UNIVERSITÉ PARIS XI

U. E. R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

N^{os} 107 - 7523

SEMINAIRE

D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

1974

(Publications mathématiques d'Orsay)

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

ANNEE 1974

-:-:-:-:-:-:-

-:- 2ème PARTIE -:-

TABLE DES MATIERES

-:-:-:-:-:-

UNIVERSITE DE PARIS SUD

CENTRE D'ORSAY

-:-:-:-:-:-:-

EMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

onférences Nos 8 et 10 des 14.1. et 4.2.1974

ALGEBRES D'AZUMAYAS I
GENERALITES

par J.P. DELALE

-:-:-:-

Dans cet exposé et les deux suivants, on a essayé de faire une récapitulation des principales propriétés des algèbres d'Azumaya et des algèbres séparables. Les applications au groupe de Brauer et à la cohomologie galoisienne ne sont malheureusement pas abordées, mais le lecteur pourra trouver quelques références dans la bibliographie (qui se trouve placée à la fin du troisième exposé). Les références de base sur le sujet sont l'article d'Auslander et Goldman [4] et le livre de Demeyer et Igraham [10].

Un anneau sera toujours supposé être associatif et unitaire mais ne sera pas nécessairement commutatif ; les homomorphismes d'anneaux sont unifères.

Pour un anneau R donné, on désigne par R Mod (resp. Mod R) la catégorie des R-modules à gauche (resp. à droite) unitaires. Si C est une catégorie et si M et N sont deux objets de C, $C(M,N)$ désigne l'ensemble des morphismes $M \to N$ de C. Lorsque $C(M,N)$ est muni d'une structure particulière (par exemple de module), on emploiera la même notation en spécifiant éventuellement la structure considérée.

Dans tout ce qui suit, afin d'éviter d'éventuelles confusions X, Y, Z désignent toujours des anneaux commutatifs, tandis que A, B, R, S,... désignent des anneaux quelconques. On note $Z(A)$ ou Z le centre de A.

1. LES DEFINITIONS DE BASE.

1.1. Terminologie, notations.

Soit B un anneau. On appelle B-algèbre un anneau A muni d'un homomorphisme $B \to A$ envoyant le centre $Z(B)$ de B dans le centre $Z(A)$ de A.

Soit X un anneau commutatif et soit A une X-algèbre. On appelle algèbre enveloppante de A la X-algèbre $A^X = A \underset{X}{\otimes} A^{op}$. On appelle A/X-bidule un objet de la catégorie ${}_{A^X}\mathrm{Mod}$. Un A/X-bidule M n'est autre qu'un groupe additif muni d'une structure de A-module à droite et d'une structure de A-module à gauche telles que

$$(am)a' = a(ma') \qquad \forall a, a' \in A \qquad \forall m \in M$$
$$xm = mx \qquad \forall x \in X \qquad \forall m \in M.$$

Si $Y \to X$ est un homomorphisme d'anneaux commutatifs, on a un homomorphisme surjectif d'anneaux $A^Y \to A^X$ en sorte que la catégorie des A/X-bidules s'identifie naturellement à une sous-catégorie pleine de la catégorie des A/Y-bidules.

La X-algèbre A est un A/X-bidule particulier et on a un homomorphisme naturel de A/X-bidules (appelé homomorphisme de multiplication)

$$\mu : A^X \to A, \qquad \mu(a \otimes a') = aa'$$

qui identifie A à A^X/W où W est le A^X-idéal à gauche engendré par les éléments de la forme $1 \otimes a - a \otimes 1$. Remarquons que μ est un homomorphisme d'anneaux si et seulement si A est commutatif. Remarquons aussi que si A est une X-algèbre de type fini (en tant qu'algèbre), alors W est un idéal de type fini, et donc A est un A/X-bidule de présentation finie.

1.2. Algèbres d'Azumaya et algèbres séparables.

1.2.1. Définition : On dit qu'une X-algèbre A (X commutatif) est une X-algèbre séparable (ou est séparable sur X) si A est un A/X-bidule projectif.

1.2.2. <u>Définition</u> ([9] Ch. II, § 5, ex. 14) : On dit qu'une X-algèbre A est une X-algèbre d'Azumaya si :

1) l'homomorphisme $X \to A$ est injectif.

2) A est un X-module projectif de type fini.

3) l'homomorphisme

$$\eta : A^X \to X\,\mathrm{Mod}(A,A) \quad [a \otimes a' \mapsto (b \to aba')]$$

canoniquement associé à la structure de A^X-module à gauche de A est un isomorphisme.

Les deux notions sont à peu près identiques puisque l'on prouvera (théorème 3.3.2.) que

$$A \text{ est une X-algèbre d'Azumaya} \iff \begin{cases} .A \text{ est séparable sur } X, \\ .X \text{ est égal au centre de } A. \end{cases}$$

La notion d'algèbre séparable est donc un peu plus générale que celle d'algèbre d'Azumaya. En fait on verra qu'une X-algèbre A est séparable si et seulement si A est séparable sur son centre $Z(A)$ et $Z(A)$ est séparable sur X. L'étude des algèbres séparables se scinde donc en deux parties.

- Les algèbres commutatives séparables.
- Les algèbres d'Azumaya (ou "algèbres centrales séparables").

1.3. <u>Exemples d'algèbres d'Azumaya.</u>

1.3.1. Soit X un anneau commutatif et soit $A = M_n(X)$ l'algèbre des matrices d'ordre n sur X. On vérifie directement à la main que A est une X-algèbre d'Azumaya.

Plus généralement, on a le résultat fondamental suivant :

1.3.2. <u>Proposition</u> : <u>Soit</u> E <u>un X-module projectif de type fini et fidèle. Alors</u> $A = X\,\mathrm{Mod}(E,E)$, <u>anneau des endomorphismes de</u> E, <u>est une X-algèbre d'Azumaya.</u>

Il suffit de vérifier point par point les propriétés de la définition ; nous allons le faire en détail pour rappeler quelques résultats que nous utiliserons librement par la suite.

L'homomorphisme naturel $X \to A = X\,\mathrm{Mod}(E,E)$ est injectif car E est supposé fidèle.

E étant projectif de type fini (i.e. facteur direct d'un X^n), A est facteur direct de $X\,\mathrm{Mod}(X^n,E) \simeq E^n$ et donc est aussi projectif de type fini.

Enfin, montrons en nous ramenant au cas des matrices que $\eta : A^X \to X\,\mathrm{Mod}(A,A)$ est un isomorphisme. Comme E est projectif de type fini, E est localement libre ([9] § 5, n° 2, th. 1) et pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, X$, $E_{\mathfrak{p}}$ est libre. En vertu de [9] § 2, n° 8, prop. 19, on a $A_{\mathfrak{p}} \simeq X_{\mathfrak{p}}\,\mathrm{Mod}(E_{\mathfrak{p}},E_{\mathfrak{p}})$ donc est une algèbre de matrice. On a, en vertu du même résultat, $X\,\mathrm{Mod}(A,A)_{\mathfrak{p}} \simeq X_{\mathfrak{p}}\,\mathrm{Mod}(A_{\mathfrak{p}},A_{\mathfrak{p}})$ et, par ailleurs, on a trivialement $(A^X)_{\mathfrak{p}} \simeq (A_{\mathfrak{p}})^{X_{\mathfrak{p}}}$, ces deux isomorphismes identifiant $\eta_{\mathfrak{p}} = \eta \underset{X}{\otimes} X_{\mathfrak{p}}$ à l'homomorphisme naturel $(A_{\mathfrak{p}})^{X_{\mathfrak{p}}} \to X_{\mathfrak{p}}\,\mathrm{Mod}(A_{\mathfrak{p}},A_{\mathfrak{p}})$. Comme ces derniers sont des isomorphismes pour tout $\mathfrak{p}$, on déduit de [9] § 3, n° 3, th. 1, que η était déjà un isomorphisme.

1.3.3. Soit X un corps commutatif et soit A une <u>X-algèbre centrale simple</u>, c'est-à-dire une algèbre quasi-simple, de centre X et de dimension finie sur X. On vérifie encore à la main que A est une X-algèbre d'Azumaya.

<u>Inversement</u>, si A est une algèbre d'Azumaya sur le corps X, c'est une algèbre centrale simple : En effet, A est de dimension finie n sur X et A^X, isomorphe à $X\,\mathrm{Mod}(A,A)$, est une X-algèbre centrale simple. Considérant alors les homomorphismes

$$X \longrightarrow A \underset{\mu}{\overset{i_1}{\rightleftarrows}} A^X \qquad \begin{aligned} i_1(a) &= a \otimes 1 \\ \mu(a \otimes a') &= aa', \end{aligned}$$

on en déduit facilement que X est le centre de A et que A est quasi-simple (car si I est un idéal bilatère de A, on a $\mu(A^X i_1(I)) = I$ mais il se trouve que $A^X i_1(I)$ est un idéal bilatère de A^X, donc ne peut être égal qu'à 0 ou à A^X tout entier).

En 2.6, nous retrouverons les algèbres centrales simples.

C'est pour généraliser les algèbres centrales simples et les algèbres de matrices que G. Azumaya a introduit la définition 1.2.1 en 1951 ([5]). Nous verrons au § 3 que cette définition se justifie parfaitement en termes de catégories, mais nous allons d'abord étudier les algèbres séparables.

2. ALGEBRES SEPARABLES, PROPRIETES ELEMENTAIRES, EXEMPLES.

2.1. Le foncteur Z_A.

Soit A une X-algèbre et soit M un A/X-bidule. On pose

$$Z_A(M) = \{m \mid am = ma \quad \forall a \in A\}.$$

Comme A s'identifie via $\mu: A^X \to A$ à A^X/W, on voit que

$$Z_A(M) = \{m \mid Wm = 0\} \simeq {}_{A^X}\mathrm{Mod}(A,M).$$

On en déduit que $Z_A(M)$ est canoniquement muni d'une structure de module à droite sur ${}_{A^X}\mathrm{Mod}(A,A) = Z(A)$, en sorte que l'on a défini un foncteur

$$Z_A: {}_{A^X}\mathrm{Mod} \to \mathrm{Mod}_{Z(A)}$$

qui est exact à gauche.

Le fait de noter Z_A le foncteur ${}_{A^X}\mathrm{Mod}(A,-)$ a l'avantage de montrer que ce foncteur ne dépend que de A et pas de X. En particulier, le foncteur Z_A est en fait défini sur la catégorie des A/Z-bidules et c'est sa restriction aux A/X-bidules que l'on va examiner.

Mentionnons un cas particulier. On a $Z_A(A^X) = r(W)$, annulateur à droite de W, $Z_A(A) = Z(A) =$ centre de A et l'image de $Z_A(\mu): Z_A(A^X) \to Z_A(A)$ est un sous-$Z(A)$-module de $Z(A)$, c'est-à-dire un idéal de $Z(A)$. Nous noterons $\mathfrak{h}(A/X)$ cet idéal, appelé différent homologique de A sur X.

2.2. Théorème : Soit A une X-algèbre. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) A est une X-algèbre séparable,

2) Le foncteur $Z_A : A^X \text{ Mod} \to \text{Mod } Z(A)$ est exact,

3) $Z_A(\mu) : Z_A(A^X) \to Z(A)$ est surjective,

4) L'idéal différent homologique $\mathfrak{h}(A/X)$ est égal à $Z(A)$,

5) L'homomorphisme $\mu : A^X \to A$ admet une section (dans A^X Mod),

6) Il existe un élément $e = \Sigma\, a_i \otimes a_i' \in A^X$ tel que

$$\sum_i a_i a_i' = 1 \qquad (\text{i.e. } \mu(e) = 1)$$
$$\sum_i aa_i \otimes a_i' = \sum_i a_i \otimes a_i' a \quad \forall a \in A \qquad (\text{i.e. } We = o),$$

7) L'idéal W est engendré par un idempotent,

8) Pour tout A/X-bidule M et tout $n \geqslant 1$, on a $\mathrm{Ext}^n_{A^X}(A,M) = o$,

9) On a $\mathrm{Ext}^1_{A^X}(A,W) = o$.

La démonstration est évidente, le fait que A soit un A/X-bidule projectif étant équivalent au fait que la suite exacte (de A^X-modules à gauche)

$$O \longrightarrow W \longrightarrow A^X \xrightarrow{\mu} A \longrightarrow o$$

est scindée. Tout élément $e \in A^X$ qui satisfait à la condition 6 du théorème est appelée un idempotent de séparabilité de A sur X.

2.3. Exemples d'algèbres séparables.

2.3.1. On démontrera (proposition 2.6.4) que si A et X sont tous les deux des corps commutatifs, alors A est séparable sur X si et seulement si A est une extension algébrique finie séparable (au sens usuel) du corps X.

2.3.2. Si $u : X \to A$ est un épimorphisme d'anneaux (X commutatif), alors A est commutatif et est séparable sur X. Le fait que A soit commutatif est bien connu ; le fait que A soit séparable résulte simplement de ce que $\mu : A^X \to A$ est un isomorphisme si (et seulement si) u est un épimorphisme.

2.3.3. Soit X un anneau commutatif. Alors l'algèbre $M_n(X)$ des matrices d'ordre n est séparable sur X.

En effet, si on note ε_{ij} la matrice ayant un 1 à i^e ligne et à la j^e colonne et des 0 ailleurs, le calcul montre sans difficulté que les éléments $e_j = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{ij} \otimes \varepsilon_{ji}$ sont des idempotents de séparabilité de $M_n(X)$ sur X pour tout $j = 1, 2, \ldots, n$.

2.3.4. Soit G un groupe fini dont l'ordre n est inversible dans X. Alors $X[G]$ est séparable sur X. En effet, l'élément $e = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} g \otimes g^{-1}$ est un idempotent de séparabilité.

2.4. Compléments.

Dans l'énoncé du théorème 2.2, on a introduit les groupes $\mathrm{Ext}^n_{A^X}(A,M)$. Ces groupes ne sont autres que les groupes de cohomologie $H^n(A,M)$ de la X-algèbre A à valeur dans le A/X-bidule M (en vérité il y a plusieurs définitions différentes des $H^n(A,M)$; voir [15] [18] [23] [27]). Pour $n = 1$, on démontre que

$$H^1(A,M) = \mathrm{Ext}^1_{A^X}(A,M) = \mathrm{Der}_X(A,M)/\mathrm{Int}(A,M),$$

où $\mathrm{Der}_X(A,M)$ désigne le groupe des X-dérivations $d : A \to M$ (homomorphismes X-linéaires vérifiant $d(ab) = ad(b)+d(a)b$ et $\mathrm{Int}(A,M)$ désigne le sous-groupe des dérivations intérieures $d : A \to M$ (dérivations de la forme $d(a) = am-ma$ pour un certain $m \in M$). D'où la proposition qui suit, pour laquelle nous allons donner une démonstration directe bien qu'en fait ce ne soit qu'une réformulation des propriétés 8 et 9 du théorème 2.2.

2.4.1. <u>Proposition : Soit</u> A <u>une X-algèbre. Les assertions suivantes sont équivalentes :</u>

1) A <u>est une X-algèbre séparable,</u>

2) <u>Pour tout</u> $A_{/X}$<u>-bidule</u> M, <u>toute dérivation</u> $d: A \to M$ <u>est intérieure,</u>

3) <u>La dérivation</u> $D: A \to W$ <u>définie par</u> $D(a) = a \otimes 1 - 1 \otimes a$ <u>est intérieure.</u>

On vérifie facilement qu'il existe un isomorphisme fonctoriel en $M \in A^X \text{ Mod}$

$$\theta : \mathrm{Der}_X(A, M) \xrightarrow{\sim} A^X \text{ Mod}(W, M)$$

où $\theta(d)$ est l'homomorphisme de A^X-modules à gauches défini par

$$\theta(d)(\Sigma\, a_i \otimes a_i') = \Sigma\ d(a_i) a_i'$$

et où $\theta^{-1}(u)$ est la dérivation $d = u \circ D$ où $D: A \to W$ est définie ci-dessus (i.e. $d(a) = u(a \otimes 1 - 1 \otimes a)$).

On en déduit immédiatement que si $D: A \to W$ est intérieure, alors toute dérivation d est aussi intérieure, en sorte que 2) équivaut à 3).

Montrons que 3) équivaut à 1). Dire que D est intérieure, c'est dire qu'il existe un élément $m \in W$ tel que

$$\forall a \in A, \quad D(a) = a \otimes 1 - 1 \otimes a = (a \otimes 1 - 1 \otimes a) m,$$

c'est-à-dire,

$$\exists m \in W \quad \text{tel que} \quad W(1-m) = 0.$$

Or ceci équivaut tout simplement à dire que $1-m$ est un idempotent de séparabilité de la X-algèbre A.

2.4.2. <u>Cas où</u> A <u>est commutatif : lien avec les algèbres nettes.</u>

Lorsque A est commutatif, l'usage est souvent de ne pas considérer tous les $A_{/X}$-bidules, mais seulement les $A_{/A}$-bidules, c'est-à-dire les A-modules usuels, ou encore les $A_{/X}$-bidules M vérifiant $WM = 0$.

Dans ce cas, la restriction du foncteur $\mathrm{Der}_X(A, -) = A^X \text{ Mod}(W, -)$ aux $A_{/A}$-bidules est représentée par le $A_{/A}$-bidule $W_{/W^2}$:

$$\mathrm{Der}_X(A,-)\Big|_{A/A\text{-bidules}} = A\ \mathrm{Mod}(W/_{W^2},-).$$

Le module $W/_{W^2}$ est bien connu, c'est le <u>module des X-différentielles de A,</u> qui est noté $\Omega_{A/X}$.

Comme pour un A/A-bidule la seule dérivation intérieure est la dérivation nulle, on en déduit que

2.4.3. <u>Proposition</u> : <u>Si</u> A <u>est une X-algèbre commutative séparable alors le module des X-différentielles</u> $\Omega_{A/X} = W/_{W^2}$ <u>est nul.</u>

On dit qu'une X-algèbre commutative A est <u>formellement nette</u> (ou est <u>formellement non ramifiée</u>) si $\Omega_{A/X} = o$. On dit qu'une X-algèbre commutative A est <u>nette</u> (ou <u>non ramifiée</u>) si $\Omega_{A/X} = o$ et si A est une X-algèbre de type fini. Sur ces algèbres, on pourra, par exemple, consulter le chapitre III de [21]. On a une réciproque partielle :

2.4.4. <u>Proposition</u> : <u>Si</u> A <u>est une X-algèbre commutative nette, alors</u> A <u>est une X-algèbre séparable.</u>

En effet, par hypothèse $\Omega_{A/X} = W/_{W^2} = o$ et, A étant de type fini, W est un idéal de type fini (cf. remarque à la fin du § 1.1). Dans ces conditions, on en déduit (lemme de Nakayama) que W est engendré par un idempotent, c'est-à-dire (th. 2.2) que A est séparable.

2.5 <u>Propriétés élémentaires des algèbres séparables.</u>

2.5.1. <u>Lemme</u> : <u>Si</u> A <u>est une X-algèbre séparable, le centre</u> Z <u>de</u> A <u>est un Z-facteur direct de</u> A. <u>On en déduit en particulier que pour tout idéal</u> $I \subset Z$ <u>on a</u> $AI \cap Z = I$.

On voit immédiatement que l'image d'un idempotent de séparabilité de A sur X par

$$\eta : A^X \longrightarrow Z\ \mathrm{Mod}(A,A) \quad (a \otimes a' \longmapsto (b \longmapsto aba'))$$

est une rétraction du plongement $Z \hookrightarrow A$.

2.5.2. *Proposition : Soit* $X \to Y$ *un homomorphisme d'anneaux commutatifs et soit* A *une* Y*-algèbre.*

1) *Si* A *est séparable sur* X, *alors* A *est séparable sur* Y *(en particulier une* X*-algèbre séparable est séparable sur son centre).*

2) *Si* A *est séparable sur* Y *et si* Y *est séparable sur* X, *alors* A *est séparable sur* X.

Démonstration :

1) Puisque $Z_A : A^X \text{ Mod} \to \text{Mod } Z(A)$ est exact, sa restriction aux A/Y-bidules est encore exacte, i.e. A est séparable sur Y.

2) Les A/X-bidules sont, par restriction des scalaires, des Y/X-bidules et on vérifie facilement que le foncteur $Z_Y : Y^X \text{ Mod} \to \text{Mod } Y$ induit de façon naturelle un foncteur $F : A^X \text{ Mod} \to A^Y \text{ Mod} (F(M) = \{m \in M \mid ym = my \ \forall y \in Y\})$ qui est exact (puisque Z_Y l'est). Par ailleurs la restriction du foncteur Z_A aux A/Y-bidules est exacte car A est séparable sur Y. On en déduit que A est séparable sur X car $Z_A : A^X \text{ Mod} \to \text{Mod } Z(A)$ n'est autre que $Z_A\big|_{A^Y \text{ Mod}}$ composé avec F.

2.5.3. *Proposition : Soit* A *une* X*-algèbre séparable de centre* Z *et soit* $u : A \to B$ *une surjection d'anneaux. Alors* B *est une* X*-algèbre séparable de centre* $u(Z)$.

La restriction du foncteur Z_A aux B/X-bidules n'est autre que Z_B. Comme Z_A est exact, Z_B l'est. Par ailleurs, u étant surjectif, $Z_A(u) : Z_A(A) = Z \longrightarrow Z_A(B) = Z_B(B)$ est surjectif.

2.5.4. *Proposition : Soient* X_1 *et* X_2 *deux* Y*-algèbres commutatives et soient* A_i, $i = 1,2$, *des* X_i*-algèbres séparables de centre* Z_i. *Si* $A_1 \otimes_Y A_2$ *est non nul, alors* $A_1 \otimes_Y A_2$ *est séparable sur* $X_1 \otimes_Y X_2$ *et a pour centre* $Z_1 \otimes_Y Z_2$.

On a un isomorphisme naturel α qui rend commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} A_1^{X_1} \underset{Y}{\otimes} A_2^{X_2} \arrow[rr, "\alpha", "\sim"'] \arrow[dr, "\mu_1 \otimes \mu_2"'] & & (A_1 \underset{Y}{\otimes} A_2)^{X_1 \underset{Y}{\otimes} X_2} \arrow[dl, "\mu"] \\ & A_1 \underset{Y}{\otimes} A_2 & \end{tikzcd}$$

On voit facilement que si $e_i \in A_i^{X_i}$ est un idempotent de séparabilité de A_i $(i = 1,2)$, alors $\alpha(e_1 \otimes e_2)$ est un idempotent de séparabilité de $A_1 \underset{Y}{\otimes} A_2$. De plus, comme on a toujours $\mu(eA^X) = Z(A)$, on voit sur le diagramme ci-dessus que

$$Z(A_1 \underset{Y}{\otimes} A_2) = \mu[\alpha(e_1 \otimes e_2).A_1 \otimes A_2^{X_1 \otimes X_2}] = \mu_1(e_1A_1^{X_1}) \underset{Y}{\otimes} \mu_2(e_2A_2^{X_2}) = Z_1 \underset{Y}{\otimes} Z_2.$$

2.5.5. Corollaire : Si A est une X-algèbre séparable de centre Z et si $X \to Y$ un homomorphisme d'anneaux commutatifs, alors $A \underset{X}{\otimes} Y$ est séparable sur Y et a pour centre $Z \underset{X}{\otimes} Y$.

2.5.6. Corollaire : Si A est une X-algèbre séparable de centre Z, alors A^X est une X-algèbre séparable de centre $Z^X = Z \underset{X}{\otimes} Z$.

En effet A^{op} est une X-algèbre séparable, cela se voit par exemple en remarquant qu'il existe une équivalence de catégories évidente $(-)$ entre les A/X-bidules et les A^{op}/X-bidules (en échangeant les actions à gauche et à droite de A) et que cette action commute aux foncteurs Z_A, c'est-à-dire que l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} {}_{A^X}\mathrm{Mod} \arrow[rr, "\theta", "\sim"'] \arrow[dr, "Z_A"'] & & {}_{(A^{op})^X}\mathrm{Mod} \arrow[dl, "Z_{A^{op}}"] \\ & \mathrm{Mod}\ Z(A) & \end{tikzcd}$$

Donc Z_A est exact si et seulement si $Z_{A^{op}}$ l'est.

2.5.7. Proposition . Soient A_i des X_i-algèbres séparables de centre Z_i, $i = 1,2,\dots,n$. Alors $\prod_{i=1}^{n} A_i$ est séparable sur $\prod_1^n X_i$ et a pour centre $\prod_1^n Z_i$.

Si l'on pose $A = \Pi A_i$ et $X = \Pi X_i$, on a $A^X = \prod_i A_i^{X_i}$ et $\mu : A^X \to A$ n'est autre que $\Pi\mu_i$. Si e_i est un idempotent de séparabilité de A_i sur X_i, il est alors clair que Πe_i est un idempotent de séparabilité de A sur X.

2.6 Structure des algèbres séparables sur un corps.

2.6.1. Proposition : Si A est une X-algèbre séparable telle que A soit un X-module libre (c'est toujours le cas si X est un corps), alors A est un X-module de type fini.

Nota. Si X est égal au centre de A, cette proposition est toujours vraie puisque X est alors une algèbre d'Azumaya. Par ailleurs on peut montrer que cette proposition est ~~encore~~ vraie, X étant quelconque, si l'on suppose seulement que A est un X-module projectif (cf. [28], [10]). Comme nous n'aurons pas besoin de cette généralisation, nous nous contentons de reprendre la démonstration originale de [23]. Disons enfin que cette proposition est en général fausse, même si on suppose A commutatif et plat sur X, comme le montre l'exemple d'un épimorphisme plat tel que $\mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$ (cf. 2.3.2).

Soit e un idempotent de séparabilité de A sur X. Choisissant une base $\{a_i\}_{i\in I}$ de A sur X, on peut écrire $e = \sum_{i\in I_o} a_i \otimes a'_i$ où I_o est un sous-ensemble fini de I.

Soit b un élément de A. Pour tout $j \in I_o$ on peut trouver des $\lambda_{ji} \in X$, $i \in I$ tels que :

$$ba_j = \sum_{i\in I} \lambda_{ji} a_i.$$

Puisque $We = o$, on a :

$$\sum_{j\in I_o} a_j \otimes a'_j b = \sum_{j\in I_o} ba_j \otimes a'_j = \sum_{j\in I_o} \sum_{i\in I} \lambda_{ji} a_i \otimes a'_j = \sum_{i\in I} a_i \otimes (\sum_{j\in I_o} a'_j \lambda_{ji})$$

d'où l'on tire, les a_i formant une base, que

$$\forall i \in I, \quad a'_i b = \sum_{j\in I_o} a'_j \lambda_{ji}.$$

Puisque $\mu(e) = 1$, on a alors

$$b = (\sum_{i\in I_o} a_i a'_i) b = \sum_{i\in I_o} \sum_{j\in I_o} a_i a'_j \lambda_{ji},$$

en sorte que la famille finie des $a_i a'_j$, $i, j \in I_o$ engendre A sur X.

2.6.2. Proposition : Si A est une algèbre séparable sur X et si X est semi-simple, alors A est semi-simple.

On sait qu'un anneau A est semi-simple si et seulement si tout A-module à gauche est projectif. La proposition est une conséquence immédiate du lemme suivant :

2.6.3. Lemme : Si A est séparable sur X, tout A-module à gauche qui est projectif sur X (par restriction des scalaires) est projectif sur A.

On a en effet un isomorphisme fonctoriel en $N \in A \text{ Mod}$

$$A \text{ Mod}(M,N) \simeq Z_A(X \text{ Mod}(M,N)).$$

Si M est projectif sur X et si A est séparable sur X, le foncteur de droite est exact en $N \in A \text{ Mod}$.

2.6.4. Proposition : Soient A et X deux corps commutatifs. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) A est séparable sur X,

ii) A est une extension algébrique finie séparable (au sens usuel) de X.

La démonstration s'obtient par juxtaposition des prop. 2.6.1 et 2.4.1 avec le résultat suivant ([7] § 9, n° 2, th. 1) : Pour qu'une extension de type fini A/X de corps commutatifs soit finie et séparable, il faut et il suffit que toute X-dérivation de A soit nulle.

On peut aussi donner une démonstration élémentaire :

i) $\Longrightarrow$ ii). D'après 2.6.1, on sait que A/X est une extension de degré fini. Soit X' la clôture séparable de X dans A. Si $X' \neq A$, on peut écrire $A = X'(x_1 \ldots x_n)$ et, posant alors $Y = X(x_1, \ldots, x_{n-1})$, on se ramène au cas où A/Y est une extension monogène radicielle non triviale. D'après 2.5.2, A est séparable sur Y.

Si $A = Y(y)$, soit P le polynôme minimal de y sur Y. On a $A \simeq Y[T]_{/(P)}$, $A^Y \simeq Y[T]_{/(P)} \underset{Y}{\otimes} A = A[T]_{/(P)}$ et μ s'identifie à la surjection naturelle

$$A[T]_{/(P)} \longrightarrow A[T]_{/(T-y)} \simeq A.$$

Dans $A[T]$, on a $P = (T-y)Q$. L'idéal W est engendré par la classe modulo P de $T-y$ et l'annulateur $Z_A(A^X)$ de W est engendré par la classe modulo P de Q.

Trouver un idempotent de séparabilité $e \in A^X$ équivaut à trouver un polynôme $R \in A[T]$ tel que

1) $R = 1+U(T-y)$, $U \in A[T]$ (i.e $\mu(e) = 1$)

2) $R = VQ$, $V \in A[T]$ (i.e $We = o$).

Il existe donc un idempotent de séparabilité si et seulement si $T-y$ et Q sont premiers entre eux, i.e y est racine simple de P.

On obtient donc une contradiction si l'on suppose A séparable sur X mais non séparable au sens usuel.

ii) $\Longrightarrow$ i). Si A est une extension algébrique finie séparable de X, A est de la forme $A = X(x)$, où x est racine simple de son polynôme minimal (théorème de l'élément primitif). L'argument qui précède montre qu'il existe alors un idempotent de séparabilité de A sur X.

Dans l'exposé II on pourra trouver une troisième démonstration de cette proposition.

Pour déterminer la structure générale des algèbres séparables sur un corps on admettra un résultat qui sera démontré plus loin (3.4.6) et qui complète 2.5.2, à savoir : une algèbre A de centre Z est séparable sur X si et seulement si A est séparable sur Z et Z est séparable sur X. (Le lecteur pourra vérifier qu'il n'y a pas de cercle vicieux dans les raisonnements, le point délicat étant le lemme 3.4.1). L'énoncé est le suivant :

2.6.5. Proposition : Soit X un corps commutatif. Une X-algèbre A est séparable sur X si et seulement si A est un produit fini d'algèbres centrales simples A_i de centre Z_i, chacun des corps Z_i étant une extension algébrique finie séparable de X.

On utilise les résultats des paragraphes 2.5 et 2.6, et le fait qu'une algèbre semi-simple est un produit fini d'algèbres simples. La mise en place des détails est laissée en exercice.

3. THEORIE CATEGORIQUE DES ALGEBRES D'AZUMAYA.

La définition d'une algèbre d'Azumaya, telle qu'elle est donnée en 1.2.2, ne se comprend bien qu'en fonction des théorèmes de Morita que nous allons examiner.

3.1. Rappels sur des notions classiques.

3.1.0. Soit R un anneau et soit $P \in R\ \mathrm{Mod}$ un R-module à gauche. P est aussi muni d'une structure naturelle de $R\ \mathrm{Mod}(P,P)$-module à gauche, tandis que $R\ \mathrm{Mod}(P,R)$ est muni d'une structure à droite sur R et d'une structure à droite sur $R\ \mathrm{Mod}(P,P)$. Ces structures donnent lieu

. à un homomorphisme de $R/Z(R)$-bidules

$$\varepsilon : R\ \mathrm{Mod}(P,R) \underset{R\ \mathrm{Mod}(P,P)}{\otimes} P \longrightarrow R, \quad \varepsilon(f \otimes m) = f(m)$$

dont l'image est un idéal bilatère de R qui sera noté $\mathcal{C}_R(P)$ et est appelé idéal trace du R-module P.

. à un homomorphisme de $R\ \mathrm{Mod}(P,P)/Z(R)$-bidules

$$h : R\ \mathrm{Mod}(P,R) \underset{R}{\otimes} P \longrightarrow R\ \mathrm{Mod}(P,P)$$

défini par $h(f \otimes m)(m') = f(m')m$.

3.1.1. Module générateur.

On dit qu'un R-module à gauche P est un module générateur si le foncteur $R\ \mathrm{Mod}(P,-) : R\ \mathrm{Mod} \to Ab$ est fidèle.

Il est facile de voir que cela équivaut à l'une des assertions suivantes :

- Pour tout $M \in R\ \mathrm{Mod}$ et tout $N \underset{\neq}{\subset} M$, $\exists f : P \to M$ tel que $f(P) \not\subset N$.
- Tout R-module à gauche est quotient d'une somme directe (éventuellement infinie) d'exemplaires de P.
- Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que R soit isomorphe à un facteur direct de P^n.
- On peut trouver $f_i \in R\ \mathrm{Mod}(P,R)$, $p_i \in P$, $i = 1,2,\ldots,n$ tels que $1 = \sum_{i=1}^{n} f_i(p_i)$.

- L'homomorphisme $\varepsilon : R\ \mathrm{Mod}(P,R) \otimes P \to R$ est surjectif.

- L'idéal trace $\tau_R(P)$ est égal à R.

3.1.2. Module projectif générateur.

On sait (on l'a déjà utilisé de façon intensive) qu'un R-module à gauche P est dit projectif si le foncteur $R\ \mathrm{Mod}(P,-) : R\ \mathrm{Mod} \to \mathrm{Ab}$ est exact, ce qui équivaut à dire :

- P est facteur direct d'un R-module libre.
- On peut trouver une "base duale", c'est-à-dire des $p_i \in P$ et des $f_i \in R\ \mathrm{Mod}(P,R)$, $i \in I$, tels que pour tout $p \in P$, on ait :

a) Les $f_i(p)$ sont nuls sauf pour un nombre fini d'indices,

b) $p = \sum_{i \in I} f_i(p) p_i$.

En particulier, dire que P est projectif et de type fini équivaut à dire que l'homomorphisme $h : R\ \mathrm{Mod}(P,R) \otimes P \to R\ \mathrm{Mod}(P,P)$ est surjectif.

Si P est un R-module projectif, alors P est générateur si et seulement si $M \neq 0$ implique $R\ \mathrm{Mod}(P,M) \neq 0$.

3.1.3. Si R est commutatif et si P est un module projectif de type fini, alors P est générateur si et seulement si P est fidèle.

Cela résulte immédiatement du lemme qui suit :

Lemme : Soient R un anneau commutatif et P un R-module projectif de type fini. On a $R = \mathcal{C}_R(P) \oplus \mathrm{Ann}_R(P)$.

D'après la définition de h, le fait que h soit surjectif entraîne que l'on a $\mathcal{C}_R(P).P = P$.

P étant de type fini, cette dernière condition implique (en fait équivaut à) $\mathcal{C}_R(P)+\mathrm{Ann}_R(P) = R$ (*).

Mais on a toujours $\mathrm{Ann}_R(P).\mathcal{C}_R(P) = 0$ (si $t = \Sigma f_i(m_i) \in \mathcal{C}_R(P)$ et $x \in \mathrm{Ann}_R(P)$ on a $xt = \Sigma f_i(xm_i) = o$). Cette dernière condition, jointe à la précédente, entraîne que $R = \mathcal{C}_R(P) \oplus \mathrm{Ann}_R(P)$.

3.2. Le théorème de Gabriel.

La forme donnée au théorème ci-dessous est due à Gabriel [13], mais la démonstration initiale est due à Morita.

3.2.1. Théorème : *Soient* R *et* S *deux anneaux et soit* $F: R\,\mathrm{Mod} \to \mathrm{Mod}\,S$ *un foncteur. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) F *est une équivalence de catégories,*

ii) *Il existe un* $R \underset{\mathbf{Z}}{\otimes} S$*-module à gauche* U *tel que*

a) *Le foncteur* F *est isomorphe au foncteur* $R\,\mathrm{Mod}(U,-)$,

b) U *est un R-module à gauche qui est projectif, de type fini et générateur,*

c) *l'homomorphisme* $\sigma: S \to R\,\mathrm{Mod}(U,U)$ *correspondant à la structure de S-module à gauche de* U *est un isomorphisme.*

i) $\Longrightarrow$ ii) Soit T "le" foncteur quasi-inverse de F. Comme T est pleinement fidèle et additif (car il commute aux $\varinjlim$ finies) on obtient un isomorphisme d'anneaux

$$\begin{array}{ccccc}
\sigma: S & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Mod}\,S(S,S) & \xrightarrow[\sim]{T} & R\,\mathrm{Mod}(T(S),T(S)) \\
s & \longrightarrow & (s' \longmapsto ss') & & \\
 & & f & \longmapsto & T(f).
\end{array}$$

(*) C'est le lemme de Nakayama "généralisé" ; il se démontre directement (comme pour l'énoncé usuel) en disant qu'un certain déterminant est nul.

On pose $U = T(S)$; grâce à σ, U est aussi un S-module à gauche.

Comme T est en fait un adjoint à gauche de F, on a un isomorphisme fonctoriel en $M \in R\ \mathrm{Mod}$

$$F(M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}\ S(S,F(M)) \xrightarrow{\sim} R\ \mathrm{Mod}(U,M),$$

et il est facile de vérifier que c'est un isomorphisme de S-modules à gauche.

Puisque l'on a une équivalence de catégories, les propriétés de S se transportent à $U = T(S)$. Ainsi U est projectif, générateur et est de type fini (car toute suite croissante de sous-R-modules de U et dont la réunion est U est stationnaire à partir d'un certain rang vu qu'il en est de même pour toute suite de sous-S-modules de S qui est croissante et de réunion S).

ii) $\Longrightarrow$ i) Puisque U est un $R \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} S$-module à gauche, il définit un foncteur $F = R\ \mathrm{Mod}(U,-) : R\ \mathrm{Mod} \to \mathrm{Mod}\ S$ qui admet le foncteur $- \underset{S}{\otimes} U : \mathrm{Mod}\ S \to R\ \mathrm{Mod}$ comme adjoint à gauche. Soient $\eta_N : N \to F(N \underset{S}{\otimes} U)$ et $\varepsilon_M : F(M) \underset{S}{\otimes} U \to M$ les deux homomorphismes d'adjonction. Pour que $- \underset{S}{\otimes} U$ soit un foncteur quasi-inverse de F, il suffit (et il faut) que ε et η soient des isomorphismes.

Comme tout foncteur représentable, F commute aux limites projectives, mais U étant de type fini, F commute aussi aux sommes directes quelconques. Comme $\sigma = \eta_S$ est un isomorphisme on en déduit que F induit une équivalence de catégories entre les S-modules libres et les R-modules qui sont somme directe d'exemplaires de U.

Comme U est projectif, F est exact. Les foncteurs F et $- \otimes U$ ainsi que leurs composés sont donc exacts à droite.

- Soit N un S-module quelconque; N admet une présentation libre et on a un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
L_1 & \longrightarrow & L_o & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \\
\wr\downarrow \eta_{L_1} & & \wr\downarrow \eta_{L_o} & & \downarrow \eta_N & & \\
F(L_1 \otimes U) & \longrightarrow & F(L_o \otimes U) & \longrightarrow & F(N \otimes U) & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Comme η_{L_1} et η_{L_o} sont des isomorphismes, η_N l'est aussi.

- Soit M un R-module quelconque. Comme U est un R-module générateur, M admet une présentation "libre" :

$$U^{(I_1)} \longrightarrow U^{(I_o)} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

et on en déduit par passage au quotient comme précédemment que ε_M est un isomorphisme.

3.2.2. <u>Corollaire</u> : (Morita) : <u>Soit</u> U <u>un</u> $R \underset{Z}{\otimes} S$-<u>module à gauche. Les assertions suivantes sont équivalentes</u> :

i) U <u>est un R-module projectif de type fini, générateur de</u> R Mod <u>et</u> $\sigma : S \to R\ \mathrm{Mod}(U,U)$ <u>est un isomorphisme,</u>

ii) U <u>est un S-module projectif de type fini, générateur de</u> S Mod <u>et</u> $\rho : R \to S\ \mathrm{Mod}(U,U)$ <u>est un isomorphisme,</u>

i') $R\ \mathrm{Mod}(U,-) : R\ \mathrm{Mod} \to \mathrm{Mod}\ S$ <u>est une équivalence de catégories,</u>

ii') $S\ \mathrm{Mod}(U,-) : S\ \mathrm{Mod} \to \mathrm{Mod}\ R$ <u>est une équivalence de catégories.</u>

Il suffit de prouver que i') implique ii). Comme le foncteur $- \underset{S}{\otimes} U : \mathrm{Mod}\ S \to R\ \mathrm{Mod}$ est adjoint à gauche de $R\ \mathrm{Mod}(U,-)$, c'est aussi une équivalence de catégories, donc de la forme $\mathrm{Mod}\ S(V,-)$ où V est un $R \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} S$-module à droite qui est un S-module projectif de type fini générateur et tel que $R^{op} \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Mod}\ S(V,V)$. Mais ces propriétés du S-module à droite V passent à son dual $\mathrm{Mod}\ S(V,S)$ et celui-ci n'est autre que le S-module à gauche U (en effet U et $\mathrm{Mod}\ S(V,S)$ représentent tous les deux le foncteur quasi-inverse de $\mathrm{Mod}\ S(V,-)$; voir la démonstration du théorème).

3.2.3. <u>Corollaire</u> : <u>Soit</u> X <u>un anneau commutatif et soit</u> U <u>un X-module projectif de type fini et fidèle. Posons</u> $A = X\ \mathrm{Mod}(U,U)$. <u>Alors le foncteur</u> $X\ \mathrm{Mod}(U,-) : X\ \mathrm{Mod} \to \mathrm{Mod}\ A$ <u>est une équivalence de catégories.</u>

On applique 3.1.3 et le théorème. On en tire par exemple que les idéaux à droite de $M_n(X)$ correspondent bijectivement aux sous-modules de X^n.

Le corollaire 3.2.2 est en réalité la juxtaposition de deux propriétés et nous allons - nous en aurons besoin par la suite - donner la démonstration d'un résultat plus fort. Cette démonstration, due à Morita, est technique ; je n'en connais malheureusement pas d'autre.

3.2.3. Théorème (Morita) : *Soit* R *un anneau et soit* U *un* R*-module à gauche. Si on pose* $S = R\,\mathrm{Mod}(U,U)$, *les assertions suivantes sont équivalentes* :

i) U *est générateur de* $R\,\mathrm{Mod}$.

ii) U *est un* S*-module à gauche projectif de type fini et* $R \xrightarrow{\sim} S\,\mathrm{Mod}(U,U)$.

On a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
R\,\mathrm{Mod}(U,R) \otimes_S U \arrow[r, "\phi \otimes_S U"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & S\,\mathrm{Mod}(U,S) \otimes_S U \arrow[d, "h"] \\
R \arrow[r, "\rho"] & S\,\mathrm{Mod}(U,U)
\end{tikzcd}$$

où ε et h sont les homomorphismes définis en 3.1.0, ρ correspond à la structure de R-module à gauche de U et $\phi : R\,\mathrm{Mod}(U,R) \to S\,\mathrm{Mod}(U,S)$ est tel que $\phi(f)(u) \in S = R\,\mathrm{Mod}(U,U)$ est l'endomorphisme $u' \longmapsto f(u')u$. On rappelle que U projectif de type fini (sur S) équivaut à $\mathrm{Id}_U \in \mathrm{im}(h)$ et U générateur de $R\,\mathrm{Mod}$ équivaut à $1 \in \mathrm{im}(\varepsilon) = \mathcal{C}_R(U)$.

i) $\Longrightarrow$ ii) Par hypothèse $1 \in \mathrm{im}(\varepsilon)$ et, ρ étant un homomorphisme d'anneaux, on a $\mathrm{Id}_U \in \mathrm{im}(\rho\varepsilon = h\circ\phi \otimes U) \subset \mathrm{im}(h)$; U est donc un S-module projectif de type fini. Par ailleurs U, étant générateur, est un R-module fidèle et ρ est donc injectif. Il reste à montrer que ρ est surjectif. Soit $\Sigma f_i \otimes u_i \in R\,\mathrm{Mod}(U \otimes R) \otimes_S U$ un élément tel que $\varepsilon(\Sigma f_i \otimes u_i) = \Sigma f_i(u_i) = 1$. Si $g \in S\,\mathrm{Mod}(U,U)$, g commute avec toutes les applications de $S = R\,\mathrm{Mod}(U,U)$, en particulier avec les applications $y \longmapsto f(y)u$ $(u \in U,\ f \in R\,\mathrm{Mod}(U,R))$, ce qui permet d'écrire :

$$g(u) = g(\Sigma f_i(u_i)u) = \Sigma f_i[g(u_i)]u \qquad \forall u \in U,$$

c'est-à-dire que l'on a $g = \rho(\sum_i f_i[g(u_i)])$.

ii) $\Longrightarrow$ i) Puisque l'on a $\rho : R \xrightarrow{\sim} S\ \mathrm{Mod}(U,U)$, on définit un homomorphisme $\varphi : S\ \mathrm{Mod}(U,S) \to R\ \mathrm{Mod}(U,R)$ analogue à ψ, c'est-à-dire tel que $\varphi(g)(u) \in R$ est l'élément qui correspond par ρ à l'endomorphisme $u' \longmapsto g(u')u$. On vérifie facilement (hum !) que $\psi\varphi = \mathrm{Id}$, en sorte que $\psi \otimes U$ est surjectif. Par hypothèse, on a $\mathrm{Id}_U \in \mathrm{im}(h)$, donc $\mathrm{Id}_U \in \mathrm{im}(h \circ \psi \otimes U)$ et comme ρ est un isomorphisme d'anneaux, cela entraîne que $1 \in \mathrm{im}(\varepsilon)$, c'est-à-dire que U est un R-module générateur.

3.3. Théorèmes fondamentaux.

Nous aurons besoin du lemme suivant, qui sera grandement généralisé par la suite (Corollaire 3.3.3).

3.3.1. Lemme : Si A est une algèbre séparable sur son centre Z et si $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de A, on a $\mathfrak{m} = A(\mathfrak{m} \cap Z)$.

En vertu de 2.5.3, $A/\mathfrak{m}$ est séparable sur Z et son centre est égal à $Z/Z \cap \mathfrak{m}$ lequel est un corps car $A/\mathfrak{m}$ est quasi-simple. Pour la même raison, $A/A(Z \cap \mathfrak{m})$ est séparable sur Z, donc, d'après 2.5.2, séparable sur son centre $Z/Z \cap A(Z \cap \mathfrak{m})$. Mais il résulte de 2.5.1 que ce centre est égal à $Z/Z \cap \mathfrak{m}$, donc est un corps et on déduit de 2.6.2 que $A/A(Z \cap \mathfrak{m})$ est un anneau semi-simple. Cet anneau semi-simple ayant pour centre un corps est nécessairement un anneau simple. On en tire que $A(Z \cap \mathfrak{m})$ est maximal, donc égal à $\mathfrak{m}$.

3.3.2. Théorème : Soit A une X-algèbre de centre Z. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) A est une X-algèbre d'Azumaya.

ii) Le foncteur $Z_A : {}_A^X\mathrm{Mod} \to \mathrm{Mod}\ X$ est une équivalence de catégories.

iii) Le foncteur $- \otimes_X A : \mathrm{Mod}\ X \to {}_A^X\mathrm{Mod}$ est une équivalence de catégories.

iv) A <u>est une X-algèbre séparable et</u> X <u>est égal au centre Z de A.</u>

v) A <u>est un</u> A^X<u>-module à gauche générateur et</u> $X = Z$.

. i) $\Longleftrightarrow$ ii) D'après 3.1.3 et la définition d'une algèbre d'Azumaya, i) équivaut à

i') A est un X-module projectif, de type fini, générateur et $A^X \xrightarrow{\simeq} X\,\mathrm{Mod}(A,A)$.

Par dualité de Morita (3.2.2), i') équivaut à ii) et à

i'') A est un A^X-module projectif, (de type fini), générateur et $X \xrightarrow{\simeq} A^X\,\mathrm{Mod}(A,A)$.

. ii) $\Longleftrightarrow$ iii) est évident puisque l'on a deux foncteurs adjoints.

. iii) $\Longrightarrow$ iv) On a vu que iii) était équivalent à i"), et il est clair que i") implique que A est séparable sur X. Par ailleurs, comme on a toujours $A^X\mathrm{Mod}(A,A) = Z$, i") entraîne aussi que $X = Z$.

. iv) $\Longrightarrow$ v) Supposons que A ne soit pas générateur, c'est-à-dire que l'idéal trace $\mathcal{C}_{A^X}(A)$ soit différent de A^X, mais que A soit séparable sur X. D'après 2.5.6, A^X est une algèbre séparable de centre $X = Z$ et il résulte du lemme 3.3.1 que si $\mathcal{C}_{A^X}(A) \neq A^X$ on peut trouver un idéal $I \subset Z$, différent de Z et tel que $\mathcal{C}_{A^X}(A) \subset A^X I$. Soit alors $e \in A^X$ un idempotent de séparabilité de A sur X. Comme on a $e \in \mathcal{C}_{A^X}(A)$ (car $e \in Z_A(A^X)$ et $Z_A(A^X) \subset \mathcal{C}_{A^X}(A)$ - en fait $Z_A(A^X)$ engendre $\mathcal{C}_{A^X}(A)$), on peut écrire

$$A = \mu(A^X e) \subset \mu(\mathcal{C}_{A^X}(A)) \subset \mu(A^X . I)$$

et on a donc $\mu(A^X . I) = A$. Mais puisque $I \subset Z$, $\mu(A^X . I)$ n'est autre que l'idéal $A.I$ engendré par I dans A. Il résulte alors de 2.5.1 que l'on a $I = (A.I) \cap Z = Z$, ce qui contredit le fait que $I \neq Z$.

. v) $\Longrightarrow$ i) Comme on a $Z \backslash = A^X\mathrm{Mod}(A,A)$, il résulte du théorème de Morita (3.2.3) que A est un Z-module projectif de type fini et que $A^X \simeq Z\ \mathrm{Mod}(A,A)$. La conclusion suit immédiatement puisque l'on a $X = Z$ et que A est évidemment un Z-module fidèle.

3.3.3. Corollaire : Soit A un anneau de centre Z. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) A est une algèbre d'Azumaya (c'est-à-dire une Z-algèbre séparable),

ii) $\mathcal{C}_{A^Z}(A) = A^Z$,

iii) L'application naturelle $\varepsilon : Z_A(A^Z) \otimes_Z A \longrightarrow A^Z$ est surjective,

iv) Pour tout A/Z-bidule M, l'application $\varepsilon_M : Z_A(M) \otimes_Z A \longrightarrow M$ est un isomorphisme de A/Z-bidules.

Les assertions ii) et iii) disent essentiellement la même chose, à savoir que A est un A^Z-module générateur. D'après le théorème, i) et ii) sont équivalents et équivalents au fait que les foncteurs Z_A et $- \otimes_Z A$ sont quasi-inverses l'un de l'autre, ce qui entraîne iv).

3.3.4. Corollaire : Si A est une Z-algèbre d'Azumaya, les foncteurs (*)

$$- \otimes_Z A : Z\text{-Alg} \longrightarrow A\text{-Alg}$$
$$Z_A : A\text{-Alg} \longrightarrow Z\text{-Alg}$$

sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre.

(*) La notion de A-algèbre $u : A \to B$ a été définie au début du § 1.1. Notons que cette définition revient à dire que u confère à B une structure de A/Z-bidule et que $Z_A(B)$ n'est autre que le centralisateur de l'image de u.

3.3.5. Corollaire : Si A est une algèbre d'Azumaya de centre Z, alors les idéaux de Z et les idéaux bilatères de A se correspondent bijectivement via les applications $I \longmapsto A.I$ et $J \longmapsto J \cap Z$. Ces correspondances respectent les idéaux premiers, les idéaux maximaux et les "radicaux". En particulier, A satisfait à la condition des chaînes ascendantes (resp. descendantes) sur les idéaux bilatères si et seulement si Z est noethérien (resp. artinien).

3.3.6. Proposition : Soit A une X-algèbre de centre Z. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) A est une X-algèbre séparable,

ii) A est séparable sur Z et Z est séparable sur X.

On a vu en 2.5.2 que ii) $\Longrightarrow$ i) et que i) implique que A est séparable sur Z. Il reste à prouver que i) entraîne que Z est séparable sur X.

D'après 2.5.1, Z est un Z-facteur direct de A ; c'est donc aussi un Z^X-facteur direct de A. Comme A est séparable sur X, A est un A^X-facteur direct de A^X, donc un Z^X-facteur direct de A^X. Enfin, d'après 2.5.6, A^X est séparable de centre Z^X, donc est une algèbre d'Azumaya, donc est un Z^X-module projectif. On tire de tout cela que Z est facteur direct d'un Z^X-module projectif, donc est lui-même projectif.

Pour terminer, donnons un résultat qui montre bien toute la puissance du théorème de Gabriel :

3.3.7. Proposition : Soit A une X-algèbre de centre Z et soit B un anneau (non nécessairement commutatif). Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) Il existe une équivalence de catégories $F : {}_{A^X}\mathrm{Mod} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}\ B$ telle que $F(A) \simeq B$,

ii) on a – $B = Z$ et l'homomorphisme $X \to Z$ est un épimorphisme d'anneaux,

– A est une algèbre d'Azumaya,

– F est isomorphe au foncteur $Z_A : {}_{A^X}\mathrm{Mod} \to \mathrm{Mod}\ Z$.

Il suffit de démontrer i) $\Longrightarrow$ ii), la réciproque n'étant autre que le théorème 3.3.2. Puisque A est le A/X-bidule qui correspond à B, il résulte de la démonstration du théorème 3.2.1 que l'on a $F \simeq A^X\mathrm{Mod}(A,-) = Z_A$, que A est un A^X-module projectif (donc A est séparable sur X) et que $A^X \simeq Z\,\mathrm{Mod}(A,A)$. Comme ce dernier isomorphisme se factorise en fait en $A^X \xrightarrow{p} A^Z \longrightarrow Z\,\mathrm{Mod}(A,A)$, où p est surjectif, on en tire que p est un isomorphisme. On a un isomorphisme $A^Z \simeq A^X \otimes_{Z^X} Z$ qui identifie p à $A^X \otimes_{Z^X} \mu$, avec $\mu : Z^X \to Z$ homomorphisme de multiplication de Z sur X. Comme A est séparable sur X, A^X est séparable sur X et a pour centre Z^X (2.5.6) et on a donc une équivalence de catégories $A^X\mathrm{alg} \simeq Z^X\mathrm{alg}$ (3.3.4). Comme $\mu : Z^X \to Z$ et p se correspondent par cette équivalence, on en déduit que μ est un isomorphisme, ce qui veut dire que le morphisme $X \to Z$ est un épimorphisme d'anneaux.

UNIVERSITE DE PARIS SUD

CENTRE D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 9 du 21.1.1974

LOCALISATION DES MODULES CONTINUS

par J. LAMBEK

-:-:-:-:-:-:-:-

1. LOCALISATION DANS LES CATEGORIES COMPLETES.

Nous donnerons un bref exposé de la théorie développée dans [11]. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie complète, I un objet donné de $\mathcal{A}$. Nous introduisons le foncteur $T = T_I = I^{\mathrm{Hom}(-,I)} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Il est muni d'une transformation naturelle $\eta = \eta_I : \mathrm{id} \to T$ telle que, pour chaque $f \in \mathrm{Hom}(A,I) \to \mathrm{Hom}(A,I)$, $\pi_f \eta(A) = f$, où $\pi_f : T(A) \to I$ est la projection canonique associée à f. Pour tout objet A de $\mathcal{A}$, soit $K(A) : Q(A) \to T(A)$ l'égalisateur des deux morphismes $\eta T(A), T\eta(A) : T(A) \rightrightarrows T^2(A)$. $(Q(A), K(A))$ est aussi l'intersection de tous les égalisateurs de couples $\varphi, \psi : T(A) \rightrightarrows I$ tels que $\varphi\eta(A) = \psi\eta(A)$. On obtient une transformation naturelle $\eta_1 : \mathrm{id} \to Q$ telle que $K.\eta_1 = \eta$. On connait le résultat suivant [11].

<u>THEOREME 1.1</u> : <u>Les propriétés suivantes de</u> I <u>sont équivalentes</u> :

(1) $\eta_1 Q$ <u>est un isomorphisme.</u>

(2) <u>Pour tout</u> $f : Q(A) \to I$, <u>il existe un</u> $f' : T(A) \to I$ <u>tel que</u> $f'K(A) = f$.

(3) <u>La sous-catégorie pleine</u> $\mathrm{Fix}(Q, \eta_1)$ <u>de</u> $\mathcal{A}$ <u>constituée de tous les objets</u> A <u>de</u> $\mathcal{A}$ <u>tels que</u> $\eta_1(A)$ <u>est un isomorphisme</u>

<u>est la plus petite sous-catégorie pleine de $\mathcal{K}$ qui contient I et est fermée par limites.</u>

La propriété (1) nous donne un triple idempotent (Q, η_1, μ_1), où $\mu_1(A) = \eta_1 Q(A)^{-1}$.

En vertu de la propriété (2), nous appelons l'objet I K-<u>injectif</u>.

La propriété (2) assure que $\mathrm{Fix}(Q, \eta_1)$ est une sous-catégorie pleine réflective de $\mathcal{K}$, le réflecteur étant donné par $A \mapsto Q(A)$.

On a étudié beaucoup d'exemples de cette situation dans [11], en particulier, si $\mathcal{K}$ est la catégorie des espaces topologiques, la catégorie des espaces uniformes, la catégorie des préfaisceaux sur un espace topologique, la catégorie $(\mathrm{Mod}\ R)^{op}$ et la catégorie $\mathrm{Mod}\ R$.

2. LA LOCALISATION DANS Mod R.

Nous rappelons rapidement ce qu'on connait de $\mathrm{Mod}\ R$ et nous ajoutons quelques faits nouveaux. Quels sont les objets K-injectifs de $\mathrm{Mod}\ R$?

<u>Exemple 2.1</u> : Soit I un module injectif et $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_I$ l'ensemble de tous les idéaux à droite D de R tels que $\mathrm{Hom}_R(R/D, I) = 0$. Alors $\mathfrak{D}$ est un filtre idempotent au sens de Bourbaki-Gabriel [1] et

$$Q(A) = \varinjlim_{D \in \mathfrak{D}} \mathrm{Hom}(D, A/A_o)$$

où

$$A_o = \{a \in A \mid \exists_{D \in \mathfrak{D}}\ aD = o\}.$$

Inversement, à un filtre idempotent quelconque $\mathfrak{D}$ d'idéaux à droite de R on peut associer le module injectif

$$I = \prod_{C \in \mathcal{C}} E(R/C),$$

où $\mathcal{C}$ est l'ensemble de tous les idéaux à droite C de R tels que

$$\forall r \notin C \quad r^{-1}C \notin \mathfrak{D} ,$$

et $E(-)$ est l'enveloppe injective. On appelle $Q(A)$ "module de fractions" de A et Q "foncteur localisant".

<u>Exemple 2.2</u> : Soit $e: R \to S$ un épimorphisme donné de la catégorie des anneaux. Alors tout injectif de la sous-catégorie pleine Mod S est K-injectif dans Mod R. En particulier, on peut prendre pour I un cogénérateur injectif de Mod S, par exemple, $I = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Alors $\mathrm{Fix}(Q, \eta_1) \cong \mathrm{Mod}\ S$ et $Q(A) \cong A \otimes_R S$. Notons que l'intersection des exemples 2.1 et 2.2 donne la théorie de localisation associée à un épimorphisme $R \to C$ tel que ${}_RS$ est plat en tant que R-module à gauche, théorie discutée par Silver [13]. La localisation de P.M. Cohn [2] est un cas spécial de l'exemple 2.2, non inclus dans l'exemple 2.1.

3. <u>LES MODULES QUASI-INJECTIFS.</u>

On appelle l'objet I de Mod R <u>quasi-injectif</u> si on peut étendre tout endomorphisme partiel de I à un endomorphisme de I. Les modules injectifs et les modules complètement réductibles (semi-simples) sont quasi-injectifs. Pour obtenir un objet K-injectif on voudrait poser une propriété plus forte : pour tout cardinal X et pour tout sous-module B de I^X, on peut étendre tout homomorphisme $f: B \to I$ à un homomorphisme $f': I^X \to I$. Evidemment cette propriété équivaut à dire que toutes les puissances de I sont quasi-injectives. Comme ont montré Fuller [4] et Tisseron [14], il est aussi équivalent de dire que I est injectif en tant que R/N-module où $N = \{r \in R \mid Ir = o\}$.

Puisque $R \to R/N$ est un épimorphisme d'anneaux, nous avons un cas spécial de l'exemple 2.2. Malheureusement, il n'est pas vrai que tout module quasi-injectif a cette propriété. Par exemple [4], si $R = \mathbb{Z}$ et I est la somme directe de tous les $\mathbb{Z}/(p)$, p parcourant les nombres premiers, $N = 0$ mais I n'est pas injectif. Une forme moins forte de cette propriété est contenue dans le lemme suivant de Harada [6]. Puisque nous l'utiliserons plus tard et puisque la démonstration de Harada n'est pas très directe, nous donnerons une démonstration directe ici.

<u>LEMME 3.1</u> (Harada) : <u>Soient</u> $I \in \mathrm{Mod}\ R$ <u>un module quasi-injectif,</u> n <u>un nombre naturel et</u> B <u>un sous-module de</u> I^n. <u>Alors tout homomorphisme</u> $f : B \to I$ <u>peut être étendu à un homomorphisme</u> $f' : I^n \to I$. (<u>C'est-à-dire, toute puissance finie de</u> I <u>est quasi-injective</u>).

<u>Démonstration</u> : Soient B un sous-module de $I^n = I^{n-1} \oplus I$ et $f : B \to I$. La restriction de f à $I^{n-1} \cap B$ peut être étendue à $g : I^{n-1} \to I$ par hypothèse d'induction. On définit $h : I^{n-1}+B \to I$ par

$$h(x+b) = g(x)+f(b),$$

pour tous $x \in I^{n-1}$ et $b \in B$. Soit :

$$K = \{k \in I \mid \exists_{x \in I^{n-1}} x+k \in B\}.$$

Alors $I^{n-1}+B = I^{n-1}+K$, et la dernière somme est directe. Maintenant h est déterminé par deux homomorphismes $I^{n-1} \to I$ et $K \to I$. En étendant le dernier à $I \to I$, on peut étendre h à $I^{n-1}+I \to I$.

4. LA LOCALISATION DES MODULES CONTINUS.

Un R-module à droite A est appelé continu s'il est un groupe topologique abélien tel que l'application $a \mapsto ar$ est continue pour chaque $r \in R$. si A et B sont des R-modules à droite continus on dit que $f \in \mathrm{Cont}_R(A,B)$ si $f \in \mathrm{Hom}_R(A,B)$ et f est continu. La catégorie Cont R a pour objets les R-modules à droite continus et pour morphismes $\mathrm{Hom}(A,B) = \mathrm{Cont}_R(A,B)$.

Pour tout objet donné I de Cont R, on pose $T(A) = T_I(A) = I^{\mathrm{Cont}_R(A,B)}$ et $(Q(A),K(A))$ pour intersection de tous les égalisateurs des couples $\varphi,\psi \in \mathrm{Cont}_R(T(A),I)$ tels que $\varphi\eta(A) = \psi\eta(A)$, où $\eta(A): A \to T(A)$ est l'homomorphisme canonique.

PROPOSITION 4.1 : Soit I un R-module à droite quasi-injectif muni de la topologie discrète. Alors I est K-injectif dans Cont R ; en fait, si X est un cardinal et B un sous-objet régulier (égalisateur) de I^X, tout morphisme $g: B \to I$ de Cont R peut être étendu à $I^X \to I$.

Démonstration : Puisque B est un sous-objet régulier de I^X, il a la topologie induite d'un sous-espace. I^X est produit de copies du module discret I, donc un voisinage fondamental de zéro dans I^X est de la forme Ker x^*, où $x^*: I^X \to I^n$ est associé à $x \in X$ par la formule

$$x^*(t) = ((x_1)t, \ldots, (x_n)t)$$

pour tout $t \in I^X$. Etant donné $g \in \mathrm{Cont}_R(B,I)$, on cherche une extension $g' \in \mathrm{Cont}_R(I^X,I)$.

Puisque g est continu, I est discret. $g^{-1}(0)$ contient un voisinage fondamental de zéro dans B, c'est-à-dire

$$\mathrm{Ker}\ g \supseteq \mathrm{Ker}\ x^* \cap B$$

pour un élément $x \in X$. Donc, pour tout $b \in B$, $x^*(b) = 0$ implique $g(b) = 0$. Alors il existe un R-homomorphisme $h: x^*(B) \to I$ tel que $hx^*(b) = g(b)$. Par le lemme de Harada, on peut étendre h à $h': I^n \to I$, et h' est continu puisque I^n est discret.

Aussi $x^*: I^X \to I^n$ est continu, par définition de la topologie produit, donc $g' = h'x^*: I^X \to I$ est continu. Nous avons :

$$g'(b) = h'x^*(b) = hx^*(b) = g(b),$$

donc g' est l'extension désirée.

Nous écrivons :

$$S(A) = S_I(A) = \mathrm{Hom}_E(\mathrm{Cont}_R(A,I),I),$$

où $E = \mathrm{Cont}_R(I,I)$. On appelle $S(A)$ le <u>dual double</u>. Notons que $S(R)$ est le bicommutant de I.

<u>PROPOSITION 4.2</u> : <u>Soit</u> I <u>un R-module à droite quasi-injectif muni de la topologie discrète et soit</u> $A \in \mathrm{Cont}\ R$. <u>Alors</u> $S(A) = Q(A)$ <u>dans</u> $\mathrm{Cont}\ R$.

<u>Démonstration</u> : D'abord nous montrerons que $Q(A) \subseteq S(A)$. Etant donné $q \in Q(A)$, on veut prouver que

$$(f+f')q = (f)q+(f')q,$$

$$(ef)q = e((f)q),$$

pour tous $f,f' \in \mathrm{Cont}_R(A,I)$ et tout $e \in E$. Par exemple, nous allons vérifier la deuxième égalité, la première ayant une démonstration analogue.

On définit $\varphi,\psi \in \mathrm{Cont}_R(T(A),I)$ par

$$\varphi(t) = (ef)t, \quad \psi(t) = e((f)t),$$

pour tout $t \in T(A)$. Rappelons que $\eta(A): A \to T(A)$ était défini par $\pi_f\eta(A) = f$. Posons $\eta(A)(a) = \hat{a}$, alors $(f)\hat{a} = f(a)$. Donc, pour tout $a \in A$,

$$\varphi\eta(A)(a) = (ef)\hat{a} = (ef)(a) = e(f(a)) = e((f)\hat{a}) = \psi\eta(A)(a).$$

On a donc $\varphi\eta(A) = \psi\eta(A)$, et on déduit que $\varphi(q) = \psi(q)$, c'est-à-dire, que $(ef)q = e((f)q)$.

Deuxièmement, nous montrerons que $S(A) \subseteq Q(A)$. Soit $s \in S(A)$, et soient $\varphi, \psi \in \mathrm{Cont}_R(T(A), I)$ tels que $\varphi\eta(A) = \psi\eta(A)$. Pour assurer que $s \in Q(A)$, nous devons vérifier que $\varphi(s) = \psi(s)$. Puisque Cont R est une catégorie additive, nous pouvons prendre $\psi = 0$.

Puisque φ est continu, il existe $f: A \to I^n$ tel que $\mathrm{Ker}\ \varphi \supseteq \mathrm{Ker}\ f^*$. Donc, pour tout $t \in T(A)$, $f^*(t) = 0$ implique $\varphi(t) = 0$. Alors, il existe un R-homomorphisme $g: \mathrm{im}\ f^* \to I$ tel que $gf^*(t) = \varphi(t)$. Par le lemme de Harada, on peut étendre g à $g': I^n \to I$; donc,

$$g'f = g'f^*\eta(A) = gf^*\eta(A) = \varphi\eta(A) = 0.$$

Maintenant, soit $s \in S(A)$ un élément quelconque, et soient $K_j: I \to I^n$ les injections canoniques, pour $j = 1, \ldots, n$. Alors :

$$\varphi(s) = gf^*(s) = g'f^*(s) = g'(\sum_{j=1}^{n} K_j(f_j)s) = \sum_{j=1}^{n}(g'K_j)(f_j)s.$$

Puisque $g'K_j \in E$ et s est un E-homomorphisme, ceci est :

$$= (\sum_{j=1}^{n} g'K_j f_j)s = (g'f)s = (0)s = 0.$$

La démonstration est complète.

<u>PROPOSITION 4.3.</u> : <u>Soit</u> I <u>un R-module à droite quasi-injectif muni de la topologie discrète et soit</u> $A \in \mathrm{Cont}\ R$. <u>Alors les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(1) <u>Il existe</u> $f \in \mathrm{Cont}_R(A, I^n)$ <u>tel que</u> $\mathrm{Ker}\ \eta(A) = \mathrm{Ker}\ f$.

(2) $\mathrm{Cont}_R(A, I)$ <u>est de type fini en tant que E-module à gauche.</u>

(3) $S(A)$ <u>a la topologie discrète.</u>

<u>Démonstration</u> : Nous montrerons que $(1) \Longrightarrow (2) \Longrightarrow (3) \Longrightarrow (1)$.

Supposons (1), et soit $g \in \mathrm{Cont}_R(A,I)$. Alors $\mathrm{Ker}\, g \supseteq \mathrm{Ker}\, f$; donc, il existe un R-homomorphisme $h: f(a) \longmapsto g(a)$, qui peut être étendu à $h': I^n \to I$ par le lemme de Harada. Donc,

$$g(a) = h'f(a) = \sum_{i=1}^{n} h'K_i f_i(a),$$

où $h'K_i \in E$, et ceci montre que g est engendré par les f_i, $i = 1,\ldots,n$.

Supposons (2), et soient $f_1,\ldots,f_n$ une base de $\mathrm{Cont}_R(A,I) \to \mathrm{Cont}_R(A,I)$. Posons $f = \langle f_1,\ldots,f_n\rangle : A \to I^n$ et considérons un élément $s \in \mathrm{Ker}\, f^* \cap S(A)$. Alors $(f_1)s = 0,\ldots,(f_n)s = 0$; donc, $\sum_{i=1}^{n}(e_i f_i)s = 0$, pour tous $e_1,\ldots,e_n \in E$. On déduit que le voisinage fondamental de zéro $\mathrm{Ker}\, f^* \cap S(A) = 0$, donc $S(A)$ a la topologie discrète.

Supposons (3), c'est-à-dire que $\mathrm{Ker}\, f^* \cap S(A) = 0$ pour un $f \in \mathrm{Cont}_R(A,I^n)$. Soit $a \in \mathrm{Ker}\, f$, alors $\eta(A)(a) \in \mathrm{Ker}\, f^* \cap S(A) = 0$; donc $a \in \mathrm{Ker}\, \eta(A)$. On en déduit que $\mathrm{Ker}\, f \subseteq \mathrm{Ker}\, \eta(A)$. En tous cas, $\mathrm{Ker}\, \eta(A) \subseteq \mathrm{Ker}\, f$.

<u>REMARQUE 4.4</u> : Il est facile de vérifier la condition (1) si A est artinien. D'autre part, il est facile de vérifier la condition (2) si A est discret et $I = E(A)$ est l'enveloppe injective de A. En fait, dans ce cas l'inclusion $A \to I$ engendre $\mathrm{Hom}_R(A,I)$ en tant que E-module à gauche.

5. DES APPLICATIONS A Mod R.

Il est peut-être intéressant de pouvoir déduire des résultats sur les modules ordinaires des résultats sur les modules continus. La proposition suivante est connue si I est injectif [10].

PROPOSITION 5.1 : Supposons que I est un quasi-injectif de Mod R, $A \in$ Mod R et $\mathrm{Hom}(A,I)$ est de type fini en tant que E-module à gauche, où $E = \mathrm{End}_R(I)$; alors $S(A) = Q(A)$ dans Mod R.

Démonstration : Si A et I sont munis de la topologie discrète, on ne doit pas distinguer entre $T(A)$ dans Mod R et $T(A)$ dans Cont R. Pour le moment nous écrivons $Q(A)$ pour l'égalisateur de $T(A) \rightrightarrows T^2(A)$, tandis que le même égalisateur dans Cont R est $S(A)$, par la proposition 4.2. En outre, que $Q(A) \subseteq S(A)$ est un fait bien connu [10] ou facilement établi, comme dans la première partie de la démonstration de la proposition 4.2. Il reste à montrer que $S(A) \subseteq Q(A)$.

Soit $s \in S(A)$, et soient $\varphi, \psi : T(A) \rightrightarrows I$ tels que $\varphi\eta(A) = \psi\eta(A)$. Les homomorphismes φ et ψ ne doivent pas être continus, mais leurs restrictions à $S(A)$ sont continus, parce que $S(A)$ a la topologie discrète, d'après la proposition 4.3. On voit facilement que $S(A)$ est un sous-objet régulier de $T(A)$ dans Cont R (c'est une intersection d'égalisateurs de couples de morphismes $t \mapsto e(f)t$, $t \mapsto (ef)t$ et $t \mapsto (f+f')t$, $t \mapsto (f)t+(f')t$). Donc, par la proposition 4.1, on peut étendre $\varphi|S(A)$ et $\psi|S(A)$ à des R-homomorphismes continus $\varphi', \psi' : T(A) \rightrightarrows I$. Puisque l'image de $\eta(A)$ est continue dans $S(A)$, on a $\varphi'\eta(A) = \varphi\eta(A) = \psi\eta(A) = \psi'\eta(A)$. Donc, par la proposition 4.2, $\varphi'|S(A) = \psi'|S(A)$, c'est-à-dire, $\varphi|S(A) = \psi|S(A)$. On en déduit que $S(A) \subseteq Q(A)$.

Exemple 5.2 : Si $I = E(A)$, on appelle $Q(A)$ la "complétion rationnelle" de A [3]. Il résulte de la remarque 4.4 que la complétion rationnelle de A est $S(A)$.

Pour les considérations suivantes nous écrirons $S_I(A)$ à la place de $S(A)$ pour indiquer sa dépendance de I. Même si $Q_I(A) \neq S_I(A)$, on peut se demander si $Q_I(A) = S_J(A)$, pour quelque $J \neq I$. La réponse est "oui" si I est un module injectif, ce qu'on connait bien pour le cas spécial des anneaux [9, proposition 2.8]. Nous donnerons une démonstration pour le cas général des modules, qui est un peu plus simple.

PROPOSITION 5.3 : *Soient* $I \in \operatorname{Mod} R$ *un injectif et* $A \in \operatorname{Mod} R$, *alors* $Q_I(A) = S_J(A)$ *dans* $\operatorname{Mod} R$, *où*

$$J = E(Q_I(A)) \oplus E(E(Q_I(A))/Q_I(A)).$$

Démonstration : Supposons que $h : A \to B = Q_I(A)$ est le module de fractions de A par rapport à l'injectif I. Posons $J = E(B) \oplus E(E(B)/B)$, nous cherchons un isomorphisme $B \xrightarrow{\sim} S_J(A)$ tel que le triangle suivant commute :

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr] & & S_J(A) \\ & A \arrow[ul, "h"] \arrow[ur, "h'"'] & \end{tikzcd}$$

Nous nous rappelons [9] que la condition vérifiée par (B,h) est la suivante :

(a) $\operatorname{Ker} h$ et $\operatorname{Cok} h$ sont de I-torsion,

(b) B et $E(B)/B$ sont sans I-torsion.

Evidemment, B et $E(B)/B$ sont sans J-torsion. De plus, J est sans I-torsion, donc, Ker h et Cok h, étant de I-torsion, sont aussi de J-torsion. Donc, (B,h) est le module de fractions de A par rapport à J.

D'autre part, puisque Ker h est de J-torsion et $h:A \to B \subseteq J$, il résulte de la proposition 4.3 que $\mathrm{Hom}_R(A,J)$ est un $\mathrm{End}_R(J)$-module à gauche de type fini (en fait, monogène). Donc, par la proposition 5.1, $\mathrm{Cok}\ h' = S_J(A)/\mathrm{im}\ h' = Q_J(A)/\mathrm{im}\ h'$ est de J-torsion. En tout cas, $\ker h' = \mathrm{Ker}\ \eta(A)$ est de J-torsion. De plus, si on écrit $B' = S_J(A) = Q_J(A)$, on voit que B' et $E(B')/B'$ sont sans J-torsion. Donc (B',h') est aussi un module de fractions de A par rapport à J. On en déduit que le triangle ci-dessus commute.

6. LE THEOREME DE DENSITE.

Si le module quasi-injectif I est complètement réductible (semi-simple), on peut remplacer la proposition 4.2 par la généralisation suivante du théorème de Jacobson [7].

PROPOSITION 6.1 : *Soit* I *un R-module à droite complètement réductible muni de la topologie discrète et soit* $A \in \mathrm{Mod}\ R \to \mathrm{Cont}\ R$. *Alors* $A \to S(A)$ *est "dense" dans le sens suivant* :

$$\forall f_1,\dots,f_n \in \mathrm{Cont}_R(A,I)\ \forall_{s\in S(A)}\ \exists_{a\in A} (f_1)s = f_1(a) \ \dots\ (f_n)s = f_1(a).$$

Démonstration : (inspirée de [12]) : D'abord nous considérons le cas $n = 1$. On se donne $f \in \mathrm{Cont}_R(A,I)$ et $s \in S(A)$. Puisque I est complètement réductible, $f(A) = eI$, pour quelque $e = e^2 \in E$, donc, $f = ef$ et

$$(f)s = (ef)s = e((f)s) = f(a),$$

pour quelque $a \in A$.

Pour le cas général, supposons que $f_1,\ldots,f_n \in \mathrm{Cont}_R(A,I)$, alors $f = \langle f_1,\ldots,f_n\rangle \in \mathrm{Cont}_R(A,I^n)$. Puisque I^n est aussi complètement réductible, nous pouvons appliquer le cas spécial, qui était déjà démontré, et en déduire le résultat.

On peut interpréter le résultat en disant que l'image de $A \to S(A)$ est dense dans $S(A)$ pour la topologie "finie" de $S(A)$, c'est-à-dire la topologie induite par la topologie produit de $T(A)$, lequel module est une puissance du module discret I.

<u>Remarque 6.2</u> : Supposons que A a la topologie <u>I-adique</u>, c'est-à-dire, un voisinage fondamental de zéro est de la forme $\mathrm{Ker}\, f$, où $f \in \mathrm{Hom}_R(A,I^n)$. Alors $S(A)$ est la complétion séparée de A. Si A est déjà séparé et complet, il en résulte que l'homomorphisme canonique $A \to S(A)$ est un isomorphisme.

Goldman [5] a montré récemment qu'un anneau R est isomorphe à un produit direct d'anneaux d'endomorphismes d'espaces vectoriels si et seulement si il est séparé et complet dans une topologie qu'il appelle "intrinsèque" : les voisinages fondamentaux de zéro sont de la forme $e_1{}^r \cap \ldots \cap e_n{}^r$, où les e_i sont des éléments idempotents tels que Re_i sont des idéaux à gauche minimaux. (J'ai pris la liberté d'échanger droite et gauche).

On peut déduire une partie du résultat de Goldman des condisérations ci-dessus, si on vérifie que la topologie intrinsèque est la topologie I-adique pour un I convenable. En fait, supposons que R est semi-premier et que I est le socle de R. Alors un voisinage fondamental de zéro dans R pour la topologie I-adique est une intersection finie de $i^r = \{r \in R \mid ir = o\}$, où $i \in I = Re_1 \oplus \ldots \oplus Re_n$. Maintenant $i^r \supseteq e_1{}^r \cap \ldots \cap e_n{}^r$, donc, les deux topologies coïncident.

REFERENCES

[1] N. BOURBAKI, Eléments de mathématiques, fasc. 27, Algèbre Commutative, Chapitres 1 et 2, Paris 1961.

[2] P.M. COHN, Free rings and their relations, London 1971.

[3] G.D. FINDLAY et J. LAMBEK, A generalized ring of quotients I,II, Can. Math. Bull. 1 (1958), 77-85, pp. 155-167.

[4] K.R. FULLER, On direct representations of quasi-injectives and quasi-projectives, Arch. Math. 20 (1969), pp. 495-502.

[5] O. GOLDMAN, A Wedderburn-Artin-Jacobson structure theorem, à paraître.

[6] M. HARADA, Note on quasi-injective modules, Osaka J. Math. 2 (1965), pp. 351-356.

[7] N. JACOBSON, Structure of rings, Providence 1964.

[8] R.E. JOHNSON et E.T. WONG, Quasi-injective modules and irreducible rings, J. London Math. Soc. 36 (1961), pp. 260-268.

[9] J. LAMBEK, Torsion theories, additive semanties and rings of quotients, Springer Lecture Notes in Math. 177, Berlin 1971.

[10] J. LAMBEK, Localization and completion, J. Pure and Applied Algebra 2 (1972), pp. 343-370.

[11] J. LAMBEK et B. RATTRAY, Localization at injectives in complete categories, Proc. Amer. Math. Soc. 41 (1973), pp. 1-9.

[12] S. LANG, Algebra, Reading 1965.

[13] L. SILVER, Noncommutative localization and applications, J. Alg. 7 (1967), pp. 44-76.

[14] C. TISSERON, Sur une classe d'anneaux, Comptes rendus Ac. Sc. Paris 270 (1970), pp. 1354-1356.

-:-:-:-:-:-:-

UNIVERSITE DE PARIS SUD

CENTRE D'ORSAY

-:-:-:-:-:-

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 11 du 4 Mars 1974

INTRODUCTION A LA THEORIE DE LA DEVIATION DANS LES ANNEAUX

par M-A. DUFUMIER

-:-:-:-:-:-

PRELIMINAIRES.

Déviation d'un ensemble ordonné.

Lorsqu'elle existe, la déviation d'un ensemble ordonné E, notée $\operatorname{dev} E$ sera obtenue par récurrence transfinie de la manière suivante :

$\operatorname{dev} E = -1$ si et seulement si E est muni de l'ordre discret $(a \leqslant b \iff a = b)$.

Supposons connue la classe D_α de tous les ensembles ordonnés de déviation $\beta < \alpha$, alors $\operatorname{dev} E = \alpha$ si et seulement si $E \notin D_\alpha$ et toute suite décroissante $a_o > a_1 > \dots > a_i > \dots$ d'éléments de E telle que pour tout i, $[a_{i+1}, a_i] \notin D_\alpha$ est finie. $[a_{i+1}, a_i]$ désigne l'ensemble des éléments x de E tels que $a_{i+1} \leqslant x \leqslant a_i$.

S'il n'y a pas d'ordinal α tel que $\operatorname{dev} E = \alpha$, nous dirons que E est sans déviation.

Si $F \subseteq E$ est muni de l'ordre induit par l'ordre de E, il est immédiat que $\operatorname{dev} F \leqslant \operatorname{dev} E$ à chaque fois que $\operatorname{dev} E$ existe.

Lemme : Soient E et F deux ensembles ordonnés. Alors $\operatorname{Dev} E \times F = \sup\{\operatorname{dev} E, \operatorname{dev} F\}$ à chaque fois que les deux membres de l'égalité existent. $E \times F$ est muni de l'ordre produit $(a,b) \leqslant (a',b') \iff a \leqslant a'$ et $b \leqslant b'$. Si E et F sont munis de l'ordre discret, il en est de même de $E \times F$ de telle sorte que $\operatorname{dev} E \times F = -1 = \sup\{\operatorname{dev} E, \operatorname{dev} F\}$.

Supposons que $E' \in D_\alpha$, $F' \in D_\alpha$ entraînent $\sup(\operatorname{dev} E', \operatorname{dev} F') = \operatorname{dev} E' \times F'$ et soient E et F deux ensembles ordonnés tels que $\sup(\operatorname{dev} E, \operatorname{dev} F) = \alpha$.

Soit $(a_o,b_o) > (a_1,b_1) > \ldots > (a_n,b_n) > \ldots$ une suite décroissante d'éléments de $E \times F$ alors $[(a_{i+1},b_{i+1}), (a_i,b_i)] \subseteq [a_{i+1},a_i] \times [b_{i+1},b_i]$ de telle sorte que :

$$\operatorname{dev}[(a_{i+1},b_{i+1}), (a_i,b_i)] \leqslant \operatorname{dev}[a_{i+1},a_i] \times [b_{i+1},b_i].$$

En outre, on peut trouver un entier N tel que pour tout $i \geqslant n$, $[a_{i+1},a_i] \in D_\alpha$ et $[b_{i+1},b_i] \in D_\alpha$. On en déduit :

$$\operatorname{dev}[(a_{i+1},b_{i+1}), (a_i,b_i)] \leqslant \sup\{\operatorname{dev}[a_{i+1},a_i], b_{i+1},b_i] < \alpha.$$

Notons que $E \times F$ n'appartient pas à D_α puisque pour tout $f \in F$, $\operatorname{dev} E = \operatorname{dev} E \times \{f\} \leqslant \operatorname{dev} E \times F$ et pour tout $e \in E$, $\operatorname{dev} F = \operatorname{dev}\{e\} \times F \leqslant \operatorname{dev} E \times F$.

On en déduit $\operatorname{dev} E \times F = \alpha$

cqfd.

I. DEVIATION OU DIMENSION DE KRULL D'UN MODULE.

Les anneaux sont supposés unitaires. Les modules seront des R-modules à droite unitaires.

Définition : Nous appellerons dimension de Krull du R-module M, ou déviation de M, la déviation du treillis des sous-modules de M.

Nous la noterons $K \dim M$ ou $\operatorname{dev} M$.

Remarque : Si $N \supseteq N'$ sont deux sous-modules de M, alors $[N',N]$ est isomorphe au treillis des sous-modules de N/N' de telle sorte que $\operatorname{dev}[N',N] = \operatorname{dev} N/N'$.

La déviation d'un anneau R sera la déviation du R-module à droite R_R.

Exemples : dev $M = 0 \iff M$ est un R-module artinien

dev $Z = 1$.

Lemme 1.1 (I) : Soit M un R-module à droite. Si N est un sous-module de M, alors

dev $M = \sup\{\text{dev } N, \text{dev } M/_N\}$ à chaque fois que les deux membres de l'égalité existent.

(II) Si R est un anneau, alors

dev $R = \sup\{\text{dev } M,\ M$ module de type fini $\}$ à chaque fois que les deux membres de l'égalité existent.

Démonstration : Soit $[0,N]$ le treillis des sous-modules de N, $[0,M/_N] \simeq [N,M)$ le treillis des sous-modules de $M/_N$, et $[0,M]$ le treillis des sous-modules de M.

Alors $[0,N]$ et $[N,M]$ sont inclus dans $[0,M]$ de telle sorte que :

dev $M \geqslant \sup\{\text{dev } N, \text{dev } M/_N\}$.

Réciproquement, on construit une application injective du treillis $[0,M]$ dans $[0,N] \times [N,M]$ en associant à tout sous-module M' de M le couple $(M' \cap N, M'+N)$. On en déduit :

dev$[0,M] \leqslant$ dev$[0,N] \times [N,M]$

de telle sorte que dev $M < \sup\{\text{dev } N, \text{dev } M/_N\}$.

(II) Par récurrence sur n et en utilisant (I), on montre que

dev R = dev $R^n \leqslant \sup\{\text{dev } M,\ M$ de type fini$\}$.

Réciproquement, si M est un R-module de type fini, on peut trouver une suite exacte de la forme $R^n \to M \to 0$. Alors (I) montre que

dev $M \leqslant$ dev R^n = dev R

cqfd

Corollaire 1.2 Toute image homomorphe d'un anneau R avec déviation est un anneau avec déviation inférieure ou égale à celle de R.

Proposition 1.3 Tout module noethérien est un module avec déviation.

Supposons que M soit un module noethérien sans déviation. La famille des sous-modules N de M telle que $M/_N$ soit sans déviation possède un élément maximal. On peut donc supposer que tout module quotient propre de M est avec déviation. Comme la classe des sous-modules propres de M, donc des modules quotients propres de M est un ensemble, on peut trouver un ordinal α tel que la déviation de tout module quotient propre soit inférieur à α.

On en déduit dev $M \leqslant \alpha$.

Proposition 1.4 Tout module non nul avec déviation est de dimension finie.

Rappelons qu'un module M est de dimension finie si l'on ne peut pas trouver une famille infinie de sous-modules de M dont la somme est directe.

Parmi les modules pour lesquels la proposition est fausse, nous pouvons en choisir un de déviation minimale α. On peut alors trouver une famille infinie de sous-modules $\mathcal{H}_i$ de M telle que :

$$M \supseteq \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_i .$$

Considérons la suite $M_o \supset M_1 \supset \dots \supset M_n \dots$ où pour tout n, $M_n = \bigoplus_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}_{2^n j}$.

Alors, pour tout n, la déviation de M_n/M_{n+1} est inférieure ou égale à α.

En outre M_n/M_{n+1} est isomorphe à $\bigoplus_{j=1(2)} \mathcal{H}_{2^n j}$. D'après la minimalité de α, dev $M_n/M_{n+1} = \alpha$. On a mis en évidence une suite infinie décroissante

$M = M_o \supsetneq M_1 \supsetneq \dots \supsetneq M_n \supsetneq M_{n+1} \supsetneq \dots$ telle que pour tout n, dev $M_n/M_{n+1} = \alpha$.

Ceci montre que dev $M > \alpha$ d'où une contradiction.

Corollaire 1.5 Soit M un module avec déviation.
Soit $\alpha = \sup\{\text{dev } M/E + 1,\ E \text{ sous-module essentiel de } M\}$. Alors $\text{dev } M \leqslant \alpha$.

En effet supposons $\text{dev } M > \alpha$. On peut alors trouver une suite infinie décroissante de sous-modules de M soit $M_o \supseteq M_1 \supseteq \dots \supseteq M_n$ telle que pour tout i, $\text{dev } M_i/M_{i+1} \geqslant \alpha$.

D'après la proposition 1.4, on peut trouver un indice n tel que $\dim M_n = \dim M_{n+1}$.

Soit $\mathcal{K}$ un complément relatif à M_n dans M. Alors $\mathcal{K} \oplus M_{n+1}$ est un sous-module essentiel dans M. En outre, M_n/M_{n+1} est isomorphe à

$$\mathcal{K} \oplus M_n/\mathcal{K} \oplus M_{n+1} \subseteq M/\mathcal{K} \oplus M_{n+1}.$$

On en déduit $\text{dev } M_n/M_{n+1} + 1 \leqslant \alpha$, d'où une contradiction.

II. MODULES NOTABLES.

Définitions. Soit M un R-module. Nous dirons que M est α notable si $\text{dev } M = \alpha$ et si $\text{dev } M' < \alpha$ pour toute image propre de M.

M est un module notable s'il existe un ordinal α tel que M soit α notable.

Un idéal à droite de R est notable s'il est notable pour sa structure de R-module.

Gordon et Robson utilisent le mot critique au lieu de notable.

Exemple : Un module artinien contient des sous-modules 0-notables. Ce sont les sous-modules simples.

Théorème 2.1 Soit M un module non nul avec déviation. Alors M contient un sous-module notable.

Soit $\alpha = \inf\{\text{dev } N,\ o \neq N \subseteq M\}$.

Alors il existe un sous-module N de M tel que $\text{dev } N = \alpha$. Tout sous-module non nul de N est avec déviation α. Si N n'est pas α notable, on peut trouver un sous-module non nul N_1 de N tel que $\text{dev } N/N_1 = \alpha$. En itérant le procédé, on construit une suite décroissante $N_0 = N \supset N_1 \supset \dots \supset N_i \supset N_{i+1} \supset \dots$ telle que pour tout i, $\text{dev } N_i/N_{i+1} = \alpha$. Cette suite est nécessairement finie. Or la construction ci-dessus ne peut s'arrêter que sur un module α notable

cqfd.

<u>Corollaire 2.2</u> <u>Supposons que tout sous-module non nul de M contienne un sous-module non nul avec déviation, alors M contient un sous-module essentiel qui est somme directe de sous-modules notables.</u>

Notons d'abord que M contient un sous-module notable. Nous dirons qu'une famille $\{\mathcal{N}_i\}$ de sous-modules notables de M est indépendante si la somme $\sum\limits_i \mathcal{N}_i$ est directe $\sum\limits_i \mathcal{N}_i = \bigoplus\limits_i \mathcal{N}_i$.

Si $\bigoplus\limits_i \mathcal{N}_i$ n'est pas essentielle dans M, soit K un complément relatif à $\bigoplus\limits_i \mathcal{N}_i$. Alors K contient un sous-module avec déviation, donc un sous-module notable B. La famille $\{\mathcal{N}_i\} \cup \{B\}$ est alors une famille indépendante de sous-modules notables de M. Si $\{\mathcal{N}_i\}$ est maximale parmi les familles indépendantes de sous-modules notables de M, alors $\bigoplus\limits_i \mathcal{N}_i$ est un sous-module essentiel dans M.

<u>Proposition 2.3</u> <u>Les sous-modules non nuls d'un module α notable sont α notables.</u>

<u>En effet, si</u> $N \underset{\neq}{\subset} M$ $N \neq 0$, <u>alors</u> $\alpha = \text{dev } M = \sup\{\text{dev } N, \text{dev } M/N\} = \text{dev } N$. <u>Si</u> $C \underset{\neq}{\subset} N$, $C \neq 0$, <u>alors</u> $N/C \subset M/C$ <u>et dev</u> $N/C \leqslant \text{dev } M/C < \alpha$.

<u>Corollaire 2.4</u> <u>Soit</u> M <u>un module. Soit</u> $\{C_i, i \in I\}$ <u>une famille de sous-modules notables de</u> M <u>de déviations distinctes deux à deux. Alors la somme</u> $\sum_{i \in I} C_i$ <u>est une somme directe.</u>

Il suffit de démontrer le corollaire pour une famille finie de sous-modules notables. En effet, si la somme $\sum_i C_i$ n'est pas directe, il existe un indice j tel que $C_j \cap \sum_{i \neq j} C_i \neq 0$. Soit $x \in C_j \cap \sum_{i \neq j} C_i$. On peut alors trouver une famille finie d'indices $k_o \ldots k_n$ telle que $x \in C_j \cap \sum_{\ell=1}^{n} C_{k_\ell}$. La somme $C_j + \sum_{\ell=1}^{n} C_{k_\ell}$ n'est pas directe.

Nous allons maintenant démontrer le corollaire par récurrence sur le nombre d'éléments de la famille. Le corollaire est vrai pour $m = 1$.

Si $C_1 \ldots C_m$ est une famille de sous-modules notables de M tels que $\alpha_i = \operatorname{dev} C_i$. Supposons $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_m$. Alors

$$\operatorname{dev} \sum_{i=1}^{m-1} C_i = \operatorname{dev} \bigoplus_{i=1}^{m-1} C_i = \sup\{\operatorname{dev} C_i,\ i = 1 \ldots m-1\} = \alpha_{m-1}.$$

Soit $D = C_m \cap \sum_{i=1}^{m-1}$ alors $\operatorname{dev} D \leqslant \alpha_{m-1}$. Mais $D \subseteq C_m$ de telle sorte que $D = 0$ puisque tous les sous-modules non nuls de C_m sont de déviation α_m.

III. <u>MODULES MONOFORMES.</u>

<u>Définition</u> : Soit M un module non nul. Nous dirons que M est un module monoforme si pour tout sous-module non nul N de M alors tout homomorphisme non nul $f:N \to M$ est injectif.

<u>Proposition 3.1</u> <u>Tout module notable est monoforme.</u>

Soit C un module α-notable et soit D un sous-module non nul de C. D est module α-notable de telle sorte que toute image homomorphe propre de D est de déviation inférieure à α.

Soit f un homomorphisme de D dans C. Si $f \neq o$. $f(D)$ est un sous-module non nul de C de telle sorte que dev $f(D) = \alpha$. Ceci montre que $\ker f = o$.

Si R est un anneau avec déviation, il n'y a pas en général coïncidence entre la classe des modules monoformes et la classe des modules notables. On trouve un contre-exemple en considérant le module "matrice ligne supérieure" sur un anneau de matrices triangulaires supérieures à coefficients dans un corps.

Proposition 3.2 Soit C un module monoforme, alors :

(I) C est un module co-irréductible.

(II) Tout sous-module de C est monoforme.

(III) Si $\mathcal{X}$ est un sous-module non nul de C, alors tout homomorphisme non nul de $\mathcal{X}$ dans l'enveloppe injective de C est injective.

Démonstration : (I). Si C n'est pas co-irréductible, alors il existe $\mathcal{X} \subseteq C$ et $B \subseteq C$ tels que $\mathcal{X}+B = \mathcal{X} \oplus B \subseteq C$. Alors on peut trouver un homomorphe non nul $f : \mathcal{X} \oplus B \to \mathcal{X} \subseteq C$ qui n'est pas injectif.

(II) est évident.

(III) Soit f un homomorphisme non nul de $\mathcal{X}$ dans $E(C)$. Alors $f(\mathcal{X}) \quad C \neq o$. Il existe donc un sous-module B de $\mathcal{X}$ tel que la restriction f_B de f à B soit un homomorphisme de B sur $f(\mathcal{X}) \cap C$. Le noyau de f_B est alors $\ker f \cap C$. Or C étant monoforme $\ker f_B = o$ entraîne $\ker f = o$.

La proposition 3.2 est vraie en particulier pour les modules notables.

En dépit de (III), l'enveloppe injective d'un module notable ou monoforme n'est pas en général un module notable ou monoforme comme le montre l'exemple suivant.

Le $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$-module $2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est o-notable tandis que $E(2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$, isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ n'est ni notable ni monoforme.

<u>Définition</u> : Nous dirons qu'un anneau R est riche en monoforme si tout idéal à droite de R contient un sous-module monoforme.

Un anneau R avec déviation est riche en monoforme.

<u>Proposition 3.3</u> <u>Soit</u> R <u>un anneau et</u> Q <u>un anneau de fractions classique de</u> R.
(I) U <u>est un idéal à droite monoforme de</u> R <u>si et seulement si</u> UQ <u>est un idéal à droite monoforme de</u> Q.
(II) <u>Si</u> Q <u>est un anneau artinien, alors</u> R <u>est riche en monoforme.</u>

<u>Démonstration</u> (I) Soit U un idéal monoforme de R et soit UQ l'idéal à droite de Q engendré par U. Soit $\mathcal{K} \subseteq UQ$ un sous-Q-module de UQ et soit $f^o : \mathcal{K} \to UQ$ un Q-homomorphisme non nul. Alors il existe $x \in \mathcal{K}$ tel que $f^o(x) \neq o$. On peut écrire $x \in \mathcal{K}$ tel que $f^o(x) \neq o$. On peut écrire x sous la forme $x = (ya)b^{-1}$ où $y \in U$, $a \in \mathcal{K}$, $b \in \mathcal{K}$, b est inversible dans Q. Mais alors $ya \in U$ et $f^o(ya) \neq o$. Ainsi, on peut trouver un sous-$\mathcal{K}$-module V de U telle que la restriction f de f^o à V soit un homomorphisme non nul de R-module. D'après nos hypothèses $\ker f = o$. Or le R-module UQ est extension essentielle de U donc de V.

On en déduit $\ker f^o = o$.

Réciproquement. Soit f un homomorphisme non nul de $V \subseteq U$ dans V. Nous pouvons prolonger f en un Q-homomorphisme non nul de VQ dans UQ soit f^o. Alors $\ker f^o = o$ entraîne $\ker f = o$.

(II) Les idéaux minimaux d'un anneau artinien sont O-notables donc monoformes. On en déduit aisément le résultat désiré.

<u>Lemme 3.4</u> <u>Soit</u> R <u>un anneau semi-premier. Soit</u> C <u>un idéal à droite monoforme de</u> R. <u>Alors il existe</u> $c \in C$ <u>tel que</u> $r(c) \cap C = o$, $r(c)$ <u>désignant l'annulateur à droite de</u> c.

R étant semi-premier, $C^2 \neq o$. Il existe $c \in C$ tel que $cC \neq o$. $x \to cx$ définit alors un homomorphisme non nul de C dans C. Cet homomorphisme est injectif.

Rappelons qu'un G-anneau à droite est un anneau semi-premier, de dimension finie à droite et vérifiant la condition maximale pour les annulateurs à droite.

Théorème 3.5 Soit R un anneau. Alors R est un G-anneau à droite si et seulement si R est semi-premier, de dimension finie à droite et riche en monoforme.

La condition nécessaire découle directement du théorème de Goldie et de la proposition 3.1.

Réciproque. Soit C un sous-module monoforme de R. Alors il existe $c \in C$ tel que $r(c) \cap C = 0$ de telle sorte que $c \notin Z(R)$ où $Z(R)$ est l'idéal singulier à droite de R. $Z(R)$ est nul puisqu'il ne contient aucun sous-module monoforme. Le résultat découle alors d'une version standard du théorème de Goldie.

Corollaire 3.6 Soit R un anneau semi-premier avec déviation, alors R est un G-anneau à droite.

BIBLIOGRAPHIE.

P. GABRIEL et R. RENTSCHLER, Sur la dimension des anneaux et ensembles ordonnés. C.R. Acad. Sci. Paris 265 (1967) pp. 712-715.

R. GORDON et J.C. ROBSON, Krull dimension (à paraître).

UNIVERSITE DE PARIS SUD
CENTRE D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE
Conférence n° 12 du 11 Mars 1974

-:-:-:-:-:-

FACTORISATION DANS LES MODULES : MODULES FACTORABLES

Par Anne-Marie NICOLAS

-:-:-:-:-

Les résultats exposés ici font partie d'un travail rédigé dans un article à paraître intitulé : "Extensions factorielles et Modules factorables". Donnons, en quelques mots, le contenu de cet article.

Un module factoriel (cf. Bull. Sc. Math. 2e série, 95, 1971 : Modules factoriels par A.M. Nicolas) est un module M sur un anneau factoriel tel que tout élément s'écrive "de façon unique" : $x = a\xi$, $a \in A$, ξ irréductible dans M. J'étudie (§ 1) à quelle condition, si $A \subset B$ (où A et B sont deux anneaux factoriels) B est un A-module factoriel. Je montre (§ 2) que tout module réflexif sur un anneau factoriel est un module factoriel. Les modules factorables (§ 3) sont définis comme étant les modules dans lesquels tout élément s'écrit de façon unique $x = a\xi$, A n'étant plus nécessairement factoriel. Les propriétés de ces modules sont étudiées aux paragraphes 4 et 5. On étudie les modules factorables de rang fini (§ 6), les modules factorables sur les anneaux de valuation discrète. On démontre enfin que, si A est un anneau de Zariski, et si E est un A-module de type fini, tel que $\hat{E}$ soit un A-module factorable, alors E est un A-module factorable.

Pour la rédaction de cet exposé, je me bornerai donc à énoncer sans démonstration les théorèmes dont je parlerai à ce séminaire. Les références entre parenthèses renvoient à l'article cité ci-dessus. Je joins d'autre part une bibliographie.

1. MODULES FACTORABLES. DEFINITION.

Théorème : Soit M un A-module sans torsion sur un anneau A commutatif, unitaire, intègre. Les propriétés (I) et (II) sont équivalentes.

(I) Tout élément de M s'écrit $x = a\xi$, avec $a \in A$, ξ irréductible dans M.

Tout élément irréductible est primitif.

(II) Tout élément de M s'écrit "de manière unique" $x = a\xi$ où $a \in A$ et ξ irréductible dans M (l'expression de manière unique signifiant :

$$x = a\xi = b\eta \Longrightarrow \exists \varepsilon \in A^* \text{ tel que } a = \varepsilon b \text{ et } \eta = \varepsilon\eta.$$

A^* étant le groupe des unités de A).

[cf. théorème 3.1].

Rappelons que :

$x \in M$ est élément irréductible de M si :

$$x = ay, \quad a \in A, \quad y \in M \Longrightarrow a \in A^*.$$

$x \in M$ est élément primitif de M si :

$$az \in Ax, \quad a \in A, \quad z \in M \Longrightarrow z \in Ax.$$

Définition : On appellera module factorable tout module satisfaisant aux conditions (I) ou (II) du théorème précédent.

Exemples : Si A est factoriel, alors : M factorable $\Longleftrightarrow$ M factoriel. Tout A-module monogène libre de rang 1 est factorable.

Si K est le corps des fractions de A, les sous A-modules de K qui sont factorables sont les sous A-modules monogènes.

Tout espace vectoriel sur un corps L est un L-module factorable.

Théorème : Soit M un module sans torsion sur un anneau A commutatif unitaire, intègre, de corps des fractions K. Les propriétés (a) et (b) sont équivalentes :

(a) M est factorable.

(b) Dans l'espace vectoriel $K \otimes_A M$, l'intersection de toute droite avec M est un sous A-module de M, libre de rang 1.

[cf. théorème 3.7].

2. PROPRIETES DES MODULES FACTORABLES.

Si M est un A-module factorable alors : $aM \subset bM \Longrightarrow b|a$.

Si A n'est pas un corps, et si M est un A-module factorable, alors M est réduit (c'est-à-dire que M ne contient aucun sous-module divisible non nul). [Propriété 4.3].

Tout facteur direct d'un module factorable est factorable [4.4].

Tout sous-module pur d'un module factorable est un module factorable [théorème 4.6]

Si M est un module sans torsion de type fini, sur un anneau A, noethérien, intégralement clos, qui est factorable, alors M est réflexif [théorème 4.8].

3. SOMMES DIRECTES ET PRODUITS DIRECTS DE MODULES FACTORABLES.

Théorème : Pour que $M = A \times A$ soit un A-module factorable, il faut et il suffit que A vérifie la condition suivante : pour tout couple (a,b) d'éléments de A il existe un pgcd (condition δ). [cf. théorème 5.1].

Conséquence : Si M est un A-module factorable libre de rang supérieur à 1, alors A vérifie la condition δ.

Si A vérifie la condition δ tout produit de deux modules factorables est un module factorable, et toute somme directe de modules factorables est factorable.

Si A est noethérien, pour que $M = A \times A$ soit factorable, il faut et il suffit que A soit un anneau factoriel.

Si M est un module de type fini de rang $n \geqslant 2$, sur un anneau de Dedekind, alors M est un module libre de rang n et l'anneau A est principal.

4. MODULES FACTORABLES DE RANG FINI.

Tout module factorable de rang 1 est un module libre de rang 1 (proposition 6.1).

Mais il existe un A-module factorable M sur un anneau factoriel qui est de rang 2 et qui n'est pas libre: on prend

$A = \mathbb{R}[X,Y,Z]/_{(X^2+Y^2+Z^2-1)}$; M est un A-module engendré par trois générateurs

dx, dy, dz liés par la relation $xdx+ydy+zdz = 0$ (x, y et z désignant les images de X, Y, Z par l'application canonique $\mathbb{R}[X,Y,Z] \to A$).

Il existe un $\mathbb{Z}$-module de rang 2 factorable qui n'est ni libre ni de type fini. On construit une suite d'entiers premiers positifs telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ $|a| < n$ et $|b| < n \Longrightarrow p_n$ ne divise pas $a-b(1+p_1+p_1p_2+\ldots+p_1\ldots p_{n-1})$.

On prend pour M le sous $\mathbb{Z}$-module de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ engendré par la suite (x_n) définie par :

$$x_0 = (1,0), \quad x_1 = (0,1), \ldots, x_{n+1} = \frac{1}{p_n}(x_0+x_n).$$

[cf. exemple 6.3].

Les exemples précédents apportent donc des réponses négatives aux deux questions suivantes :

Un module factorable de rang fini est-il de type fini ?

Un module factorable de rang fini est-il libre ?

Mais cependant, si A est un anneau de valuation discrète complet, tout module factorable de rang dénombrable est libre (6.4). Si A est un anneau de valuation discrète non complet, il existe un A-module factorable de rang 2 qui n'est pas libre (Exemple 7.4).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (N.), Algèbre. Paris Hermann.

[2] BOURBAKI (N.), Algèbre commutative. Paris Hermann.

[3] CARTAN (H.) et EILENBERG (S.), Homological algebra. Princeton University Press.

[4] KAPLANSKY (I.), Infinite Abelian Groups. Ann Arbor, The University of Michigan Press, Revised Edition, 1969.

[5] LAZARD (D.), Autour de la platitude (Thèse). Bull. Soc. Math. France, t. 97, 1969 (fasc. 1).

[6] NICOLAS (A-M.), Modules factoriels. Séminaire Algèbre et Théorie des Nombres (Paris), 20 (1966-1967), n° 10.

[7] NICOLAS (A-M.), Modules factoriels ; Bull. Sc. Math. 2e série 95, 1971, pp. 33-52.

[8] SAMUEL (P.) et ZARISKI (O.), Commutative Algebra ; Princeton Van Nostrand Company, 1958-1960.

[9] SAMUEL (P.), Anneaux gradués factoriels et modules réflexifs. Bull. Soc. Math. France, t. 92, 1964, pp. 237-249.

[10] SAMUEL (P.), Sur les anneaux factoriels, Bull. Soc. Math. France, t. 89, 1961, pp. 155-173.

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

-:-:-:-

Conférence n° 13 du 18 Mars 1974

par Mme Danièle SALLES

-:-:-:-:-:-

ANNEAUX SEMI-ARTINIENS NON COMMUTATIFS

La notion d'anneau semi-artinien a été introduite en 1968 par Nastacescu et Popescu(8). Nous nous proposons ici de caractériser ces anneaux grâce aux notions utilisées par Popescu dans "Spectre à gauche d'un anneau"(2), puis de construire sur eux une décomposition primaire des modules.

I. LES ANNEAUX SEMI-ARTINIENS : DEFINITIONS ET PROPRIETES.

Les anneaux sont unitaires, non nécessairement commutatifs, les A-modules sont à gauche unitaires.

On dit qu'un anneau est semi-artinien à gauche si tout A-module à gauche non nul contient un A-module simple. Un anneau A est semi-artinien si et seulement si

a) Tout A-module M est extension essentielle de son socle (le socle est somme de tous les modules simples inclus dans M),

ou b) Tout injectif est enveloppe d'une somme directe de modules simples.

Quand A est commutatif et semi-artinien tout idéal premier est maximal.

II. UNE CARACTERISATION DES ANNEAUX SEMI-ARTINIENS NON COMMUTATIFS.

Définitions.

a) Système localisant (ou topologisant et idempotent). On dit qu'une famille F d'idéaux à gauche de A est un système localisant si

- $F \neq \emptyset$
- $\mathfrak{a} \in F$ et $\mathfrak{b} \supset \mathfrak{a}$ entraîne $\mathfrak{b} \in F$
- $\mathfrak{a} \in F$ et $\mathfrak{b} \in F$ entraîne $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \in F$
- $\mathfrak{a} \in F$ et $x \in A$ entraîne $\mathfrak{a} : x \in F$
- $\mathfrak{a} \in F$ et $\forall x \in \mathfrak{a}$ $\mathfrak{b} : x \in F$ entraîne $\mathfrak{b} \in F$.

Exemples : $F_{\mathfrak{a}} = \{\mathfrak{b} \subset A$ tel que $\mathrm{Hom}(A/_{\mathfrak{b}}, E(A/_{\mathfrak{a}})) = 0\}$ est un système localisant appelé système localisant défini par $\mathfrak{a}$.

$F(X) = \{\mathfrak{b} \subset A$ tel que $\mathrm{Hom}(A/_{\mathfrak{b}}, E(X)) = 0\}$ est le système localisant défini par le module X.

b) Sous-catégorie localisante (Gabriel, Goldman). Soit $\mathfrak{F}$ une sous-catégorie pleine de Mod A, on dit qu'elle est localisante si

1) Pour toute suite exacte de Mod A :

$$0 \to X' \to X \to X'' \to 0$$

on a $$X \in \mathfrak{F} \iff X' \in \mathfrak{F} \text{ et } X'' \in \mathfrak{F} .$$

2) Pour toute famille de modules $(X_i)_{i \in I}$ telle que $\forall i \in I$ $X_i \in \mathfrak{F}$ on a $\bigoplus_{i \in I} X_i \in \mathfrak{F}$.

Un système localisant F permet de définir une sous-catégorie localisante $\mathfrak{F}$ de la façon suivante : $\mathfrak{F}$ est la sous-catégorie pleine de Mod A dont les objets sont les A-modules F négligeables (M est F négligeable si $\forall x \in M$ Ann $x \in F$).

c) Si $\mathfrak{F}$ est une sous-catégorie localisante il existe une catégorie quotient notée Mod $A/_{\mathfrak{F}}$. On notera T le foncteur Mod $A \to$ Mod $A/_{\mathfrak{F}}$ et S le foncteur injection canonique : Mod $A/_{\mathfrak{F}} \to$ Mod A. et on identifiera $T \circ S$ à l'identité sur Mod $A/_{\mathfrak{F}}$.

d) Premier à gauche (Popescu (2), voir aussi Goldman (6)). On dit qu'un système localisant F d'idéaux à gauche de A est un premier à gauche de A si la catégorie quotient Mod $A/\mathfrak{F}$ (ou $\mathfrak{F}$ est la sous-catégorie localisante associée à F) n'a qu'un type d'objet simple U dont l'enveloppe injective $E(U)$ est un cogénérateur (on a alors pour tout objet Y non nul de Mod $A/\mathfrak{F}$ $\mathrm{Hom}(Y,E(U)) \neq 0$). Si A est commutatif F est premier si et seulement si $F = F_{\mathfrak{p}}$ ou $\mathfrak{p}$ est un idéal premier.

THEOREME I. Soit A un anneau unitaire non commutatif; alors A est semi-artinien à gauche si et seulement si

1) Tout premier à gauche F admet un idéal de définition maximal $\mathfrak{m}$ (i.e. $F = F_{\mathfrak{m}}$).

2) Tout injectif indécomposable Q est premier (i.e. $F(Q)$ est un premier à gauche).

3) Tout A module à gauche est riche en coirréductibles.

Condition nécessaire.

Soit F un premier à gauche de A, $\mathfrak{F}$ la catégorie localisante associée, $E(U)$ un cogénérateur de Mod $A/\mathfrak{F}$. On montre que $S(E(U))$ est un injectif indécomposable de Mod A et que $F = F(S(E(U)))$. Or A est semi-artinien, tout injectif indécomposable est de la forme $E(A/\mathfrak{m})$ où $\mathfrak{m}$ est maximal, d'où $F = F(S(E(U))) = F(E(A/\mathfrak{m})) = F_{\mathfrak{m}}$

Condition suffisante.

Soit N coirréductible inclus dans M, Q son enveloppe injective ; alors $F(Q) = F_{\mathfrak{m}} = F(E(A/\mathfrak{m}))$ et Popescu a montré qu'alors $Q \cong E(A/\mathfrak{m})$, ce qui montre que M contient un A-module simple isomorphe à $A/\mathfrak{m}$.

III. DECOMPOSITION PRIMAIRE DES MODULES SUR UN ANNEAU SEMI-ARTINIEN.

Définitions (Popescu).

a) Module coprimaire (primaire au sens de Goldman). Un A-module X est dit coprimaire si $F(X)$ est un premier à gauche et si pour tout sous-module non nul X' de X on a $F(X) = F(X')$.

b) Idéal $\mathfrak{m}$-primaire. Un idéal à gauche I est $\mathfrak{m}$ primaire si $A/_I$ est coprimaire de type $\mathfrak{m}$ (i.e. $F_I = F_{\mathfrak{m}}$).

c) On dit qu'un module N inclus dans un module M est $\mathfrak{m}$-primaire dans M si $\mathrm{Socle}(M/_N)$ est isotypique de type $A/_{\mathfrak{m}}$.

Propriétés élémentaires.

Soit A un anneau semi-artinien, alors :

- Pour tout idéal irréductible $\mathfrak{J}$ il existe un idéal à gauche maximal $\mathfrak{m}$ tel que $\mathfrak{J}$ soit $\mathfrak{m}$ primaire. (On a alors $E(A/_{\mathfrak{J}}) \simeq E(A/_{\mathfrak{m}})$).
- Si $\{o\}$ est $\mathfrak{m}$ primaire dans un A-module M alors :
  i) pour tout $x \in M$ $\mathrm{Ann}\, x$ est $\mathfrak{m}$ primaire,
  ii) $\{o\}$ est $\mathfrak{m}$ primaire dans $E(M)$.

Définitions.

On dira qu'un idéal maximal $\mathfrak{m}$ est associé au module M si M contient un A-module simple isomorphe à $A/_{\mathfrak{m}}$. On notera $\mathrm{Ass}\, M$ l'ensemble des classes d'idéaux associés à M modulo la relation :

$$\mathfrak{m}\ R\ \mathfrak{m} \iff A/_{\mathfrak{m}} \simeq A/_{\mathfrak{m}'}.$$

Nous noterons $M_{\mathfrak{m}}$ le "localisé" de M en $\mathfrak{m}$ au sens suivant : $M_{\mathfrak{m}} = T(M)$ où T est le foncteur $\mathrm{Mod}\, A \to \mathrm{Mod}\, A/_{\mathfrak{F}}$ ($\mathfrak{F}$ définie par le système localisant $F_{\mathfrak{m}}$).

Si $M_{\mathfrak{m}} \neq \{o\}$ nous dirons que $\mathfrak{m} \in \mathrm{Supp}\, M$.

Remarque : Lorsque l'anneau est semi-artinien commutatif on démontre que ces définitions coïncident avec les définitions habituelles.

Proposition 3. Soient A un anneau semi-artinien et $0 \to N \to M \to M/_N \to 0$ une suite exacte de A-modules, alors :

a) $\mathrm{Ass}\ M \subset \mathrm{Ass}\ N \cup \mathrm{Ass}\ M/_N$,

b) $\mathrm{Supp}\ M = \mathrm{Supp}\ N \cup \mathrm{Supp}\ M/_N$.

Preuve de a). On utilise le fait que $E(M)$ est un sous-module de $E(N) \oplus E(M/_N)$: les composantes simples du socle de M sont nécessairement des composantes simples de $N \oplus M/_N$.

Preuve de b). Pour montrer que $\mathrm{Supp}\ M \subset \mathrm{Supp}\ N \cup \mathrm{Supp}\ M/_N$, on considère $\mathfrak{m} \in \mathrm{Supp}\ M$, c'est-à-dire $\exists\, x \in M$ tel que $\mathrm{Ann}\ x \notin F_{\mathfrak{m}}$ ou encore : il existe $f \neq 0$ et $f \in \mathrm{Hom}(A/_{\mathrm{Ann}\ x}, E(A/_{\mathfrak{m}}))$ et on montre qu'il existe un morphisme non nul de N dans $E(A/_{\mathfrak{m}})$ ou de $M/_N$ dans $E(A/_{\mathfrak{m}})$.

Proposition 4. Soit A un anneau semi-artinien, M un A-module, N un sous-module de M, alors

$$N = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Ass}\ M/_N} N(\mathfrak{m}) \quad \text{où } N(\mathfrak{m}) \text{ est } \mathfrak{m} \text{ primaire dans } M.$$

La décomposition est réduite et unique au sens suivant :

On dira qu'une décomposition primaire $N = \bigcap_{i \in I} N_i$ est réduite si $\forall i_o \in I \ \bigcap_{I-i_o} N_i \neq N_{i_o}$. Si on note $\mathrm{Ass}\ M/_{N_i} = \{\mathfrak{m}_i\}$ alors

$i \neq j \Longrightarrow \mathfrak{m}_i \neq \mathfrak{m}_j$. On dira qu'une décomposition primaire réduite est unique si toute autre décomposition réduite, $N = \bigcap_{i' \in I'} N_{i'}$, est telle que $\mathrm{Card}\ I = \mathrm{Card}\ I'$ et $\bigcup_I \mathrm{Ass}\ M/_{N_i} = \bigcup_{I'} \mathrm{Ass}\ M/_{N_{i'}}$.

Lemme. Soit M un A-module et $(M_i)_{i \in I}$ une famille de sous-modules de M telle que $\bigcap_{i \in I} M_i = \{0\}$ alors $\mathrm{Ass}\ M \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathrm{Ass}\ M/_{M_i}$. Soit $\mathfrak{m} \in \mathrm{Ass}\ M$, alors $\exists\, i \in I$ tel que $M_i \not\supset A/_{\mathfrak{m}}$ donc $M_i \cap A/_{\mathfrak{m}} = \{0\}$ et $M/_{M_i}$ contient un sous-module simple isomorphe à $A/_{\mathfrak{m}}$.

<u>Preuve.</u> L'existence de $N(\mathfrak{m})$ sous-module $\mathfrak{m}$ primaire dans M se démontre en utilisant une technique proche de celle de Bourbaki (1) dans le cas des anneaux noethériens commutatifs. La famille des sous-modules N de M qui vérifient $\mathrm{Ass}\ N \subset \mathrm{Ass}\ M - \{\mathfrak{m}\}$ est inductive, on appelle $N(\mathfrak{m})$ un élément maximal et on montre que $\mathrm{Ass}\ M/_{N(\mathfrak{m})} = \{\mathfrak{m}\}$ alors $\{o\} = \bigcap_{\mathrm{Ass}\ M} N(\mathfrak{m})$ est une décomposition primaire réduite de $\{o\}$ d'après le lemme.

Pour montrer que la décomposition est unique on pose $\bar{N}_{i_o} = \bigcap_{i \in I - i_o} N_i$ si $\bigcap_I N_i$ est une autre décomposition primaire réduite de $\{o\}$, alors $\bar{N}_{i_o} \cap N_{i_o} = \{o\}$ et $\mathrm{Ass}\ \bar{N}_{i_o} = \mathrm{Ass}\ M/_{N_{i_o}}$. On applique de nouveau le lemme pour montrer que $\mathrm{Ass}\ M = \bigcup_{i_o \in I} \mathrm{Ass}\ M/_{N_{i_o}} = \bigcup_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Ass}\ M} \mathrm{Ass}\ M/_{N(\mathfrak{m})}$ et on montre facilement l'égalité :

$$\mathrm{Card}\ I = \mathrm{Card}\ \mathrm{Ass}\ M.$$

Pour passer à $N \neq \{o\}$ on applique les formules précédentes avec $\mathfrak{m} \in \mathrm{Ass}\ M/_N$.

-:-:-:-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

(1) BOURBAKI, Algèbre Commutative, Ch. 3 et 4.

(2) POPESCU, Le spectre à gauche d'un anneau. Journal of Algebra, 19, pp. 213-228, (1971).

(3) GABRIEL, Bull. Soc. Math. de France, t. 90, 1962.

(4) SALLES, Comptes rendus Acad. Sci., t. 275, 1972, p. 1223.

(5) SALLES, Comptes rendus Acad. Sci., séance du 19 nov. 1973.

(6) GOLDMAN, Rings on modules of quotients. J. of Algebra, 13, 1969, pp. 10-47.

(7) NASTACESCU, J. of Algebra, Vol. 14, nº 2, février 70.

(8) NASTACESCU et POPESCU, Anneaux semi-artiniens, Bull. Soc. Math. de France, 96, 1968, pp. 357-368.

-:-:-:-:-:-

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

UNIVERSITE DE PARIS - SUD

CENTRE D'ORSAY

-:-:-:-:-

Conférence n° 14 des 22 et 29 Avril

ANNEAUX DE GROUPE HEREDITAIRES ET SEMI-HEREDITAIRES

par J.M. GOURSAUD et J. VALETTE

-:-:-:-:-:-:-:-

(à paraître)....

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 15 du 6 Mai 1974

-:-:-:-:-:-

"HOMOMORPHISMES ET EXTENSIONS DE MODULES SUR A_1 ET SUR DES ANNEAUX ASSOCIES"

par S.K. BAMBA

d'après J.C.Mc Connell et J.C. Robson

-:-:-:-:-:-:-:-:-

RESUME.

Soit Φ un corps de caractéristique o.

Soit A_1 la Φ-algèbre associative unifère à deux générateurs x et y assujettis à la relation $xy-yx = 1$.

A_1 est l'algèbre de Weyl à deux générateurs ; A_1 est isomorphe à l'anneau $\Phi[y][x]$ où $\Phi[y]$ est l'anneau des polynômes sur Φ à une indéterminée y, et $\Phi[y][x]$ est l'anneau des polynômes non commutatifs sur $\Phi[y]$ à une indéterminée x avec $xf-fx = f' = df/dy$, $f \in \Phi[y]$.

Le but de l'exposé est d'étudier les A_1-modules simples, leurs homomorphismes et extensions. En application on résoud les deux conjectures suivantes d'Eisenbud, D. et Robson, J.C. :

1) Un module de torsion, cyclique, indécomposable, sur un domaine d'intégrité, non commutatif, de Dedekind est-il nécessairement universel ?

2) Un domaine d'intégrité, noethérien, héréditaire, admettant des modules de torsion indécomposables est-il cyclique ?

Dans ce travail, on établit que la réponse à ces deux questions est négative.

Voici les références bibliographiques :

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.C.Mc CONNELL and J.C. ROBSON, Homomorphisms and Extensions of modules A_1 and Related Rings. A paraître.

[2] EISENBUD D. and ROBSON J.C., Modules over Dedekind prime rings. J. Algebra 16 (1970), pp. 67-85.

[3] J. DIXMIER, Sur les Algèbres de Weyl. Bull. Soc. Math. France (96), 1968.

[4] J.C. ROBSON, Idealisers and hereditary noetherien prime rings. J. Algebra (22) number 1, July 1972.

-:-:-:-:-:-

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 16 du 13 Mai 1974

SUR L'INTERSECTION DES PUISSANCES DU RADICAL D'UN T-ANNEAU NOETHERIEN.

par G. CAUCHON

-:-:-:-

Tous les anneaux considérés dans cet exposé sont unitaires. Le problème de l'étude de l'intersection des puissances du radical de Jacobson d'un anneau non commutatif noethérien a été particulièrement étudié par A.V. Jategaonkar qui a construit dans [5] un anneau commutatif principal D, un homomorphisme d'anneaux injectif $\rho : D \to D$ tel que l'anneau $R = D < x, \rho >$ des séries entières formelles à coefficients dans D, muni de l'addition usuelle et de la multiplication définie par la règle : $xd = \rho(d)x$ pour tout $d \in D$, satisfasse aux propriétés suivantes :

Propriété 1 : R est intègre et tous ses idéaux à gauche sont principaux (de sorte que R est noethérien à gauche).

Propriété 2 : Les idéaux à gauche de R sont tous bilatères.

Propriété 3 : Si J désigne le radical de Jacobson de R,

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} J^n.$$

L'existence d'un tel anneau est intéressante car elle montre que, en général, dans un anneau noethérien à gauche (et même principal à gauche), non commutatif, l'intersection des puissances du radical de Jacobson est non nulle.

Rappelons (voir [7]) qu'un anneau A est un T-anneau à gauche s'il est noethérien à gauche et si, étant donnés deux A-modules à gauche injectifs indécomposables E_1 et E_2, on a :

$$\mathrm{Ass}(E_1) = \mathrm{Ass}(E_2) \Longrightarrow E_1 \simeq E_2$$

(Pour tout module M, $\mathrm{Ass}(M)$ désigne l'ensemble des idéaux premiers associés à M au sens de [6]).

On sait qu'un anneau A noethérien à gauche est un T-anneau à gauche si et seulement si il satisfait à <u>la condition de Krause</u> :

"Pour tout idéal premier $\mathcal{P}$ de A, pour tout idéal à gauche I de A contenant $\mathcal{P}$, si $\frac{I}{\mathcal{P}}$ est essentiel dans $\frac{A}{\mathcal{P}}$, alors I contient un idéal bilatère $\mathcal{B}$ de A contenant $\mathcal{P}$ strictement", (voir, par exemple [8]).

En particulier, l'anneau R décrit précédemment, dont tous les idéaux à gauche sont bilatères, est un T-anneau à gauche et nous voyons que, <u>en général, dans un T-anneau à gauche, l'intersection des puissances du radical de Jacobson est non nulle.</u>

Ces questions ont été également étudiées par I.N. Herstein, qui a construit dans [2] un exemple d'anneau noethérien à gauche, à identité polynômiale, et dont l'intersection des puissances du radical de Jacobson est non nulle et par L.W. Small qui a montré dans [9] que, si un anneau A est une algèbre finie sur un anneau commutatif noethérien, alors l'intersection des puissances du radical de Jacobson de A est nulle. I.N. Herstein et L.W. Small ont également prouvé récemment dans [3] que, si A est un anneau noethérien bilatère vérifiant une identité standard, si J désigne le radical de Jacobson de A, et si on pose

$$J_1 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} J^n, \quad J_2 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} J_1^n, \ldots,$$

alors il existe un entier s tel que $J_s = 0$.

Le but de ce travail est d'établir le résultat suivant, dont les hypothèses ne semblent pas pouvoir être simplifiées, compte tenu des résultats rappelés précédemment : "Si A est un T-anneau à gauche, noethérien à droite, l'intersection des puissances du radical de Jacobson de A est nulle".

Nous aurons besoin pour ceci du résultat suivant, établi dans [1] :

THEOREME 1 : Soit A un anneau noethérien à gauche, les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) A est un T-anneau à gauche.

ii) A satisfait à la condition (H) de Gabriel :

"Pour tout A-module à gauche M de type fini, il existe un nombre fini $m_1, \ldots, m_n$ d'éléments de M tels que :

$$(0 \cdot. M) = (0 \cdot. m_1) \cap \ldots \cap (0 \cdot. m_n)".$$

(Nous notons, pour toute partie X de M :

$$(0 \cdot. X) = \{a \in A \mid aX = 0\}).$$

LEMME 2 : Soit A un T-anneau à gauche, I un idéal à gauche $\cap$-irréductible de A et $\mathfrak{B}$ le plus grand idéal bilatère de A, contenu dans I.

Alors l'anneau $\frac{A}{\mathfrak{B}}$ est extension essentielle (à gauche) de son socle à gauche.

Démonstration : Posons $M = \frac{A}{I}$; c'est un A-module à gauche monogène. L'intersection S des sous-modules non nuls de M est non nulle, c'est donc un sous-module simple de M et, M étant co-irréductible, M est extension essentielle du sous-module simple S.

Par ailleurs, d'après le théorème 1, il existe un nombre fini $m_1, \ldots, m_n$ d'éléments de M tels que :

$$\mathfrak{B} = (0 \cdot. M) = (0 \cdot. m_1) \cap \ldots \cap (0 \cdot. m_n).$$

Donc $\frac{A}{\mathfrak{B}}$, considéré comme un A-module à gauche, est isomorphe à un sous-module de

$$X = \frac{A}{(0 \cdot. m_1)} \oplus \ldots \oplus \frac{A}{(0 \cdot. m_n)} \cong Am_1 \oplus \ldots \oplus Am_n$$

$$\subseteq \underbrace{M \oplus \ldots \oplus M}_{n \text{ fois}} = Y$$

Y est extension essentielle du A-module semi-simple

$$\Sigma = \underbrace{S \oplus \ldots \oplus S}_{n \text{ fois}}.$$

Par suite, $\frac{A}{\mathfrak{B}}$ est extension essentielle du A-module semi-simple $\Sigma \cap \frac{A}{\mathfrak{B}}$; l'anneau $\frac{A}{\mathfrak{B}}$ est donc bien extension essentielle de son socle puisque ses idéaux à gauche coïncident avec ses sous-modules quand on le considère comme un A-module à gauche.

LEMME 3 : Soit A un anneau noethérien à gauche et à droite, J son radical de Jacobson et $a \in J$.

Alors $$\bigcap_{n=1}^{+\infty} Aa^n = 0.$$

Démonstration : A étant noethérien à gauche, il existe un entier k tel que : $(0^{\cdot}.\, a^k) = (0^{\cdot}.\, a^{k+1}) = \ldots = (0^{\cdot}.\, a^{k+p}) = \ldots$

Soit $$c \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} Aa^n.$$

Nous pouvons écrire :

$$c = \alpha_1 a = \alpha_2 a^2 = \ldots = \alpha_k a^k = \ldots = \alpha_{k+p} a^{k+p} = \ldots \qquad (\alpha_i \in A).$$

Nous avons, pour tout entier $p \geqslant 0$:

$$\alpha_{k+p} a^{k+p} = \alpha_{k+p+1} a^{k+p+1} \Longrightarrow$$

$$(\alpha_{k+p} - \alpha_{k+p+1} a) a^{k+p} = 0 \Longrightarrow$$

$$(\alpha_{k+p} - \alpha_{k+p+1} a) a^{k} = 0 \Longrightarrow$$

$$\alpha_{k+p} a^{k} = \alpha_{k+p+1} a^{k+1} \qquad (1).$$

Par suite, $\alpha_{k+p} a^k \in \alpha_{k+p+1} a^k A$, ce qui nous permet de considérer la suite croissante d'idéaux à droite de A :

$$\alpha_k a^k A \subseteq \alpha_{k+1} a^k A \subseteq \dots \subseteq \alpha_{k+p} a^k A \subseteq \dots$$

A étant supposé noethérien à droite, il existe un entier $p \geqslant 0$ tel que $\alpha_{k+p} a^k A = \alpha_{k+p+1} a^k A$.

Il existe alors $b \in A$ tel que :

$$\alpha_{k+p+1} a^k = \alpha_{k+p} a^k b$$

$$= \alpha_{k+p+1} a^{k+1} b \quad \text{(d'après (1))}.$$

Soit : $\alpha_{k+p+1} a^k (1-ab) = 0$.

a appartenant à J, $1-ab$ est inversible dans A, donc $\alpha_{k+p+1} a^k = 0$, donc $c = \alpha_{k+p+1} a^{k+p+1} = 0$ et $\bigcap_{n=1}^{+\infty} Aa^n = 0$.

LEMME 4 : Soit A un anneau noethérien à gauche et à droite, extension essentielle (à gauche) de son socle (à gauche).

Alors le radical de Jacobson J de A est nilpotent.

Démonstration : Soit Σ le socle de A et soit $a \in J$.

Nous avons, compte tenu du lemme 3 :

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} (\Sigma \cap Aa^n) = 0.$$

Σ étant un A-module à gauche artinien, il existe un entier n tel que $\Sigma \cap Aa^n = 0$.

Σ étant essentiel dans A, ceci exige $a^n = 0$.

Donc J est un nil-idéal ; et J est nilpotent d'après le théorème de Levitzki ([4], p. 199).

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat suivant, annoncé au début de l'exposé.

<u>THEOREME 5</u> : <u>Soit</u> A <u>un T-anneau à gauche, noethérien à droite, et soit</u> J <u>son radical de Jacobson.</u>

Alors $\bigcap_{n=1}^{+\infty} J^n = 0.$

<u>Démonstration</u> : 0 est égal à l'intersection de la famille $(I_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ de tous les idéaux à gauche, complètement $\cap$-irréductibles de A.

Soit, pour tout $\alpha \in \Lambda$, $\mathfrak{B}_\alpha$ le plus grand idéal bilatère de A, contenu dans I_α, et $\varphi_\alpha : A \to \frac{A}{\mathfrak{B}_\alpha}$, l'homomorphisme canonique.

Il est immédiat que $\varphi_\alpha(J)$ est contenu dans le radical de Jacobson J_α de $\frac{A}{\mathfrak{B}_\alpha}$, et que $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} \mathfrak{B}_\alpha = 0$; de sorte que l'homomorphisme d'anneaux :

$$\varphi : A \to \prod_{\alpha\in\Lambda} \frac{A}{\mathfrak{B}_\alpha}$$

$$a \mapsto (\varphi_\alpha(a))_{\alpha\in\Lambda}, \quad \text{est injectif.}$$

Soit $c \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} J^n.$

Pour tout $\alpha \in \Lambda$, et pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\varphi_\alpha(c) \in \varphi_\alpha(J^n) \subseteq J_\alpha^n.$$

Il résulte des lemmes 2 et 4 que, pour tout $\alpha \in \Lambda$, l'idéal J_α est nilpotent.

Donc $\varphi_\alpha(c) = 0$ pour tout α, et $c = 0$ puisque φ est injectif.

On a donc bien $\bigcap_{n=1}^{+\infty} J^n = 0.$

<u>COROLLAIRE 6</u> : <u>Soit</u> A <u>un anneau à identité polynômiale, noethérien à gauche et à droite, et soit</u> J <u>son radical de Jacobson.</u>

Alors $\bigcap_{n=1}^{+\infty} J^n = 0.$

En effet, on sait qu'un tel anneau est un T-anneau à gauche.

Si un anneau A est une algèbre finie sur un anneau commutatif noethérien, A est noethérien à gauche et à droite, et à identité polynômiale.

Nous retrouvons donc le résultat suivant dû à Small [9].

COROLLAIRE 7 : *Soit* A *un anneau qui est une algèbre finie sur un anneau commutatif noethérien. Soit* J *le radical de Jacobson de* A.

Alors $\bigcap_{n=1}^{+\infty} J^n = 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. CAUCHON : Comptes-rendus 277, série A, pp. 1153-1156.

[2] I.N. HERSTEIN : A Counter example in noetherian rings. Proc. Nat. Acad. Sci. (1965), pp. 1036-1037.

[3] I.N. HERSTEIN and L.W. SMALL : The intersection of the powers of the radical in noetherian P.I. rings. Israel J. Math. Vol. 16, pp. 176-180, (1973).

[4] N. JACOBSON : Structure of rings. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 37 (Revised), (1964).

[5] A.V. JATEGAONKAR : Left principal ideal domains. J. of Algebra 8, (1968), pp. 148-155.

[6] L.LESIEUR et R. CROISOT : Mem. Sc. Math. Fasc. 154, Paris, 1963.

[7] L.LESIEUR : Comptes-rendus, 276, série A, 1973, p. 435.

[8] G. RENAULT : Travaux de G. Krause. Sém. d'Alg. non commutative (1971-72) Conf. N° 7. Publications mathématiques d'Orsay.

[9] L.W. SMALL : Orders in Artinian rings. J. of Algebra 4, (1966), pp. 13-41.

-:-:-:-:-:-:-

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

UNIVERSITE DE PARIS - SUD

CENTRE D'ORSAY

-:-:-:-

Conférence n° 17 du 20 Mai 1974

COXETER FUNCTORS AND REPRESENTATION THEORY

by VLASTIMIL DLAB.

(à paraître)......

UNIVERSITE DE PARIS SUD

CENTRE D'ORSAY

-:-:-:-:-:-

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 18 du 27 Mai 1974

ALGEBRES DE HOPF DE DIMENSION FINIE

par Earl TAFT, Professeur

à l'Université Rutgers - U.S.A.

-:-:-:-:-:-:-:-

Conférence non rédigée