système fondamental de voisinages de 0 consistant en tous les sous-modules de la forme AP^n , où n est un nombre naturel.

PROPOSITION 4.1. : Soient R un anneau local commutatif noethérien avec idéal maximal P, A un R-module à droite de type fini et $I = I(R/P)$, alors les topologies I-adique et P-adique sont identiques.

On peut trouver la preuve dans [La2], Proposition 4, et une généralisation au § 7 ci-dessous. On déduit facilement le résultat suivant de Artin et Rees :

COROLLAIRE 4.2. : Sous les hypothèses ci-dessus, si A est muni de la topologie P-adique, la topologie induite sur un sous-module B quelconque est aussi la topologie P-adique.

Si A est muni de la topologie I-adique, on peut obtenir un module séparé A/A_o, où A est la fermeture de 0, c'est-à-dire

$$A_o = \bigcap\{\mathrm{Ker}\, f \mid \exists_{n\in N} f : A \to I^n\} .$$

La complétion I-adique $\hat{A}$ de A est définie comme étant la complétion de A/A_o muni de la topologie I-adique. On voit facilement que :

$$\hat{A} = (A/A_o)^{\wedge} = \varprojlim\{\mathrm{Im}\, f \mid \exists_{n\in N} f : A \to I^n\} .$$

La topologie de $\hat{A}$ est la topologie de la limite inverse ; en général, ce n'est pas la topologie I-adique de $\hat{A}$.

Le problème que nous avons posé au début de cet exposé est donc la description simple de $Q(A)^{\wedge}$.

§ 5. LE DUAL DOUBLE PAR RAPPORT A UN INJECTIF.

Si I est un R-module à droite injectif, et si E est son anneau d'endomorphismes, alors nous pouvons considérer I comme E-R-bimodule, E-module à gauche et R-module à droite. Regardons les foncteurs

$$\mathrm{Mod}\ R \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(-,I)} (E\ \mathrm{Mod})^{op} \xrightarrow{\mathrm{Hom}_E(-,I)} \mathrm{Mod}\ R ,$$

le premier étant l'adjoint à gauche du deuxième. La composition S de ces deux foncteurs nous donne :

$$S(A) = \mathrm{Hom}_E((\mathrm{Hom}_R(A,I),I) .$$

$S(A)$ est en quelque sorte un double dual de A.

Il existe un homomorphisme canonique $\eta(A): A \to S(A)$ défini par

$$\eta(A)(a)(f) = f(a) ,$$

où $a \in A$ et $f \in \mathrm{Hom}_R(A,I)$.

Notons que $S(R)$ est un anneau, le bicommutant $\mathrm{Hom}_E(I,I)$ de I , et que $\eta(R): R \to S(R)$ est un homomorphisme d'anneaux.

Ecrivons $\eta_1(A): A \to Q(A)$ pour l'homomorphisme canonique décrit au § 1.

<u>PROPOSITION 5.1.</u> :

(1) Ker $\eta(A) = T(A)$.

(2) $S(A)$ <u>est divisible sans torsion.</u>

(3) <u>Il existe un homomorphisme, et un seul,</u> $K(A): Q(A) \to S(A)$ <u>tel que</u> $K(A)\eta_1(A) = \eta(A)$.

(4) $K(A)$ <u>est un monomorphisme.</u>

(5) $K(R)$ <u>est un homomorphisme d'anneaux.</u>

D'après ce résultat nous pouvons écrire : $Q(A) \subseteq S(A)$ et $Q(R) \subseteq S(R)$, en considérant $Q(A)$ comme sous-module de $S(A)$ et $Q(R)$ comme sous-anneau de $S(R)$.

<u>PROPOSITION 5.2.</u> : <u>Les conditions suivantes sont équivalentes et impliquent que</u> $Q(A) = S(A)$:

(a) $\mathrm{Hom}_R(A,I)$ <u>comme E-module à gauche est de type fini.</u>

(b) $T(A)$ <u>est ouvert dans la topologie I-adique.</u>

<u>COROLLAIRE 5.3.</u> : <u>Les conditions suivantes sont équivalentes et impliquent que $Q(R)$ est le bicommutant de I</u> :

(a) I <u>est un E-module à gauche de type fini.</u>

(b) $T(R)$ <u>est ouvert dans la topologie I- adique.</u>

La condition (a) a été étudiée par Morita. Elle est satisfaite par exemple si I est un E-module à gauche principal, e.g., si $I = I(R)$. La condition (b) est évidente si A est artinien.

Si nous munissions $S(A)$ de la topologie I-adique, $Q(A)$ serait un sous-module fermé. Mais une topologie plus intéressante et plus naturelle est la topologie <u>finie</u> sur $S(A)$, c'est-à-dire celle qui est induite par la topologie $I^{\mathrm{Hom}_R(A,I)}$:

A tout $f \in \mathrm{Hom}_R(A,I)$ associons la projection $p(f): S(A) \to I$ tel que

$$\forall_{s \in S(A)}\ p(f)(s) = s(f) ,$$

ce qui implique que :

$$p(f)\eta(A) = f .$$

Alors une base de voisinages ouverts de 0 sur $S(A)$ nous est donnée par les sous-modules :

$$p(f_1)^{-1}(0) \cap \ldots \cap p(f_n)^{-1}(0) = \{s \in S(A) \mid s(f_1) = 0 \ \& \ \ldots \ \& \ s(f_n) = 0\} ,$$

où $f_1, \ldots, f_n \in \mathrm{Hom}_R(A,I)$. On peut exprimer ces sous-modules plus brièvement sous la forme $\mathrm{Ker}\, f^*$, où $f = (f_1, \ldots, f_n): A \to I^n$ et $f^*: S(A) \to I^n$ est l'extension canonique de f telle que $f^*\eta(A) = f$, extension définie par :

$$f^*(s) = (s(f_1), \ldots, s(f_n)) .$$

Si $p_i: I^n \to I$ sont les projections canoniques et $k_i: I \to I^n$, les injections canoniques, on peut écrire :

$$f^*(s) = \Sigma_{i=1}^{n} s\ p_i(f) .$$

<u>PROPOSITION 5.4.</u> : <u>La topologie finie sur</u> $S(A)$ <u>induit la topologie I-adique sur</u> $Q(A)$. <u>Le module</u> $S(A)$ <u>est séparé et complet dans la topologie finie.</u>

Ce résultat motive l'étude de la topologie I-adique, au moins sur les modules divisibles sans torsion, et suggère le problème de savoir si $Q(A)$ est dense dans $S(A)$.

§ 6. THEOREME DE DENSITE.

L'hypothèse du théorème suivant est vérifiée par tout R-module A si et seulement si Q est exact, donc dans tous les exemples considérés au § 3.

THEOREME 6.1. : Supposons que tout module quotient sans torsion de $Q(A)$ est divisible. Alors :

(1) $Q(A)$ est sous-module dense de $S(A)$ dans la topologie finie.

(2) $S(A)$ (muni de la topologie finie) est la complétion de $Q(A)$, muni de la topologie I-adique.

(3) $S(A) = \varprojlim \{\operatorname{Im} g \mid \exists_{n \in N}\, g: Q(A) \to I^n\}$.

Démonstration : On peut facilement déduire (2) et (3) de (1). On a prouvé (1) dans [La 3], en utilisant les monades (triples). Ici nous présenterons une preuve plus élémentaire.

Soit s un élément de $S(A)$, tout voisinage ouvert fondamental de s est de la forme $\{s\} + \operatorname{Ker} f^*$, où $f^*: S(A) \to I^n$ est l'extension canonique de $f: A \to I^n$. Nous voulons prouver que ce voisinage a une intersection non vide avec $Q(A)$, c'est-à-dire,

$$\exists_{q \in Q(A)} f^*(s) = f^*(q) .$$

Il nous faut donc démontrer que $f^*S(A) \subseteq f^*Q(A)$, c'est-à-dire, que $f^*S(A)/f^*Q(A) = 0$. En fait, nous prouverons qu'il est un module de torsion sans torsion.

(a) $f^*S(A)/f^*Q(A)$ est un module de torsion si, pour tout $g: f^*S(A) \to I$ tel que $gf^*Q(A) = 0$, $g = 0$. Etendons g à $h: I^n \to I$ et calculons :

$$gf^*(s) = h\, \Sigma_{i=1}^n k_i\; s\; p_i(f)$$

$$= s(\Sigma_{i=1}^n h\, k_i p_i(f)) ,$$

la dernière équation découlant du fait que s est un E-homomorphisme et $hk_i \in E$. De plus, puisque $\Sigma_{i=1}^n k_i p_i = 1$, on obtient :

$$gf^*(s) = s(hf) = s(0) = 0 ,$$

parce que,

$$hf = hf^*K(A)\eta_1(A)$$
$$= gf^*K(A)\eta_1(A) = 0 .$$

Donc $g = 0$.

(b) Pour voir que $f^*S(A)/f^*Q(A)$ est sans torsion, remarquons que $f^*Q(A)$ est un quotient du module divisible $Q(A)$, et qu'il est sans torsion comme sous-module de I^n , donc divisible par hypothèse. Rappelons-nous que tout quotient d'un module sans torsion par un module divisible est sans torsion ([La 1], Proposition 0.6.).

COROLLAIRE 6.2. : Supposons que tout module-quotient de $Q(R)$ est divisible. Alors la complétion I-adique de $Q(R)$ est le bicommutant de I . Si R est commutatif, elle est le centre de E .

Remarque : Matlis a obtenu ce résultat dans le cas où R est commutatif noethérien et $I = I(R/P)$, P étant un idéal premier. Dans ce cas, E est aussi commutatif.

§ 7. LOCALISATION ASSOCIEE A UN IDEAL PREMIER.

Comment doit-on localiser un anneau non-commutatif par rapport à un idéal premier ? D'un côté, on peut considérer le module injectif $I(R/P)$, et, de l'autre côté, l'ensemble multiplicatif

$$\mathscr{C}(P) = \{r \in R \mid \forall_{s \notin P}\ rs \notin P\}$$

proposé par Goldie. Dans le cas commutatif, c'est le complément $R-P$ de P , et dans le cas d'un anneau noethérien à droite, c'est l'ensemble des éléments qui deviennent réguliers modulo P .

Les résultats de cette section ont été obtenus en collaboration avec Gerhard Michler.

PROPOSITION 7.1. : Soient R un anneau noethérien à droite, P un idéal premier et soit A idéal à droite maximal dans l'ensemble des idéaux à droite qui ont une intersection vide avec $\mathscr{C}(P)$. Alors $I_P = I(R/A)$ est un injectif indécomposable sans torsion par rapport à $I(R/P)$, et il est défini par cette propriété à un isomorphisme près. De plus, $I(R/P) \cong I_P^{\,n}$, où n est la dimension de Goldie de l'anneau R/P .

THEOREME 7.2. : Soient R un anneau noethérien à droite et P un idéal premier. On obtient la même localisation Q qu'elle soit par rapport

(a) à l'injectif $I(R/P)$,

(b) à l'ensemble multiplicatif $\mathscr{C}(P)$,

(c) ou à l'injectif indécomposable I_P .

De plus, les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) R satisfait la condition de Ore pour $\mathscr{C}(P)$,

(2) $PQ(R)$ est le radical de Jacobson de $Q(R)$ et $Q(R)/PQ(R)$ est artinien simple,

(3) $Q(R)PQ(R)$ est le radical de Jacobson de $Q(R)$ et Q est exact.

COROLLAIRE 7.3. : Soient R un anneau noethérien à droite et P un idéal maximal tel que R/P est artinien, alors R satisfait la condition de Ore à droite pour $\mathscr{C}(P)$ si et seulement si $PQ(R)$ est le radical de Jacobson de $Q(R)$.

Disons qu'un idéal M d'un anneau S satisfait la propriété de Artin-Rees si pour tout idéal à droite E il existe un nombre naturel tel que $E \cap M^n \subseteq EM$. On dit que S est un anneau quasi-local classique pour l'idéal maximal M si tout idéal à droite est fermé dans la topologie M-adique.

THEOREME 7.4. : Soient R un anneau noethérien à droite et P un idéal premier, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) R satisfait la condition de Ore pour $\mathscr{C}(P)$ et $PQ(R)$ satisfait la propriété de Artin-Rees,

(2) $Q(R)$ est un anneau quasi-local classique avec l'idéal maximal $PQ(R)$,

(3) $Q(R)/PQ(R)$ est artinien simple et, sur tout $Q(R)$-module de type fini, les topologies I_P-adique et $PQ(R)$-adique sont identiques,

(4) $Q(R)/PQ(R)$ est artinien simple et $PQ(R)$ satisfait la propriété de Artin-Rees.

Remarque : Michler a démontré que ces conditions sont aussi équivalentes à la condition suivante, qui traite seulement de l'anneau R lui-même (et qui implique la condition de Ore) :

(5) Pour tout idéal à droite F de R il existe un nombre naturel n tel que $F \cap P^{(n)} \subseteq cl_P(FP)$.

Ici $P^{(n)}$ est la "puissance symbolique", et cl_P est la "fermeture associée à P" , ces deux notions étant définies dans [Mi] .

<u>THEOREME 7.5.</u> : <u>Soient</u> R <u>un anneau noethérien à droite,</u> P <u>un idéal premier, et supposons les conditions équivalentes du théorème 7.4. Alors</u>

(1) <u>la complétion</u> $PQ(R)$<u>-adique de</u> $Q(R)$ <u>est le bicommutant de</u> I_P ,

(2) <u>elle est un anneau de matrices</u> $n \times n$ <u>sur un anneau local complet,</u>

(3) <u>son radical de Jacobson est de type fini.</u>

Les résultats (2) et (3) découlent d'un résultat de Michler ([Mi], Corollaire 2.7.).

Les hypothèses du théorème 7.5. sont vérifiées par les exemples suivants.

<u>EXEMPLE 0.</u> : R est un anneau commutatif noethérien, et P est un idéal premier quelconque (E. Matlis).

<u>EXEMPLE 1.</u> : R est un anneau premier héréditaire noethérien à droite et à gauche et P est un idéal premier tel que $P^2 \neq P$. Cas particulier, R est un anneau de Dedekind premier et noethérien (J. Kuzmanovich).

<u>EXEMPLE 2.</u> : R est l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie nilpotente de type fini, et P est un idéal premier non nul (J.C. Mc Connell).

<u>EXEMPLE 3.</u> : $R = AG$ est l'anneau de groupe d'un groupe fini G et d'un anneau de coefficients A de caractéristique 0 noethérien à droite, et P est l'idéal d'augmentation (Michler).

§ 8. <u>TRAITEMENT CATEGORIQUE DE LA LOCALISATION.</u>

Nous avons vu que notre méthode de localisation donne des applications intéressantes si R satisfait la condition de Ore pour $\mathcal{C}(P)$, mais nous ne sommes pas convaincus que cette méthode est utile dans le cas général. Peut-être devrions-nous étudier une autre catégorie que Mod R , par exemple, la catégorie des bimodules.

Basil Rattray et l'auteur ont développé une théorie de localisation pour les catégories complètes arbitraires, utilisant une méthode de Fakir. On a remarqué que le foncteur de localisation Q construit ci-dessus est l'égalisateur de deux transformations naturelles du foncteur

$$\prod_I \mathrm{Hom}_R(-,I)$$

dans son carré. Cette construction se généralise facilement, et on obtient de nouvelles applications de la méthode, par exemple, les compactifications de Stone-Cech et de Samuel et le procédé d'association d'un faisceau à un pré-faisceau.

Le lecteur intéressé aux détails de cet exposé est invité à consulter les références suivantes :

Pour	§ 1 voir	[La 1]
	§ 3	[La 3]
	§ 4	[La 2]
	§§ 5,6	[La 3]
	§ 7	[Le], [LM 1] et [LM 2]
	§ 8	[LR] .

REFERENCES

N. BOURBAKI, Eléments de Mathématique. Fasc. 27, Algèbre Commutative, Chap. 1, 2, Paris 1961.

S. FAKIR, Monade idempotente associée à une monade. C.R. Acad. Sc. Paris 270 (1970), pp. 99-101.

G.D. FINDLAY ET J.LAMBEK, A generalized ring of quotients I, II. Can. Math. Bull. 1 (1958), pp. 77-85, pp. 155-167.

P. GABRIEL, Des catégories abéliennes. Bull. Soc. Math. France 90 (1962), pp. 323-448.

A.W. GOLDIE, A note on non-commutative localisation. J. Algebra 8 (1968), pp. 41-44.

O. GOLDMAN, Rings and modules of quotients. J. Algebra 13 (1969), pp. 10-47.

J. KURZMANOVICH, Completions of Dedekind prime rings and second endomorphism rings. Pac. J. Math. 36 (1971), pp. 721-729.

J. LAMBEK, Torsion theories, additive semantics and rings of quotients. Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathematics 177 (1971).

J. LAMBEK, Bicommutations of nice injectives. J. of Algebra 21 (1972), pp. 60-73.

J. LAMBEK, Localization and completion. J. Pure and Applied Algebra (à paraître).

J. LAMBEK et G. MICHLER, The torsion theorie at a prime ideal of a right noetherian ring. J. Algebra (à paraître).

J. LAMBEK et G. MICHLER, Completions and classical localizations of right noetherian rings. Math. Zeitschr. 127 (1972), pp. 57-69).

J. LAMBEK et B. RATTRAY, Localization at injectives in complete categories (à paraître).

L. LESIEUR, La torsion associée à un idéal premier d'un anneau noethérien à gauche. Séminaire d'Algèbre non Commutative (1971), pp. 3.1-3.15.

J-M. MARANDA, Injective structures. Trans. Amer. Math. Soc. 110 (1964), pp. 98-135.

E. MATLIS, Injective modules over Noetherian rings. Pacific J. Math. 8 (1958), pp. 511-528.

J-C. Mc CONNELL, Localisation in enveloping rings. J. London Math. Soc. 43 (1968), pp. 421-428.

G. MICHLER, Right symbolic powers and classical localization in right noetherian rings. Math. Zeitschrift 127 (1972), pp. 57-69.

K. MORITA, Localizations in categories of modules I. Math. Zeitschrift 114 (1970), pp. 121-144.

W. SCHELTER et P. ROBERTS, Flat modules and torsion theories. Math. Zeitschrift (à paraître).

B. STENSTROM, Rings and modules of quotients. Springer Verlag, Lecture Notes in Mathematics 237 (1971).

C.L. WALKER et E. WALKER, Quotient categories and rings of quotients. Trans. Amer. Math. Soc. (à paraître).

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-