SÉMINAIRE

D'ANALYSE HARMONIQUE

1965 - 66

Séminaire

d'Analyse Harmonique

1965 / 1966

SEMINAIRE d'ANALYSE HARMONIQUE.

1965/1966.

Table des Matières.

Orsay 1965 - 1966

SEMINAIRE D'ANALYSE HARMONIQUE

Exposé n° 1 Madame CHOLLET

Anneaux préordonnés.

Extraits de :

- Journal d'Analyse de Jérusalem 1964
  Krivine : Anneaux préordonnés
- Comptes rendus de l'Académie des Sciences 1er Avril 1964
  Krivine : propriétés des préordres dans les anneaux commutatifs unitaires

Bibliographie :

- A representation theory for commutative topological algebra.
  Kadison : Memoirs of the American Mathematical Society 1951
- Real Banach Algebras
  Lars Ingelstam : Arkiv för Mathematic 1964

Définitions :

- Un anneau A est dit réel s'il est commutatif, unitaire, s'il contient le corps des rationnels et si on a

$$1 + x_1^2 + \dots + x_n^2 \neq 0 \quad \text{quels que soient } x_1, \dots, x_n \in A$$

- $\Omega \subset A$ est un préordre sur $A \Leftrightarrow \begin{cases} 1) & \Omega \supset A^2 \\ 2) & x, y \in \Omega \Rightarrow \begin{matrix} x + y \in \Omega \\ xy \in \Omega \end{matrix} \\ 3) & -1 \notin \Omega \end{cases}$

(Sur tout anneau réel, il existe un préordre minimum Ω_0 l'ensemble des sommes de carrés d'éléments de A.)

- On désigne par (A, Ω) l'anneau réel A muni du préordre Ω.

- x et $y \in A$ on note $x \geqslant y$ au lieu de $x - y \in \Omega$

- Ω étant un préordre sur l'anneau réel A, $|\Omega| = \{x \in A \mid x \in \Omega \text{ et } -x \in \Omega\}$

- Ω est un ordre si est seulement si $|\Omega| = \{0\}$.

Remarques

- $|\Omega|$ est un idéal strict de A.

- Pour qu'il existe un préordre contenant Ω et x il faut et il suffit que $\omega_0 + \omega_1 x \neq -1 \quad \forall \omega_0$ et $\omega_1 \in \Omega$.

- Soit (A,Ω) un anneau préordonné, il existe un préordre maximal sur A contenant Ω.

- Soient (A,Ω) et (A', Ω') deux anneaux préordonnés une application $\varphi : A \longrightarrow A'$ est un homomorphisme d'anneaux préordonnés si φ est un homomorphisme d'anneaux et si $\varphi(\Omega) \subset \Omega'$.

Soit (A,Ω) un anneau préordonné et φ l'homomorphisme canonique

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow A/|\Omega| \\ x &\longmapsto \bar{\bar{x}} \end{aligned}$$

alors $\varphi(\Omega)$ est un ordre sur $A/|\Omega|$ et $\varphi^{-1}\varphi(\Omega) = \Omega$.

On note $\frac{A}{\Omega}$ = l'anneau ordonné $\left[A/|\Omega| , \varphi(\Omega)\right]$

Définition :

Un anneau ordonné (A,Ω) est appelé pseudo-corps s'il est totalement ordonné et si pour tout $x \in A$ $x \neq 0$ il existe $y \in A$ $y \neq 0$ tel que $xy \geq 1$

Théorème 1

Pour que Ω soit un préordre maximal sur l'anneau réel A, il faut et il suffit que A/Ω soit un pseudo-corps.

Définitions :

- (A, Π) étant un anneau préordonné, on appelle spectre de (A, Π) et on désigne par Sp. (A, Π) ou Sp. A (s'il n'y a pas d'ambiguité sur le préordre Π), l'ensemble des préordres maximaux Ω contenant Π.

- On appelle enveloppe de (A, Π) et on désigne par Env. (A, Π) ou Env. A, l'intersection des préordres maximaux de A contenant Π.

- On appelle radical de (A, Π) et on désigne par Rad. (A, Π) ou Rad. A, l'intersection des $|\Omega|$ quand Ω décrit l'ensemble des préordres maximaux de A contenant Π.

Remarque : $|\text{Env.}\ (A,\Pi)| = \text{Rad.}\ (A, \Pi)$

Propriété :

Le radical de (A, Π) est l'ensemble des $x \in A$ tels que pour tout $\lambda \in A$, il existe $\pi \in \Pi$ tel que $\pi(1 - \lambda x) \geq 1$

Définition :

Un préordre Π sur l'anneau réel A est dit archimédien si pour tout $x \in A$, il existe un entier $n \geq 0$ tel que $x \leq n$.

Théorème 2

Soit (A,Π) un anneau préordonné archimédien, et $a, b \in A$. Si $ab \geq 1$ et $a \geq 0$, il existe un entier $M > 0$ tel que $a \geq \frac{1}{M}$ et $b \geq \frac{1}{M}$. En particulier on a $b \geq 0$.

Théorème 3

Pour que (A,Π) soit pseudo-corps archimédien, il faut et il suffit qu'il soit isomorphe en tant qu'anneau ordonné à un sous anneau de $\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{Q}$.

Théorème 4

Soit (A,Π) un anneau préordonné archimédien

$$\text{Env.}\ (A,\Pi) = \left\{x \in A \mid \forall\, n \in \mathbb{N},\ -\frac{1}{n} \leqslant x \quad \text{c'est-à-dire} \quad x + \frac{1}{n} \in \Pi\right\}$$

$$\text{Rad.}\ (A,\Pi) = \left\{x \in A \mid \forall\, n \in \mathbb{N} \quad -\frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}\right\}$$

Théorème 5

Soit (A,Π) un anneau préordonné archimédien le spectre de (A,Π) s'identifie à l'ensemble des homomorphismes d'anneaux préordonnés de A dans $\mathbb{R}$.

$$\forall\, x \in A \qquad \exists\, M(x) \text{ entier} > 0 \quad \text{tel que} \quad -M(x) \leqslant x \leqslant M(x)$$

donc
$$-M(x) \leqslant \lambda(x) \leqslant M(x).$$

Soit
$$\mathcal{E} = \prod_{x \in A} [\,-M(x),\ M(x)]$$

c'est un espace compact quand on le munit de la topologie produit.

Sp. $A \subset \mathcal{E}$ c'est un fermé de $\mathcal{E}$, donc un compact pour la topologie induite par $\mathcal{E}$.

A tout $x \in A$ on fait correspondre $\hat{x}$ la fonction définie sur Sp. A par $\hat{x}(\lambda) = \lambda(x)$.

$\hat{x}$ est continue sur Sp. A et $x \longrightarrow \hat{x}$ est un homomorphisme de A sur un sous anneau $\hat{A}$ de l'algèbre des fonctions continues réelles sur Sp. A. Son noyau est le radical de A. Env. (A,Π) est l'ensemble des $x \in A$ tels que $\hat{x}$ soit $\geqslant 0$ sur Sp. (A,Π).

De plus $\hat{A}$ est uniformement dense dans $C_{\mathbb{R}}(\text{Sp. } A)$

Application

On appelle algèbre de Banach réelle, une algèbre sur $\mathbb{R}$ normée, complète qui est aussi un anneau réel.

Remarques :

- 1 Sur une algèbre de Banach réelle A, tout préordre est archimédien. Car $x \leqslant ||x||$ pour tout $x \in A$ et tout préordre.

- 2 Si on munit A du préordre minimum le Spectre de A est l'ensemble des homomorphismes continus de A dans $\mathbb{R}$.

Proposition

Si $\hat{x} > 0$ sur Sp. A il existe $\alpha \in R$ $\alpha \neq 0$ et $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$ tels que

$$x = \alpha^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2$$

Orsay 1965 - 1966

SEMINAIRE D'ANALYSE HARMONIQUE

Exposé n° 2 Madame CHOLLET

Anneaux préordonnés. (suite)

__Définitions__ :

- Les anneaux considérés ici sont des algèbres A sur $\mathbb{R}$ commutatives et unitaires.

- On introduit une nouvelle définition de préordre moins restrictive que la précédente

- $\Omega \subset A$ sera un préordre sur $A \Leftrightarrow$ 1) $\Omega \supset \mathbb{R}^+$

  2) $x, y \in \Omega \Rightarrow x + y \in \Omega$, $xy \in \Omega$

  3) $-1 \notin \Omega$

- x et $y \in A$ on note $x \geqslant y$ au lieu de $x - y \in \Omega$.

- Ω est un préordre archimedien sur A si $\forall x \in A$, $\exists$ n entier positif tel que $x \leqslant n$ (Ω) c'est-à-dire $n - x \in \Omega$

__Remarques__ :

- Pour qu'il existe un préordre contenant Ω et x il faut et il suffit que $\forall$ K entier positif et $\forall\, \omega_0, \omega_1, \dots \omega_n \in \Omega$ on ait

$$\omega_0 + \omega_1 x + \dots + \omega_K x^K \neq -1$$

- Si Ω est un préordre archimédien, il se plonge dans un préordre archimédien maximal.

__Théorème__ 1

- Soit Ω un préordre archimédien sur A et $a, b \in A$. Si $a \geqslant 0$ et $ab \geqslant 1$ il existe un entier $n > 0$ tel que $a \geqslant \frac{1}{n}$ et $b \geqslant \frac{1}{n}$

__Théorème__ 2

- Soit Ω un préordre archimedien sur A ; $\forall x \in A$, $x^2 + 1 \in \Omega$

Corollaire 1

Si Ω est un préordre archimédien

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ et } \forall x \in A, \quad x^2 + \varepsilon \in \Omega$$

Corollaire 2

Tout préordre archimédien maximal sur A contient les carrés des éléments de A. En particulier s'il existe un préordre archimédien sur A, A est un anneau réel $(1 + x_1^2 + \dots + x_n^2 \neq 0 \quad \forall x_1 \dots x_n \in A)$.

Donc si A est une algèbre sur $\mathbb{R}$ contenant un préordre archimédien Π, les préordres maximaux contenant Π sont du même type que ceux étudiés dans le précédent exposé. Ils s'identifient aux homomorphismes λ de A dans $\mathbb{R}$ tels que $\lambda(\Omega) = \mathbb{R}^+$.

Sp. (A,Π) = spectre de (A, Π) désignera l'ensemble de ces homomorphismes. $\forall x \in A$, $\hat{x}$ désigne la fonction numérique $\lambda \longrightarrow \lambda(x)$ définie sur Sp. (A, Π) ; Sp. (A, Π) étant un espace compact pour la topologie la moins fine rendant continues toutes les fonctions $\hat{x}$ pour $x \in A$.

Théorème 3

Si $\hat{x} > 0$ sur Sp.(A,Π), $\exists$ n entier positif tel que $x \geq \frac{1}{n}\ (\Pi)$

Application 1 :

Soit $A = \mathbb{R}[X_1, X_2, \dots X_n]$ l'anneau des polynômes à coefficients réels à n variables. Soit Π le préordre sur A contenant le préordre minimum

$$\mathbb{R}^+ \text{ et } X_1, X_2, \dots, X_n; \quad 1 - X_1,\ 1 - X_2, \dots, 1 - X_n.$$

On établit que Π est archimédien et que Sp.$(A, \Pi) = [0, 1]^n$. Le théorème 3 permet d'affirmer :

soit $p(X_1, \dots, X_n)$ un polynôme à coefficients réels qui prend des valeurs strictement positives pour $0 \leq X_i \leq 1$ $(i = 1, \dots n)$. Alors il existe un polynôme $P(u, \dots u_n, v_1, \dots v_n)$ à $2n$ variables à coefficients réels positifs tel que

$$p(X_1, \dots X_n) = P(X_1, \dots X_n, 1 - X_1, \dots 1 - X_n)$$

Ceci donne une généralisation d'un théorème de Polya. (Réf. Akhiezer : The classical moment problem)

Application 2 :

Soit A une algèbre de Banach sur $\mathbb{R}$ commutative avec unité.

On démontre que le préordre archimédien minimum sur A est l'ensemble Ω_0 des sommes $e^{x_1} + \dots + e^{x_n}$ avec $x_1, \dots, x_n \in A$. Alors si $\hat{x} > 0$ sur $Sp.(A, \Omega_0)$, il existe $x_1, \dots, x_n \in A$ tel que $x = e^{x_1} + \dots + e^{x_n}$.

Ceci est une amélioration du résultat obtenu dans le précédent exposé ($e^{x_1}, \dots, e^{x_n}$ étant évidemment des carrés)

Application 3 :

Soit A une algèbre sur $\mathbb{R}$, complète, commutative unitaire d'opérateurs auto-adjoints bornés sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

- A est une algèbre de Banach réelle

Supposons qu'il existe $T_1, \dots, T_n \in A$ tels que $\sum_{i=1}^{n} T_i^2 + 1 = 0$ alors $\forall x$ en particulier $x \neq 0$

$$\sum_{i=1}^{n} T_i x + x = 0$$

donc

$$\sum_{i=1}^{n} ||T_i x|| + ||x|| = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{(contradiction)}$$

On considère sur A le préordre Ω où Ω est l'ensemble des sommes de carrés d'éléments de A.

- l'application $T \longrightarrow \hat{T}$ est une isométrie

On sait que $||\hat{T}|| \leq ||T||$

Etablisons que $||T|| \leq ||\hat{T}||$

soit $||\hat{T}|| = a$ alors $|\hat{T}(\lambda)| \leq a \quad \forall \lambda \in Sp(A, \Omega)$

donc $\hat{T} + a \geq 0$ sur $Sp.(A, \Omega)$

et $a - \hat{T} \geq 0$ sur $Sp.(A, \Omega)$

$\hat{T} + a \geq 0$ sur $Sp.(A, \Omega)$ implique $T + a + \varepsilon \geq 0$

donc $\forall x$ tel que $||x|| = 1 \quad - a - \varepsilon \leq \langle Tx, x \rangle$

donc $\qquad -\langle Tx, x\rangle \leqslant a$

on aurait de même $\langle Tx, x\rangle \leqslant a$. D'où $|\langle Tx, x\rangle| \leqslant a$

or
$$||T|| = \sup_{||x||=1} |\langle Tx, x\rangle||$$

donc $||T|| \leqslant a$ c'est-à-dire $||T|| \leqslant ||\hat{T}||$

donc on retrouve le résultat connu.

$A \simeq C_R(M)$ où M est l'espace compact $\text{Sp.}(A, \Omega)$

<u>Mesures sur le spectre d'une $\mathbb{R}$ - algèbre archimédienne</u>

(Dans ce qui suit un préordre vérifiera la définition de l'exposé 1)

Soit A une algèbre sur $\mathbb{R}$ muni d'un préordre archimédien Π.

Une forme linéaire T sur A est dite positive si $T(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in \Pi$.

<u>Théorème</u> 1

Soit T une forme linéaire positive sur une $\mathbb{R}$-algèbre archimédienne (A, Π) alors il existe une mesure de Radon μ positive sur $\text{Sp.}(A, \Pi)$ et une seule telle que :

$$T(x) = \int \hat{x}\, d\mu \qquad \forall\, x \in A$$

<u>Théorème</u> 2

Soit I un idéal d'une $\mathbb{R}$-algèbre archimédienne A. On désigne par

$$I^* = \left\{ p \in \text{Sp. } A \mid \hat{x}(p) = 0 \quad \forall\, x \in I \right\}$$

Alors si T est une forme linéaire positive sur I, il existe une mesure μ positive sur $\complement I^*$ telle que

$$T(x.y.z) = \int_{\complement I^*} \hat{x}.\, \hat{y}.\, \hat{z}\, d\mu \quad \forall\, x, y, z \in I$$

<u>Application</u>

Soit $L^1(\mathbb{R}^+)$ l'algèbre des fonctions numériques intégrables pour la mesure de Lebesgue munie du produit de convolution

$$(f * g)(x) = \int_0^{\infty} f(u)\; g(x-u)\, du.$$

Soit $\quad A = \{ f + \lambda \mid f \in L^1(\mathbb{R}^+) ; \text{ et } \lambda \in \mathbb{R} \}$

Sp.(A) = l'ensemble des homomorphismes continus A dans $\mathbb{R}$.

Soit $\quad {}_\infty : f + \lambda \longrightarrow \lambda \qquad \lambda_\infty \in$ Sp. A.

D'ailleurs $\quad \lambda \in$ Sp. A est de la forme $\quad f \longrightarrow \int_0^{\infty} f(x)\, e^{-px}\, dx, \quad p \in \mathbb{R}^+$
$\lambda \neq \lambda_\infty$

Donc $\quad$ Sp A s'identifie à $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$.

Le théorème 2 s'applique ici.

Soit $\quad I = L^1(\mathbb{R}^+)$ alors $\quad \complement I^* = \mathbb{R}^+$

On retrouve un théorème de Bernstein (Rf. Widder : The Laplace transform)

$K(x)$ fonction continue bornée sur $\mathbb{R}^+$ est définie positive si et seulement si

$$K(x) = \int_0^{\infty} e^{-tx}\, d\mu(t)$$ où μ est une mesure positive bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Orsay 1965 - 1966

SEMINAIRE D'ANALYSE HARMONIQUE

Exposé n° 3 : Michel LEDUC

L'exposé porte sur des travaux de R. SPECTOR, qui doivent faire l'objet d'une publication [0].

Il s'agit de montrer que certains sous-groupoïdes multiplicatifs de l'ensemble des fonctions continues réelles ou complexes sur un compact, le caractérisent comme espace topologique, puis d'étudier dans certains cas cette caractérisation.

On sait qu'un compact K est homéomorphe à l'ensemble des points extrêmaux de la boule unité de $\mathcal{C}(K)'$ muni de la topologie faible ; par conséquent si les espaces des fonctions numériques continues sur deux compacts sont isomètres, ces compacts sont homéomorphes.

Notre caractérisation sera plus "algèbrique" ; ce point de vue a déjà été envisagé par A. MILGRAM [1] .

[0] R. SPECTOR : C.R. Académie des Sciences, note à paraître.

[1] A. MILGRAM : Multiplicative semi-groups of continuous fonctions, Duke Math. Journal 1949, p. 377 à 383.

- PRELIMINAIRES -

Soit K un compact ; quel que soit $f \in \mathcal{C}(K)$, notons $Z(f)$ l'intérieur de $\overset{-1}{f}(0)$.

Un sous-groupoïde multiplicatif (partie stable par multiplication) $\mathcal{A}$ de $\mathcal{C}(K)$ est dit régulier si: $\forall A$ fermé, $\forall x \in K \setminus A$, $\exists\ \varphi \in \mathcal{A}$: $A \subset \overset{-1}{\varphi}(1)$ et $x \in Z(\varphi)$.

<u>Proposition</u> :

Si $\mathcal{A}$ est régulier, quels que soient A et B fermés disjoints, pour $B \neq \emptyset$ il existe $\varphi \in \mathcal{A}$ tel que $A \subset \overset{-1}{\varphi}(1)$ et $B \subset Z(\varphi)$.

Il en résulte que $0 \in \mathcal{A}$; mais $\mathcal{A}$ ne contient pas nécessairement 1.

Remarquons enfin que comme A admet une base de voisinages fermés, on peut même obtenir : $\overset{-1}{\varphi}(1)$ voisinage de A.

<u>Exemples de sous-groupoïdes réguliers</u>

L'ensemble des diviseurs de zéro dans $\mathcal{C}(K)$; le cône $\mathcal{C}(K)^+$ des fonctions continues positives ; si K est métrique, l'algèbre des fonctions numérique Lipschitziennes sur K. Enfin si K est une variété de classe $\mathcal{C}^n$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \leqslant n \leqslant \infty$.

(en effet par compacité la dimension est finie, donc il y a partition différentiabl de l'unité).

- PREMIERE PARTIE -

Soient f et $g \in \mathscr{C}(K)$

Lemme 1 :

$$Z(f) \subset Z(g) \Leftrightarrow (h \in \mathcal{A} \text{ et } f \circ h = 0 \Rightarrow g \cdot h = 0)$$

Lemme 2 :

$$\overline{Z(f)} \subset Z(g) \Leftrightarrow \exists\ \varphi \in \mathcal{A} : \varphi \cdot g = g \text{ et } Z(f) \subset Z(\varphi)$$

Ces deux lemmes faciles à démontrer, permettent donc, pour f et $g \in \mathcal{A}$, d'exprimer dans $\mathcal{A}$ et algèbriquement l'inclusion $\overline{Z(f)} \subset Z(g)$.

Considérons alors l'ensemble $\mathcal{F}$ des parties F de $\mathcal{A}$ vérifiant

-1) $\forall f$ et $g \in F$, $\exists\ h \in F$: $\overline{Z(h)} \subset Z(f) \cap Z(g)$

-2) $f \in F$, $g \in \mathcal{A}$ et $Z(f) \subset Z(g) \Rightarrow g \in F$

Quel que soit $F \in \mathcal{F}$, $0 \in F$; et posons $\theta(F) = \bigcap\limits_{f \in F} Z(f)$ il est immédiat que $\theta(F) = \bigcap\limits_{f \in F} \overline{Z(f)}$.

Lemme 3 :

Si $F \in \mathcal{F}$, $F = \left\{ f \in \mathcal{A} ;\ \theta(F) \subset Z(f) \right\}$

Lemme 4 :

Quel que soit H fermé, posons $\tilde{H} = \left\{ f \in \mathcal{A} ;\ Z(f) \supset H \right\}$, alors $\tilde{H} \in \mathcal{F}$ et $\theta(\tilde{H}) = H$.

Par suite θ réalise une bijection décroissante (pour l'inclusion) de $\mathcal{F}$ sur l'ensemble des fermés de K ; en outre, les points étant les fermés non vides minimaux, on a l'équivalence :

$$F \text{ maximal propre dans } \mathcal{F} \Leftrightarrow \theta(F) \text{ est un point.}$$

Soient alors K_1 et K_2 deux compacts non vides, $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ des sous-groupoïdes réguliers de $\mathscr{C}(K_1)$ et $\mathscr{C}(K_2)$ respectivement, $\alpha : \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{A}_2$ bijective, avec : $\forall f$ et $g \in \mathcal{A}_1$, $\alpha(f.g) = \alpha(f) . \alpha(g)$.

N.B. Les lemmes 3 et 4 se démontrent aisément en utilisant la propriété immédiate que : dans un compact, toute famille filtrante de fermés est plus fine que le filtre des voisinages de son intersection.

Notons $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ les ensembles associés à $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$; comme $\forall f$ et $g \in \mathcal{A}_2$,

$$\overset{-1}{\alpha}(fg) = \overset{-1}{\alpha}[\alpha(\overset{-1}{\alpha}(f)) \cdot \alpha(\overset{-1}{\alpha}(g))] = \overset{-1}{\alpha} \circ \alpha[\overset{-1}{\alpha}(f) \cdot \overset{-1}{\alpha}(g)] = \overset{-1}{\alpha}(f) \cdot \overset{-1}{\alpha}(g).$$

et comme

$$0 = \alpha(0) \cdot 0 = \alpha(0) \cdot \alpha(\overset{-1}{\alpha}(0)) = \alpha[0 \cdot \overset{-1}{\alpha}(0)] = \alpha(0)$$

par $\overset{-1}{\alpha}$, les éléments de $\mathcal{F}_2$ sont mis en bijection croissante avec ceux de $\mathcal{F}_1$, en particulier les éléments maximaux propres ; soit α^* la bijection qui en résulte de K_2 sur K_1. Par α^* les fermés de K_2 sont mis en bijection avec ceux de K_1; α^* est donc un homéomorphisme.

Théorème :

Etant donné deux compacts K_1 et K_2, à tout isomorphisme entre deux sous-groupoïdes réguliers de $\mathcal{C}(K_1)$ et $\mathcal{C}(K_2)$ respectivement, est canoniquement associé un homéomorphisme entre K_1 et K_2.

- SECONDE PARTIE -

Reste à étudier les relations entre α et α^*.

En général, l'identité $\alpha(f) = f_o\alpha^*$ n'est pas vérifiée, car α n'est pas une isométrie.

C'est le cas par exemple, pour l'automorphisme de groupoïde :

$$f \in \mathcal{C}(K)^+ \longrightarrow f^2 \in \mathcal{C}(K)^+$$

Plus précisement :

<u>Théorème</u> :

Une condition nécessaire et suffisante pour que

$$\forall f \in \mathcal{A}_1, \quad \alpha(f) = f_o\alpha^*$$

est que l'isomorphisme des groupoïdes $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ se prolonge en un isomorphisme des algèbres $\mathcal{C}(K_1)$ et $\mathcal{C}(K_2)$.

La condition nécessaire est immédiate ; la condition suffisante résulte des lemmes suivants.

<u>Lemme 1</u> :

Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}(K)$, si

$$(f \in \mathcal{A} \text{ et } \forall x \in K,\ f(x) \neq 0) \Rightarrow 1/f \in \mathcal{A},$$

alors les ensembles $I_x = \{f \in \mathcal{A};\ f(x) = 0\}$ sont les seuls idéaux maximaux posibles.

En outre, si $\mathcal{A}$ est régulière, $\forall x \in K$, I_x est le seul idéal maximal contenant

$$\widetilde{\{x\}} = \{f \in \mathcal{A};\ x \in Z(f)\}$$

Par suite :

Le lemme 2, se démontre aisément, en utilisant la propriété immédiate que

$$\alpha(f) = f_o\alpha^* \Leftrightarrow \operatorname{Ker} \alpha(f) = \operatorname{Ker} f_o\alpha^*$$

Lemme 2 :

Si les algèbres $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ vérifient les hypothèses du lemme 1), et s $\alpha : \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{A}_2$ est un isomorphisme d'algèbres, alors

$$\forall f \in \mathcal{A}_1, \ \alpha(f) = f_o \circ \alpha^* .$$

Montrons par un exemple que, même si $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont des algèbres et α un isomorphisme d'algèbres, α peut n'être pas isométrique.

Prenons $K_1 = K_2 = [0, 1]$ et pour $\mathcal{A}_1$ (resp. $\mathcal{A}_2$) l'ensemble des $f \in \mathcal{C}([0, 1])$, telles qu'il existe $x_o = 0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ et des polynômes $p_1, \ldots, p_n$ tels que pour $1 \leq i < n$, $p_i \neq p_{i+1}$, $p_i(x_i) = p_{i+1}(x_i)$ et $p_i(1+x_i) = p_{i+1}(1+x_i)$ [resp. $p_i(-1+x_i) = p_{i+1}(-1+x_i)$], et pour $1 \leq i \leq n$,

$$\forall x \in [x_{i-1}, x_i] , \quad f(x) = p_i(x)$$

Remarquons que cette décomposition est alors unique. On voit facilement que $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont des sous-algèbres règulières de $\mathcal{C}([0,1])$.

Définissons l'isomorphisme α par : $\alpha(f).(x) = p_i(1+x)$; α n'est pas une isométrie, car pour $f(x) = x$, $\alpha(f).(x) = 1+x$.

Terminons en énonçant deux résultats dont on trouvera la démonstration dans [0

Les algèbres des fonctions lipschitziennes ou dérivables vérifient les hypothè- ses des lemmes précédents :

Proposition 1 :

Si les algèbres des fonctions numériques lipschitziennes de deux métrique compacts sont algèbriquement isomorphes, ces compacts sont homéomorphes ; de plus l'homéomorphisme canonique est lipschitzien.

Proposition 2 :

Si les algèbres des fonctions numériques différentiables de deux variétés compactes sont isomorphes, ces deux variété sont difféomorphes.

Cette dernière proposition est aisément vérifiée.

Orsay 1965 - 1966

SEMINAIRE D'ANALYSE HARMONIQUE

Exposés n° 4, 5, 6. Melle DETRAZ

Structure analytique sur le spectre d'une algèbre de Banach uniforme

Une algèbre de Banach A commutative est uniforme si elle est unitaire et si sa norme spectrale est égale à sa norme uniforme. La représentation de Gelfand est alors biunivoque et isométrique, et on peut considérer A comme une sous algèbre fermée de l'algèbre des fonctions continues sur le spectre M de A, muni de la topologie de Gelfand ; M est compact car A est unitaire.

Notre but est d'exposer les résultats de Hoffman et de Lumer concernant la possibilité de munir M d'une "structure analytique en disques" pour certaines algèbre uniformes.

On notera, f un élément de A, x un élément de M c'est-à-dire un homomorphisme non nul sur A et $||f|| = \sup_{x \in M} f(x)$

- $\bar{A}$ l'algèbre des fonctions conjuguées des fonctions de A.
- $\mathrm{Re}\, A$ l'espace des fonctions, parties réelles des fonctions de A.
- A^{-1} l'ensemble des éléments inversibles de A.
- $\mathcal{C}(X)$ [resp. $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$] l'algèbre des fonctions continues complexes [resp. réelles] sur un espace topologique X.

A ETUDE GENERALE DU SPECTRE

I. Frontière de Silov.

1 Définition et existence

La frontière de Silov Γ du spectre M est le plus petit ensemble fermé de M sur lequel tout élément de A atteint son maximum.

Silov a montré l'existence et l'unicité d'un tel ensemble. Par définition $V(x)$ désignant un voisinage de x.

$$\Gamma = \left\{ x \; ; \; x \in M, \; \forall \, V(x), \; \exists \, f \; ; \; f \in A, \; |f(y)| < \|f\| \; \forall \, y \in \complement V(x) \right\}$$

Exemples

1. Si $A = \mathcal{C}(M)$, pour tout point x de M et tout voisinage $V(x)$ il existe une fonction de A à valeurs dans $[0, 1]$, égale à 1 en x et zéro sur $\complement V(x)$. donc $\Gamma = M$

2. Si A est une algèbre unitaire à un générateur, M est homéomorphe au compact K du plan : $K = \left\{ Z(x) \; ; \; x \in M \right\}$ et A est la fermetureuniforme sur K des polynômes complexes. Si δK est la frontière topologique de K, d'après le principe du maximum Γ est contenu dans δK.

Si $x \in \delta K$ pour tout voisinage $V(x)$ il existe un point a n'appartena pas à K et sur le segment (x, a) on peut trouver un point b tel que $|z - b|$ soit strictement supérieur sur $\complement V$ à son minimum et que b n'appartienne pas à K ; la fonction $Z - b$ est différente de zéro sur tout M ; d'après le théorème de Wiener $\frac{1}{Z-b}$ appartient à A et d'autre part est strictement inférieure sur $\complement V$ à sa norme. Donc $x \in V$ et donc $\Gamma = \delta K$.

2. Mesures représentantes

Soit A/Γ la sous algèbre de $C(\Gamma)$ des restrictions des fonctions de A à Γ.

L'application $f \in A \longrightarrow f(x)$ est une forme linéaire sur A/Γ qui est continue de norme inférieure ou égale à 1, d'après la définition de la frontière de Silov

$$f(x) \leqslant ||f|| = \sup_{y \in \Gamma} |f(y)| = ||f||_{A/\Gamma}$$

Elle s'étend donc (Hahn Banach) en une forme linéaire continue sur $C\Gamma$, donc en un mesure μ_x complexe de norme inférieure ou égale à un. et

$$f(x) = \int_\Gamma f \, d\,\mu_x \quad \text{pour tout } f \text{ de } A$$

$$||\mu_x|| \leqslant 1$$

Si $\qquad f = 1 \qquad f(x) = 1 = \int d\,\mu_x$

μ_x est donc une mesure positive de masse un.

<u>Théorème</u>

Pour tout x de M; il existe une mesure μ_x de support Γ <u>positive</u> de masse 1 telle que $f(x) = \int_\Gamma f \, d\,\mu_x$ pour toute f de A. Une telle mesure est multiplicative sur A.

<u>Définition</u>

On appelera mesure <u>représentante</u> de x, toute mesure remplissant les conditions du théorème précédent.

3. <u>Mesure de Jensen</u>.

<u>Théorème</u>

Tout point x de M a une mesure représentante telle que

$$\log \left|\int_\Gamma f \, d\,\mu_x\right| \leqslant \int_\Gamma \log |f| \, d\,\mu_x \quad \text{(inégalité de Jensen)}$$

Dans $C_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ considérons les 2 parties

$$u_1 = \left\{ h \; ; \; h \in C_{\mathbb{R}}(\Gamma), \exists\, r > 0, \;\; f \in A \; ; \; |f(x)| \geq 1 \;\; \text{et} \;\; r\, h(y) \geq \log |f(y)| \; \forall\, y \in \Gamma \right\}$$

$$u_2 = \left\{ h \; ; \; h \in C_{\mathbb{R}}(\Gamma) \;\; h(y) < 0 \; \forall \;\; y \in \Gamma \right\}$$

u_1 et u_2 sont convexes

u_2 est ouvert

$u_1 \cap u_2 = \Phi$

Il existe donc dans $C_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ un hyperplan les séparant, donc une mesure μ sur Γ telle que

$$\sup_{h \in u_2} \int_\Gamma h \, d\,\mu = C \leq \inf_{h \in u_1} \int_\Gamma h \, d\,\mu$$

u_2 étant stable par multiplication par des scalaires positifs $C = 0$

$$\int_\Gamma h d\mu \qquad \text{est négatif pour toute } h \text{ de } u_2$$

Donc μ est une mesure positive qu'on peut prendre de masse un. Si f appartient à A et $f(x) = \alpha$, toute fonction h de $C_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ vérifiant :

$$\exists\, r \quad r > 0 \quad r\, h(y) \geq \log |\alpha^{-1} f(y)| \quad \forall\, y \in \Gamma$$

vérifie

$$\int_\Gamma h \, d\mu \geq 0$$

donc

$$\int_\Gamma \log |\alpha^{-1} f(y)| \, d\,\mu \geq 0 \quad \text{soit} \quad \int_\Gamma \log |f| \, d\,\mu \geq \log |f(x)|$$

En particulier si $f \in A^{-1}$ on a l'égalité en appliquant l'inégalité à f^{-1}

$$\int \log |f| \, d\,\mu = \log |f(x)|$$

or si $f \in A$, $e^f \in A^{-1}$ et donc

$$\int_\Gamma \log |e^f| \, d\mu = \log |e^{f(x)}|$$

soit $$\int_\Gamma \text{Re } f \, d\mu = \text{Re } f(x)$$

Et donc

$$\int f \, d\mu = f(x)$$

μ qui est positive est donc une mesure représentante vérifiant l'inégalité de Jensen

II $\boxed{\text{Party}}$

On a vu que les fonctions de A vérifiaient un principe du maximum sur Γ. Cela peut indiquer que le spectre de A pourrait être muni d'une struture analytique.

Plus précisement on va chercher des parties P du spectre de certaines algèbres uniformes telles qu'il existe une application biunivoque τ du disque D sur P et $f\circ\tau$ est analytique pour toute f de A.

D'après le lemme de Schwarz, si z_1 et z_2 appartiennent à D

$$|f\circ\tau(z_1) - f\circ\tau(z_2)| \leq K \, ||f\circ\tau|| \quad \text{avec} \quad K < 2$$

Donc si x et y sont deux points d'une partie P envisagée on doit avoir

$$|f(x) - f(y)| \leq K \, ||f|| \qquad \text{pour toute} \quad f \text{ de } A$$

on note

$$||x|| = \sup_{f \in A} \frac{f(x)}{||f||} \quad \text{on a toujours} \quad ||x|| \leq 1$$

Et ici on veut $||x - y|| < 2$

Cette relation a été introduite par Gleason qui a défini la notion de Part.

Théorème II, 1

x et y étant 2 points de M; les 3 propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $||x - y|| < 2$

2. $\exists \mu_{0\,x}, \mu_{0\,y}$, 2 mesures représentantes de x et y, absolument continues l'une par rapport à l'autre de dérivées bornées.

3. Pour toute mesure représentante μ_x de x, il existe une mesure représentante μ_y de y, telle que μ_x soit absolument continue par rapport à μ_y.

$3 \Rightarrow 1$, $2 \Rightarrow 1$ car 3 et 2 impliquent que des mesures représentantes μ_x et μ_y ne sont pas singulières ; la norme de leur différence est donc strictement inférieure à la somme de leurs normes. Et

$$||x - y|| \leqslant ||\mu_x - \mu_y|| < ||\mu_x|| + ||\mu_y|| = 2$$

Donc 1 est vérifié.

$1 \Rightarrow 2$: <u>Lemme</u>

$$| \exists C, \ \forall f \in A \ \operatorname{Re} f \geqslant 0 \ \operatorname{Re} f(x) \geqslant C \operatorname{Re} f(y)$$

Sinon il existe une suite f_n de fonctions de A avec

$$\operatorname{Re} f_n \geqslant 0, \quad \operatorname{Re} f_n(y) = 1 \quad \operatorname{Re} f_n(x) \longrightarrow 0$$

$F_n = e^{-f_n}$ appartient à A et

$$||F_n|| \leqslant 1 \qquad |F_n(y)| = e^{-1} \qquad |F_n(x)| \longrightarrow 1$$

or il existe une suite L_n d'automorphismes d'unité tels que si λ_n est une suite de points tendant en module vers 1 et

λ'_n est une suite de points tendant en module vers e^{-1}

$$|L_n(\lambda_n) - L_n(\lambda'_n)| \longrightarrow 2 \quad \text{soit} \quad |L_n(F_n(x)) - L_n(F_n(y))| \longrightarrow 2$$

Or L_n est limite uniforme de polynômes sur le disque unité et F_n est en module inférieur à 1 ; donc $L_n \circ F_n \in A$ et $||x - y|| = 2$

Par raison de symétrie et en diminuant C

il existe $C < 1$ $\qquad \operatorname{Re} f(x) \geqslant C \operatorname{Re} f(y)$

$\qquad \operatorname{Re} f(y) \geqslant C \operatorname{Re} f(x)$

Les 2 formes linéaires définies sur Re A par

$$\left.\begin{array}{l} f \longrightarrow \operatorname{Re} f(x) - C \operatorname{Re} f(y) \\ f \longrightarrow \operatorname{Re} f(y) - C \operatorname{Re} f(x) \end{array}\right\} \text{ sont positives}$$

elles s' étendent en deux formes linéaires positives sur $C_{\mathbb{R}}(\Gamma)$. Il existe donc deux mesures positives α et β telles que sur Γ

$$\int_\Gamma \operatorname{Re} f \, d\alpha = \operatorname{Re} f(x) - C \operatorname{Re} f(y)$$

$$\int_\Gamma \operatorname{Re} f \, d\beta = \operatorname{Re} f(y) - C \operatorname{Re} f(x)$$

soit

$$f(x) = \frac{1}{1-C^2} \left[C \int_\Gamma f \, d\beta + \int_\Gamma f \, d\alpha \right]$$

$$f(y) = \frac{1}{1-C^2} \left[C \int_\Gamma f \, d\alpha + \int_\Gamma f \, d\beta \right]$$

Posons

$$\mu_{ox} = \frac{1}{1-C^2} (G \, d\alpha + d\beta)$$

$$\mu_{oy} = \frac{1}{1-C^2} (G \, d\beta + d\alpha)$$

μ_{ox} et μ_{oy} qui sont positives sont deux mesures représentantes pour x et y telles que

$$\left.\begin{array}{l} \mu_{ox} \geq C \; \mu_{oy} \\ \mu_{oy} \geq C \; \mu_{ox} \end{array}\right\} \text{ 2 est donc vérifié}$$

2 ⇒ 3 Soit μ_x une mesure représentante quelconque de x, posons

$$\mu_y = \mu_{oy} - C \; \mu_{ox} + C \; \mu_x$$

$$\int_\Gamma f \, d\mu_y = \int_\Gamma f \, d\mu_{oy} = f(y) \qquad \mu_y \text{ est positive}$$

μ_y est donc une mesure représentante et $\mu_y \geq C \; \mu_x$

Le théorème est ainsi démontré.

Corollaires :

$||x - y|| < 2$ est une <u>relation d'équivalence</u> ; elle est évidemment symétrique et refléxive. D'autre part, la relation défini par la propriété 3 du théorème précédent est transitive.

On appelera <u>Part</u> une classe de cette relation d'équivalence : x et y appartiennent à la même part $\Leftrightarrow ||x - y|| < 2$.

Si chaque point a une mesure représentante unique, le théorème précédent s'écrit $||x - y|| < 2 \Leftrightarrow$ les mesures représentantes μ_x et μ_y sont absolument continues de dérivées bornées.

<u>Propriété</u> II $_2$

Si un point x de M a une mesure représentante unique μ_x, tous les points appartenant à la part de x ont une mesure représentante unique.

Soit y un tel point, μ_y et μ'_y 2 mesures représentantes pour y.

D'après la propriété 2 du théorème précédent, il existe deux fonctions p et p' bornées sur Γ telles que

$$\mu_y = p\,\mu_x$$
$$\mu'_y = p'\,\mu_x$$

$\int f(p - p')\, d\mu_x = 0$ pour toute f de A.

$p - p'$ étant bornée, on peut choisir ε de façon que $1 + \varepsilon(p-p')$ soit positive.

$[1 + \varepsilon(p-p')]\,\mu_x$ est une mesure représentante de x.

D'après l'hypothèse d'unicité pour le point x.

$$[1 + \varepsilon(p-p')\,\mu_x] = \mu_x$$

Donc $p = p'$ P.P $/\mu_x$ et $\mu_y = \mu'_y$

: GENERALE DES ALGEBR S UNIFORMES QUI ONT AU POINT x UNE MESURE REPRESENTANTE UNIQUE.

I. Condition d'unicité d'une mesure représentante au point x.

Si μ_x est une mesure représentante de x, pour toute fonction u de $C_{\mathbb{R}}(\Gamma)$

$$\operatorname{Re} f_1(x) \leqslant \int_\Gamma u \, d\mu_x \leqslant \operatorname{Re} f_2(x)$$

si

$$f_1, f_2 \in A \qquad \operatorname{Re} f_1(y) \leqslant u(y) \quad \forall\, y \in \Gamma$$

$$\operatorname{Re} f_2(x) \geqslant u(y) \quad \forall\, y \in \Gamma$$

Posons

$$u^-(x) = \sup_{\substack{f \in A \\ \operatorname{Re} f \leqslant u \text{ sur } \Gamma}} \operatorname{Re} f(x) \; ; \quad u^+(x) = \inf_{\substack{f \in A \\ \operatorname{Re} f \geqslant u \text{ sur } \Gamma}} \operatorname{Re} f(x)$$

on a

$$u^-(x) \leqslant \int_\Gamma u \, d\mu_x \leqslant u^+(x)$$

Réciproquement soit u_o une fonction de $C_{\mathbb{R}}(\Gamma)$; si γ est compris entre $u_o^-(x)$ et $u_o^+(x)$, on va montrer qu'il existe une mesure représentante μ_x de x telle que $\int_\Gamma u_o d\mu_x = \gamma$. L'application $f \longrightarrow \operatorname{Re} f(x)$ pour toute $f \in A$ définit une forme linéaire φ sur le sous espace vectoriel $u_o \longrightarrow \gamma$ de $C_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ engendré par A et u.

D'après le choix de γ on a pour toute v de V $v^-(x) \leqslant \varphi(v) \leqslant v^+(x)$
$u^+(x)$ est une forme sous additive positivement homogène.

D'après un théorème de Banach, il existe une forme linéaire $\tilde{\varphi}$ prolongeant φ à tout $C_R(\Gamma)$ et telle que $u^-(x) \subset \tilde{\varphi}(u) < u^+(x)$ pour toute u de $C_R(\Gamma)$
$\tilde{\varphi}$ est une forme linéaire positive donc continue sur $C_R(\Gamma)$; il existe donc une mesure μ_x positive telle que $f(x) = \int_\Gamma f \, d\mu_x$ pour toute f de A.
μ_x est donc aussi une mesure représentante $\gamma = \int_\Gamma u \, d\mu_x$

<u>Théorème</u>

La mesure représentante au point x sera unique si et seulement si $u^+(x) = u^-(x)$ pour toute u de $C_{\mathbb{R}}(\Gamma)$

II

Nous allons étudier les algèbres uniformes qui ont en un point x du spectre une mesure représentante unique ; soit $\mathcal{A}_x$ l'ensemble de ces algèbres nous montrerons que ces algèbres ont des propriétés généralisant l'algèbre A_o des fonctions continues sur le disque unité, analytiques à l'intérieur.

Si tous les points de Γ ont une mesure représentante unique l'algèbre sera dite fondamentale.

On peut être assuré qu'une algèbre A est fondamentale si $A+\bar{A}$ est dense dans $C_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ c'est-à-dire si A est une algèbre de Dirichlet que la frontière de Silov.

Dans toute la suite l'algèbre A considérée appartiendra à $\mathcal{A}_x$. Nous allons démontrer le théorème suivant

$$\underline{A+\bar{A} \text{ est dense dans } L^2(\mu_x)}$$

<u>Propriété II_1</u>

Soit m une mesure positive de masse 1 sur Γ et h une fonction positive de $L^1(m)$, alors

$$\exp\left[\int_\Gamma \log h\, dm\right] = \inf_{\substack{u\in C_R(\Gamma);\\ \int_\Gamma u\, dm=0}} \int_\Gamma e^u h\, dm$$

Si $u = L^1_{\mathbb{R}}(m)$ et (fonctions réelles intégrables) $\int u\, dm = 0$ notons $b(u) = \int_\Gamma e^u h\, dm$ et $b = \inf\limits_u b(u)$

$$a = \exp\int_\Gamma \log h\, dm$$

- Si $\log h$ est intégrable

si $\int_\Gamma u\, dm = 0$;

$$\int_\Gamma e^{u-\log h+\int_\Gamma \log h\, dm}\, dm \geq 1 \quad \text{car } e^v \geq 1+v\ ;$$

D'autre part si $u_o = -\log h + \int \log h\, dm$ $b(u_o) = \exp\int_\Gamma \log h\, dm$ donc $\left.\begin{array}{l}\text{donc } b\geq a\\ b\leq a\end{array}\right\} b=a$

- Si $\log h$ n'est pas intégrable.

$$\log h \leqslant h \quad \text{donc} \quad \int_\Gamma \log h \, dm = -\infty \quad \text{et} \quad a \leqslant b$$

D'autre part $\log(h+\varepsilon)$ est intégrable et si ε tend de façon monotone vers zéro on a $b \geqslant a$ donc $a = b$

Mais b reste inchangé si on ne considère que l'ensemble $B_1(m)$ les fonctions réelles intégrables bornées, car si u est une fonction de $L_1(m)$ il existe une suite u_n de fonction de $B_1(m)$

$$u_n \nearrow u \quad \text{si} \quad u > 0$$

$$u_n \searrow u \quad \text{si} \quad u < 0$$

et d'après le théorème de convergence monotone

$$\int e^{u_n} h \, dm \longrightarrow \int e^{u} h \, dm.$$

Si maintenant $u \in B_1(m)$ il existe une suite u_n de fonction de $C_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ $u_n \longrightarrow u$ p.p et $u_n \, dm = 0$ d'après le théorème de convergence bornée

$$\int e^{u_n} h \, dm \longrightarrow \int e^{u} h \, dm.$$

Donc l'inf. reste inchangé si on ne considère que les fonctions de $C_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ ce qui démontre la propriété.

<u>Théorème</u> II_2

Si $g \in L_1(\mu_x)$ et $\int_\Gamma fg \, d_x = 0$ pour toute f de A

alors $$\int_\Gamma \log|1-g| \, d\mu_x \geqslant 0$$

D'après la propriété précédente il suffit de démontrer que

$$\int_\Gamma e^u |1-g| \, d\mu_x \geqslant 1 \quad \text{pour toute } u \text{ de } C_{\mathbb{R}}(\Gamma)$$

donc $$\int_\Gamma u \, d\mu_x = 0$$

or par hypothèse, d'après la condition d'unicité I de B

$$0 = \int_\Gamma u \, d\mu_x = \sup_{\substack{\text{Re } f \leq u \text{ sur} \Gamma \\ f \in A}} \text{Re } f(x), \quad \text{et} \quad \text{Re } f(x) = \int_\Gamma \text{Re } f \, d\mu_x$$

or

$$\sup_{\substack{\text{Re } f \leq u \text{ sur} \Gamma \\ f \in A}} \int e^{\text{Re } f} |1 - g| \, d\mu_x \leq \int_\Gamma e^u |1 - g| \, d\mu_x$$

Le théorème sera démontré si pour tout ensemble $\mathfrak{F}$ de fonctions de A vérifiant

$\sup_{f \in \mathfrak{F}} \text{Re } f(x) = 0$ on a

$$\sup_{f \in \mathfrak{F}} \int_\Gamma e^{\text{Re } f} |1 - g| \, d\mu_x \geq 1$$

$$\sup_{f \in \mathfrak{F}} \int e^{\text{Re } f} |1 - g| \, d\mu_x = \sup_{f \in \mathfrak{F}} \int |e^f| |1 - g| \, d\mu_x \geq \sup_{y \in F} \left| \int_\Gamma e^f (1 - g) \, d\mu_x \right|$$

$$= \sup_{f \in \mathfrak{F}} \left| \int e^f \, d\mu_x \right| = \sup_{f \in \mathfrak{F}} e^{\text{Re } f(x)} = 1$$

Théorème II_3

$A + \bar{A}$ dense dans $L^2(\mu_x)$

Supposons qu'il existe g réelle telle que $\int_\Gamma f \, g \, d\mu_x = 0$ pour toute f de A, $-g$, tg, pour tout t réel vérifient aussi la même égalité.

D'après le théorème précédent

$$\int_\Gamma \log |1 - tg| \, d\mu_x \geq 0$$

soit

$$\int_\Gamma \log |1 - t^2 g^2| \, d\mu_x \geq 0$$

Posons

$$\Gamma'_t = \left\{ y \,;\, y \in \Gamma \quad g \geqslant \frac{1}{t} \right\}$$

$$\Gamma''_t = \left\{ y \,;\, y \in \Gamma \quad g > \frac{1}{t} \right\}$$

on a $$\int_{\Gamma'_t} \log (1 - t^2g^2)\, d\mu_x + \int_{\Gamma''_t} \log (t^2g^2 - 1)\, d\mu_x \geq 0$$

En utilisant les 2 inégalités

$$\log (1-x) \leq - x$$

$$\log (x-1) \leq x$$

$$- \int_{\Gamma'_t} t^2\, g^2\, d\mu_x + \int_{\Gamma''_t} t^2\, g^2\, d\mu_x \geq 0$$

soit

$$- \int_{\Gamma'_t} g^2\, d\mu_x + \int_{\Gamma''_t} g^2\, d\mu_x \geq 0$$

Si $t \longrightarrow 0$ $\quad \mu_x(\Gamma''_t) \longrightarrow 0$

$$\int_{\Gamma''_t} g^2\, d\mu_x \longrightarrow 0 \qquad \text{car} \qquad g \in L^2(\mu_x)$$

$$\int_{\Gamma'_t} g^2\, d\mu_x \longrightarrow \int_{\Gamma} g^2\, d\mu_x$$

Donc $$-\int_{\Gamma} g^2\, d\mu_x \geq 0 \qquad g = 0$$

Le théorème est démontré.

Notons H^2 l'adhérence $\tilde{A}$ de A dans $L^2(\mu_x)$

$$A_m = \left\{ f \ ;\ f \in A \int_{\Gamma} f\, d\mu_x = 0 \right\}$$
$$H^2_m = \left\{ f \ ;\ f \in H^2 \int_{\Gamma} f\, d\mu_x = 0 \right\}$$

$L^2 = H^2 \oplus \bar{H}^2_m$

III. $\boxed{\text{Etude de } H^2}$

H^2 est un sous espace vectoriel fermé de $L^2(\mu_x)$

H^2 n'est pas forcement une algèbre,

mais si F et G sont deux fonctions de H^2 dont l'une est bornée, leur produit appartient à H^2 ; car si G est une fonction bornée l'application

$f \in L^2 \longrightarrow f\,G$ est une application continue de L^2 dans L^2.

μ_x est multiplicative sur H^2 comme sur A, car si f_n et g_n sont deux suites de fonctions de A convergentes dans L^2 vers deux fonctions f et g de H^2, $f_n \times g_n$, f_n, g_n convergent vers $f \times g$, f, g dans $L^1(\mu_x)$

Pour pousser plus avant la recherche des structures analytiques en disque, nous allons montrer qu'on peut généraliser à l'algèbre A (qui a une mesure représentante unique en x), des propriétés de l'algèbre A_o du disque.

Si $d\theta$ est la mesure de Lebesgue sur le cercle unité, et H^p l'adhérence de A_o dans $L^p(\theta)$ [classes de Hardy], un théorème de Beurling établit que si S est un sous espace fermé de H^2 invariant par multiplication par z, alors il existe une fonction F de H^2 égale à 1 presque partout sur le cercle unité telle que $S = F\,H^2$

est une algèbre de Banach, son spectre est le disque unité, sa frontière de Silov le cercle unité. La mesure de Lebesgue, à 2π près, est une mesure représentante de l'homomorphisme

$$f \longrightarrow f(o) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\, d\theta$$

et A_o est une algèbre de Dirichlet sur le cercle unité. On peut généraliser le théorème de Beurling à une algèbre de Dirichlet générale et même aux algèbres envisagées (à mesure représentante unique en x).

<u>Théorème III_1</u>

Soit S un sous espace fermé de H^2 invariant par multiplication par les fonctions de A ; supposons qu'il existe une fonction g de S telle que

$$\int_\Gamma g\, d\mu_x \neq 0$$

Alors il existe une fonction G de H^2, de module constant presque partout telle que $S = G\,H^2$

Soit G la projection orthogonale de 1 sur S, G est différent de zéro car 1 n'est pas orthogonal à S (sinon $\int_\Gamma g\, d\mu_x = 0$ pour toute g de S)

$1 - G$ est orthogonal à S ; G donc $G\,f$ appartiennent à S pour toute f de A.

Donc

$$\int_\Gamma (1-\bar{G})\, G\, d\mu_x = 0 \quad \text{et} \quad \int_\Gamma (1-\bar{G})\, G\, f\, d\mu_x = 0$$

Soit

$$\int G\, d\mu_x = \int |G|^2\, d\mu_x \quad \text{et} \quad \int f\, G\, d\mu_x = \int f\, |G|^2\, d\mu_x$$

μ_x étant multiplicative sur H^2 on trouve

$$\int_\Gamma f\, d\mu_x = \int_\Gamma f\, \frac{|G|^2\, d\mu_x}{\int |G|^2\, d\mu_x}$$

La mesure

$$\frac{|G|^2\, \mu_x}{\int |G|^2\, d\mu_x}$$

positive est comme μ_x une mesure représentante de x donc égale à μ_x et

$$\frac{|G|^2}{\int_\Gamma |G|^2\, d\mu_x} = 1$$

presque partout. G est presque partout de module constant $k \neq 0$ $(G \neq 0)$

$$\int G\, d\mu_x = \int |G|^2\, d\mu_x = k^2$$

Montrons que $S = G\, H^2$

G appartient à S, donc $G\, A \subset S$ et G étant bornée $G\, H^2 \subset S$ on aura l'égalité si on montre que toute fonction de S est égale à sa projection orthogonale sur $G\, H^2$ ou que toute fonction g de S, orthogonale à $G\, H^2$ est presque partout nulle.

Soit g une telle fonction.

g est orthogonal à $G\, H^2$ donc à $G\, A$ et $\int_\Gamma g\, \bar{G}\, \bar{f}\, d\mu_x = 0$ pour toute f de A : $g\, \bar{G}$ est orthogonal à A.

g donc $g\, f$ appartient à S donc $\int_\Gamma (1-\bar{G})\, g\, f\, d\mu_x = 0$ pour toute f de A ; en particulier pour toute f de A_m $\int \bar{G}\, g\, f\, d\mu_x = 0$; $g\, \bar{G}$ est orthogonal à $\bar{A}_m$ $A + \bar{A}_m$ étant dense $\bar{G}\, g = 0$ p.p.

Or G est de module constant $\neq 0$ donc $g = 0$ p.p

Nous allons appliquer le théorème précèdent à un espace S particulier celui engendré dans H^2 par le noyau d'un homomorphisme $y \neq x$. Cela nous permettra d'exhiber une fonction Z qui jouera le rôle de la fonction identité pour l'algèbre A_o : $f \in A_o$ $f(y) = \sum_n a_n y^n$. Ici on aura de même

$$f(y) = \sum_n a_n Z^n(y) \quad \text{avec} \quad a_n = \int_\Gamma \bar{Z}^n \ f \ d\mu_x$$

Soit donc y un tel homomorphisme, nous allons supposer qu'il est continu dans $L^2(\mu_x)$, c'est-à-dire qu'il existe un nombre K tel que

$$f(y) \leq K \left(\int |f|^2 \ d\mu_x \right)^{1/2} \quad \text{pour toute } f \text{ de } A$$

y étant continue pour la norme L^2 a une extension unique $\tilde{y}$ à H^2. On dira qu'un tel homomorphisme y est borné dans H^2.

Si f, g sont deux fonctions de H^2 donc l'une est bornée, fg appartient à H^2 et $fg(\tilde{y}) = f(\tilde{y}) \ g(\tilde{y})$. Soit

$$S = \left\{ f, \ f \in H^2 \ f(\tilde{y}) = 0 \right\}$$

S est $\mathbf{1}$ sous espace vectoriel fermé de H^2 invariant par multiplication par les fonctions de A.

$$\exists \ f \in A \quad f(y) = 0 \ (f \in S) \text{ et } f(x) = \int_\Gamma f \ d\mu_x \neq 0 \text{ car } y \neq x$$

On peut donc appliquer le théorème précédent et on và démontrer la propriété suivante

Propriété III_2

Soit G la projection orthogonale de 1 sur S

Z la fonction

$$Z = \frac{1}{k} \ \frac{k^2-G}{1-G}$$

1. $|G| = k$ sur Γ $0 < k < 1$; $S = G \ H^2$

   $|Z| = 1$ sur Γ ; et $Z \in H^2$

2. la mesure $\mu = \frac{|1-G|^2}{1-k^2} \ d\mu_x$ est la mesure représentante de y.

3. $Z \ H^2 = H^2_m$

D'après le théorème précédent $|G| = k \neq 0$ et

$k = \int |G|\, d\mu_x \geq |\int_\Gamma G\, d\mu_x| = \int_\Gamma |G|^2\, d\mu_x = k^2$ donc $k^2 \leq k$ $k \leq 1$

Si $k = 1$ $G = 1$ or 1 n'appartient pas à S, noyau de l'homomorphisme $\tilde{y}$ donc $k < 1$.

Z appartient à H^2 car il est la somme d'une série entière en G, uniformément convergente et $|Z| = 1$

Soit

$$d\mu = \frac{|1 - G|^2}{1 - k^2}\, d\mu_x$$

c'est une mesure positive.

$$\int_\Gamma d\mu = \frac{1}{1-k^2} \int_\Gamma (1-G)(1-\bar{G})\, d\mu_x = \int \frac{(1-\bar{G})}{1-k^2}\, d\mu_x = 1$$

car $(1-G)$ est orthogonal à G.

Si $f \in A$ et $f(y) = 0$ $f \in S$

comme G appartient à S $f\,G$ appartient à S donc

$$\int_\Gamma f\, d\mu = \frac{1}{1-k^2}\int_\Gamma (f-f\,G)(1-\bar{G})\, d\mu_x = 0$$

Si $f \in A$ $f - f(y) \in S$ donc $\int (f-f(y))\, d\mu = 0$ d'après ce qui précéde.

Soit $\int f\, d\mu = f(y)$ et on a aussi $\int f\, d\mu = f(\tilde{y})$ pour tout f de H^2

μ est donc une mesure représentante de y.

1 et 2 sont donc prouvés.

Il est clair que $\int Z\, d\mu_x = 0$ car

$$\int Z\, d\mu_x \left[1 - \int_\Gamma G\, d\mu_x\right] = \frac{1}{k}\left[k^2 - \int_\Gamma G\, d\mu_x\right] = 0$$

$$\int_\Gamma Z\, d\mu_x = 0 \quad \text{car} \quad \int G\, d\mu_x = k^2 \neq 1$$

Donc

$$\int_\Gamma Z\, F\, d\mu_x = 0 \quad \text{pour toute } F \text{ de } H^2$$

Z étant borné $\quad Z\,H^2 \subset H^2$

Donc $\quad Z\,H^2 \subset H^2\mu_x$

Pour avoir l'égalité il suffit de démontrer que toute fonction de $H^2\mu_x$ orthogonale à $Z\,H^2$ est nulle.

Soit g une telle fonction. Montrons d'abord que $g \in S$; $g(\tilde{y}) = 0$

$$g(\tilde{y}) = \int_\Gamma g\, d\mu = \int_\Gamma g\, \frac{|1-G|^2}{1-k^2}\, d\,\mu_x$$

G étant la somme d'une série uniformément convergente en Z, $g\,(\tilde{y})$ sera nul si

$$\int Z^n\, g\, d\mu_x = 0 \quad \text{pour} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots\ldots$$

Si $n \geq 0$ cela provient du fait que $g \in H^2\,\mu_x$

Si $n < 0$ cela provient du fait que g est orthogonal à $Z\,H^2$

$g \in S$ donc il existe h appartenant à H^2 telle que $y = G\,h$

Nous allons montrer que $h = 0$ presque partout

$$\bar{h} = \bar{g}\,\frac{G}{k^2}\ ;\ \int_\Gamma |h|^2\, d\mu_x = \int_\Gamma \frac{h\,G\,\bar{g}}{k^2}\, d\mu_x$$

Mais $\quad G = k^2 + Z(1-G)\,k$

G étant borné $h(1-G)$ appartient à H^2 et g étant orthogonal à $Z\,H^2$

$$\int_\Gamma |h|^2\, d\mu_x = \int_\Gamma h\,\bar{g}\, d\mu_x = \int |h|^2\, \bar{G}\, d\mu_x\ .$$

$|G| = k \neq 1 \quad$ donc $h = 0$ presque partout.

g est nulle presque partout $\quad$ c.q.f.d.

IV Structure Analytique

Théorème IV_1

Soit π_{μ_x} l'ensemble des homomorphismes bornés dans $H^2(\mu_x)$. Alors il existe une fonction Z de H^2 telle que pour tout

$$y \in \pi_{\mu_x} \quad f(y) = \sum_n a_n \; Z^n(y) \quad \text{avec} \quad a_n = \int_\Gamma \bar{Z}^n f \, d\mu_x \, .$$

Soit $y_o \in \pi_{\mu_x}$, il existe une fonction Z_o vérifiant la propriété précédente.

Si $f \in H^2$ $\quad f - f(x) \in H^2_{\mu_x} = Z_o H^2$ $\qquad (Z_o H^2 = H^2_{\mu_x})$

Donc $\exists$ g tel que $f = f(x) + Z_o g$

g est évidemment défini de façon unique, on peut définir une application

$T = f \longrightarrow g = T(f)$ et comme

$$\int |f|^2 \; d\mu_x = |f(x)|^2 + \int |Z_o|^2 \; |g|^2 \, d\mu_x \geqslant \int |g|^2 \, d\mu_x$$

T est une application linéaire continue de norme inférieure ou égale à 1 de H^2 dans H_2.

$$f = f(x) + Z_o \; T(f)$$
$$Tf = Tf(x) + Z_o \; T^2 f$$

Soit

$$f = f(x) \; Z_o \; T \; f(x) + \dots \; Z_o^{n-1} \; T^{n-1} \; f(x) + Z_o^n \; T^n \; f$$

et

$$T \, f = \bar{Z}_o \; f - \bar{Z}_o \; f(x)$$
$$T^2 f = \bar{Z}_o^2 \; f - \bar{Z}o \times k_2 \qquad k_2 \text{ étant une constante}$$
$$T^n f = \bar{Z}_o^n \; - \sum_{p=1}^{n} \; \bar{Z}_o^p \; k_p \qquad k_p \text{ sont des constantes}$$

D'où

$$T^n \; f(x) = \int_\Gamma \bar{Z}_o^n \; f \; d\mu_x$$

Posons

$$a_n = \int_\Gamma \bar{Z}_o^n \; f \; d\mu_x$$
$$f = a_o + Z_o \; a_1 + \dots \; a_{n-1} \; Z_o^{n-1} + Z_o^n \; T^n(f)$$

et

$$f(\tilde{y}_o) = a_o + a_1\, Z_o(\tilde{y}_o) + \dots + a_{n-1}\, Z_o^{n-1}(\tilde{y}_o) + Z_o^n(\tilde{y}_o)\, T^n f(\tilde{y}_o)$$

Mais

$$Z_o(\tilde{y}_o) = \frac{1}{k}\int (k^2-G)(1-\bar{G})\, d\mu_x = k < 1$$

$\tilde{y}_o$ étant borné dans H^2 et T^n étant de norme inférieure à 1, les nombres

$T^n f(y_o)$ sont bornés. Et donc pour chaque y_o borné dans H^2, on a un développement en série entière de la fonction Z_o correspondante =

$$f(\tilde{y}_o) = \sum a_n\, Z_o^n(\tilde{y}_o) \qquad \forall\, f \in H^2$$

Soient y_o, y_1 2 homomorphismes bornés dans H^2 et Z_o et Z_1 les fonctions correspondantes. On a

$$Z_1\, H^2 = H^2_{\mu_x} = Z_o\, H^2$$

Donc $\frac{Z_o}{\bar{Z}_1}$ et $\frac{Z_1}{\bar{Z}_o}$ appartiennent à H^2 comme $|Z_o| = |Z_1| = 1$ sur Γ $\frac{Z_o}{\bar{Z}_1}$ et $\frac{\bar{Z}_o}{\bar{Z}_1}$ appartiennent à H^2 comme $A + \bar{A}$ est dense dans $L^2(\mu_x)$ il n'y a pas de fonction réelle non constante dans H^2 ; donc $Z_1 = \lambda\, Z_o$ où λ est une constante de module 1.

Alors
$$a_n(Z_1) = \bar{\lambda}^n\, a_n(Z_o)$$

et

$$a_n(Z_o)\, Z_o^n = a_n(Z_1)\, Z_1^n.$$

On peut donc écrire que

$$f(\tilde{y}_1) = \sum a_n(Z_o)\, Z_o^n$$

Il existe donc une fonction Z telle que

$$f(\tilde{y}) = \sum a_n\, Z^n(\tilde{y}) \quad \text{pour tout } y \text{ de } \pi_{\mu_x}$$

Théorème IV_2

Si π_{μ_x} contient un autre point que x lui-même, alors il existe une application τ biunivoque du dis que unité D ouvert sur $\pi_{\mu_x}(x)$ telle que pour toute f de A, $f_o\,\tau$ est analytique.

Soit Z la fonction du théorème précédent ;

D'après le théorème précédent $|Z(\tilde{y})|$ est égal au module de la projection de 1 sur le noyau dans H^2 de y c'est un nombre inférieur à 1.

On définit une application de M_{μ_x} sur D : $y \longrightarrow Z(\tilde{y})$ cette application est injective car si $Z(\tilde{y}_1) = Z(\tilde{y}_2)$, d'après le théorème précédent

$$f(\tilde{y}_1) = \sum a_n Z^n(\tilde{y}_1) = f(\tilde{y}_2) \quad \text{pour toute } f \text{ de } H^2$$

et les 2 homomorphismes y_1 et y_2 sont égaux.

Cette application est surjective. Soit λ un μ de D

Posons

$$\overset{f\in A}{\theta(f)} = \sum a_n \lambda^n \quad \text{avec} \quad a_n = \int_\Gamma \bar{Z}^n f \, d\mu_x$$

θ est linéaire de A dans $\mathbb{C}$

De plus d'après le théorème IV :

$$f = a_o + a_1 Z + a_2 Z^2 + \dots a_{n-1} Z^{n-1} + Z^n h \text{ ou } h \in H$$

Si $g \in A$ et $b_n = \int \bar{Z}^n g \, d\mu_x$

$$g = b_o + b_1 Z + \dots b_{n-1} Z^{n-1} + Z^n h' \quad \text{ou} \quad h' \in H^2$$

Si $$fg = C_o + C_1 Z + \dots C_{n-1} Z^{n-1} + Z^n k$$

Si on calcule $$C_n = \int_\Gamma \bar{Z}^n \times fg \, d\mu_x$$

on trouve d'après les propriétés de Z

$$C_o = a_o b_o \qquad C_1 = a_o b_1 + a_1 b_o \; ; \; C_2 = \dots\dots$$

et alors $\theta(fg) = \theta(f)\ \theta(g)$

θ est donc un homomorphisme de A. Et

$$|\theta(f)| \leq \sum |a_n|\ |\lambda^n| \quad \text{avec} \quad |a_n| \leq \int_\Gamma |Z^n|\,|f|\ d\mu_x \leq \left(\int_\Gamma |f|^2\ d\mu_x\right)^{1/2}$$

θ appartient donc à π_{μ_x}.

$$|\theta(f)| \leq \left(\int_\Gamma |f|^2\right)^{1/2} \times \frac{1}{1-\lambda}$$

Et l'application est bijective. Soit τ l'application inverse qui à chaque λ de D fait correspondre l'homomorphisme y défini par

$$f(y) = \sum a_n\ \lambda^n \quad \text{avec} \quad a_n = \int_\Gamma \bar{Z}^n\ f\ d\mu_x$$

Elle est bijective et $f \circ \tau(\lambda) = f(y) = \Sigma\ a_n\ \lambda^n$

$f \circ \tau$ est analytique pour chaque f de A.

<u>Propriété</u> IV_3

π_{μ_x} est la part de x de Gleason P(x) de x.

$P(x) \supset \pi_{\mu_x}$ d'après le 2 de la propriété III_2 de B.

$y \in \pi_{\mu_x}$ sa mesure représentante est absolument continue par rapport à μ_x de dérivée bornée donc $y \in P(x)$.

$P(x) \subset \pi_{\mu_x}$ car si $y \in P(x)$ y comme x a une mesure représentante unique de dérivée bornée p par rapport à μ_x.

$$|f(y)| = \left|\int_\Gamma f\ p\ d\mu_x\right| < ||p||\ \left[\int_\Gamma |f|^2\right]^{1/2} \quad \text{donc } y \in \pi_{\mu_x}.$$

Le théorème est démontré.

Si on suppose que l'algèbre est à mesure représentante unique pour tous les points les parts sont soit des points soit des "disques" sur lesquels les fonctions de A sont "analytiques".

En particulier tout point de la frontière de Silov est une part (sa mesure représentante est la mesure de Dirac)

Il peut y avoir des points parts hors de la frontière de Silov.

C. COMPLEMENTS

Si on étudie les démonstrations précédentes, on peut voir que les seules hypothéses nécessaires pour montrer que $H^2\mu_x$ est "disque" s'il contient plus d'un point sont :

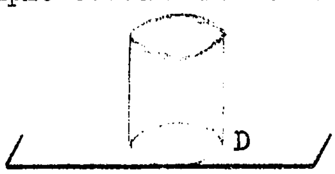
- 1 Il existe une mesure représentante μ_x telle qu'il n'y en a pas d'autre absolument continue par rapport à elle.
- 2 $A + \bar{A}$ dense dans $L^2\,\mu_x$

En fait Hoffman a montré que la seule hypothèse 1 entraîne 2 (article à paraître). On a toujours $P(x) \supset \pi_{\mu_x}$ (comme on l'avait indiqué au début les "disques" contenant μ_x seront forcement dans $P(x)$). En effet d'après 2 de la propriété III_2 2 mesures représentantes pour x et y ne sont pas singulières x et y appartiennent à la même part.

Mais tout y de $P(x)$ n'est pas forcement borné dans $H^2\mu_x$ si on n'a pas l'unicité, on n'a donc pas forcement tout $P(x)$. Il se peut que pour un mauvais choix de la mesure μ_x, π_{μ_x} soit réduit à x. S'il y a unicité ces difficultés disparaissent.

Si on ne suppose pas l'unicité des mesures représentantes ; d'une part on peu avoir encore une structure en disque pour les parts, et d'autre part un point de la frontière n'est pas forcement une part. L'exemple suivant le montre

Soit M le cylindre $D\times [0, 1]$



A l'algèbre des fonctions continues sur M et dont les restrictions à la base D du cylindre sont analytiques.

Le spectre de A est M.

D'autre part tout point M n'appartenant pas à D appartient à la frontière de Silov ; comme elle est fermée on a $\Gamma = M$

Tout point de M n'appartenant pas à l'intérieur du disque D est 1 part et l'intérieur du disque est une part. Chaque pointde ce disque a comme mesure représentante sur Γ la mesure de Dirac et la mesure donnée par le noyau de Poisson (il n'y a pas d'unicité).

- Références -

Les propriétés générales de la frontière de Silov sont traitées dans [5] L'existence de G mesure de Jensen dans le cas général est démontré dans [4] Les propriétés générales des algèbres uniformes sonténoncées dans [2] et la démonstration particulière du théorème III_1 sur les parts se trouve dans [3] L'étude générale de B se trouve dans [6] Hoffman fait les démonstrations dans le cas particulier des algèbres logmodulairesqui englobe l'algèbre H^∞ de fonction bornées sur le disque, analytiques à l'intérieur ; il généralise les résultats de Wermer [8] , sur les algèbres de Dirichlet, et l'étude des espaces H^p définis comme l'adhérence de l'algèbre dans $L^p(\mu_x)$ μ_x étant une mesure correspondante .

Et Lumer [7] en utilisant une étude de Bauer sur le problème de Dirichlet [1] montré qu'on pouvait étendre ces résultats au cas plus général des algèbres à mesure représentante unique en x, et il suffit en fait de démontrer la condition d'unicité B. I.

- Bibliographie -

[1] Bauer Séminaire de théorie du Potentiel. Brelot - Choquet - Deny (1958 - 59)

[2] Bishop Uniform algebras : Proceeding of the conference on complex analysis Minneapolis (1964) p. 272.

[3] Bishop Reprensenting measures for points in a uniform algebra Bulletin Amer Math. Siciety 70 p. 121 (1964).

[4] Bishop Holomorphis completions, analytic continuation and the interpolation of semi norms Am. Math. 78 p. 408 (1963).

[5] Gelfand Raikov Silov Anneaux normés commutatifs.

[6] Hoffman Analytic fonction and logmodular Banach algebra Acta Math. 108. (1962) p. 271.

[7] Lumer Analytic fonctions and Dirichlet problem Bulletin Amer. Math. Socie. 70 no1 (1964) p. 98.

[8] Wermer Dirichlet algebras Duke Journal . 27 (1960) p. 373.

Orsay 1965 - 1966

SEMINAIRE D'ANALYSE HARMONIQUE.

Exposé n° 7 : Alain BERNARD.

Ergodicité de la topologie de Zariski pour une algèbre fondamentale.

Introduction :

Soit A l'algèbre des limites uniformes de polynômes sur $\Gamma = \{z, |z| = 1\}$. Soit m la mesure de Lebesgue sur Γ. Soit K un sous compact de Γ. On sait que

i) $\{m(K) = 0 \text{ ou } 1\} \Rightarrow \{\exists f \in A, f^{-1}(0) = K\}$ et $\{A(K)$ est fermée dans $\mathbb{C}(K)\}$

ii) $\{m(K) \neq 0 \text{ et } \neq 1\} \Rightarrow \{f(K) = \{0\} \Rightarrow f = 0\}$ et $\{A(K)$ est non fermée dans $\mathbb{C}(K)\}$

Je me propose d'essayer d'étendre ces théorèmes au cas où A est une algèbre fondamentale, où la fonction de Šilov de A joue le rôle de Γ, où les mesures sur Γ, positives et multiplicatives sur A, jouent le rôle de m.

Définitions :

Soit X un compact et A une sous algèbre de $\mathbb{C}(X)$. Nous dirons que

i) $K \subset X$ est ergodique si K est compact et si pour toute mesure m sur X, positive, multiplicative sur A, on a $m(K) = 0$ ou $m(K) = 1$.

ii) $K \subset X$ est fermé-Zariski si pour tout $x \in X - K$, il existe $f \in A$ telle que $f(x) \neq 0$ et $f(K) = \{0\}$.

iii) $K \subset X$ est clos si K est compact et $A(K)$ est fermée dans $\mathbb{C}(K)$.

Remarques :

Les fermés-Zariski (resp. les ergodiques) de X sont les fermés pour une topologie $\mathcal{T}_z$ (resp. $\mathcal{T}_E$) sur X. $\mathcal{T}_z$ n'est autre que la topologie initiale sur X pour $A : X \longrightarrow \mathbb{C}$, lorsqu'on munit $\mathbb{C}$ de la topologie de Zariski. Lorsque X = Spectre (A), $\mathcal{T}_z$ est la "Hull - Kernel" topologie.

Dans le cas particulier de l'introduction, $\mathcal{T}_E$ et $\mathcal{T}_z$ sont les mêmes, et on a même équivalence avec la notion de clos. Ce sont précisément les liens entre ces trois notions que je propose d'étudier en général.

Résultats :

Nous supposerons dans la suite que X est la fonction de $\check{S}$ilov de A et que A est fondamentale (i.e. tout caractère sur A n'admet qu'une mesure représentative sur X). Nous considérons X comme plongé canoniquement dans Spectre (A).

Proposition 1 :

Clos $\Rightarrow$ fermé - Zariski . Clos $\Rightarrow$ ergodique.

Proposition 2 :

Si A est bien spectrée, fermé - Zariski $\Rightarrow$ ergodique.

(A est dite bien spectrée si pour tout $x \in$ Spectre (A), il existe m_x représentante sur X telle que Support $(m_x) \subset$ Gleas (x), où Gleas (x) désigne la partie de Gleason de x).

Proposition 3 :

Si A est une algèbre de synthèse de F.M. Riesz,

fermé Zariski $\Leftrightarrow$ clos $\Leftrightarrow$ ergodique.

(A est dite de synthèse de F.M. Riesz, si pour tout recouvrement $P \cup Q$ de Spectre (A) tel que $P \cup Q$ soient "saturés-Gleason", il existe deux sous algèbres A_P et A_Q de $\mathbb{C}(X)$ telles que :

i) $A = A_P \cap A_Q$

ii) A_P et A_Q soient de F.M. Riesz

iii) Spectre $(A_P) = P \cup X$ et Spectre $(A_Q) = Q \cup X$.

A est dite de F.M. Riesz si toute mesure sur $X = \check{S}$ilov (A) orthogonale à A et singulière par rapport à toute mesure sur X multiplicative sur A est nulle).

Remarque :

Comme algèbres satisfaisant aux conditions de la proposition 3 on connait les algèbres à un générateur (i.e. les limites uniformes de polynômes sur un compact de $\mathbb{C}$). [cf 1]

Démonstrations :

Elles sont essentiellement basées sur les deux lemmes suivants.

Lemme 1 :

Soit A une algèbre fondamentale. Soit K un sous compact de $X = \check{S}$ilov (A). Si $f \in A$ et est nulle sur K, alors f annule tout caractère de A dont la mesure représentative m sur $X = \check{S}$ilov (A) soit telle que $m(K) = 0$.

Lemme 2 :

Soit A un sous espace vectoriel fermé de l'espace $\mathbb{C}(X)$ des fonctions continues sur un compact X. Si K est un sous compact de X de $|\mu|$ - mesure nulle pour toute mesure μ sur X orthogonale à A, alors $A(K) = \mathbb{C}(K)$.

La démonstration du lemme 1 utilise la théorie des $H^2(m)$ pour une algèbre fondamentale [cf 2].

La démonstration du lemme 2 se fait par dualité : on sait que si le dual d'une flèche $E \longrightarrow F$ est un homomorphisme "fort" entre F^* et E^*, alors la flèche est un homomorphisme [cf 3] ; on en déduit que A(K) est fermée dans $\mathbb{C}(K)$. Il ne reste plus qu'à remarquer que A(K) est dense dans $\mathbb{C}(K)$.

On tire profit de ces lemmes en utilisant les faits suivants :

i) si $K \subset$ Spectre (A), Spectre (A(K)) = $\{x \in$ Spectre A, $m_x(K) = 1\}$

ii) si $K \subset$ Spectre (A), Spectre $(A/_{I_K})$ = adhérence Zariski de K dans le spectre de A. (I_K désigne l'idéal des éléments de A nuls sur K A(K) et $A/_{I_K}$ sont deux algèbres isomorphes, mais la première est munie de la norme uniforme, la deuxième de la norme quotient, et ces deux normes ne sont équivalentes que si K est clos).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] A. Bernard : Ensembles d'algèbres fondamentales . C.R.A.S. t 260 P. 42 - 44 (Janvier 1965).

[2] G. Lumer : Bull. A.M.S. 70 n° 1 P. 98 - 104 (1964)

[3] Bourbaki : Espaces vectoriels topologiques Chap. IV § 5. Ex. 12.

Note : Le lemme 2 a été démontré par E. Bishop dans le même but, dans l'article suivant :

E. Bishop : A general Rudin - Carleson theorem. Proc. A.M.S. P. 140 - 143 (Février 1962).

SEMINAIRE D'ANALYSE HARMONIQUE.

Exposé n° 8 : Monsieur MUTAFIAN.

Sous-espaces invariants de $L^2(T)$

INTRODUCTION.

L'origine du problème des sous-espaces invariants est le fameux article de Beurling publié dans les Acta de 1949.

Beurling partait d'un espace de Hilbert H muni de deux transformations adjointes T et S.

Soit $\mathfrak{M}_g$ le sous-espace fermé engendré par les $\{S^n g\}_0^\infty$; on cherche à caractériser les élements g tels que $\mathfrak{M}_g = H$. Si φ_λ est un élément propre de T correspondant à la valeur propre λ, alors $(\varphi_\lambda, S^n{}_g) = (T^n \varphi_\lambda, g) = \lambda^n(\varphi_\lambda, g)$, donc si Φ est la somme des sous-espaces propres de T une condition nécessaire est :

$$(\varphi, g) \neq 0 \qquad \forall \varphi \in \Phi.$$

Cette condition dite de Wiener n'est pas en général suffisante.

Pour aller plus loin, Beurling fait sur H des hypothèses supplèmentaires qui se ramènent à l'existence d'une base orthogonale $\{e_n\}$ telle que :

$$\left[\begin{array}{l} T\, e_n = e_{n-1} \quad \text{et} \quad S\, e_n = e_{n+1} \\ \text{les valeurs propres de } T \text{ sont simples et constituent le} \\ \text{disque } |\lambda| < 1, \text{ les éléments propres sont proportionnels} \\ \text{aux } \varphi_\lambda = \sum_0^\infty \lambda^n e_n. \end{array}\right.$$

Soit alors un élément $f = \sum_0^\infty \bar{f}_n e_n$ où $f_n = (e_n, f)$, donc $||f||^2 = \sum_0^\infty |f_n|^2$

Le produit scalaire $(\varphi_z, f) = \sum f_n z^n$ trnasforme l'élément $f \in H$ en une fonction $f(z)$ holomorphe dans le disque unité ouvert, et vérifiant

$$\int_{\mathbb{T}} |f(r\, e^{i\theta})|^2 \, d\theta \leq ||f||^2 \qquad \text{pour} \qquad r < 1.$$

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{T}$ désigne le cercle unité, D le disque unité ouvert, et $d\theta$ la mesure de Haar de masse 1 sur $\mathbb{T}$. On notera aussi $f_r(\theta)$ la fonction $f(r\, e^{i\theta})$ pour r fixé.

Cet espace de fonctions holomorphes dans D et telles que les f_r soient bornées en norme L^2 est l'espace H^2 de Hardy.

On sait que dans ces conditions la fonction f a une limite non tangentielle p. p. sur $\mathbb{T}$, et que la fonction $\tilde{f}$ ainsi définie sur $\mathbb{T}$ est de carré sommable ; de plus f est l'intégrale de Poisson de $\tilde{f}$.

On peut donc encore définir H^2 comme l'espace des fonctions de $L^2(\mathbb{T})$ prolongeables en fonctions analytiques dans D, c'est-à-dire dont les coefficients de Fourier s'annulent pour les entiers négatifs. On utilisera indifféremment ces deux définitions de H^2.

On obtient ainsi un isomorphisme de l'espace de départ H sur H^2, les transformations induites sur H^2 étant

$$T\, f(z) = \frac{f(z) - f(o)}{z} \qquad \text{et} \qquad S\, f(z) = z\, f(z)$$

On est donc amené à décrire, dans H^2, les sous-espaces fermés $\mathfrak{M}_f$ engendrés par les $\left\{z^n\, f(z)\right\}_{n=o}^{\infty}$.

La condition nécessaire de Wiener pour que $\mathfrak{M}_f = H^2$ s'écrit ici $f(z) \neq 0 \;\; \forall\, z \in D$, ce qui est évident à priori. Mais dans H^2 cette condition n'est pas suffisante.

De toute manière, $\mathfrak{M}_f$ possède la propriété d'invariance par l'opérateur S :

$$\forall\, g \in \mathfrak{M}_f, \quad z\, g \in \mathfrak{M}_f.$$

Un sous-espace possédant cette propriété s'appelle un sous-espace invariant de H^2. Ce sont ces sous-espaces que nous allons décrire par des méthodes différentes des méthodes d'analyse complexe pure utilisées par Beurling.

I. SOUS-ESPACES INVARIANTS DANS H^2.

On peut voir le problème d'un autre point de vue. On sait que si A est l'algèbre des fonctions continues sur le cercle T et prolongeables analytiquement à l'intérieur, tout idéal fermé de A est principal, c'est-à-dire formé de l'adhérence des multiples d'une fonction.

Si on considère maintenant H^2, qui n'est pas une algèbre, le produit d'une fonction de H^2 par une fonction de H^∞, c'est-à-dire bornée, est encore dans H^2. On peut donc chercher les sous-espaces fermés V de H^2 invariants par multiplication par les fonctions de H^∞.

Il faut et il suffit pour cela que V soit invariant par multiplication par z, car alors il est invariant par les polynômes, donc par les limites uniformes de polynômes. Or si $\varphi \in H^\infty$, $\varphi_r(z) = \varphi(r\,z)$ est, pour $r < 1$, limite uniforme de polynômes, et par suite $f \in V$ entraine $\varphi_r\, f \in V$. Mais $\varphi\, f$ est dans le sous-espace fermé de L^2 engendré par les $\varphi_r\, f$, et par suite $\varphi\, f \in V$.

Exemples :

Les fonctions qui s'annulent sur une partie donnée du disque ouvert forment un sous-espace invariant.

Dans H^2, la multiplication par une fonction q de module 1 sur T est une isométrie, donc l'ensemble des fonctions de la forme $q\,.\,f$ forme, quand f parcourt H^2, un sous-espace invariant qu'on notera $q\,.\,H^2$. Dans ce dernier cas, q est déterminé par le sous-espace : plus précisément, si $q(0) \neq 0$, c'est la projection sur le sous-espace de la fonction 1.

En effet ;

$$\int_T q\, g(1 - \bar{\lambda}\, \bar{q})\, d\theta = \int_T g(q - \bar{\lambda})\, d\theta = g_{(0)}(q_{(0)} - \bar{\lambda}),$$

donc en prenant $\lambda = \overline{q(0)}$ on voit que $(1 - \lambda \bar{q})$ est orthogonal à $q\, g$ $\forall g \in H^2$, donc $\lambda\, q$ est bien la projection de 1 sur $q\, H^2$. Ceci fait pressentir le résultat suivant :

<u>Théorème</u> : Tout sous-espace invariant de H^2 est de la forme $q\,H^2$ où q est une fonction de H^2 de module 1 sur le cercle.

En effet, soit V un sous-espace invariant. On peut supposer qu'il contient une fonction non nulle à l'origine, sinon on peut l'écrire $V = z^k V'$ où V' contient une fonction non nulle à l'origine. Dès lors, la fonction 1 n'est pas orthogonale à V, donc on la projette sur V en une fonction non nulle, dont on montre alors facilement qu'elle est de module constant et engendre V par multiplication par H^2.

II. SOUS-ESPACES INVARIANTS DANS L^2.

On considère ici l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{T})$. On note χ le caractère e^{ix}. On a ici une circonstance supplémentaire qui peut se produire, c'est que le sous-espace V soit aussi invariant par multiplication par χ^{-1}, ce qui revient à dire que $\chi V = V$. D'où les définitions.

<u>Définitions</u> :

Un sous-espace fermé V de $L^2(\mathbb{T})$ sera dit doublement invariant si $\chi \cdot V = V$ Il sera dit simplement invariant s'il est invariant et non doublement invariant. Etudions d'abord les sous-espaces doublement invariants. Il y en a d'évidents : étant donné un sous-espace E mesurable du cercle, on note $\mathfrak{M}_E$ l'ensemble des fonctions de L^2 qui s'annulent sur le complémentaire de E. Il est bien évident que tout $\mathfrak{M}_E$ est doublement invariant. Réciproquement ;

<u>1 Théorème de Wiener</u> :

Tout sous-espace doublement invariant de $L^2(\mathbb{T})$ est de cette forme.

Soit en effet $\mathfrak{M}$ un sous-espace doublement invariant, et soit q la projection de la fonction 1 sur $\mathfrak{M}$. Alors $1 - q$ est orthogonale à $\mathfrak{M}$, donc à $\chi^n q \quad \forall n \in \mathbb{Z}$: $\int_T (1 - \bar{q})\, \chi^n q \, d\theta = 0$.

La fonction $q - |q|^2$ a tous ses coefficients de Fourier nuls, donc est nulle, et q ne prend que les valeurs 0 et 1. Soit E l'ensemble $q^{-1}(1)$. On a

$\mathcal{M}_E = q\, L^2$. Or manifestement $q\, L^2 \subset \mathcal{M}$ puisque $q\, L^2$ est le sous-espace engendré par les $\{\chi^n q\}$. Si l'inclusion était stricte, il y aurait un $g \in \mathcal{M}$ orthogonal à $q\, L^2$, ce qui exige $\bar{g}\, q = 0$ p. p. Mais $1 - q$ est orthogonal aux $\chi^n g$, donc $(1 - q)\, \bar{g} = 0$ p. p., et ceci entraine $g = 0$ p. p. On a donc bien $\mathcal{M} = \mathcal{M}_E$.

Quand aux sous-espaces simplement invariants, leur structure est précisée par le théorème suivant :

2. Théorème de Beurling :

Tout sous-espace simplement invariant de $L^2(\mathbb{T})$ est de la forme $q \,.\, H^2$ où q est une fonction de module 1 p. p. déterminée par le sous-espace à une constant multiplicative près.

Remarquons d'abord que si q est une fonction de H^2 de module 1, la multiplication par q est une isométrie, donc conserve l'adhérence : si deux fonctions f et g sont telles que $f = q\, g$, alors $\mathcal{M}_f = q\, \mathcal{M}_g$. En particulier $q\, H^2 = \mathcal{M}_q$.

Montrons que réciproquement tout sous-espace invariant $\mathcal{M}$ est de cette forme. On va donner deux démonstrations.

1. L'inclusion $\chi \,.\, \mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ étant stricte puisque $\mathcal{M}$ est simplement invariant, il existe un élément $q \in \mathcal{M}$ non nul orthogonal à $\chi \,.\, \mathcal{M}$. En particulier q est orthogonal aux $\chi^n q$ $\forall\, n \geq 1$, donc $\int_T |q|^2 \chi^n \, d\theta = 0$. Ceci exige $|q|$ constant ; on peut supposer par exemple $|q| = 1$. Or $\mathcal{M}$, contenant q, contient $\mathcal{M}_q = q\, H^2$. Soit alors h un élément de $\mathcal{M}$ orthogonal à $q\, H^2$: $\forall\, n \geq 0$, $\int_T \bar{h}\, q\, \chi^n \, d\theta = 0$. Mais pour $n \geq 1$, $\chi^n h \in \chi\, \mathcal{M}$, donc est orthogonal à q, c'est-à-dire qu'on a

$$\int \bar{h}\, q\, \chi^{-n} \, d\theta = 0 \quad \forall\, n \geq 1.$$

Finalement la fonction $\bar{h}\, q$ a tous ses coefficients de Fourier nuls, donc est nulle. Or $|q| = 1$, donc $h = 0$ et par suite $\mathcal{M} = q\, H^2$.

Montrons l'unicité de q : si $q H^2 = q H^2$, alors $p\bar{q}$ et $q\bar{p}$ sont analytiques, donc constantes, c'est-à-dire que $\frac{p}{q}$ est constante. Remarquons enfin que ce théorème contient le résultat bien connu qu'une fonction f de H^2 non identiquement nulle ne peut pas s'annuler sur un ensemble de mesure positive sur T, car si cela était $\mathfrak{M}_f$ ne pourrait être de la forme $q H^2$, donc serait formé de la seule fonction nulle.

2. On peut donner une autre démonstration explicitant la structure de $\mathfrak{M}$. On pose $\mathfrak{M}_n = \chi^n \mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}_\infty = \cap \mathfrak{M}_n$, et on appelle $\mathfrak{R}_n$ l'orthogonal de $\mathfrak{M}_{n+1}$ dans $\mathfrak{M}_n$.

On a alors $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_\infty \oplus \mathfrak{R}_o \oplus \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2 \oplus \ldots$

On montre comme précedemment que les fonctions de $\mathfrak{R}_o$ ont un module constant. Il en résulte que $\mathfrak{R}_o$ est de dimension 1. En effet, si φ_1 et φ_2 sont dans $\mathfrak{R}_o$ et orthogonales entre elles, φ_1 est orthogonale à $\chi^n \varphi_2$ et φ_2 à $\chi^n \varphi_1$ $\forall\ n \geq 0$, d'où il résulte que $\overline{\varphi_1}\, \varphi_2 = 0$, donc φ_1 ou $\varphi_2 = 0$ car leur module est constant. D'autre part, $\mathfrak{M}_\infty$ est doublement invariant, donc de la forme $e L^2$ où e est une fonction caractéristique. Mais si on prend $q \in \mathfrak{R}_o$, $\chi^n q$ est orthogonale à e $\forall\ n \geq 0$, donc $e q$ est analytique. Mais $\mathfrak{M}_\infty \neq L^2$, donc e ne vaut pas 1 p. p., et $e q$, fonction de H^2 s'annulant sur un ensemble de mesure positive , est nulle p. p. Comme q a un module constant supposé non nul, il en résulte $e = 0$. On voit aisément que $\mathfrak{R}_n = \chi^n \mathfrak{R}_o$, d'où finalement :

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{R}_o \oplus \chi\, \mathfrak{R}_o \oplus \chi^2\, \mathfrak{R}_o \oplus \ldots$$

$\mathfrak{R}_o$ étant de dimension 1. On choisit alors q dans $\mathfrak{R}_o$ et de module 1, et ceci montre bien que $\mathfrak{M} = q H^2$.

3. Conséquences :

Soit f une fonction de L^2, et soit $\mathfrak{M}_f$ le plus petit sous-espace invariant contenant f, c'est-à-dire le sous-espace fermé engendré par les

$\{\chi^n f\}$ pour $n \geq 0$.

Si $K = f^{-1}(0)$ est de mesure positive, alors nécessairement $\mathcal{M}_f$ est doublement invariant, et c'est exactement $\mathcal{M}_{\complement K}$. Si K est de mesure nulle, ou bien $\mathcal{M}_f$ est simplement invariant, ou bien $\mathcal{M}_f$ est égal à L^2 tout entier.

Pour que, dans ce cas, $\mathcal{M}_f$ soit simplement invariant, il faut et il suffit qu'il existe une fonction p de module 1 telle que $f \in p\,H^2$, car alors $\mathcal{M}_f \subset p\,H^2$ et $\mathcal{M}_f$ ne peut-être L^2. Or ceci revient à dire que f a même module qu'une fonction de H^2.

On connait l'inégalité de Jensen

$$\int_T \operatorname{Log}|f|\,d\theta \geq \operatorname{Log}\left|\int_T f\,d\theta\right|$$

vérifiée par les fonctions de H^2, et on en déduit que la seule condition imposée au module d'une fonction analytique est d'avoir un logarithme intégrable :

$$\int \operatorname{Log}|f|\,d\theta > -\infty .$$

On en déduit les trois cas, pour f donnée dans L^2 :

- si $\operatorname{Ker} f$ est de mesure positive, $\mathcal{M}_f$ est doublement invariant et $\neq L^2$
- si $\operatorname{Ker} f$ est de mesure nulle et $\operatorname{Log}|f|$ non intégrable, $\mathcal{M}_f = L^2$.
- si $\operatorname{Ker} f$ est de mesure nulle et $\operatorname{Log}|f|$ intégrable, $\mathcal{M}_f$ est simplement invariant.

III. Etude de H^2.

Commençons par rappeler certains résultats sur les fonctions analytiques dont nous aurons besoin dans la suite.

<u>Rappels sur les fonctions analytiques</u>.

Soit f une fonction de H^2, définie comme on l'a dit au début soit dans D, soit presque partout sur T. Elle peut s'exprimer dans D comme l'intégrale de Poisson de ses valeurs sur T, ou encore, si g est sa partie réelle sur T, elle s'écrit, si $f(0)$ est réel,

$$f(z) = \int_T \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \, g(\theta) \, d\theta.$$

Signalons les deux théorèmes que nous utiliserons.

Théorème d'Herglotz. Toute fonction harmonique positive dans D est l'intégrale de Poisson d'une mesure positive.

Théorème de Fatou. L'intégrale de Poisson d'une mesure finie μ a sur T une limite non-tangentielle p. p. égale à la dérivée de μ par rapport à la mesure de Lebesgue.

La dérivée de μ est l'unique fonction intégrable $\varphi(\theta)$ telle que la mesure $d\mu - \varphi(\theta)\, d\theta$ soit singulière.

Définition :

On appelle fonction intérieure une fonction analytique de module 1 sur le cercle. Dans H^2, les sous-espaces invariants sont nécessairement simplement invariants donc des $q. H^2$ où q est par suite intérieure.

1. Etude des fonctions intérieures :

Soit q une fonction intérieure. Donc q est analytique et de module $\leqslant 1$ dans D, et ses limites sur T sont de module 1 p. p.

Produits de Blaschke.

q est analytique à l'intérieur du cercle. Par suite q n'a qu'un nombre fini de zéros dans tout cercle de rayon < 1, donc un ensemble dénombrable de zéros dans le disque fermé. On montre que, si α_n désigne la suite de ces zéros, le produit infini des $|\alpha_n|$ est convergent, à condition que les α_n soient $\neq 0$.

Posons en effet

$$B'_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z - \alpha_k}{1 - \overline{\alpha}_k z},$$

qui est une fonction intérieure.

Le rapport $\frac{q}{B'_n}$ est analytique dans le disque ouvert, de module 1 sur le cercle, donc de module ≤ 1 à l'intérieur. En particulier si $q(0) \neq 0$, on a

$$\prod_1^n |\alpha_n| = |B'_n(0)| \geq |q(0)| > 0,$$

donc le produit infini converge.

Si on pose

$$B_n(z) = - \frac{\bar{\alpha}_n}{|\alpha_n|} B'_n(z),$$

on constate que

$$||B_m - B_n||_2^2 = \int_T (B_m^2 + B_n^2 + 2 \,\mathcal{R}e\, B_n \overline{B_m})\, d\theta = 2\left[1 - \mathcal{R}e \int \frac{B_n}{B_m}\, d\theta\right] = 2\left[1 - \prod_{m+1}^n |\alpha_k|\right]$$

car les B_k sont de module 1 sur le cercle.

Donc les B_n convergent dans H^2 vers une fonction $B(z)$. On en déduit aisément que B est une fonction intérieure.

Dès lors si q a un zéro d'ordre p à l'origine et des zéros d'ordre p_n aux points α_n, on pose

$$B(z) = z^p \prod_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\bar{\alpha}_n}{|\alpha_n|} \cdot \frac{\alpha_n - z}{1 - \bar{\alpha}_n z} \right]^{p_n},$$

et on peut écrire $q = B\, g$ où g est une fonction intérieure sans zéros.

<u>Fonctions singulière</u>.

Cherchons la structure de la fonction g. Une telle fonction peut s'écrire sous la forme $g = e^{-h}$ où h est analytique dans le disque ouvert, et de partie réelle positive puisque g est bornée par 1.

D'après le théorème d'Herglotz, $\mathcal{R}e\, h$, fonction harmonique positive, est l'intégrale de Poisson d'une mesure μ positive sur le cercle, donc

$$h(z) = \int_T \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}\, d\mu(\theta).$$

De plus, d'après le théorème de Fatou, les limites non-tangentielles de $\mathcal{R}e\, h$,

c'est-à-dire les valeurs de $\mathfrak{R}e\ h$ sur le cercle, sont p. p. égales à $\frac{d\mu}{d\theta}$.
On a donc $\frac{d\mu}{d\theta} = 0$ p. p. puisque $|g|$ vaut 1, donc $\mathfrak{R}e\ h$ vaut 0 sur le cercle.
Par suite μ est une mesure singulière par rapport à la mesure de Lebesgue.

Conclusion.

Toute fonction intérieure peut toujours s'écrire sous la forme $q = B\ g$ où B est le produit de Blaschke formé avec les zéros de q et g une fonction de la forme

$$\exp - \int \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}\ d\mu(\theta)$$

où μ est une mesure positive singulière par rapport à la mesure de Lebesgue.

Définition :

On appelle fonction extérieure une fonction de H^2 telle que le sous-espace invariant $\mathfrak{M}_f$ engendré par f soit H^2 tout entier. Ceci signifie donc que la famille des $\{\chi^n f\}$ pour $n \geq 0$ est totale dans H^2. En particulier f n'a pas de zéros dans le disque ouvert.

2. Etude des fonctions extérieures.

La structure des fonctions extérieures sera précisée par les théorèmes suivants :

Théorème 1 :

Une fonction extérieure est, à un facteur constant près, entièrement déterminée par son module.

Soient en effet f et g deux fonctions extérieures de même module, donc $f = p \cdot g$ où p est de module 1, d'où, $\mathfrak{M}_f = p\ \mathfrak{M}_g$, soit $H^2 = p\ H^2$ puisque f et g sont extérieures.

Ceci exige évidemment que p soit constante, puisque p et $\bar{p}$ sont analytiques.

Théorème 2 :

Toute fonction φ de H^2 peut s'écrire sous la forme $\varphi = p \cdot f$ où p

est intérieure et f extérieure ; cette décomposition est unique à un facteur constant de module 1 près.

Si φ est extérieure, c'est évident et l'unicité résulte d'ailleurs immédiatement du théorème précédent.

Sinon, φ engendre un sous-espace invariant $\mathcal{M}_\varphi$ strictement inclus dans H^2, donc de la forme $p\,H^2$ où p est intérieure. En particulier $\varphi = p \cdot f$ avec $f \in H^2$. Donc $\mathcal{M}_\varphi = p \cdot \mathcal{M}_f$. Or $\mathcal{M}_\varphi = p\,H^2$, d'où il résulte que $\mathcal{M}_f = H^2$, la simplification par p étant possible du fait que p, intérieure, est p. p. non nulle sur le cercle. Supposons qu'on ait une autre décomposition $\varphi = p' \cdot f'$. Les fonctions extérieures f et f' sont alors de même module $|\varphi|$, donc égales à une constante de module 1 près. De même pour p et p'.

Théorème 3 :

Une fonction extérieure peut se mettre sous la forme

$$f(z) = \lambda \exp \int_T \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}\, \varphi(\theta)\, d\theta,$$

où λ est une constante de module 1 et φ une fonction réelle intégrable, telle que $e^{2\varphi}$ soit aussi intégrable.

Montrons d'abord qu'une telle fonction est extérieure. Elle est bien entendu analytique. D'autre part, sur le cercle, on a $\left|f_{(e^{i\theta})}\right| = e^{\varphi(\theta)}$ p. p., donc f est bien dans H^2 puisque $e^{2\varphi}$ est intégrable. Reste à montrer que le facteur intérieur de la décomposition de f est constant.

Soit q ce facteur intérieur. f n'ayant pas de zéros dans le disque ouvert, q ne comprend pas de produit de Blaschke, donc c'est une fonction singulière ; soit μ la mesure singulière associée. Alors

$$q^{-1} f = \lambda \exp \int_T \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}\, [\varphi(\theta)\, d\theta + d\mu(\theta)]$$

devrait être une fonction extérieure.

Or on voit facilement qu'elle n'est même pas analytique (par exemple parce qu'elle ne vérifie pas l'inégalité de Jensen) du fait que la mesure μ est positive. Il faut donc que $\mu = 0$, c'est-à-dire que le facteur intérieur de f est bien constant. Donc f est intérieure.

Soit alors une fonction extérieure $F(z)$, et montrons qu'elle est de cette forme : Il suffit de considérer la fonction

$$g(z) = \exp \int_T \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \operatorname{Log} |F(e^{i\theta})| \, d\theta.$$

C'est une fonction extérieure d'après ce qu'on vient de voir, car $\operatorname{Log} |F|$ est intégrable (F est analytique) ainsi que $|F|^2$ $(F \in L^2)$. Or le théorème de Fatou donne $|g(e^{i\theta})| = |F(e^{i\theta})|$ p. p., donc les deux fonctions extérieures F et g ne diffèrent que d'une constante multiplicative de module 1, et F a bien la forme de f.

On a donc bien ainsi obtenu toutes les fonctions extérieures. Il en résulte immédiatement deux autres propriétés caractéristiques des fonctions extérieures.

<u>Conséquences</u> :

1. Les fonctions extérieures sont caractérisées par le fait que l'inégalité de Jensen devient égalité.

$$\operatorname{Log} \left| \int_T f(\theta) \, d\theta \right| = \int_T \operatorname{Log} |f(\theta)| \, d\theta.$$

2. Si f est extérieure et si g est une fonction analytique de même module que f sur le cercle, alors $|g| \leqslant |f|$ dans le disque ouvert.
3. Les fonctions extérieures sont exactement les fonctions inversibles dans H^2.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Beurling A. On two problems concerning lincar transformations in Hilbert space, Acta Math. 81 (1949) 239 - 255.

[2] Helson H. Lectures on Invariant subspaces (1964)

[3] Helson H et Lowdenslager D. Prediction theory and Fourier Series in several variables, Acta Math. 99 (1958) 165 - 202.

[4] Helson H et Lowdenslager D. Prediction theory and Fourier Series in several variables. Acta Math. 106 (1961) 175 - 213.

[5] Helson H et Lowdenslager D. Invariant subspaces. Proc. Internat. Symp. Linear Spaces, Jerusalem (1960) 251 - 262.

[6] Helson H. Proceedings London (1965) (Inédit).

[7] Hoffman K. Banach Spaces of Analytic Functions. (1962).

[8] Loomis L.H. Note on a theorem of Mackey. Duke Math. J 19 (1952).

[9] Mackey G.W. A theorem of Stone and von Neumann. Duke Math J. 16 (1949) 313-326

[10] Riesz-Nagy Leçons d'Analyse Fonctionnelle.

[11] Rudin W. Fourier Analysis of Groups. (1962).

SEMINAIRE D'ANALYSE HARMONIQUE.

Exposé n° 9 : J. PEYRIERE.

Sous espaces invariants de $L^2(R)$.

G désigne un groupe abélien localement compact dénombrable à l'infini, Γ désigne son groupe dual.

Si $q \in L^\infty(G)$ S_q désigne l'opérateur de $L^2(G)$ défini par :
$S_q f(x) = q(x)\, f(x)$ presque partout. C'est un opératuer continu et l'on a ,
$||S_q|| = ||q||_\infty$

Sous espaces doublement invariants.

Définition :

Un sous espace vectoriel $\mathfrak{M}$ de $L^2(G)$ est dit doublement invariant si :

1° il est fermé
2° $\forall \lambda \in \Gamma \quad S_\lambda \mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$

La condition 2° équivaut à la condition : $\forall \lambda \in \Gamma \quad S_\lambda \mathfrak{M} = \mathfrak{M}$

Exemple :

Soit E un borélien de G. Posons :

$$\mathfrak{M}_E = \{f \; ; \; f \in L^2(G) \quad f = 0 \text{ presque partout sur } E\}$$

C'est un sous espace doublement invariant de $L^2(G)$. Nous allons montrer que tous sont de cette forme.

Proposition 1 :

Si T est un opérateur continu de $L^2(G)$ commutant avec S_λ pour tout λ il existe un élément unique q de $L^\infty(G)$ tel que $T = S_q$.

De plus si $T^2 = T$ q est une fonction caractéristique et T est un projecteur.

Si T est une isométrie $|q| = 1$ presque partout.

Soient f et g deux éléments quelconques de $L^2(G)$.

$$\forall \lambda \in \Gamma \quad \langle S_\lambda T f, g\rangle = \langle T S_\lambda f, g\rangle = \langle S_\lambda f, T^* g\rangle$$

En explicitant :

$$\forall \lambda \in \Gamma \int_{x\in G} (x,\lambda)(T f(x) \cdot \overline{g(x)} - f(x)\, \overline{T^* g(x)})\, dx = 0$$

$Tf \cdot \bar{g} - f \cdot \overline{T^* g} \in L^1(G)$, sa transformée de Fourier est nulle.

On a donc $Tf \cdot \bar{g} = f \cdot T^* g$.

Alors

$$\forall \varphi \in L^\infty(G) \quad \int_{x\in G} \varphi(x)\, Tf(x)\, \overline{g(x)}\, dx = \int_{x\in G} \varphi(x)\, f(x)\, \overline{T^* g(x)}\, dx$$

c'est-à-dire $\langle S_\varphi Tf, g\rangle = \langle S_\varphi f, T^* g\rangle = \langle T S_\varphi f, g\rangle$.

On a donc $S_\varphi T = T S_\varphi$.

Soient maintenant f et g deux éléments de $L^2(G) \cap L^\infty(G)$. On a : $fg \in L^2(G)$

$$T(fg) = T S_f g = S_f Tg = S_g Tf$$

Puisque G est dénombrable à l'infini il existe un élément g de $L^2(G) \cap L^\infty(G)$ presque partout $\neq 0$. Posant $q = \frac{Tg}{g}$ on obtient :

$$\forall f \in L^2(G) \cap L^\infty(G) \qquad Tf = S_q f$$

Reste à montrer que $q \in L^\infty(G)$; en effet si cela est T et S_q sont deux opérateurs continus coïncidant sur l'ensemble $L^2(G) \cap L^\infty(G)$ dense dans $L^2(G)$ ce qui implique que $T = S_q$.

Supposons que $\exists\, \varepsilon > 0$ $\exists\, A$ borélien de G de mesure $\neq 0$ tels que $|q(x)| \geq ||T|| + \varepsilon$ presque partout sur A. Alors $\exists\, B \subset A$ $0 < m(B) < +\infty$. On a

$$\varphi_B \in L^2(G) \cap L^\infty(G) \quad \text{et} \quad (||T|| + \varepsilon)\sqrt{m(B)} \leq ||S_q\, \varphi_B|| =$$

$$||T\, \varphi_B|| \leq ||T||\, \sqrt{m(B)}.$$

Ceci prouve que $\forall n \in \mathbb{N}$ $|q(x)| \leq ||T|| + \frac{1}{n}$ presque partout. Par suite $||q||_\infty \leq ||T||$.

L'unicité de q est évidente. Supposons que $T^2 = T$

$T = S_q \quad T^2 = S_{q^2} = S_q$ donc $q^2 = q$ en vertu de l'unicité.

Et q ne prend que les valeurs 0 ou 1 ; c'est la fonction caractéristique d'un ensemble mesurable E. T est alors la projection sur $\mathcal{M}_{\complement E}$.

Supposons que T soit une isométrie

$T = S_q \Rightarrow T^* = S_{\bar{q}}$. Or $T^* T = I$ donc $q \bar{q} = 1$.

<u>Théorème 1</u> : (Wiener)

Soit $\mathcal{M}$ un sous espace doublement invariant de $L^2(G)$. Il existe un borélien E de G, déterminé à un ensemble négligeable près, tel que $\mathcal{M} = \mathcal{M}_E$.

Soit P la projection de $L^2(G)$ sur $\mathcal{M}$. Pour tout λ $S_\lambda P S_\lambda^{-1}$ est un projecteur, son image est $S_\lambda \mathcal{M} = \mathcal{M}$, donc P commute avec les S_λ ; d'après la proposition précédente il existe un borélien $A \subset G$ tel que $P = S_q$ où $q = \varphi_A$. Posant $E = \complement A$ on obtient $\mathcal{M} = \mathcal{M}_E$.

<u>Sous espaces simplement invariants de $L^2(\mathbb{R})$.</u>

Prenons $G = \mathbb{R}$ alors $\Gamma = \mathbb{R}$ $(x, \lambda) = e^{i x \lambda}$. Prenons pour mesure de Haar sur $\mathbb{R}$ la mesure de Lebesgue divisée par $\sqrt{2\pi}$.

<u>Définition</u> :

Un sous espace vectoriel $\mathcal{M}$ de $L^2(\mathbb{R})$ est dit simplement invariant si :

1° Il est fermé

2° $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+ \quad S_\lambda \mathcal{M} \subset \mathcal{M}$

3° Il n'est pas doublement invariant.

Les conditions 1° et 2° étant supposées vérifiées on a les équivalences suivantes :

3° $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad S_\lambda \mathcal{M} \neq \mathcal{M} \Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad S_\lambda \mathcal{M} \neq \mathcal{M}$.

<u>Exemples</u> :

Désignons par H^2 l'ensemble des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ dont les transformées de Fourier sont presque partout nulles sur $]-\infty, 0]$: c'est un sous espace simplement invariant.

Plus généralement si $|q| = 1$ presque partout $S_q H^2$ est simplement invariant.

Soit $\mathcal{M}$ un sous espace simplement invariant. Posons $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\mathcal{M}_\lambda = S_\lambda \mathcal{M}$.

La propriété de simple invariance de $\mathcal{M}$ implique que $\lambda < \mu \Rightarrow \mathcal{M}_\lambda \supset \mathcal{M}_\mu$ strictement. Soit P_λ la projection de $L^2(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{M}_\lambda$. $S_\lambda P_\mu S_\lambda^{-1}$ est un projecteur, son image est $S_\lambda \mathcal{M}_\mu = \mathcal{M}_{\lambda+\mu}$. On a donc $P_{\lambda+\mu} = S_\lambda P_\mu S_\lambda^{-1}$.

Posons

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \mathcal{M}_\lambda^- = \bigcap_{\mu<\lambda} \mathcal{M}_\mu \qquad \mathcal{M}_\lambda^+ = \overline{\bigcup_{\mu>\lambda} \mathcal{M}_\mu}$$

$$\mathcal{M}_{+\infty} = \bigcap_{\mu\in\mathbb{R}} \mathcal{M}_\mu \qquad \mathcal{M}_{-\infty} = \overline{\bigcup_{\mu\in\mathbb{R}} \mathcal{M}_\mu}$$

<u>Proposition 2</u> : $\quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \mathcal{M}_\lambda^+ = \mathcal{M}_\lambda = \mathcal{M}_\lambda^-$.

Les inclusions $\mathcal{M}_\lambda^+ \subset \mathcal{M}_\lambda \subset \mathcal{M}_\lambda^-$ sont évidentes. Posons $\mathcal{M}_\lambda^- = \mathcal{M}_\lambda \oplus \mathcal{R}_\lambda$. Puisque $\mathcal{R}_\lambda = S_\lambda \mathcal{R}_0$ il suffit de montrer que $\mathcal{R}_0 = \{0\}$.

Soit $f \in \mathcal{R}_0$. $\forall \lambda > 0$ $S_\lambda f \in \mathcal{M}_0^+$. Donc $< S_\lambda f, f> = 0$. Et l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} |f(x)|^2 \, dx$$

est nulle pour $\lambda > 0$ donc aussi pour $\lambda < 0$; c'est une fonction continue de λ car $|f|^2 \in L^1(\mathbb{R})$, elle est donc nulle et $f = 0$ car la transformation de Fourier est une injection.

<u>Proposition 3</u> : $\quad \mathcal{M}_{+\infty} = \{0\} \qquad \mathcal{M}_{-\infty} = L^2(\mathbb{R})$.

L'inclusion $\mathcal{M}_{+\infty} \subset \mathcal{M}_{-\infty}$ est stricte : on peut décomposer $L^2(\mathbb{R})$ ainsi : $L^2(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{-\infty}^{\perp} \oplus H \oplus \mathcal{M}_{+\infty}$, $H \neq \{0\}$. $\mathcal{M}_{-\infty}$ et $\mathcal{M}_{+\infty}$ étant doublement invariants il en est de même de H.

D'après le théorème de Wiener il existe un borélien A tel que $H = \mathcal{M}_A$. On a $m(\complement A) \neq 0$ car $H \neq \{0\}$.

Posons $\mathcal{N}_\lambda = \mathcal{M}_\lambda \cap H$, appelons Π et Q_λ les projections de $L^2(\mathbb{R})$ respectivement sur H et $\mathcal{N}_\lambda$. étant la multiplication par la fonction $1 - \varphi_A$ commute avec S_λ pour tout λ. On a les formules suivantes :

$Q_\lambda = P_\lambda \Pi$

$Q_{\lambda+\mu} = S_\lambda Q_\mu S_\lambda^{-1}$ en effet $Q_{\lambda+\mu} = P_{\lambda+\mu} \Pi = S_\lambda P_\mu S_\lambda^{-1} \Pi = S_\lambda P_\mu \Pi \, S_\lambda^{-1}$

De plus les restrictions à H de S_λ et Q_λ sont des opérateurs de H, nous les noterons aussi S_λ et Q_λ.

La famille $\{I - Q_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ de projecteurs de H est une décomposition de l'identité de H. D'après le théorème de Stone si l'on pose

$$V_t = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\lambda}\, d\, Q_\lambda$$

on obtient un groupe fortement continu d'opératuers unitaires de H.

Calculons $S_\lambda V_t$.

$$< S_\lambda V_t f, g> = < V_t f, S_\lambda^{-1} g> = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\mu}\, d_\mu < S_\lambda Q_\mu f, g> = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\mu}\, d_\mu <Q_{\lambda+\mu} S_\lambda f, g>$$

On a donc la relation $S_\lambda V_t = e^{it\lambda} V_t S_\lambda$ appelée relation de commutation de Weyl.

Posant $U_t = V_t \Pi$ on obtient un opérateur continu de L^2. On a aussi la relation $S_\lambda U_t = e^{it\lambda} U_t S_\lambda$ car S_λ et Π commutent.

Si T_t désigne la translation des fonctions par t $(T_t f(x) = f(x-t))$ on vérifie que l'on a $S_\lambda T_t = e^{it\lambda} T_t S_\lambda$. Alors

$$S_\lambda U_t T_{-t} = e^{it\lambda} U_t S_\lambda T_{-t} = U_t T_{-t} S_\lambda.$$

On applique la proposition 1 :

$$\forall\ t \in \mathbb{R}\quad \exists\, A_t \in L^\infty(\mathbb{R})\quad \text{tel que}\quad U_t = S_{A_t} T_t$$

$V_t = U_t|_H$ est une isométrie de $\mathcal{M}_A$ sur $\mathcal{M}_A$; T_{-t} est une isométrie de $\mathcal{M}_{A+t}$ sur $\mathcal{M}_A$. Donc S_{A_t} est une isométrie de $\mathcal{M}_{A+t}$ sur $\mathcal{M}_A$. On doit donc avoir $\forall\ f \in \mathcal{M}_{A+t}$ $A_t f \in \mathcal{M}_A$. Ce qui implique que $A_t = 0$ sur $A \setminus (A + t)$.

Montrons que pour tout t $m(A \setminus (A+t)) = 0$. Si cela n'était pas on pourrait trouver t et $K \subset A \setminus (A + t)$ tel que $0 < m(K) < +\infty$; alors $\varphi_K \in \mathcal{M}_{A+t}$ et $S_{A_t}\varphi_K = 0$ et S_{A_t} ne serait pas une isométrie de $\mathcal{M}_{A+t}$ sur $\mathcal{M}_A$.

A coïncide à un ensemble négligeable près avec tous ses translatés et $m(\complement A) \neq 0$. On a donc $m(A) = 0$. Par suite $H = L^2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{-\infty}^{\perp} = \mathcal{M}_{+\infty} = \{0\}$.

On a donc $\mathcal{M}_\lambda = \mathcal{M}_\lambda \quad P_\lambda = Q_\lambda,\ U_t = V_t = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\lambda}\, d\, P_\lambda$.

Ainsi à tout sous espace simplement invariant on a associé un groupe fortement continu d'opérateurs unitaires de $L^2(\mathbb{R})$ vérifiant la relation de Weyl avec $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$. D'après le théorème de Stone cette correspondance est une injection. Ensuite on a montré qu'un tel groupe se met sous la forme $U_t = S_{A_t}\, T_t$ et que la correspondance $\{U_t\} \longmapsto \{A_t\}$ est injective.

Ainsi à tout sous espace simplement invariant est associé une famille $\{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ d'éléments de $L^\infty(\mathbb{R})$ que nous appellerons cocycle associé à ce sous espace. Si deux sous espaces simplements invariants ont même cocycle ils sont égaux.

Proposition 4 : Le cocycle associé à $q\, H^2$ est $q\, T_t\, q^{-1}$.

Envisageons d'abord le cas où $\mathcal{M} = H^2$. Soient f et $g \in L^2(\mathbb{R})$ et $\hat{f}$ et $\hat{g}$ leurs transformées de Fourier.

$$\langle U_t\, f,\, g\rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\lambda}\, d\langle P_\lambda\, f,\, g\rangle.$$

Mais $\langle P_\lambda\, f,\, g\rangle = \int_\lambda^{+\infty} \hat{f}(\mu)\, \hat{g}(\mu)\, d\mu$ d'après la formule de Parseval, donc

$$\langle U_t\, f,\, g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\lambda}\, \hat{f}(\lambda)\, \hat{g}(\lambda)\, d\lambda = \langle \widehat{T_t\, f},\, \hat{g}\rangle = \langle T_t\, f,\, g\rangle$$

D'où $U_t = T_t$ et $A_t = 1$.

Soient maintenant $\mathcal{M}' = q\, \mathcal{M}$. Avec des notations évidentes on a :

$P'_\lambda = S_q\, P_\lambda\, S_q^{-1} \qquad U'_t = S_q\, U_t\, S_q^{-1} \qquad S_{A'_t} = S_q\, U_t\, S_q^{-1}\, T_{-t} = S_q\, S_{A_t}\, S_{T_t q^{-1}}$ et

$A'_t = q \cdot A_t \cdot T_t\, q^{-1}$.

Théorème 2 :

Soit $\mathcal{M}$ un sous espace simplement invariant de $L^2(\mathbb{R})$. Il existe une fonction q presque partout de module 1 telle que $\mathcal{M} = q\, H^2$.

Cette fonction est déterminée à une constante multiplicative de module 1 près.

Etudions les propriétés de $\{A_t\}$.

Le groupe U_t étant fortement continu pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$ l'application $t \longmapsto U_t\, T_{-t}\, f = A_t \cdot f$ de $\mathbb{R}$ dans $L^2(\mathbb{R})$ est continue. On a $A_{u+t} = A_t \cdot T_t\, A_u$. En effet

$S_{A_{u+t}} = U_t\, U_u\, T_{-u}\, T_{-t} = U_t\, S_{A_u}\, T_{-t} = U_t\, T_{-t}\, S_{T_t A_u} = S_{A_t}\, S_{T_t A_u}$.

Posons $B(t, x) = \int_0^x A_t(y)\, dy$. C'est une fonction continue par rapport à (t,x) $C_t(x)$ est limite d'une suite de fonctions continues et pour tout t $C_t(x)$ est presque partout défini et égal à $A_t(x)$. On peut donc supposer que $A_t(x)$ est mesurable par rapport à (t, x). On a $|A_t(x)| = 1$ $A_{t}(x)\, A_u(x-t)$ pour presque tout x. En appliquant le théorème de Fubini on trouve x tel que $t \longrightarrow A_t(x)$ soit mesurable et que la relation $A_{t}(x) = A_t(x)\, A_u(x-t)$ soit vraie pour presque tout (t, u).

Posons $q(y) = A^{-1}_{x-y}(x)$

On a pour presque tout (t, y) :

$q(y) \cdot A_t^{-1}(y) = A^{-1}_{x-y}(x)\, A_t^{-1}(y) = A^{-1}_{x-y+t}(x) = q(y-t)$, et

$A_t(y) = q(y) \cdot (T_t\, q(y))^{-1}$ pour presque tout (t, y).

Mais les applications $t \longrightarrow S_{A_t}$ et $t \longrightarrow S_{qT_tq^{-1}}$ sont fortement continues ; elles sont identiques car elles coïncident sur un sous ensemble dense de $\mathbb{R}$. On a donc : $\forall\, t$ $A_t = q \cdot T_t\, q^{-1}$ presque partout. Cela signifie que $\mathfrak{M}$ et $q\, H^2$ ont le même cocycle, c'est-à-dire que $\mathfrak{M} = q\, H^2$.

Unicité :

Si $q\, H^2 = p\, H^2$ on a $p \cdot T_t\, p^{-1} = q \cdot T_t\, q^{-1}$ soit $\frac{p}{q} = T_t\left(\frac{p}{q}\right)$ c'est dire que $\frac{p}{q}$ est constant.

Théorème de Stone.

H désigne un espace de Hilbert.

On dit qu'une famille $\{E_\lambda\}_{\lambda\in R}$ de projecteurs de H est une décomposition de l'identité si :

1° $\lambda \leq \mu \Rightarrow E_\lambda \leq E_\mu$

2° $\lim_{\mu \to \lambda+} E_\mu = E_\lambda$ au sens fort

3° $\lim_{\lambda \to +\infty} E_\lambda = I$ $\lim_{\lambda \to -\infty} E_\lambda = 0$

Alors $\forall f \in H\ \forall g \in H\quad \lambda \longmapsto \langle E_\lambda f, g\rangle$ est une fonction à variation bornée et $\forall \varphi \in L^\infty(\mathbb{R})$ on peut définir l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda)\, d\langle E_\lambda f, g\rangle$ C'est une forme sesquilinéaire continue ; il existe donc un opérateur continu unique T tel que $\langle T f, g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda)\, d\langle E_\lambda f, g\rangle$.

On utilise la notation $\quad T = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda)\, d E_\lambda.$

On a les propriétés suivantes :

$$\int (\varphi + \psi)\, d E_\lambda = \int \varphi\, d E_\lambda + \int \psi\, d E_\lambda$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{C} \quad \int \alpha \varphi\, d E_\lambda = \alpha \int \varphi\, d E_\lambda$$

$$\left[\int \varphi\, d E_\lambda\right]^* = \int \bar{\varphi}\, d E_\lambda$$

$$\int \varphi \psi\, d E_\lambda = \left(\int \varphi\, d E_\lambda\right)\left(\int \psi\, d E_\lambda\right)$$

<u>Théorème 3 :</u>

$\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ étant une décomposition de l(identité de H, si l'on pose $U_t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda}\, d E_\lambda$ on obtient un groupe fortement continu d'opérateurs unitaires de H.

On a

$$U_s\, U_t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda}\, e^{is\lambda}\, d E_\lambda = U_{s+t}$$

Donc $\{U_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe

$$U_t^* = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\lambda}\, d E_\lambda = U_{-t} = U_t^{-1}$$

et U_t est unitaire.

<u>Continuité</u> :

$$\|U_t f - f\|^2 = \langle (U_t - I)^*(U_t - I) f, f\rangle = \langle (2I - U_t - U_{-t}) f, f\rangle$$

$$\|U_t f - f\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (2 - 2\cos\lambda t)\, d\langle E_\lambda f, f\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} 4 \sin^2 \frac{\lambda t}{2}\, d(\|E_\lambda f\|^2)$$

Puisque $\quad \int_{-\infty}^{+\infty} 4\, d(\|E_\lambda f\|^2) = 4\|f\|^2 \quad$ pour tout $\varepsilon > 0$

il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que $\displaystyle\int_{|\lambda|>\alpha} 4\, d(||E_\lambda f||^2) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$

Alors

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} 4 \sin^2 \frac{\lambda t}{2}\, d(||E_\lambda f||^2) \leqslant \alpha^2 t^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} d(||E_\lambda f||^2) \leqslant \alpha^2 t^2 ||f||^2$$

Et

$$|t| \leqslant \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\alpha^2 ||f||^2}} \Rightarrow ||U_t f - f||^2 \leqslant \varepsilon$$

Ce qui prouve que h groupe est fortement continu.

<u>Proposition 5</u> :

Soit $\{U_t\}_{t\in R}$ un groupe faiblement continu d'opérateurs unitaires de H tel que $U_1 = I$. Il existe une suite de projecteurs $\{P_n\}_{n\in Z}$ deux à deux orthogonaux tels que :

$$U_t = \sum_{n\in Z} e^{2i\pi nt} P_n \quad \text{fortement.}$$

Quels que soient f, g $\in$ H $t \longmapsto \langle U_t f, g\rangle$ est une fonction continue périodique de période 1. La forme $(f, g) \longmapsto \int_0^1 e^{-2i\pi nt} \langle U_t f, g\rangle dt$ est continue. Il existe donc un opérateur borné unique P_n tel que

$$\langle P_n f, g\rangle = \int_0^1 e^{-2i\pi nt} \langle U_t f, g\rangle dt$$

Cet opérateur est hermitien :

$$\langle P_n^* f, g\rangle = \langle \overline{P_n g, f}\rangle = \int_0^1 e^{2i\pi nt} \langle \overline{U_t g, f}\rangle dt = \int_0^1 e^{2i\pi nt} \langle U_{-t} f, g\rangle dt$$

$$\int_0^1 e^{2i\pi nt} \langle U_{-t} f, g\rangle dt = \int_{-1}^{0} e^{-2i\pi nt} \langle U_t f, g\rangle dt = \langle P_n f, g\rangle$$

Calculons $U_s P_n$:

$$\langle U_s P_n f, g\rangle = \langle P_n f, U_{-s} g\rangle = \int_0^1 e^{-2i\pi nt} \langle U_t f, U_{-s} g\rangle dt$$

$$= \int_0^1 e^{-2i\pi nt} \langle U_{t+s} f, g\rangle dt = \langle e^{2i\pi ns} P_n f, g\rangle$$

Par conséquent $U_s P_n = e^{2i\pi ns} P_n$

On a

$$< P_m P_n f, g> = \int_0^1 e^{-2i\pi mt} < U_t P_n f, g > dt = \int_0^1 e^{-2i\pi(m-n)t} < P_n f, g> dt.$$

Donc $P_m P_n = 0$ si $m \neq n$ et $P_n^2 = P_n$.

Ce qui prouve que les $\{P_n\}_{n\in Z}$ sont des projecteurs deux à deux orthogonaux.

Soient $P = \sum_{n\in Z} P_n$ $Q = I - P$ $\forall n \in Z$ $P_n Q = 0$

$$\forall f \; \forall g \; \forall n \quad \int_0^1 e^{-2i\pi nt} < U_t Q f, g > dt = 0$$

La fonction continue périodique $t \longrightarrow < U_t Q f, g>$ a tous ses coefficients de Fourier nuls. Elle est nulle : $U_t Q = 0$ et $Q = U_{-t} U_t Q = 0$ soit $I = \sum_{n\in Z} P_n$ au sens fort. Pour tout t on a donc

$$U_t = \sum_{n\in Z} U_t P_n = \sum_{n\in Z} e^{2i\pi nt} P_n.$$

<u>Théorème 4</u> :

Soit $\{U_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ un groupe faiblement continu d'opérateurs unitaires de H. Il existe une unique décomposition de l'identité $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ telle que :

$$U_t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda} d E_\lambda$$

U_1 est un opérateur unitaire, on sait qu'il peut se mettre sous la forme

$$U_1 = \int_0^1 e^{2i\pi\varphi} d F_\varphi$$

où F_φ est une décomposition de I telle que $F_0 = 0$ $F_1 = I$.

Définissant U_1^t par

$$U_1^t = \int_0^1 e^{2i\pi t\varphi} d F_\varphi$$

on obtient un groupe uniformément continu d'opérateurs unitaires commutant avec U_s.

Posant $V_t = U_t\, U_1^{-t}$ nous obtenons un groupe faiblement continu tel que $V_1 = I$. D'après la proposition précédente

$$V_t = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2i\pi nt} P_n$$

On a donc

$$U_t = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2i\pi nt} P_n \int_0^1 e^{2i\pi t\varphi}\, d\, F_\varphi$$

$$<e^{2i\pi nt} P_n U_1^t f, g> = <U_1^t f, e^{-2i\pi nt} P_n g> = \int_0^1 e^{2i\pi t\varphi}\, d <F_\varphi f, e^{-2i\pi nt} P_n g>$$

$$= \int_0^1 e^{2i\pi t(\varphi+n)}\, d< P_n F_\varphi f, g> = \int_n^{n+1} e^{2i\pi t\mu}\, d< P_n F_{\mu-n} f, g>.$$

Posant $E_{2\pi\mu} = \sum_{n\leq\mu} P_n + P_{[\mu]} F_{\mu-[\mu]}$, où $[\mu]$ désigne la partie entière de μ nous obtenons :

$$<U_t f, g> = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda}\, d <E_\lambda f, g>$$

<u>Unicité</u> :

Soient E_λ et E'_λ deux décompositions de I telles que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda}\, d\, E_\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda}\, d\, E'_\lambda.$$

Quels que soient f et g dans H les mesures $d < E_\lambda f, g>$ et $d< E'_\lambda f, g>$ sont égales car leurs transformées de Fourier le sont.

Les fonctions $\lambda \longmapsto < E_\lambda f, g>$ et $\lambda \longmapsto < E'_\lambda f, g>$ étant continues à droite nous avons :

$$<E_\lambda f, g> = \int_{-\infty}^{\lambda} d <E_\mu f, g> = \int_{-\infty}^{\lambda} d <E'_\lambda f, g> = <E'_\lambda f, g>$$

Donc $E_\lambda = E'_\lambda$.

SEMINAIRE D'ANALYSE HARMONIQUE.

Exposé n° 10 : B. MISCHLER.

Introduction.

On sait que le problème des espaces doublement invariants est complètement résolu par le théorème de Wiener. Si Γ est un groupe localement compact abélien totalement ordonné, on peut définir dans $L^2(G)$ des notions de fonctions analytiques et de simple invariance.

Dans le cas de $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$, on a vu que tout espace simplement invariant était de la forme $q.H^2$. Nous allons voir que ce théorème ne peut pas s'étendre même avec quelques modifications au cas général et parfois pour des raisons très complexes

Nous nous limiterons uniquement au cas où Γ est discret sans plus petit élément positif et par conséquent G est compact.

Notations.

$$H^2 = \left\{ f \,/\, f \in L^2(G) \;;\; \forall \gamma \in \Gamma \quad \gamma < 0 \;\; \hat{f}(\gamma) = 0 \right\}$$
$$H^2_o = \left\{ f \,/\, f \in H^2 \;;\; \hat{f}(0) = 0 \right\}$$

E étant un ensemble mesurable de G :

$$\mathfrak{M}_E = \left\{ f \,/\, f \in L^2 \quad f = 0 \quad \text{prèsque partout sur } E \right\}$$

$\mathfrak{M}$ étant un espace simplement invariant on pose :

$$\mathfrak{M}_\gamma = S_\gamma \, \mathfrak{M}$$

$q \in L^\infty(G)$; S_q désigne l'opérateur de $L^2(G)$ défini par :

$$S_q \, f(x) = q(x) \, f(x)$$

On pose :

$$\mathfrak{M}^-_\gamma = \bigcap_{\lambda < \gamma} \mathfrak{M}_\lambda$$

$\mathfrak{M}^-_o$ est la "version à gauche" de $\mathfrak{M}$.

$$\mathfrak{M}^+_\gamma = \overline{\bigcup_{\lambda > \gamma} \mathfrak{M}_\lambda}$$

$\mathfrak{M}^+_o$ est la "version à droite" de $\mathfrak{M}$.

$$\mathcal{M}_{+\infty} = \bigcap_{\lambda \in \Gamma} \mathcal{M}_\lambda \qquad \mathcal{M}_{-\infty} = \overline{\bigcup_{\lambda \in \Gamma} \mathcal{M}_\lambda}$$

Enfin :

$$\mathcal{R}_\gamma = \mathcal{M}_\gamma^- \ominus \mathcal{M}_\gamma^+$$

Lemme 1.

La dimension de $\mathcal{R}_\gamma$ est inférieure ou égale à 1. De plus, les fonctions de $\mathcal{R}_\gamma$ ont un module constant.

Il suffit de le démontrer pour $\mathcal{R}_o$, car :

$$\mathcal{R}_\gamma = S_\gamma \mathcal{R}_o .$$

Remarquons que :

$$\forall \gamma > 0 \quad S_\gamma \mathcal{M}_o^- \subset \mathcal{M}_o^+$$

car dans Γ il n'y a pas de plus petit élément positif. Soient f et g deux éléments non nuls de $\mathcal{R}_o$. On a :

$$\forall \gamma > 0 \quad S_\gamma g \in \mathcal{M}_o^+ \qquad \text{donc} \qquad \langle S_\gamma g, f \rangle = 0$$

Mais f et g jouant des rôles symétriques et l'ordre étant total, on obtient que

$$\forall \gamma \neq 0 \qquad \int_G \overline{f(x)}\, g(x) \quad \langle \gamma, x \rangle \ dx = 0$$

Donc $\bar{f}g$ est constant. Si l'on prend $g = f$ ceci montre que $|f|$ est constant. Mais $\bar{f}g$ et $f\bar{f}$ constants non nuls entraîne que :

$$g = k\, f$$

ce qui prouve que la dimension de $\mathcal{R}_o$ est au plus 1.

Premier contre-exemple.

H_o^2 est un espace simplement invariant qui ne peut être de la forme $q\, H^2$. En effet, H^2 est égal à sa version à gauche donc $q\, H^2$ aussi. Par contre, la version à gauche de H_o^2 est H^2.

On pourrait penser que le théorème de Beurling se généralise de la manière suivante : tout espace simplement invariant est de la forme $q\,H^2$ ou $q\,H^2_o$. Dans cette direction, on a le théorème très général suivant :

Théorème 1.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace simplement invariant $\mathfrak{M}$ soit de la forme $q\,H^2$ ou $q\,H^2_o$ est que : $\dim \mathfrak{R}_o = 1$.

Condition nécessaire. La version à gauche de H^2 (ou H^2_o) est H^2, leur version à droite est H^2_o ; or la codimension de H^2_o dans H^2 est 1. En outre S_q est une isométrie.

Condition suffisante. Soit q un élément de $\mathfrak{R}_o$ (non nul). D'après le lemme 1, $|q|$ est constant, on peut supposer $|q| = 1$. Evidemment :

$$S_\gamma\, q \in \mathfrak{R}_\gamma$$

Les $S_\gamma\, q$ engendre $L^2(G)$.

En effet, l'espace engendré par les $S_\gamma\, q$ est doublement invariant et il contient q, fonction qui n'est jamais nulle.

Les $S_\gamma\, q$ étant orthogonaux, ils forment une base hilbertienne de $L^2(G)$.

$$\forall\, \gamma > 0 \quad S_\gamma\, q \in \mathfrak{M} \qquad \text{donc} \qquad \mathfrak{M} \supset q\,H^2_o$$

$\forall\, \gamma < 0$ $S_\gamma\, q$ est orthogonal à $\mathfrak{M}$, donc :

$$\mathfrak{M} \subset q\,H^2.$$

Mais la codimension de $q\,H^2_o$ dans $q\,H^2$ est 1 donc $\mathfrak{M}$ est égal soit à $q\,H^2$, soit à $q\,H^2_o$.

Remarque.

q est déterminée d'une manière unique à une constante multiplicative de module 1 près.

Application.

Si $f \in H^2(x)$ et si sa valeur moyenne est;différente de zéro, on peut écrire, d'une manière unique :

$$f = q.g$$

où q et g sont dans H^2 et où :

$|q| = 1$ nous appelerons une telle fonction <u>intérieure</u>

$\mathfrak{M}_g = H^2$ une telle fonction sera dite <u>extérieure</u>.

On désigne par $\mathfrak{M}_f$ le plus petit espace vectoriel fermé contenant $S_\gamma f$ pour tout γ positif ou nul. D'après les hypothèses faites sur f, on peut l'écrire :

$$f = a_0 + \sum_{\gamma>0} a_\gamma . \gamma$$

Donc si λ est positif ; $S_\lambda f \in H^2_0$.

Soit $$\mathfrak{M}_f^+ \subset H^2_0$$

Mais, par hypothèse ; f n'est pas dans H^2_0. Donc : $\mathfrak{M}_f \neq \mathfrak{M}_f^+$
ce qui d'après le lemme 1 et le théorème 1 implique :

$$\mathfrak{M}_f = \mathfrak{M}_f^- = q\, H^2$$

Donc :

$$f = q\, g \quad \text{avec} \quad |q| = 1 \quad q \in H^2.$$

où

$$\mathfrak{M}_g = \bar{q}\ \mathfrak{M}_f = H^2$$

On a aussi l'unicité d'une telle décomposition.

<u>Remarque</u>.

Le résultat précédent s'étend facilement au cas où il existe dans Γ un plus petit élément γ_0 pour lequel :

$$\hat{f}(\gamma_0) \neq 0.$$

<u>Divers contre-exemples.</u>

1) Supposons que Γ ne soit pas archimédien. Γ étant discret, nous allons exhiber un espace simplement invariant qui ne peut être de la forme $q\, H^2$ (ou $q\, H^2_0$). Par hypothèse :

$$\exists\, \alpha \in \Gamma \ ;\ \alpha > 0 \quad \exists\, \beta \in \Gamma : \forall\, n \in N \quad n\alpha < \beta$$

Posons :

$$\mathfrak{M} = \left\{ f \ / \ f \in L^2 \ ;\ \hat{f}(\gamma) = 0 \ \text{si} \ \exists\, n : \gamma \leq n\alpha \right\}$$

$\mathcal{M}$ est évidemment simplement invariant et :

$$S_\alpha \mathcal{M} = \mathcal{M}$$

Mais :
$$S_\alpha (q H^2) = S_q \circ S_\alpha (H^2) \neq q H^2.$$

2) Supposons Γ archimédien. Il est donc isomorphe à un sous-groupe de $\mathbb{R}_d$ ($\mathbb{R}$ discret). Supposons que Γ soitun sous-groupe <u>strict</u> de $\mathbb{R}_d$.

Soit enfin :

$$\tau \in \mathbb{R}_d \quad \text{et} \quad \tau \notin \Gamma.$$

Posons :

$$\mathcal{M} = \left\{ f \,/\, f \in L^2 \,;\, \hat{f}(\gamma) = 0 \quad \text{pour} \quad \gamma < \tau \right\}$$

On a immédiatement :

$$\mathcal{M}_o^+ = \left\{ f \,/\, f \in L^2 \quad \hat{f}(\gamma) = 0 \quad \text{pour} \quad \gamma \leq \tau \right\}$$

$$\mathcal{M}_o^- = \mathcal{M}$$

Ces deux ensembles coïncident, $\mathcal{M}$ ne peut donc pas être de la forme $q H^2$ ou qH_o^2.

On pourrait croire que, dans le cas de $\mathbb{R}_d$, le théorème de Beurling est vrai. En fait, Helson et Lowdenslager trouvèrent en 1960 un sous-espace invariant dont les versions à gauche et à droite coïncident. Leur démonstration s'étend à des sous-groupes de $\mathbb{R}_d$ assez généraux, comme l'a montré J.P. Kahane. C'est cette construction assez longue que nous allons exposer maintenant dans le cas de $\mathbb{R}_d$.

Rappelons, tout d'abord, quelques résultats. Le groupe dual de $\mathbb{R}_d$ est le groupe de Bohr $\mathbb{B}$. $\mathbb{B}$ est le compactifié de Bohr de $\mathbb{R}$, donc il existe un isomorphisme entre $\mathbb{R}$ et un sous-groupe dense B_o de $\mathbb{B}$. Enfin on a le théorème dû à P. Malliavin :

toute fonction de $H^1(\mathbb{B})$ qui s'annule sur un ensemble de mesure positive est nulle presque partout.

Ceci implique le résultat suivant :

<u>Théorème 2</u>.

Si $\mathcal{M}$ est un sous espace fermé de $L^2(\mathbb{B})$ invariant par Γ^+

(éléments positifs de Γ) et si il existe dans $\mathfrak{M}$ une fonction f non nulle telle que :

$$\text{mes}\,(f^{-1}(0)) > 0$$

alors $\mathfrak{M}$ est doublement invariant.

Appelons $\mathfrak{M}_f$ le plus petit sous-espace invariant par Γ^+ contenant f. Montrons tout d'abord que si $\text{mes}(f^{-1}(0)) \neq 0$, $\mathfrak{M}_f$ est doublement invariant.

Posons :

$$f^{-1}(0) = A \quad \text{d'où} \qquad \mathfrak{M}_f \subset \mathfrak{M}_A$$

Supposons que :

$\exists\, g \in \mathfrak{M}_A$, g orthogonale à $\mathfrak{M}_f$.

On a :

$$\forall\, \gamma \in \Gamma,\ \gamma \geqslant 0 : \int_G f(x)\,\overline{g(x)}\,(\gamma, x)\,dx = 0$$

Donc $f\,\bar{g} \in H^1$ mais $f\,\bar{g} = 0$ sur A d'où : $f\circ\bar{g} \equiv 0$ donc $g = 0$ sur $\complement A$ mais $g \in \mathfrak{M}_A$ donc g est identiquement nulle.

Par conséquent, avec les notations de l'énoncé il vient :

$$\mathfrak{M}_A = \mathfrak{M}_f \subset \mathfrak{M}\,.$$

Soit :

$$F = \left\{ f \,/\, f \in \mathfrak{M},\quad \text{mes}(f^{-1}(0)) \neq 0 \right\}$$

et

$$\mathfrak{M}_E = \overline{\bigcup_{f \in F} \mathfrak{M}_{f^{-1}(0)}}$$

Le deuxième membre est bien, en effet, un espace doublement invariant qui est contenu dans $\mathfrak{M}$, d'après ce qui précède. D'où :

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_E \oplus \mathfrak{N}\,.$$

Mais

$$L^2(G) = \mathfrak{M}_E \oplus \mathfrak{M}_{\complement E}$$

avec

$$\text{mes}(\complement E) \neq 0 \quad \text{car} \qquad \mathfrak{M}_E \neq \{0\}$$

Donc : $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_{\complement E}$

d'où

$$f \in \mathcal{M} \Rightarrow f = 0 \text{ sur } \complement E \Rightarrow f \in F \Rightarrow f \in \mathcal{M}_E$$
$$\Rightarrow f \equiv 0 \qquad \text{soit} \quad \mathcal{M} = \{0\}.$$

Corollaire.

$$\mathcal{M}_{+\infty} = \{0\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{M}_{-\infty} = L^2(G)$$

En effet, $\mathcal{M}_{+\infty}$ et $\mathcal{M}_{-\infty}$ sont doublement invariants donc fermés de fonctions s'annulant sur un certain ensemble. Mais : $f \in \mathcal{M}$ et $f \not\equiv 0 \Rightarrow f(x) \neq 0$ presque partout. Donc nécessairement on a le résultat énoncé.

Nous supposerons dorénavant que $\mathcal{M}$ est égal à sa version à gauche.

Désignons par P_γ la projection de L^2 sur $\mathcal{M}_\gamma$. On a :

$$\forall \lambda, \mu \in \Gamma \qquad P_{\lambda+\mu} = S_\lambda P_\mu S_\lambda^{-1}$$

En outre, les P_γ forment une décomposition de l'identité. Aussi, d'après le théorème de Stone,

$$U_t = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{+it\lambda} \, d P_\lambda$$

définit un groupe à un paramétre fortement continu d'opérateurs unitaires de $L^2(\mathbb{B})$

Désignons par e_t, où $t \in \mathbb{R}$, l'élément de $\mathbb{B}$ tel que :

$$\forall \gamma \in \mathbb{R}_d : \langle e_t, \gamma \rangle = e^{it\gamma}$$

L'opérateur de translation est défini par :

$$(T_t f)(x) = f(x + e_t)$$

Les T_t forment eux aussi un groupe à un paramétre fortement continu d'opérateurs unitaires. Ils coïncident avec U_t dans le cas où $\mathcal{M} = H^2$.

On démontre comme dans le cas de $\mathbb{R}$ que $U_t \circ T_{-t}$ commute aves les S_λ donc que :

$$U_t = S_{A_t} \circ T_t$$

où : $|A_t(x)| = 1$ presque partout.

De plus :

$$A_t = U_t(1)$$

Donc l'application t donne A_t est une application continue de $\mathbb{R}$(muni de sa topologie habituelle) dans $L^2(B)$. D'autre part, de la propriété de groupe des il vient :

(1) $\forall$ t et u $\in \mathbb{R}$ $\qquad A_{t+u} = A_t \circ T_t\, A_u$

Réciproquement, étant donné une famille de fonctions A_t de module 1 vérifiant l relation (1) et telle que l'application t donne A_t soit continue, si l'on pose

$$U_t = A_t \cdot T_t$$

on obtient un groupe, et d'après le théorème de Stone, il existe des P_λ uniques tels que :

$$U_t = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda}\, dP_\lambda$$

avec :

$$P_\lambda = S_\lambda\, P_o\, S_\lambda^{-1}$$

car U_t et S_λ vérifient la relation de commutation de Weyl.

L'espace $P_o L^2$ est alors un espace simplement invariant. Ainsi, à toute fonction A_t du type précédent, on a fait correspondre de manière bijective un espace simplement invariant.

Si $\mathfrak{M} = q.H^2$, où q est une fonction de module 1, la fonction A_t associée est :

$$A_t = q \circ T_t\, q^{-1}$$

L'équation fonctionnelle des A_t est exactement l'identité définissant un <u>cocycle</u> de dimension 1 dans la théorie de la cohomologie des groupes, pour le groupe des réels opérant (par l'opérateur T_t) sur le groupe multiplicatif des fonctions de module 1 définie sur $\mathbb{B}$.

Les cobords sont justement les fonctions du type :

$$q \cdot T_t\, q^{-1}$$

Le théorème de Beurling revient donc au fait que le premier groupe de cohomologie est nul, c'est-à-dire que tout cocycle est un cobord. Nous allons construire maintenant un cocycle qui n'est pas un cobord.

Remarquons tout d'abord que si A_t est un cobord on peut le prolonger continument en une application continue de $\mathbb{B}$ dans $L^2(\mathbb{B})$. En effet, la translation est un opérateur continu dans $L^2(\mathbb{B})$. Le prolongement, qui est unique car $\mathbb{B}_0$ est dense dans $\mathbb{B}$, s'écrit :

$\forall y \in \mathbb{B} \qquad A_y(x) = q(x) \cdot q^{-1}(x+y)$ presque partout.

Par extension, nous dirons qu'un cocycle ainsi prolongeable est presque périodique. On peut démontrer que, inversement, tout cocycle presque périodique est un cobord, mais nous n'en aurons pas besoin.

Soit $\lambda_1, \lambda_2 \dots$ une suite de nombres réels positifs tendant vers zéro. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \lambda_{-n} = -\lambda_n$$

Soit, d'autre part, des nombres $c_1, c_2, \dots$ supposés positifs, tel que :

$$\sum_1^{+\infty} c_n \lambda_n < +\infty$$

Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad c_{-n} = c_n$$

Enfin, soit :

$$\varphi_t(x) = \sum_{n \neq 0} c_n \langle \lambda_n, x \rangle (1 - e^{it\lambda_n})$$

où

$$t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad x \in \mathbb{B}$$

et où :

$$\langle \lambda_n, x \rangle$$

est la valeur du caractére λ_n (élément de $\mathbb{R}_d$) en x.

φ_t est une fonction réelle continue, comme somme d'une série normalement convergente. Deplus, on vérifie aisément que :

$$\varphi_{t+u} = \varphi_t + T_t\ \varphi_u$$

Par conséquent :

$$A_t = e^{i\varphi_t} = \exp i\Big(\sum_{n\neq 0} c_n \langle\lambda_n, x\rangle (1 - e^{it\lambda_n})\Big)$$

est un cocycle, évidemment continu en t.

Si l'on avait :

$$\sum c_n^2 < +\infty$$

Alors :

$$\varphi_t = \Psi - T_t\ \Psi$$

où
$$\Psi = \sum c_n \langle\lambda_n, x\rangle$$

et il s'en suivrait que :

$$A_t = e^{i\Psi} . T_t\ e^{-i\Psi}$$

serait un cobord.

Par contre, si c_n tend vers l'infini, il est bien connu que pour x fixé, $A_t(x)$ n'est pas une fonction presque périodique (au sens usuel). Nous allons montrer, en faisant quelques hypothèses supplémentaires, que A_t n'est pas presque périodique dans le sens défini plus haut.

Supposons, en effet, qu'il y ait un prolongement continu à $\mathbb{B}$, nous le désignerons encore par $A_y (y \in \mathbb{B})$.

On aurait alors le lemme suivant :

<u>Lemme.</u>

Supposons que y dans $\mathbb{B}$ satisfasse :

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \qquad \langle\lambda_n, y\rangle = 1$$

Alors : $A_y(x)$ est constant en x.

Formons la fonction :

$$B_t = A_t \cdot T_u\ A_t^{-1} = \exp i\Big(\sum c_n \langle\lambda_n, x\rangle (1 - e^{iu\lambda_n})(1 - e^{it\lambda_n})\Big).$$

Pour tout réel u fixé, c'est une fonction presque périodique de $\mathbb{R}$ dans L^2 dont le prolongement est :

$$B_y = A_y \cdot T_u A_y^{-1} = \exp i(\sum c_n \langle\lambda_n, x\rangle (1 - e^{iu\lambda_n})(1 - (\lambda_n, y))).$$

Mais l'hypothèse faite sur y, implique :

$$B_y = 1$$

Donc :

$$A_y = T_u A_y$$

ceci, pour tout réel u. Donc A_y est constant.

Corollaire.

Si l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \neq k \quad \langle\lambda_n, y\rangle = -1$$

et :

$$\langle\lambda_k, y\rangle = -1$$

Alors :

$$A_y = \exp 4i(c_k \,\mathcal{R}e \langle\lambda_k, x\rangle + \alpha)$$

où α est un certain nombre réel.

La démonstration est évidente à partir du lemme précédent qu'il suffit d'appliquer à la somme définissant A_y après suppression des termes de rangs k et $-k$.

Les hypothèses que nous formulons, sont les suivantes :

$$c_n \longrightarrow +\infty \qquad \sum_1^{+\infty} c_n \lambda_n < +\infty$$

et enfin : les nombres λ_n sont rationnellement indépendants.

De l'indépendance des λ_n, il découle que l'on peut trouver des caractères y_k $(k \in \mathbb{N})$ sur $\mathbb{R}_d$ tels que

$$\forall n \neq k \qquad \langle\lambda_n, y_k\rangle = 1$$

et :

$$\langle\lambda_k, y_k\rangle = -1$$

D'après le corollaire du lemme, il vient :

$$A_{y_k} = \exp 4i(c_k \,\mathcal{R}e \langle\lambda_k, x\rangle + \alpha_k)$$

Mais y_k est une suite infinie d'élément de $\mathbb{B}$, groupe compact ; elle a donc une valeur d'adhérence y_o.. En se restreignant au besoin à une sous-suite on peut supposer que y_k tend vers y_o.

Or :

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \qquad \langle\lambda_n, y_o\rangle = 1$$

d'où d'après le lemme, A_{y_o} est constant. Mais A_{y_k} converge vers A_{y_o} dans la métrique de L^2, à cause de la continuité, donc en particulier :

$$\lim \int_{\mathbb{B}} A_{y_k}\, dx = \int_{\mathbb{B}} A_{y_o}\, dx \neq 0.$$

Mais considérons :

$$\int_{\mathbb{B}} \exp 4ic\ \mathcal{R}e\langle\lambda, x\rangle\, dx$$

On vérifie aisément en développant l'exponentielle en série entière que cette intégrale est indépendante de λ, (si $\lambda \neq 0$) et que, quand c tend vers l'infini, l'intégrale tend vers zéro.

$$\lim \int_{\mathbb{B}} A_{y_k}\, dx = 0$$

On obtient une contradiction, ce qui montre que la fonction A_t que nous avons construite ne peut être un cobord.

SEMINAIRE D'ANALYSE HARMONIQUE,

Exposé n° 10 : B. MISCHLER.
(suite)

Fonctions extérieures. Théorème de Malliavin.

Rappels.

Soit G un groupe compact, Γ son dual supposé totalement ordonné (ce qui implique que G est connexe). Nous avons démontré dans l'exposé précédent que :

si $f \in H^2(G)$ et $\hat{f}(0) \neq 0$, alors on peut écrire d'une manière unique (à une constante multiplicative près) :

$$f = q \cdot g$$

où

q est intérieure c'est-à-dire $q \in H^2$ et $|q| = 1$ presque partout.

g est extérieure c'est-à-dire $\mathfrak{M}_g = H^2$

Nous admettrons les deux théorèmes suivants dont l'on trouvera la démonstration, par exemple, dans "Fourier Analysis on Groups" de W. Rudin (p. 208 et 210).

Théorème 1 :

$$\forall f \in H^1(G) \quad \hat{f}(0) \neq 0 \quad \exists \alpha \text{ et } \beta \in H^2 :$$

$$f = \alpha . \beta$$

Théorème 2 :

$$f \in H^2 \text{ et } \int_G \log |f(x)| \, dx = \log |\hat{f}(0)| > -\infty \Leftrightarrow \mathfrak{M}_f = H^2$$

Fonctions extérieures.

Nous généralisons la notion de fonction extérieure de la manière suivante.

Définition :

f est dite extérieure si :

$$f \in H^1 \text{ et } \int \log |f(x)| \, dx = \log |\hat{f}(0)| > -\infty$$

On a tout d'abord :

<u>Théorème 3</u> :

Si $f \in H^1(G)$ et $\hat{f}(0) \neq 0$, alors :

$$f = q \cdot g$$

où q est intérieure et g est extérieure.

D'après le théorème 1 on peut écrire :

$$f = \alpha \cdot \beta \qquad \alpha \text{ et } \beta \in H^2$$

mais :

$$\hat{f}(0) = \hat{\alpha}(0) \cdot \hat{\beta}(0)$$

donc $\hat{\alpha}(0)$ et $\hat{\beta}(0)$ sont différents de zéro. D'où :

$$\alpha = q_1 \cdot g_1 \qquad \text{et} \qquad \beta = q_2 \cdot g_2$$

Si l'on pose :

$$q = q_1 \cdot q_2 \qquad\qquad g = g_1 \cdot g_2$$

il vient :

$$f = q \cdot g$$

q est évidemment intérieure ; d'autre part :

$$\hat{g}(0) = \hat{g}_1(0) \cdot \hat{g}_2(0) = \exp\left\{\int \log |g_1 \cdot g_2| \, dx\right\}$$

donc g est extérieure.

<u>Théorème 4</u> :

Si f est extérieure alors :

$$\mathcal{M}_f = \overline{\{f\ P\}}_{L^1} = H^1$$

où P parcourt l'ensemble des "polynômes" de G.

Tout d'abord : $\mathcal{M}_f \subset H^1$.

En reprenant les notations précédentes il vient :

$$f = q \cdot g_1 \cdot g_2 \quad \text{où} \quad |q| = 1$$

Or :

$$\hat{f}(0) = \hat{q}(0) \cdot \hat{g}_1(0) \circ \hat{g}_2(0) \Rightarrow |\hat{q}(0)| = 1$$

parce que f, g_1 et g_2 sont extérieures.

Mais d'après Parseval, puisque :

$$|\hat{q}(0)| = ||q||_2$$

q est obligatoirement constante. Donc : $f = g_1 \cdot g_2$ à une constante près.

Si P est un polynôme quelconque :

$$f\ P = g_1 \cdot g_2\ P \quad \text{soit} \quad \mathcal{M}_f \supset g_1 \overline{\left\{g_2\ P\right\}}_{L^2}$$

Mais :

$$\overline{\left\{g_2\ P\right\}}_{L^2} = H^2$$

Donc :

$$\mathcal{M}_f \supset g_1\ H^2 \supset H^2$$

car g_1 est extérieure. Mais $\mathcal{M}_f$ est fermé dans L^1, d'où :

$$\mathcal{M}_f = H^1$$

<u>Corollaire 1</u> :

La décomposition donné par le théorème 3 est unique, à une constante multiplicative près.

En effet, si $f = q\ g = q' \cdot g'$

Il vient :

$$\mathcal{M}_f = q\ H^1 = q'\ H^1$$

Donc $q\ \bar{q}'$ et $\bar{q}\ q'$ sont dans H^1, ce qui implique que ces fonctions sont constantes, mais :

$$q\ \bar{q}' = \frac{q}{q'}$$

<u>Corollaire 2.</u>

Si f et g sont deux fonctions extérieures de même module, elles sont égales à une constante multiplicative près.

En effet, on peut écrire :

$$f = p\ g \quad \text{où} \quad |p| = 1$$

et il vient :

$$\mathcal{M}_f = H^1 = p\,H^1$$

Donc p est constante.

Corollaire 3 :

Si f est sommable et si $\mathcal{M}_f = H^1$ alors f est extérieure.

Comme $f \in \mathcal{M}_f$, on a $f \in H^1$. Si $\hat{f}(0)$ était nul, toute fonction de $\mathcal{M}_f$ aurait une valeur moyenne nulle ce qui est absurde. Donc, on peut écrire :

$$f = q \cdot g$$

où g est extérieure. Il vient donc :

$$\mathcal{M}_f = H^1 = q\,H^1$$

Donc q est constante et f est extérieure.

Nous allons maintenant établir une généralisation de la description par b Beurling des fonctions extérieures.

Fonctions conjuguées.

Si u et v sont des fonctions réelles, nous dirons qu'elles sont conjuguées si $u + iv$ est analytique et v est de valeur moyenne nulle. Etant donné u dans L^2, il y a évidemment une fonction v et une seule de valeur moyenne nulle telle que $u + iv$ soit dans H^2. Si l'on suppose seulement que u est dans L^1, il peut très bien ne pas y avoir de fonctions v telles que $u + iv$ soit dans H^1. Cependant on a le résultat suivant :

$$\forall p \ : \ 0 < p < 1 \quad \exists K_p \quad \text{tel que :}$$

$$\forall u \quad \text{polynôme :} \quad \left[\int |v|^p \, dx\right]^{1/p} \leqslant K_p \int |u| \, dx$$

où v est le polynôme conjugué de u.

Maintenant, si u est une fonction réelle de L^1 on peut trouver une suite de polynômes $\{u_n\}$ qui converge vers u dans la norme de L^1. D'après l'inégalité précédente la suite $\{v_n\}$ est de Cauchy pour la convergence en mesure. Elle a donc une limite en mesure v. v sera dite la conjuguée normalisé de u (elle est unique car $\hat{v}(0) = 0$).

Mais, d'après le lemme de Fatou, l'inégalité persiste à la limite quand u est quelconque dans L^1. En conséquence, lorsque u_n converge au sens de L^1 vers u (u_n étant quelconque dans L^1), $\{v_n\}$ converge en mesure vers v, où v_n et v sont les conjugués respectifs, au sens défini plus haut, de u_n et u. En particulier et c'est ce résultat qui nous sera utile, il existe une sous-suite de $\{v_n\}$ qui converge faiblement presque partout vers v.

<u>Théorème 5</u> :

Si u est réelle sommable ainsi que $e^{\tilde{u}}$ et si v est la conjuguée normalisée de u, $\exp(u + iv)$ est extérieure.

Réciproquement si f est extérieure, on peut écrire :

$$f = e^{u+iv}$$

où u et $e^{u} \in L^1$ et v conjugué de u.

Supposons que u (et donc v) soit un polynôme trigonométrique sur G. Si l'on pose :

$$f = \exp(u + iv)$$

il vient :

$$\int_G f(x)\, dx = \sum_0^{+\infty} \int_G \frac{(u+iv)^n}{n!}\, dx = \sum_0^{+\infty} \frac{1}{n!}\left[\int_G (u + iv)\, dx\right]^n = \exp\left(\int_G u + iv\, dx\right)$$

$$= \exp\left(\int_G \log|f|\, dx\right).$$

Comme f est évidemment dans H^1 et que $\log|f| = u$ est sommable, f est extérieure.

Plus généralement, si u et v sont bornées, $u + iv$ peut être approché uniformément par des polynômes et les deux propriétés de f passent à la limite.

Pour obtenir le cas général, nous allons devoir utiliser deux passages à la limite successifs, méthode que nous rencontrerons plusieurs fois au cours de cet exposé. Supposons que u soit borné et pas v. En passant éventuellement à une sous-suite, on peut trouver une suite $\{u_n\}$ de polynômes convergeant uniformément vers u tandis que $\{v_n\}$ converge faiblement presque partout vers v.

Alors, d'après le théorème de convergence dominée :

$$\int_G \left| e^{u+iv} - e^{u_n + iv_n} \right| dx$$

tend vers zéro. Donc f, comme limite en norme L^1 de fonctions de H^1, est dans H^1. De plus :

$$\int_G u_n \, dx = \log \left(\int_G \exp(u_n + iv_n) \, dx \right)$$

passe à la limite de chaque côté, donc f est extérieure.

Enfin si u n'est pas bornée, posons :

$$u_n = \begin{cases} u & \text{si} \quad -n \leqslant u \leqslant n \\ n & \text{si} \quad u > n \\ -n & \text{si} \quad u < -n \end{cases}$$

Une fois encore on peut supposer que les fonctions v_n convergent faiblement presque partout vers v. Le théorème de convergence domminée montre que e^{u+iv} est la limite dans L^1 de $e^{u_n + iv_n}$ donc f est dans H^1. De plus, f est extérieure par passage à la limite dans la formule de définition des fonctions extérieures.

Réciproquement, supposons que :

$$f = \exp(u + iv)$$

soit extérieure.

Ceci implique que $\mathrm{Log}\,|f| = u$ soit sommable et comme f est sommable, e^u l'est aussi. Soit v' la conjuguée de u. D'après la première partie de ce théorème :

$$e^{u+iv'}$$

est extérieure. Comme elle est de même module que f et que $\hat{v}'(0) = \hat{v}(0) = 0$, on a :

$$v' = v$$

Mesures de Cauchy.

A partir de maintenant, Γ est $\mathbb{R}_d$ et donc G est le groupe de Bohr $\mathbb{B}$. On appelle B_0 le sous-groupe dense de $\mathbb{B}$ isomorphe à $\mathbb{R}$.

Soit r un nombre tel que : $0 < r < 1$, la fonction $r^{|\lambda|}$ $\lambda \in R_d$ est définie positive donc d'après le théorème de Bochner c'est la transformée de Fourier d'une mesure positive μ_r. De plus, $r^{|\lambda|}$ étant continue pour la topologie de R la mesure μ_r est portée par B_o. Comme elle est positive, tout segment de B_o porte une partie de la masse μ_r et comme B_o est dense dans B, il s'en suit que μ_r charge tout ouvert de B non vide. Mais on peut même prouver le lemme suivant :

Lemme :

Si g est la fonction caractéristique d'un ensemble de mesure positive de B, alors $\mu_r * g > 0$ presque partout pour la mesure de Haar de B.

En effet, sinon on aurait :

$$\mu_r * g = 0$$

sur un ensemble de mesure positive, dont h désignera la fonction caractéristique.

Posons :

$$h'(x) = h(-x)$$

alors :

$$\mu_r * g * h'(0) = \int_B h(x) \cdot \mu_r * g(x)\, dx = 0$$

Mais $g * h'$ est une fonction continue non négative et μ_r charge positivement tout ouvert de B non vide. Par conséquent : $g * h'$ est identiquement nul.

Mais :

$$\int g * h'\, dx = \int g\, dx \times \int h'\, dx \neq 0$$

car g et h' sont des fonctions caractéristiques d'ensembles de mesures positives. On obtient donc une contradiction.

Théorème 6 :

Si f est une fonction extérieure, alors :

$$\log |\mu_r * f| = \mu_r * \log|f|$$

D'après le théorème 5 ceci revient à prouver que si $f = \exp(u+iv)$:

$$\log |\mu_r * e^{u+iv}| = \mu_r * u$$

pour toute fonction u sommable réelle, ainsi que e^u et de fonction conjuguée v.

Prouvons là d'abord dans le cas où $u + iv$ est un polynôme.

Si P et Q sont des polynômes :

$$\mu_r * (P\,Q) = (\mu_r * P)(\mu_r * Q)$$

comme on peut le voir aisément en comparant les coefficients de Fourier des deux membres.

En particulier :

$$\mu_r * P^n = (\mu_r * P)^n$$

D'où :

$$\sum_0^{+\infty} \frac{\mu_r * P^n}{n!} = \sum_0^{+\infty} \frac{(\mu_r * P)^n}{n!}$$

ce qui est bien ce que nous voulions prouver.

Pour obtenir le cas général, on fait les différents passages à la limite décrits dans la démonstration des théorème 5.

<u>Théorème de Malliavin.</u>

Pour toute fonction de H^1, on a :

$$\log |\mu_r * f| \leq \mu_r * \log|f|$$

Supposons tout d'abord que $\hat{f}(0) \neq 0$, alors : $\quad f = q\,g$

Mais :

$$\mu_r * (qg) = (\mu_r * q) \circ (\mu_r * g)$$

comme on le vérifie aisément en prenant pour q et g des polynômes et en passant à la limite dans L^1. D'où :

$$\log |\mu_r * f| = \log|\mu_r * g| + \log|\mu_r * q| \leq \log|\mu_r * g|$$

car :

$$|q| = 1 \Rightarrow |\mu_r * q| \leq 1 \quad \text{presque partout}$$

la masse totale de μ_r étant égale à $r^0 = 1$. Mais g est extérieure, d'où en appliquant le théorème 6 :

$$\log |\mu_r * f| \leq \mu_r * \log|g| = \mu_r * \log|f|.$$

Si $\hat{f}(0)$ est nul, l'inégalité est quand même vérifiée pour $f + \varepsilon$. Le lemme de Fatou montre que l'inégalité est encore vraie à la limite.

Corollaire :

Si $f \in H^1(B)$ et si elle s'annule sur un ensemble de mesure positive f est identiquement nulle.

D'après le lemme si f s'annule sur un ensemble de mesure positive

$$\mu_r * \log|f| = -\infty$$

D'après le théorème de Malliavin, ceci implique que :

$$\log |\mu_r * f| = -\infty$$

Donc

$$\mu_r * f \equiv 0$$

Mais la transformée de Fourier de μ_r ne s'annule jamais, donc la transformée de Fourier de f est identiquement nulle, il en est de même pour f.

SEMINAIRE D'ANALYSE HARMONIQUE.

Exposé n° 11 : de K. HARZALLAH.

Fonctions opérant sur les fonctions définies-négatives à valeurs complexes.

1. Définitions et notations.

Soit G un groupe abélien localement compact, on note $\hat{G}$ le groupe dual et $\mathcal{C}(G)$ l'ensemble des fonctions continues de G dans $\mathbb{C}$.

Le groupe G est dit illimité si pour tout entier $n > 0$ il existe $x \in G$ tel que $k.x \neq 0$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$.

La fonction $\psi \in \mathcal{C}(G)$ est dite définie négative (Beurling, Schoënberg...). Si la forme hermitienne

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} [\psi(x_i) + \overline{\psi(x_j)} - \psi(x_i - x_j)]\, c_i\, \overline{c_j}$$

est positive, quel que soit l'ensemble des n points $x_i \in G$ $(n = 1, 2\ldots)$.

Il résulte de la définition que l'on a :

$$\mathcal{R}e\, \psi \geq \psi(0) \geq 0$$

et que $\bar{\psi}$ est définie négative desque ψ l'est ; de plus si φ est de type positif alors $\varphi(0) - \varphi$ est définie négative.

D'après Schoënberg [2] une fonction ψ est définie négative si et seulement si l'on a $\psi(0) \geq 0$ et $\exp(-t\,\psi)$ de type positif pour tout $t > 0$.

Il en résulte que :

a) toute fonction définie négative est limite uniforme sur tout compact de fonctions de la forme :

$$(1) \qquad \psi(x) = \alpha + \int_{\hat{G}} [1 - \chi(x)]\, \sigma(d\,\chi)$$

où $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et σ est une mesure positive de masse totale finie.

b) toute fonction f, définie pour $z \in \mathbb{C}$, $\mathcal{R}e\, z \geq 0$, par

$$(2) \qquad f(z) = \alpha + \beta z + \gamma \bar{z} + \int_0^\infty \int_0^\infty [1-\exp(-tz - s\bar{z})] \ \mu(dt, ds)$$

opère, par composition, sur les fonctions définies négatives sur G.

Dans cette formule α, β, γ sont des nombres réels ≥ 0 et μ est une mesure positive sur $\mathbb{R}_+^2$ ne chargeant pas l'origine et telle que

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{t+s}{1+t+s} \ \mu(dt, ds) < \infty .$$

Le but de ce travail est de démontrer le théorème réciproque suivant :

Théorème :

Si G est un groupe abélien localement compact illimité, toute fonction f définie et continue dans $\{z \in \mathbb{C} \ ; \ \mathcal{R}e\, z \geq 0\}$ et qui opère sur les fonctions définies négatives possède une représentation intégrale de la forme (2). Une telle représentation est unique.

On se restreint aux groupes illimités pour la raison suivante : quand G est quelconque les fonctions qui opèrent ne peuvent être étudiées que dans le cône de $\mathbb{C}$ décrit par $\psi(x)$ pour $x \in G$ et ψ définie négative.

L'adhérence de ce cône est le demi plan fermé $\{z \in \mathbb{C}, \ \mathcal{R}e\, z \geq 0\}$, seulement si G est illimité. De plus certains lemmes techniques ne sont pas valables pour tous les groupes.

Il est plus commode d'étudier les fonctions définies dans $\mathcal{R}e\, z > 0$ et qui opèrent. On appellera donc $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions de la forme (2) restreintes à $\mathcal{R}e\, z > 0$ et on utilisera les notations suivantes :

$N(G)$ désigne l'ensemble des fonctions définies négatives sur G.

$N_1(G) = \{\psi \ ; \ \psi \in N(G) \ \text{ et bornée}\}$

$N_2(G) = \{\psi \ ; \ \psi \in N_1(G) \ \text{ et } \ \psi(0) > 0\}$.

$Q(G)$ désigne l'angle ouvert

$$\left\{\alpha + \beta(1 - \chi(x));\ \alpha \text{ et } \beta \text{ réels} > 0\ ;\ \chi \in \hat{G}\ ;\ x \in G\right\}$$

Ainsi $Q(G)$ est l'ensemble des valeurs prises par les $\psi \in N_2(G)$; si G est illimité

$$Q(G) = \left\{z\ ;\ z \in \mathbb{C}\ ;\ \mathcal{R}e\ z > 0\right\}$$

$F_N(G)$ désigne l'ensemble des fonctions f définies et continues dans $Q(G)$ et telles que $f \circ \psi \in N(G)$ pour toute $\psi \in N_2(G)$.

Remarque :

On peut démontrer que dans le cas où G est illimité, toute fonction f définie dans $\mathcal{R}e\ z \geqslant 0$ et telle que $f \circ \psi \in N(G)$ pour toute $\psi \in N(G)$ est nécessairement continue dans l'ouvert $\mathcal{R}e\ z > 0$, et ce, en adaptant une méthode due à C. Herz [1] et en utilisant la relation

$$|\psi(x) + \overline{\psi(y)} - \psi(x-y)|^2 \leqslant 4\ \mathcal{R}e\ \psi(x) .\ \mathcal{R}e\psi(y).$$

valable si $\psi \in N(G)$ et $\psi(0) = 0$.

On écrira $F_N(G) \subset F_N(G')$ pour dire que $Q(G') \subset Q(G)$ et que la restriction à $Q(G')$ de toute $f \in F_N(G)$ appartient à $F_N(G')$.

Enfin on désignera par $F_p(G)$ l'ensemble des fonctions définies sur l'enveloppe convexe, $\Pi(G)$, de

$$\left\{\alpha . \chi(x)\ ;\ \alpha \in [0,\ 1[\ ;\ \chi \in \hat{G} \text{ et } x \in G\right\}$$

et qui opèrent sur les fonctions φ de type positif telles que $\varphi(0) < 1$. On utilisera les propriétés suivantes de $F_p(G)$ établies par C. Herz dans [1].

a) Si G est illimité, G' discret quelconque et T_d est le tore discret on a :

$$(3) \qquad F_p(G) \subset F_p(T_d) \subset F_p(G').$$

b) Si G est illimité et $g \in F_p(G)$ alors il existe une suite a_{mn} (m et n entiers $\geqslant 0$) de nombres réels $\geqslant 0$ tels que

(4) $\quad g(z) = \sum_{m;n\geq 0} a_{mn} z^m \bar{z}^n$ pour $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$.

2. Lemmes préliminaires.

Lemme 1.

Si $\psi \in N_1(G)$ alors $\exists\, m > 0$ tel que $m - \psi$ soit de type positif.

Démonstration : On peut supposer $\psi(0) = 0$. Posons $M = \sup |\psi|$ et

$$\psi_t = \frac{1}{t}\,[1-\exp(-t\,\psi)] \quad \text{pour } t > 0.$$

L'inégalité $|\psi_t - \psi| \leq \frac{1}{t}\,(e^{tM} - tM - 1)$ montre que ψ_t converge uniformément vers ψ quand t tend vers zéro.

D'autre part on peut écrire

$$\psi_t(x) = \int_{\hat{G}} [1 - \chi(x)]\;\; \mu_t(d\,\chi)$$

où μ_t est une mesure positive de masse totale finie sur $\hat{G}$.

Soit $\{V\alpha\}$ un système fondamental de voisinage de 0 dans $\hat{G}$. A chaque $V\alpha$ on peut faire correspondre une fonction $f\alpha$ de type positif, à support dans $V\alpha$ et telle que $0 \leq f_\alpha \leq 1$ et $f_\alpha(0) = 1$. Soit ν_α la mesure associée à f_α par le theorème de Bochner. On a $\nu_\alpha \geq 0$; ν_α symètrique et $\int \nu_\alpha = 1$. On dira que $g \in \mathcal{C}(G)$ possède une moyenne $m(g)$ relativement à $\{V_\alpha\}$ si $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, V$, voisinage de zéro dans $\hat{G}$ tel que

$$V\alpha \subset V \Rightarrow |g * \nu_\alpha(0) - m(g)| < \varepsilon\ .$$

Montrons que ψ_t et ψ possèdent chacune une moyenne.

On a :

$$\psi_t * \nu_\alpha(0) = \int_G \psi_t\,(-x)\nu_\alpha(dx) = \int_{\hat{G}} [1 - f_\alpha(\chi)]\;\mu_t(d\chi)$$

donc

$$\lim_\alpha\ \psi_t * \nu_\alpha(0) = \mu_t(\hat{G} \setminus \{0\}\ ) = m(\psi_t) = m_t.$$

Mais ψ_t converge uniformément vers ψ et $\nu_\alpha * \psi(0)$ est un nombre réel, donc $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, to > 0$ tel que $0 < t < to \Rightarrow |\psi_t - \psi| < \varepsilon$

puis

$$m_t - \varepsilon \leq \lim_\alpha \inf \psi * \nu_\alpha(0) \leq \lim_\alpha \sup \psi * \nu_\alpha(0) \leq m_t + \varepsilon$$

Donc ψ possède une moyenne m et $m_t \longrightarrow m$ quand $t \longrightarrow 0$. Finalement si l'on suppose que $\mu_t \{0\} = 0$ (ce qui est toujours possible) $m - \psi$ apparait comme limite uniforme de $m_t - \psi_t$ qui est de type positif.

Le nombre m est le plus petit réel a tel que $a - \psi$ soit de type positif.

On a de plus $m < \sup \Re \psi$.

Conséquences :

1-a Si $f \in F_N(G)$ et si $\Re f = 0$ alors $f = 0$

1-b Si G est illimité, $f \in F_N(G)$ et $r > 1$ alors il existe $A > 0$ et $a_{mn} \geq 0$ tels que :

$$A - f(z) = \sum_{m,n\geq 0} a_{mn} (r-z)^m (r-\bar{z})^n \quad \text{pour} \quad |r - z| < 1 .$$

1-c En particulier, dans les hypothèses de 1-b, si $f(x) = 0$ pour tout x réel > 0 on a $f = 0$.

1-d Soit G illimité ; à tout $z_0 \in C$, $\Re z_0 > 0$ on peut associer deux réels a et $b > 0$ tels que :

α) $|f(z_0)| \leq 2 f(a)$, $\forall f \in F_N(G)$

β) $|\frac{\partial}{\partial x} f(z_0)| + |\frac{\partial}{\partial y} f(z_0)| \leq 2 \frac{\partial}{\partial x} f(b)$ $\forall f \in F_N(G)$

(ici on pose $z = x + iy$)

1-e Si G est illimité et T_d est le tore discret on a : $F_N(G) \subset F_N(T_d)$; et si G' est discret quelconque on a $F_N(T_d) \subset F_N(G')$.

Démonstration :

a) Soit $\psi \in N_2(G)$; alors $f \circ \psi \in N_1(G)$ car f est continue et bornée. Il existe donc une mesure μ, positive, de masse totale finie sur $\hat{G}$, telle que :

$$f(\psi(x)) - f(\psi(0)) = \int_{\hat{G}} [1 - \chi(x)]\mu(d\chi).$$

Par suite si $\mathcal{R}e\, f = 0$, μ est portée par :

$$\cap \left\{ x^{\perp} ; x \in G \right\} = \{0\} . \quad (\text{ici } x^{\perp} = \{\gamma ; \gamma \in \hat{G} \text{ et } \gamma(x) = 1\})$$

Ainsi $f \circ \psi = 0$ pour toute $\psi \in N_2(G)$ donc $f = 0$.

b) On sait que f est continue dans $\{z ; \mathcal{R}e\, z > 0\}$. Soit $A \geqslant \sup \{|f(z)| ; |r - z| \leqslant 1\}$. D'après le lemme 1, la fonction $A - f(r - \varphi)$ est de type positif quelle que soit la fonction φ de type positif vérifiant $\varphi(0) < 1$. D'après le résultat de C. Herz rappelé au § 1, il existe une suite $a_{mn} \geqslant 0$ (m et n entiers $\geqslant 0$) telle que

$$A - f(r - \zeta) = \sum_{m,n \geqslant 0} a_{mn}\, \zeta^m \bar{\zeta}^n \quad \text{pour} \quad |\zeta| < 1$$

d'où le résultat annoncé.

c) Si $f(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}_+$ alors, d'après ce qui précède

$$f(z) = 0 \quad \text{pour} \quad |r - z| < 1.$$

Or si $f \in F_N(G)$ la fonction $z \longmapsto f(\lambda z)$ appartient aussi à $F_N(G)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Il s'en suit que $(f(x) = 0 , \forall x \in \mathbb{R}_+) \Rightarrow (f(z) = 0 , \forall z)$.

d) D'après le b), toute $f \in F_N(G)$ est de classe C^∞ pour $\mathcal{R}e\, z > 0$. En outre on peut trouver deux nombres réels a et ρ tels que :

$$0 < \rho < a \quad \text{et} \quad |z_0 - a| < \rho$$

posons $r = a/\rho$ et $b = a - |z_0 - a|$.

Soit $f \in F_N(G)$. La fonction g définie par $g(\zeta) = f(\rho\, \zeta)$ est dans $F_N(G)$. On peut donc écrire pour $|r - \zeta| < 1$:

$$g(r) - g(\zeta) = \sum_{\substack{m,n \geqslant 0 \\ m+n > 0}} a_{mn}(r - \zeta)^m\, (r - \bar{\zeta})^n.$$

Il vient alors $|g(r) - g(\zeta)| \leqslant \sum a_{mn}\, |r - \zeta|^{m+n} = g(r) - g(r - |r - \zeta|) \leqslant g(r)$

donc $|g(\zeta)| \leqslant 2\, g(r)$ puis $|f(z_0)| \leqslant 2\, f(a)$.

On a de même, en posant $\zeta = \xi + i\eta$:

$$\left|\frac{\partial}{\partial\xi} g(\zeta)\right| \leq \frac{\partial}{\partial\xi} g(r-|r - \zeta|) \quad \text{et aussi} \quad \left|\frac{\partial}{\partial\eta} g(\zeta)\right| \leq \frac{\partial}{\partial\xi} g(r-|r - \zeta|)$$

d'où $\quad \left|\frac{\partial}{\partial x} f(z_o)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial y} f(z_o)\right| \leq 2 \frac{\partial}{\partial x} f(b)$.

e) D'après le résultat de C.Herz rappelé au §1 on a :

$$F_p(G) \subset F_p(T_d) \subset F_p(G').$$

D'autre part on peut montrer l'implication suivante :

$$F_p(G_1) \subset F_p(G_2) \Rightarrow F_N(G\ ) \subset F_N(G_2)$$

où G_1 et G_2 sont deux groupes abéliens localement compacts quelconques. En effet soient $r > 1$, E l'adhérence de $\{r - \Pi(G_1)\}$ et $f \in F_N(G_1)$. Posons $A = \sup \{|f(z)|\ ;\ z \in E\}$ et soit g la fonction définie dans $\Pi(G_1)$ par $g(\zeta) = A - f(r - \zeta)$. Alors $g \in F_p(G_1)$ et la restriction de g à $\Pi(G_2)$ est dar $F_p(G_2)$.

Soit $\psi \in N_2(G_2)$. Il existe $\alpha > 0$ tel que $1 - \alpha\psi$ soit de type positif ; alors $1 - \alpha\,\psi(x) \in \Pi(G_2)$ pour tout $x \in G_2$ puisque $1 - \alpha\psi(0) < 1$. Il s'en suit que $A - f(r - 1 + \alpha\psi)$ est de type positif.

Mais si φ est de type positif, $\varphi(0) - \varphi$ est définie négative donc

$$f(r - 1 + \alpha\psi) - f(r - \ + \alpha\psi\ (0)) \in N_1(G_2)$$

Par suite $f(\alpha\ \psi) \in N_1(G_2)$ $\forall\ f \in F_N(G_1)$ car $f(\xi) \geq 0$ si $\xi > 0$ et $f(\alpha\ \psi)$ est limite de $f(r - 1 + \alpha\psi)$ quand r décroit vers 1.

Donc $f(\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha\ \psi) = f(\psi) \in N_1(G_2)$, $\forall\ f \in F_N(G_1)$ ce qui démontre l'implication et le lemme.

Lemme 2.

$\mathbb{Z}_q$ désigne le groupe des entiers modulo q.

a) Soient ψ_1 et $\psi_2 \in \mathcal{C}(G)$ et soit $\varphi \in \mathcal{C}(G \oplus \mathbb{Z}_q)$ définie par .

$$\varphi(x, 0) = \psi_1(x) \quad \text{et} \quad \varphi(x, y) = \psi_2(x) \quad \text{si} \quad y \neq 0$$

alors si $\varphi \in N_1(G \oplus \mathbb{Z}_q)$ on a $\psi_1 - \psi_2 + \psi_2(0) - \psi_1(0) \in N_1(G)$.

b) Soient $\psi \in N_2(G)$, $a \in \mathbb{R}_+$ et φ définie sur $(G \oplus \mathbb{Z}_q)$ par $\varphi(x, 0) = \psi(x)$ et, pour $y \neq 0$, par $\varphi(x, y) = a + \psi(x)$. alors $\varphi \in N_2(G \oplus \mathbb{Z}_q)$.

Démonstration :

a) Il existe une mesure $\mu \geqslant 0$ sur le dual de $G \oplus \mathbb{Z}_q$ telle que

$$\varphi(x, y) = \varphi(0, o) + \int [1 - \chi(x) \cdot e^{2i\pi ny/q}] \; \mu(d\chi, dn)$$

On en déduit

$$\psi_1(x) = \varphi(x, 0) = \varphi(0, o) + \int d\mu - \int \chi(x) \; \mu(d\chi, \mathbb{Z}_q) \quad \text{et}$$

$$\frac{1}{q} \left[\psi_1(x) + (q-1) \; \psi_2(x)\right] = \frac{1}{q} \sum_y \varphi(x, y) = \varphi(0, o) + \int d\mu - \int \chi(x) \cdot (d\chi, \{0\})$$

Par suite

$$(1 - \frac{1}{q}) \left[\psi_1(x) - \psi_2(x) - \psi_1(0) + \psi_2(0)\right] = \int [1 - \chi(x)] \; \nu(d\chi)$$

où ν est la mesure positive

$$\nu(d\chi) = \mu(d\chi, \mathbb{Z}_q) - \mu(d\chi, \{0\}).$$

b) Soit ψ' la fonction définie sur $\mathbb{Z}_q$ par :

$$\psi'(0) = 0 \quad \text{et} \quad \psi'(y) = a \quad \text{si} \quad y \neq 0$$

on a $\psi' \in N(\mathbb{Z}_q)$ et $\varphi(x, y) = \psi(x) + \psi'(y)$ donc $\varphi \in N_2(G \oplus \mathbb{Z}_q)$.

Lemme 3 :

On définit $\tau_a f$ par $\tau_a f(z) = f(z + a) - f(a)$.

S'il existe q entier $\geqslant 2$ tel que $F_N(G) \subset F_N(G + Z_q)$ alors $\forall\, a > 0$ et $\forall\, f \in F_N(G)$ on a :

$$f - \tau_a f \in F_N(G)$$

Démonstration :

Soient $f \in F_N(G)$, $a > 0$, $\psi \in N_2(G)$ et φ comme dans le lemme (2, b) ; alors $f \circ \varphi \in N(G \oplus \mathbb{Z}_q)$.

D'après le lemme (2, a) on a :

$$f(\psi) - f(\psi(0)) - f(a+\psi) + f(a+\psi(0)) \in N_1(G).$$

Cette fonction s'écrit :

$$(f - \tau_a f)(\psi) - (f - \tau_a f)(\psi(0))$$

On peut alors conclure si l'on démontre que $(f - \tau_a f)(\xi) \geq 0$ pour tout ξ réel > 0.

Or la restriction de f aux réels > 0 est croissante et ≥ 0 (parce que $\psi \in N(G) \Rightarrow \mathcal{R}e\, \psi \geq \psi(0) \geq 0$). Prenons ψ telle que $\psi(0) = \alpha > 0$ et $\psi(x_o) = \alpha + \xi$ pour un $x_o \in G$. Il vient :

$$(f - \tau_a f)(\alpha + \xi) - (f - \tau_a f)(\alpha) \geq 0$$

Par suite (faire $\alpha \downarrow 0$) $(f - \tau_a f)(\xi) \geq f(+0) \geq 0$

Conséquence :

Si $f \in F_N(G)$ alors sa restriction aux réels > 0 est concave. En effet si $a > h > 0$ et si $g = f - \tau_h f$ il vient :

$$\Delta_2(f\,;\,a,\,h) = f(a+h) + f(a-h) - 2f(a) = g(a-h) - g(a) \leq 0.$$

Lemme 4.

On notera pour $0 \leq r < a$ et pour p entier ≥ 3

$$\mathcal{M}(f\,;\,r\,;\,p\,;\,z+a) = \frac{1}{p}\sum_{n=0}^{p-1} f(z + a - r\,e^{2i\pi n/p}) = g(z)$$

Si $f \in F_N(G)$ et si $F_N(G) \subset F_N(G \oplus Z_p)$ alors g et $f - g + g(0) \in F_N(G)$.

Démonstration :

Soit $\psi \in N_2(G)$. On a $f(\psi(x) + a - r\,e^{2i\pi n/p}) \in N_1(G \oplus Z_p)$.

Il existe donc une mesure $\mu \geq 0$ et de masse totale finie sur le dual de $G \oplus Z_p$ telle que

$$f(\psi(x) + a - r\,e^{2i\pi n/p}) - f(\psi(0) + a - r) = \int [1 - \chi(x)\exp(2i\pi nm/p)]\,\mu(d\chi,\,dm)$$

Il vient alors

$$g(\psi(x)) - f(\psi(0) + a-r) = \int d\mu - \int \chi(x)\ \mu(d\chi, \{0\})$$

$$f(\psi(x) + a-r) - f(\psi(0) + a-r) = \int d\mu - \int \chi(x)\ \mu(d\chi, \mathbb{Z}_p)$$

par suite, en désignant par $\nu(d\chi)$, la mesure positive $\mu(d\chi, \mathbb{Z}_p) - \mu(d\chi, \{0\})$ on a :

$$f(\psi(x) + a-r) - g(\psi(x)) - f(\psi(0) + a-r) + g(\psi(0)) = \int [1 - \chi(x)]\ \nu(d\chi).$$

En particulier si ξ est réel > 0 on a : $f(\xi + a-r) - g(\xi) \geq f(a-r) - g(0)$.

Il s'ensuit que

$$\tau_{a-r} f - g + g(0) \in F_N(G).$$

Le lemme précedent premet alors de conclure puisque

$$f - \tau_{a-r} f \in F_N(G).$$

3. Etude du problème.

A- Le théorème que nous avons en vue sera démontré si on prouve l'inclusion

$$(5) \qquad F_N(T_d) \subset \mathcal{F}$$

En effet on a toujours $\mathcal{F} \subset F_N(G)$ et, d'après le lemme (1,e) pour G illimité

$$F_N(G) \subset F_N(T_d).$$

Actuellement $F_N(T_d)$ est un cône convexe de fonctions définies et continues dans le demi plan ouvert $\{\mathcal{R}e\ z > 0\}$; de plus il est fermé pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. $F_N(T_d)$ est saillant. On a en effet d'après le lemme (1,a)

$$(f \text{ et } -f \in F_N(T_d)) \Rightarrow (\mathcal{R}e\ f = 0) \Rightarrow (f = 0).$$

L'inclusion (5) sera démontrée par le théorème de Krein et Milmann. A cet effet on montrera que $F_N(T_d)$ possède une base convexe compacte métrisable dont on déterminera les éléments extrémaux.

Proposition :

Soit $\mathcal{B} = \{f\ ;\ f \in F_N(T_d) \text{ et } \int_0^\infty f(t)\ e^{-t}\ dt = 1\}$

$\mathcal{B}$ est alors une base convexe compacte métrisable de $F_N(T_d)$.

Démonstration :

Comme la restriction de $f \in F_N(T_d)$ aux réels > 0 et concave et positive, l'intégrale existe toujours. D'autre part $\mathcal{B}$ rencontre toutes les génératrices de $F_N(T_d)$. En effet, si l'intégrale est nulle pour une $f \in F_N(T_d)$ on aura $f(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}_+$ donc $f = 0$ partout d'après le lemme (1,c).

La compacité de $\mathcal{B}$ est démontréeà l'aide des théorèmes d'Ascoli et de la convergence dominée.

Soient $f \in \mathcal{B}$ et $x > 0$. On a :

α) $$1 = \int_0^\infty f(t)\, e^{-t}\, dt \geq f(x) \cdot \int_x^\infty e^{-t}\, dt + \frac{1}{x}\, f(x) \int_0^x t\, e^{-t}\, dt = \frac{1-e^{-x}}{x}\, f(x).$$

par suite $$f(x) \leq \frac{x}{1-e^{-x}} \quad \text{et} \quad e^{-x} f(x) \leq \frac{x}{e^x - 1}$$

β) $$1 = \int_0^\infty f(t)\, e^{-t}\, dt \geq \int_0^\infty f'(t)\, e^{-t}\, dt \geq x\, e^{-x}\, f'(x).$$

Ici $f'(x)$ désigne $\frac{\partial}{\partial x} f(x)$; l'inégalité est valable car $e^{-x} f'(x)$ est décroissante. Ainsi $\frac{\partial}{\partial x} f(x) \leq \frac{e^x}{x}$.

D'après le lemme (1,d) il vient pour $\mathcal{Re}\, z_o > 0$

α') $$\sup_{f \in \mathcal{B}} |f(z_o)| \leq \frac{2a}{1-e^{-a}}$$ où $a > 0$ ne dépend que de z_o.

β') $$\sup_{f \in \mathcal{B}} \left\{ \left|\frac{\partial}{\partial x} f(z_o)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial y} f(z_o)\right| \right\} \leq \frac{2e^b}{b}.$$ où $b > 0$ ne dépend que de z_o.

D'après le thèorème d'Ascoli $\mathcal{B}$ est relativement compacte.
Mais $\mathcal{B}$ est aussi fermée ; en effet si f est limite d'une suite $\{f_n\} \subset \mathcal{B}$, les relations

$$f_n(t)\, e^{-t} \leq \frac{t}{e^t - 1} \quad \text{et} \quad \int_0^\infty f_n(t)\, e^{-t}\, dt = 1$$

entrainenet que $f \in \mathcal{B}$.

(C) Génératrices extrémales.

Soit f un élément d'une génératrice extrémale de $F_N(T_d)$. Pour un entier p donné ≥ 3 il existe d'après le lemme (1-e) d'une part et les [illegible]mes (3) et (4) d'autre part, un nombre $K(a, r) \in [0, 1]$ tel que

$$\mathcal{M}(f ; r ; p ; z+a) - \mathcal{M}(f ; r ; p ; a) = K(a, r) . f(z)$$

et

$$f(z+a) - f(a) = K(a, 0) . f(z) = k . f(z).$$

Or f est de classe C^∞ ; son laplacien au point $z + a$ est limite, quand $r \to 0$ de

$$\frac{4}{r^2} [\mathcal{M}(f ; r ; p, z+a) - f(z+a)]$$

Par suite $\lim\limits_{r \to 0} \frac{4}{r^2} [K(a, r) - K(a, 0)]$ existe.

Soit $C = C(a)$ cette limite.

On peut alors écrire :

$$(6) \qquad \tau_a (\Delta f)(z) = \Delta f(z+a) - \Delta f(a) = C . f(z)$$

et

$$(7) \qquad \tau_a f(z) = f(z+a) - f(a) = k . f(z).$$

1°) Supposons d'abord que la restriction de f aux réels > 0 soit non bornée Il vient alors $k = 1$, sinon l'inégalité $f(x) \leq f(x+a)$ entraine, compte tenu de (7), $f(x) \leq \frac{f(a)}{1-k}$.

Par suite $f(x+a) = f(x) + f(a)$ pour tout x et tout a réels > 0. Il existe donc un nombre réel A tel que $f(x) = A . x$. Le nombre A est différent de zéro sinon $f(x) = 0$ pour tout $x \in R_+$ donc $f = 0$.

La relation (7) devient $f(x + iy + a) = A . a + f(x + iy)$.

Par suite, compte tenu de $\frac{\partial}{\partial x} f(x + iy + a) = \frac{\partial}{\partial a} f(x + iy + a)$ il vient

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x + iy) = A.$$

Il existe donc une fonction g de la variable y de classe C^∞ (car f est de classe C^∞) telle que $f(x + iy) = A . x + g(y)$ et $g(0) = 0$.

La relation (6) montre que g est un trinôme de second degrè. Ainsi f se présente sous la forme :

$$f(z) = f(x + iy) = \alpha z + \beta \bar{z} + \gamma y^2.$$

Le lemme (1-b) montre alors que $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ et $\gamma = 0$.

⇒ Finalement si f est extrémale et non bornée sur les réels > 0 alors elle est proportionnelle soit à z soit à $\bar{z}$.

2°) Supposons maintenant que la restriction de f aux réels > 0 soit bornée

Soit $m = \lim_{x \to \infty} f(x) = \sup_{x>0} f(x)$.

On a $m > 0$ (sinon $f = 0$). Il est facile de voir que la fonction $h = \frac{1}{m}(m-f)$ vérifie $h(x+a) = h(x) \cdot h(a)$.

Par conséquent :

ou bien $h(x) = 0 \ \forall \ x > 0$ donc $f(x) = m$ et $k = 0$ puis $f(z) = m$;

ou bien $h(x) > 0$ et $\exists \lambda > 0$ tel que $h(x) = e^{-\lambda x}$; on en déduit alors

$$f(x) = m(1 - e^{-\lambda x}) \quad \text{et} \quad k = K(a, 0) = e^{-\lambda a}.$$

Dans ce cas comme $\frac{\partial}{\partial x} f(x + iy + a) = \frac{\partial}{\partial a} f(x + iy + a)$

on obtient compte tenu de (7)

$$\frac{\partial}{\partial x} f(z) = -\lambda f(z) + m\lambda \qquad (z = x + iy).$$

Il existe donc une fonction g de y de classe C^∞ (car f est de classe C^∞) telle que

$$f(z) - m = e^{-\lambda x}(g(y) - m) \quad \text{avec} \quad g(0) = 0.$$

La relation (6) permet de donner une expression de g.

On obtient en effet $\quad g'' + (\lambda^2 - C(a) \cdot e^{\lambda a})(g - m) = 0.$

Il existe alors trois nombres complexes α, β, γ tels que

$$g(y) = \beta(1 - e^{i\alpha y}) + \gamma(1 - e^{-i\alpha y}) \qquad \text{avec} \quad \beta + \gamma = m$$

Par suite

$$f(z) = \beta(1 - e^{-x+i\alpha y}) + \gamma(1 - e^{-x-i\alpha y})$$

ou, sous une forme plus symétrique :

$$f(z) = \beta(1 - e^{-tz-s\bar{z}}) + \gamma(1 - e^{-t\bar{z}-sz})$$

avec $\beta + \gamma = m > 0$, $t + s = \lambda > 0$ et $\beta, \gamma, t, s \in \mathbb{C}$.

Le lemme (1-b) montre que les nombres $\beta t^p s^q + \gamma t^q s^p$ sont réels ≥ 0 pour p et q entiers ≥ 0 et $p + q > 0$.

On voit alors sans difficulté que

$$|t| \neq |s| \quad \Rightarrow \quad t,\ s,\ \beta \ \text{et}\ \gamma \in R_+$$
$$|t| = |s| \quad \Rightarrow \quad t = s > 0 \ \text{et}\ f(z) = m(1 - e^{-\lambda x})$$

⇒ Finalement si f est extrémale, bornée sur les réels > 0 et non constante, alors elle est proportionnelle à l'une des fonctions :

$$1 - \exp(-tz - s\bar{z}) \quad \text{avec } t \text{ et } s \geq 0 \text{ et } t+s > 0.$$

En conclusion on peut énoncer :

Proposition 2. Les élements extrémaux de $\mathcal{B}$ sont parmi les fonctions : $f_\infty = 1$; $f_1 = z$; $f_{-1} = \bar{z}$; $f_{t,s} = \dfrac{1 - e^{-tz-s\bar{z}}}{t+s}(1+t+s)$ avec t et $s \geq 0$ et $t+s > 0$.

(D) La représentation intégrale.

Les fonctions de la proposition 2 ne forment pas un ensemble fermé dans $\mathcal{B}$. En fait, on peut démontrer le résultat suivant :

Proposition 3. L'ensemble $\{f_{t,s}\ ;\ t \geq 0,\ s \geq 0,\ t+s > 0\}$ muni de la topologie induite par celle de $\mathcal{B}$ est homéomorphe à

$$P = \{(t,s)\ ;\ t \geq 0,\ s \geq 0,\ t+s > 0\}$$

De plus son adhérence est formée des fonctions :

$$f_\infty\ ;\ f_{t,s}\ ;\ f_\lambda = \frac{1+\lambda}{2} f_1 + \frac{1-\lambda}{2} f_{-1} \quad \text{avec} \quad \lambda \in [-1, 1].$$

Corollaire.

Soit $f \in \mathcal{B}$. Il existe α, β, γ réels ≥ 0 et μ une mesure ≥ 0 portée par P vérifiant :

$$\alpha + \beta + \gamma + \int_P d\mu = 1$$

et

$$f = \alpha \cdot f_\infty + \beta f_1 + \gamma f_{-1} + \int_P f_{t,s}\, \mu(dt, ds)$$

En particulier, si $\mathcal{R}e\ z > 0$

$$f(z) = \alpha + \beta z + \gamma \bar{z} + \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1 - e^{-tz-s\bar{z}}}{t+s}(1+t+s) . \mu(dt, ds).$$

(E) Unicité de la représentation.

On veut démontrer que la donnée de $f \in \mathcal{B}$ détermine complètement α, β, γ et μ. Il est clair que l'on a, d'après le corllaire précédent :

$$\alpha = \lim_{x \downarrow 0} f(x) \quad ; \quad \beta = \lim_{x \uparrow \infty} \frac{\partial}{\partial z} f(x) \quad ; \quad \gamma = \lim_{x \uparrow \infty} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(x).$$

Soit alors $g \in F_N(T_d)$ définie par :

$$g(z) = \int_0^\infty (f - \tau_a f)(z) \cdot e^{-a} \, da$$

on a plus précisement :

$$g(z) = \alpha + \int_0^\infty \int_0^\infty [1 - e^{-tz-s\bar{z}}] \cdot \mu(dt, ds)$$

Soit $h(z) = \alpha + \int d\mu - g(z) = - g(z) + \lim_{x \uparrow \infty} g(x).$

La fonction h ne dépend que de f et se met sous la forme

$$h(z) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-tz-s\bar{z}} \cdot \mu(dt, ds).$$

Par suite

$$\left(\frac{-\partial}{\partial z}\right)^m \left(\frac{-\partial}{\partial \bar{z}}\right)^n h(1) = \int_0^\infty \int_0^\infty t^m s^n \, e^{-(t+s)} \mu\,(dt, ds).$$

Ainsi la transformée de Laplace de μ est bien déterminée à partir de f, donc μ aussi.

Corollaire.

f_∞ ; f_1 ; f_{-1} ; $f_{t,s}$ sont toutes extrémales.

- - - - - -

Références.

[1] C. Herz : Ann. Inst. Fourier. 13 - 1963 - p. 161-180.

[2] I. Schoenberg : Trans. Amer. Math. Soc. 44 - 1938 - p. 522 - 536.

SEMINAIRE D'ANALYSE HARMONIQUE.

Exposés n° 12 - 13 : P. TURPIN.

Sur une classe d'algèbres topologiques.

L'objet de cet exposé est une généralisation de résultats obtenus par W. Zelazko sur les algèbres p-normées ([5] et [6]).

I. Espaces vectoriels topologiques pseudo localement convexes.

Remarque : si $0 < p \leqslant 1$, si $a, b > 0$ on a

$$(a+b)^p \leqslant a^p + b^p$$

Définition :

Etant donné un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$, une pseudo-semi-norme de E est une application ν de E dans $\mathbb{R}$ telle que, si $x \in E$, $y \in E$, λ est un scalaire,

(1) $\nu(x) \geqslant 0$

(2) $\nu(x+y) \leqslant \nu(x) + \nu(y)$

(3) $\nu(\lambda x) = |\lambda|^p \nu(x)$, où $0 < p \leqslant 1$ indépendant de λ et x, sera noté $p(\nu)$.

On dira que ν est p-homogène si $p(\nu) = p$.

Si $\nu(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, on dira que ν est une pseudo-norme.

On écrira souvent p.s.n. au lieu de pseudo-semi-norme.

Exemples :

- si ν est une semi-norme, si $0 < p \leqslant 1$, ν^p est une p.s.n. p-homogène.

- si α est une mesure (abstraite) définie sur un espace mesurable $(T, \mathfrak{T})$ (au sens de Halmos), si L^p_α est l'ensemble des fonctions complexes à puissance $p^{è}$ sommable pour α, avec $0 < p < \infty$, L^p_α constitue un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et si

$$\mu_{\alpha,p} = \int |f|^p \, d\alpha \quad \text{pour} \quad p \leq 1$$
$$= \left[\int |f|^p \, d\alpha\right]^{1/p} \quad \text{pour} \quad p > 1$$

μ_p est une p.s.n. p-homogène de L^p.

Si ν est une p.s.n. de E, si $\varepsilon > 0$ et si

$$U_{\nu,\varepsilon} = \{ x \in E : \nu(x) < \varepsilon \}$$

l'ensemble des $U_{\nu,\varepsilon}$ quand ε varie constitue un système fondamental de voisinages de l'origine pour une topologie d'e.v.t. bien déterminée, que nous dirons définie par ν, et noterons τ_ν.

Définition :

Un espace vectoriel topologique localement borné est un e.v.t. possédant un voisinage de l'origine borné.

Théorème (I, 1): (Rolewicz : [3])

Pour qu'un e.v.t. soit localement borné il faut et il suffit que sa topologie puisse être définie par une pseudo-semi-norme.

Définition :

Si $\mathcal{N}$ est une famille de p.s.n. de E, la topologie définie par $\mathcal{N}$ sera la borne supérieure des τ_ν, $\nu \in \mathcal{N}$.

Définition :

Un e.v.t. pseudo localement convexe (p.l.c.) sera un e.v.t. dont la topologie pourra être définie par une famille de p.s.n.

Définition :

On dira qu'une famille de p.s.n. $\mathcal{N}$ est filtrante quand elle sera filtrant pour la relation de préordre induite par la relation d'ordre de finesse entre lés τ_ν, $\nu \in \mathcal{N}$.

Proposition (I, 1):

La topologie d'un e.v.t. p.l.c. peut être définie par une famille filtrante de p.s.n.

Exemples :

- Un e.v.t. localement convexe est pseudo localement convexe

- I étant un ensemble d'indices, $(\alpha_i)_{i\in I}$ une famille de mesures positives d'un espace de mesure $(T, \mathcal{T})$, $(p_i)_{i\in I}$ une famille de réels $\in]0, +\infty[$, l'espace vectoriel $\bigcap_{i\in I} L^{p_i}_{\alpha_i}$ muni de la topologie définie par la famille des μ_{α_i, p_i}, $i \in I$, est p.l.c., généralement ni localement convexe, ni localement borné.

Théorème (I, 2) :

Pour que la topologie d'un e.v.t. soit p.l.c., il faut et il suffit qu'elle soit la borne supérieure d'une famille de topologies localement bornées.

C'est un corollaire du théorème de Rolewicz.

On vérifie que la classe des e.v.t. p.l.c. est fermée pour la limite projective et inductive, le passage au quotient, la complétion etc...

II. Algèbres topologiques pseudo localement convexes.

Définition :

Une algèbre topologique pseudo-localement convexe est une algèbre munie d'une topologie pseudo-localement convexe.

Définition :

Le produit d'une algèbre topologique A sera dit continu si l'application $(x, y) \longrightarrow xy$ de $A \times A$ dans A est continue.

Proposition (II, 1):

Pour que le produit d'une algèbre topologique p.l.c. soit continu, il faut et il suffit que, si $\mathcal{N}$ est une famille filtrante de p.s.n. définissant la topologie de A, il existe, pour tout $\nu \in \mathcal{N}$ un réel $a > 0$ et $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{N}$ tels que pour tout $(x, y) \in A \times A$

$$\nu(xy)^{\frac{1}{p(\nu)}} \leq a \quad \nu_1(x)^{\frac{1}{p(\nu_1)}} \quad \nu_2(y)^{\frac{1}{p(\nu_2)}}$$

Exemples d'algèbres p.l.c. à produit continu :

(1) $\bigcap_{p > p_0} L^p_\alpha$, où $p_0 \geq 0$, muni du produit point par point. On a en effet

si $\frac{1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{s}$,

$$\left[\int |fg|^p\right]^{1/p} \leq \left[\int |f|^r\right]^{1/r} \left[\int |g|^s\right]^{1/s}$$

(2) $\bigcap_{p \in P} L^p_\alpha$ où est une mesure définie sur l'espace;de mesure $(T, \mathcal{T})$ "uniformément discrète", c'est-à-dire telle que $0 < \inf \left\{\alpha(S) : S \in \mathcal{T}, \alpha(S) > 0\right\}$ et où $P \subset]0, \infty[$, suivant le produit point par point. On a en effet,

$$\int |fg|^p \, d\alpha \leq a \int |f|^p \, d\alpha \int |g|^p \, d\alpha$$

(3) L'algèbre de convolution $\bigcap_{p \in P} L^p_\alpha(G)$, où α est la mesure de Haar du groupe discret G est où $P \subset \;]0, 1]$.

On a, si $0 < p \leq 1$,

$$L^p_\alpha(G) \subset L^1_\alpha(G)$$

et

$$\int |f * g|^p \, d\alpha \leq \int |f|^p \, d\alpha \int |g|^p \, d\alpha$$

(4) L'algèbre $C(X)$ des fonctions complexes continues sur un espace topologique X, munie de la topologie (localement convexe) de la convergence uniforme sur tout compact de X.

(5) L'algèbre $\mathcal{H}(K)$ des germes de fonctions holomorphes au voisinage d'un compact K de $\mathbb{C}$, considérée comme limite inductive des algèbres $\mathcal{H}(\mathcal{O})$, $\mathcal{O}$ voisinage de K, si $\mathcal{H}(\mathcal{O})$ est l'algèbre des fonctions holomorphes sur $\mathcal{O}$ munie de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

<u>L'algèbre $\mathcal{E}(A)$</u>.

<u>Définition</u> :

Si ν est une p.s.n. de l'algèbre A,

$$\nu^*(x) = \limsup_{n \to \infty} \left[\nu(x^n)^{\frac{1}{np(\nu)}}\right]$$

On a

$$0 \leq \nu^*(x) \leq \infty \; .$$

<u>Exemples</u> :

- Dans une algèbre $\bigcap_{i \in I} L^{p_i}_{\alpha_i}$ pour le produit point par point,

$$\mu_{\alpha_i, p_i}{}^{*}(f) = \|f\|_{\alpha_i, \infty},$$

la borne supérieure essentielle de f relative à la mesure α_i.

-Dans $C(X)$, si $\nu_K(f) = \operatorname{Sup}\left\{|f(x)| : x \in K\right\}$, $\nu_K^*(f) = \nu_K(f)$.

Théorème (II, 1) :

Si A est une algèbre pseudo localement convexe à produit continu, les fonctions ν^* vérifient les propriétés suivantes :

a) $\nu^*(\lambda x) = |\lambda|\ \nu^*(x)$ $\quad (0 \times \infty = 0)$

b) si $\nu \in \mathcal{N}$, famille filtrante de p.s.n. définissant la topologie de A, il existe ν_1, $\nu_2 \in \mathcal{N}$ telle que, si $xy = yx$,

$$\nu^*(xy) \leq \nu_1^*(x)\ \nu_2^*(y)$$

$$\nu^*(x + y) \leq \nu_1^*(x) + \nu_2^*(y)$$

Démonstration de b) :

Supposons que $xy = yx$. En appliquant la proposition (II, 1),

$$\lim_{n \to \infty} \sup \left[\nu(xy)^n\right]^{\frac{1}{np(\nu)}} \leq \lim \sup a\ \nu_1(x^n)^{\frac{1}{np(\nu_1)}}\ \nu_2(y^n)^{\frac{1}{np(\nu_2)}}$$

$$\leq \nu_1^*(x)\ \nu_2^*(y).$$

$$\left[\nu(x + y)^n\right]^{\frac{1}{p(\nu)}} \leq \left\{\sum_{q=0}^{n} \binom{n}{q}^{p(\nu)}\ \nu(x^q\ y^{n-q})\right\}^{\frac{1}{p(\nu)}}$$

$$\leq (n + 1)^{\frac{1}{p(\nu)}} \sum_{q=0}^{n} \binom{n}{q}\ \nu^{\frac{1}{p(\nu)}}(x^q\ y^{n-q})$$

$$\leq a\ (n+1)^{\frac{1}{p(\nu)}} \sum_{q=0}^{n} \binom{n}{q}\ \nu_1(x^q)^{\frac{1}{p(\nu_1)}}\ \nu_2(y^{n-q})^{\frac{1}{p(\nu_2)}}$$

Si $\rho_1 > \nu_1^*(x)$ et $\rho_2 > \nu_1^*(y)$, il existe M tel que

$$\left[\nu(x+y)^n\right]^{\frac{1}{p(\nu)}} \leq a\ M(n+1)^{\frac{1}{p(\nu)}} \sum_{q=0}^{n} \binom{n}{q}\ \rho_1^{\ q}\ \rho_2^{\ n-q}$$

et $\nu^*(x+y) \leq \rho_1 + \rho_2$, ce qui termine la démonstration.

Définition :

Si A est une algèbre p.l.c., si $\mathcal{N}$ est une famille de p.s.n. définissant la topologie de A,

$$\mathcal{E}(A) = \left\{ x \in A : \forall \nu \in \mathcal{N},\ \nu^*(x) < \infty \right\}$$

$\mathcal{E}(A)$ ne dépend pas du choix de $\mathcal{N}$.

On montre que $\mathcal{E}(A)$ est l'ensemble des $x \in A$ tels que toute série $\sum a_n z^n$ $(a_n \in \mathbb{C})$ à rayon de convergence infini converge en x dans l'espace compl plété de A.

Proposition (II, 2) :

Si A est une algèbre p.l.c. commutative et à produit continu, $\mathcal{E}(A)$ est une sous-algèbre de A.

C'est une conséquence du théorème (II, 1) et de la proposition (II, 1).

Exemples.

-Si $A = \bigcap_{p>p_0} L^p_\alpha$ (produit point par point), $\mathcal{E}(A) = L^\infty \cap A$. Donc $\mathcal{E}(A) \neq A$ en géneral (par exemple si α est une mesure non atomique).

-Si $A = C(X)$, $\mathcal{E}(A) = A$.

Le rayon analytique et l'algèbre $\mathcal{E}_0(A)$.

Définition :

Si A est une algèbre p.l.c., nous poserons pour $x \in A$,

$$h(x) = \inf\left\{ |\alpha| \quad : \alpha \text{ scalaire} \neq 0, \quad \text{et } \left(\frac{x}{\alpha}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \right\}$$

où $\inf(\emptyset) = \infty$.

On dira que h est le rayon analytique de A.

Proposition (II, 3) :

Si $\mathcal{N}$ est une famille de p.s.n. définissant la topologie de A,

$$h(x) = \sup_{\nu \in \mathcal{N}} \nu^*(x).$$

Exemples :

- Dans une algèbre de Banach, h est le rayon spectral.

- Dans une algèbre $\bigcap_{i \in I} L^{p_i}_{\alpha_i}$ pour le produit point par point,

$$h(f) = \operatorname*{Sup}_i ||f||_{\alpha_i, \infty}$$

- Dans $C(X)$, $h(f) = \operatorname{Sup}\left\{ |f(x)| \;:\; x \in X \right\}$
- Dans $\mathcal{H}(K)$, $h(f) = \operatorname{Sup} |f/K|$.

Pour démontrer ce dernier point, il suffit de démontrer que

$$\operatorname{Sup} |f/K| < 1 \Leftrightarrow f^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

L'ensemble des $f \in \mathcal{H}(K)$ tels que $\operatorname{Sup} |f/K| < 1$ est un convexe qui est un voisinage de l'origine dans chaque $\mathcal{H}(\mathcal{O})$, $\mathcal{O}$ ouvert $\supset K$. C'est donc un voisinage de l'origine dans $\mathcal{H}(K)$: $\exists\, n : 1 > \sup |f^n/K|$, et $\operatorname{Sup} |f/K| < 1$.

Réciproquement, si $\operatorname{Sup} |f/K| < 1$, il existe un voisinage $\mathcal{O}$ de K sur lequel $|f| < 1$: dans $\mathcal{H}(\mathcal{O})$, $f^n \longrightarrow 0$, donc $f^n \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{H}(K)$.

<u>Théorème (II, 2)</u> :

Si A est une algèbre p.l.c. à produit continu, le rayon analytique de A vérifie les propriétés :

$0 \leqslant h(x) \leqslant \infty$

$h(\lambda x) = |\lambda|\, h(x)$

$h(x^n) = h(x)^n$

$h(e) = 1$ si A possède une unité et si la topologie de A n'est pa triviale.

Si $xy = yx$,

$$h(xy) \leqslant h(x)\, h(y)$$
$$h(x+y) \leqslant h(x) + h(y)$$

<u>Démonstration</u> :

On utilise le théorème (II, 1) et la proposition (II, 3).

<u>Définition</u> :

Si A est une algèbre p.l.c.

$$\mathcal{E}_o(A) = \left\{ x \in A : h(x) < \infty \right\}$$

Donc,

$$\mathcal{E}_o(A) = \left\{ x \in A : \exists\, \lambda \text{ scalaire} \neq 0 \text{ et } (\lambda x)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \right\}$$

Proposition (II, 4):

Si A est une algèbre p.l.c. commutative à produit continu, $\mathcal{E}_0(A)$ est une algèbre.

Exemple :

Si $A = C(X)$, $\mathcal{E}_0(A) = \mathcal{B}(X) \cap C(X)$, $\mathcal{B}(X)$: algèbre des fonctions bornées sur X.

III. Les algèbres analytiques.

Définition :

Une algèbre p.l.c. A sera dite analytique si $A = \mathcal{E}_0(A)$.

Exemples :

- Les algèbres normées
- Les algèbres localement bornées à produit continu. (Théorème (I, 1) et (Proposition I, 1).
- L'algèbre $\bigcap_{p \in P} L^p(G)$ (G groupe discret commutatif, $P \subset]0, 1]$, produit de convolution).
- $\mathcal{H}(K)$.
- Toute algèbre localement convexe dont l'ensemble des inversibles est ouvert et l'inverse continu.

Théorème (III, 1) : (Généralisation du théorème de Gelfand-Mazur).

Si A est une algèbre topologique réelle p.l.c. séparée analytique et à produit continu, si A est unitaire et si tout élément de A non nul est inversible, A est isomorphe au corps des réels, des complexes ou des quaternions.

Démonstration :

Si A est commutative, c'est une algèbre normée pour h ($x \neq 0 \Rightarrow 1 = h(e) \leq h(x)\, h(x^{-1})$). Donc $A = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si A n'est pas commutative, on montre qu'un élément quelconque x est racine d'une équation du second degré à coefficients réels en appliquant le théorème au bicommutant de x. On en déduit que A est de dimension finie ([2]), donc isomorphe au corps des quaternions.

Corollaire :

Une algèbre analytique à inverse continu qui soit un corps est le corps $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ou des quaternions. (On ne suppose pas le produit continu).

Démonstration : L'identité

$$x^2 = x - [x^{-1} + (e - x)^{-1}]^{-1} \qquad (1)$$

montre que si le produit est commutatif, il est continu. On applique alors le théorème (III, 1) en introduisant le bicommutant dans le cas non commutatif.

Théorèmes de représentation.

Introduisons les notations suivantes :

Si A est une algèbre complexe unitaire, Hom A = ensemble des homomorphismes algébriques complexe $\not\equiv 0$ de A, muni de la topologie faible de A^*.

Si $\varphi \in \text{Hom } A$, $x \in A$, $\hat{x}(\varphi) = \varphi(x)$.

$$\|\hat{x}\| = \text{Sup}\left\{|\hat{x}(\varphi)| \;;\; \varphi \in \text{Hom } A\right\}$$

$A^\wedge = \left\{\hat{x} : x \in A\right\}$, si Hom $A \neq 0$: $A^\wedge \subset C(\text{Hom } A)$

$\text{sp } x = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - x \text{ non inversible}\right\}$

$$\hat{x}(\text{Hom } A) \subset \text{sp}(x).$$

$\mathfrak{M}(A)$ = ensemble des idéaux maximaux de A.

$$\text{Hom } A \subset \mathfrak{M}(A).$$

$$\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}(A) = \cap\left\{m : m \in \mathfrak{M}(A)\right\}$$

$$\mathfrak{R}_{sp}(A) = \left\{x \in A : \text{sp}(x) = \{0\}\right\}$$

$$\mathfrak{R}_{\text{Hom}}(A) = \left\{x \in A : \hat{x} \equiv 0\right\} \quad (\text{si Hom } A \neq 0)$$

On a

$$\mathfrak{R}_{\mathfrak{M}}(A) \subset \mathfrak{R}_{sp}(A) \subset \mathfrak{R}_{\text{Hom}}(A).$$

Si $S \subset \mathbb{C}$, $|S| = \sup\left\{|\lambda|, \lambda \in S\right\}$

Théorème (III, 2) :

Soit A une algèbre analytique unitaire complexe commutative à produit continu, à topologie non triviale.

Soit $\mathrm{Hom}_h(A)$ l'ensemble des $\varphi \in \mathrm{Hom}\, A$ continus pour la topologie définie pa la semi-norme h, muni de la topologie faible de A^* :

$$\mathrm{Hom}_h(A) \quad \text{est non vide et compact,}$$

si
$$\|\hat{x}_h\| = \mathrm{Sup}\left\{ |\varphi(x)| \;;\; \varphi \in \mathrm{Hom}_h A \right\}, \quad \text{on a}$$
$$h(x) = \|\hat{x}_h\|$$

Le noyau de l'homomorphisme d'algèbre $x \longrightarrow \hat{x}_h$ de A dans $\mathcal{C}(\mathrm{Hom}_h A)$ est donc $\mathfrak{R}_h(A)$.

Démonstration :

$\mathfrak{R}_h$ est un idéal de A. Soit B l'algèbre de Banach commutative et unitaire obtenue par complètion de l'algèbre $A/\mathfrak{R}_h$ munie de la norme $h^\bullet$ canoniquement déduite de h. Soit j l'application canonique $A \longrightarrow B$. On montre facilement que $\mathrm{Hom}_h A$ est homéomorphe à $\mathrm{Hom}\, B$, par la transposée de j, donc compact et non vide. De plus,

$$\|\hat{x}_h\| = \|\widehat{j(x)}\| = \lim \sqrt[n]{h^\bullet[j(x)]^n} = h(x)$$

car $h(x^n) = h(x)^n$.

Remarque : On déduit du théorème (III, 2).

$$h(x) \leq \|\hat{x}\| \leq |sp(x)|$$
$$\mathfrak{R}_m(A) \subset \mathfrak{R}_{sp}(A) \subset \mathfrak{R}_{Hom}(A) \subset \mathfrak{R}_h(A)$$

L'inégalité $h(x) \leq |sp(x)|$ subsiste dans une algèbre non commutative (on utilise le bicommutant).

Théorème (III, 3) :

Soit A une algèbre analytique unitaire complexe commutative à produit continu, vérifiant l'unedes propriétés :

(1) L'ensemble des éléments inversibles de A est ouvert.

(2) A est complète est séparée.

Alors $\mathrm{Hom}\, A$ est compact et non vide.

$$\mathrm{Hom}\ A = \mathfrak{M}(A),$$

$$\mathrm{Hom}\ A = \mathrm{Hom}_h\ A$$

$$x \in A \ \text{ inversible } \Leftrightarrow \forall\ \varphi \in \mathrm{Hom}\ A, \quad \varphi(x) \neq 0.$$

$$\hat{x}(\mathrm{Hom}\ A) = sp(x)$$

$$h(x) = ||\hat{x}|| = |sp(x)|$$

$$\mathcal{R}_{\mathfrak{M}}(A) = \mathcal{R}_{sp}(A) = \mathcal{R}_{\mathrm{Hom}}(A) = \mathcal{R}_h(A),$$

noyau de l'homomorphisme d'algèbres de A dans $C(\mathrm{Hom}\ A)$.

(1) implique de plus que $x \longrightarrow \hat{x}$ est continu.

Démonstration :

Supposons (1). Tout idéal maximal de A est fermé et on montre d'une manière classique en utilisant le théorème (III, 1) (Gelfand-Mazur) que $\mathrm{Hom}\ A$ s'identifie à $\mathfrak{M}(A)$, donc que x non inversible $\Leftrightarrow \exists\ \varphi \in \mathrm{Hom}\ A,\ \varphi(x) = 0$.

Ceci implique que

$$\hat{x}(\mathrm{Hom}\ A) = sp(x)$$

donc que

$$||\hat{x}|| = |sp(x)|$$

Or, $(1) \Rightarrow |sp(x)| \xrightarrow[x \to 0]{} 0$. Donc $x \longrightarrow \hat{x}$ est continu.

$\varphi \in \mathrm{Hom}\ A \Rightarrow \mathrm{Ker}\ \varphi \in \mathfrak{M}(A) \Rightarrow \mathrm{Ker}\ \varphi$ fermé à cause de $(1) \Rightarrow \varphi$ continu.

Si $\lambda > h(x)$, $\dfrac{\varphi(x)^n}{\lambda^n} \longrightarrow 0$, et $|\varphi(x)| < \lambda$. Donc $|\varphi(x)| \leq h(x)$ et $\varphi \in \mathrm{Hom}_h\ A$:

$$\mathrm{Hom}\ A = \mathrm{Hom}_h\ A.$$

Par conséquent, $h(x) = ||\hat{x}_h|| = ||\hat{x}||$. De plus, $\mathrm{Hom}\ A$ est compact.

Supposons (2) vérifiée. Alors $h(x) < 1 \Rightarrow e - x$ inversible car $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge. On peut alors appliquer (1) à A munie de la topologie définie par h.

Remarque : $h(x) = |sp(x)|$ subsiste dans des algèbres commutatives .

Exemples d'algèbres analytiques dont l'ensemble des inversibles est ouvert (et complètes) :

- Toute algèbre localement bornée complète à produit continu.

- L'algèbre de convolution $\bigcap_{p\in P} L^p(G)$, G groupe discret commutatif, $P \subset]0, 1]$.

- L'algèbre $\mathcal{H}(K)$ ([4]).

-Références-

[1] Artin "Geometric algebra" p.38.

[2] Jacobson "Structure theory for algebraic algebras". Am. of Math. 46(1945) p.p. 695-767.

[3] Rolewicz "On a certain class of linear metric spaces" Bull. Acad. Polon. Sc. III, 5 (1957) pp. 471-473.

[4] Waelbroeck "Le calcul symbolique dans les algèbres commutatives". I. Math. pures et appliquées, Vol.33 (1954) pp. 147-186.

[5] Zelazko "On the locally bounded and m-convex topological algebras". Studia Math. 19 (1960) pp. 333-356.

[6] Zelazko "On the radicals of p-normed algebras" Studia Math. 21(1962) pp. 203-206.

Orsay, 1965 - 1966

SEMINAIRE D'ANALYSE HARMONIQUE.

Exposés n° 14 : de MM. MUTAFIAN, PEYRIERE, MISCHLER.

Premier théorème de Carleson sur les sommes partielles des séries de Fourier.

I Théorèmes Maximaux.

Nous allons commencer, comme préliminaire à l'étude de l'article de Carleson, par établir quelques propriétés de certaines transformées de fonctions sur la droite ou sur le tore.

Notations.

Si f est une fonction définie sur R et si λ est réel, on notera $[f > \lambda]$ l'ensemble des points x où $f(x) > \lambda$, et $m[f > \lambda]$ la mesure de cet ensemble.

Si h est un réel positif, χ_h désignera la fonction caractéristique normalisée de l'intervalle $[-h, +h]$, qui vaudra donc $\frac{1}{2h}$ entre $-h$ et $+h$ et 0 ailleurs.

Soit f une fonction de L^1. On lui associe la fonction :

$$\varphi(x) = \operatorname*{Sup}_h \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(t)| \, dt,$$

soit $\varphi(x) = \operatorname*{Sup}_h |f| * \chi_h$.

Lemme 1.

L'enveloppe convexe fermée des fonctions χ_h est l'ensemble des fonctions paires, décroissantes pour $x > 0$, tendant vers zéro à l'infini, et d'intégrale égale à un.

En effet, cette enveloppe contient les fonctions en escalier paires décroissantes nulles à l'infini et d'intégrale égale à un.

Lemme 2.

On a $\varphi(x) = \operatorname*{Sup}_h |f| * k$ où k décrit l'ensemble des fonctions paires, décroissantes pour $x > 0$, tendant vers zéro à l'infini, et d'intégrale égale à 1.

C'est un corollaire immédiat du lemme précédent et des propriétés de la convolution.

Lemme 3.

Soit $\{I_\alpha\}$ une famille d'intervalles dont la réunion a une mesure finie On peut en extraire une suite $\{I_n\}$ disjointe telle que $m(\bigcup_n I_n) > \frac{1}{4}\, m(\bigcup_\alpha I\alpha)$. (on peut d'ailleurs remplacer 4 par tout nombre > 3).

On construit la suite de la manière suivante : on se donne un $\varepsilon > 0$ petit, et on prend pour I_1 un intervalle de longueur $m(I\ ) > (1 - \varepsilon) \operatorname{Sup}_\alpha m(I\alpha)$. Par récurrence, on considère l'ensemble $\mathfrak{J}_n$ des intervalles disjoints des I_p pour tout $p < n$, et on prend pour I_n un intervalle de l'ensemble $\mathfrak{J}_n$ de longueur $m(I_n) > (1 - \varepsilon) \operatorname{Sup}_{I\alpha \in \mathfrak{J}_n} m(I\alpha)$.

Soit alors $I\alpha$ un intervalle de l'ensemble.

Si $I\alpha$ ne rencontre aucun des I_n, c'est que $I\alpha$ appartient à tous les $\mathfrak{J}_n$, donc $m(I_n) > (1 - \varepsilon)\, m(I\alpha)$ $\forall n$. Or les I_n ont une union finie : s'ils sont en nombre fini N, alors $I\alpha \in \mathfrak{J}_{N+1}$ ce qui est absurde car alors il faudrait un stade supplémentaire, et s'ils sont dénombrables alors $m(I_n)$ est aussi petit qu'on veut pour n convenable, donc $m(I\alpha) = 0$.

Par conséquent I_α rencontre un I_n, d'où $m(I\alpha) < \frac{1}{1-\varepsilon} I_n$, et par suite $I\alpha$ sera surement recouvert si on ajoute par exemple 1,5 fois I_n de chaque côté de I_n.

Ceci prouve bien que $4 \sum m(I_n) > m(\bigcup I\alpha)$.

Théorème 1.1. Pour $f \in L^1$, on a l'inégalité

$$m\,[\varphi > \lambda] \leq \frac{4}{\lambda}\, \|f\|_1.$$

Plaçons-nous tout d'abord dans un intervalle fermé V, et soit $\varphi_V(x)$ la fonction définie comme $\varphi(x)$ mais seulement pour les points $x \in V$ et en prenant le Sup su les intervalles de centre x contenus dans V.

A tout $x \in [\varphi_V > \lambda]$ correspond un intervalle I_α de centre x et contenu dans V tel que

$$\int_{I_x} |f| \, dt > \lambda \, m(I_x).$$

D'après le lemme 3, extrayons une suite disjointe I_n convenable.

$$\int |f| \, dt \geq \int_{\bigcup_n I_n} |f| \, dt = \sum_n \int_{I_n} |f| \, dt \geq \lambda \sum m(I_n) \geq \frac{\lambda}{4} \, m[\varphi_V > \lambda].$$

On a donc pour tout compact V $m[\varphi_V > \lambda] \leq \frac{4}{\lambda} \, ||f||_1$. Il suffit alors de faire tendre l'intervalle V vers l'infini, et on a l'inégalité cherchée à la limite.

Théorème 1.2. Si $f \in L^p$ pour $p > 1$, alors $\varphi \in L^p$.

Définissons la fonction $f_\lambda(x)$ égale à f aux points où $f(x) > \lambda$ et à zéro ailleurs, et soit φ_λ la fonction φ définie à partir de f_λ. On vérifie aisément que $\varphi_\lambda \geq \varphi - \lambda$, donc $m[\varphi > \lambda] \leq m\,[\varphi_\lambda > \frac{\lambda}{2}]$, donc $\leq \dfrac{8 \, ||f_\lambda||_1}{\lambda}$.

Soit $\mu_\varphi(\lambda) = m[\varphi > \lambda]$ la fonction de répartition de φ. Dire que $\varphi \in L^p$ revient à dire que $\left|\int_1^\infty \lambda^p \, d\,\mu_\varphi(\lambda)\right| < \infty$. En intégrant par parties et en utilisant le fait que $\mu_\varphi(\lambda) \leq \frac{K}{\lambda} \, ||f_\lambda||_1$ on est ramené à montrer que

$$\int_1^\infty \lambda^{p-1} \, \mu_\varphi(\lambda) \, d\lambda < \infty, \quad \text{ou} \quad \int_1^\infty \lambda^{p-2} \, ||f_\lambda||_1 \, d\lambda < \infty.$$

Or $||f_\lambda||_1 = \int_\lambda^\infty t \, d\mu_f(t)$ où $\mu_f(t)$ est la fonction de répartition de f. Il faut donc montrer

$$\int_1^\infty \lambda^{p-2} \left[\int_\lambda^\infty t \, d\mu_f(t)\right] d\lambda < \infty$$

ou, en intervertissant les intégrations :

$$\int_1^\infty t \left[\int_1^t \lambda^{p-2} \, d\lambda\right] d\mu_f(t) = K \int_1^\infty t^p \, d\,\mu_f(t) < \infty$$

or ceci signifie $f \in L^p$.

Théorème 1.3. Plaçons-nous sur un compact ou, ce qui revient au même, sur le tore. Alors, si $e^{|f|} \in L^1$, $e^{|\varphi|}$ appartient à L^1 faible.

Il s'agit de montrer qu'il existe une constante C telle que l'ensemble des x

où $e^{|\varphi(x)|} > \lambda$ ait une mesure inférieure à $\frac{C}{\lambda}$, ou encore que $m[|\varphi| > \operatorname{Log}\lambda] \leq \frac{C}{\lambda}$

Si ψ est la fonction définie comme φ mais en partant de $e^{|f|}$, le théorème 1.1. dit qu'il existe C tel que $m[\psi > \lambda] \leq \frac{C}{\lambda}$. Or la convexité de l'exponentielle donne

$$\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} \exp |f|\, dt \geq \exp \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} |f|\, dt$$

ce qui prouve que $[\psi > \lambda] \supset [|\varphi| > \operatorname{Log}\lambda]$, d'où l'inégalité cherchée.

Rappels.

Soit f une fonction de $L^p(\mathbb{R})$ $(p \geq 1)$, et soit $P_y(x) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$ le noyau de Poisson.

On sait que, pour $y > 0$, la fonction $U(x, y) = f(x) * P_y(x)$ est le prolongement harmonique de f au demi-plan supérieur, c'est-à-dire que $U(x, y)$ est une fonction harmonique dans le demi-plan supérieur qui tend presque partout vers $f(x)$ quand $y \longrightarrow 0$. On a donc :

$$U(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2}\, f(t)\, dt.$$

Cette fonction harmonique est la partie réelle de la fonction holomorphe $\Phi(z) = U(x, y) + i\, V(x, y)$ où V est donnée par le noyau de Poisson conjugué $Q_y(x) = \frac{1}{\pi}\frac{x}{x^2+y^2}$.

$$V(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{x - t}{(x-t)^2 + y^2}\, f(t)\, dt.$$

La fonction holomorphe est donc donnée par $\Phi(z) = \frac{1}{i\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t-z}\, dt$. Partant de f, on veut chercher si la partie imaginaire V de Φ a elle aussi une limite, qu'on notera $\bar{f}$, quand $y \longrightarrow 0$, ce qui revient à chercher s'il existe une fonction $\bar{f}$ telle que $f + i\,\bar{f}$ soit prolongeable en fonction holomorphe dans le demi-plan supérieur.

La formule donnant $V(x, y)$ montre que l'existence de cette limite est liée à l'existence de $\operatorname{vp}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{x-t}\, dt$.

Plus précisément :

Proposition. Si $f \in L^p$, $V(x, y) + \frac{1}{\pi}\int_y^\infty \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t}\,dt$ tend vers zéro quand $y \longrightarrow 0$, ceci presque partout en x.

On sait que, pour presque tout x,

$$\omega(y) = \int_0^y |f(x+t) - f(x-t)|\,dt = o(y).$$

En un tel point x, on a :

$$V(x,y) + \frac{1}{\pi}\int_y^\infty \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t}\,dt = -\frac{1}{\pi}\int_0^y \frac{t}{t^2 + y^2}\,[f(x+t) - f(x-t)]\,dt + \frac{y^2}{\pi}\int_1^\infty \frac{f(x+t) - f(x-t)}{(t^2+y^2)t}\,dt + \frac{y^2}{\pi}\int_y^1 \frac{f(x+t) - f(x-t)}{(t^2+y^2)t}\,dt.$$

La première intégrale est en module inférieure à $\frac{1}{y}\,\omega(y)$, donc tend vers zéro quand y tend vers zéro.

La seconde tend aussi manifestement vers zéro.

La troisème est majorée par :

$$\frac{y^2}{\pi}\left[\frac{\omega(t)}{(t^2+y^2)t}\right]_y^1 + \frac{y^2}{\pi}\int_y^1 \frac{3\,t^2+y^2}{(t^2+y^2)^2\,t^2}\,\omega(t)\,dt$$

tend encore vers zéro car $\omega(t) = o(t)$.

Corollaire.

La limite de $V(x, y)$ existe quand $vp\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{x-t}\,dt$ existe, et dans ce cas

$$\lim V(x, y) = \frac{1}{\pi}\; vp\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{x-t}\,dt$$

s'écrit aussi d'ailleurs $\frac{1}{\pi} f_{(x)} * vp\,\frac{1}{x}$.

C'est une conséquence immédiate de la proposition précedente car

$$\lim_{y \to 0} \int_y^\infty \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t}\,dt = -vp\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{x-t}\,dt.$$

Définition.

On appelle fonction conjuguée de f, ou transformée de Hilbert, la fonction $\bar{f}(x) = \frac{1}{\pi} f(x) * vp\,\frac{1}{x}$ quand cette définition a un sens.

Théorème 1.4.

Si f est dans L^p, $\bar{f}$ existe presque partout.

On peut supposer $f \geq 0$. Avec les notations précedentes, on considère $\psi(z) = \exp(-\Phi(z))$. La fonction $U(x, y)$ étant positive dans le demi-plan, ψ est une fonction analytique bornée dans le demi-plan ouvert, donc elle a une limite non-tangentielle presque partout sur l'axe réel. Comme U a pour limite presque partout $f(x)$, la limite de ψ est presque partout finie non nulle, donc $\Phi(z)$ a une limite finie presque partout, et par suite $V(x,y)$ aussi puisque c'en est de la partie imaginaire.

D'après le corollaire précedent, ceci implique bien que $\bar{f}$ existe presque partout.

Théorème 1.5.

Si f est dans L^p, $\bar{f}$ est dans L^p, et il existe une constante M_p telle que $\|\bar{f}\|_p \leq M_p \|f\|_p$.

Nous allons nous borner à la démonstration dans le cas $p = 2$, car c'est le seul cas qu'on considèrera par la suite.

On considère la fonction f_a égale au produit de f par la fonction caractéristique de l'intervalle $[-a, +a]$, et on appelle Φ_a, U_a, et V_a les fonctions correspondantes.

On a $\Phi_a(z) = \frac{1}{i\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f_a(t)}{t-z}\, dt$ qui est, à l'infini, de l'ordre de $\frac{1}{|z|}$. En intégrant sur le contour formé du segment $(-R, +R)$ parallèle à l'axe réel et d'abscisse y complété par le demi-cercle supérieur, puis en faisant tendre R vers l'infini, on trouve :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_a^2 (x+iy)\, dx = 0, \quad \text{ou} \quad \int_{\mathbb{R}} U_a^2 (x, y)\, dx = \int_{\mathbb{R}} V_a^2 (x, y)\, dx.$$

Or le noyau de Poisson P_y est de masse 1, et par suite $\int_{\mathbb{R}} U_a^2\, dx \leq \int |f|^2$. Par suite $U_a \in L^2$, donc $V_a \in L^2$. Il suffit alors de faire tendre a vers l'infini puis y vers zéro pour avoir $\bar{f} \in L^2$, d'après le théorème de Fatou.

Deplus, l'égalité des intégrales de $U_a^{\ 2}$ et $V_a^{\ 2}$ montre l'égalité des normes L^2 de f et $\bar{f}$.

Remarque.

La transformation de Fourier pouvait aussi fournir le résultat ; en effet

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{\pi}\ f(x) * \mathrm{vp}\ \frac{1}{x}.$$

Mais $\mathcal{F}\mathrm{vp}\ \frac{1}{x} = \begin{cases} i\pi & \text{pour } t < 0 \\ -i\pi & \text{pour } t > 0 \end{cases}$, donc $\mathcal{F}\bar{f} = -\,i\ (\text{signe } x)\ \mathcal{F}f$ et par suite le passage de f à $\bar{f}$ est bien une isométrie de L^2.

Définition.

A une fonction f réelle bornée sur $\mathbb{R}$ on a associé l'intégrale de Poisson $U(x, y)$, harmonique pour $y > 0$ et tendant presque partout vers f quand $y \longrightarrow 0$.

On définit alors la transformée de Poisson maximale de f :

$$f^*(x) = \sup_{y > 0}\ U(x, y).$$

On a de même la transformée de Poisson conjuguée maximale

$$\bar{f}^*(x) = \sup_{y > 0}\ V(x, y).$$

Théorème 1.6. Si f est dans L^p, $\bar{f}^*$ est dans L^p.

D'après le théorème 1.5., il suffit de montrer que $f^* \in L^p$. Or $|f^*(x)| = \sup\limits_{y > 0}\ |f| * P_y$. Mais le noyau de Poisson P_y est pair, décroit pour $x > 0$, tend vers zéro à l'infini, et a une intégrale égale à 1. Le lemme 2 montre alors immédiatement que $|f^*| \leqslant \varphi$

Mais d'après le théorème 1.2 $\varphi \in L^p$, donc on a bien $f^* \in L^p$.

Pour les deux propositions suivantes on se place dans le cas où f est à support compact, ou, ce qui revient au même, sur le tore.

Théorème 1.7. Si f est une fonction définie sur le tore, il existe $c > 0$ tel que $\exp(C\ |\bar{f}|) \in L^1$, f étant supposée bornée par M.

En effet, on définit de la même manière, pour une fonction $f(x)$ du cercle, les prolongements u, v, et F respectivement harmonique, harmonique conjugué, et analytique. La fonction conjuguée est donnée cette fois par

$$\bar{f}_1(x) = \frac{1}{\pi} \,\mathrm{vp} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{2\operatorname{tg} \frac{x-t}{2}} \, dt.$$

Si f est bornée, on voit immédiatement que $\bar{f} - \bar{f}_1$ est borné. Il suffit donc de montrer que $\exp(C\,|\bar{f}_1|) \in L^1$. Or $F = u + i\,v$ est analytique dans le disque, donc il en est de même de $\exp(i\,\lambda F)$ pour tout λ réel positif.

La partie réelle de $\exp(i\,\lambda F)$, soit $e^{-\lambda v} \cos \lambda\, u$ est donc harmonique dans le disque.

Appliquons l'intégrale de Cauchy sur un cecle de rayon r :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos \lambda\, u\, e^{-\lambda v}\, dt = 2\pi \cos(\lambda\, u(0)) \leqslant 2\pi.$$

De même $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos \lambda\, u\, e^{\lambda v}\, dt \leqslant 2\pi.$

Mais $e^{\lambda |v|} \leqslant e^{\lambda v} + e^{-\lambda v}$ et $\cos \lambda\, u \geqslant \cos \lambda$ si $\lambda < \frac{\pi}{2M}$. Posons par exemple $C = \frac{\pi}{4M}$: on a alors par addition

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{c|v|}\, dt \leqslant \frac{4\,\pi}{\cos C}.$$

Il suffit alors de faire tendre r vers 1 ; v tend vers $\bar{f}_1$, et le théorème de Fatou donne le résultat.

<u>Théorème 1.8.</u>

Si f est bornée et définie sur un intervalle compact, l'ensemble des x où $|\bar{f}^*(x)| > \lambda$ a une mesure inférieure à $K\, e^{-c\lambda}$.

En effet, soit $\psi(x) = \sup\limits_h \bar{f} * \chi_h$. On a vu que $|\bar{f}^*| \leqslant \psi$, dans le théorème 1.6.

Comme $e^{c|\bar{f}|}$ est dans L^1, $e^{c\psi}$ est dans L^1 faible d'après le théorème 1.3. Donc $m[\psi > \lambda] \leqslant K\, e^{-c\lambda}$, et a fortiori $m[|\bar{f}^*| > \lambda] \leqslant K\, e^{-c\lambda}$.

Définition.

On va introduire maintenant une nouvelle fonction transformée de f : ce sera la transformée de Hilbert maximale

$$\tilde{f}(x) = \operatorname{Sup}_T \left| \int_{-T}^{T} \frac{f(x-t)}{t}\, dt \right|$$

l'intégrale étant prise en valeur principale.

Carleson définit cette transformée de manière un peu différente : il pose

$$H^*(x) = \operatorname{Sup}_{\sigma(x)} \left| \int_{\sigma(x)} \frac{f(t)}{x-t}\, dt \right|$$

où $\sigma(x)$ est un intervalle contenant x en sa moitié intérieure.
Il est aisé de voir que la différence des deux est majorée, f étant toujours supposée bornée.

Le cas le plus défavorable, représenté 

par la figure ci-dessus où $\sigma(x) = [\alpha, \beta]$, est celui où x est à une extrémité de la moitié intérieure. Mais alors $[\alpha, \gamma]$ appartient à la première famille, et la différence des deux est alors

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(t)}{t-x}\, dt \right| \leq \|f\|_\infty \operatorname{Log} 3.$$

Lemme. Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$. On a : $\tilde{f}(x) \leq (1 + \operatorname{Log} 2)\varphi(x) + 2\pi\, \bar{f}^*(x)$

Posons
$$\tilde{f}_y(x) = \operatorname{vp} \int_{|t|<y} \frac{f(x-t)}{t}\, dt$$
$$v(x, y) = \frac{1}{\pi} \int \frac{t}{t^2+y^2}\, f(x-t)\, dt$$

on a : $\pi v(x, y) - \displaystyle\int_{|t|\geq y} \frac{f(x-t)}{t}\, dt = f * \xi_y(x)$ où ξ_y est la fonction définie ainsi :

$$\xi_y(t) = \frac{t}{t^2+y^2} \quad \text{si } |t| < y$$
$$\xi_y(t) = \frac{t}{t^2+y^2} - \frac{1}{t} \quad \text{si } |t| \geq y$$

Posant
$$\eta_y(t) = \frac{1}{2y} \quad \text{si} \quad |t| < y$$
$$\eta_y(t) = \frac{y^2}{|t|(t^2+y^2)} \quad \text{si} \quad |t| \geq y$$
nous avons
$$|\pi\, v(x, y) - \int_{|t|\geq y} \frac{f(x-t)}{t}\, dt| \leq |f| * \eta_y(x) \leq \varphi(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_y(t)\, dt = (1 + \text{Log } 2)\ \varphi(x)$$
car la fonction η_y est paire décroissant vers zéro pour $t \geq 0$. Comme
$$\pi\, \bar{f}(x) = \tilde{f}_y(x) + \int_{|t|\geq y} \frac{f(x-t)}{t}\, dt$$
on a :
$$|\tilde{f}_y(x)| \leq (1 + \text{Log } 2)\ \varphi(x) + \pi(\bar{f}(x) + |v(x, y)|)$$
et
$$\tilde{f}(x) \leq (1 + \text{Log } 2)\ \varphi(x) + 2\pi\, \bar{f}^*(x)$$

Théorème 1.9.

Si f est nulle hors de l'intervalle borné ω, si $||f||_\infty = M$, il existe deux constantes a et K telles que $m\left\{\tilde{f} > \lambda\right\} \leq K \exp(-\frac{a}{M}\lambda).|\omega|$.

Il suffit de démontrer cette inégalité lorsque $|\omega| = 1$ le cas général s'en déduisant par changement de variable.

D'après le lemme précedent nous avons : $\tilde{f}(x) \leq k_1 M + 2\pi\, \bar{f}^*(x)$. Par conséquent $\left\{\tilde{f} > \lambda\right\} \subset \left\{\bar{f}^* > \frac{\lambda - K_1 M}{2\pi}\right\}$, et la conclusion résulte du théorème 8.

Théorème 1.10. $f \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow m\left\{\tilde{f} > \lambda\right\} = O(\frac{1}{\lambda^2})$ lorsque $\lambda \longrightarrow +\infty$.

En effet d'après le lemme précedent et les théorèmes 2 et 6 la fonction f est majorée par une fonction de $L^2(\mathbb{R})$.

Inégalité de Harnack.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f \geq 0$, u désignant son prolongement harmonique au demi-plan supérieur on a :
$$y\, u(x, y) \leq 3 \int_{x-\frac{y}{2}}^{x+\frac{y}{2}} u(t, y)\, dt$$

Ceci en effet s'écrit $f * P_y \leq 3\, f * P_y * \chi_{y/2}$. Il suffit de vérifier que

$P_y \leqslant 3\, P_y * \chi_{y/2}$.

Théorème 1.11.

Soit ω_k une partition finie d'un intervalle ω par des intervalles de centres t_k et de longueur δ_k. Posant

$$\Delta(x) = \sum_k \frac{\delta_k^2}{(x-t_k)^2+\delta_k^2}$$

on a $m\left\{x \; ; \; x \in \omega, \; \Delta(x) > M\right\} \leqslant K_1 \exp(-K_2 M) . |\omega|$.

Il suffit d'envisager le cas où $\omega = [0\ 1]$.

Soit $U = \left\{x \; ; \; x \in [0\ 1], \; \Delta(x) > M\right\}$ $\quad m(U) = \mu$.

Posons $\qquad g = \dfrac{1}{\mu \operatorname{Log}\frac{1}{\mu}} \chi_U$

On a :

$$\frac{M}{\operatorname{Log}\frac{1}{\mu}} \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(x)\, g(x)\, dx = \pi \sum_k \delta_k\, u(t_k, \delta_k) \leqslant 3\pi \sum_k \int_{\omega_k} u(t,\delta_k)\, dt \leqslant$$
$$3\pi \int_0^1 g^*(t) \quad dt.$$

Désignons par ψ la fonction associée à g comme φ l'est à f. $m(\lambda) = m\left\{\psi > \lambda\right\}$.

On a :

$$\int_0^1 g^*(t)\ dt \leqslant \int_0^1 \psi(t)\ dt = -\int_0^{+\infty} \lambda dm(\lambda) = -\int_0^{(\mu \operatorname{Log}\frac{1}{\mu})^{-1}} \lambda dm(\lambda)$$

car $\psi \leqslant (\mu \operatorname{Log}\frac{1}{\mu})^{-1}$

$$\int_0^1 g^*(t)\ dt \leqslant 1 - \int_1^{(\mu \operatorname{Log}\frac{1}{\mu})^{-1}} \lambda dm(\lambda) = 1 - [\lambda m(\lambda)]_1^{(\mu \operatorname{Log}\frac{1}{\mu})^{-1}} + \int_1^{(\mu \operatorname{Log}\frac{1}{\mu})^{-1}} \lambda m(\lambda)\ d\lambda$$

mais d'après le théorème 1 : $m(\lambda) \leqslant \frac{4}{\lambda}\, ||g||_1 = \dfrac{4}{\lambda \operatorname{Log}\frac{1}{\mu}}$ par conséquent

$$\int_0^1 g^*(t)\ dt \leqslant 2 + \frac{4}{\operatorname{Log}\frac{1}{\mu}} \operatorname{Log} \frac{1}{\mu \operatorname{Log}\frac{1}{\mu}} \leqslant 10$$ si M est assez grand et l'on a $\operatorname{Log}\frac{1}{\mu} \geqslant k\, M$.

II Résultats préparatoires.

Lemme.

Il existe un nombre positif k tel que quelle que soit la fonction $\in C^2[2\pi, 4\pi]$ on puisse la prolonger en une fonction $\psi \in C^2[0, 4\pi]$ telle que

$\psi(0) = \psi'(0) = 0$ et telle que $||\psi|| + ||\psi''|| \leq k(||\varphi|| + ||\varphi''||)$

($||\ ||$ désigne la norme uniforme).

On peut prolonger φ par un polynôme $P(x) = x^2(ax^2 + bx + c)$ a, b, c, sont des combinaisons linéaires de $\varphi(2\pi)$, $\varphi'(2\pi)$, $\varphi''(2\pi)$.

$\sup_{t\in[0\ 2\pi]} |P(t)| + \sup_{t\in[0\ 2\pi]} |P''(t)|$ est majoré par une combinaison linéaire de $|a|$, $|b|$, $|c|$ donc aussi par une combinaison linéaire de $|\varphi(2\pi)|$, $|\varphi'(2\pi)|$, $|\varphi''(2\pi)|$.

Or $\forall\, t \in [2\pi, 4\pi]$ $\quad |\varphi'(t) - \varphi'(2\pi)| \leq 2\pi\, ||\varphi''||$ soit

$-2\pi\, ||\varphi''|| + \varphi'(t) \leq \varphi'(2\pi) \leq \varphi'(t) + 2\pi\, ||\varphi''||$ par intégration on obtient :

$2\pi|\varphi'(2\pi)| \leq 4\pi^2\, ||\varphi''|| + 2||\varphi||$ d'où le lemme.

Proposition 2.1.

Soit $\varphi \in C^2(\omega)$, ω étant un intervalle compact de R. On peut écrire $\varphi(t) = \sum_{\mu\in\mathbb{Z}} \gamma_\mu \exp(i \frac{2\pi}{|\omega|} \frac{\mu}{3} t)$ avec $(1 + \mu^2)\, |\gamma_\mu| \leq K(||\varphi|| + (\frac{\omega}{2\pi})^2\, ||\varphi''||)$, la constante K ne dépendant ni de φ ni de ω.

Il suffit d'envisager le cas où $\omega = [0, 2\pi]$, D'après le lemme précédent on peut prolonger φ en une fonction $\psi \in C^2[-2\pi, 4\pi]$ telle que $\psi(-2\pi) = \psi'(-2\pi) = \psi(4\pi) = \psi'(4\pi) = 0$ et que $||\psi|| + ||\psi''|| \leq k(||\varphi|| + ||\varphi''||)$

La fonction ψ est somme de sa série de Fourier :

$$\psi(t) = \sum_{\mu\in\mathbb{Z}} \gamma_\mu \exp(i\, \frac{\mu t}{3}) \qquad \text{avec} \qquad \gamma_\mu = \frac{1}{6\pi} \int_{-2\pi}^{4\pi} \psi(t) \exp(-i\, \frac{\mu t}{3})\, dt.$$

Intégrant deux fois par parties nous obtenons :

$$\gamma_\mu = -\left(\frac{3}{\mu}\right)^2 \frac{1}{6\pi} \int_{-2\pi}^{4\pi} \psi''(t) \exp(-i\, \mu\frac{t}{3})\, dt \quad \text{et}$$

$$(1 + \mu^2)\, |\gamma_\mu| \leq ||\psi|| + 9||\psi''|| \leq 9k(||\varphi|| + ||\varphi''||)$$

Soient $f \in L^1(\omega)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$; on pose :

$$C_\alpha(\omega) = \frac{1}{|\omega|} \int_\omega f(t) \exp(-i\, \frac{2\pi}{|\omega|}\, \alpha t)\, dt$$

$$C_n(\omega) = \sum_{\mu\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+\mu^2} \left|c_{n+\frac{1}{3}\mu}(\omega)\right|$$

$n[\omega]$ = partie entière de $n \frac{|\omega|}{2\pi}$

Proposition 2.2. $\forall\, n \in \mathbb{Z} \qquad \left|c_{n\frac{|\omega|}{2\pi}}(\omega)\right| \leqslant 2\, K\, C_{n[\omega]}(\omega)$

$$\left|c_{n\frac{|\omega|}{2\pi}}(\omega)\right| = \frac{1}{|\omega|}\int_\omega f(t) \exp(-i \frac{2\pi}{|\omega|} n[\omega]\, t) \exp(-i\, \beta t)\, dt$$

où $\beta = n - \frac{2\pi}{|\omega|} n[\omega]$.

Appliquons la proposition 1 à la fonction $\varphi(t) = \exp(-i\, \beta t)$:

$$\exp(-i\, \beta t) = \sum_{\mu\in\mathbb{Z}} \gamma_\mu \exp(-i \frac{2\pi}{|\omega|} \frac{\mu t}{3}) \quad \text{avec} \quad |\gamma_\mu| \leqslant \frac{K}{1+\mu^2}\left(1 + \beta^2 (\frac{|\omega|}{2\pi})^2\right) \leqslant \frac{2K}{1+\mu^2}$$

Alors $$c_{n\frac{|\omega|}{2\pi}}(\omega) = \sum_{\mu\in\mathbb{Z}} \gamma_\mu \frac{1}{|\omega|}\int_\omega f(t) \exp[-i \frac{2\pi}{|\omega|} (n[\omega] + \frac{\mu}{3})\, t]\, dt = \sum_{\mu\in\mathbb{Z}} \gamma_\mu\, c_{n[\omega]+\frac{1}{3}\mu}(\omega)$$

Proposition 2.3. $f \in L^2(\omega) \Rightarrow \left\{C_n(\omega)\right\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$

$$\text{et} \quad \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n^2(\omega)\Big)^{1/2} \leqslant 10\, \|f\|_{L^2(\omega)}$$

En effet la suite $\left\{c_{\mu/3}(\omega)\right\}_{\mu\in\mathbb{Z}}$ est dans ℓ^2 et l'on a $\left|c_{\mu/3}(\omega)\right|^2 = 3\, \|f\|^2_{L^2(\omega)}$.

suite $\left\{\frac{1}{1+\mu^2}\right\}_{\mu\in\mathbb{Z}}$ est dans ℓ^1, la suite $\left\{c_{\mu/3}(\omega)\right\} * \left\{\frac{1}{1+\mu^2}\right\}$ est donc dans donc aussi la suite extraite $\left\{C_n(\omega)\right\}$.

Comme $\sum_{\mu\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+\mu^2} < 5$ on a :

$$\|C_n(\omega)\|_{\ell^2} \leqslant 5\sqrt{3}\, \|f\|_{L^2(\omega)} < 10\, \|f\|_{L^2(\omega)}$$

III. Démonstration du théorème.

Notations.

Soit $\omega_{j,\nu} = [2\pi \times 2^{-\nu}(j-1)\,,\, 2\pi \times 2^{-\nu} \times j]$. où ν est entier positif et j, entier, tel que : $-2^\nu + 1 \leqslant j \leqslant 2^\nu$.

Posons : $\omega^*_{j\nu} = \omega_{j,\nu} \cup \omega_{j+1,\nu}$ où $-2^\nu + 1 \leqslant j \leqslant 2^\nu - 1$.

Enfin soit : $C^*_n(\omega^*_{j\nu}) = \max_{\omega'} C_n(\omega')$ où ω' parcourt les quatre sous-intervalles $\omega_{k,\nu+1}$ de $\omega^*_{j\nu}$.

Construction de l'ensemble exceptionnel.

On se donne une fois pour toutes une fonction réelle f de $L^2(-\pi, +\pi)$, prolongée par périodicité à $(-4\pi, +4\pi)$, telle que :

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f^2 \, dx = 1$$

On se donne un nombre λ et un entier N. On se donne aussi un nombre λ que l'on déterminera ultérieurement en fonction de λ.

1. Soit A l'ensemble des $\omega = \omega_{j,\nu}$ tels que :

$$\frac{1}{|\omega|}\int_{\omega} f^2(x)\, dx > \lambda^2$$

On pose :

$$S = \bigcup_{\omega_{j\nu} \in A} \Big(\bigcup_{k} \omega_{j+k,\nu} \Big) \quad \text{où} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$$

On a les propriétés suivantes :

1.a. S ne dépend pas de N.

1.b. Si $\omega \notin A$ $\sum_n |c_n(\omega)|^2 \leqslant \lambda^2$

D'où, d'après le théorème 2.3. $\|C_n(\omega)\|_2 \leqslant 10\,\lambda$

En particulier :

$$C_n(\omega) \leqslant 10\,\lambda$$

1.c. Si $\omega_{j,\nu} \not\subset S$, aucun des quatre sous-intervalles ω' de $\omega^*_{j,\nu}$ n'est dans A. En particulier :

$$C^*_n(\omega^*_{j,\nu}) < 10\,\lambda$$

1.d. Il existe un sous-ensemble A' de A tel que :

$$\omega_1 \text{ et } \omega_2 \in A' \qquad \omega_1 \neq \omega_2 \Rightarrow \omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset$$

et

$$\bigcup_{\omega \in A} \omega = \bigcup_{\omega \in A'} \omega$$

Donc

$$\sum_{\omega \in A'} \lambda^2 \, |\omega| \leqslant \sum_{\omega \in A'} \int_{\omega} f^2(x)\, dx \leqslant \int_{-2\pi}^{+2\pi} f^2(x)\, dx = 2$$

Donc . $$|S| \leqslant \frac{14}{\lambda^2}$$

2. Soit $$V = \left\{x \,/\, x \in [-\pi, +\pi],\ H_f^*(x) > \lambda_1\right\}$$

2.a. V ne dépend pas de N

2.b. D'après le théorème 1.10, $|V| \leqslant \text{Const.}\ \frac{1}{\lambda_1^2}$

3. Construction d'une partition de ω^*.

Soit $\omega^* = \omega^*_{j_o, \nu_o}$, $-1 \leqslant \nu_o \leqslant N-1$. (Par convention, ω^*_{-1} désigne l'intervalle $[-4\pi, +4\pi]$).

Soit : $P_\ell(\omega^*) = \left\{n \,/\, 2^{-\ell-1} < C_n^*(\omega^*) \leqslant 2^{-\ell}\right\}$ où ℓ est un entier positif.

Soit n un entier de $P_\ell(\omega^*)$, on va définir une partition de ω^*, notée $\Omega_n(\omega^*)$. On suppose : $n \leqslant 2^N$.

$\Omega_m(\omega^*)$ est constitué des intervalles $\omega = \omega_{j,\nu}$ $(\nu \leqslant N)$ les plus petits possibles, tels que :

$$(B) \qquad C_{n[\omega]}(\omega) \leqslant 2^{-\ell}$$

plus précisément :

$$\omega = \omega_{j,\nu} \in \Omega_n(\omega^*) \quad \text{si :}$$

(B) est satisfait pour $\omega_{j,\nu}$ et pour tout $\omega_{k,\mu}$ tel que :

$$\omega_{j\nu} \subset \omega_{k,\mu} \subset \omega \qquad (\mu \leqslant \nu)$$

mais (B) n'est pas satisfait pour l'un au moins des $\omega_{,\nu+1} \subset \omega_{j\nu}$.

En outre $\Omega_n(\omega^*)$ contient tousles ω_{jN} disjoints des $\omega_{j\nu}$ précédents.

4. Soit $E_n(t)$ la fonction constante sur chaque ω de $\Omega_n(\omega^*)$ et valant sur ω :

$$\frac{1}{|\omega|}\int_\omega f(x)\, e^{-inx}\, dx$$

pour tout $t \in \omega$ $E_n(t) = c_{n\frac{|\omega|}{2\pi}}$ donc d'après le théorème 2.2.

$$|E_n(t)| \leqslant \text{Const.}\ C_{n[\omega]}(\omega)$$

m ais $\omega \in \Omega_n(\omega^*)$ donc

$$C_{n[\omega]}(\omega) \leqslant 2^{-\ell}$$

Soit $H_n^*(x)$ la transformée de Hilbert maximale de E_n : posons :

$$T_n = \left\{ x \;/\; H_n^*(x) > \lambda_1\, 2^{-\frac{\ell}{2}} \;\mathrm{Log}\, N \right\}.$$

d'où d'après le théorème 1.9.

$$|T_n| \leq \text{Const. } \exp(-\,\text{Const. } \lambda_1\, 2^{\frac{\ell}{2}} \;\mathrm{Log}\, N) \times |\omega^*|.$$

5. $\Delta_n(x)$ est la fonction associée à la partition $\Omega_n(\omega^*)$ comme dans le théorème 1.11. D'après ce théorème, si :

$$U_n = \left\{ x \;/\; \Delta_n(x) \geq \lambda_1\, 2^{\frac{\ell}{2}} \;\mathrm{Log}\, N \right\}.$$

on a :

$$|U_n| \leq \text{Const. } \exp(-\,\text{Const } \lambda_1\, 2^{\frac{\ell}{2}} \;\mathrm{Log}\, N)\;.\;|\omega^*|.$$

L'ensemble exceptionnel $E_N(\lambda, \lambda_1)$ est défini par :

$$E_N = (S \cup V) \cup \bigcup_{n,\omega^*} (T_n(\omega^*) \cup U_n(\omega^*))$$

où ω^* parcourt tous les inte valles correspondant aux $\omega_{j,\nu} \not\subset S$ pour $-1 \leq \nu \leq N-1$.

<u>Majoration de la mesure de l'ensemble exeeptionnel</u>.

Nous allons estimer la mesure de E_N et déterminer λ_1 en fonction de λ. Quitte à modifier les constantes, on a pour $n \in P_\ell(\omega^*)$

$$|U_n(\omega^*) \cup T_n(\omega^*)| \leq \text{Const. } \exp(-\,\text{Const } \lambda_1\, 2^{\frac{\ell}{2}} \;\mathrm{Log}\, N) \times |\omega^*|.$$

D'autre part ; ω^* fixé, il y a au plus deux intervalles ω' de longueur $\frac{1}{4}|\omega^*|$ tels que :

$$C_n^*(\omega^*) = C_n(\omega')$$

Mais d'après le paragraphe 1.b. $\sum_n C_n^2(\omega) \leq \text{Const. } \lambda^2$

D'où

$$\sum_n C_n^{*2}(\omega^*) \leq \text{Const. } \lambda^2$$

soit

$$\sum_n C_n^{*2}(\omega^*) \times |\omega^*| \leq \text{Const } \lambda^2 \times |\omega^*|$$

en sommant sur les ω^* de longueur donnée, qui sont forcément disjoints, il vient :

$$\sum_{|\omega^*|=2\pi-2^{-k}} \sum_n C_n^{*2}(\omega^*) \times |\omega^*| \leq \text{Const } \lambda^2$$

Mais il y n'y a pour $|\omega^*|$ que N valeurs possibles, donc

$$(1) \qquad \sum_{n,\omega^*} C_n^{*2}(\omega^*) \times |\omega^*| \leq \text{Const } \lambda^2 N$$

où ω^* est soumis aux mêmes restrictions que dans la définition de E_N.

Posons : $P_o(\omega^*) = \left\{ n \,/\, 1 \leq C_n^*(\omega^*) \right\}$.

$$T_\ell = \bigcup_{n,\omega^*} T_n(\omega^*) \quad \text{où } n \text{ et } \omega^* \text{ sont tels que } n \in P_\ell(\omega^*)$$

De même on définit U_ℓ .

Mais de (1) il découle que

$$\sum |\omega^*| \leq \text{Const}\cdot \lambda^2 N$$

où la somme est étendue aux ω^* définissant U_o et V_o et

$$\sum |\omega^*| \leq \text{Const. } \lambda^2 \times N \times 2^{2\ell}$$

où la somme est étendue aux ω^* définissant U_ℓ et V_ℓ. Par conséquent, d'après les majorations établies en 4 et 5 :

$$|U_o \cup T_o| \leq \text{Const. } \exp(-\text{Const } \lambda_1 \tfrac{1}{10\lambda} \text{ Log } N) \times \lambda^2 N$$

et

$$|U_\ell \cup T_\ell| \leq \text{Const. } \exp(-\text{Const } \lambda_1 2^{2^\ell} \text{ Log } N) \times \lambda^2 \times N \times 2^{2\ell}$$

Choisissons $\lambda_1(\lambda)$ assez grand pour que :

$$\lambda^2 \exp(-\text{Const } \frac{\lambda_1}{10\lambda} \text{ Log } N) + \sum_{\ell=1}^{+\infty} \lambda^2 \, 2^2 \exp(-\text{Const. } \lambda_1 \, 2^{2^\ell} \text{ Log } N) < \frac{1}{N^3}$$

Il en résulte que :

$$\Big|\bigcup_{n,\omega^*} (U_n(\omega^*) \cup T_n(\omega^*))\Big| \leq \text{Const. } N^{-2}$$

Soit $\varepsilon > 0$ donné. On peut trouver λ_o tels que :

$$|S \cup V| < \frac{\varepsilon}{2} \,. \quad \text{pour} \quad \lambda > \lambda_o \quad \text{et} \quad \lambda_1 = \lambda_1(\lambda)$$

D'où $\qquad |E_N| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \text{Const. } N^{-2}$

Posons : $\qquad E = \bigcup_N E_N$

On peut trouver N_o tel que : $\qquad \text{Const.} \sum_{N_o}^{+\infty} N^{-2} < \frac{\varepsilon}{2}$

Il en résulte que : $\qquad |E| \leqslant \varepsilon$

<u>Majoration de $s_n(x)$ hors de l'ensemble exceptionnel.</u>

On sait que :

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2}).(x-t)}{\sin \frac{x-t}{2}} f(t)\, dt$$

Posons :

$$s_n^*(x) = \int_{-4\pi}^{+4\pi} e^{-int} \frac{f(t)}{x-t}\, dt \qquad -\pi < x < +\pi$$

et

$$t_n(x) = \frac{1}{2\pi i} (e^{inx} s_n^*(x) - e^{-inx} s_{-n}^*(x))$$

alors :

$$(2) \qquad |s_n| \leqslant \text{Const. } |t_n| + O(1)$$

uniformément pour $|x| < \pi$.

Nous allons montrer que, hors de E, on a :

$$|s_n^*(x)| \leqslant \text{Const. } \lambda\lambda_1 \text{Log Log } n \qquad \text{pour} \quad n \geqslant 2^{N_o}$$

D'après (2) ceci implique le même résultat pour s_n.

Considérons n tel que : $0 < n < 2^N$ où $N \geqslant N_o$ et x fixé à l'intérieur de E_N. Il suffit de montrer que :

$$|s_n^*(x)| \leqslant \text{Const. } \lambda_1\lambda \text{ Log } N$$

<u>6. L'intervalle $\omega^*(x)$.</u>

Supposons que x appartienne à la moitié intérieure de ω^*, et considérons le recouvrement $\Omega_n(\omega^*)$ défini en 3.

Soit $\tilde{\omega}^*$ les intervalles obtenus en prenant tout $\omega_{j,\nu} \in \Omega_n(\omega^*)$ et en lui joignant $\omega_{j-1,\nu}$ ou $\omega_{j+1,\nu}$.

Parmi ces intervalles, certains contiennent certainement x dans leur moitié intérieure. Nous définissons $\omega^*(x)$ comme un de ceux ayant la plus grande longueur parmi ceux-là.

De la définition de $C^*_n(\omega^*)$ et de $\Omega_n(\omega^*)$ il s'en suit que

$$\omega \in \Omega_n(\omega^*) \Rightarrow |\omega| \leq \frac{1}{4} |\omega^*|.$$

D'où

$$|\omega^*(x)| \leq \frac{1}{2} |\omega^*|$$

On a les propriétés suivantes :

6.1. $\omega^*(x)$ existe toujours.

6.2. x appartient à la moitié intérieure de $\omega^*(x)$.

6.3. $\omega^*(x)$ est une union d'intervalle de $\Omega_n(\omega^*)$.

En effet, sinon il y aurait un intervalle plus grand que le $\omega_{j,\nu}$ de Ω_n qui donne $\omega^*(x)$, adjoint à $\omega_{j,\nu}$. En le dédoublant ce serait un $\tilde{\omega}^*$ contenant x en son milieu. Contradiction

6.4. si $\omega_{j,\nu} \cup \omega_{j\pm1,\nu} = \omega^*(x)$ $\omega_{j,\nu} \in \Omega_n(\omega^*)$

on a :

$$C_{n[\omega]}(\omega_{j,\nu}) \quad \text{et} \quad C_{n[\omega]}(\omega_{j\pm1,\nu}) \leq 2^{-\ell}$$

où est tel que : $2^{-\ell-1} < C^*_n(\omega^*) \leq 2^{-\ell}$.

6.5. Le complèmentaire de $\omega^*(x)$ dans ω^* est d'après 6.3. l'union d'intervalles de $\Omega_n(\omega^*)$. Pour un tel intervalle σ, la distance de x à σ dépasse la moitié de la longueur de σ.

Ceci provient de ce que $\omega^*(x)$ est le plus grand des $\tilde{\omega}^*$, pour lesquels x est dans la moitié intérieure.

Pour majorer $s^*_n(x)$ l'idée est de le couper en trois partie :

$$s^*_n(x) = \int_{\omega^*_o(x)} \frac{e^{-int} f(t)}{x} dt + H_n(x) + R_n(x)$$

où

$$H_n(x) = \int_{[-4\pi, +4\pi]-\omega^*_o(x)} \frac{E_n(t)}{x-t} dt$$

$$R_n(x) = \int_{[-4\pi,\ +4\pi]-\omega_o^*(x)} \frac{e^{-int}\ f(t) - E_n(t)}{x-t}\ dt$$

où $\omega_o^*(x)$ correspond à la partition $\Omega_n[-4\pi,\ +4\pi]$.

L'idée est qu'en changeant n en $n[\omega_o^*] \times \frac{2\pi}{|\omega_o^*|}$, le premier terme est du même type que l'intégrale donnant $s_n^*(x)$ mais ramené à $\omega_o^*(x)$. On peut donc lui appliquer la même transformation en faisant intervenir $\omega_1^*(x)$ relatif à la partition $\Omega_n(\omega_o^*(x))$. Il faut donc trouver des majorations de H_n et R_n relatifs à n'importe quel ω^*.

Majoration de H_n.

$$H_n(x) = \int_{\omega^*-\omega^*(x)} \frac{E_n(t)}{x-t}\ dt$$

il vient immédiatement :

$$|H_n(x)| \leq 2 \cdot H_n^*(x)$$

Majoration de R_n.

$$R_n(x) = \int_{\omega^*-\omega^*(x)} \frac{e^{-int}\ f(t) - E_n(t)}{x-t}\ dt$$

Soit ω_k les intervalles de $\Omega_n(\omega^*)$ dont l'union est $\omega^* - \omega^*(x)$; ils existent d'après 6.4.

$$R_n(x) = \sum_{\omega_k} \int_{\omega_k} \frac{t-t_k}{(x-t)(x-t_k)}\ e^{-int}\ f(t)\ dt - \sum_{\omega_k} \int_{\omega_k} \frac{t-t_k}{(x-t)(x-t_k)}\ E_n(t)\ dt$$

D'après 6.4. ; et $|E_n(t)| \leq$ Const. $C_n^*(\omega^*)$ la dernière somme est majorée par :

$$\text{Const}\ 2^{-\ell} \times \Delta_n(x).$$

Pour montrer que la première admet la même majoration on définit $\varphi(t)$ par :

$$e^{-int}\ \frac{t-t_k}{(x-t)(x-t_k)} = e^{-i2^{\nu} n[\omega]t} \times \varphi(t)$$

D'après le théorème 2.1., on peut trouver des γ_μ tels que :

$$\varphi(t) = \sum \gamma_\mu \exp(-2^{\nu} \cdot \tfrac{1}{3}\ i\mu t) \qquad t \in \omega = \omega_k$$

où :
$$|\gamma_\mu| \leqslant \frac{\text{Const.}\ \delta_k}{(1+\mu^2)[(x-t_k)^2+\delta_k^2]}$$

En multipliant φ par $f(t)$ et en intégrant sur ω_k, on obtient après sommation sur tout k :

$$|R(x)| \leqslant \text{Const.}\ 2^{-\ell} \times \Delta(x).$$

Revenant à $S_n^*(x)$, puisque $x \notin E_N$, H_n et R_n sont majorés par :

$$\text{Const.}\ \lambda_1 [C_n^*(-4\pi, +4\pi)]^{\frac{1}{2}} \log N.$$

La différence obtenue en changeant n en $n_1 = n[\omega'] . 2^{\nu H}$ où $|\omega'| = 2\pi . 2^{-\nu-1}$, ω' dans $\omega^* = \omega^*_{j\nu}$ est :

$$\int_{\omega^*(x)} e^{-in\,t}\ \frac{e^{im(x-t)}-1}{x-t} . f(t)\ dt \quad \text{où} \quad |m| < 2^{\nu+1}$$

Mais on observe que pour les deux ω constituant $\omega^*(x)$:

$$C_{n[\omega]}(\omega) \leqslant 2^{-\ell}$$

et on applique le théorème 2.1. à $u^{-1}(e^{imu}-1)$ d'où, l'intégrale est majorée par Const. $\lambda_1\ 2^{-\frac{\ell}{2}} \log N$.

Posons $$\alpha_0 = [C_n^*(-4\pi, +4\pi)]^{1/2}$$

on a donc :

$$s_n^*(x) = e^{i\theta_0}\int_{\omega^*} \frac{e^{-i2^{\nu+1} n[\omega'] t} . f(t)}{x-t}\,dt + O(\lambda_1 \log N\ \alpha_0)$$

On recommence le procédé et on voit apparaître :

$$O(\lambda_1 \times \log N \times \alpha_1)$$

où

$$\alpha_1 = \left[C^*_{n[\omega']}(\omega^*)\right]^{1/2} > \sqrt{2} . \alpha_0$$

à cause de la construction de Ω_n.

Le procédé ne peut s'arrêter avant d'atteindre un intervalle $\omega^*(x) = I$ de longueur $2\pi . 2^{-N+1}$ où $2\pi . 2^{-N}$, auquel cas $n[\omega'] = 0$ puisque $n < 2^N$. D'où :

$$s_n^*(x) = e^{i\theta}\int_I \frac{f(t)}{x-t}\,dt + \sum_{i=0}^{r} O(\lambda_1 \log N\ \alpha_i)$$

mais :

$$\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} \geq \sqrt{2}.$$

et

$$\alpha_r < 10\,\lambda$$

La première intégrale est majorée par λ_1 puisque $x \notin V$ et que x appartient à la moitié intérieure de I. Les α_i décroissent plus vite qu'une série géométrique de raison $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et de premier terme $10\,\lambda$. D'où on obtient la majoration désirée :

$$s_n^*(x) \leq \text{Const.}\ \lambda_1 \lambda \log N$$

En appliquant cette majoration aux fonctions $f(x) - P_n(x)$, où $P_n(x)$ est une suite de polynômes tendant vers f pour la norme L^2, on obtient le :

<u>Théorème</u> (Carleson).

Si $f \in L^2$, alors :

$s_n(x) = o(\log \log n)$ presque partout.

=.=.=.=.=.=.=.=.=.=.

SEMINAIRE D'ANALYSE HARMONIQUE.

Exposé n° 15 : Paul L. BUTZER.

Semi-groups of bounded linear operators and approximation.

1. Introduction.

The main concern of the present lecture is the study of the behaviour of singular integrals which are solutions of corresponding initial or boundary value problems in their dependence upon initial or boundary conditions. In particular, the "optimal" order of approximation of the initial or boundary value function f by such solutions is discussed and necessary and sufficient conditions upon f are given for which the optimal order of approximation is precisely attained.

There are two general methods in studying problems of this type. One is the integral transform method, specifically the Fourier and the Laplace transform method. The general idea consists in transforming the approximation problem involving the function f whose properties are to be determined, into an equation involving the particular integral transform of f. This transformed equation is then solved, and on appropriate inversion theorem is applied to obtain a characterization for the function f. The integral transform method has been initiated by the author in a series of papers ; the results have been summarized briefly in [10], [11], while the Laplace-Transform method itself was carried out by H. Berens (see [4]).

The second approach is to view the solution of a given initial or boundary value problem as a semi-group operator (in case it is one) and to study its optimal rate of convergence to the identity operator in the norm of the Banach space under consideration. The latter approach to the subject was first considered by E. Hille [20], [21], the general results and the applications to partial differential equations being due to the author [6], [7], [8]. This lecture will give a brief treatment without proofs of the development of the subject from the point of view of the theory of semi-group operators since 1957, the year of publication of E. Hille and R.S. Phillips : Functional Analysis and Semi-groups [22], emphasizing perhaps unduly the author's own contributions and those of his students, in particular those of H. Berens [1], [2].

We shall consider in detail two applications of the general theory considered namely the Abel-Poisson semi-group operator and the semi-groups of left translations. Other singular integrals which are solutions of differential equations are mentioned briefly. For simplicity we will deal with functions of one variable, although the results generally carry over to functions of several variables (see [12], R.J. Nessel [30], J. Löfström [29] and M.H. Taibleson [31]).

2. <u>Basic Approximation Theorems</u>.

Let $\{T(t) \; ; \; 0 \leq t < \infty\}$ be a one-paramener family of bounded linear operators definied on a complex Banach space X to itself satisfying the hypothesis :

(i) $T(o) = I$ (identity)

(ii) $T(t_1 + t_2) = T(t_1)\, T(t_2)$ for $0 \leq t_1 , t_2 < \infty$;

(iii) $\lim_{t \to 0+} T(t)\, f = f$ for each $f \in X$.

A family of operators satisfying these properties is said to be a semi-group of class (C_o). It can readily be shown that these properties imply that $||T(t)||$ is bounded on every finite subinterval of $[0, \infty)$. The infinitesimal generator A of $\{T(t)\}$ is defined as the limit in morm

$$\operatorname*{Lim}_{t \to 0+} \frac{T(t) - I}{t} f = Af$$

wherever this limit exists. A is a closed linear (in general unbounded) operator having domain $D(A)$ dense in X. $D(A)$ is a Banach space under the norm $||f|| + ||Af||$.

The first basic approximation theorem for semi-groups of operators is the following theorem. Parts (a) and (b) are due to E. Hille [21, p. 321] and for (c) see the author [7].

Theorem 1.

Let $\{T(t)\}$ be a semi-group of class (C_o) defined on X.

(a) If $f \in X$ and $\|T(t)f-f\| = o(t)$ $(t \to 0+)$, then $Af = \theta$ and $T(t)f \equiv f$.

(b) For each $f \in D(A)$ one has

$$\|T(t)f-f\| \leq t\|Af\| \sup_{0 \leq u \leq t} \{\|T(u)\|\}.$$

(c) If X is reflexive and $\|T(t)f-f\| = O(t)$ $(t \to 0+)$, then $f \in D(A)$.

This theorem states that for reflexive Banach spaces X the semi-group $\{T(t)\}$ of class (C_o) has optimal approximation order $O(t)$ $(t \to 0+)$, and the saturation class is the set of all elements f belonging to $D(A)$. The notion of saturation was introduced by J. Favard [17]. We note that K. Deleeuw [23] considered approximation by adjoint semi-groups so as to give results for part (c) in the case of non-reflexive Banach spaces.

If $T(t)[X] \subset D(A)$ for each $t > 0$, then the assertion

(i) $\|T(t)f-f\| = O(t)$ $(t \to 0+)$, is equivalent to

(ii) $\|AT(t)f\| = O(1)$ $(t \to 0+)$, and, under the additional hypothesis that X is reflexive to

(iii) $f \in D(A)$.

These facts lead us to the next result : to characterize the set of elements f for which the order of approximation of f by $T(t)f$ is "non-optimal".

Theorem 2.

Let $\{T(t)\}$ be a semi-group of class (C_o), $T(t)[X] \subset D(A)$ for each $t > 0$ and $\|AT(t)\| = O(t^{-1})$ $(t \to 0+)$. The following assertions are equivalent for $0 < \alpha < 1$ and $t \to 0+$:

(i) $\|T(t)f-f\| = O(t^{\alpha})$;

(ii) $\|A^r T(t)f\| = O(t^{\alpha-r})$ (r a fixed integer ≥ 1).

For this theorem see Berens-Butzer [3] and H. Berens [1]. For trigonometric polynomials, a result of the type that (i) implies (ii) was established by M. Zamansky [33]. In the above, A^r is the r-th power of the infinitesimal generator which may be defined inductively, i.e. $f \in D(A^r)$ if $f \in D(A)$, $Af \in D(A), \ldots, A^{r-1}f \in D(A)$.

Let us now consider intermediate spaces of $D(A)$ and X generated by semi-group operators. A general theory of intermediate spaces was first considered by A.P. Calderòn [16], E. Gagliardo [18], J.L. Lions [26] and Lions-Peetre [27]. Let $\{T(t)\}$ be a semi-group of class (C_o) with $||T(t)|| \leq M$ for all $t \geqslant 0$. We denote by X_p^α the set of elements $f \in X$ for which the integral

$$\int_o^\infty t^{-\alpha p}||T(t)\ f-f||^p\,\frac{dt}{t}$$

exists, where $0 < \infty < 1$, $1 \leq p \leq \infty$. (In case $p = \infty$, $\sup\limits_{0<t<\infty}\left\{t^{-\alpha}||T(t)\ f-f||\right\}$ must be finite). X_p^α is a Banach space under the norm

$$||f|| + \left\{\int_o^\infty t^{-\alpha p}\ ||T(t)\ f-f||^p\,\frac{dt}{t}\right\}^{1/p}.$$

The spaces X_p^α are intermediate spaces of $D(A)$ and X. Indeed, it is easy to show that

$$D(A) \subset X_p^\alpha \subset X.$$

We remark that if X_∞^1 denotes the set of all $f \in X$ for which $\sup\limits_{o<t<\infty}\left\{t^{-1}||T(t)\ f-f||\right\}$ is finite, then Theorem 1 states that the space X_∞^1 is identical to $D(A)$ for reflexive Banach spaces X. In general, X_∞^1 is a proper intermediate space of $D(A)$ and X.

We now have (Berens-Butzer [3], Berens [1]).

Theorem 3.

Let $\{T(t)\}$ be a semi-group of class (C_o) in X, $||T(t)|| \leq M$ all $t \geqslant 0$, $T(t)[X] \subset D(A)$ for all $t > 0$ and $||AT(t)|| \leq M_1\,t^{-1}$.

Then for $0 < \alpha < 1$:

(i) $f \in X_p^\alpha$ $(1 \leq p < \infty)$ if and only if $\int_o^\infty t^{(1-\alpha)p}||AT(t)\ f||^p\,\frac{dt}{t} < \infty$;

(ii) $f \in X_\infty^\alpha$ if and only if $\sup\limits_{o<t<\infty}\left\{t^{1-\alpha}||AT(t)\ f||\right\} < \infty$.

Regarding continuity questions for semi-group operators in intermediate spaces as well as a generalization of a result of A. Plessner concerning a characterization of absolutely continuous functions we refer to Berens-Butzer [5].

3. Singular Integral of Abel-Poisson.

Before continuing the theoretical aspects of the subject let us consider applications of the preceding theorems to the singular integral of Abel-Poisson. Let X be one of the periodic spaces $C_{2\pi}$, $L^p_{2\pi}$, $1 \leq p < \infty$.

Dirichlet's problem for the unit circle

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad (-\pi \leq x < \pi \; ; \; 0 \leq \rho < 1)$$

with boundary value

$$\lim_{\rho \to 1-} v(x \; ; \rho) = f(x),$$

has its solution given by

$$v(x \; ; \rho) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)\; f(u)}{1-2\rho \cos(x-u) + \rho^2}\, du.$$

If we replace ρ by $e^{-t} (0 < t \leq \infty)$, then $v(x \; ; \rho) \equiv [V(\rho)f](x)$, which we denote by $[V(t)\, f]\,(x)$, defines a semi-group operator of class (C_o) on X with $||V(t)|| = 1$. The infinitesimal generator A is given by $[Af]\,(x) = -(f^{\sim})'\,(x)$ and $D(A) = \left\{ f \in X \; ; \; f^{\sim} \text{ absolutely continuous and } (f^{\sim})' \in X \right\}$,

where $f^{\sim}$ denotes the conjugate function of f

$$f^{\sim}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0+} -\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi} [f(x+u) - f(x-u)]\, \frac{1}{2} \cot \frac{u}{2}\, du.$$

As an application of theorem 1 we have (Hille [21, p.352] for parts (a) and (b), Butzer [7] für part (c)).

Theorem A.

(a) If f belongs to $C_{2\pi}$ or $L^p_{2\pi}$, $1 \leq p < \infty$, $||f-V(\rho)\, f|| = o(\log 1/\rho)$ $(\rho \to 1-)$, then $f = \text{const.}$

(b) If $(f^{\sim})'$ belongs to $C_{2\pi}$ or $L^p_{2\pi}$, $1 \leq p < \infty$, then

$$||f-V(\rho)\, f|| = O(\log 1/\rho).$$

(c) If $f \in L^p_{2\pi}$, $1 < p < \infty$, then

$\|f - V(\rho) f\| = O(\log 1/\rho)$ implies $(f^\sim)' \in L^p_{2\pi}$, thus $f' \in L^p_{2\pi}$.

Because of this result the integral $V(\rho) f$ of Abel-Poisson is saturated with order $O(\log 1/\rho)$ or $O(1-\rho)$ $(\rho \to 1-)$ in the space $L^p_{2\pi}$, $1 < p < \infty$, and the saturation class is the set of all functions $f \in L^p_{2\pi}$ for which $f^\sim$ is absolutely continuous and $(f^\sim)' \in L^p_{2\pi}$.

We remark that an application of the results of DeLeeuw [23] mentioned above gives for the non-reflexive spaces $C_{2\pi}$ and $L^1_{2\pi}$: $\|f - V(\rho) f\|_C = O(\log 1/\rho)$ if and only if $f^\sim \in \mathrm{Lip}\ 1$; $\|f - V(\rho) f\|_1 = O(\log 1/\rho)$ if and only if $f^\sim$ is of bounded variation.

In the following application the assertions (i)-(iv) were previously established by Hardy and Littlewood (see Zygmund [34], Chapter VII) using complex methods and for the fact that (v) is equivalent to each of the other four assertions see Berens [1].

We denote the conjugate Abel-Poisson integral by

$$[V^\sim(\rho) f](x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(x-u)\, f(u)}{1 - 2\rho \cos(x-u) + \rho^2}\, du \qquad (0 \leq \rho < 1).$$

<u>Theorem B.</u>

Let $f \in C_{2\pi}$. The following assertions are pairwise equivalent for $0 < \alpha < 1$:

(i) $\|f(.+h) - f(.)\| = O(|h|^\alpha)$ $(h \to 0)$ i.e. $f \in \mathrm{Lip}\ \alpha$;

(ii) $\|f(.+h) - 2f(.) + f(.-h)\| = O(|h|^\alpha)$ $(h \to 0)$;

(iii) $\|[V^\sim(\rho)]'(.)\| = O[(1-\rho)^{\alpha-1}]$ $(\rho \to 1-)$;

(iv) $\|[V(\rho) f]''(.)\| = O[(1-\rho)^{\alpha-2}]$ $(\rho \to 1-)$;

(v) $\|[V(\rho) f](.) - f(.)\| = O[(1-\rho)^\alpha]$ $(\rho \to 1-)$.

Let us apply Theorem 3 to $V(\rho) f$. This gives the following result (see [3] and [1]) which was also obtained by M.H. Taibleson [31] without using semi-group theory explicitely.

Theorem C.

Let $f \in C_{2\pi}$. For $0 < \alpha < 1$ and $1 \leqslant p < +\infty$ the following are equivalent :

$$\text{(i)} \quad \int_{-\pi}^{\pi} |u|^{-\alpha p} \|f(.+u) - f(.)\|^p \frac{du}{u} < +\infty \text{ ;}$$

$$\text{(ii)} \quad \int_0^{\infty} t^{(1-\alpha)p} \|[(V^{\sim})(t)]' \, f\|^p \frac{dt}{t} < +\infty$$

$$\text{(iii)} \quad \int_0^{\infty} t^{-\alpha p} \|V(t) \, f-f\|^p \frac{dt}{t} < +\infty.$$

We note that for $p = \infty$ the modifications are evident.

4. Riemann and Taylor Operators of Higher Orders.

We next consider generalizations and equivalent representations for the r-th power A^r of the infinitesimal generator A, r being an arbitrary fixed positive integer. Below, let $\{T(t) \; ; \; 0 \leqslant t < \infty\}$ be a semi-group of class (C_0) on X.

Definition 1.

The r-th Riemann operator C^r of $\{T(t) \; ; \; 0 \leqslant t < \infty\}$ having domain $D(C^r)$ and range in X is defined by

$$\lim_{t \to 0+} C_t^r \, f = C^r \, f \qquad (f \in X)$$

whenever this limit exists, where

$$C_t^r \, f = \frac{1}{t^r} \sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} T(kt) \, f \qquad (t > 0).$$

Definition 2.

The r-th Taylor operator B^r of $\{T(t) \; ; \; 0 \leqslant t < \infty\}$ having domain $D(B^r)$ in $D(A^{r-1})$ and range in X is defined by

$$\lim_{t \to 0+} B_t^r \, f = B^r \, f \qquad (f \in D(A^{r-1})),$$

where

$$B_t^r \, f = \frac{r!}{t^r} \left[T(t) - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{t^k}{k!} A^k\right] f \qquad (t > 0).$$

Obviously $D(C^r)$ and $D(B^r)$ are linear subspaces of X and $D(A^{r-1})$, respectively, C^r and B^r being linear operators. In case $r = 1$, $C^1 = B^1 = A$.

The connection between the operators A^r, B^r and C^r is given by the following theorem (Butzer-Tillmann [15] and H. Berens [2]).

Theorem 4.

For $f_o \in X$ and each fixed integer $r \geqslant 1$ the following assertions are equivalent :

(i) $f_o \in D(A^r)$ and $A^r f_o = g_o$ with $g_o \in X$, i.e.
$f_o \in D(A^{r-1})$ and $\lim_{t \to 0+} [(T(t)-I)/t]\, A^{r-1} f_o = g_o$;

(ii) $f_o \in D(B^r)$ and $B^r f_o = g_o$, i.e.
$f_o \in D(A^{r-1})$ and $\lim_{t \to 0+} B^r f_o = g_o$;

(iii) $f_o \in D(C^r)$ and $C^r f_o = g_o$.

The following result for the operator C^r is a definite generalization of Theorem 1 (see H. Berens [2]).

Theorem 5.

(a) If f and g are elements in X such that

$$\liminf_{t \to 0+} ||C_t^r f - g|| = 0,$$

then $A^r f = g$ and $f \in D(A^r)$. In case $g = \theta$, then $A^r f = \theta$, i.e. $[T(t)-I]^r f = \theta$.

(b) For each $f \in D(A^r)$

$$||C_t^r f|| \leqslant \sup_{0 \leqslant u \leqslant rt} \left\{ ||T(u)|| \right\} ||A^r f|| \qquad (t > 0) ;$$

(c) If X is reflexive, $f \in X$ and

$$\liminf_{t \to 0+} ||C_t^r f|| < +\infty,$$

then $f \in D(A^r)$.

A similar theorem may also be established for the operator B^r (see Butzer-Tillmann [1 5]). The result for the operator B^r (in particular Theorem 1) may be ... for semi-group operators of class (C_o) defined on sequentially complete locally convex linear topological spaces X (see Tillmann [32]). For the general theory of semi-group operators defined on these spaces, see also K. Yosida [35, p.231-274].

The result above may also be generalized to distributional semi-groups ; see ... Löfström [26]. Furthermore the result for the operator B^r may also be established for operators for which the semi-group property does not play the decisive role (see R. Leis [24], [25]).

Corollary 1.

If X is a reflexive Banach space, the approximation of the families of operators

$$\left\{[T(t)-I]^r\right\},\left\{[T(t) - \sum_{k=0}^{r-1} (t^k/k!)\, A^k]\right\}$$

in the strong operator topology to the zero operator is of optimal order $O(t^r)$ $(t \to 0+)$ in X and the saturation class is given by $D(A^r)$.

We apply these results to the semi-group of left translations in $L^p(0, \infty)$, p ∞, defined by

$$[T(t)\, f]\,(x) = f(x+t) \qquad (t \geq 0).$$

The translation operators $\{T(t)\}$ form a semi-group of class (C_o) on $L^p(0, \infty)$ ... $||T(t)|| = 1$, $[Af]\,(x) = f'(x)$ and

$$D(A) = \left\{ f \;;\; f \text{ locally absolutely continuous, } f' \in L^p(0, \infty)\right\}.$$

Part (a) of the following theorem is an extension of a result of Titchmarsh, given on finite interval, to the semi-infinite interval, while part (b) generalizes a result Hardy-Littlewood (see Zygmund [34], Ch. VIII).

Theorem D.

(a) If $f \in L^p(0,\infty)$, $1 \leq p < \infty$ and $||f(.+t) - f(.)||_p = o(t)$ $(t \to 0+)$, then $f = 0$.

(b) One has for $1 < p < \infty$

$$||\, f(.+t) - f(.)\, ||_p = O(t) \qquad (t \to 0+)$$

if and only il f is locally absolutely continuous and $f' \in L^p(0,\infty)$.

The importance of the operators C^r, B^r is revealed by the fact that they are generalizations of the well-known Riemann and Taylor derivatives for scalar-valued functions. Set

$$\Delta_t^r f(x) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} f(x+kt),$$

$$\nabla_t^r f(x) = r\,!\,[f(x+t) - \sum_{k=0}^{r-1} (t^k/k!)\, f^{(k)}(x)].$$

The Riemann derivative $C^r f$ of order r of f in the $L^p(0, \infty)$-norm is defined by

$$\lim_{t \to 0+} \|(1/t)^r \Delta_t^r f(.) - C^r f(.)\|_p = 0,$$

in case this limit exists ; the Taylor derivative $B^r f$ of order r in the $L^p(0, \infty)$-norm by

$$\lim_{t \to 0+} \|(1/t)^r \nabla_t^r f(.) - B^r f(.)\|_p = 0,$$

where f and its first $(r - 1)$ ordinary derivatives $f, f', \dots, f^{(r-1)}$ belong to $L^p(0, \infty)$.

These generalized derivatives have the property that if the ordinary derivative of order r : $f^{(r)}$ exists in $L_p(0, \infty)$, then $C^r f$ and $B^r f$ exist and all three are equal. Of interest is the difficult converse problem. We have

<u>Theorem [illegible]</u>

Let $f \in L^p(0, \infty)$, $1 \leq p < \infty$ and r be an integer ≥ 1. The following assertions are equivalent :

(i) $f^{(k)}$ $(k = 0, 1, \dots, r-1)$ are locally absolutely continuous functions in $L^p(0, \infty)$ and $f^{(r)} \in L^p(0, \infty)$;

(ii) $(1/t)^r \Delta_t^r f(x)$ converges in L^p-norm as $t \to 0+$;

(iii) $(1/t)^r \nabla_t^r f(x)$ converges in L^p-norm as $t \to 0+$, where $f^{(k)}$ $(k = 0, 1, \dots, r-2)$ are locally absolutely continuous functions in $L^p(0, \infty)$ and $f^{(r-1)} \in L^p(0, \infty)$.

If one replaces norm convergence by point-wise convergence in the definitions of the derivatives, then the existence of $C^r f(x_0)$ or $B^r f(x_0)$ at a point x_0 does not necessarily imply the existence of the r-th ordinary derivative $f^{(r)}(x_0)$ at x_0, as may be shown by examples.

Results corresponding to these given here may also established for the Peano derivatives of order r (see H. Berens [2] ; also Görlich-Nessel [19]). These are closely connected to the many delicate investigations by A. Denjoy on generalized derivatives.

Theorem F.

The following statements are equivalent for $1 < p < \infty$:

(i) $f^{(k)}$ $(k = 0, 1, \dots, r-1)$ are locally absolutely continuous functions in $L^p(0, \infty)$ and $f^{(r)} \in L^p(0, \infty)$;

(ii) $\liminf_{t \to 0+} \|(1/t)^r \Delta_t^r f(.)\|_p < +\infty$;

(iii) $\liminf_{t \to 0+} \|(1/t)^r \nabla_t^r f(.)\|_p < +\infty$,
where $f^{(k)}$ $(k = 0, 1, \dots, r-2)$ are locally absolutely continuous functions in $L^p(0, \infty)$ and $f^{(r-1)} \in L^p(0, \infty)$.

This theorem is related to results of H.A. Schwarz, S. Saks, S. Verblunsky, W.T. Reid and others and is of importance in Riemann's theory of trigonometric series Theorems corresponding to the preceding two may also be shown for the non-reflexive Banach spaces $L^1(0, \infty)$ and $C\,[0, \infty]$, the space of all functions f bounded and uniformly continuous on $[0, \infty)$, as well as for the "periodic" spaces $C_{2\pi}$, $L^p_{2\pi}$, $1 \leq p < \infty$ (see also Butzer [9]).

Finally, we return again to the singular integral $V(t)\,f$ of Abel-Poisson. We set

$$f^{\{r\}}(x) = \begin{cases} f^{(r)}(x) & (r \text{ even}) \\ (f^{\sim})^{(r)}(x) & (r \text{ odd}). \end{cases}$$

Theorem G.

The following assertions are equivalent for $1 < p < \infty$:

(i) $f^{\{k\}}$ $(k = 0, 1, \dots, r-1)$ are absolutely continuous and $f^{\{k\}} \in L^p_{2\pi}$ $(k = 0, 1, \dots, r)$;

(ii) $\|[V(t)\,f]^{\{r\}}\| = O(1)$ $(t \to 0+)$;

(iii) $\liminf_{t \to 0+} \|(1/t)^r \sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} V(kt)\,f\| < +\infty$;

(iv) $\liminf_{t \to 0+} \|(1/t^r)\,[V(t)\,f - \sum_{k=0}^{r-1} (t^k/k!)(-1)[(k+\ )/2\; f^{\{k\}}]\| < +\infty$, where $f^{\{k\}}$ $(k = 0, 1, \ldots, r-2)$ are absolutely continuous and $f^{\{k\}} \in L^p_{2\pi}$ $(k = 0, 1, \ldots, r-1)$.

For the latter theorem, in the form given, see H. Berens [2] ; regarding the equivalence of (i) and (iv) for the non-reflexive spaces $C_{2\pi}$ and $L^1_{2\pi}$, see Butzer-Sunouchi [14].

The general theorems on semi-group operators considered above may also be applied to other singular integrals which are semi-group operators and solutions of partial differential equations. One such example is the singular integral of Gauss-Weierstraß, the solution of the classical diffusion equation for an infinite rod with a given initial temperature distribution. Another is the solution of Dirichlet's problem for the half-plane or half-space. In this respect, we refer to the literature cited in [11],[13], [15] and R.J. Nessel [30].

- Literature -

[1] H. Berens : Approximationssätze für Halbgruppenoperatoren in intermediären Räumen. Schriftenreihe Math. Inst.Uni Münster 32 (1964) p.1-59.

[2] H. Berens : Equivalent representations for the infinitesimal generator of higher orders in semi-group theory. Nederl.Akad. Wetenschap. Proc. Ser. A 68 (1965), p. 479-512.

[3] H. Berens and P.L. Butzer : Approximation theorems for semi-group operators in intermediate spaces. Bull.Amer.Math.Soc. 70 (1964), p.689-692.

[4] H. Berens and P.L. Butzer : On the best approximation for singular integrals by Laplace-transform methods. P.L. Butzer and J. Korevaar ; On approximation Theory, Birkhäuser, Basel 1964, p.24-43.

[5] H. Berens and P.L. Butzer : Über die Stetigkeit von Halbgruppen von Operatoren in intermediären Räumen. Math.Ann. 163 (1966), p. 204-211.

[6] P.L. Butzer : Sur la théorie des demi-groupes et classes de saturation de certaines intégrales singulières. C.R. Acad. Sci. Paris 253 (1956), p. 1474-1475.

[7] P.L. Butzer : Über den approximationsgrad des Identitätsoperators durch Halbgruppen von linearen Operatoren und Anwendungen auf die Theorie der singulären Integrale. Math.Ann. 133 (1957), p.410-425.

[8] P.L. Butzer : Zur Frage der Saturationsklassen singulärer Integraloperatoren. Math. Zeit. 70 (1958), p. 93-112.

[9] P.L. Butzer : Beziehungen zwischen den Riemannschen, Taylorschen und gewöhnlichen Ableitungen reellwertiger Funktionen. Math.Ann. 144 (1961), p.275-298

[10] P.L. Butzer : Integral transform methods in the theory of approximation. P.L. Butzer and J. Korevaar : On approximation Theory, Birkhäuser, Basel 1964, p. 12-23.

[11] P.L. Butzer : Saturation and Approximation, J. Siam Numer. Anal. Ser.B, 1 (1964), p. 2-10.

[12] P.L. Butzer and R.J. Nessel : Favard classes for n-dimensional singular integrals. Bull.Amer.Math.Soc. 72 (1966).

[13] P.L. Butzer and E. Görlich : Saturationsklassen und asymptotische Eigenschaften trigonometrischer singulärer Integrale, in Weierstraß-Festband,

Westdeutscher Verlag, Opladen (1966), p.339-392.

[14] P.L. Butzer and G. Sunouchi : Approximation theorems for the solution of Fourier's problem and Dirichlet's problem, Math.Ann. 155 (1964), p. 316-330

[15] P.L. Butzer and H.G. Tillmann : Approximation theorems for semi-groups of bounded linear transformations. Math.Ann. 140 (1960), p.256-262.

[16] A.P. Calderon : Intermediate spaces and interpolation, the complex method. Studia Math. 24 (1964), p. 113-190.

[17] J. Favard : Sur l'approximation dans les espaces vectoriels. Annali di Mat. Pura Appl. (4) 29 (1949), p. 259-291.

[18] E. Gagliardo : Interpolation d'espaces de Banach et applications (I), (II), (III). C.R. Acad. Sci. Patis 248 (1959), p. 1912-1914, p. 3388-3390, p. 3517-3518.

[19] E. Görlich and R.J. Nessel : Peano-Ableitungen in der Norm. (in print).

[20] E. Hille : Notes on linear transformations. I. Trans.Amer.Math.Soc. 39 (1936), p. 131-153.

[21] E. Hille : Functional Analysis and Semi-groups. Amer.Math.Soc. Coll. Publ. vol. 31, New York 1948.

[22] E. Hille and R.S. Phillips : Functional Analysis and Semi-groups. [illegible].edition New York

[23] K. De Leeuw : On the adjoint semi-group and some problems in the theory of approximation, Math.Zeit. 73 (1960), p. 219-[illegible].

[24] R. Leis : Über das Randverhalten harmonischer Funktionen. Arch.rat.Mech.Anal. 7 (1961), p. 168-[illegible], 8 (1961), p.444-445.

[25] R. Leis : Approximationssätze fur stetige Operatoren. Arch.Math. 14 (1963), p. 1[illegible]-[illegible]9.

[26] J.L. Lions : Théorèmes de trace et d'interpolation (I), (II). Annali della Scuola Norm.Sup. de Pisa (3) 13 (1959), p.389-403 ; 14 (1960), p.317-331.

[27] J.L. Lions et J. Peetre ; Sur une classe d'espaces d'interpolation. Inst.Hautes Etudes Sci.Publ.Math. 19 (1964) p. 5-68.

[28] L. Löfström : On certain interpolation spaces related to generalized semi-groups. Math.Scand. 16 (1965), p. 41-54.

[29] J. Löfström : Some theorems on interpolation spaces with applications to approximation in L_p. Math.Ann. (in print).

[30] R.J. Nessel : Contributions to the theory of saturation for singular integrals in several variables (II), (III). Nederl-Akad. Wetensch.Proc.Ser.A 69 (1966) (in print).

[31] M.H. Taibleson : On the theory of Lipschitz classes of distributions on Euclidean n-space. Jour.Math.Mech. 13 (1964), p.407-479.

[32] H.G. Tillmann : Approximationssätze für Halbruppen von Operatoren in topologischen Vektorräumen. Arch.Math. 11 (1960), p.194-199.

[33] M. Zamansky : Classes de saturation de certains procédés d'approximation des séries de Fourier des Fonctions continues. Ann.Sci.Ecole Norm.Sup. 66 (1949), p.19-93.

[34] A. Zygmund : Trigonometrical Series, Vols. I, II. Cambridge 1959.

[35] K. Yosida : Functional Analysis. Springer, Berlin 1965.