Publications Mathématiques d'Orsay

SEMINAIRE D'ANALYSE HARMONIQUE

ANNEE 1966/1967

Mathématiques
(Service des Publications)
Faculté des Sciences
91-ORSAY (France)

Université de PARIS

FACULTE DES SCIENCES D'ORSAY

—oOo—

SEMINAIRE D'ANALYSE HARMONIQUE

ANNEE 1966/1967

Publications mathématiques d'Orsay

1967

TABLE DES MATIERES

Exposé n° I

Ensembles de Ditkin forts

par Haskell P. Rosenthal

1. Préliminaires

Définition. Soit B une algèbre de Banach, commutative, séparable. Disons que B possède une approximation de l'identité s'il existe une suite $\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B$ telle que $\lim_{n \to \infty} \|v_n * f - f\| = 0$ quel que soit $f \in B$. (Employons la notation "$B \in$ App." pour exprimer cette propriété.)

Remarquons que par le théorème de Banach-Steinhaus, il s'ensuit qu'il existe une constante $M < \infty$ telle que $\|v_n * f\| \leqslant M\|f\|$ quels que soient n et $f \in B$.

Disons que B a une approximation de l'identité bornée en norme (notation : $B \in$ App. fort) si $B \in$ App. et s'il existe une constante $K < \infty$ telle que $\|v_n\| < K$ quel que soit n.

Soit G un groupe abélien localement compact séparable, métrisable, Γ le groupe dual de G, E un fermé de G, et $I(E)$ l'ensemble de toutes les $f \in L^1(\Gamma)$ telles que $\hat{f} = 0$ sur E.

Si J est un idéal fermé dans $L^1(\Gamma)$, disons que J est associé avec E si $E = \{g \in G : \hat{f}(g) = 0$ quel que soit $f \in J\}$. (Ainsi, $I(E)$ est le plus grand idéal associé avec E.)

II. Conditions nécessaires

<u>Théorème</u> 1. Si J est associé avec E et $J \in$ App. fort, $E \in \mathcal{R}_d(G)$ (où $\mathcal{R}_d(G)$ désigne l'anneau des classes de G_d, c'est à dire la plus petite famille de sous-ensembles de G contenant les classes de sous-groupes arbitraires de G, et fermé par réunion finie et passage au complémentaire.)

Le théorème 1 est une conséquence immédiate du théorème 1 de [3], ce qui est à son tour une conséquence presque immédiate du théorème de Paul Cohen sur les mesures idempotentes.

<u>Théorème</u> 2. Soit $G = \mathbb{R}^n$ ou T^n et E sans intérieur. Si J est associé avec E et $J \in$ App., alors $E \in \mathcal{R}_d(G)$.

(Ceci est une conséquence du théorème 1 et d'un résultat de Y. Meyer (cf. [1] qui implique que pour toute mesure μ, $\|\mu\| = \sup \|\mu * f\|$, la borne supérieure étant prise pour toutes les $f \in J$ de norme 1).

Disons que E est un ensemble de Ditkin fort si E est de synthèse spectrale et $I(E) \in$ App.

<u>Lemme</u>. Les trois conditions suivantes sont toutes équivalentes :

1) E est un ensemble de Ditkin fort

2) Il existe une suite $\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \in L^1(\Gamma)$ telle que $\forall n$, $\hat{v}_n = 0$ sur un voisinage de E, et telle que $\lim\limits_{n \to \infty} \|v_n * f - f\|_1 \longrightarrow 0$ quel que soit $f \in I(E)$.

3) Il existe une suite de mesures $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ sur Γ telle que $\forall n$, $\hat{\mu}_n = 1$ sur un voisinage de E, et telle que $\lim\limits_{n \to \infty} \|\mu_n * f\|_1 = 0$ quel que soit $f \in I(E)$.

(La partie (2) était la définition prise par Wik pour le cas $G = T$).

<u>Corollaire immédiat des théorèmes 1 et 2</u>. Soit $G = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{T}$ et E sans intérieur. Si E est un ensemble de Ditkin fort, alors $E \in \mathfrak{R}(G_d)$.

Il s'ensuit que les intervalles fermés dans le plan ne sont pas des ensembles de Ditkin forts, et qu'en fait aucun ensemble infini, borné, et sans intérieur, n'est un ensemble de Ditkin fort.

<u>Problème ouvert</u>. Est-ce qu'il existe un ensemble de Ditkin fort dans $\mathbb{R}^2$ qui est borné et infini ?

III. <u>Côté positif</u>

<u>Théorème</u> 3. (cf.[3])

a) chaque sous-groupe fermé de G, est un ensemble de Ditkin fort

b) si la frontière de E est un ensemble de Ditkin fort, alors E en est un.

c) une réunion d'un nombre fini d'ensembles de Ditkin forts en est un (due à Wik ; cf [4]).

Remarquons que la réciproque de (b) est fausse ; si E est la fermeture de l'extérieur d'un carré dans $\mathbb{R}^2$, alors E est un ensemble de Ditkin fort puisque E est la réunion de quatre demi-plans ; mais la frontière de E n'appartient pas à $\mathfrak{R}_d(\mathbb{R}^2)$.

Nous pouvons caractériser les ensembles de Ditkin forts sans intérieur, dans $\mathbb{T}$ et $\mathbb{R}$.

Théorème 4.

a) Wik (cf. [4]). Soit $E \subset \mathbb{T}$, E sans intérieur. E est un ensemble de Ditkin fort si et seulement si E est fini.

b) Soit $E \subset \mathbb{R}$, E sans intérieur. E est un ensemble de Ditkin fort si et seulement si E, plus ou moins un ensemble fini, est une réunion d'un nombre fini de progressions airthmétiques (cf. théorème 5 de [3].)

Appelons $E \subset \mathbb{R}^2$ un polygone si E est compact, connexe, la fermeture de son intérieur, et si la frontière de E est une réunion d'un nombre fini de segments linéaires.

Théorème 5. (cf. [2]). Soit E un polygone. Alors E n'est pas un ensemble de Ditkin fort, et $\overline{\complement E}$ en est un si et seulement si E est connexe.

IV. Autres problèmes ouverts

1) conjecture de Wik : Soit $E \subset \mathbb{T}$, E un ensemble de Ditkin fort. Alors la frontière de E est finie

2) soit $D = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$. Est-ce que D est un ensemble de Ditkin fort ? Est-ce que $\overline{\complement D}$ en est un ?

3) caractériser les ensembles de Ditkin forts dans $\mathbb{R}^2$ tels que leur frontière soit une réunion d'un nombre fini de segments linéaires.

Références

[1] Y. Meyer.- Comptes Rendus, 262, série A, 1966, p. 744

[2] Y. Meyer et H. Rosenthal.- (va paraitre dans les Comptes Rendus Acad. Sci. Paris)

[3] H. Rosenthal.- Comptes Rendus, 262, série A, 1966, pp. 873-876

[4] Wik.- Arkiv für Matematik, 6, nº 1, 1965, pp. 55-64.

Exposé n° II

RESULTATS GENERAUX SUR LES MULTIPLICATEURS DES IDEAUX FERMES DE $A(\mathbb{R})$.

par Y. Meyer

Le but de ce premier exposé est d'indiquer quelques résultats simples sur les multiplicateurs d'idéaux fermés de $A(\mathbb{R})$; en fait on peut étendre tout ce qui sera présenté au cas de $A(\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m)$. Les connaissances acquises permettront lors d'un second exposé de construire un ensemble compact sur la droite satisfaisant la condition forte de Ditkin et dont la frontière est infinie.

Quelques définitions et propriétés naturelles seront présentées au § 1. Les deux théorèmes les plus importants (restriction à $\mathbb{Z}$ d'un multiplicateur "défini" sur $\mathbb{R}$ et construction d'un multiplicateur "défini" sur $\mathbb{R}$ à partir d'un multiplicateur "défini" sur $\mathbb{Z}$) seront prouvés au § 2. Au paragraphe 3 nous appliquerons ces résultats ainsi qu'un théorème sur les multiplicateurs de $\mathcal{F}H^1(\mathbb{R})$ pour montrer que les seuls idéaux "intéressants" de $A(\mathbb{R})$ sont ceux composés de fonctions s'annulant sur un fermé d'intérieur non vide. Au paragraphe 4 de ce premier exposé nous indiquerons les problèmes que nous n'avons pas su résoudre.

§ 1.- Les définitions

A tout idéal fermé I de $A(\mathbb{R})$, on peut associer un ensemble fermé E de $\mathbb{R}$ qui sera appelé le cospectre de I et défini de la façon suivante : E est l'ensemble des points de $\mathbb{R}$ où s'annulent toutes les fonctions de E. On sait, c'est le théorème de Malliavin, que la connaissance de E ne détermine pas toujours l'idéal fermé I.

Définition 1.- Une fonction définie sur le complémentaire Ω de E, à valeurs complexes, sera notée φ et sera appelée un multiplicateur de I si la condition suivante est satisfaite :

Si f est dans I, la fonction égale à 0 sur E et à φf sur Ω est toujours dans $A(\mathbb{R})$.

La définition 1 entraîne que φ est une fonction continue et bornée sur Ω; plus précisément l'application de I dans $A(\mathbb{R})$ définie par multiplication par φ est continue grâce au théorème du graphe fermé.

On sait que, si E est vide, I est tout $A(\mathbb{R})$ et que tout multiplicateur φ de I est alors un élément de $B(\mathbb{R})$ ([1] 3.8 page 73). D'autre part les éléments de $B(\mathbb{R})$ peuvent être caractérisés de façon simple en faisant intervenir une dualité avec les polynômes trigonométriques sur $\mathbb{R}$.

([1] 1.9 page 32)

La proposition 1 ci-dessous n'est rien d'autre qu'une généralisation de ces résultats.

Proposition 1.- Une fonction à valeurs complexes, φ, définie sur l'ouvert Ω est un multiplicateur d'un idéal fermé I de $A(\mathbb{R})$ de cospectre E si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

a) φ est continue sur Ω

b) on peut trouver une constante A telle que, toute suite finie $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ de points de Ω et pour toute suite finie $a_1, \dots, a_n$ de nombres complexes, on ait :

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \left| \sum_1^n a_p \, \varphi(\gamma_p) e^{ix\gamma_p} \right| dx \leqslant A \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \left| \sum_1^n a_p \, e^{ix\gamma_p} \right| dx$$

Exprimons de façon plus succinte la proposition 1 ; appelons $I_d(E)$ l'idéal fermé de $A(\mathbb{R}_d)$ composé de tous les éléments de $A(\mathbb{R}_d)$ nuls sur E ($\mathbb{R}_d$ désigne le groupe $\mathbb{R}$ muni de la topologie discrète : c'est le groupe dual du compactifié de Bohr de $\mathbb{R}$). Alors : φ est un multiplicateur de I si et seulement si φ est un multiplicateur de $I_d(E)$ et si φ est continue sur Ω.

Une conséquence de la proposition 1 est la suivante : il revient au même de parler de multiplicateurs de I ou de multiplicateurs de tous les éléments de $A(\mathbb{R})$ nuls sur E. Un problème se pose cependant : un tel multiplicateur définit-il un endomorphisme de I ? Nous poserons de nouveau cette question en la précisant au § 4.

§ 2.- Passage aux sous groupes

Une autre conséquence de la proposition 1 s'obtient dans la situation suivante : E est un fermé de $\mathbb{R}$, Γ un sous groupe fermé de $\mathbb{R}$, N est l'intersection de E et de Γ et φ désigne un multiplicateur des éléments de $A(\mathbb{R})$ nuls sur E. On a alors le résultat ci-dessous

Théorème 1.- En restreignant φ aux points de Γ hors de E, on obtient un multiplicateur des éléments de $A(\Gamma)$ nuls sur $E \cap \Gamma$ de norme au plus égale à celle de φ

Il sera important dans les applications de connaître une forme de réciproque du théorème 1. Nous faisons les hypothèses suivantes justifiées par les résultats du paragraphe 3 :

Si $\Gamma = \mathbb{Z}$, on suppose l'existence d'un nombre réel λ, $0 < \lambda < 1/2$, tel que tout point γ dans E et $\mathbb{Z}$ soit le centre d'un intervalle fermé de longueur 2λ tout entier contenu dans E. On a alors le résultat suivant :

Théorème 2.- Si ψ est un multiplicateur, défini sur $\mathbb{Z} \cap \complement E$, des éléments de $A(\mathbb{Z})$ nuls sur E et si $g(x)$ est une fonction de la classe $A(\mathbb{R})$ nulle hors de $[-\lambda, \lambda]$, alors :

$$\varphi(x) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z} \cap \complement E} \psi(\gamma)\, g(x - \gamma)$$

<u>est un multiplicateur des éléments de</u> $A(\mathbb{R})$ <u>nuls sur</u> E <u>de norme au plus</u>

$$A_\lambda . \|\psi\| . \|g\|_{A(\mathbb{R})}$$

(<u>où</u> $\|\psi\|$ <u>désigne la norme du multiplicateur</u> ψ)

Tout d'abord on remarque que $\sum_{\gamma \in Z} g(x-\gamma)$ est dans $B(\mathbb{R})$ et que la norme de cet élément de $B(\mathbb{R})$ est au plus $A'_\lambda \|g\|_{A(\mathbb{R})}$. Supposons que f, dans $A(\mathbb{R})$, soit nulle sur E. Alors $f(x).\sum_{\gamma \in Z} g(x-\gamma)$ s'écrit $\sum_{-\infty}^{+\infty} f_n\ (x-n)$ où f_n est dans $A(\mathbb{R})$, nulle hors de $[-\lambda, \lambda]$ et où f_n est 0 si n est dans E.

On applique, à ce stade, le lemme :

<u>lemme 1.- Pour une constante positive</u> B_λ <u>ne dépendant que de</u> λ, $0 < \lambda < 1/2$, <u>et tout élément de</u> $A(\mathbb{R})$ <u>s'écrivant</u> $\sum_{-\infty}^{+\infty} f_n\ (x-n)$ <u>où</u> f_n <u>est nulle hors de</u> $[-\lambda, \lambda]$, <u>on a les inégalités</u> :

$$B_\lambda^{-1} \|(f_n(x))_{-\infty < n < +\infty}\|_{A(\mathbb{R}\times\mathbb{Z})} \leqslant \left\|\sum_{-\infty}^{+\infty} f_n\ (x-n)\right\|_{A(\mathbb{R})} \leqslant B_\lambda \|(f_n(x))_{-\infty<n<+\infty}\|_{A(\mathbb{R}\times\mathbb{Z})}$$

Le lemme entraîne le théorème 2 pour la raison suivante : si $\psi(\gamma)$ est un multiplicateur des éléments de $A(\mathbb{Z})$ nuls sur E, $Id \times \psi$ est un multiplicateur des éléments de $A(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$ nuls sur $\mathbb{R} \times E$. Ainsi, si f_n est 0 lorsque n est dans E, on a l'inégalité

$$\|(\psi(n)\ f_n(x))_{-\infty < n < +\infty}\|_{A(\mathbb{R}\times\mathbb{Z})} \leqslant \|\psi\| . \|(f_n(x))\|_{A(\mathbb{R}\times\mathbb{Z})}$$

et compte tenu du lemme 1 on obtient le théorème 2.

Il reste à prouver le lemme 1 ; il suffit de le montrer pour la partie dense

des fonctions de $A(R)$ s'écrivant comme une somme finie du type $\sum_{-\infty}^{+\infty} f_n(x - n)$.
Soit F_n l'élément de $L^1(R)$ dont la transformée de Fourier est $f_n(x)$.

Pour tout θ de T, on peut trouver un élément μ dans $B(R)$, de norme au plus B_λ, égal à $e^{in\theta}$ sur $[n - \lambda, n + \lambda]$.

Par convolution avec μ, on obtient l'inégalité :

$$\left\| \sum e^{in(\theta+x)} F_n(x) \right\|_{L^1(R)} \leqslant B_\lambda \left\| \sum f_n(x - n) \right\|_{A(R)}$$

On intègre par rapport à θ le premier membre de l'inégalité ci-dessus pour trouver :

$$\left\| \sum e^{in\theta} F_n(x) \right\|_{L^1(R \times T)} \leqslant B_\lambda \left\| \sum f_n(x - n) \right\|_{A(R)}$$

et ceci prouve une moitié du lemme. L'autre s'obtient de façon tout-à-fait semblable.

<u>Corollaire 1.- Si</u> $\Delta(x)$ <u>est une fonction dans</u> $A(R)$ <u>nulle hors de</u> $]-1, 1[$, <u>les sommes</u> $\varphi_n(x) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \Delta(x - 2^k)$ <u>forment une suite bornée de multiplicateurs des éléments de</u> $A(R)$ <u>nuls sur</u> $]-\infty, 0]$.

Un théorème de Paley ([1], théorème 8.6) nous apprend qu'une suite bornée par 1, a_k, $k \geqslant 0$, placée en 2^k est un multiplicateur de $\mathcal{F}H^1(T)$ de norme au plus A (A constante absolue). Il suffit alors d'appliquer le théorème 2 au cas où $\psi(m) = 0$ pour tous les entiers m positifs qui ne sont pas de la forme 2^k, $0 \leqslant k \leqslant n$ et $\psi(m) = 1$ ailleurs.

<u>Remarque</u> : si $\varphi(x)$ est un multiplicateur de norme A des éléments de $A(R)$ nuls sur $]-\infty, 0]$, il en est de même de $\varphi(tx)$ pour tout t, $t > 0$. Ainsi $\varphi_n(2^n x)$ est une suite bornée de multiplicateurs.

§ 3.- <u>Multiplicateurs triviaux et non triviaux</u>

a) Multiplicateurs triviaux.

Nous allons prouver le résultat suivant : le théorème 3

<u>Si $\Gamma = R^n \times T^m$ et si I est un idéal fermé de $A(\Gamma)$, tout multiplicateur de I est nécessairement un élément de $B(\Gamma)$ lorsque l'ensemble E des zéros communs aux éléments de I n'a pas d'intérieur.</u>

La démonstration de ce résultat reprendra celle du théorème de Krein suivant :

<u>Si Ω est un ouvert de R^n, f une fonction continue sur Ω telle que, pour toute suite $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ de points de Ω et toute suite $a_1, a_2, \dots a_n$ de nombres complexes, on ait :</u>

$$|a_1 f(\gamma_1) + a_2 f(\gamma_2) + \dots + a_n f(\gamma_n)| \leqslant \sup_{x \in R^n} |a_1 e^{ix.\gamma_1} + \dots + a_n e^{ix.\gamma_n}|$$

<u>alors f est la restriction à Ω d'un élément de $B(\Gamma)$ de norme au plus égale à 1.</u>

Nous aurons, en fait, besoin d'une variante du théorème de Krein, la proposition 2 (énoncée et démontrée si $\Gamma = R$)

<u>Proposition</u> 2.- <u>Ω est un ouvert de R, f une fonction continue sur Ω et</u>

ε_n une suite, tendant vers 0, de nombres réels tels que pour tout n, $n \geqslant 1$, f et un élément β_n de $B(n^{-1}\mathbb{Z} + \varepsilon_n)$ de norme au plus 1, aient même restriction à $\Omega \cap \{n^{-1}\mathbb{Z} + \varepsilon_n\}$. Alors f est la restriction à Ω d'un élément de $B(\mathbb{R})$ de norme au plus 1.

La démonstration de la proposition 2 utilise les lemmes 2 et 3 ci-dessous. Le premier est une simple conséquence du théorème de Hahn-Banach et le second se déduit facilement du premier.

lemme 2.- Si f est une fonction continue sur Ω telle que, pour toute fonction continue g à support compact dans Ω on ait :

$$\left| \int f \, g \, dx \right| \leqslant \|\hat{g}\|_\infty$$

alors f est la restriction à Ω d'un élément de $B(\mathbb{R})$ de norme au plus égale à 1.

lemme 3.- Si $(f_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite d'éléments de $B(\mathbb{R})$ dont les normes ne dépassent pas 1 et si f_n converge vers f uniformément sur tout compact de Ω, alors on peut trouver un élément de $B(\mathbb{R})$ de norme au plus 1 égal à f sur Ω.

Démontrons la proposition 2 : si $\Delta_n = (1 - n|x|)^+$ on forme

$$f_n(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma_n + \varepsilon_n} \Delta_n(x - \gamma)\, \beta_n(\gamma) = \sum_{\gamma \in \Gamma_n + \varepsilon_n} \Delta_n(x - \gamma)\, f(\gamma).$$

La première expression de $f_n(x)$ montre que

$$\|f_n\|_{B(R)} \leqslant 1$$

et la seconde montre que f_n converge uniformément vers f sur Ω. La proposition 2 résulte alors du lemme 3.

La preuve du théorème 3 est maintenant presque terminée. On peut, pour tout n, si E est sans intérieur, trouver un ε_n tel que $\varepsilon_n + n^{-1}\mathbb{Z}$ et E ne se rencontrent pas. Si φ est le multiplicateur étudié, le théorème 1 nous apprend que la restriction de φ à $\varepsilon_n + n^{-1}\mathbb{Z}$ appartient à $B(\varepsilon_n + n^{-1}\mathbb{Z})$ et que sa norme n'y dépasse pas celle de φ.

Il suffit alors d'appliquer la proposition 2.

De façon analogue on montre le théorème 4

Théorème 4.- *Si I est un idéal fermé de $A(R)$, E l'ensemble des zéros communs aux éléments de I et φ un multiplicateur de I de norme 1, φ se prolonge par continuité à la fermeture du complémentaire de E en un multiplicateur $\bar{\varphi}$ de norme 1 des éléments de $A(R)$ nuls sur l'intérieur de E.*

b) Multiplicateurs non triviaux.

Dans l'exposé de Mademoiselle Lesieur il a été montré que, pour tout réel c, $e^{ic \log x}$ est un multiplicateur des éléments de $A(R)$ nuls sur $]-\infty, 0]$. Si E est un fermé avec intérieur, appelons $]a, b[$ une des composantes connexes de l'intérieur de E et t_n une suite de points du complémentaire Ω de tendant, par la droite vers b en décroissant. Si $h(x)$ est un élément de $A(R)$ nul sur $]-\infty, a]$ et égal à 1 sur $[b, t_0]$, le produit $h(x)e^{ic \log x}$ est un multiplicateur des éléments de $A(R)$ nuls sur E et pour au moins un q, la suite

$$(e^{ic \log t_n})_{n \geqslant 0}$$

n'a pas de limite quand n tend vers l'infini : ceci montre que $e^{ic \log x} h(x)$ n'est pas, alors, la restriction à Ω d'un élément de $B(R)$.

Cette démonstration peut être adaptée au cas où $\Gamma = R^n \times T^m$.

§ 4.- Problèmes ouverts

Si φ est un multiplicateur d'un idéal fermé I de $A(R)$, φ définit-il un endomorphisme de I ? Plus précisément peut-on trouver une suite $(f_n)_{n \geqslant 0}$ d'éléments de $A(R)$ telle que pour tout élément f de I on ait

$$\| f.f_n - \varphi f \|_{A(R)} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow + \infty) \ ?$$

Peut-on toujours prendre pour f_n des éléments de I ? Nous répondrons, sur un exemple à ce dernier problème lors du second exposé.

Exposé n° III

ENSEMBLES DE NOMBRES REELS SATISFAISANT LA CONDITION FORTE DE DITKIN

par Y. Meyer

Introduction.- le problème qui nous occupe est de savoir dans quels ~~idéaux~~ fermés de $L^1(\mathbb{R})$ une suite approche l'identité. Le cospectre de l'idéal s'appelle alors, selon la terminologie de Wik ([3]) un ensemble de Ditkin fort. La réunion de deux tels ensembles en est un ([3]) mais il n'y a pas beaucoup de tels ensembles : sur le cercle, les ensembles de Ditkin fort sans intérieur sont finis ([3]). Une réunion finie d'intervalles fermés sur le cercle est un ensemble de Ditkin fort ([3]). Nous allons présenter un exemple d'ensemble de Ditkin fort sur le cercle qui n'est pas de ce dernier type.

D'abord quelques définitions sont nécessaires :

Définition 1.- Un ensemble fermé E de $\mathbb{R}$ vérifie la condition forte de Ditkin si

a) E est un ensemble de synthèse harmonique

b) On peut trouver une suite $(f_n)_{n \geqslant 0}$ d'éléments de $A(\mathbb{R})$ nuls sur E

telle que l'on ait :

$$\| f\, f_n - f \|_{A(\mathbb{R})} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow +\infty)$$

pour tout élément de $A(\mathbb{R})$ *nul sur* E

On en déduit aussitôt la proposition 1

Proposition 1.- Un ensemble fermé E *de* $\mathbb{R}$ *vérifie la condition forte de Ditkin si et seulement si l'on peut former une suite* $(f_n)_{n \geqslant 0}$ *d'éléments de* $A(\mathbb{R})$ *nuls au voisinage de* E *tels que, pour tout élément* f *de* $A(\mathbb{R})$ *nul sur* E *on ait :*

$$\| f\, f_n - f \|_{A(\mathbb{R})} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow +\infty)$$

La proposition 1 signifie que l'approximation en norme de f par des éléments de $A(\mathbb{R})$ nuls sur E se fait par un procédé de sommation défini par les f_n.

Grâce au théorème de Banach Steinhaus, on obtient la proposition 2

Proposition 2.- Un ensemble fermé E *de* $\mathbb{R}$ *vérifie la condition forte de Ditkin si et seulement si* E *est de synthèse et si l'on peut former une suite* $(f_n)_{n \geqslant 0}$ *d'éléments de* $A(\mathbb{R})$*, nuls sur* E*, telle que la condition*

a) $\| f_n - 1 \|_{A(K)} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow +\infty)$

soit satisfaite sur tout compact disjoint de E *et telle que*

b) $\| f\, f_n \|_{A(\mathbb{R})} \leqslant C \, \| f \|_{A(\mathbb{R})}$

où la constante C *ne dépend ni de* n *ni de l'élément* f *de* $A(\mathbb{R})$ *nul sur* E.

Si E n'a pas d'intérieur, le théorème 4 de l'exposé précédent nous permet de déduire de b) la condition

$$\|f_n\|_{A(\mathbb{R})} \leqslant C .$$

La suite $1 - f_n(x)$ est une suite bornée dans $B(\mathbb{R}_d)$ ($\mathbb{R}_d$ est le groupe $\mathbb{R}$ muni de la topologie discrète et $B(\mathbb{R}_d)$ est l'algèbre des transformées de Fourier des mesures sur le compactifié de Bohr de $\mathbb{R}$).

La suite $1 - f_n(x)$ tend vers 1 sur E et vers 0 ailleurs. On en déduit immédiatement que la fonction caractéristique de E appartient à $B(\mathbb{R}_d)$. En se servant du théorème de Cohen et de ce que E est fermé, Rosenthal en déduit que, à un ensemble fini près, un ensemble de Ditkin fort sans intérieur de la droite doit être une réunion finie de translatés progressions arithmétiques (théorème 5 de [1])

Venons en à l'exemple annoncé :

<u>La réunion E de $[-1, 0]$ et de l'ensemble $\{2^{-n}\}_{n \geqslant 0}$ est un ensemble satisfaisant la condition forte de Ditkin.</u>

Nous allons construire une suite g_n d'éléments de $A(\mathbb{R})$ égaux à 1 sur E, nuls, à partir d'un certain moment, sur tout compact disjoint de E et définissant une suite bornée de multiplicateurs des éléments de $A(\mathbb{R})$ nuls sur $[-1, 0]$

On en déduira une suite f_n convenable pour la proposition 2 en posant

$f_n = (1 - g_n)\,\lambda(x)$ où $\lambda(x)$ est une fonction trapèze égale à 1 sur $[-2, 2]$ et nulle hors de $[-3, 3]$.

Construisons donc les g_n ; $g_n(x)$ sera une modification évidente de la somme $g'_n(x) + g''_n(x) + g'''_n(x)$.

On définit $g'_n(x)$ comme la somme $\sum\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} \Delta_n(x - 2^{-k})$ où

$\Delta_n(x) = \sup(0, 1 - 2^{n+1}|x|)$

Les $g'_n(x)$ forment une suite bornée de multiplicateurs pour les éléments de $A(R)$ nuls sur $[-1, 0]$. En effet, soit $\alpha(x)$ un élément de $A(R)$ nul sur $]-\infty, -1]$ et égal à 1 sur $[0, 1]$. Si $f(x)$ est un élément de $A(R)$ nul sur $[-1, 0]$, le produit $\alpha(x)\, f(x)$ est nul sur $]-\infty, 0]$. On applique alors la remarque au corollaire 1 du théorème 2 du premier exposé pour obtenir :

$$\|g'_n(x)\, \alpha(x)\, f(x)\|_{A(R)} \leqslant A\, \|\alpha(x)\, f(x)\|_{A(R)} \leqslant A\, \|\alpha\|_{A(R)}\, \|f(x)\|_{A(R)}$$

Mais $g'_n(x)\,\alpha(x)$ n'est rien d'autre que $g'_n(x)$. Les normes des multiplicateurs $g'_n(x)$ ne dépassent donc pas $A\,\|\alpha\|_{A(R)}$.

On définit maintenant g''_n comme une fonction trapèze égale à 1 sur $[-2^{-n-1}, 2^{-n-1}]$ et à 0 hors de $[-2^{-n}, 2^{-n}]$. On a donc $\|g''_n\|_A \leqslant 3$

Enfin $g'''_n(x)$ vaut 1 en -1 est linéaire sur $[-2^{-n} - 1, -1]$ et $[-1, -1 + 2^{-n}]$ et nulle ailleurs.

La somme $g'_n + g''_n + g'''_n$ a toutes les propriétés désirées pour convenir sauf de ne pas être égale à 1 sur $[-1, 0]$. On appelle $g_n(x)$ une fonction égale à 1 sur $[-1, 0]$ et à la somme $g'_n + g''_n + g'''_n$ ailleurs et les fonctions $f_n(x) = (1 - g_n(x))\,\lambda(x)$ conviennent à la proposition 2.

Indiquons le problème ouvert par cet exemple : la démonstration s'adapte au cas où $\{2^{-n}\}_{n \geqslant 0}$ est remplacée par une suite de nombres réels positifs, tendant vers 0 plus vite qu'une progression géométrique de raison inférieure à 1. On peut alors se demander pour quelles suites $(t_n)_{n \geqslant 0}$ tendant en décroissant vers 0, la réunion de $[-1, 0]$ et de l'ensemble des $(t_n)_{n \geqslant 0}$ est un ensemble de Ditkin fort. Une condition nécessaire est que la fonction caractéristique de l'ensemble des t_n soit un multiplicateur pour les éléments de $B(\mathbb{R}_d)$ nuls sur $]-\infty, 0]$. ($B(\mathbb{R}_d)$ désigne l'algèbre des transformées de Fourier des mesures portées par le compactifié de Bohr de $\mathbb{R}$). Si, par exemple, l'ensemble des t_n est indépendant sur les entiers, on en déduit que l'ensemble des t_n doit être une réunion finie de suites tendant vers 0 plus vite qu'une progression géométrique de rapport inférieur à 1. En est-il ainsi dans le cas général ?

[1] ROSENTHAL (H.P.).- C. R. Acad. Sc. Paris, t. 262, p. 873-876, (13 avril 1966)

[2] RUDIN (W.).- Fourier Analysis on groups.- Interscience Tracts, 1962

[3] INGMAR (W.).- Arkiv för Matematik, 6, nº3, 1965, p. 55-64

Exposé nº IV

Contre exemple de Katznelson et McGehee à la conjecture de Beurling

par MM. Fiolet & Schreiber

I.- Définitions et notations

. On se place dans $\mathbb{R}$ et E désigne un fermé de $\mathbb{R}$. En fait, il n'est pas restrictif de supposer E compact et c'est ce que nous ferons.

. On note $\mathcal{C}(E)$ l'espace des fonctions continues sur E et la norme uniforme $\| \cdot \|_{(E)}$.

. On note $M(E)$ l'espace des mesures de Radon portées par E avec leur norme $\| \cdot \|_{M(E)}$.

. On note A ou $A(\mathbb{R})$ l'algèbre des transformées de Fourier des fonctions sommables avec la norme habituelle :

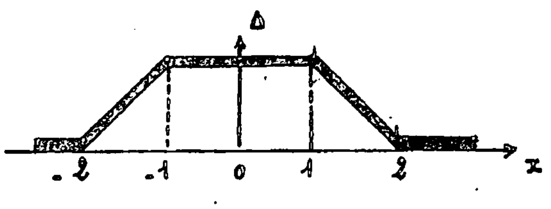
$$f \in A \Longrightarrow f = \hat{\varphi} \qquad \text{et} \qquad \| f \|_A = \| \varphi \|_{L^1} .$$

On désigne par $A(E)$ l'algèbre des restrictions à E des fonctions de la classe A, munie de la norme quotient.

. La norme pseudo-mesure d'une pseudo-mesure μ sera notée $\| \hat{\mu} \|_\infty$

. δ_x désigne la mesure de Dirac au point x.

. Δ désigne la fonction définie par :
$$\begin{cases} \Delta(x) = 1 & \text{pour} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ \Delta(x) = 0 & \text{pour} \quad |x| \geqslant 2 \\ \Delta \ \text{est linéaire ailleurs} & \end{cases}$$



On désigne par Δ_ε la fonction définie par $\Delta_\varepsilon(x) = \Delta(\frac{x}{\varepsilon})$ et on rappelle que $\|\Delta_\varepsilon\|_A \leqslant 3$.

. E étant donné, on dit que f a la propriété (1) si

1) f appartient à $\mathcal{C}(E)$

2) il existe une constante C telle que, pour toute mesure μ portée par E, on ait :

$$\left|\int f \, d\mu\right| \leqslant C \|\hat{\mu}\|_\infty$$

. Un fermé E a la propriété (B) si toute fonction ayant la propriété (1) appartient à $A(E)$.

. La conjecture était : "tout fermé a la propriété (B)".

II.- Construction d'un fermé dénombrable n'ayant pas la propriété (B).

1.- Nature du contre exemple.

a) On considère $E = \overline{\bigcup_{n \geqslant 1} E_n}$ où E_n est une portion de progression arithmétique, soit $E_n = \{\alpha_n + j\beta_n\}_{|j| \leqslant K_n}$, et $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ où f_n est portée par E_n.

b) Supposant que les E_n n'empiètent pas et que zéro soit le seul point d'accumulation de E, la convergence ponctuelle ne pose aucun problème et la continuité de f ne se pose qu'en zéro. Il est clair que la continuité de f sur E se réduit à la condition :

$\|f_n\|_{\mathscr{C}(E_n)}$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini

Il est non moins clair que dans ces conditions la série des f_n converge uniformément vers f.

c) Cherchons maintenant une condition suffisante pour que f ne soit la restriction à E d'aucune fonction $\tilde{f}$ de la classe A.

On peut supposer que zéro n'appartient à aucun E_n et nous utilisons alors la propriété suivante (cf. [1]) :

$$\tilde{f} \in A, \quad \tilde{f}(0) = 0 \Longrightarrow \|\Delta_\varepsilon \tilde{f}\|_A \text{ tend vers zéro lorsque } \varepsilon \text{ tend vers zéro.}$$

Zéro étant le seul point d'accumulation de E, on peut supposer que, ε étant donné on puisse choisir n assez grand pour que E_n soit dans $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Alors $\Delta_\varepsilon \tilde{f}$ est un prolongement de f_n et, par définition de la norme quotient, on a :

$$\|\Delta_\varepsilon \tilde{f}\|_A \geqslant \|f_n\|_{A(E_n)}$$

Il suffit donc d'assurer que $\left\{\|f_n\|_{A(E_n)}\right\}_{n \geqslant 1}$ soit minoré par un nombre strictement positif.

d) Le problème est donc d'assurer simultanément les deux conditions précédentes.

Mais E_n étant une portion finie de progression arithmétique, ayant assez de points, on sait qu'il existe une mesure ν_n portée par E_n de norme un et de norme pseudo-mesure petite. Plus précisément, E_n ayant au moins 2^{n+1} points, il existe une mesure ν_n de norme un et de norme pseudo-mesure inférieure ou égale à $\frac{1}{\sqrt{2^n}}$.

Posons $\delta(E_n) = \operatorname{Sup} \frac{\|f\|_{A(E_n)}}{\|f\|_{\mathcal{C}(E_n)}}$, la borne supérieure étant prise sur l'ensemble de toutes les fonctions définies sur E_n (car E_n est un ensemble fini)

Considérons f dans $\mathcal{C}(E_n)$ et μ dans $M(E_n)$. Alors :

$$\left|\int f \, d\mu\right| \leqslant \|f\|_{A(E_n)} \|\hat{\mu}\|_\infty \leqslant \delta \|f\|_{\mathcal{C}(E_n)} \|\hat{\mu}\|_\infty$$

D'où :

$$\|\mu\|_{M(E_n)} \leqslant \delta \|\hat{\mu}\|_\infty$$

Prenant $\mu = \nu_n$, on prouve que $\delta(E_n)$ est grand $(\delta(E_n) \geqslant \sqrt{2^n})$, donc qu'il existe une fonction f_n portée par E_n telle que :

$$\|f_n\|_{A(E_n)} = 1, \quad \|f_n\|_{\mathcal{C}(E_n)} \text{ petite} \quad \left(\|f_n\|_{\mathcal{C}(E_n)} \leqslant \frac{2}{\sqrt{2^n}}\right).$$

e) Cherchons une condition supplémentaire sur les E_n pour que f satisfasse la propriété (1).

Soit μ une mesure portée par E. Alors :

$$\int \left(\sum_{n=1}^{N} f_n\right) d\mu = \sum_{n=1}^{N} \int f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{N} \int f_n \, d\mu_n$$

où μ_n est la restriction μ à E_n.

Donc :

$$\left|\int \left(\sum_{n=1}^{N} f_n\right) d\mu\right| \leqslant \sum_{n=1}^{N} \left|\int f_n \, d\mu_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{N} \|f_n\|_{A(E_n)} \|\hat{\mu}_n\|_\infty$$

Soit :

$$\left|\int \left(\sum_{n=1}^{N} f_n\right) d\mu\right| \leq \sum_{n=1}^{N} \|\hat{\mu}_n\|_\infty$$

Comme $E_n = \{\alpha_n + j\beta_n\}_{|j| \leq k_n}$, μ_n est combinaison linéaire finie de masses ponctuelles et :

$$\hat{\mu}_n(x) = e^{i\alpha_n x} \frac{P_n(e^{i\beta_n x})}{e^{ik_n\beta_n x}}$$

où P_n est un polynôme.

Prenant alors les α_n et les β_n de telle sorte que

$\{\pi\} \cup \{\alpha_n\}_{n \geq 1} \cup \{\beta_n\}_{n \geq 1}$ soit un ensemble indépendant sur les rationnels, on montre facilement que :

$$\sum_{n=1}^{N} \|\hat{\mu}_n\|_\infty = \left\|\sum_{n=1}^{N} \hat{\mu}_n\right\|_\infty$$

(Introduire la fonction de $2N$ variables indépendantes

$$F(u_1, \ldots u_N, z_1, \ldots, z_N) = \sum_{n=1}^{N} u_n \frac{P_n(z_n)}{z_n^{k_n}}$$

et utiliser le théorème de Kronecker)

Enfin, la série des f_n converge uniformément vers f et la série des μ_n converge en norme, donc en norme pseudo-mesure vers μ, d'où :

$$\left|\int f\, d\mu\right| \leq \|\hat{\mu}\|_\infty$$

2.- Construction du contre exemple.

Il est clair que toutes les conditions précédentes sont compatibles.

Par exemple : . On choisit $k_n = 2^n$, puis α_1, β_1 positifs, indépendants avec π et tels que $\alpha_1 - 2\beta_1 > 0$

. supposant α_n, β_n choisis, on choisit α_{n+1} de telle sorte que :

$0 < \alpha_{n+1} < \mathrm{Min}\,(\frac{1}{n+1}\,,\ \alpha_n - 2^n\,\beta_n)$, et, bien sûr, α_{n+1} rationnellement indépendant avec π et les α_j, β_j précédents.

. puis on choisit β_{n+1} rationnellement indépendant avec α_j, β_j précédents et tel que :

$$0 < \beta_{n+1} < \frac{1}{2^{n+1}}\ \mathrm{Min}\left[\alpha_{n+1}\ ,\ \alpha_n - 2^n\,\beta_n - \alpha_{n+1}\right]$$

3.- Remarque. La construction précédente se généralise. Ainsi l'exposé suivant donne la construction d'ensembles parfaits n'ayant pas la propriété (B).

On peut penser que si E est un fermé dénombrable non-Helson alors E n'a pas la propriété (B). La condition non Helson est liée à la partie II.1.-d) de cet exposé où $\delta(E_n)$ est la constante de Helson de E_n. Mais si on ne connaît rien des propriétés arithmétiques de E, le problème se pose de garder un contrôle de l'addition des normes pseudo-mesures des restrictions d'une mesure portée par E.

III.- Construction d'un ensemble parfait de $\mathbb{R}$ n'ayant pas la propriété $\mathcal{B}$.

La construction repose sur les lemmes suivants [2]

Lemme 1.-

Si E est un ensemble fini de $\mathbb{R}$, il existe une mesure μ, combinaison linéaire d'un nombre fini de masses ponctuelles portées par le Z-module engendré par E, et vérifiant

1) $\forall x \in E \qquad \mu\{x\} = 1$

2) $\mathcal{M}(|\hat{\mu}|) = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\hat{\mu}(\xi)|\, d\xi \leqslant 2$

<u>démonstration</u> : Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ m éléments de E tels que tout élément x de E s'écrive de manière unique

$$x = \sum_{j=1}^{m} b_j(x)\, \lambda_j \qquad (b_j(x) \text{ entiers})$$

Soit $b = \sup\limits_{\substack{j=1\ldots m \\ x \in E}} |b_j(x)|$

Les polynômes de Fejer $\quad D_j(\xi) = \sum\limits_{k=-N}^{N} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) e^{i\lambda_j k\xi}$

étant positifs, on a

$$\mathcal{M}(|D_j(\xi)|) = \mathcal{M}(D_j(\xi)) = D_j(0) = 1$$

D'où, avec $\quad D_j^*(\xi) = D_j(\xi) + \sum\limits_{k=-b}^{b} \frac{|k|}{N} e^{i\lambda_j k\xi}$

$$\mathcal{M}(|D_j^*|) < 1 + \frac{2b^2}{N}$$

Posons $\mu_j = \hat{D}_j^*$; alors la mesure

$$\mu = \mu_1 * \mu_2 * \cdots * \mu_m$$

satisfait les conditions 1) et 2) parce que les supports des μ_i sont rationnellement indépendants, N étant choisi suffisamment grand.

<u>Lemme</u> 2.- Si μ est la mesure construite au <u>lemme</u> 1, alors pour toute fonction f de $A(\mathbb{R})$ on a

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \|\mu * f_\varepsilon\|_A \leqslant 2\|f\|_A$$

<u>démonstration</u> : $\|\mu * f_{\varepsilon}\|_A = \int_{\mathbb{R}} |\hat{\mu}(t)|\ \varepsilon\, |\hat{f}(\varepsilon t)|\ dt.$

La fonction $|\hat{\mu}(t)|$ étant continue et périodique, pour tout $\eta > 0$ il existe un polynôme trigonométrique $a_o + \sum_{k=1}^{p} \alpha_k\, e^{ix_k t}$ avec $a_o = \mathcal{M}(|\hat{\mu}|)$ et pour lequel

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{\mu}(t)|\ \varepsilon\, |\hat{f}(\varepsilon\, t)|\,dt \leqslant \int (a_o + \sum_{k=1}^{p} a_k\, e^{ix_k t})\, \varepsilon\, |\hat{f}(\varepsilon\, t)|\, dt + \eta \|f\|_A$$

$$\leqslant \mathcal{M}(|\hat{\mu}|)\ \|f\|_A + \eta \|f\|_A + \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \int e^{\frac{ix_k t}{\varepsilon}}\ |\hat{f}(t)|\,dt$$

Le théorème de Riemann Lebesgue donne

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int e^{i\frac{x_k t}{\varepsilon}}\ |\hat{f}(t)|\, dt = 0$$

D'où la conclusion du lemme.

<u>Construction de l'ensemble de Sigtuna</u> [3]

On construit une suite de segments de progressions arithmétiques $\{I_n\}$ ($I_n = \{\alpha_n + k\, r_n\}_{|k| \leqslant 2^n}$), tels que l'ensemble des nombres α_n et r_n soit rationellement indépendant, et de façon que les I_n soient très "tassés" les uns sur les autres, l'ensemble $E = \overline{(\cup I_n)}$ étant un ensemble parfait totalement discontinu.

Plus précisément, si $I_1, I_2, \dots I_n$ ont été construits de manière que l'ensemble $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n, r_1, \dots r_n)$ soit indépendant, I_{n+1} sera choisi de la manière suivante :

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des partitions de $\{I_1, \ldots I_n\}$ en deux classes. Pour une partition P de $\mathcal{P}$: P : $\{I_{k_1} \ldots\ldots I_{k_\ell}\}$, $\{I_{k_{\ell+1}}, \ldots\ldots I_{k_n}\}$ il existe (lemme 1) une mesure μ_P vérifiant :

1) $\mu_P(\{x\}) = 1$ si $x \in I_{k_1} \cup I_{k_2} \cup \ldots I_{k_\ell}$.

2) $\mu_P(\{x\}) = 0$ si $x \in I_{k_{\ell+1}} \cup \ldots \cup I_{k_n}$.

3) $\mathcal{M}(|\mu|) \leqslant 2$.

et il existe (lemme 2) un nombre ε_P positif tel que pour $\varepsilon < \varepsilon_P$

1) $\|\mu_P * \Delta_\varepsilon\| \leqslant 6$.

2) $\mu_P * \Delta_\varepsilon(x) = 1$, si x est distant de moins de ε de l'ensemble $I_{k_1} \cup \ldots \cup I_{k_\ell}$.

3) $\mu_P * \Delta_\varepsilon(x) = 0$, si x est distant de moins de ε de l'ensemble $I_{k_{\ell+1}} \cup \ldots \cup I_{k_\ell}$.

On définit alors $\varepsilon_n = \inf_{P \in \mathcal{P}} \varepsilon_P$.

Puis on considère x_n l'élément de $I_1 \cup \ldots \cup I_n = J_n$, le plus isolé, c'est-à-dire tel que

$$\inf_{\substack{j \in J_n \\ y \neq x_n}} |x_n - y| = \sup_{x \in J_n} \inf_{\substack{y \in J_n \\ y \neq x}} |x - y|$$

Alors on choisira pour I_{n+1} un segment $\{a_{n+1} + k\, r_{n+1}\}_{|k| \leqslant 2^{n+1}}$ indépendant des $I_1, I_2, \ldots I_n$ contenu dans l'intervalle de centre x_n et de longueur ε_n .

Les segments I_n étant choisis de proche en proche de cette manière, on aura nécessairement $\varepsilon_{n+1} \leqslant \frac{\varepsilon_n}{2}$ et pour chaque p :

$$I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \subset \bigcup_{i=1}^{p} I_i + \left]-\varepsilon_p, \varepsilon_p\right[$$

d'où :

<u>Proposition</u> 1.- $E = \overline{I}$ est un ensemble parfait totalement discontinu.

<u>Remarque</u>.- I possède de plus la propriété fondamentale suivante : pour chaque n et chaque partition de $(I_1, \dots I_n)$ en deux classes il existe une fonction de $A(\mathbb{R})$, de norme inférieure à 6, valant 1 sur les segments de la première classe, 0 sur les segments de la deuxième classe et constante sur les segments I_p d'indice p supérieur à n.

<u>Lemme</u> 3.- L'espace vectoriel engendré par les idempotents continus de E est dense dans l'espace $\mathcal{C}(E)$ des fonctions continues sur E muni de la norme de la convergence uniforme.

Les idempotents sont les fonctions valant 0 ou 1. Le lemme est une conséquence immédiate du théorème de Stone Weierstrass.

<u>Définition</u>.- Si μ est une pseudomesure portée par E, et x un point de E, nous dirons que μ "<u>ne charge pas le point</u> x" si

$$\forall \eta > 0, \ \forall N, \ \exists n > N \ : \ |\mu(\delta_x * \Delta_{\varepsilon_n})| < \eta .$$

(ε_n étant défini dans la construction de I)

<u>Proposition</u> 2.- Si μ est une pseudo-mesure portée par E, ne chargeant aucun point de E, c'est une mesure, et on a :

$$\|\mu\|_{M(E)} \leqslant 24 \|\hat{\mu}\|_{\infty}$$

<u>démonstration</u> : a) Montrons que μ définit une forme linéaire, bornée pour la norme uniforme, sur l'espace vectoriel engendré par les idempotents continus sur E

1) Soit $I(E)$ le plus petit idéal fermé associé au fermé E et $A(\mathbb{R})/I(E)$ l'espace de germes de fonctions de A associé. A un idempotent χ de $\mathcal{C}(E)$ faisons correspondre le germe des fonctions de $A(\mathbb{R})$ localement constantes au voisinage de E et dont la restriction à E est χ : Soit ω_χ le module de continuité de χ et n en entier tel que $\omega_\chi(\varepsilon_n) < \frac{1}{2}$; si χ_n est la restriction de χ à $I_1 \cup I_2 \cup \ldots I_n$, la fonction $\chi_n * \Delta_{\varepsilon_n}$ est un prolongement de χ du type cherché.

Par abus de notation nous noterons, dans la suite, de la même façon les idempotents continus sur E et leurs image canonique dans $A(\mathbb{R})/I(E)$

2) Supposons que χ ne "casse" pas les segments I_n, c'est-à-dire que sa restriction à chaque I_n est constante. Alors

$$\|\chi\|_{A(R)/I(E)} \leqslant 6 .$$

En effet si $\omega_\chi(\varepsilon_n) \leqslant \frac{1}{2}$, χ définit sur l'ensemble $\{I_1, \ldots, I_n\}$ une partition

P en deux classes : χ vaut 1 sur les segments de la première et 0 sur ceux de la deuxième. Alors $\mu_P * \Delta_{\varepsilon_n}$ est un prolongement de χ dont la norme dans $A(\mathbb{R})$ est inférieure à 6. (Prop 1, Remarque)

D'où $$|\mu(\chi)| \leqslant 6 \, \|\hat{\mu}\|_\infty$$

3) Un idempotent continu quelconque χ ne peut "casser" qu'un nombre fini de segments (soit par exemple $I_1, I_2, \ldots I_n$) puisque χ est nécessairement constant sur I_{p+1} dès que $\omega_\chi(\varepsilon_p) \leqslant \frac{1}{2}$. Soit J l'ensemble des points de $I_1 \cup \ldots I_n$ où χ vaut 1. Si η est positif et puisque μ ne charge pas les points de J, il existe des entiers p_x tels que

$$\sum_{x \in J} |\mu(\delta_x * \Delta_{\varepsilon_{p_x}})| < \eta$$

Posant alors

$$\chi' = \chi - \sum_{x \in J} (\delta_x * \Delta_{\varepsilon_{p_x}})$$

χ' est un idempotent ne "cassant" pas les segments I_n,

d'où $$|\mu(\chi)| \leqslant |\mu(\chi')| + \eta$$

soit $$|\mu(\chi)| \leqslant 6 \, \|\hat{\mu}\|_\infty$$

b) μ définit donc par prolongement une forme linéaire bornée sur $\mathcal{C}(E)$, donc une mesure $\tilde{\mu}$ portée par E et de norme

$$\|\tilde{\mu}\|_{M(E)} \leqslant 24 \, \|\hat{\mu}\|_\infty$$

c) Il reste à vérifier que $\tilde{\mu}$ est bien un prolongement de μ, c'est-à-dire coïncide avec μ sur $A(\mathbb{R})$.

$\lambda = \mu - \tilde{\mu}$ est une pseudo-mesure portée par E nulle sur les fonctions de $A(\mathbb{R})$ qui sont des prolongements localement constants au voisinage de E d'idempotents de E. En particulier si $\mathcal{J}_E$ désigne une fonction de $A(\mathbb{R})$ égale à 1 sur un voisinage de E, on a

$$\lambda(\mathcal{J}_E) = 0$$

Donc λ admet une primitive, au sens des distributions, F, qui appartient à $L^2(\mathbb{R})$. Mais, si Q est une composante connexe du complémentaire de E, F est presque partout égale à une constante sur Q, puisque pour toute fonction φ, dérivée d'une fonction $\emptyset$ indéfiniment dérivable à support compact contenu dans Q, on a

$$\int F(\xi)\ \varphi(\xi)\ d\xi = \lambda(\emptyset) = 0$$

De plus, en calculant l'intégrale d'idempotents de E bien choisis, on montre que F est presque partout constante dans le complémentaire de E : comme E est de mesure nulle, il en résulte que λ est nulle : donc $\tilde{\mu}$ est bien un prolongement de μ.

cela achève la démonstration de la proposition 2.

<u>Proposition</u> 3.- Toute pseudo-mesure portée par E peut s'écrire

$$\mu = \mu_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j$$

où μ_0 est une mesure et μ_j une mesure portée par I_j avec

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|\hat{\mu}_j\|_\infty \leqslant 6 \|\hat{\mu}\|_\infty$$

<u>démonstration</u> : n étant fixé considérons pour tout $p \geqslant n$ la mesure $\vartheta_{n,p}$ associée à la partition de $\{I_1, I_2, \ldots I_p\}$ en les deux classes $\{I_1, I_2, \ldots I_n\}$ et $\{I_{n+1}, \ldots I_p\}$ de sorte que

$$\vartheta_{n,p} * \Delta_{\varepsilon_p}$$

est une fonction égale à 1 sur $\{I_1 \cup \ldots \cup I_n\} +]-\varepsilon_p, \varepsilon_p[$ et nulle sur E en dehors de cet ouvert. Alors

$$\mu_{n,p} = (\vartheta_{n,p} * \Delta_{\varepsilon_p})\mu$$

est une pseudo-mesure restriction de μ à un voisinage de $I_1 \cup \ldots \cup I_n$ avec

$$\|\hat{\mu}_{n,p}\|_\infty \leqslant 6 \|\hat{\mu}\|_\infty$$

On peut extraire pour chaque n une sous suite p_j telle que μ_{n,p_j} converge faiblement lorsque p_j tend vers l'infini vers une pseudo-mesure portée par $\bigcup_{i=1}^{n} I_j$. Par un procédé diagonal on peut alors déterminer une sous suite p_j telle que μ_{n,p_j} converge pour tout n vers une pseudo-mesure portée par $\bigcup_{j=1}^{n} I_j$, qu'on peut écrire $\sum_{j=1}^{n} \mu_j$ avec μ_j portée par I_j.

Comme $$\|\sum_{j=1}^{n} \hat{\mu}_j\|_\infty \leqslant 6 \|\hat{\mu}\|_\infty$$

et comme $$\sum_{j=1}^{n} \|\hat{\mu}_j\|_\infty = \|\sum_{j=1}^{n} \hat{\mu}_j\|_\infty$$ du fait de l'indépendance des segments I_j, la série $\sum \mu_j$ converge en norme vers une pseudo-mesure.

La pseudo-mesure $\mu_o = \mu - \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k$ ne charge pas les points de $\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$. En effet soit $x \in I_n$ et $\eta > 0$. Soit $N > n$ et tel que $\sum_{k=N+1}^{\infty} \|\hat{\mu}_k\|_\infty < \frac{\eta}{6}$

Soit p, entier suffisamment grand pour que $\delta_x * \Delta_{\varepsilon_p}$ soit nulle sur $I_1 \cup \ldots \cup I_N$ sauf en x. Pour la sous suite d'indices p_j définie ci-dessus on a

$$\mu_{n,p_j}(\delta_x * \Delta_{\varepsilon_p}) \xrightarrow[p_j \to \infty]{} \sum_{k=1}^{N} \mu_k (\delta_x * \Delta_{\varepsilon_p})$$

Donc, pour p_j suffisamment grand :

$$|\mu_{n,p_j}(\delta_x * \Delta_{\varepsilon_p}) - \sum_{k=1}^{N} \mu_k (\delta_x * \Delta_{\varepsilon_p})| < \frac{\eta}{2}$$

mais si $p_j > p$, on a respectivement :

$$\mu_{n,p_j}(\delta_x * \Delta_{\varepsilon_p}) = \mu(\delta_x * \Delta_{\varepsilon_{p_j}})$$

$$\text{et} \quad \sum_{k=1}^{N} \mu_k (\delta_x * \Delta_{\varepsilon_p}) = \sum_{k=1}^{N} \mu_k (\delta_x * \Delta_{\varepsilon_{p_j}})$$

D'où pour p_j assez grand :

$$|\mu_o(\delta_x * \Delta_{\varepsilon_{p_j}})| \leq |\mu(\delta_x * \Delta_{\varepsilon_{p_j}}) - \sum_{k=1}^{N} \mu_k (\delta_x * \Delta_{\varepsilon_{p_j}})|$$

$$+ \sum_{k=N+1}^{\infty} |\mu_k (\delta_x * \Delta_{\varepsilon_{p_j}})|$$

$$\leq \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{6} \|\delta_x * \Delta_{\varepsilon_{p_j}}\|_A \leq \eta .$$

<u>Corollaire</u>.- E est un ensemble de synthèse spectrale.

<u>Proposition</u> 4.- E ne possède pas la propriété $\mathcal{B}$.

On va construire une fonction f continue sur E, n'appartenant pas à $A(E)$

et vérifiant les hypothèses de $\mathfrak{B}$:

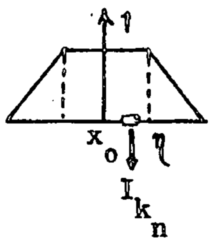
Soit I_{k_n} une suite de progressions arithmétiques de E ayant un seul point d'accumulation x non situé dans $I = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$. Soit φ_n une suite de fonctions définies sur I_{k_n} et vérifiant

$$\|\varphi_n\|_{\mathcal{C}(I_{k_n})} \longrightarrow 0$$

$$\|\varphi_n\|_{A(I_{k_n})} = 1$$

Soit $\tilde{\varphi}$ un prolongement continu à E de $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n$, obtenu en prolongeant chaque φ_n dans un tout petit voisinage de I_{k_u} en une fonction localement constante au voisinage de I_{k_n}. De la même façon que dans le cas discret une telle fonction n'appartient pas à A :

$$\|(\delta_{x_0} * \Delta_\eta)\cdot\tilde{\varphi}\|_A \geq \|(\delta_{x_0} * \Delta_\eta)\cdot\tilde{\varphi}\|_{A(I_{k_n})}$$



$$= \|(\delta_{x_0} * \Delta_\eta)\cdot\varphi_n\|_{A(I_{k_n})}$$

$$= \|\varphi_n\|_{A(I_{k_n})} = 1$$

Par ailleurs si μ est une mesure sur E, μ s'écrit (Prop. 1)

$$\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j + \mu_0$$

D'où

$$\left|\int \tilde{\varphi}\, d\mu\right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left|\int \tilde{\varphi}\, d\mu_j\right| + \left|\int \tilde{\varphi}\, d\mu_0\right|$$

$$\leq \sum \|\mu_i\|_\infty + \|\tilde{\varphi}\|_{\mathcal{C}(E)} \|\mu_0\|_{M(E)}$$

$$\leq 6\|\hat{\mu}\|_\infty + 24\|\tilde{\varphi}\|_{\mathcal{C}(E)} \|\hat{\mu}_0\|_\infty$$

$$\left|\int \tilde{\varphi}\, d\mu\right| \leq K\|\hat{\mu}\|_\infty$$

Bibliographie

[1] J.-P. Kahane et R. Salem.- Ensembles parfaits et séries trigonométriques.- Hermann.

[2] Y. Katznelson.- Introduction to Harmonic Analysis (cours de Stanford)

[3] Y. Katznelson.- Lettre à J.-P. Kahane (non publiée)

Exposé nº V

LE PROBLEME DE LA COURONNE

d'après L. Carleson

par Mme Grossetête

1. Introduction

1.1. Définitions. Notations.

H^∞ algèbre de Banach

a) H^∞ désigne l'algèbre des fonctions :

- Définies dans le disque unité $\Delta = \{z/|z| < 1\}$, du plan complexe
- A valeurs complexes
- Analytiques et bornées dans Δ
- La loi de multiplication étant le produit

$$(f \cdot g)(z) = f(z).g(z)$$

b) H^∞ munie de la norme : $\|f\|_\infty = \sup_{z \in \Delta} |f(z)|$ est une algèbre de Banach.

$\mathfrak{M}(H^\infty)$: espace des idéaux maximaux

a) $\mathfrak{M}(H^\infty)$ désigne l'ensemble des idéaux maximaux de H^∞, c'est à dire, l'ensemble des homomorphismes continus de H^∞ sur $\mathbb{C}$.

b) $\mathfrak{M}(H^\infty)$ <u>devient un espace topologique</u> si on le munit de la topologie induite par les transformées de Gelfand des fonctions de H^∞.

<u>Nota</u> : Les transformées de Gelfand des fonctions de H^∞ sont les applications de $\mathfrak{M}(H^\infty)$ dans $\mathbb{C}$, définies par : $\hat{f}(h) = h(f)$ pour tout $h \in \mathfrak{M}(H^\infty)$ et pour tout $f \in H^\infty$.

1.2. <u>Problème de la couronne</u>

1.2.1. <u>Δ sous-espace topologique de $\mathfrak{M}(H^\infty)$</u>

. Soit $p \in \Delta$: la relation $h_p(f) = f(p)$, pour toute fonction $f \in H^\infty$, définit un homomorphisme continu de H^∞ sur $\mathbb{C}$.

. L'application $p \longrightarrow h_p$ permet d'identifier Δ à un sous-ensemble de $\mathfrak{M}(H^\infty)$. Δ muni de la topologie usuelle est aussi un sous-espace topologique de $\mathfrak{M}(H^\infty)$.

1.2.2. <u>La couronne</u>

Il y a dans $\mathfrak{M}(H^\infty)$ d'autres points que ceux de Δ : H^∞ possédant un élément unité, $\mathfrak{M}(H^\infty)$ est compact, donc distinct de Δ qui est ouvert.

On appelle "couronne" l'espace $\mathfrak{M}(H^\infty) - \Delta$. On ne sait pas la décrire exactement, mais Carleson montre dans [2] que son intérieur est vide, c'est à dire que Δ est dense dans $\mathfrak{M}(H^\infty)$.

1.3. <u>Formulation équivalente du problème de la densité</u>

<u>Théorème</u> 1. Une condition nécessaire et suffisante pour que Δ soit dense dans

$\mathfrak{M}(H^{\infty})$ est que :

Pour toute famille finie $(f_1, \dots f_n)$ de fonctions de H^{∞}, satisfaisant pour un certain $\delta > 0$, la condition

(1) : $|f_1(z)| + \dots + |f_n(z)| \geq \delta > 0$,

il existe des fonctions de H^{∞} $p_1, \dots p_n$, telles que

(2) : $f_1 p_1 + f_2 p_2 + \dots + f_n p_n \equiv 1$.

Remarque :

La relation (2) est équivalente à la propriété suivante (2') : les f_i n'appartiennent à aucun idéal maximal.

Démonstration.

a) La relation (2) où $f_i \in H^{\infty}$ et $p_i \in H^{\infty}$ implique que les fonctions f_i par exemple, satisfont une condition du type (1).

b) Supposons Δ dense dans $\mathfrak{M}(H^{\infty})$. Soient $f_1, \dots f_n$, n fonctions de H^{∞} satisfaisant la condition (1). Supposons qu'il existe un idéal maximal h_o qui contienne toutes les f_i.

$V = \left\{ h \in \mathfrak{M}(H^{\infty}) / |\hat{f}_i(h)| < \frac{\delta}{n}, \quad i = 1, 2, \dots n \right\}$ définit un voisinage de h_o dans $\mathfrak{M}(H^{\infty})$.

D'après l'hypothèse de densité on peut trouver $z_o \in \Delta \cap V$

$$|\hat{f}_i(z_o)| = |f_i(z_o)| < \frac{\delta}{n}, \quad i = 1, 2, \dots n .$$

On aurait donc $|f_1(z_o)| + \dots + |f_n(z_o)| < \delta$, ce qui contredit la condition (1).

c) Supposons que, pour toute famille finie de fonctions $f_1, \dots f_n \in H^\infty$, vérifiant la condition (1) on puisse trouver $g_1, \dots g_n \in H^\infty$ vérifiant la relation (2)

Supposons que Δ ne soit pas dense dans $\mathcal{M}(H^\infty)$: il existe $h_o \in \mathcal{M}(H^\infty)$ et un voisinage V de h_o dans $\mathcal{M}(H^\infty)$ tel que : $V \cap \Delta = \emptyset$, un tel voisinage est nécessairement défini par un système de fonctions $f_1, \dots f_n$ de H^∞ et un nombre $\varepsilon > 0$ de la façon suivante :

$$\hat{f}_i(h_o) = 0 \qquad i = 1, 2, \dots n$$

$$V = \left\{ h \in \mathcal{M}(H^\infty) / |\hat{f}_i(h)| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots n \right\}.$$

Puisque $V \cap \Delta = \emptyset$, pour tout $z \in \Delta$ l'une des fonctions f_i est telle que $|f_i(z)| \geqslant \varepsilon$, d'où :

$$|f_1(z)| + \dots + |f_n(z)| \geqslant \varepsilon > 0 \quad \text{pour tout} \quad z \in \Delta.$$

D'après l'hypothèse les fonctions f_i ne peuvent appartenir à aucun idéal maximal ce qui contredit l'existence de h_o.

[C'est sous la forme ci-dessus que Carleson démontre la densite de Δ dans $\mathcal{M}(H^\infty)$.]

2. Les étapes de la démonstration

2.1. Le problème classique d'interpolation

Soit (z_k) $k = 1, 2, \dots n$ une suite finie de points de Δ distincts.

Soit (w_k) $k=1, 2, \dots n$ une suite finie de points de $\mathbb{C}$.

a). Le problème d'interpolation consiste à trouver les fonctions de H^∞ telles que $f(z_k) = w_k$ pour $k = 1, 2, \dots n$.

Il existe toujours de telles fonctions. Si f_n désigne l'une d'entre elles et si B_n désigne le produit de Blaschke dont les zéros sont $z_1, \dots z_n$, toute solution du problème est de la forme : $f = f_n + B_n g$ où $g \in H^\infty$.

b). On cherche à évaluer la borne inférieure des normes dans H^∞, des solutions du problème soit :

$$\inf_{g \in H^\infty} \| f_n + B_n g \|_\infty .$$

Remarquons que $\| f_n + B_n g \|_\infty$ coïncide avec la norme de la fonction $f_n + B_n g$ considérée comme élément de L^∞ du cercle unité.

Sur le cercle $|z| = 1$, $|B_n(z)| = 1$ de sorte que $F_n = \frac{f_n}{B_n}$ est un élément de L^∞ et que

$$\inf_{g \in H^\infty} \| f_n + B_n g \|_\infty = \inf_{g \in H^\infty} \| F_n + g \|_{L^\infty} .$$

On cherche donc à évaluer la norme de la classe $F_n + H^\infty$ dans l'espace de Banach quotient $\frac{L^\infty}{H^\infty}$ $L^\infty = (L^1)^*$

. $L^\infty = (L^1)^*$

H^∞ est l'"annulateur" de H^1_0, sous espace vectoriel des fonctions de H^1 qui s'annulent à l'origine.

On peut donc identifier le quotient $\frac{L^\infty}{H^\infty}$ avec le dual de H^1_0 $\inf_{g \in H^\infty} \| F_n + g \|_{L^\infty}$ est alors la norme de F_n, considérée comme fonctionnelle linéaire sur H^1_0, soit :

$$\inf_{g \in H^\infty} \|F_n+g\|_{L^\infty} = \sup_{f\in H^1, \|f\|_1 \leqslant 1} \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F_n(e^{i\theta})f(e^{i\theta})e^{i\theta}\, d\theta \right.$$

$$f \in H^1 \quad , \quad \|f\|_1 \leqslant 1.$$

D'après le théorème de Cauchy,

$$\inf_{g \in H^\infty} \|F_n+g\|_{L^\infty} = \sup_f \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{w_k\, f(z_k)}{B_n'(z_k)} \right|$$

$$f \in H^1 \quad ; \quad \|f\|_1 \leqslant 1 .$$

c) Il existe une fonction f_o de H^∞ réalisant l'interpolation et dont la norme

$\|f_o\|_\infty = \inf_{g \in H^\infty} \|f_n + B_n g\|_\infty$.

2.2. Etude d'un cas particulier

2.2.1. Remarques

Soient

1º) $B(z)$ un produit de Blaschke fini avec zéros simples $b_1,\ldots b_s$

2º) δ un nombre réel $0 < \delta < 1$.

On considère l'ensemble $a(\delta)$ défini par

$$a(\delta) = \left\{ z \in \Delta \;/\; |B(z)| < \delta \right\}.$$

Alors, $a(\delta)$ est réunion d'un nombre fini de composantes connexes ouvertes disjointes, et, d'après le principe du maximum, chacune de ces composantes est aussi simplement connexe.

Soient $D_1,\ldots D_q$ ces composantes. Chaque zéro b_j appartient à l'une de ces composantes.

2.2.2. Problème

Les données étant celles du § 2.2.1, on suppose que l'on connait q fonctions $F_1, \dots F_q$, définies respectivement dans chaque composante $D_1, \dots D_q$ telles que pour tout $i = 1, 2, \dots q$, $\begin{cases} F_i \text{ soit holomorphe dans } D_i \\ |F_i(z)| \leqslant 1 \text{ pour tout } z \in D_i. \end{cases}$

On se propose de résoudre le problème d'interpolation défini dans le § 2.1, avec pour suite de points (z_k) la suite des zéros $b_1, \dots b_s$ de $B(z)$, et pour suite (w_k), la suite définie par $\omega_j = F_i(b_j)$ si le zéro b_j appartient à la composante D_i.

On se propose de plus de trouver une majoration de la norme minimale des fonctions réalisant l'interpolation, de telle façon que cette majoration ne dépende que de δ, et non de $B(z)$.

2.2.3. Expression de la norme minimale

. On a vu au paragraphe (2.1), que la norme minimale pour les fonctions réalisant l'interpolation était réalisée par une fonction $f_0 \in H^\infty$ et que :

$$\| f_0 \|_\infty = \sup_{\substack{f \in H^1 \\ \|f\|_1 \leqslant 1}} \left| \sum_{j=1}^{j=s} \frac{F_i(b_j) f(b_j)}{B'(b_j)} \right|$$

. Supposons construit dans $a(\delta) = D_1 \cup \dots \cup D_q$, un réseau de courbes simples rectifiables, entourant les zéros de $B(z)$, $\Gamma = \Gamma_1 \dots \Gamma_q$ où chaque Γ_i est contenu dans D_i.

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{F_i(b_j)f(b_j)}{B'(b_j)} = \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_i} \frac{F_i(z)f(z)}{B(z)}\, dz .$$

Puisque dans chaque D_i, $|F_i(z)| \leqslant 1$

$$\left| \sum_{j=1}^{s} \frac{F_i(b_j)f(b_j)}{B'(b_j)} \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{q} \int_{\Gamma_i} \frac{|f(z)|}{|B(z)|} |dz| .$$

. Supposons alors que le réseau Γ a pu être construit de telle façon que $|B(z)|$ "ne soit pas trop petit sur Γ". De manière précise, supposons qu'il existe une constante M, ne dépendant que de δ, telle que :

$$|B(z)| \geqslant M(\delta) > 0 \quad \text{pour tout} \quad z \in \Gamma$$

$$\| f_0 \|_\infty \leqslant \sup_{\substack{f \in H^1 \\ \|f\|_1 \leqslant 1}} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{M(\delta)} \int_\Gamma |f(z)| \, |dz|$$

$$\| f_0 \|_\infty \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{M(\delta)} \sup_{\substack{f \in H^1 \\ \|f\|_1 \leqslant 1}} \int |f(z)| \, d\mu(z)$$

où $\mu(z)$ est la mesure positive définie dans Δ, comme longueur d'arc le long du réseau Γ.

. L'on aura résolu le problème si l'on montre qu'on peut choisir Γ de telle façon que la mesure μ associée possède la propriété suivante :

il existe une constante $C(\delta)$, ne dépendant que de δ, telle que, pour toute fonction $f \in H^1$

$$\int |f(z)| \, d\mu(z) \leqslant C(\delta) \| f \|_1 .$$

2.3. Un problème de mesures

2.3.1. Compte tenu des objectifs dans le § (2.2), on se propose de caractériser les mesures positives μ, à support <u>contenu</u> dans Δ, telles qu'il existe une constante $C(\mu)$ vérifiant pour toute fonction $f \in H^1$:

$$\int_{\Delta} |f(z)| \, d\mu(z) \leqslant C(\mu) \, \| f \|_1 .$$

Carleson a démontré dans [2], le théorème suivant :

2.3.2. <u>Théorème</u> 2.

Soit $\mu(z)$ une mesure positive à support contenu dans Δ

a) Supposons qu'il existe une constante $C(\mu)$ telle que, pour tout ensemble S de la forme

$$S_\ell = \left\{ re^{i\theta} \mid r \geqslant 1 - \ell, \quad \theta_o \leqslant \theta \leqslant \theta_o + 2\pi\ell, \right\}$$

on ait :

$$\mu(S_\ell) \leqslant C \ell .$$

Alors il existe une constante absolue A_1 telle que

$$\int_{\Delta} |G(z)|^p \, d\mu(z) \leqslant A_1 C \, \| G \|_p^p$$

pour toute fonction $G \in H^p$ où $p \geqslant 1$.

b) Inversement si une inégalité

$$\int_{\Delta} |G(z)|^p d\mu(z) \leqslant C'(\mu) \, \| G \|_p^p \quad \text{est vérifiée}$$

pour toute fonction $G \in H^p$, $p \geqslant 1$, il existe une constante $C(\mu)$ telle que pour tout ensemble S_ℓ on ait

$$\mu(S_\ell) \leqslant C\ell .$$

. Ce théorème sera démontré au chapitre 3. On remarque qu'il contient comme cas particulier l'inégalité de Hilbert, obtenue en considérant comme mesure μ, la mesure de Lebesgue sur le segment $[0\ 1]$ de sorte qu'on peut prendre $C = 1$, et en appliquant le résultat a) au cas $p = 2$.

2.4. Résolution du problème du paragraphe [2.2.2.]

2.4.1. On a vu au paragraphe 2.2.3, qu'il suffisait, pour résoudre le problème posé au paragraphe 2.2.2, de résoudre la construction suivante :

Les données étant celles du paragraphe 2.2.1, construire un réseau de courbes simples réctifiables, entourant les zéros de $B(z)$. Soit Γ ce réseau, il doit être tel que

1º) $\Gamma \in a(\delta) = \{z \in \Delta / |B(z)| < \delta\}$

2º) $|B(z)|$ ne soit pas trop petit sur Γ : $|B(z)| \geqslant M(\delta)$ où M ne dépend pas de $B(z)$

3º) Γ satisfait une condition métrique dont la forme a pu être précisée par le théorème 2.

2.4.2. Remarque.

Pour réaliser les conditions 1º) et 2º) il suffirait de prendre pour Γ, les lignes de niveau $|B(z)| = \dfrac{\delta}{2}$ par exemple. Mais la condition 3º) ne serait pas nécessairement réalisée car on ne sait même pas si les longueurs des arcs de ces lignes de niveau admettent une borne uniforme par rapport à $B(z)$.

Carleson a démontré dans [2], le théorème suivant qui résoud le problème.

2.4.3. Théorème 3.

Il existe deux constantes absolues A_2, K positives telles que les propriétés suivantes soient réalisées :

Etant donnés 1º) un nombre réel ε, $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$

2º) un produit de Blaschke fini avec zéros simples $B(z)$

on définit $a(\varepsilon) = \{z \in \Delta / |B(z)| \leqslant \varepsilon\}$. On peut alors construire un nombre fini de parties ouvertes connexes deux à deux disjointes, contenant les zéros de $B(z)$, ces parties étant notées $\Omega_1, \ldots \Omega_p$, de telle façon que si on définit un réseau de courbe $\Gamma(\varepsilon, B)$ par

$\Gamma(\varepsilon, B) = \bigcup_j \partial\Omega_j$ où $\partial\Omega_j$ désigne la frontière de Ω_j, Γ possède les propriétés suivantes.

a) Γ est rectifiable

b) $\Gamma \in a(\varepsilon^K) - a(\varepsilon)$ $(0 < K < 1)$

c) Pour tout ensemble S_ℓ défini dans le théorème 2, le mesure définie comme "longueur d'arc" le long de Γ satisfait la condition

$$\mu(S_\ell) \leqslant A_2 \ \varepsilon^{-2} \ell .$$

Une conséquence immédiate de c), d'après le théorème 2, est que, il existe une constante absolue $A_3 = A_1 A_2$ telle que pour toute fonction $f \in H^1$:

$$\int_\Delta |f(z)| \, d\mu(z) \leqslant A_3 \ \varepsilon^{-2} \ \|f\|_1 .$$

Ce théorème qui constitue la partie la plus difficile de la démonstration sera établi plus loin.

2.2.4. Théorème 4.

. Enoncé du théorème.

Soit δ un nombre réel tel que $0 < \delta < \frac{1}{4}$.

Soit $B(z)$ un produit de Blaschke fini avec zéros simples $b_1, \dots b_s$.

Soient $D_1, \dots D_q$, les composantes simplement connexes de $a(\delta) = \{z \in \Delta / |B(z)| < \delta\}$.

Pour chaque $i = 1, 2, \dots q$, supposons donnée une fonction F_i définie dans D_i, holomorphe dans D_i, telle que

$$|F_i(z)| \leqslant 1 \quad \text{pour tout} \quad z \in D_i.$$

Alors il est possible de résoudre le problème d'interpolation

$$f_o(b_j) = F_i(b_j) \qquad \begin{cases} j = 1, 2, \dots s \\ b_j \quad D_i \end{cases}$$

par une fonction $f_o \in H^\infty$ telle que

$$\| f_o \|_\infty \leqslant A_4 \, \delta^{-A_5}$$

où A_4 et A_5 sont des constantes absolues positives.

. Démonstration.

Il suffit de choisir ε tel que $\varepsilon^K = \delta$ et de construire le réseau Γ associé après le théorème 3.

Les résultats du paragraphe 2.2.3 assurent qu'on peut réaliser l'interpolation par une fonction $f_o \in H^\infty$ telle que

$$\| f_o \|_\infty \leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \sup_{\substack{f \in H_1 \\ \|f\|_1 \leqslant 1}} \int_\Delta |f(z)| \, d\mu(z)$$

$$\| f_0 \|_\infty \leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot A_3 \, \varepsilon^{-2} \sup_{\substack{f \in H_1 \\ \|f\|_1 \leqslant 1}} \|f\|_1$$

d'après la propriété c) du théorème 3.

Finalement $\| f_0 \|_\infty \leqslant A_4 \, \delta^{-A_5}$ où $\begin{cases} A_4 = \dfrac{A_3}{2\pi} \\ A_5 = \dfrac{3}{K} . \end{cases}$

2.5. Théorème 5.

2.5.1. Enoncé du théorème 5.

Soient $f_1, \dots f_n$, n fonctions de H^∞, vérifiant la relation

(1) $$|f_1(z)| + \dots + |f_n(z)| \geqslant \delta > 0 \quad \text{pour tout } z \in \Delta .$$

δ étant un nombre réel strictement positif. On suppose de plus que $\delta < \frac{1}{2}$.

Alors l'idéal de H^∞ engendré par les fonctions $f_1, \dots f_n$ est H^∞.

Plus précisément, si $\| f_\nu \|_\infty \leqslant 1$ pour $\nu = 1, 2, \dots n$, il existe n fonctions $p_\nu(z) \in H^\infty$, $\nu = 1, 2, \dots n$, telle que :

$$\begin{cases} p_1 f_1 + \dots + p_n f_n = 1 \\ \| p_\nu \|_\infty \leqslant M(\delta , n) \quad \text{pour } \nu = 1, 2, \dots n \end{cases}$$

la constante M ne dépendant que de n et de δ et $M(\delta , n)$ étant une fonction continue de n et de δ.

Ce théorème établit que Δ est dense dans $\mathfrak{M}(H^\infty)$.

2.5.2. Démonstration du théorème 5.

Remarque : le théorème 5 donne une majoration des normes dans H^∞, des fonctions

p_ν réalisant la condition

$p_1 f_1 + \dots + f_n p_n = 1$, ce qui n'est pas nécessaire pour affirmer que Δ est dense dans $\mathfrak{M}(H^\infty)$. La démonstration établit simultanément les deux résultats, sans qu'il soit possible de les séparer.

<u>La démonstration se fait par récurrence sur</u> n

a) $n = 1$. Il suffit que $M(\delta, 1) \geqslant \frac{1}{\delta}$

b) <u>Hypothèse de récurrence</u>. On suppose que le théorème est démontré pour toute famille de $(n-1)$ fonctions de H^∞ satisfaisant une inégalité du type (1).

Les relations en cause étant invariantes par transformation conforme, sont valables sur n'importe quel domaine simplement connexe.

Soient $f_1 \dots f_n$, n fonctions de H^∞ satisfaisant la condition (1).

<u>b.1.</u> On suppose que $f_n(z)$ est un produit de Blaschke fini $B(z)$, à zéros simples $b_1, \dots b_s$.

Soient $D_1, \dots D_q$, les composantes simplement connexes de

$$a\left(\frac{\delta}{2}\right) = \left\{ z : |B(z)| < \frac{\delta}{2} \right\}.$$

Dans chaque D_j $\quad |f_1(z)| + \dots + |f_{n-1}(z)| \geqslant \frac{\delta}{2}$.

Dans chaque D_j, on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence :

Pour chaque $j = 1, 2, \dots q$, il existe $(n-1)$ fonctions $p_{j\nu}(z)$: $\nu = 1, 2, \dots q$, définies dans D_j, holomorphes dans D_j et telles que

. $\sum_{=1}^{n-1} p_{j\nu}(z) f_\nu(z) = 1$ pour tout $z \in D_j$

avec $\sup_{z \in D_j} |p_{j\nu}(z)| \leqslant M(\frac{\delta}{2}, n-1)$ pour $\nu = 1, 2, \ldots n-1.$

. Pour chaque $\nu = 1, 2, \ldots n-1,$ on applique les résultats du théorème 4.

Pour chaque $\nu = 1, 2, \ldots n-1,$ il existe une fonction $p_\nu \in H^\infty$ telle que

. $p_\nu(b_i) = p_{j\nu}(b_i)$ si le zéro b_i appartient à D_j

. $\| p_\nu \|_\infty \leqslant M(\frac{\delta}{2}, n-1) A_4 (\frac{\delta}{2})^{A_5}$.

. Définissons

$$p_n(z) = \frac{1 - \sum_{\nu=1}^{n-1} p_\nu(z) f_\nu(z)}{B(z)}$$

$p_n(z) \in H^\infty$ puisque le numérateur s'annule pour tous les zéros de $B(z)$.

De plus

$$\| p_n \|_\infty \leqslant n \sup_{\nu=1,2,\ldots n-1} \| p_\nu \|_\infty$$

soit

$$\begin{cases} \| p_n \|_\infty \leqslant n\, A_4\, M(\frac{\delta}{2}, n-1)(\frac{\delta}{2})^{-A_5} \\ p_1 f_1 + \ldots + p_n f_n = 1. \end{cases}$$

<u>b.2.</u> Cas général.

. Etant donné un nombre réel $\rho < 1,$ on remplace chaque fonction f_ν, $\nu = 1, 2,$ ... n par les fonctions

$$g_\nu^\rho(z) = f_\nu(\rho z).$$

Les $g_\nu^\rho(z)$ $\nu = 1, 2, \ldots n,$ vérifient encore l'inégalité 1 . Si on montre le théorème pour une suite de ρ tendant vers 1. on aura bien montré le théorème général, par la méthode d'extraction de sous suites convergentes, de suites normales de H^{∞}.

. On choisit ρ de telle façon que $g_n^{\rho}(z)$ n'ait pas de zéro sur le cercle $|z| = 1$. On omet dans la suite l'indice ρ.

On choisit $G_n(z)$ analytique et différente de zéro dans Δ par la résolution du problème de Dirichlet :

$$|G_n(e^{i\theta})| = \text{Min}\left[|g_n(e^{i\theta})|^{-1}, \frac{4}{\delta}\right].$$

Puisque $\|g_n\|_{\infty} \leqslant 1$, $|G_n(z)| \geqslant 1$ pour tout $z \in \Delta$, de sorte que les fonctions $g_1, \ldots g_n G_n$ satisfont l'inégalité (1). De plus $\|G_n\|_{\infty} \leqslant \frac{4}{\delta}$.

. Soit K le sous ensemble du cercle $|z| = 1$ défini par

$$K = \left\{z/|z| = 1, \quad |g_n(z)| < \frac{\delta}{4}\right\}.$$

. $G_n g_n$ est une fonction analytique dans Δ, continue dans le disque fermé $\bar{\Delta}$. Elle vaut 1 sur $\left\{z : |z| = 1\right\} - K$, elle est inférieure à 1 sur K.

On peut montrer alors [voir § 2.5.3], que $G_n g_n$ est limite uniforme sur le complémentaire de tout voisinage de $\bar{K}$ dans Δ, d'une suite de produits de Blaschke finis avec zéros simples.

On peut choisir une suite de produits de Blaschke B_k, réalisant cette approximation, de telle façon que

$$\lim_{k \to \infty}\left[\inf_{|z|<1}(|g_1(z)|+\ldots+|g_{n-1}(z)|+|B_k(z)|) \geqslant \frac{\delta}{2}\right].$$

On peut donc appliquer les résultats de b-1 à chaque B_k et construire pour chaque k les fonctions $p_{\nu k}(z)$, $\nu = 1, 2, \ldots n$ de sorte que :

$$\begin{cases} p_{1k}g_1 + \ldots + p_{\nu k}B_k = 1 \\ \limsup\limits_{k \to \infty} \| p_{\nu k} \|_\infty \leqslant n\, A_4\, M(\frac{\delta}{4}, n-1)(\frac{\delta}{4})^{-A_5} . \end{cases}$$

Par extraction pour chaque $\nu = 1, 2, \ldots n$ de sous-suites convergentes, on obtiendra n fonctions $p_1 \ldots p_n$ telles que

$$\begin{cases} p_1g_1 + \ldots + p_nG_ng_n = 1 \\ \| p_\nu \|_\infty \leqslant n\, A_4\, M(\frac{\delta}{4}, n-1)(\frac{\delta}{4})^{-A_5} . \end{cases}$$

Si on tient compte de l'inégalité

$\| G_n \| \leqslant \frac{4}{\delta}$, on obtient le résultat annoncé : il suffit de prendre

$$M(\delta, n) = n!\, A_4^n (\frac{2}{\delta})^{2^{2n}(nA_5+n)}.$$

2.5.3. <u>Un résultat d'approximation par des produits de Blaschke finis</u>

. <u>Définition</u>. On appelle fonction "inner", toute fonction analytique dans Δ telle que

. $|g(z)| \leqslant 1$ pour tout $z \in \Delta$

. $|g(z)| = 1$ presque partout sur le cercle $|z| = 1$.

. <u>Théorème</u>. Toute fonction "inner" est une limite uniforme dans Δ, d'une suite de produits de Blaschke, finis ou non.

Pour la démonstration de ce théorème, voir [5] page 175.

. <u>Proposition</u> 1.

Soit f une fonction de H^∞ qui soit continue sur le disque fermé

$\bar{\Delta} = \{z/|z| = 1\}$. On suppose que $|f(z)| \leqslant 1$ pour tout $z \in \bar{\Delta}$ et que $f(z)$ n'a pas de zéro dans $\bar{\Delta}$.

Soit K l'ensemble défini par $K = \{z/|z| = 1, \ |f(z)| < 1\}$. Alors f est limite uniforme, en dehors de tout voisinage de $\bar{K}$ dans Δ, d'une suite de fonctions "inner".

Démonstration :

Puisque pour tout $z \in \bar{\Delta}$ $|f(z)| > 0$, on peut trouver une fonction $h(z)$, définie et continue dans $\bar{\Delta}$, analytique dans Δ, telle que :

$$f(z) = e^{-h(z)}$$

$h(z) = u(z) + iv(z)$ où u et v sont deux fonctions à valeurs réelles, définies et continues dans $\bar{\Delta}$; harmoniques dans Δ ; puisque $|f(z)| \leqslant 1$, la fonction u est positive ou nulle, elle peut s'écrire comme intégrale de Poisson, pour $z \in \Delta$ sous la forme

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) g(t) dt$$

où $P_r(\theta - t)$ désigne le noyau de Poisson, $g(t)$ une fonction continue positive ou nulle sur le cercle $|z| = 1$.

Supposons que $f(0) > 0$. Si ce n'est pas le cas, la fonction λf où λ sera convenablement choisi, de module 1, répondra à la question.

Alors $v(0) = 0$, ou bien on pourra se ramener à ce cas en changeant de détermination de $\log f$ et, pour tout $z \in \Delta$ on peut écrire

$$h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \, g(\theta) d\theta \, .$$

Soit K' le complémentaire de K sur le cercle $|z| = 1$. En tout point de K' $g(\theta) = 0$.

Considérons la mesure μ définie sur le cercle $|z| = 1$ par la densité $d\mu(\theta) = g(\theta)d\theta.\frac{1}{2\pi}$. Cette mesure est positive ou nulle et a son support dans $\bar{K}$ adhérence de K dans le cercle. On sait qu'une telle mesure est limite faible d'une suite de mesures μ_n, qu'on peut supposer positives ou nulles, ayant pour support un nombre fini de points, le support de chaque μ_n étant contenu dans $\bar{K}$. Ainsi, pour chaque z fixé dans Δ la suite $h_n(z) = \int_{\bar{K}} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \, d\mu_n(\theta)$, converge quand n tend vers l'infini vers

$$h(z) = \int_{\bar{K}} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \, d\mu(\theta).$$

La convergence est uniforme par rapport à z en dehors de tout voisinage de $\bar{K}$ dans Δ, puisque, en dehors d'un tel voisinage, il existe un nombre réel $\eta > 0$ tel que $|e^{i\theta} - z| > \eta$ pour $\theta \in \bar{K}$.

. Chaque mesure μ_n ayant pour support un nombre fini de points contenus dans $\bar{K}$, pour tout point θ_o distinct du support de μ_n, $h_n(z)$ tend vers zéro quand z tend vers $e^{i\theta_o}$, $z \in \Delta$.

En particulier, $h_n(z) = 0$ presque partout sur le cercle $|z| = 1$.

. Chaque μ_n étant de plus positive ou nulle, chaque fonction $e^{-h_n(z)}$ est une fonction "inner".

. Les fonctions $e^{-h_n(z)}$ convergent vers $e^{-h(z)} = f(z)$ uniformément en dehors de tout voisinage de K dans Δ, puisqu'il en est ainsi des fonctions $h_n(z)$ et que ces fonctions ont une partie réelle positive ou nulle.

. Proposition 2.

Sous les mêmes hypothèses que celles de la proposition 1, f est limite uniforme, en dehors de tout voisinage de K, d'une suite de produits de Blaschke finis avec zéros simples.

Démonstration.

. Le théorème 6 affirme que toute fonction "inner" est limite uniforme sur Δ d'une suite de produits de Blaschke.

. Etant donné un produit de Blaschke infini $B(z)$, si Z désigne les points du cercle $|z| = 1$, qui sont points d'accumulation de ses zéros, alors $B(z)$ est limite uniforme, de la suite des produits de Blaschke finis qui le composent, sur le complémentaire de tout voisinage de Z.

. Or chaque fonction $e^{-h_n(z)}$ de la démonstration précédente vaut 1 sur K'. Etant donné un voisinage V de K dans Δ et son complémentaire V' dans Δ, on peut choisir les produits de Blaschke dont $e^{-h_n(z)}$ est limite uniforme dans V', de telle façon que, pour chaque produit de Blaschke, l'ensemble Z associé soit contenu dans V.

. Ainsi $e^{-h_n(z)}$ sera limite uniforme, sur le complémentaire de tout voisinage de K dans Δ, d'une suite de produits de Blaschke finis.

. On se ramène facilement au cas de produits de Blaschke finis avec zéros simples, en remplaçant éventuellement un zéro multiple d'ordre p, b_p, par p zéros répartis sur un cercle de centre b_p, de rayon convenable.

3.- Démonstration du théorème 2

La démonstration de ce théorème est considérablement simplifiée grâce à une remarque de M. Stein.

3.1. Théorème préliminaire

3.1.1. Notations. Rappels de quelques résultats

. Soit f une fonction de $L^p(\mathbb{R})$

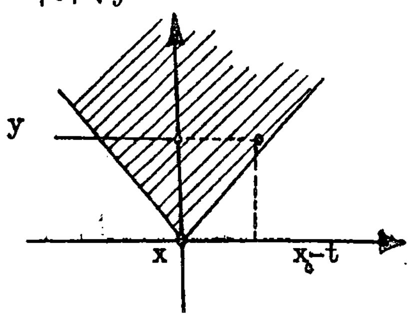
. On désigne par $u(x,y)$ l'intégrale de Poisson de la fonction f, c'est à dire la fonction définie dans le demi-plan supérieur $\mathbb{R}^2_+$; $\{(x,y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^+\}$, par la relation

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{y^2 + (x-t)^2}\, f(t)dt$$

. On désigne par $M(f)$, la fonction maximale de f au sens de Hardy et Littlewood définie dans $\mathbb{R}$ par la relation

$$M(f)(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h} |f(t)|\,dt \ .$$

. On pose $\hat{f}(x) = \sup\limits_{|t|<y} |u(x-t\ ,\ y)|$ pour tout x réel.



. On rappelle qu'il existe une constante absolue A telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

(1) $$\hat{f}(x) \leqslant A\, M(f)(x).$$

. En particulier, si p est un entier, $p > 1$, le théorème de Hardy et Littlewood donne :

(1') $$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)^p dx \leqslant A^p \int_{\mathbb{R}} (M(f)(x))^p dx \leqslant A'(p) \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx$$

où $A'(p)$ désigne une constante ne dépendant que de p.

. Soit f une fonction mesurable définie sur un espace de mesure (Ω, μ).

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^+$ soit

$$E_\lambda = \left\{ \omega \in \Omega / |f(\omega)| > \lambda \right\}$$

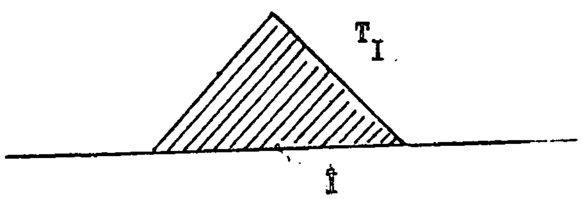
et $m(\lambda)$ l'application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par

$$m(\lambda) = \mu(E_\lambda).$$

Pour tout entier $p \geqslant 1$ on a la relation

(2) $$\int_\Omega |f(\omega)|^p d\mu(\omega) = p \int_0^\infty \lambda^{p-1}\, m(\lambda) d\lambda.$$

. On appelle T_I, un triangle rectangle isocèle contenu dans $\mathbb{R}^2_+$ dont l'hypoténuse est un intervalle I de $\mathbb{R}$: (voir figure)



3.1.2. Hypothèse

Soit μ une mesure non négative définie sur $\mathbb{R}^2_+$ telle que pour tout triangle T_I

on ait la relation

$$(3) \qquad \boxed{\mu(T_I) \leqslant c\ m(I)}$$

où m désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

3.1.3. <u>Enoncé du théorème</u>.

Soit μ une mesure non négative portée par $\mathbb{R}^2_+$, vérifiant la relation (3) pour tout triangle rectangle isocèle T_I contenu dans $\mathbb{R}^2_+$ dont l'hypothénuse est portée par l'axe réel.

Pour tout entier p, tel que $p > 1$, il existe une constante $A'(p)$, ne dépendant que de p, telle que pour toute fonction f de $L^p(\mathbb{R})$ on ait la relation

$$(4) \qquad \int_{\mathbb{R}^2_+} |u(x,y)|^p d\mu(x,y) \leqslant c\ A'(p) \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx.$$

3.1.4. <u>Démonstration</u>

. Cette partie est due à M. Stein :

. Soit φ l'application de $\mathbb{R}^2_+$ dans l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$ définie par

$$(x,y) \longrightarrow [x-y\ ;\ x+y]$$

$$. \ E_\lambda = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ / |u(x,y)| > \lambda\right\}$$

$$\tilde{E}_\lambda = \left\{x \in \mathbb{R} / \tilde{f}(x) > \lambda\right\}.$$

Si le point (x,y) appartient à E_λ, l'intervalle $\varphi(x,y)$ est contenu dans $\tilde{E}_\lambda$.

Or l'ensemble $\tilde{E}_\lambda$ de $\mathbb{R}$ peut s'écrire

$$\tilde{E}_\lambda = \bigcup_j I_j$$

les I_j étant les composantes connexes de $\tilde{E}_\lambda$, c'est à dire une réunion dénombrable d'intervalles disjoints

$$E_\lambda \subset \varphi^{-1}\left[\bigcup_j \left(\bigcup_{I \subset I_j} I\right)\right] = \bigcup_j T_{I_j}$$

où T_{I_j} est le triangle rectangle isocèle de $\mathbb{R}^2_+$ d'hypothénuse I_j

$$\mu(E_\lambda) \leqslant \sum \mu(T_{I_j}).$$

D'après (3) $\quad \mu(T_{I_j}) \leqslant c\, m(I_j)$

$$\mu(E_\lambda) \leqslant c \sum m(I_j) = c\, m(\tilde{E}_\lambda).$$

D'après (2) $$\int |u(x,y)|^p d\mu \leqslant c \int_{\mathbb{R}} |\widetilde{f(x)}|^p dx$$

et d'après (1'), si $p > 1$,

$$(4) \qquad \int |u(x,y)|^p d\mu \leqslant c\, A'(p) \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx.$$

Ceci démontre le théorème suivant :

3.1.5. Théorème réciproque

Soit μ une mesure non négative portée par $\mathbb{R}^2_+$. On suppose qu'il existe un entier p, $p \geqslant 1$, tel que, pour toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R})$ on ait la relation :

$$(4) \qquad \int_{\mathbb{R}^2_+} |u(x,y)|^p d\mu(x,y) \leqslant A(\mu) \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx$$

pour une certaine constante $A(\mu)$.

Alors la mesure μ satisfait une condition du type (3) pour une constante $c(\mu, p)$ convenable.

Démonstration. Soit T_I un triangle rectangle isocèle dont l'hypothènuse I a pour longueur 2ℓ.

Soit f la fonction caractéristique de l'intervalle de même centre que I, de longueur double.

En un point (x,y) de $\mathbb{R}^2_+$, tel que $x \in I$ et $y > 0$

$$u(x,y) \geqslant \frac{1}{\pi}\int_{x-\ell}^{x+\ell} \frac{y}{y^2 + (x-t)^2}\, dt = \frac{2}{\pi} \operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{\ell}{y}\right).$$

En tout point (x,y) de T_I

$$u(x,y) \geqslant \frac{1}{2}$$

or $f \in L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \geqslant 1$; de sorte que, d'après (4)

$$\int_{\mathbb{R}^2_+} |u(x,y)|^p d\mu \leqslant A(\mu).4\ell$$

$$\int_{\mathbb{R}^2_+} |u(x,y)|^p d\mu \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^p \mu(T_I)$$

$$\mu(T_I) \leqslant 2^{p+1} A(\mu) m(I).$$

C'est bien le résultat annoncé avec $c(\mu\,;p) = 2^{p+1} A(\mu)$.

<u>On a ainsi obtenu une caractérisation des mesures positives μ satisfaisant une relation du type</u> (4).

3.1.6. <u>Cas du disque</u>

Les démonstrations faites se transportent mot pour mot dans le cas du disque Δ ; tous les éléments intervenant dans (3.1.1) sont en effet définis dans ce cas : il suffit de définir, pour $\theta \in [0\,,\,2\pi]$ et $f \in L^p[0\,,\,2\pi]$

$$\tilde{f}(\theta) = \sup_{|t| < \pi(1-r)} |u(\theta - t\,;\,r)|$$

où $u(\theta\,;\,r)$ est l'intégrale de Poisson de f, définie sur le disque Δ par

$$u(\theta\ ,\ r) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2}\, f(t)dt\ .$$

Les triangles T_I sont remplacés par des ensembles :

$$T_\ell(\theta_o) = \left\{r,\theta / |\theta - \theta_o| < \pi\ell\ ,\quad 0 \leqslant 1-r \leqslant \ell - \frac{|\theta - \theta_o|}{\pi}\right\}$$

où $\theta_o \in [0,2\pi]$ et $0 \leqslant \ell \leqslant 1$

La condition (3) est remplacée par la condition

(3') $$\mu(T_\ell(\theta_o)) \leqslant c\,\ell .$$

<u>On peut alors énoncer le théorème parallèle</u>

Soit μ une mesure non négative portée par le disque Δ ; satisfaisant à la relation (3') pour tout ensemble T_ℓ.

Pour tout entier p, tel que $p > 1$, il existe une constante $A''(p)$, ne dépendant que de p, telle que, pour toute fonction $f \in L^p$ (cercle), on ait la relation

(4') $$\int_\Delta |u(r,\theta)|^p d\mu(r,\theta) \leqslant c\ A''(p)\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\theta)|^p\, d\theta\ .$$

<u>Théorème réciproque</u>

Soit μ une mesure non négative portée par le disque. On suppose qu'il existe un entier p, $p \geqslant 1$, tel que, pour toute fonction $f \in L^p$ (cercle), on ait la relation

(4') $$\int_\Delta |u(r,\theta)|^p d\mu(r,\theta) \leqslant A'''(\mu)\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\theta)|^p\, d\theta.$$

Alors μ satisfait une condition (3') pour une constante $c(\mu)$ convenable.

<u>Démonstration du théorème réciproque</u>

Etant donné un "triangle" $T_\ell(\theta_o)$, si a désigne le point du disque de coordonnées polaires $(1-\ell\ ,\ \theta_o)$, la fonction

$$g(z) = \left[\frac{1 - |a|^2}{(1 - z\,\bar{a})^2}\right]^{1/p}$$

est une fonction analytique dans le disque, qui représente l'intégrale de Poisson de la fonction

$$f(\theta) = \left[\frac{1 - |a|^2}{(1 - e^{i\theta}\bar{a})^2}\right]^{1/p}$$

. $f(\theta) \in L^p$ et $|f(\theta)|^p$ n'est autre que le noyau de Poisson au point $(1-\ell, \theta_0)$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^p \, d\theta = 1 \, .$$

. En tout point $z \in T_\ell(\theta_0)$, $|g(z)|^p \geq \frac{1}{4\ell}$ de sorte que, d'après la relation (4')

$$\mu(T_\ell) \leq 4\ell A'''(\mu) = c(\mu)\ell$$

avec $$c(\mu) = 4\, A'''(\mu).$$

Remarque.- Il suffit que la relation (3') soit vérifiée pour les "triangles" $T_\ell(\theta_0)$ ayant pour bases des intervalles dyadiques de $(0 \, , \, 2\pi)$, car chaque intervalle I_j de la partie (3.1.3) de la démonstration peut être inclus dans un intervalle dyadique de longueur au plus quatre fois plus grande.

On obtient alors le résultat, en remplaçant la constante c par $4c$.

3.2. Démonstration du théorème 2

Le théorème se déduit immédiatement du théorème précédent, dans le cas du disque. Il suffit, pour la partie a) du théorème 2, de remarquer que

1º) la condition sur la mesure μ du théorème 2 est équivalente à une condition (3') comme le montrent les relations.

$$T_{\ell/2}(\theta_o) \subset S_\ell(\theta_o) \subset T_{2\ell}(\theta_o) .$$

2º) il suffit de démontrer le théorème 2 pour des fonctions G ne s'annulant pas dans Δ ; car en divisant par le produit de Blaschke associé, on augmente le premier nombre, de l'inégalité à démontrer, sans changer le second.

3º) il suffit d'étudier le cas $p = 2$ auquel on peut se ramener en considérant la fonction

$$G'(z) = G^{p/2}$$ qui appartient à H^2 si $G(z)$ appartient à H^p et ne s'annule pas dans Δ.

4º) il suffit de montrer la relation (4') pour une fonction f positive ou nulle, f appartenant à L^2 du cercle.

La démonstration de la partie b) du théorème 2 se fait de la même manière que celle du théorème réciproque dans 3.1.6.

4. Démonstration du théorème 3

4.1. Constructions préliminaires

Etant donnés

1º) un produit de Blaschke fini, avec zéros simples $B(z)$

2º) un nombre réel ε tel que $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$

3º) une constante absolue K astreinte provisoirement à vérifier la seule condition que $2\varepsilon < \varepsilon^K \leqslant 1$ pour tout

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{4}.$$

4º) un entier naturel N,

On effectue les constructions suivantes

4.1.1. On construit les ensembles

$$a(\varepsilon) = \left\{ z \in \Delta / |B(z)| \leqslant \varepsilon \right\}$$

$$\beta = \left\{ z \in \Delta / |B(z)| > \varepsilon^K \right\}.$$

4.1.2. Découpage de Δ

On découpe Δ en "carrés" élémentaires $r_{\nu n}$:

$$r_{\nu n} = \left\{ z \in \Delta / \frac{1}{2^{n+1}} \leqslant 1 - |z| \leqslant \frac{1}{2^n} , \frac{\nu . 2\pi}{2^{n+1}} \leqslant \arg z \leqslant \frac{(\nu+1) 2\pi}{2^{n+1}} \right.$$

$$\text{où} \begin{cases} n = 0, 1, \dots \\ \quad = 0, 1, \dots 2^{n+1} - 1 \end{cases}$$

4.1.3. <u>Découpage de</u> r_n

Chaque $r_{\gamma n}$ est à son tour découpé en 2^{2N} "carrés" en divisant en 2^N intervalles égaux l'intervalle de variation de $|z|$ ainsi que l'intervalle de variation de arg z, quand z appartient à $r_{\gamma n}$.

Les carrés obtenus sont notés $r_{\gamma n}(i)$ où $i = 1, 2..., 2^{2N}$.

4.1.4. <u>On construit l'ensemble</u>

$\alpha = \bigcup r_{\gamma n}(i)$ la réunion étant étendue à tous les $r_{\gamma n}(i)$ tels que $r_{\gamma n}(i) \cap a(\varepsilon) \neq \emptyset$

4.1.5. <u>Choix de l'entier</u> N

. Ce choix est déterminé de façon à réaliser la condition

$$a(\varepsilon) \subset \alpha \subset a(2\varepsilon). \text{ Ainsi } \alpha \cap \beta = \emptyset.$$

L'inclusion $a(\varepsilon) \subset \alpha$ est réalisée quel que soit N.

. L'oscillation de $|B(z)|$ sur un ensemble $r_{\gamma n}(i)$ peut être rendue inférieure à ε. On peut montrer en effet l'inégalité $|B'(z)| \leqslant \frac{1}{1-|z|}$ pour tout $z \in \Delta$, par des majorations simples effectuées sur l'expression intégrale de Cauchy $B'(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma} \frac{A(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^2}$, en choisissant pour Γ par exemple un cercle de centre z et de rayon $1 - |z|$.

Or deux points z_1 et z_2 éléments d'un même ensemble $r_{\gamma n}(i)$ sont tels que

$$|z_1 - z_2| \leqslant \frac{3\pi}{2^{n+1+N}}$$

$$|B(z_1) - B(z_2)| \leqslant \frac{3\pi}{2^N}.$$

La condition $\alpha \subset a(2\varepsilon)$ sera donc réalisée dès que

$$\frac{3\pi}{2^N} < \varepsilon.$$

. Remarque. Cette condition ne dépend pas du produit de Blaschke $B(z)$, choisi, mais seulement de ε.

On choisira N le plus petit possible satisfaisant cette inégalité. Dans la suite on aura donc simultanément les inégalités

$$\boxed{\frac{3\pi}{2^N} < \varepsilon \quad \text{et} \quad \frac{3\pi}{2^{N-1}} \geqslant \varepsilon \,.}$$

4.2. Construction d'un premier réseau de courbes dans Δ

Ce réseau fera intervenir les données $B(z)$, ε, K; N est choisi comme indiqué ci-dessus.

Ce réseau sera noté : $P\left[\varepsilon, B, K\right]$. Il est constitué par des lignes de subdivision du réseau des $r_{\gamma n}(i)$ P comprendra les éléments suivants : [voir figure]

1º) Le cercle $|z| = 1$

2º) Dans r_{10}, r_{20}, toutes les frontières des "carrés" $r_{\gamma o}(i)$

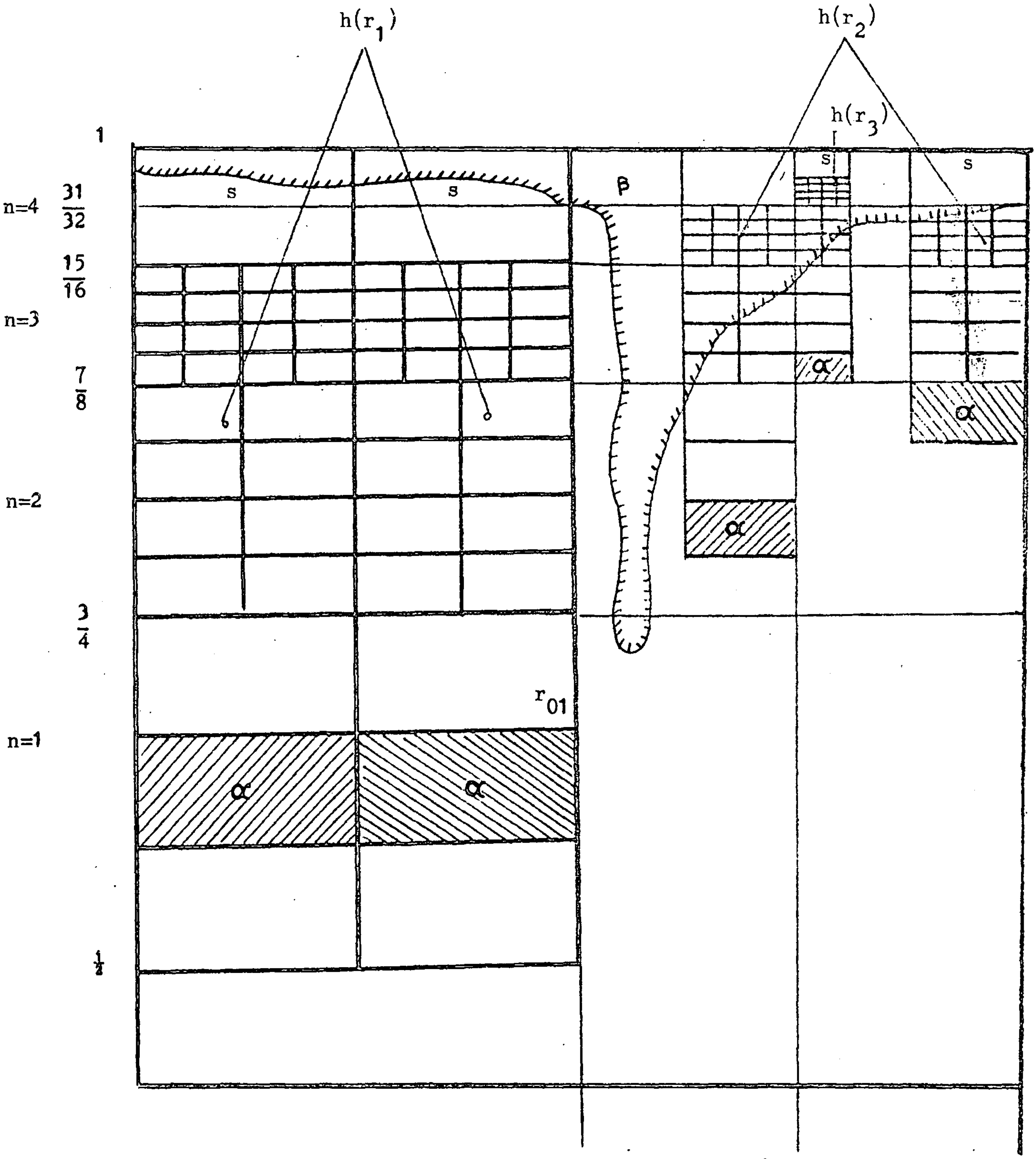
3º) Pour le reste, chaque quadrant sera traité de la même manière. Nous indiquons la construction pour le premier quadrant. Elle comprend deux étapes notées I et II.

. Etape I

Premier cas : Il existe un indice i tel que $r_{01}(i) \cap \beta \neq \emptyset$.

. Les arcs $\left\{ z / |z| = \frac{1}{2},\ 0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{2} \right\}$

$\left\{ z / \frac{1}{2} \leqslant |z| \leqslant 1,\ \arg z = 0 \right\}$



Construction de P, étape I, dans le cas où r_{01}, rencontre

cas où N = 2

. $\left\{z/\tfrac{1}{2} \leqslant |z| \leqslant 1, \quad \arg z = \frac{\pi}{2}\right\}$, <u>appartiennent</u> <u>à</u> P

. Pour tout $r_{01}(i)$ tel que $r_{01}(i) \subset \alpha$, si on pose

$r_{01}(i) = r_1 = \left\{z/c_1 \leqslant |z| \leqslant d_1 \; ; \; u_1 \leqslant \arg z \leqslant v_1\right\}$ on construit le rectangle

$$h(r_1) = \left\{z/|z| \geqslant c_1, \quad u_1 \leqslant \arg z \leqslant v_1\right\}.$$

- La frontière de $h(r_1)$ ainsi que les frontières de tous les $r_{\nu n}(i)$ contenus dans $h(r_1)$ telsque $n \leqslant N+1$; <u>appartiennent</u> <u>à</u> P.

. Pour tout $r_{02}(i)$ ou $r_{12}(i)$ noté symboliquement

$r_2 = \left\{z/c_2 \leqslant |z| \leqslant d_2 \; ; \; u_2 \leqslant \arg z \leqslant v_2\right\}$, tel que $r_2 \subset \alpha$; et r_2 n'appartient à aucun des rectangles $h(r_1)$, on construit le rectangle

$$h(r_2) = \left\{z/|z| \geqslant c_2 \quad u_2 \leqslant \arg z \leqslant v_2.\right\}$$

- La frontière de $h(r_2)$ ainsi que les frontières de tous les $r_{\nu n}(i)$ contenus dans $h(r_2)$ tels que $n \leqslant N+2$ <u>appartiennent</u> <u>à</u> P

. Ainsi de suite, pour tout

$$r_{\nu m}(i) \subset \left\{z/\tfrac{1}{2} \leqslant |z| \leqslant 1 \; ; \quad 0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$$

noté $r_m = \left\{z/c_m \leqslant |z| \leqslant dm \; ; \; u_m \leqslant \arg z \leqslant v_m\right\}$ tel que r_m appartient à α et r_m n'appartient à aucun des rectangles $h(r_j)$ ou $j < m$, on construit le rectangle

$$h(r_m) = \left\{z \; ; \; |z| \geqslant c_m \quad u_m \leqslant \arg z \leqslant v_m\right\}.$$

- La frontière de $h(r_m)$, toutes les frontières des $r_{\nu n}(i)$ contenues dans $h(r_m)$ tels que $n \leqslant N + m$ <u>appartiennent</u> <u>à</u> P.

$B(z)$ n'ayant qu'un nombre fini de zéros, on ne trouvera plus d'ensembles $r_{\gamma k}(i)$ appartenant à α et n'appartenant à aucun des $h(r_j)$ $j < k$ au bout d'un nombre fini d'opérations. De sorte que le processus s'arrête.

. <u>Deuxième cas</u> $r_{01} \cap \beta = \emptyset$.

Il n'y aura pas d'éléments de P dans r_{01}.

On traite alors séparément chaque ensemble r_{02}, r_{12} de la même manière.
Considérons par exemple r_{02} :

– Si $r_{02} \cap \beta \neq \emptyset$ on applique dans r_{02} les mêmes règles de construction que dans le <u>premier cas</u>

– Si $r_{02} \cap \beta = \emptyset$, il n'y aura pas d'élément de P dans r_{02}. On traite alors séparément chaque ensemble r_{03}, r_{13} de la même manière.

Pour n suffisamment grand, tous les $r_{\gamma n}$ sont contenus dans β ; après un nombre fini d'opérations, on obtient donc nécessairement des ensembles $r_{\gamma n}$ rencontrant β.

. <u>Etape</u> II

Dans l'étape I décrite ci-dessus, nous avons obtenu un nombre fini d'ensembles disjoints $h(r_k)$. Nous avons inclus dans P toutes les lignes frontières de $r_{\gamma n}(i)$ intérieurs à $h(r_k)$ sauf ceux qui sont situés dans des ensembles du type s contenus dans $h(r_k)$

$$s = \left\{ z / 1 - \frac{1}{2^n} \leqslant |z| \leqslant 1 \ ; \ \frac{2\pi t}{2^n} \leqslant \arg z \leqslant \frac{2\pi(t+1)}{2^n} \right\}$$

où nécessairement $n \geqslant N+1$.

Des ensembles s distincts interceptent sur le cercle $|z| = 1$ des arcs d'intérieurs disjoints.

Ces ensembles s sont appelés <u>ensembles de la première génération</u>.

Dans chaque s, on applique les règles de construction de la première étape à chaque ensemble $r_{2t,n}$, $r_{2t+1,n}$ pour obtenir de nouveaux éléments de P.

On obtient alors des ensembles s de la seconde génération. La construction se poursuit jusqu'à ce que les ensembles s obtenus ne contiennent plus d'éléments de α, ce qui arrive nécessairement au bout d'un nombre fini d'opérations.

<u>Nota</u>

On a obtenu ainsi un premier réseau de courbes. $P[\varepsilon, B, K]$. Ce n'est pas le réseau difinitif car il ne possède pas nécessairement les propriétés a) b) c) du théorème 3.

Toutefois, <u>ce réseau est rectifiable</u>. Le réseau définitif s'obtiendra comme une partie de P satisfaisant les conditions a) b) du théorème.

On verra ensuite que P possède la propriété c) pour un choix convenable de la constante K. Il en sera de même, a fortiori, pour le réseau extrait, de sorte que le théorème sera démontré.

4.3. <u>Construction du réseau</u> $\Gamma(B, \varepsilon, K)$

4.3.1. <u>Le réseau</u> P <u>sépare les ensembles</u> α <u>et</u> β

On entend par là que toute courbe continue joignant un point de α à un point de β, rencontre nécessairement P.

. Les ensembles s sont bien isolés par P du reste de Δ.

. Etant donné que la construction à l'intérieur d'un ensemble s est la même que la première construction, étape I, il suffit de montrer la propriété de séparation pour deux points de α et β qui ne sont situés dans aucun ensemble du type s

. Si r_{01} rencontre β, on a bien isolé r_{01} de l'ensemble des points z tels que $\frac{\pi}{2} \leqslant \arg z \leqslant 2\pi$ et entouré le sous ensemble de α contenu dans $0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}$ (mais dans aucun ensemble s), par des lignes de P.

4.3.2.

On modifie P de la façon suivante : P^* est obtenu à partir de P, en supprimant toutes les lignes qui sont intérieures à α ou à β.

. P^* <u>sépare également</u> α <u>et</u> β :

En effet, si γ désigne une courbe continue admettant la représentation

$$\begin{cases} z = z(t) & \text{où} \quad z(0) \in \alpha \\ 0 \leqslant t \leqslant 1 & \phantom{\text{où}} \quad z(1) \in \beta \end{cases}$$

et si on suppose que γ ne rencontre pas P^*, alors la courbe γ_1 admettant le représentation

$$\begin{cases} z = z(t) \\ t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \end{cases} \qquad \text{où} \quad \begin{array}{l} t_0 = \max \{t / z(t) \in \alpha\} \\ t_1 = \min \{t / z(t) \in \beta\} \end{array}$$

relie alors α et β sans rencontrer P.

$$P^* \subset a(\varepsilon^K) - a(\varepsilon).$$

4.3.1. Le réseau Γ

Soit p un point de α. Considérons l'ensemble de tous les points z de Δ qui peuvent être joints à p par une courbe continue ne rencontrant pas P^*. La réunion de ces points est un ensemble ouvert connexe de Δ noté $\Omega(p)$. $\Omega(p)$ contient p ainsi que l'intérieur de l'ensemble $r_n(i)$ auquel p appartient.

Si $q \in \Omega(p)$, alors $\Omega(p) = \Omega(q)$

et si $q \notin \Omega(p)$ $\qquad \Omega(p) \cap \Omega(q) = \emptyset$.

$\Omega(p)$ est de plus contenu dans le complémentaire de β. Il existe donc un nombre fini de telles régions disjointes

$$\Omega_1, \ldots \Omega_p \quad \text{telles que} \quad \Omega_j \cap \beta = \emptyset.$$

Les Ω_j contiennent les zéros de $B(z)$.

On définit $\Gamma = \bigcup_j \partial \Omega_j$ $\qquad \partial \Omega_j$ désignant la frontière de Ω_j.

Par construction $\Gamma \subset P^*$ de sorte que les propriétés a), b) du théorème 3 sont réalisées.

4.4. Le réseau $P[B, \varepsilon, K]$ possède la propriété c) du théorème 3, pour une constante absolue K bien choisie

4.4.1. Remarque. D'après la démonstration du théorème 2, il suffit de montrer que la propriété c) du théorème 3 est réalisée pour tout sous-ensemble σ de Δ de la forme

$$\sigma_{\nu n} = \left\{ z \in \Delta / 1 - \frac{1}{2^n} \leqslant |z| ; \quad \frac{2\pi\nu}{2^n} \leqslant \arg z \leqslant \frac{2\pi(\nu+1)}{2^n} \right\}.$$

On considère désormais un ensemble de ce type. On appelle $\ell = \dfrac{1}{2^n}$ la longueur de l'arc intercepté sur le cercle $|z| = 1$ par cet ensemble.

4.4.2. Etudes des lignes de P intérieures à σ construites d'après les règles indiquées dans 4.2. 1º), 2º) et 3º) étape I

. Pour 3º) étape I, les ensembles $h(r)$ donnant naissance dans cette étape à des éléments de P ont leur base

$\left\{\begin{array}{l}\text{soit dans } \sigma \\ \text{soit à l'extérieur de } \sigma \text{, cette circonstance pouvant se produire pour } 2^{N-1}\end{array}\right.$

ensemble $h(r)$ au plus.

. Les ensembles $h(r)$ interceptent sur le cercle $|z| = 1$ des arcs d'intérieurs disjoints :

$$\sum_r \text{ longueurs d'arcs de } h(r) \cap \sigma \leqslant \ell .$$

. Les longueurs des côtés des $h(r)$ intervenant dans $P \cap \sigma$ sont majorées par

$\left\{\begin{array}{l}\text{. longueur d'arc de } h(r) \text{ pour les ensembles } h(r) \text{ ayant leur base dans } \sigma \\ .\ \ell \text{ pour ceux qui ont leur base hors de } \sigma .\end{array}\right.$

. Les éléments de P construits à l'intérieur de $h(r) \cap \sigma$ sont majorés par $2N2^N$ longueur d'arc de $[h(r) \cap \sigma]$.

Finalement, les éléments de $P \cap \sigma$ construits dans cette étape ont une longueur totale majorée par

$$\ell . 2^{2N} + 2^{N-1} \ell + 4\ell.$$

. Si on tient compte également des constructions effectuées dans 1º) et 2º), et du choix de N fait au paragraphe 4.1.4., on a montré que la somme des longueurs des lignes de P construites à l'intérieur de σ dans les étapes indiquées est majorée par

$$A\, 2^{2N} \ell \leqslant A\, \varepsilon^{-2} \ell = c\,\ell$$

où A désigne une constante absolue.

4.4.3. Etude d'un ensemble contenant des éléments de P construits lors d'une génération d'ordre supérieur : étape II

Il suffit de considérer un ensemble $\sigma_{\nu n}$ à l'intérieur duquel on effectue l'étape I, avec $n \geqslant N+1$.

Il existe donc un point $z_0 = \sqrt{\rho}\, e^{i\theta_0}$ appartenant à ρ tel que

$$\begin{cases} 1 - \dfrac{1}{2^n} \leqslant \sqrt{\rho} \leqslant 1 - \dfrac{1}{2^{n+1}} \\ \theta_0 \text{ appartenant à l'arc intercepté par } \sigma_{\nu n}. \end{cases}$$

. Les ensembles $r_{\rho k}(i)$ qui sont les bases des ensembles $h(r)$ construits à cette étape rencontrent tous la couronne définie par les points z de Δ tels que $|z| > \rho$. En effet tout ensemble de ce type possède des points z tels que

$$|z| \geqslant 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1+N}}$$

or $$\rho \leqslant \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1+n+1}}$$

de sorte que

$$|z| > \rho \qquad \text{puisque} \quad n \geqslant N+1 .$$

. Soient $\ell_1, \dots \ell_t$ les longueurs des arcs interceptés sur le cercle $|z| = 1$, par ces ensembles $r_{\rho k}(i)$ notés $r_1, \dots r_t$ qui sont les bases des ensembles $h(r)$. Ces nombres $\ell_1, \dots \ell_t$ déterminent la grandeur des ensembles s de la génération suivante à l'intérieur de σ.

. Posons

$$E_1 = \left\{z / 1 > |z| > \rho\right\} \cap \left\{r_1 \cup \dots \cup r_t\right\}.$$

. z_o n'appartient pas à E_1 puisque E_1 est contenu dans α et que z_o appartient à β.

. On peut choisir une constante absolue positive λ de telle façon que le secteur $|\theta - \theta_o| < \lambda |\log \rho|$ contienne tout l'ensemble σ. En effet, les points z appartenant à σ ont un argument θ tel que $|\theta - \theta_o| < \frac{2\pi}{2^{n-1}}$.

Or $1 - \frac{1}{2^n} \leqslant \rho \leqslant 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$ de sorte que

$$\log \rho < \log(1 - \frac{1}{2^{n+1}}) \quad \text{et} \quad |\log \rho| > \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Il suffit donc de choisir $\lambda = 8\pi$.

. On peut donc appliquer les résultats établis au paragraphe 4.5.5. Avec les mêmes notations que dans ce paragraphe,

$$m_1^* = \ell_1 + \dots + \ell_t$$

et on a l'inégalité

$$m_1^* \leqslant (\frac{3}{2})(e^{3\pi\lambda} + e^{\pi\lambda})\mu_1(z_o)|\log \rho|$$

où μ_1 désigne la mesure harmonique de E_1 par rapport à la couronne $1 > |z| > \rho$.

L'inégalité $\rho \geqslant 1 - \frac{1}{2^n}$ entraine $|\log \rho| < \frac{1}{2^{n-1}}$.

On a donc obtenu l'inégalité

$$\ell_1 + \ldots + \ell_t \leqslant A' . \frac{1}{2^n} \mu_1(\sqrt{\rho}\, e^{i\theta_0}) \text{ où } A' \text{ désigne une constante absolue.}$$

. Considérons les mesures harmoniques suivantes :

μ_1' mesure harmonique de E_1 par rapport à Δ

μ_1'' mesure harmonique de α par rapport à Δ

μ_1''' mesure harmonique de $a(2\ )$ par rapport à Δ.

Ces mesures, ainsi que μ_1 <u>sont toutes définies au point</u> z_0 <u>qui appartient à</u> β. En vertu du principe du maximum

$$\mu_1(z_0) \leqslant \mu_1'(z_0) \leqslant \mu_1''(z_0) \leqslant \mu_1'''(z_0).$$

Or

$$\mu_1'''(z_0) = \frac{\operatorname{Log}|B(z_0)|}{\operatorname{Log} 2\varepsilon} < \frac{K \log \varepsilon}{\operatorname{Log} 2\varepsilon} < 2K \quad \text{pour} \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{7}.$$

. Finalement on a trouvé

$$\ell_1 + \ldots + \ell_t \leqslant A' . \frac{1}{2^n} K = A'\ell K .$$

<u>On choisit maintenant</u> K constante absolue de façon à ce que $AK < \frac{1}{2}$, ce qui est compatible avec les autres conditions à vérifier par K.

Dans ces conditions

$$\ell_1 + \ldots + \ell_t < \frac{\ell}{2}.$$

4.4.4. P <u>possède, pour ce choix de</u> K, <u>la propriété</u> c <u>du théorème</u> 3.

La démonstration se fait par récurrence sur le nombre de générations construites à l'intérieur de σ.

. <u>hypothèse de récurrence</u> : Pour un ensemble σ contenant au plus m-1 générations d'ensembles s

$$\mu(\sigma) < 2\, c\, \ell$$

où μ est la mesure définie comme longueur d'arc le long du réseau P ; c ayant été définie au paragraphe 4.4.2.

. Considérons un ensemble σ contenant au plus m générations d'ensembles s.

On effectue une première construction d'après les règles de l'étape I. <u>Le paragraphe</u> 4.4.2. a montré que la longueur totale des éléments de P intérieurs à σ construits à cette étape est majorée par $c\,\ell$.

Dans chaque nouvel ensemble $s_1, \dots s_t$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence :

$$\mu(s_i) < 2\, c\,\ell_i \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \dots t$$

$$\mu(\sigma) \leqslant c\,\ell + 2\, c \sum_{i=1}^{t} \ell_i \,.$$

Le paragraphe 4.4.3. a montré que $\sum_{i=1}^{t} \ell_i < \frac{\ell}{2}$ on a donc bien

$$\mu(\sigma) < 2\, c\, \ell.$$

4.5. Mesures harmoniques

4.5.1. Définition

. Etant donné un ouvert borné Ω de R^2, de frontière Ω^* suffisamment régulière [cf [4]], pour toute fonction f élément de $\mathcal{C}(\Omega^*)$ [ensemble des fonctions définies sur Ω^*, finies continues], il existe une fonction $H_f(x)$ unique, définie dans Ω telle que

1º) $H_f(x)$ est harmonique, bornée dans Ω

2º) Pour tout point $y \in \Omega^*$: $\begin{cases} H_f(x) \longrightarrow f(y) \\ x \longrightarrow y \\ x \in \Omega \end{cases}$

$H_f(x)$ résoud le problème de Dirichlet.

. Pour x_0 fixé dans Ω, $H_f(x_0)$ définit une fonctionnelle linéaire positive sur $\mathcal{C}(\Omega^*)$. Il lui correspond donc une mesure positive définie sur Ω^* par

$$H_f(x_0) = \int_{\Omega^*} f(y) d\mu_{x_0}(y).$$

. A toute partie mesurable A de Ω^* on associe la fonction de x_0, $\mu_{x_0}(A)$ qui est harmonique dans Ω et qui tend vers la fonction caractéristique de A à la frontière.

$\mu_{x_0}(A)$ s'appelle la mesure harmonique de A par rapport à Ω au point x_0.

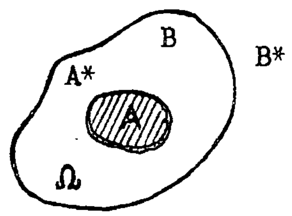
. Si Ω n'est pas borné, il se peut que, pour certaines parties A de Ω^*, on puisse construire une fonction harmonique positive bornée dans Ω, tendant vers la fonction caractéristique de A à la frontière : on appelle une telle fonction, nécessairement unique, la mesure harmonique de A par rapport à Ω.

. Etant donné un ouvert B de $\mathbb{R}^2$ et un fermé A tel que $A \subset \bar{B}$, <u>on appelle mesure harmonique de A par rapport à B</u>, ou par rapport à $B - A$, la <u>mesure harmonique</u> définie précédemment en prenant

$$\Omega = B - A$$

et en choisissant comme partie de Ω^* la frontière A^* de A, c'est à dire

$$\mu_{x_0}(A^*).$$



Il s'agit donc de la fonction harmonique dans Ω positive ou nulle, bornée par 1; valant 1 sur A^* et 0 sur B^*.

4.5.2. <u>Une inégalité pour les mesures harmoniques par rapport à un demi-plan</u>

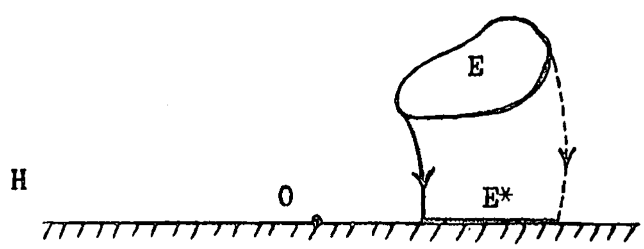
a) <u>Définitions</u>. <u>Notations</u>.

. H désigne le demi-plan ouvert $\{\zeta / \zeta = \xi + i\eta, \ \eta > 0\}$

. E est un sous-ensemble fermé de H

. E^* désigne la projection circulaire, de centre O, de l'ensemble E sur la demi-droite $\{\eta = 0, \ \xi > 0\}$:

$$E^* = \{\zeta = \xi + i\eta / \eta = 0 \quad \xi = |\zeta'| \text{ pour un } \zeta' \in E\}$$



b) <u>Lemme</u>

Soit $\mu(\zeta)$, la mesure harmonique de E par rapport à $H - E$

$\mu^*(\zeta)$ la mesure harmonique de E^* par rapport à H.

Alors pour $\zeta \in H - E$,

$$\mu(\xi + i\eta) \geqslant \frac{2}{3} \mu^*(-|\xi| + i\eta).$$

Ce lemme est démontré par T. Hall dans [3].

On va étendre ce lemme au cas où H n'est plus un demi-plan, mais une couronne $R = \{z / 0 < \rho < |z| < 1\}$ et en déduire quelques conséquences métriques.

4.5.3.

a) <u>Notations</u>

- $R = \{z / \ 0 < \rho < |z| < 1\}$
- E_1 est un sous ensemble fermé de R
- E_1^* désigne la projection radiale de centre l'origine, de l'ensemble E_1 sur le cercle $|z| = 1$: $E_1^* = \{z / |z| = 1 \quad z = e^{i\theta}$ et $re^{i\theta} \in E_1$ pour un certain $r\}$
- μ_1 désigne la mesure harmonique de E_1 par rapport à $R - E_1$
- μ_1^* désigne la mesure harmonique de E_1^* par rapport à R.

b) Considérons l'application conforme définie sur la surface de Riemann couverture universelle de R par

$$f(z) = \zeta = \xi + i\eta = \exp(i\pi \frac{\log z}{\log \rho}).$$

. Elle applique bijectivement R sur H : elle applique notamment le cercle $|z| = 1$ sur le demi axe réel positif, et le cercle $|z| = \rho$ sur le demi-axe réel négatif.

. Elle transforme les projections radiales en projections circulaires.

. Ainsi par cette transformation E_1 s'applique sur E et E_1^* s'applique sur E^*.

. Les fonctions harmoniques étant stables par transformation conforme, on peut traduire le lemme de Hall : ce dernier établit que $\mu(\zeta) \geqslant \frac{2}{3}\mu^*(\zeta)$ pour les points ζ n'appartenant pas à E et tels que leur partie réelle est négative ou nulle.

Ces points sont les images par la transformation conforme indiquée, des points z appartenant à R, n'appartenant pas à E_1 tels que $|z| \leqslant \sqrt{\rho}$.

On a donc montré que

$$\mu_1(z) \geqslant \frac{2}{3}\mu_1^*(z) \quad \text{si} \quad |z| \leqslant \sqrt{\rho}$$

$$\text{et si} \quad z \notin E_1 .$$

4.5.4. <u>Une conséquence métrique</u>

. Soit m_1^* la longueur de l'arc de la partie M_1^* de E_1^* qui est située dans le secteur $|\theta| < \lambda|\log\rho|$, λ étant une constante positive.

. Par la transformation f du paragraphe précédent, M_1^*, considérée seulement dans un seul feuillet de la surface de Riemann est appliqué sur un ensemble M^* de la demi-droite réelle positive ; M^* est contenu dans le segment $\left[0 , e^{\lambda\pi}\right]$; soit m^* sa mesure de Lebesgue :

$$m^* = \int_{M^*} d\xi = \int_{M_1^*} - d(\exp \frac{-\pi\theta}{\operatorname{Log}\rho}) \geqslant \frac{\pi}{|\log \rho|} e^{-\pi\lambda} m_1^* .$$

. Le point i est tel que $i = \xi + i\eta$ où $\xi \leqslant 0$ puisque $\xi = 0$.

. De plus

$$\mu^*(i) \geqslant \frac{1}{\pi} \int_{M^*} \frac{d\xi}{1+\xi^2} ,$$

ceci, d'après la résolution du problème de Dirichlet pour le demi-plan, qui introduit la mesure $\frac{1}{\pi}\frac{d\xi}{1+\xi^2}$ [voir [5]]

$$\mu^*(i) \geqslant \frac{1}{\pi} \int_{M^*} \frac{d\xi}{1+\xi^2} \geqslant \frac{m^*}{\pi(1+e^{2\pi\lambda})} \geqslant \frac{m_1^*}{(e^{\pi\lambda}+e^{3\pi\lambda})|\operatorname{Log}\rho|} .$$

. Si i n'est pas dans E, ce qui équivaut à $\sqrt{\rho}$ non situé dans E_1, on peut tenir compte du lemme de Hall et écrire

$$m_1^* \leqslant (\frac{3}{2})(e^{\pi\lambda} + e^{3\pi\lambda})|\operatorname{Log}\rho| \; \mu_1(\sqrt{\rho}) .$$

Cette inégalité est valable pour tout compact E_1 de R qui ne contient pas le point $\sqrt{\rho}$.

Références

[1] CARLESON (L.).- An interpolation problem for bounded analytic functions.- Amer. J. Math. 80 (1958), pp. 921-930.

[2] CARLESON (L.).- Interpolation by bounded analytic functions and the corona problem.- Ann. of Math. (2), 76 (1962), pp. 547-559

[3] HALL (T.).- Sur la mesure harmonique de certains ensembles.- Arkiv för Mat. 25 (1937) nc. 28 A

[4] BRELOT (M.).- Eléments de la théorie classique du Potentiel.- C.D.U., 2ème éd., 1961.

[5] HOFFMAN (K.).- Banach spaces of analytic functions.- Prentice Hall Series in Modern Analysis (1962).

[6]. STEIN. - Cours professé à la Faculté des Sciences d'Orsay année 1966. 1967

- communication orale

Exposé nº VI

MULTIPLICATEURS DE $\mathcal{F}H^p$

par

M. Lesieur, A. Nivat, J. M. Exbrayat

On va énoncer quelques théorèmes permettant en particulier d'étudier des multiplicateurs de $\mathcal{F}H^p$, pour les classes H^p du demi-plan (y positif), quand p est inférieur ou égal à 1, ceci d'après une récente note aux comptes rendus de Monsieur Stein [1].

Quelques rappels sur les classes H^p

Définition.- On dit que F est une fonction de la classe H^p si :

a) F est holomorphe dans le demi-plan $y > 0$

b) $\sup_{y>0} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x + iy)|^p dx < +\infty$.

On pose
$$\|F\|_p = \sup_{y>0}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x + iy)|^p dx\right)^{1/p}.$$

Si $p \geqslant 1$, $\|F\|_p$ définit une norme et H^p est un espace de Banach. Si $p < 1$, $\|F\|_p$ n'est plus une norme, mais permet cependant de munir H^p d'une structure d'espace métrique complet.

Propriétés.- Une fonction F de la classe H^p a des limites non tangentielles presque sûres quand $y \longrightarrow 0$; la fonction limite f est dans $L^p(R)$.

Si F appartient à H^p, $F(z) \longrightarrow 0$ à l'infini uniformément dans tout demi-plan $y \geqslant y_0 > 0$.

Si F appartient à H^p, elle peut être factorisée sous la forme $F = BG$, où B est un produit de Blaschke, et G une fonction sans zéros de la classe H^p, de même norme dans H^p que F.

<u>Théorème</u>.- <u>Si</u> F <u>appartient à</u> H^p <u>la fonction définie par</u> $F_y(x) = F(x + iy)$ <u>est dans</u> L^q (<u>pour tout</u> $q \geqslant p$) <u>et telle que</u> : $\|F_y\|_q \leqslant A \, \|F\|_p$ <u>où</u> A <u>est une constante ne dépendant que de</u> y, p, q.

Pour démontrer ce théorème, on utilise le théorème de factorisation : soit $F = BG$; on pose $\Phi = G^p$. Φ appartient à la classe H^1 et $\Phi(x + iy) = P_{y-y_0}(x) * \Phi(x + iy_0)$, d'où : $\|\Phi_y\|_{q/p} \leqslant A_y \|\Phi\|_1$, où A_y est la norme du noyau de Poisson P_{y-y_0}, dans l'espace $L^{q/p}$ $(q/p \geqslant 1)$.

On a donc : $\|G_y\|_q^p \leqslant A_y \|G\|_p^p$. Comme $|F| \leqslant |G|$ et $\|F\|_p = \|G\|_p$ on a : $\|F_y\|_q \leqslant A\|F\|_p$.

<u>Conséquence</u>.- <u>Si</u> F <u>appartient à</u> H^p, <u>pour tout</u> $y_0 > 0$, <u>la fonction</u> $F(z + iy_0)$ <u>appartient à toutes les classes</u> H^q $(q \geqslant p)$, <u>et sa norme dans</u> H^q <u>est majorée par la norme de</u> F <u>dans</u> H^p, <u>à une constante multiplicative près, qui ne dépend que de</u> p,q <u>et</u> y_0.

<u>Transformée de Fourier d'une fonction de</u> H^p $(p \leqslant 1)$

Si F appartient à H^p $(p \leqslant 1)$, la fonction $x \longrightarrow F(x + iy)$ est dans $L^1(\mathbb{R})$

donc admet une transformée de Fourier au sens classique.

Définition.- On appelle transformée de Fourier de la fonction F la fonction $\hat{F}$ définie par : $\hat{F}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x+iy)e^{-i(x+iy)t}dx$ $(y > 0)$. La fonction ainsi définie est indépendante de y (on le voit en appliquant la formule de Cauchy au rectangle : $y = y_1$, $y = y_2$, $x = \pm A$, et en faisant tendre A vers l'infini).

On peut remarquer que dans le cas où F appartient à H^1, $\hat{F}$ est la transformée de Fourier au sens classique de la fonction f limite de F quand $y \longrightarrow 0$.

Propriétés de $\hat{F}$

1º) Etant données les propriétés de la transformée de Fourier d'une fonction de L^1, $\hat{F}$ est continue et $\hat{F}(t)e^{-yt} \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow \infty$.

2º) $\hat{F}(t) = 0$ si t est négatif ou nul : d'après le théorème de Paley-Wiener c'est vrai si F appartient à H^2. Dans le cas général on pose : $G(z) = F(z + iy_0)$; G appartient à H^2, donc $\hat{G}(t) = 0$ si $t \leqslant 0$, et comme $\hat{F}(t) = e^{-y_0 t}\,\hat{G}(t)$, $\hat{F}$ vérifie la même propriété.

3º) On a la formule d'inversion : $F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} \hat{F}(t)e^{izt}dt$.

Multiplicateurs de $\mathcal{F}H^p$

Définition.- $m(t)$, fonction continue sur R^+, est un multiplicateur de $\mathcal{F}H^p$ $(p \leqslant 1)$, si à toute fonction F de H^p, on peut faire correspondre une fonction G de H^p telle que $\hat{G}(t) = m(t)\hat{F}(t)$, pour tout $t > 0$.

En vertu de la formule d'inversion, G, si elle existe, est unique, et on peut ainsi associer au multiplicateur $m(t)$ un endomorphisme T de H^p.

Propriétés.

1º) L'endomorphisme T est continu ; pour le démontrer on utilise le théorème du graphe fermé : soit une suite F_n qui converge vers F dans H^p, on pose $G_n = T(F_n)$, et on suppose que G_n converge vers G dans H^p. On doit montrer que $G = T(F)$, c'est à dire $\hat{G}(t) = m(t)\hat{F}(t)$, ce qui résulte immédiatement du fait suivant : si une suite F_n converge dans H^p $(p \leqslant 1)$ vers une fonction F, $\hat{F}_n(t)$ converge simplement vers $\hat{F}(t)$; en effet $|\hat{F}(t) - \hat{F}_n(t)| \leqslant e^{yt}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x+iy) - F_n(x+iy)|\,dx \leqslant e^{yt}A\|F - F_n\|_p$.

2º) $m(t)$ est une fonction bornée :

a) Si m est un multiplicateur, qui définit un endomorphisme T de H^p, la fonction définie par $m\ (t) = m(\ t)$ est un multiplicateur de $\mathcal{F}H^p$, qui définit un endomorphisme T_ε de H^p, de même norme que T.

b) Etant donnée la propriété a), il suffit de démontrer qu'en un point t_o, $m_\varepsilon(t_o)$ est uniformément bornée par rapport à ε.

Soit F une fonction dont la transformée de Fourier est de classe $\mathcal{C}^\infty$, à support compact, et prend la valeur 1 au point t_o. F appartient à toutes les classes H^p. On pose : $G_\varepsilon = T_\varepsilon(F)$. On a donc : $\hat{G}\ (t_o) = \hat{m}_\varepsilon(t_o)$. On a les relations suivantes :

$$G_\varepsilon(z) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \hat{G}_\varepsilon(t)e^{izt}dt \quad \text{d'où} \quad |G_\varepsilon(z)| \leqslant A(y)\|\hat{G}_\varepsilon\|_\infty$$

$$|\hat{G}_\varepsilon(t)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} e^t|G_\varepsilon(x+i)|\,dx \leqslant e^t\ A^{1-p}(y)\|\hat{G}_\varepsilon\|_\infty^{1-p}\|G_\varepsilon\|_p^p$$

d'où : $\|\hat{G}_\varepsilon\|_\infty \leqslant B\|G_\varepsilon\|_p \leqslant B\|T\|\|F\|_p$. On a ainsi une majoration de $m_\varepsilon(t_o)$ indépendamment de ε.

On va maintenant essayer de trouver des conditions suffisantes pour qu'une fonction m soit multiplicateur de $\mathcal{F}H^p$. On emploiera pour cela la théorie de Littlewood et Paley, en l'appliquant au cas de fonctions de H^p $(p \leqslant 1)$.

Définitions

Soit F une fonction holomorphe dans le demi-plan $y > 0$, on définit les fonctions suivantes :

$$g(F , t) = \left(\int_0^{+\infty} y|F'(t + iy)|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$S(F , t) = \left(\iint_{\Gamma_t} |F'(x + iy)|^2 \, dx\, dy\right)^{\frac{1}{2}},$$ où Γ_t est l'angle $|x - t| \leqslant ky$

$$S^*_\lambda(F , t) = \left(\iint_{y>0} \frac{y^\lambda}{(|x-t|+y)^\lambda} |F'(x+iy)|^2 dx\, dy\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$S_k(F , t) = \left(\iint_{\Gamma_t} y^{2k-2}|F^{(k)}(x+iy)|^2 dx\, dy\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Ces fonctions ont été introduites plus généralement pour des fonctions u harmoniques, intégrales de Poisson de fonctions de $L^p(R)$ $(p > 1)$, en prenant $|\text{grad } u|^2$ au lieu de $|F'|^2$, ce qui est à un coefficient 2 près la même chose lorsque u est holomorphe.

[Remarque : on désignera par A toutes les constantes, sans pour cela qu'elles soient égales].

Les inégalités (1) (2) (3) énoncées dans les théorèmes suivants sont vérifiées si u est intégrale de Poisson d'une fonction de $L^p(R)$, pour $p > 1$ (voir par exemple [2]). On a aussi les relations suivantes (voir [2]) :

$A\ g(F) \leqslant S(F) \leqslant A\ S_\lambda^*(F)$

$S_k(F) \geqslant A\ S(F)$.

<u>Théorème</u> 1.- <u>Si</u> F <u>appartient à</u> H^p $(0 < p < \infty)$ <u>on a la relation</u> :

$\boxed{\|S(F)\|_p \leqslant A\|F\|_p}$ (1), (où A est une constante qui ne dépend que de p).

Le théorème est déjà connu dans le cas où $p > 1$; on va se ramener à ce cas en élevant F à une puissance convenable. En effet si F est dans H^p, et n'a pas de zéros, F^δ est dans $H^{p/\delta}$ (on a ici quelque chose de nouveau par rapport aux fonctions harmoniques, car si F est harmonique, F^δ n'est pas harmonique).

1º) <u>Démonstration dans le cas où</u> F <u>n'a pas de zéros</u> : on pose $G = F^{p/2}$, G est dans H^2 et $\|G\|_2^2 = \|F\|_p^p$; comme $F = G^{2/p}$, on a :

$$S(F) = \frac{2}{p}\Big(\iint_{\Gamma_t} |G^{2/p-1}|^2 |G'|^2 dx\ dy\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

On pose $m(G) = \sup\limits_{\Gamma_t} |G(z)|$. On démontre (voir [2]) que $m(G) \leqslant A\ M(G)$ (où $M(G)$ est la fonction maximale de Hardy-Littlewood), et que $\|M(G)\|_2 \leqslant A\ \|G\|_2$. D'où $S(F) \leqslant A\ M(G)^{(2-p)/p} S(G)$; on applique l'inégalité de Hölder avec les exposants p, $p_1 = 2$, $p_2 = \frac{2p}{2-p}$, $\left(\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}\right)$, ce qui donne : $\|S(F)\|_p \leqslant A\|M(G)\|^{(2-p)/p}\|S(G)\|_2$, et en appliquant à G l'inégalité (1) : $\|S(F)\|_p \leqslant A\ \|G\|_2^{2/p-1}\ \|G\|_2$, ce qui est l'inégalité (1) si on remplace $\|G\|_2^2$ par $\|F\|_p^p$.

2º) <u>Cas général</u> : si F a des zéros on utilise le théorème de factorisation :

$BG = (B - 1)G + G = F_1 + F_2$. F_1 et F_2 n'ont pas de zéros, $\|F_1\|_p \leqslant 2\|F\|_p$

et $\|F_2\|_p = \|F\|_p$. On peut appliquer le théorème à F_1 et F_2, et comme

$S(F_1 + F_2) \leqslant A(S(F_1) + S(F_2))$, $\|S(F)\|_p \leqslant A\ (\|F_1\|_p + \|F_2\|_p)$ d'où $\|S(F)\|_p \leqslant A\|F\|_p$.

<u>Théorème</u> 2.- <u>Si</u> F <u>est dans</u> H^p $(0 < p < \infty)$, <u>on a</u> $\boxed{\|S_\lambda^*(F)\|_p \leqslant A\|F\|_p}$ (2) <u>pour</u> $\lambda > 1$ <u>et</u> $\lambda > \frac{2}{p}$ (où A est une constante qui ne dépend que de λ et p).

On va employer la même méthode que pour le théorème 1, puisqu'on connait le résultat pour $p > 1$.

1º) <u>Si</u> F <u>n'a pas de zéros, on pose</u> $G = F^{p/2}$.

$$S_\lambda^*(F) = \frac{2}{p}\left(\iint \frac{y^\lambda}{(|x-t|+y)^\lambda}\ |G^{2/p-1}|^2 |G'|^2 dx\ dy\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$S_\lambda^*(F) \leqslant A \sup_{x,y}\left[\frac{y^{(\lambda-\lambda')/2}}{(|x-t|+y)^{(\lambda-\lambda')/2}}|G^{2/p-1}|\right] S_{\lambda'}^*(G), \quad (1 < \lambda' < \lambda).$$

On pose $\Phi = G^{2/p-1}$, Φ est dans H^r, $r = \frac{2p}{2-p}$.

<u>Lemme</u> ([2]).- Si ψ est dans H^p $(p > 1)$ la fonction ψ^* définie par :

$$\psi^*(t) = \sup_{x,y} \frac{y}{|x-t|+y}\ |\psi(x+iy)|$$ appartient à L^p, et $\|\psi^*\|_p \leqslant A\|\psi\|_p$.

<u>Conséquence</u>. Soit Φ une fonction de H^r $(0 < r < \infty)$, n'ayant pas de zéros, on pose $\psi = \Phi^{r/p}$ $(p > 1)$, ψ est dans H^p. Si on définit $\Phi^*_{p/r}$ par

$$\Phi^*_{p/r}(t) = \sup_{x,y} \frac{y^{p/r}}{(|x-t|+y)^{p/r}}\ |\Phi(x+iy)| = [\psi^*(t)]^{p/r},$$ comme d'après le lemme

$\|\psi^*\|_p \leqslant A\|\psi\|_p$, on a $\|\Phi^*_{p/r}\|_r \leqslant A\|\Phi\|_r$. On applique ce résultat à $\Phi = G^{2/p-1}$, ce qui est possible puisqu'on peut trouver $\lambda' > 1$ tel que $\lambda - \lambda' > 2/p - 1$, soit $\frac{\lambda-\lambda'}{2} > \frac{1}{r}$. On a alors, en appliquant l'inégalité de Hölder avec les coefficients p, r et 2 $(\frac{1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2})$:

$\|S^*(F)\|_p \leqslant A\ \|\Phi\|_r \|S^*_{\lambda'}(G)\|_2 \leqslant A\,\|\Phi\|_r \|G\|_2$; et comme $\|\Phi\|_r = \|G\|_2^{2/r}$, $\|S^*_\lambda(F)\|_p \leqslant A\|G\|_2^{2/p}$ ce qui est l'inégalité (2) si on remplace $\|G\|_2^2$ par $\|F\|_p^p$.

2º) L'extension au cas où F a des zéros se fait comme dans le théorème 1.

Théorème 3.- Si F est dans H^p $(0 < p < \infty)$, on a la relation $\boxed{\|F\|_p \leqslant A\|S(F)\|_p}$ (3).

On va comme dans les démonstrations précédentes, se ramener au cas $p > 1$, pour lequel on connait le théorème. Flett [3] a démontré ce théorème, pour $H^p(T)$ $(p \leqslant 1)$, dans le cas où F n'a pas de zéros, mais comme on le verra il n'y a pas d'extension immédiate au cas où F peut s'annuler.

1º) Démonstration dans le cas où F n'a pas de zéros : on pose $\Phi = F^{p/\lambda}$. $(\lambda > 1$, on le fixera ultérieurement). Φ est dans H^λ, et $\|\Phi\|_\lambda^\lambda = \|F\|_p^p$. On va essayer d'écrire $S(\Phi)$ comme produit de $S(\Phi_1)$ et $S(\Phi_2)$, à des puissances convenables, Φ_1 et Φ_2 étant des puissances de Φ ; on appliquera à Φ le théorème 3, à Φ_1 le théorème 1, et on s'arrangera pour que Φ_2 soit la fonction F.

On écrit : $S(\Phi) = \left(\iint_{\Gamma_t} |\Phi(z)|^{1-2/\lambda}\ |\Phi'(z)|^{2/\lambda}\ |\Phi(z)|^{1-2/\lambda'}\ |\Phi'(z)|^{2/\lambda'} dx\, dy\right)^{\frac{1}{2}}$,

où λ' est l'exposant conjugué de λ. En appliquant l'inégalité de Hölder avec les exposants λ et λ', on obtient :

$S^2(\Phi) \leqslant \left(\iint_{\Gamma_t} |\Phi'(z)|^2\ |\Phi(z)|^{\lambda-2} dx\, dy\right)^{1/\lambda} \left(\iint_{\Gamma_t} |\Phi'(z)|^2\ |\Phi(z)|^{\lambda'-2} dx\, dy\right)^{1/\lambda'}$, ou encore : $S(\Phi) \leqslant A\left[S(\Phi^{\lambda/2})\right]^{1/\lambda}\left[S(\Phi^{\lambda'/2})\right]^{1/\lambda'}$. On applique l'inégalité de Hölder avec les exposants λ, 2λ et 2λ pour faire apparaitre $\|S(\Phi)\|_\lambda$:

$$\|S(\Phi)\|_\lambda \leqslant A\|S(\Phi^{\lambda/2})\|_2^{1/\lambda}\ \|S(\Phi^{\lambda'/2})\|_{2(\lambda-1)}^{(\lambda-1)/\lambda}.$$

Comme Φ est dans H^λ, avec $\lambda > 1$, on peut lui appliquer le théorème 3, et en appliquant le théorème 1 à $\Phi^{\lambda/2}$, on obtient l'inégalité :

$\|\Phi\|_\lambda \leqslant A \|\Phi\|_\lambda^{1/2} \|S(\Phi^{\lambda'/2})\|_{2(\lambda-1)}^{(\lambda-1)/\lambda}$. Puisqu'on a supposé F dans H^p, $\|\Phi\|_\lambda$ est fini. De plus on peut choisir λ tel que $F = \Phi^{\lambda'/2}$, soit : $\frac{\lambda'}{2} = \frac{\lambda}{p}$ ou $\lambda = 1 + \frac{p}{2}$, on a alors : $\|\Phi\|_\lambda^\lambda \leqslant A \|S(F)\|_{2(\lambda-1)}^{2(\lambda-1)}$ ou $\|F\|_p^p \leqslant A\|S(F)\|_p^p$.

2º) <u>Cas général</u>. Si F a des zéros, on ne peut, comme pour les théorèmes 1 et 2, se servir de la décomposition de F, car on ne peut majorer $\|S(F_1)\|_p + \|S(F_2)\|_p$ par $\|S(F)\|_p$.

Calderon [4] a repris la théorie de Littlewood et Paley, pour des fonctions G de la forme $G = |F|^\delta$ (F étant holomorphe et δ un nombre positif quelconque). L'avantage qu'il y a à considérer de telles fonctions est que leurs puissances sont de la même forme. Les théorèmes 1 et 3, pour de telles fonctions G, sont valables et résultent des propriétés suivantes :

a) $\Delta G^2 = 4|\text{grad } G|^2$, ce qui conduit en utilisant la formule de Green à $\|S(G)\|_2 = K\|G\|_2$. Les théorèmes 1 et 3 sont donc valables pour $p = 2$.

b) $\|\sup_{\Gamma_t} G\|_p \leqslant A \|G\|_p \quad (0 < p < \infty)$

c) $S(G) \leqslant \left[\frac{1}{\alpha} S(G^\alpha)\right]^\sigma \left[\frac{1}{\beta} S(G^\beta)\right]^{1-\sigma}$ avec $\alpha\sigma + \beta(1-\sigma) = 0$.

Pour le théorème 1, on procède comme on l'a fait en utilisant la fonction $G^{p/2}$.

Pour le théorème 3 la méthode de Flett a été un peu raffinée, avec l'inégalité (c), car on doit se ramener non plus à un λ quelconque plus grand que 1, mais au cas $\lambda = 2$, puisque c'est le seul pour lequel on connait le théorème.

<u>Théorème</u> 4 (conséquence des théorèmes 1 et 3).- <u>Si</u> G <u>est holomorphe et telle que</u> $G(x+iy) \longrightarrow 0$ <u>quand</u> $y \longrightarrow \infty$, <u>si</u> $S(G)$ <u>est dans</u> L^p, <u>alors</u> G <u>est dans</u> H^p ; et on a alors évidemment $\|G\|_p \leqslant A\|S(G)\|_p$ (d'après (3)).

Remarque : il est nécessaire d'imposer à G une condition à la limite, car la condition imposée à $S(G)$ ne porte que sur la dérivée de G, et les constantes ne sont pas dans H^p.

On pose : $G_{y_0}(z) = G(z+iy_0)$. On a : $G_\varepsilon(z) - G_N(z) = -i\int_{y+\varepsilon}^{y+N} G'(x+it)dt$

soit : $|G_\varepsilon - G_N| \leqslant \int_{y+\varepsilon}^{y+N} |G'(x+it)| \frac{t^{1/2}}{t^{1/2}} dt$. On applique l'inégalité de Schwarz.

$|G_\varepsilon - G_N| \leqslant (\log \frac{N}{\varepsilon})^{\frac{1}{2}} \int_{y+\varepsilon}^{y+N} t|G'(x+it)|^2 dt \leqslant A_{N,\varepsilon} g(G) \leqslant A_{N,\varepsilon} S(G)$.

Donc $G_\varepsilon - G_N$ est une fonction de H^p et d'après le théorème 3 :

$\|G_\varepsilon - G_N\|_p \leqslant A\|S(G_\varepsilon - G_N)\|_p \leqslant A\|S(G)\|_p$, où A ne dépend pas de ε et N. Quand $\varepsilon \longrightarrow 0$ et $N \longrightarrow \infty$, on a en appliquant le lemme de Fatou : $\|G\|_p \leqslant A\|S(G)\|_p$.

<u>Théorème sur les multiplicateurs</u>

<u>Soit</u> $m(t)$ <u>une fonction continue sur</u> $]0, +\infty[$, <u>telle que</u> :

a) $m(t)$ <u>bornée</u>

b) $m(t)$ <u>est de classe</u> $\mathcal{C}^k$; <u>et on a</u> $\int_R^{2R} |m^{(\ell)}(t)|^2 dt \leqslant AR^{-2\ell+1}$ <u>pour tout</u> R <u>positif</u>. <u>Alors</u> m <u>est un multiplicateur de</u> $\mathcal{F}H^p$ <u>pour</u> $p > \frac{1}{k}$.

Soit F une fonction de H^p, la fonction G transformée de F est donnée par la formule d'inversion :

$$G(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} m(t)\,\hat{F}(t)e^{izt}dt$$

G est holomorphe, et $G(x+iy) \longrightarrow 0$ quand $y \longrightarrow +\infty$, en effet :

$G(x+iy) \leqslant A\int_0^{\infty} e^{-(y-y_o)t}dt$ (car $m(t)\hat{F}(t)e^{-y_o t}$ est bornée), et $\int_0^{\infty} e^{-(y-y_o)t}dt$ $\longrightarrow 0$ quand $y \longrightarrow +\infty$.

On doit montrer que G est dans H^p ; pour cela on utilise la relation $S_{k+1}(G) \leqslant A\,S^*_{2k}(F)$ (voir [2]). On a alors, si F est dans H^p, et $p > \frac{1}{k}$, $\|S^*_{2k}(F)\|_p \leqslant A\|F\|_p$, d'après le théorème 1, donc $\|S(G)\|_p \leqslant A\|F\|_p$, ce qui entraine d'après le théorème 4 que G est dans H^p.

<u>Conséquence</u>.- Ce théorème permet par exemple de démontrer que pour tout nombre réel c, $m(x) = e^{ic\log x}$ est un multiplicateur de tous les espaces $\mathcal{F}H^p$ $(0 < p \leqslant 1)$. En effet :

a) $|m(x)| = 1$

b) m est indéfiniment dérivable et $|m^{(\ell)}(x)|^2$ est de la forme $\frac{K}{x^{2\ell}}$ ce qui donne $\int_R^{2R} |m^{(\ell)}(x)|^2dx \leqslant A\,R^{-2\ell+1}$.

<u>Références</u>

[1] <u>E. Stein</u>.- Note aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, tome 263, n° 20, 14 novembre 1966

[2] <u>E. Stein</u>.- Intégrales singulières.- Cours fait à Orsay en 1966-67, chap. IV : théorie de Littlewood-Paley

[3] T. M. Flett.- On some theorems of Littlewood and Paley.- Journal London Math. Soc. 31, pp. 336-344 (1956).

[4] A. P. Calderon.- Commutators of singular integral operators (theorem 3).- Proc. Nat. Acad. Sc., vol. 53, pp. 1092-1096.

Séminaire d'Orsay 1966/1967

Exposé n° VII

ISOMORPHISMES DES ALGEBRES DE MULTIPLICATEURS

G. I. Gaudry

Les problèmes dont je vais parler prennent leur place dans toute une série de résultats portant sur la mesure où un groupe localement compact est déterminé par les algèbres qui lui sont associées. Le problème général s'énonce comme suit.

Problème.- Soient G_1 et G_2 deux groupes localement compacts et séparés. Soient $A(G_1)$ et $B(G_2)$ deux algèbres normées associées (d'une façon à préciser) aux groupes. Supposons de plus que $A(G_1)$ et $B(G_2)$ sont munies d'un ordre partiel naturel. Soit T un isomorphisme de $A(G_1)$ sur $B(G_2)$ qui est

soit continu

soit de norme $\leqslant 1$ $\quad (\|Tf\|_B \leqslant \|f\|_A \quad (\forall f \in A))$

soit isométrique $\quad (\|Tf\|_B = \|f\|_A \quad (\forall f \in A))$

soit bipositif $(Tf \geqslant 0$ si et seulement si $f \geqslant 0)$.

Alors, dans chacun de ces cas, est-ce que les groupes sont "les mêmes" ? Autrement dit, est-ce qu'il existe un isomorphisme bicontinu de G_1 sur G_2 ?

Nous supposerons dans la suite que l'on a choisi, une fois pour toutes, les mesures de Haar invariantes à gauche dx, dy sur les groupes G_1 et G_2. (Par exemple, si G est compact, il convient de choisir dx telle que $\int_G dx = 1$).

Il n'y a que très peu de travaux sur les isomorphismes T qui sont simplement continus. Mais pour les trois autres cas, on a déjà étudié plusieurs problèmes qui sont du type énoncé. Les résultats obtenus sont résumés dans la table ci-dessous.

Auteur	Hypothèses	Conclusion
1 KAWADA	T bipositif de $L^1(G_1)$ sur $L^1(G_2)$, toutes les deux réelles	G_1 et G_2 isomorphes
2,3 WENDEL	(a) T isométrique de $L^1(G_1)$ sur $L^1(G_2)$; (b) $\lVert T \rVert \leqslant 1$	" " "
4 HELSON	(i) $\lVert T \rVert \leqslant 1$, G_1, G_2 abéliens, T isomorphisme de $L^1(G_1)$ sur $L^1(G_2)$ (ii) T un isomorphisme de $L^1(G_1)$ sur $L^1(G_2)$, G_1, G_2 abéliens. On suppose $\lVert T \rVert \leqslant 2$, et que ou $\hat{G}_1$ ou $\hat{G}_2$ est connexe.	" " "
5 EDWARDS	(i) G_1 et G_2 compacts, $1 \leqslant p < \infty$, T un isomorphisme bipositiv de $L^p(G_1)$ sur $L^p(G_2)$	" " "
	(ii) G_1 et G_2 localement compacts, T est un isomorphisme de $C_c(G_1)$ sur $C_c(G_2)$ qui est (a) soit bipositif ; (b) soit isométrique ($\lVert \cdot \rVert_\infty$)	Dans chaque cas, les groupes sont "les mêmes"
6,7 JOHNSON et STRICHARTZ	T un isomorphisme isométrique de $M_b(G_1)$ sur $M_b(G_2)$, $M_b(G_i)$ l'algèbre de toutes les mesures de Radon bornées sur G_i	Les groupes sont isomorphes
8,9 STRICHARTZ et PARROTT	(i) T un isomorphisme isométrique de $L^p(G_1)$ sur $L^p(G_2)$ $1 \leqslant p < \infty$, $p \neq 2$, G_1 et G_2 compacts.	Les groupes sont isomorphes
	(ii) Si $p = 2$	Les résultat est en général faux

Notre point de départ est le travail [5] de Edwards. Il y a étudié le cas des L^p sur des groupes compacts. C'est dans ce travail de Edwards que figure un problème laissé ouvert par ce même auteur : c'est le cas des L^p sur des groupes compacts où T est <u>isométrique</u>. Ce problème est fort intéressant. C'est assez récemment qu'il a été résolu par Strichartz [8] ; et indépendamment par Parrott [9]. Il est intéressant que dans le cas où $p = 2$, on a en général une réponse négative.

Il convient de remarquer aussi sur le cas des algèbres $M_b(G_i)$ et T isométrique. On a la réponse affirmative donnée par Johnson et Stricharz [6] [7].

Dans plusieurs de ces travaux portant sur le cas où T est isométrique (ou de norme $\leqslant 1$), les auteurs ont employé une certaine partie de la théorie des multiplicateurs. Si $1 \leqslant p \leqslant \infty$, on désignera $m_p(G_i)$ l'espace des multiplicateurs à droite, c'est à dire, des endomorphismes continus de $L^p(G_i)$ qui commutent avec les translations à droite ρ_a $(a \in G_i)$: $\rho_a f(x) = f(xa^{-1})$. Notons que pour chaque $a \in G_i$, l'opérateur τ_a de translation à gauche défini par $\tau_a f(x) = f(a^{-1} x)$ est un élément de $m_p(G_i)$. La question importante est la suivante :

Quels sont les multiplicateurs isométriques ? C'est à dire, on cherche une caractérisation des m tels que

$$\| m(f) \|_p = \| f \|_p \qquad (\forall f \in L^p).$$

L'importance de ces multiplicateurs réside dans le fait suivant :

Si $\tau_{a'}$ est un opérateur de translation (à gauche) sur G_2, et si T est par exemple isométrique, alors $T^{-1}\tau_{a'}T$ est un multiplicateur isométrique. Si on peut démontrer que les multiplicateurs isométriques sont exactement les opérateurs de la forme $\rho\tau_b$ $|\rho| = 1$, $b \in G$, on aura une application $a' \longrightarrow a$ de G_2 dans G_1 définie par la relation

$$T^{-1}\tau_{a'}T = \rho(a')\tau_a .$$

Ensuite, on peut démontrer que l'application $a' \longrightarrow a$ est un isomorphisme topologique de G_2 sur G_1. C'est cette idée que Wendel a d'abord utilisé avec succès dans [2], et que beaucoup de ces autres auteurs ont employée avec, ou sans modification convenable, pour établir leurs résultats.

En particulier, Strichartz et Parrott ont employé cette idée. La partie fondamentale de leurs travaux est le théorème suivant :

Théorème 1.- Soient G un groupe localement compact, et $1 \leqslant p < \infty$, $p \neq 2$. Alors les multiplicateurs isométriques de $L^p(G)$ sont exactement les opérateurs m de la forme $m(f) = \lambda\tau_a f$ $(f \in L^p(G))$ où λ est un nombre complexe $|\lambda| = 1$ et $a \in G$.

Je voudrais commencer avec une nouvelle démonstration du résultat de Johnson et Strichartz. La démonstration est tout à fait différente de celle de ces deux auteurs.

Théorème 2.- Soient G_1 et G_2 deux groupes localement compacts et séparés. Supposons qu'il existe un isomorphisme isométrique T de $M_b(G_1)$ sur $M_b(G_2)$. Alors G_1 et G_2 sont isomorphes.

<u>Démonstration</u>. La démonstration se divise en plusieurs étapes.

1º) On considère, pour $a \in G_1$, la mesure de Dirac ε_a au point a. Cette mesure est de norme 1 : donc $T\,\varepsilon_a$ est de norme exactement 1. On note que si μ est une mesure bornée de norme 1, alors le multiplicateur de $L^1(G_2)$, T_μ, défini par $T_\mu(f) = \mu * f$ a la propriété suivante :

$$\| \mu * f \|_1 \leqslant \| f \|_1 .$$

Mais μ a un inverse $\nu = T\,\varepsilon_{a^{-1}}$, qui a les mêmes propriétés que μ. Donc

$$\| f \|_1 = \| \nu * \mu * f \|_1 \leqslant \| \mu * f \|_1 \leqslant \| f \|_1 ,$$

et

$$\| \mu * f \|_1 = \| f \|_1 .$$

Enfin, T_μ est un multiplicateur isométrique de $L^1(G_2)$. Il résulte du travail de Wendel (ou du théorème 1 ci-dessus) que μ est de la forme $\lambda(a)\ \varepsilon_{a'}$, où $|\lambda(a)| = 1$ et où $a' \in G_2$.

2º) On a établi dans 1º) l'existence d'une application $\varphi : a \longrightarrow a'$ de G_1 dans G_2. (Celle-ci est bien définie puisque T est un isomorphisme). Puis, on note que φ est biunivoque et surjective : car T est un isomorphisme, et on pourrait également considérer T^{-1}.

3º) L'application φ est un isomorphisme algébrique de G_1 sur G_2. Ceci est évident lorsqu'on note que $\varepsilon_{a_1} * \varepsilon_{a_2} = \varepsilon_{a_1 a_2}$.

4º) L'application φ est continue (et ceci est également vrai pour φ^{-1}). Pour cela, il suffit de démontrer que φ est continue au point e. Supposons, au contraire, que φ ne soit pas continu au point e, et qu'il existe un voisinage V de e' dans G_2 et une famille (a_i) de points de G_1 tels que : $a_i \longrightarrow e$, mais $\varphi(a_i) \notin V$ pour chaque indice i. On en déduira une contradiction.

Notons d'abord que les mesures $T\varepsilon_{a_i} = \lambda(a_i)\,\varepsilon_{a'_i}$ sont bornées. (En effet, chacune est de norme = 1). Les ensembles bornés de M_b sont vaguement relativement compacts. Donc, il existe une mesure $\mu \in M_b(G_2)$ qui est point limite (pour la topologie vague) de la famille $(\lambda(a_i)\,\varepsilon_{a'_i})$. On supposera, pour éviter tout changement de notation, que $\lambda(a_i)\,\varepsilon_{a'_i} \longrightarrow \mu$ vaguement.

On prend alors une fonction arbitraire f de $C_c(G_1)$. f peut être considérée comme mesure bornée, et alors $\varepsilon_{a_i} * f \longrightarrow f$ dans la topologie normée de $M_b(G_1)$. Donc, $T(\varepsilon_{a_i} * f) = \lambda(a_i)\,\varepsilon_{a'_i} * Tf$ tend vers Tf, d'après la continuité de T. A fortiori, $\lambda(a_i)\,\varepsilon_{a'_i} * Tf \longrightarrow Tf$ vaguement. Mais $\lambda(a_i)\,\varepsilon_{a'_i} \longrightarrow \mu$ vaguement. Donc, on a établi que

$$\mu * Tf = Tf \qquad \forall f \in C_c(G_1).$$

On applique alors T^{-1}

$$(T^{-1}\mu) * f = f \qquad \forall f \in C_c(G_1).$$

Mais ceci entraine que $T^{-1}\mu = \varepsilon_e$, et, par conséquent, que $\mu = \varepsilon_{e'}$.

5º) Finalement, il est évident que si $\lambda(a_i)\,\varepsilon_{a'_i} \longrightarrow \varepsilon_e$, et que $a'_i \notin V$ pour tout i, alors on a une contradiction. La démonstration est donc complète. On va utiliser le théorème 2 dans la suite.

Les résultats principaux de cette conférence portent sur les algèbres des multiplicateurs de L^p. On constate tout d'abord que l'ensemble $m_r(G)$ des multiplicateurs à droite de $L^p(G)$ est une algèbre, si le produit $m_1 m_2$ des deux multiplicateurs est la composition $m_1 \circ m_2$. On a alors le théorème suivant :

<u>Théorème</u> 3.- Soient G_1 et G_2 deux groupes localement compacts et séparés, et supposons, que $1 \leqslant p < \infty$; $p \neq 2$. Supposons qu'il existe un isomorphisme isométrique T de $m_p(G_1)$ sur $m_p(G_2)$. Alors G_1 et G_2 sont isomorphes.

(Avant de commencer la démonstration, je signale que c'est M. Strichartz qui m'a proposé la question à laquelle ce théorème fait réponse).

<u>Démonstration</u>.

<u>1er cas</u>. $p = 1$. Dans ce cas, $m_1(G_i)$ peut être identifiée avec $M_b(G_i)$, de sorte que $\| m \| = \| \mu \|_{M_b}$. On applique directement le théorème 2.

<u>2me cas</u> $1 < p < \infty$; $p \neq 2$. La démonstration est tout à fait analogue à celle que j'ai donnée pour le théorème 2.

On commence avec les multiplicateurs τ_a $(a \in G_1)$, et on note que, $\| T\tau_a \| = 1$; et que $\| T\tau_{a^{-1}} \| = 1$. Alors $T\tau_a$ est isométrique et il résulte du théorème de Strichartz et Parrott que $T\tau_a$ est de la forme

$$T\tau_a = \lambda(a)\,\tau_{a'} \qquad \text{où} \qquad |\lambda(a)| = 1 \quad \text{et} \quad a' \in G_2.$$

L'application $\varphi : a \longrightarrow a'$ est encore un isomorphisme algébrique de G_1 et G_2, et il reste à démontrer que φ est continue au point e.

On suppose que $a_i \longrightarrow e$, que $a_i' \notin V$ (voisinage de e'). Puis on voit que les opérateurs $T\tau_{a_i}$ sont bornés – chacun est de norme 1. Mais, si $p > 1$, les ensembles bornés de $L^p(G)$ sont relativement faiblement compacts. Donc, les ensembles bornés de $L\ (L^p\ ,\ L^p)$ sont relativement compact pour la topologie faible des opérateurs. Supposons alors que U est un endomorphisme continu de L^p et que $T\tau_{a_i} \longrightarrow U$ dans la topologie faible des opérateurs. Il est facile de voir que U est encore un multiplicateur. On voit comme dans la démonstration du théorème 2, que U est l'application identique.

Par exemple, si $h \in C_c(G_1)$ et que m_h est le multiplicateur de $L^p(G_1)$ défini par $m_h(f) = h * f$, on a que $\tau_{a_i} \circ m \longrightarrow m_h$ et par conséquent que $U \circ Tm_h = Tm_h$, ou que

$$(T^{-1}U) \circ m_h = m_h \qquad\qquad \forall h \in C_c(G_1).$$

En particulier, $(T^{-1}U)(h * k) = h * k \qquad \forall h,k \in C_c(G_1)$. Mais l'ensemble $\{h * k \ ; \ h,k \in C_c(G_1)\}$ est dense dans $L^p(G_1)$ puisque $p<\infty$. Donc $T^{-1}U = I$.

Il reste seulement à démontrer qu'on ne peut pas avoir simultanément que

$\lambda(a_i)\,\tau_{a_i'} \longrightarrow \tau_{e'}$, $a_i' \notin V$.

On démontre, en effet que l'ensemble $\{a_i'\}$ de points de G_2 a un point limite. Soient K un compact non-négligeable de G_2, et χ_K la fonction caractéristique de K. Alors $\chi_K \in L^p(G_2) \cap L^{p'}(G_2)$, et

$$(*) \qquad \int (\lambda(a_i)\, \tau_{a_i'} \chi_K - \chi_K)\chi_K \, dy \longrightarrow 0.$$

Ceci entraine qu'il existe un indice i_o et un compact K_o tels que $i \geq i_o \Longrightarrow a_i' \in K_o$. Donc, les points a_i' ont un point limite. On suppose, pour éviter encore tout changement de notation, que $a_i' \longrightarrow a'$. Mais il est encore facile de démontrer que les deux faits : $(a_i' \longrightarrow a',\ a_i' \notin V)$ et $\lambda(a_i)\, \tau_{a_i'} \longrightarrow \tau_{e'}$ sont en pleine contradiction. On utilise, par exemple, la relation (*) avec K choisi comme voisinage compact suffisamment petit de e'.

La démonstration est donc complète.

<u>Remarque</u>. Si $p = 2$, le résultat est faux.

<u>Contre-exemple</u>. $G_1 = T$, $G_2 = T \times T$. Alors $m_2(G_1) \cong \ell^\infty(Z)$ et $m_2(G_1) \cong \ell^\infty(Z \times Z)$. Les ensembles Z, $Z \times Z$ sont tous les deux dénombrables. Soit φ une application biunivoque de Z sur $Z \times Z$. Définissons l'opérateur T_φ par la relation :

$$T_\varphi \psi(n) = \psi(\varphi(n)) \qquad (\psi \in \ell^\infty(Z \times Z),\ n \in Z).$$

Alors $T_\varphi \psi \in \ell^\infty(Z)$ et T_φ est un isomorphisme isométrique de $\ell^\infty(Z \times Z)$ sur $\ell^\infty(Z)$. Mais les groupes Z et $Z \times Z$ sont évidemment pas isomorphes, les groupes G_1 et G_2 sont forcément distincts.

Il reste la question naturelle : qu'est-ce qu'on peut dire des isomorphismes bipositifs T ? Pour répondre à cette question, il sera nécessaire d'utiliser un théorème de Brainerd et Edwards :

<u>Théorème</u> 4.- Soit m un multiplicateur positif de $L^p(G)$, $1 \leqslant p < \infty$. Alors il existe une mesure μ (pas nécessairement bornée, sauf dans le cas $p = 1$) telle que

$$mf = \mu * f \qquad (\forall f \in C_c(G)).$$

Notons que si $p = 1$, les multiplicateurs sont engendrés par les multiplicateurs positifs, mais que ceci n'est plus vrai si $p > 1$. Par exemple, si G est abélien, les multiplicateurs positifs sont définis par convolution avec les mesures positives <u>bornées</u>, et on sait qu'il existe beaucoup de multiplicateurs de $L^p(G)$, $p > 1$ qui ne sont pas définis par convolution avec une mesure bornée.

Pour le cas des isomorphismes bipositifs, on a :

<u>Théorème</u> 5.- Soient G_1 et G_2 deux groupes comme d'habitude, et T un isomorphisme bipositif de $m_p(G_1)$ sur $m_p(G_2)$, $1 \leqslant p < \infty$. Alors les groupes G_1 et G_2 sont isomorphes.

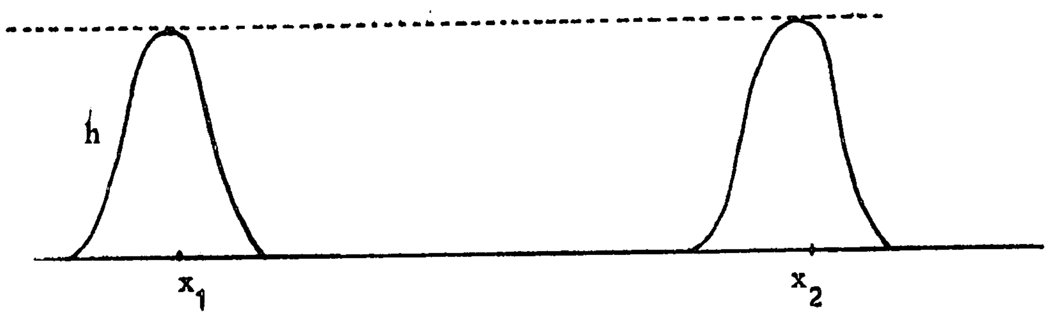
<u>Démonstration</u>.- <u>1er</u> <u>cas</u> : $p = 1$. Dans ce cas, T peut être considéré comme isomorphisme de $M_b(G_1)$ sur $M_b(G_2)$. Notons d'abord que T est continu. Il suffit de démontrer que

$$\|T\mu\| \leqslant c\,\|\mu\| \qquad (\forall \mu \geqslant 0,\ \mu \in M_b).$$

Mais ceci est presque évident. Car si T n'était pas continu, on pourrait choisir, pour chaque n, une mesure $\mu_n \geqslant 0$ telle que $\|\mu_n\| = 1$, $\|T\mu\|_n \geqslant n^3$. Alors $\mu = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2}\mu_n \in M_b$, et $\mu \geqslant \mu_n$. Donc $T\mu \geqslant \frac{1}{n^2} T\mu_n$ et $\|T\mu\| \geqslant n^3 . \frac{1}{n^2} = n$, une contradiction.

Considérons alors la mesure ε_a $(a \in G)$. $\varepsilon_a \geqslant 0$ et $\varepsilon_{a^{-1}} \geqslant 0$; d'ailleurs, $(T\varepsilon_a) * (T\varepsilon_{a^{-1}}) = \varepsilon_{e'}$. Désignons $T\varepsilon_a = \mu$, $T\varepsilon_{a^{-1}} = \vartheta$. Or $\mu \geqslant 0$, $\vartheta \geqslant 0$ et $\mu * \vartheta = \varepsilon_{e'}$. Il est facile de démontrer que les supports de μ et de ϑ ne contiennent qu'un seul point chacun.

Supposons, par exemple, que μ a au moins deux points distincts x_1 et x_2 dans son support, et que x_3 est un point du support de ϑ. On multiplie μ par une fonction $h \in C_c^+(G_2)$, $0 \leqslant h \leqslant 1$ comme dans ce dessin :



Alors $\mu' = h\mu \geqslant 0$ et $h\mu \in M_b(G_2)$. D'ailleurs $m_{\mu'} \leqslant m_\mu$. On choisit h telle que son support soit en deux pièces, l'une localisée autour de x_1, et l'autre autour de x_2. Puis, on choixit $k \in C_c^+(G_2)$ telle que $0 \leqslant k \leqslant 1$ et que le support de k soit assez petit autour de x_3 que le support de $\mu' * (k\vartheta)$ soit encore constitué de deux ensembles disjoints et non-vides. Alors, on a, si $k\vartheta = \vartheta'$

$$m_{\mu'} \circ m_{\nu'} \leqslant m_{\mu} \circ m_{\nu} = I' = m_{\varepsilon_{e'}} .$$

$$m_{\mu' * \nu'} \leqslant m_{\varepsilon_{e'}} .$$

Mais ceci est évidemment une contradiction.

On peut ainsi affirmer que $\mu = \lambda(a)\,\varepsilon_{a'}$, $\nu = \rho(a)\,\varepsilon_{a'^{-1}}$, où $\lambda(a)$, $\rho(a) > 0$. λ est un homomorphisme de G_1 dans $\mathbb{C}$. T est continu. Il en résulte que $\lambda(a) = 1$, $\rho(a) = 1$. Ceci est une conséquence du fait que $\varepsilon_{a^n} = \varepsilon_a * \ldots * \varepsilon_a$ (n fois) et que $\| \varepsilon_{a^n} \| = 1$; alors que $T(\varepsilon_{a^n}) = \lambda(a)^n \varepsilon_{a^n}$. On ne peut avoir ni $\lambda(a) < 1$ ni $\lambda(a) > 1$.

Enfin, on a une application φ de G_1 sur G_2 définie par la relation

$$T\,\varepsilon_a = \varepsilon_{\varphi(a)} .$$

φ est évidemment un isomorphisme. Il faut démontrer que φ est continu. Tout cela marche comme d'habitude.

<u>2me cas</u> $1 < p < \infty$. Dans ce cas, il existe une constante $c \geqslant 0$ telle que

(*) $$\| Tm \| \leqslant c \, \| m \| \qquad (\forall m \in m_p, \ m \geqslant 0).$$

La démonstration est identique à celle de l'inégalité correspondante du 1er cas. Alors le reste de la démonstration est facile : on utilise le théorème de Brainerd et Edwards pour démontrer que $T\,\tau_a(f) = \mu * f$ $(f \in C_c(G_2))$ où $\mu \in M(G_2)$ (pas nécessairement bornée), $\mu \geqslant 0$. Puis, on démontre que $\mu = \varepsilon_{a'}$, et on établit la continuité de application $a \longrightarrow a'$ en utilisant la compacité faible comme d'habitude.

Références

[1] Y. Kawada.- On the group ring of a topological group.- Math. Japon 1 (1948), 1-5.

[2] J. G. Wendel.- On isometric isomorphism of group algebras.- Pacific J. Math., 1 (1951), 305-311

[3] J. G. Wendel.- Left centraligers and isomorphisms of group algebras.- Pacific J. Math., 2 (1952), 251-261

[4] H. Helson.- Isomorphisms of Abelian group algebras.- Ark. Mat., 2 (26), 1953, 475-487

[5] R. E. Edwards.- Biposotive and isometric isomorphisms of some convolution algebras. - Canad. J. Math., 17 (1965), 839-846

[6] B. E. Johnson.- Isometric isomorphisms of measure algebras.- Proc. Amer. Math. Soc., 15 (2), 1964, 186-188

[7] R. S. Strichartz.- Isometric isomorphisms of measure algebras.- Pacific J. Math., 15 (1) (1965), 315-317

[8] R. S. Strichartz.- Isomorphisms of group algebras.- Proc. Amer. Math. Soc. 17 (4) (1966), 858-862

[9] S. K. Parrott.- Isometric multipliers. À paraitre dans Pacific J. Math.

[10] B. Brainerd et R. E. Edwards.- Linear operations which commute with translations. - Part I : Representations theorems.- J. Australian Math. Soc., 6 (1966), 289-327

Exposé nº VIII

Sobolev inequalities and extension theorems for functions with certain L^p derivatives

par

R. Strichartz

§ 1.- Introduction

We wish to generalize some theorems about the Sobolev spaces $L_k^p(\Omega) = \left\{f \in L^p(\Omega) : D^\alpha f \in L^p(\Omega) \text{ for all } |\alpha| \leqslant k\right\}$, Ω an open set in R^n and the derivatives existing in the distribution sense, to spaces of functions having only certain specified derivatives in $L^p(\Omega)$. To state the theorems we need some conditions on Ω which we now define.

Definition 1.- Ω is said to satisfy the weak cone condition if there exists a finite open covering $U_1, \ldots, U_N$ of Ω and finite cones $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ such that

(1.1) $\gamma_j + U_j \subseteq \Omega$, $j = 1, \ldots, N$.

Ω is said to satisfy the strong cone condition if there exists a finite open covering $U_1, \ldots U_N$ of $\partial\Omega$ with positive Lebesgue number (i.e., there exists $\varepsilon > 0$ such that the ε-ball about each point in $\partial\Omega$ is entirely contained in some U_j) and finite cones $\gamma_1, \dots \gamma_N$ such that

(1.2) $\gamma_j + (U_j \cap \Omega) \subseteq \Omega$

We can now state the three theorems we will generalize. We assume throughout $1 < p < \infty$.

Theorem 1 (Calderon [2]).- Let Ω satisfy the strong cone condition. Then for each k there exists a bounded linear extension operator $\mathcal{E}_k : L^p_k(\Omega) \longrightarrow L^p_k(R^n)$. By extension operator we mean $\mathcal{E}_k f = f$ on Ω.

Theorem 2 (Sobolev).- Let Ω satisfy the weak cone condition. Then we have the continuous inclusions

a) $L^p_k(\Omega) \subseteq L^q_j(\Omega)$ if $\frac{1}{p} \geqslant \frac{1}{q} \geqslant \frac{1}{p} - \frac{k-j}{n} > 0$

b) $L^p_k(\Omega) \subseteq C^j_o(\Omega)$ if $j < \frac{k}{n} - \frac{1}{p}$

where b) means each function in $L^p_k(\Omega)$ can be modified on a set of measure zero so that it is j-times continuously differentiable and it, together with its derivatives of order $\leqslant j$ are bounded and tend to zero as x tends to infinity in Ω.

Theorem 3 (Smith).- Let Ω be bounded and satisfy the weak cone condition. If $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ and $(\frac{\partial}{\partial x_j})^k f \in L^p(\Omega)$ for $j = 1, \dots n$ then $f \in L^p_k(\Omega)$ and

$$\|f\|_{p,k} \leqslant C\left(\sum_{j=1}^{n} \|(\frac{\partial}{\partial x_j})^k f\|_p + \|f\|_p\right).$$

Proofs may be found in [1, 2, 9]. Although there exist versions of the above theorems for L^1 and L^∞, our methods are only valid in the range $1 < p < \infty$.

In § 2 we define our spaces and prove generalizations of theorems 1, 2 and 3. The proofs are based on a generalization of the Sobolev representation formula (lemma 1) and use estimates for singular integrals with mixed homogeneity given in [4]. In § 3 we present some counter-examples to show that the conditions on Ω cannot be completely relaxed. In § 4 we apply the results to $L^p_k(\Omega)$ to obtain an extension theorem with loss of smoothness if Ω has a rough boundary. In § 5 we give applications to partial differential equations, including an extension theorem for solutions of certain systems of homogeneous constant coefficient linear equations.

§ 2.- Let us fix once and for all a basis $(x_1, \ldots, x_n)$ in R^n, so that if $(y_1, \ldots, y_n)$ is any other basis we have $y_i = \sum_{j=1}^{n} L_{ij}\, x_j$ for some real, non-singular $n \times n$ matrix L. If $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ is an n-tuple of non-negative integers we will denote by D^β_L the differential operator $(\frac{\partial}{\partial y_1})^{\beta_1} \ldots (\frac{\partial}{\partial y_n})^{\beta_n}$.

<u>Definition</u> 2.- Let α denote a sequence $\alpha(1), \ldots, \alpha(m)$ of n-tuples of non-negative integers $\alpha(k) = \{\alpha_1(k), \ldots, \alpha_n(k)\}$, and let L denote a sequence $L(1), \ldots, L(m)$ of real, non-singular $n \times n$ matrices. We denote by $L^p_{\alpha,L}(\Omega)$ the space of all functions $f \in L^p(\Omega)$ such that $D^\beta_L f = D^{\beta(1)}_{L(1)} \ldots D^{\beta(m)}_{L(m)} f \in L^p(\Omega)$

for all β such that

(2.1) $\sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j(k)}{\alpha_j(k)} \leqslant 1$, $k = 1, \ldots, m$, (by convention $\frac{0}{0} = 0$), the derivatives

existing in the distribution sense.

We equip $L^p_{\alpha,L}(\Omega)$ with a norm, denoted $\| \ \|_{p,\alpha,L}$, defined by

$\|f\|_{p,\alpha,L} = \sum \|D^\beta_L f\|_p$, the sum extending over all β satisfying (1). If each

$L(k)$ is the identity matrix we will just write $L^p_\alpha(\Omega)$.

Proposition 1.- $L^p_{\alpha,L}(\Omega)$ is complete. Any bounded linear operator $T : L^p(R^n) \longrightarrow L^p(R^n)$

which commutes with translations is also bounded $L^p_{\alpha,L}(R^n) \longrightarrow L^p_{\alpha,L}(R^n)$.

Proof.- The proof is an exercise in distribution theory, which we leave to the reader.

Let $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ now be a n-tuple of positive integers. For simplicity of notation we set $a_k = \frac{1}{\alpha_k}$ and $a = (a_1, \ldots, a_n)$. A non-empty, open set $\Gamma \subseteq R^n$ will be called an α-cone if $x \in \Gamma$ implies $t^a x = (t^{a_1} x_1, \ldots, t^{a_n} x_n) \in \Gamma$ for all $t > 0$. A finite α-cone is the intersection of an α-cone with a ball about the origin. A function 9 defined on an α-cone Γ is called a-homogeneous of degree s if it satisfies

(2.2) $g(t^a x) = tsg(x)$

Let Σ denote the unit sphere. Following [4] we define $\rho(x)$ to be the unique constant ρ for which $\rho^{-a} x \in \Sigma$. It is easy to see that $\rho(x)$ is a-homogeneous of degree $+1$. We introduce "polar coordinates" with respect to

ρ and Σ as follows : we identify $E_n - \{0\}$ with $(0, \infty) \times \Sigma$ by the map $x \longrightarrow (\rho, \vartheta)$, where $\rho = \rho(x)$ and $\vartheta = \rho^{-a}x$. This map is a diffeomorphism and its jacobian J is a-homogeneous of degree $|a| - 1$, where $|a| = \sum_{j=1}^{n} a_j$. We have the integral formula $\int_{E_n} g(x)dx = \int_{\Sigma} \int_0^{\infty} g(\rho, \vartheta)\ J(\rho, \vartheta)d\rho\ d\vartheta$.

We can now derive our basic representation lemma. We fix a finite α-cone $\gamma = \Gamma \cap B$ where Γ lies strictly in some half-space.

Lemma 1.- There exist functions $\psi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in L^1(R^n)$ such that, if we define $\mathcal{E}_\gamma : L^p(R^n)^{n+1} \longrightarrow L^p(R^n)$ by

(2.3) $\mathcal{E}_\gamma(f, f_1, \ldots, f_n) = f * \psi + \sum_{j=1}^{n} f_j * \psi_j$, we have $\mathcal{E}_\gamma(f, f_1, \ldots, f_n) = f$ on Ω' provided $f_j = (\frac{\partial}{\partial x_j})^{\alpha_j} f$ on Ω, where $\Omega' = \{x \in \Omega\ :\ x + \gamma \subset \Omega\}$. Furthermore, $\psi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ are supported on γ, ψ is C^∞ and vanishes in a neighborhood of the origin, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ are C^∞ on $R^n - \{0\}$ and locally a-homogeneous of degree $1 - |a|$ (i.e., agree with an a-homogeneous function in a neighborhood of the origin).

<u>Proof</u>.- Let γ' be an α-cone such that $\gamma'|\alpha| = \gamma' + \ldots + \gamma' \subseteq \gamma$.

let φ be locally a-homogeneous of degree $1 - |a|$, C^∞ on $R^n - \{0\}$, vanishing outside γ', non-negative and not identically zero. Then $J\varphi$ is locally a-homogeneous of degree zero. We normalize φ so that

$\int_{\Sigma} \lim_{\rho \to 0} J(\rho,\vartheta)\, \varphi(\rho,\vartheta) d = 1$. Let $\psi_o = \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial\rho}(J\varphi)$ and $\theta_j = \frac{\partial x_j}{\partial\rho}\varphi$. Then we have $f(x) = \iint \varphi(\rho,\vartheta)\ J(\rho,\vartheta)\ \frac{\partial}{\partial\rho} f(x - (\rho,\vartheta))d\rho\, d\vartheta +$

$$\iint \frac{\partial}{\partial\rho}(\varphi J)\ (\rho,\vartheta)\ f(x - (\rho,\vartheta))d\rho\, d\vartheta$$

by integration by parts. Substituting

$\frac{\partial}{\partial\rho} f(x - (\rho,\vartheta)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial\rho}(\rho,\vartheta)\ \frac{\partial f}{\partial x_j}(x - (\rho,\vartheta))$, and remembering $dx = J\, d\rho\, d\vartheta$ we have

(2.4) $f = \psi_o * f + \sum_{j=1}^{n} \theta_j * \frac{\partial f}{\partial x_j}$. Thus also

(2.5) $D^\beta f = \psi_o * D^\beta f + \sum_{j=1}^{n} \theta_j * D^\beta \frac{\partial f}{\partial x_j}$. Now we substitute (2.5) in the right hand side of (2.4) according to the following scheme : if $D^\beta f$ appears with $\beta_j < \alpha_j$ for all $j = 1,\ldots, n$, and it is not in a convolution containing ψ_o, then substitute the right hand side of (2.5). This process eventually terminates to give

(2.6) $f = \psi_o * \left(\sum_{\gamma_j < \alpha_j} c_\gamma \psi_\gamma * D^\gamma f\right) + \sum_{\substack{\beta_j \leqslant \alpha_j \\ \beta_k = \alpha_k}} c_\beta \psi_\beta * D^\beta f$

the c's being binomial constants, and

$\psi_\beta = \theta_1^{(\beta_1)} * \theta_2^{(\beta_2)} * \ldots * \theta_n^{(\beta_n)}$, $\theta_1^{(\beta_1)} = \theta_1 * \ldots * \theta_1$ (β_1 times).

Let $\psi = \left(\sum_{\gamma_j < \alpha_j} (-1)^\gamma c_\gamma (D^\gamma \psi_o) * \psi_\gamma\right.$ and let $\varphi_k = \sum_{\substack{\beta_j \leqslant \alpha_j \\ \beta_k = \alpha_k}} (-1)^{\beta-\beta_k} c_\beta D^{\beta-\beta_k}\psi_\beta$.

Then by integration by parts we have, at least formally

$$(2.7)\quad f = \psi * f + \sum_{k=1}^{n} \varphi_k * \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{\alpha_k} f.$$

Now γ' was contained in some half-space, so if g, h are supported in γ', C^∞ in $R^n - \{0\}$, and locally a-homogeneous of degrees $s - |a|$ and $t - |a|$ respectively, $s, t > 0$, then $g * h$ is supported in $\gamma' + \gamma'$, is C^∞ in $R^n - \{0\}$, and is locally a-homogeneous of degree $s + t - |a|$. Now let us compute the a-homegeneity of the above functions. For θ_j it is $a_j - |a|$, hence for ψ_β it is $(\sum_{j=1}^{n} \beta_j a_j) - |a|$, and for $D^{\beta-\beta_k}\psi_k$ it is $\beta_k a_k - |a|$, since $\frac{\partial}{\partial x_j}$ reduces the a-homogeneity by a_j. In particular, if $\beta_k = \alpha_k$, it is $1 - |a|$. Thus φ_k satisfies the conditions of the lemma. Note that integrability of a good locally a-homogeneous function is equivalent to the degree being $> -|a|$. Now ψ_0 is C^∞ and vanishes in a neighborhood of the origin, hence ψ has the same properties. Thus it remains to establish $\mathcal{E}_\gamma(f, f_1, \ldots, f_n) = f$ on Ω' if $f_j = \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^{\alpha_j} f$ on Ω.

Note that all the functions $\psi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ appearing in (2.7), and all the functions appearing in the derivation of (2.7) (excluding, of course, f and its derivatives) are integrable and supported in γ^N. Thus the integration by parts is justified, and for values of $x \in \Omega'$ we need only have f defined on Ω for (2.7) to hold. But there (2.7) is just $\mathcal{E}_\gamma(f, f_1, \ldots, f_n) = f$.

Remark.- We can also prove, by the same method, a variant of the lemma in which the term $f * \psi$ does not appear, but at the cost of having φ_j supported in an entire α-cone Γ. In this case φ_j is no longer integrable, and we must put further conditions on f to have $f_j * \varphi_j$ convergent.

Now suppose $\alpha_j = 0$ for some j. By relabeling coordinates we can suppose $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n'}, 0, \dots, 0)$ where $\alpha_j \neq 0$ for $j = 1, \dots, n'$. Let $\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n'})$. We say $\gamma \subset R^n$ is an α-cone if there exists an α'-cone $\gamma' \subset R^{n'}$ such that $\gamma = \gamma' \times \{0\} = \{x : (x_1, \dots, x_{n'}) \in \gamma'$ and $x_{n'+1} = \dots = x_n = 0\}$.

Corollary.- In this case lemma 1 is again valid, except that $\psi, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ are now measures supported in γ' of the form $\psi = \psi' \times \delta$, $\varphi_j = \varphi_j' \times \delta$ and $\psi', \varphi_1', \dots, \varphi_n'$, satisfy the conditions of the lemma with respect to α', γ'.

Proof.- In fact this is precisely what we get if we apply the lemma for α', γ' to each section of f parallel to $R^{n'}$ and put it together via Fubini's theorem.

Definition 3.- Ω is said to satisfy the weak α-cone condition if there exists a finite open cover $U_1, \dots, U_N$ of Ω and finite α-cones $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ such that

(2.8) $\gamma_j + U_j \subset \Omega$, $j = 1, \dots, N$.

Ω is said to satisfy the strong α-cone condition if there exists a finite open cover $U_1, \dots, U_N$ of $\partial\Omega$ with positive Lebesgue number and finite α-cones $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ such that

(2.9) $\gamma_j + (U_j \cap \Omega) \leq \Omega \quad j = 1,\ldots, N$

We define similarly the α, L-cone conditions by requiring the γ_j to be α-cones with respect to the coordinates $(y_1,\ldots, y_n) = L(x_1,\ldots, x_n)$.

<u>Theorem</u> 1'.- Let $\alpha(1),\ldots,\alpha(m)$, $L(1),\ldots, L(m)$ be as in Definition 2. Suppose Ω satisfies the strong $\alpha(k)$, $L(k)$-cone condition for $k = 1,\ldots, m$. Then there exists a bounded linear extension operator $\mathcal{E}_{\alpha,L} : L^p_{\alpha,L}(\Omega) \longrightarrow L^p_{\alpha,L}(R^n)$.

<u>Proof</u>.- The proof is by induction on m. The case $m = 0$ is trivial, for then, without assumptions on Ω, $\mathcal{E}_0 f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in \Omega \\ 0 & \text{if } x \notin \Omega \end{cases}$ is a bounded linear extension operator $L^p(\Omega) \longrightarrow L^p(R^n)$.

Suppose the theorem is true for $m - 1$. Then Ω satisfies the strong $\alpha(k)$, $L(k)$-cone conditions for $k = 1,\ldots m - 1$ hence there exists a bounded linear extension operator $\mathcal{F} : L^p_{\alpha(1),\ldots \alpha(m-1),\ L(1),\ldots L(m-1)}(\Omega) \longrightarrow L^p_{\alpha(1),\ldots \alpha(m-1),\ L(1),\ldots L(m-1)}(R^n)$. Let $(y_1,\ldots, y_n) = L(m)\ (x_1,\ldots, x_n)$. Then $(\frac{\partial}{\partial y_k})^{\alpha_k(m)} f \in L^p_{\alpha(1),\ldots \alpha(m-1),\ L(1),\ldots L(m-1)}(\Omega)$ if $f \in L^p_{\alpha,L}(\Omega)$. Hence $\mathcal{F}(\frac{\partial}{\partial y_k})^{\alpha_k(m)} f \in L^p_{\alpha(1),\ldots \alpha(m-1),\ L(1),\ L(m-1)}(R^n)$.

Now Ω satisfies the strong $\alpha(m)$, $L(m)$-cone-condition. Let $U_1,\ldots, U_N$ be the open cover of $\partial\Omega$ guaranteed by Definition 3, with Lebesgue number ε. Let $U_0 = \left\{ x \in R^n : d(x,\partial\Omega) > \frac{\varepsilon}{3} \right\}$. Then $U_0,\ldots, U_N$ forms an open cover of R^n with Lebesgue number $\frac{\varepsilon}{3}$. It is a routine matter now to construct a C^∞ partition of unity $h_o, \dots, h_N$ with h_k supported in U_k, such that all derivatives of h_k are bounded.

Now define $\mathcal{E}_{\alpha,L}$ as follows :

$$(2.10)\quad \mathcal{E}_{\alpha,L} f = h_o \mathcal{E}_o f + \sum_{k=1}^{N} h_k \mathcal{E}_{\gamma_k}\left(\mathcal{F}f, \mathcal{F}\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{\alpha_1(m)} f, \dots, \mathcal{F}\left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)^{\alpha_n(m)} f\right)$$

where γ_k is the cone associated with U_k and $\mathcal{E}_{\gamma_k}$ is given by lemma 1 or the corollary. Now $\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right)^{\alpha_k(m)} \mathcal{F}f = \mathcal{F}\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right)^{\alpha_k(m)} f$ on Ω, hence by lemma 1

$\mathcal{E}_{\gamma_k}\left(\mathcal{F}f, \mathcal{F}\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{\alpha_1(m)} f, \dots, \mathcal{F}\left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)^{\alpha_n(m)} f\right) = \mathcal{F}f = f$ on Ω'. But by (2.9) $\Omega' \supseteq U_k$. Thus $\mathcal{E}_{\alpha,L} f = f$ on Ω. It remains to show $\mathcal{E}_{\alpha,L} : L^p_{\alpha,L}(\Omega) \longrightarrow L^p_{\alpha,L}(R^n)$ and is bounded. This will follow once we have

$$\mathcal{E}_{\gamma_k} : (L^p_{\alpha(1),\dots \alpha(m-1),\, L(1),\dots L(m-1)}(R^n))^{n+1} \longrightarrow L^p_{\alpha,L}(R^n) \text{ bounded.}$$

But $\mathcal{E}_{\gamma_k}$ is a convolution operator hence by proposition 1 it is enough to show that $\mathcal{E}_{\gamma_k}$ is bounded from $L^p(R^n)^{n+1}$ to $L^p_{\alpha(m),\, L(m)}(R^n)$, or $D^\beta_{L(m)} \mathcal{E}_{\gamma_k}$ is bounded from $L^p(R^n)^{n+1}$ to $L^p(R^n)$ if $\frac{\beta_1}{\alpha_1} + \dots + \frac{\beta_n}{\alpha_n} \leqslant 1$. Now

$\mathcal{E}_{\gamma_k}(f, f_1, \dots, f_n) = \psi * f + \sum_{j=1}^{n} \varphi_j * f_j$. Let us assume $\alpha_j \neq 0$ for $j = 1, \dots n$.

Then $\psi \in C^{\infty}_{com}(R^n)$ so $f \longrightarrow D^\beta_{L(m)}(\psi * f)$ is bounded from $L^p(R^n)$ to $L^p(R^n)$.

If $\frac{\beta_1}{\alpha_1} + \dots \frac{\beta_n}{\alpha_n} < 1$ then $D^\beta_{L(m)} \varphi_j \in L^1(R^n)$ hence

$f_j \longrightarrow D^\beta_{L(m)} (\varphi_j * f_j) = f_j * D^\beta_{L(m)} \varphi_j$ is bounded from $L^p(R^n)$ to $L^p(R^n)$.

However, in case $\frac{\beta_1}{\alpha_1} + \dots + \frac{\beta_n}{\alpha_n} = 1$, $D^\beta_{L(m)} \varphi_j$ is locally a(m)-homogeneous of degree $-|a(m)|$, hence not integrable. Here we have to use the theory of singular integrals with mixed homogeneity developed in [4]. There it is shown that if g is $C^\infty(R^n - \{0\})$ and $a(m)$-homogeneous of degree $-|a(m)|$ and also

(2.11) $\int_\Sigma g(1,\vartheta)\, J(1,\vartheta)\, d\vartheta = 0$, then the principal value convolution with g defines a bounded linear operator on $L^p(R^n)$. It is also shown in the Appendix of [4] that (2.11) is equivalent to

(2.12) $\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g(y_1,\dots,y_n)\,dy_1 \cdots dy_{n-1} = 0$ for some fixed $y_n \neq 0$. Thus if g is a derivative $D^\beta_{L(m)} h$ then it satisfies condition (2.11). Furthermore, it is easy to modify the proof in the homogeneous case (see e.g. [1, theorem 11.4]) to show $D^\beta_{L(m)}(h * f) = cf + P\,V\,(g * f)$. Taking $h = \varphi_j$ in a neighborhood of the origin, h $a(m)$-homogeneous we get that $f_j \longrightarrow D^\beta_{L(m)}(\varphi_j * f)$ is bounded from $L^p(R^n)$ to $L^p(R^n)$.

Thus the theorem is proved if $\alpha_j \neq 0$, $j = 1,\dots n$. In general we must apply the corollary to lemma 1 and reason as above with each section of f restricted to each subspace parallel to $R^{n'}$.

Theorem 2'.- Let $\alpha(1),\dots \alpha(m)$, $L(1),\dots L(m)$ be as above, and assume $\alpha_j(k) \neq 0$ $j = 1,\dots n$, $k = 1,\dots m$. Suppose Ω satisfies the weak $\alpha(k)$, $L(k)$-cone condtion for $k = 1,\dots m$. Then we have the following continuous inclusions :

a) $L^p_{\alpha,L}(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)$, provided, $p \leqslant q < \infty$ and $\frac{1}{q} \geqslant \frac{1}{p} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{|a(k)|}$

b) $L^p_{\alpha,L}(\Omega) \subseteq C_o(\Omega)$ after modification on a set of measure zero, provided $\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{|a(k)|} < \frac{1}{p}$

Proof.- Again the proof is by induction on m. The induction argument goes as before, so we will only give the proof in the case $m = 1$, $L = I$. Since Ω satisfies the weak α-cone condition we have an open covering $U_1, \ldots, U_N$ of Ω given in Definition 2. It clearly suffices to show $L^p_\alpha(\Omega)\big|_U \leqslant L^q(U)$ for U one of the U_j's. Let γ be the associated α-cone. Then by lemma 1 we have $f = \psi * f + \sum_{j=1}^{n} \varphi_j * f_j$ on U, where $f_j = (\frac{\partial}{\partial x_j})^{j} f \in L^p(\Omega)$. Now $\psi \in C^\infty_{com}$ hence $\psi * f \in C^\infty_0$. Also φ_j is locally a-homogeneous of degree $1 - |a|$. Thus $\varphi_j \in L^{(1+\frac{-1}{|a|})^{-1}, \infty}$, the Lorentz space of functions satisfying $m\left\{x \in R^n : |f(x)| \geqslant S\right\} \leqslant C\, S^{-(1+\frac{-1}{|a|})^{-1}}$. Now the modern version of the Hardy-Littlewood and Sobolev Fractional Integration theorem asserts that convolution is a bounded bilinear map from $L^p \times L^{r,\infty}$ to L^q where $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} - 1$ provided $1 < p, q, r < \infty$. Applying this to $f * \varphi_j$ gives a). To prove b) we note that the conditions on α and p imply $\varphi_j \in L^{p'}$ where $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p}$. Thus b) follows from the classical Hölder theorem.

Corollary.- We also have $D^\beta_L f = D^{\beta(1)}_{L(1)} \cdots D^{\beta(m)}_{L(m)} f \in L^q(\Omega)$

if $\sum_j \frac{\beta_j(k)}{\alpha_j(k)} = \beta(k).\ a(k) \leqslant 1$ and $p \leqslant q < \infty$, $\frac{1}{q} \geqslant \frac{1}{p} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1-\beta(k).a(k)}{|a(k)|} \geqslant 0$

or $D_L^{\beta} f \in C_o(\Omega)$ if $\beta(k).a(k) \leqslant 1$ and $\frac{1}{p} < \sum_{k=1}^{m} \frac{1-\beta(k).a(k)}{|a(k)|}$.

The corollary is proved by the same reasoning. Note, however, that the decomposition $D_L^{\beta} = D_{L(1)}^{\beta(1)} \dots D_{L(m)}^{\beta(m)}$ is not canonical, and that different decompositions may give different restrictions on p and q.

We can also obtain inclusion theorems for non-negative multi-indices, although the formulas become more complicated. For simplicity we restrict to the case $L(1) = \dots = L(m) = I$.

Theorem 2".- Let $\alpha(1), \dots, \alpha(m)$ be multi-indices of non-negative integers such that $\sum_{k=1}^{m} \alpha_j(k) > 0$ for $j = 1, \dots, n$. Suppose Ω satisfies the weak $\alpha(k)$-cone condition for $k = 1, \dots m$. Let $\beta(1), \dots \beta(m)$ be such that $0 \leqslant \beta_j(k) \leqslant \alpha_j(k)$, $\sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j(k)}{\alpha_j(k)} \leqslant 1$ (recall $\frac{0}{0} = 0$) and $\sum' \alpha_j(k) - \beta_j(k) > 0$, the summation extending over all k such that $\sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j(k)}{\alpha_j(k)} < 1$. Then $f \in L_{\alpha}^{p}(\Omega)$ implies

$D^{\beta} f = D^{\beta(1)} \dots D^{\beta(m)} f \in L^{q}(\Omega)$ if $p \leqslant q < \infty$ and

$$\frac{1}{q} \geqslant \frac{1}{p} - \inf_j \sum_{\alpha_j(k) > \beta_j(k)} \frac{1-\beta(k).a(k)}{\sum_{\alpha_i(k) > 0} a_i(k)} \geqslant 0 \quad \text{or} \quad C_o(\Omega) \text{ if the last term is } < 0.$$

Proof.- First we note that the values of k for which $(k).a(k) = 1$ make no contribution to the theorem, so we may assume without loss of generality that they don't exist. Next we note that by intersecting the elements of the different open covers associated with the $\alpha(k)$-cone conditions we obtain a common open cover $U_1, \ldots, U_N$ satisfying $U_j + \gamma_j(1)^{|\alpha(1)|} + \ldots + \gamma_j(m)^{|\alpha(m)|} \subseteq \Omega$, where $\gamma_j(k)$ is an $\alpha(k)$-cone. Let U be an element of this cover, and $\gamma(1), \ldots \gamma(m)$ the associated cones. It is clearly sufficient to prove that $D^\beta f|_U \in L^q(U)$ or $C_0(U)$.

For simplicity we assume $m = 2$, the general case is analogous, but notationally more cumbersome. We relabel the coordinates so that $\alpha_j(1) = 0$ if and only if $j > w$ and $\alpha_j(2) = 0$ if and only if $j \leqslant v$. By hypotheses $v \leqslant w$. By lemma 1 we have, in U,

$$f = \psi(1) * f + \sum_{j=1}^{w} \varphi_j(1) * \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^{\alpha_j(1)} f$$

$$= \psi(1) * \psi(2) * f + \sum_{j=1}^{w} \psi(2) * \varphi_j(1) * \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^{\alpha_j(1)} f + \sum_{j=v+1}^{n} \psi(1) * \varphi_j(2) * \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^{\alpha_j(2)} f$$

$$+ \sum_{j=1}^{w} \sum_{k=v+1}^{n} \varphi_j(1) * \varphi_k(2) * \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^{\alpha_j(1)} \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{\alpha_k(2)} f$$

As before the difficult step is to show that convolution by $D^\beta(\varphi_j(1) * \varphi_k(2))$ is a bounded linear operator from L^p to L^q. If we let $g = D^{\beta(1)} \varphi_j(1)$ and $h = D^{\beta(2)} \varphi_j(2)$ we have $g = g'(x_1, \ldots x_w) \times \delta_1$ and $h = \delta_2 \times h'(x_{v+1}, \ldots x_n)$ where g is locally $(a_1(1), \ldots a_w(1))$-homogeneous of degree $1 - \sum_{j=1}^{w} (a_j(1) + a_j(1)\beta_j(1))$ and h is locally $(a_{v+1}(2), \ldots a_n(2))$ homogeneous of degree $1 - \sum_{j=v+1}^{n} (a_j(2) + a_j(2)\beta_j(2))$, and both have compact support.

The proof will be complete once we have established :

Lemma 2.- Let $g \in L^{p,\infty}(R^w)$, $h \in L^{q,\infty}(R^{n-v})$ have compact support, and suppose $v \leq w$. Then the function φ given by

$$\varphi(x_1,..x_n) = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} g(x_1,..x_v,x_{v+1}-y_{v+1},..,x_w-y_w)h(y_{v+1},..y_w,x_{w+1}..x_n)dy_{v+1}..dy_w$$

if $v < w$, $\varphi(x_1,\dots,x_n) = g(x_1,\dots,x_v)\,h(x_{v+1},\dots x_n)$ if $v = w$,

defines, by convolution, a bounded operator from $L^r(R^n)$ to $L^s(R^n)$ where $\frac{1}{s} = \frac{1}{r} + \max\left\{\frac{1}{p} ; \frac{1}{q}\right\} - 1$, provided $1 < p, q, r, s < \infty$.

Proof.- By the Marcinkiewicz Interpolation theorem for Lorentz spaces [7] it suffices to prove the result under the assumption $g \in L^p(R^w)$, $h \in L^q(R^{n-v})$. Say $p \leq q$. Then since h has compact support we have also $h \in L^p(R^{n-v})$. This implies $\varphi \in L^p(R^n)$ by Fubini's theorem (note $L^p_{com} * L^p_{com} \subseteq L^p_{com}$). Now the result is just the standard convolution inequality.

Remark.- In case $\Omega = R^n$ it is possible to identify the spaces $L^p_{\alpha,L}(R^n)$ with spaces defined by Fourier transforms. For these spaces it is possible to obtain inclusion relations (see [II]). However, to obtain best possible results it is necessary to enlarge the class of spaces considered. This explains why the corollary to theorem 2' is so awkward to formulate.

Any such result about $L^p_{\alpha,L}(R^n)$ can be transferred to domains satisfying weak cone conditions by means of the following relative extension theorem which is a corollary of the proof of theorem 1' :

Theorem 1".- Let $U \subsetneq \Omega \subsetneq R^n$ be open sets such that $U + \gamma(1) + \ldots + \gamma(m) \subsetneq \Omega$, where $\gamma(k)$ is some $\alpha(k)$, $L(k)$-cone. Then there exists a bounded linear operator $\mathcal{E} : L^p_{\alpha,L}(\Omega) \longrightarrow L^p_{\alpha,L}(R^n)$ such that $\mathcal{E}f = f$ on U.

Theorem 3'.- Suppose Ω is bounded and satisfies the weak $\alpha(k)$, $L(k)$-cone condition for $k = 1, \ldots m$. If $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ and $D^\beta_L f = D^{\beta(1)}_{L(1)} \ldots D^{\beta(m)}_{L(m)} f \in L^p(\Omega)$ for all D^β_L such that $\beta(k) = (0, \ldots 0, \alpha_j(k), 0, \ldots, 0)$ for some j depending on k, then $f \in L^p_{\alpha,L}(\Omega)$ and

$\|f\|_{p,\alpha,L} \leqslant C(\|f\|_p + \sum \|D^\beta_L f\|_p)$, the summation extending over all such D^β_L.

Proof.- Again the proof is by induction on m. We give the details only for the case $m = 1$, $L = I$.

Assume first $\alpha_j \neq 0$ for $j = 1, \ldots n$. Again we apply lemma 1 to f in one of the sets U of the open cover given in Definition 2. The terms of the form $\varphi_j * (\frac{\partial}{\partial x_j})^{\alpha_j} f$ are shown to be in $L^p_\alpha(U)$ just as in the proof of theorem 1', since we have assumed $(\frac{\partial}{\partial x_j})^{\alpha_j} f \in L^p(\Omega)$. Now, however, $\psi * f$ is the difficult term since we only know $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. But ψ is C^∞_{com} with support in $\gamma^{|\alpha|}$ and vanishing in a neighborhood of the origin. This implies $\psi * f \in C^\infty(\bar{U})$, and since Ω is bounded $C^\infty(\bar{U}) \subsetneq L^p_\alpha(U)$.

If some $\alpha_j = 0$ we have assumed $f \in L^p(\Omega)$ because $(0, \ldots 0, \alpha_j, 0, \ldots 0) = (0, . 0$

The proof now proceeds just as in theorem 1'.

§ 3.- We begin with some simple remarks about the cone conditions.

1) Ω satisfies the strong α-cone condition if and only if its complement does. This is not true for the weak α-cone condition.

2) If $\beta_j = C\,\alpha_j$ then the α and β-cone conditions are the same.

3) Let Ω have the form $\left\{x : x_n \geqslant g(x_1, \dots, x_{n-1})\right\}$. Suppose $\alpha_n \geqslant \alpha_j$ for $j = 1, \dots n-1$. If g satisfies a uniform Lipschitz condition of order $\frac{\alpha_j}{\alpha_n}$ in the x_j direction, i.e. $|g(x) - g(y)| \leqslant C \sum_{j=1}^{n-1} |x_j - y_j|^{\alpha_j/\alpha_n}$, then Ω satisfies the strong α-cone condition.

Now let us consider an example. In R_2 we define $\Omega_t = \left\{(x, y) : y > |x|^t\right\}$. Let φ be a C^∞_{com} function $= 1$ in the unit ball. Let $f_s(x, y) = y^{-s}\,\varphi(x, y)$. We compute that $f_s \in L^p_{(\ell,m)}(\Omega)$ if and only if $s < \frac{1+t}{tp} - m$, and $f_s \in L^q(\Omega)$ if and only if $s < \frac{1+t}{tq}$. It follows that theorem 2' can only hold if $t \geqslant \frac{\ell}{m}$. Now theorem 1' holding for Ω would imply theorem 2' for Ω because theorem 2' holds for R^n. Thus theorem 1' also fails unless $t \geqslant \frac{\ell}{m}$. But this is exactly the weak (ℓ,m)-cone condition.

Unfortunately, if $\ell > m$ none of the Ω_t, $t > 0$, satisfy the strong (ℓ,m)-cone condition since this requires that the boundary be horizontal for an interval every time the height achieves a relative maximum or minimum.

This example can be modified to show that the conditions on Ω in theorem 2' are very close to being necessary. However it is not clear whether there is some condition between the weak and strong α-cone conditions which is sufficient for theorem 1 . For example, one may ask, in the classical case, whether theorem 1 1 holds for the complement of Ω_t which always satisfies the weak cone condition.

Finally, we present an example to show that theorem 3 does not hold for arbitrary bounded open sets. It seems unlikely, however, that the weak cone condition is really necessary.

First consider the unbounded Ω in R^2 given by $\Omega = \{(x, y)\} : x \geqslant 0$ and $0 \leqslant y \leqslant a(x)\}$ where $a(x)$ is a finite, positive, continuous, decreasing function satisfying $\int_0^\infty a(x)dx < \infty$ but $\int_0^\infty x^p\, a(x)dx = \infty$. Define $f(x, y) = x$ on Ω. Then every derivative of f is bounded, hence in $L^p(\Omega)$, but f is not in $L^p(\Omega)$. Now Ω can be mapped onto a bounded domain Ω' by a C^∞ diffeomorphism φ such that all the derivatives of φ^{-1} are bounded. In fact, we just wind Ω in a spiral, which remains inside a disk since $\int_0^\infty a(x)dx < \infty$. Then to φ^{-1} is not in $L^p(\Omega')$, but every derivative is.

§ 4.– <u>Definition</u> 4.– Let $0 < t \leqslant 1$. An open set $\Omega \subseteq R^n$ is said to have a <u>Lip</u> t <u>boundary</u> if there exists a finite open cover $U_1, \ldots, U_N$ of $\partial\Omega$ with positive Lebesgue number, and matrices $L_1, \ldots, L_N$ such that each pair U, L satisfies :

If $(y_1,\dots, y_n) = L(x_1,\dots, x_n)$ there exists $g(y_1,\dots, y_{n-1})$ satisfying a uniform Lipschitz condition of order t such that

$\Omega \cap U = \left\{y : y_n > g(y_1,\dots, y_{n-1})\right\} \cap U.$

<u>Theorem</u> 4.- Let $t = \frac{k}{m} \leqslant 1$, and suppose Ω has a Lip t boundary. Then there exists a bounded linear extension operator $\mathcal{E} : L^p_m(\Omega) \longrightarrow L^p_k(R^n)$.

<u>Proof</u>.- In case $t = 1$ this is just theorem 1. Let $k < m$. Let $U_1,\dots, U_N$, $L_1,\dots, L_N$ be as in Definition 4. Now trivially $L^p_m(\Omega) \subseteq L^p_{(k,\dots k,m),\, L(j)}(\Omega)$ for each $j = 1,\dots N$. But by theorem 1" we have a relative extension operator $\mathcal{F}_j : L^p_{(k,\dots k,m),\, L(j)}(\Omega) \longrightarrow L^p_{(k,\dots k,m),\, L(j)}(R^n)$, $\mathcal{F}_j f = f$ on U_j in view of remark 3) of § 3 (it may be necessary to take U a little smaller than originally given). But $L^p_{(k,\dots k,m),\, L(j)}(R^n) \subseteq L^p_k(R^n)$. Thus $\mathcal{F}_j : L^p_m(\Omega) \longrightarrow L^p_k(R^n)$. We obtain an extension operator from the relative extension operators via a partition of unity as in theorem 1'.

<u>Remark</u>.- We get as a corollary weaker versions of the Sobolev inequalities for domains with Lip t boundary. The details are straightforward and are left to the reader. Similar results have been obtained by Hurd [8], although his boundary conditions are of a different nature.

The following example of such a result may be of interest :

<u>Corollary</u>.- Suppose Ω has a lip t boundary for some $t > 0$. Then

$L^p_\infty(\Omega) = \bigcap_{k=1}^{\infty} L^p_k(\Omega) \subseteq C^\infty_0(\Omega)$

Of course the inclusion $L^p_\infty(\Omega) \subseteq C^\infty(\Omega)$ holds for all Ω since it is essentially a local result.

§ 5.- Here we give some applications to partial differential equations

Theorem 5.- Let Ω be bounded and satisfy the strong cone condition. If $f \in L^2_k(\Omega)$ and $P(D)$ is any constant coefficient linear partial differential operator, then the equation $P(D)u = f$ can be solved with $u \in L^2_k(\Omega)$; in fact the solution can be given by a bounded linear transformation on $L^2_k(\Omega)$.

Proof.- Let $\mathcal{E}_k$ be the extension operator of theorem 1, and let E be a fundamental solution of $P(D)$ given in [5]. E has the property that $E : L^2(R^n) \longrightarrow L^2_{\ell oc}(R^n)$, E commutes with translations and $P(D)\, Ef = f$. It follows that $E : L^2_k(R^n) \longrightarrow L^2_{k,\ell oc}(R^n)$. The solution to $P(D)u = f$ is given by $u = E\,\mathcal{E}_k f|_U$. It is easily seen to have the desired properties since Ω is bounded.

Theorem 6.- Let Ω be bounded and satisfy the strong cone condition and the strong $\alpha(k)$, $L(k)$-cone condition for $k = 1, \ldots, m$. Let $D_1, \ldots D_M$ be differential monomials of the form $D^{(1)}_{L(1)} \ldots D^{(m)}_{L(m)}$ with $\beta(k).a(k) \leqslant 1$ and including all such monomials with, for each k, $\beta(k) = (0, \ldots, 0, \alpha_j(k), 0, \ldots 0)$ for some j depending on k. Let $\mathcal{P}$ be the (finitely-generated) module over the polynomials of M-tuples $P_1, \dots, P_M$ of differential polynomials satisfying $P_1 D_1 + \dots + P_M D_M \equiv 0$. Let $L^p_k(\Omega, \mathcal{P}) = \{u \in L^p_k(\Omega)^M : \mathcal{P}u = 0\}$. Then there exists a bounded linear extension operator $\mathcal{E}_{\mathcal{P}} : L^p_k(\Omega, \mathcal{P}) \longrightarrow L^p_k(R^n, \mathcal{P})$ provided $H^1(\Omega, R) = 0$.

Proof.- The theorem for over determined systems [3, 6, 10] states that for convex Ω the equations $u_j = D_j v$ $j = 1, \dots M$ will have a solution $v \in \mathcal{D}'(\Omega)$ if and only if $\mathcal{P}u = 0$. By theorem 3' $v \in L^p_{\alpha(1), \dots \alpha(m+1), L(1), \dots L(m), I}$ where $\alpha(m+1) = (k, \dots k)$. Now v is not unique, but the space of solutions to the homogeneous equations $D_j w = 0$ $j = 1, \dots M$, is finite dimensional. It is this fact which both allows us to replace the hypothesis Ω convex by the cohomology condition $H^1(\Omega, R) = 0$, and also enables us to construct a bounded linear map $u \longrightarrow v$ by normalizing with conditions $(v, \theta_k) = 0$ for certain $\theta_k \in C^\infty_{com}(\Omega)$. The desired extension map is $u \longrightarrow v \longrightarrow D_j \mathcal{E} v$, where $\mathcal{E}$ is the extension operator of theorem 1' for $L^p_{\alpha(1), \dots \alpha(m+1), L(1), \dots L(m), I}(\Omega)$.

If we take $m = 1, \alpha = (1, \dots 1)$, $D_1, \dots D_n = \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ the system $\mathcal{P}u = 0$ is equivalent to $\operatorname{curl} u = 0$ (i.e., $\frac{\partial u_k}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_k}$)

In general, pick a set of generators of $\mathcal{P}$, so that $\mathcal{P}u = 0$ is equivalent to $\sum_{j=1}^{M} P_j(i) u_j = 0$ for $i = 1, \dots N$. Then if we take $k - \frac{n}{p}$ greater than the highest degree of the $P_j(i)$, we have the above equations holding in the ordinary sense for $u \in L_k^p(\mathcal{P})$.

BIBLIOGRAPHY

[1] AGMON (S.).- Lectures on elliptic boundary value problems.- Van Nostrand, 1965.

[2] CALDERON (A.P.).- Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions.- Symp. on pure math. 5, 1961, 33-49.

[3] EHRENPREIS (L.).- A fundamental principle.- Intern. symp. on linear spaces.- Jerusalem, 1961, 161-174.

[4] FABES (E.B.), RIVIERE (N.M.).- Singular integrals with mixed homogeneity.- Studia math, 27, 1966.

[5] HORMANDER (L.).- Linear partial differential operators.- Berlin, Springer-Verlag, 1963.

[6] HORMANDER (L.).- An introduction to complex analysis in several variables.- Van Nostrand, 1966.

[7] HUNT (R.).- An extension of the Marcinkiewicz interpolation theorem.- Bull. Amer. Math. Soc., 70, 1964, 803-807.- Addendum, 71, 1965, 396.

[8] HURD (A.).- Boundary regularity in the Sobolev embedding theorems.- Canadian journal of math., 18, 1966, 350-356.

[9] LIONS (J.).- Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles.- Université de Montréal, 1962.

[10] MALGRANGE (B.).- Sur les systèmes différentiels à coefficients constants.- Séminaire Leray.- Collège de France, 1961-62, exposés 8 et 8a.

[11] VOLEVICH (L.P.), PANEYAKH (B.P.).- Certain spaces of generalized functions and embedding theorems.- Russian mathematical surveys, 20, 1965, 1-74.

B_o-algèbres

par W. Zelazko

Définition 1.- Une B_o-algèbre est une algèbre topologique localement convexe, métrisable et complète, et telle que l'application $(x,y) \longrightarrow xy$ soit continue. (Il suffit pour cela qu'elle soit séparément continue).

Théorème 1.- La topologie d'une B_o-algèbre peut être définie par une suite croissante de semi-normes $x \longrightarrow |x|_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ telle qu'on ait

(1) $$|xy|_i \leqslant |x|_{i+1} \, |y|_{i+1} \, .$$

Remarque.- La condition suivante (plus forte) est souvent vérifiée :

(1') $$|xy|_i \leqslant |x|_i \, |y|_i \, .$$

Si l'algèbre possède une unité e, on peut alors supposer de plus :

(2) $$|e|_i = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Nous ne savons pas si la topologie d'une B_o-algèbre unitaire quelconque peut être définie par une suite croissante de semi-normes vérifiant simultanément (1) et (2).

I. Algèbres localement multiplicativement convexes

Définition 2.- Une B_o-algèbre A localement multiplicativement convexe (ou ℓ m c) est une B_o-algèbre dont la topologie peut être définie par une suite de semi-normes $x \longrightarrow |x|_i$ vérifiant (1').

Pour cela il faut et il suffit que la topologie de A puisse être définie par une suite de semi-normes telles que le produit de A $(x,y) \longrightarrow xy$ soit séparément continu relativement à chacune d'elles.

Théorème 2.- Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est une B_0-algèbre localement multiplicativement convexe

(ii) A est une algèbre topologique complète et possède un système fondamental dénombrable de voisinages de zéro U_i $(i = 1, 2, \dots)$ convexes et tels que $\{xy \mid (x,y) \in U_i^2\} \subset U_i$.

(iii) A est algébriquement et topologiquement isomorphe à une limite projective d'une suite d'algèbres de Banach.

Précisons (iii) : si la topologie de A est définie par une suite croissante de semi-normes $x \longrightarrow |x|_i$ vérifiant (1'), $A = \varprojlim A_i$ où A_i est l'algèbre de Banach complétée du quotient de A par l'idéal $\{x \mid |x|_i = 0\}$ (les applications $A_i \longrightarrow A_j$, $j \leqslant i$, sont canoniques).

Exemple.- L'algèbre $C(-\infty, +\infty)$ des fonctions continues sur R, l'algèbre $E(\mathbb{C})$ des fonctions entières définies sur $\mathbb{C}$, munies de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, constituent des B_0-algèbres ℓ m c.

Contrairement aux algèbres de Banach, les B_0-algèbres ℓ m c unitaires commutatives peuvent contenir des idéaux maximaux non fermés, ou de codimension > 1. Par exemple, posons

$$I_0 = \{f \in C(-\infty, +\infty) \mid \exists T_f,\ f^{-1}(\{0\}) \supset (T_f, +\infty)\}.$$

I est un idéal dense de $C(-\infty, +\infty)$, donc tout idéal maximal propre contenant I est dense. De plus, tout idéal propre maximal contenant I est de codimension infinie.

Cependant plusieurs propriétés importantes des algèbres de Banach s'étendent aux B_0-algèbres ℓ m c. Les démonstrations utilisent principalement le théorème 2, (iii). Supposons pour simplifier les algèbres considérées unitaires :

- Théorème de Gelfand-Mazur : Une algèbre ℓ m c à division est isomorphe au corps des réels, des complexes, ou des quaternions.

Soit A une algèbre ℓ m c complexe commutative :

- L'intersection de tous les idéaux maximaux de A est fermée
- L'application $x \longrightarrow x^{-1}$ (définie sur le groupe multiplicatif) est continue
- L'ensemble M_A des fonctionnelles multiplicatives de A continues non identiquement nulles est non vide et s'identifie à l'ensemble des idéaux maximaux fermés
- Si $\sigma_A(x)$ est l'ensemble des scalaires λ tels que $\lambda e - x$ ne soit pas inversible (spectre de x) on a

$$\sigma_A(x) = \left\{\varphi(x) \middle| \varphi \in M_A\right\}.$$

Donc, pour que x soit inversible il faut et il suffit que pour tout $\varphi \in M$, $\varphi(x) \neq 0$.

- $\sigma_A(x) = \bigcup_i \sigma_{A_i}(x_i)$, où les A_i sont les algèbres de Banach décrites plus haut ($A = \varprojlim A_i$), et x_i est la projection de x dans A_i : $\sigma_A(x)$ est donc un σ-compact.
- L'algèbre $\mathcal{H}(\sigma(x))$ des fonctions holomorphes sur $\sigma(x)$ opère sur x, dans le

sens habituel du calcul symbolique holomorphe.

En particulier, si $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \in E(\mathbb{C})$ (fonctions entières sur $\mathbb{C}$), $\sum_{n} a_n x^n$ converge pour tout $x \in A$. La réciproque est vraie dans le cas commutatif :

<u>Théorème</u>.– Pour qu'une B_0-algèbre commutative A soit ℓ m c, il faut et il suffit que pour toute série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ (a_n scalaire) telle que $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, et pour tout $x \in A$, $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ converge.

<u>Propriété</u> <u>d'extension</u> ("extension property").– On dit qu'une algèbre topologique A a la propriété d'extension si, dès qu'une série de puissances $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ (a_n scalaire) converge sur un ouvert de A elle converge en tout point de A.

<u>Théorème</u>.– Pour qu'une B_0-algèbre ℓ m c commutative unitaire ait la propriété d'extension, il faut et il suffit que l'ensemble de ses éléments inversibles ne soit pas ouvert.

II.– <u>Exemples de B_0-algèbres non</u> ℓ m c

1º) $L^{\omega}([0\,,\,1])$. On désigne ainsi l'algèbre $\bigcap_{p \geq 1} L^p([0\,,\,1])$ pour le produit point par point, munie de la topologie borne supérieure des topologies naturelles des L^p.

Tout idéal maximal de L^{ω} est dense et de codimension infinie.

Il n'existe pas sur L^{ω} de fonctionnelle multiplicative non identiquement nulle. En effet, une telle fonctionnelle, restreinte à $C([0\,,\,1])$, serait une mesure de Dirac, et elle annulerait un élément inversible de L^{ω}.

L'application $x \longrightarrow x^{-1}$ (x inversible dans L^{ω}) n'est pas continue.

Les seules séries de puissances $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ (a_n scalaire) qui convergent pour tout $x \in L^{\omega}$ sont les polynômes.

2º) Williamson a donné un exemple d'une B_0-algèbre contenant une algèbre à division dense, algébriquement isomorphe au corps des fractions rationnelles.

3º) $\ell^{1+} = \bigcap_{p>1} \ell_p(N)$, suivant le produit de convolution. Le spectre de ℓ^{1+} est le disque ouvert $\left\{z \,\middle|\, |z| < 1\right\}$. Il existe un élément non inversible de ℓ^{1+} qui ne s'annule en aucun point du spectre.

III.- "Extended spectrum"

Etant donné un élément x d'une B_0-algèbre unitaire A, on désigne ainsi le sous-ensemble $\sum_A(x)$ de la sphère de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ égal à la réunion de $\sum_A(x)$; de l'ensemble des discontinuités de la fonction $\lambda \longrightarrow (\lambda e - x)^{-1}$, et de $\{\infty\}$ si $\lambda \longrightarrow (1 - \lambda x)^{-1}$ est discontinu en 0 ;

Si A est ℓ m c $\sum_A(x) = \sigma_A(x)$.

Contrairement à $\sigma_A(x)$ (cf. exemple 2) $\sum_A(x)$ n'est jamais vide.

Si $R_A(x) = \operatorname{Sup}\left\{|z| \,\middle|\, z \in \sum_A(x)\right\}$, on a

$$R_A(x) = \operatorname{Sup} \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|x^n|}$$

la borne supérieure étant prise sur un ensemble de semi-normes définissant la topologie de A.

On a aussi

$$R_A(x) = \operatorname*{Sup}_{f \in A^*} \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{f(x^n)}$$

où A^* est le dual topologique de l'evt A.

IV.- Diviseurs topologiques de zéro généralisés

Le théorème classique affirmant que toute algèbre de Banach non triviale possède des diviseurs de zéro topologiques ne s'étend pas aux algèbres topologiques plus générales. En effet si $x \in E(\mathbb{C})$ et $Y \subset E(\mathbb{C})$, $0 \in \overline{xY} \Longrightarrow x = 0$ où $0 \in \overline{Y}$. On est alors amené à poser la définition suivante :

Définition.- On dit que deux sous-ensembles X, Y d'une B_0-algèbre A sont des diviseurs de zéro topologiques généralisés si $0 \notin \overline{X} \cup \overline{Y}$, mais $0 \in \overline{XY}$, où $XY = \{xy \mid x \in X, \ y \in Y\}$.

Théorème.- Si une B_0-algèbre A ℓ m c ne contient pas de diviseurs de zéro topologiques généralisés, elle est isomorphe au corps des réels, des complexes, ou des quaternions.

Démonstration dans le cas où A est complexe et unitaire (C. Ryll-Nardzewski) :

1º) $\forall x \in A, \quad \exists \lambda \in \mathbb{C}, \quad x^2 = \lambda x.$

Alors, si $A \neq \mathbb{C}$, A possède des diviseurs de zéro algébriques.

2º) $\exists x \in A$, x et x^2 linéairement indépendants

$\exists f \in A^* : f(x) = 0, \quad f(x^2) \neq 0$

$t \longrightarrow g(t) = f(x \exp(tx))$ $(t \in \mathbb{C})$ est une fonction entière.

Il existe une suite t_n, $n = 1, 2, \ldots$ telle que $g(t_n)g(-t_n) \longrightarrow \infty$ car

$g(t)g(-t)$ n'est pas constante. En effet $g(t)g(-t) = \text{cte} \Longrightarrow g(t)g(-t) \equiv 0 \Longrightarrow g(t) \equiv 0$ $\Longrightarrow f(x^2) = g'(0) = 0$.

Si alors $y_n = \dfrac{x \exp(t_n x)}{g(t_n)}$ $z_n = \dfrac{x \exp(-t_n x)}{g(-t_n)}$, $f(y_n) = f(z_n) \equiv 1$, donc $0 \notin \overline{\{y_n\}} \cup \overline{\{z_n\}}$, et $y_n z_n \longrightarrow 0$.

Conjecture.- Ce théorème est vrai pour une algèbre topologique quelconque.

Cette conjecture est vraie pour les algèbres topologiques à division.

On trouvera une bibliographie abondante dans la référence suivante :

W. Zelazko : Metric generalizations of Banach algebras, Rozprawy Mat., 47, 1965, pp. 3-70.

Séminaire d'Orsay 1966/67

Exposé nº X

La conjecture de Koebe sur les applications conformes sur les "circle domains".

par

R.J. Sibner

1. Le problème général des domaines canoniques

Il est bien connu qu'on peut appliquer conformément chaque domaine simplement connexe dont la frontière a plus de deux points sur un autre domaine de la même classe. De plus, cette application est unique modulo une normalisation convenable. Donc, on peut en choisir un comme le domaine canonique de cette classe.

En général, pour les domaines multiplement connexes, le problème n'est pas aussi simple. Premièrement, une application conforme est une homéomorphie et par suite, elle conserve la connexité d'un domaine. Deuxièmement, en général deux domaines de même connexité ne peuvent pas s'appliquer l'un sur l'autre par une application conforme. Par exemple, soient $R_1 = \left\{z : 1 \leq |z| \leq r_1\right\}$ et $R_2 = \left\{z : 1 \leq |z| \leq r_2\right\}$. Il n'est possible d'appliquer conformément R_1 sur R_2 que si $r_1 = r_2$.

Beaucoup de classes de domaines canoniques ont été approfondies. Nous en décrirons plusieurs :

(i) Le plan complexe privé de segments parallèles à l'axe réel.

(ii) Le plan complexe privé soit du disque unité fermé, soit de l'origine, et en plus de certains segments situés sur des demi-droites issues de l'origine.

(iii) Le même que (ii) mais les segments étant remplacés par des arcs de cercles centrés à l'origine.

2. La conjecture de Koebe

En 1908, Koebe a conjecturé [6] qu'on peut appliquer conformément chaque domaine du plan sur un "circle-domain", c'est-à-dire un domaine dont la frontière se compose de cercles et de points. Pour les domaines simplement connexes, ceci est tout simplement le théorème de représentation conforme de Riemann que nous avons mentionné ci-dessus au § 1. Koebe lui-même a démontré sa conjecture en 1920 [7] dans le cas de domaines de connexité finie, puis en 1922 [8] dans le cas de domaines symétriques (i.e. domaines symétriques par rapport à l'axe réel, et divisés par cet axe en deux domaines simplement connexes).

Pour expliquer les autres résultats sur cette conjecture nous avons besoin de la notion de "weak" limite composante de la frontière.

En général, un point d'accumulation des composantes de la frontière est soit une composante de la frontière à lui tout seul, soit situé sur une autre composante. On dit qu'une composante-limite de la frontière d'un domaine Ω est "weak" si c'est un point et si elle reste un point par chaque application conforme du domaine Ω. Nous remarquons que cette condition est équivalente à la suivante : la "extremal length" [2] de la classe de courbes situées dans une partie bornée de Ω et entourant le point est nulle.

Denneberg [4] a démontré que la conjecture est vraie pour une classe de domaines sous certaines conditions géométriques portant sur les composantes de la frontière. Ces conditions laissent supposer que le point à l'infini est la seule composante-limite de la frontière, et qu'il est "weak".

Grötzsch [5] a prolongé ce résultat au cas des domaines dont la frontière a un nombre fini de "weak" composantes-limites et Strebel [11, 12] au cas d'un ensemble dénombrable de "weak" composantes-limites, et en plus, à quelques cas où il y a des points-limites des composantes de la frontière sur les autres composantes.

Les résultats de Denneberg, Grötzsch et la plupart des résultats de Koebe et Strebel peuvent être déduits du théorème que nous donnerons au § 4. Nous ne discuterons pas ce point dans cette conférence d'exposition mais nous ne donnerons qu'un petit nombre d'exemples nouveaux de domaines pour lesquels le théorème permet de vérifier la conjecture.

Pour les autres questions regardez [10].

§ 3. Nous rappellerons quelques idées élémentaires d'applications quasi-conformes. Premièrement nous donnerons une définition géométrique.

Soit γ une courbe de Jordan portant quatre points distingués. Si nous appliquons l'intérieur de cette courbe sur un rectangle $\{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq R\}$ et si nous voulons que les quatre points distingués correspondent aux quatre sommets de ce rectangle, alors le nombre R est bien déterminé. Nous dirons que R est le "module" $m(R)$ du rectangle. Si f est une application d'un domaine D sur un autre domaine D', on dit que f est une application quasi-conforme si le rapport $m(R)/m(f(R))$ est borné supérieurement, uniformément pour tous les rectangles du domaine.

La définition ci-dessus est valable pour une homéomorphie mais peut-être sera-t-elle plus claire si nous donnons une autre définition équivalente, dans le cas où f a des dérivées partielles continues.

Si f est conforme, l'application tangente envoie un cercle dans un cercle. En général f applique un cercle de centre P dans une ellipse d'exentricité K_p. L'application f est quasi-conforme dans un domaine D si $K_p \leq K < \infty$ pour tout point $P \in D$.

Si nous introduisons les dérivées complexes $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}$ et $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}$ nous pouvons écrire cette condition :

$$\frac{|f_z| - |f_{\bar z}|}{|f_z| + |f_{\bar z}|} \leq K < \infty$$

ou $$|f_{\bar z}| \leq k\,|f_z| \quad \text{avec} \quad k = \frac{K-1}{k+1} < 1$$

Nous donnons maintenant la définition analytique : Soit $\mu(z)$ mesurable dans D et dont la borne supérieure essentielle $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$ dans D. On dit que f est une application quasi-conforme ou μ-conforme si elle est solution homéomorphe de l'équation de Beltromi $f_{\bar z} = \mu(z) f_z$ (dérivées au sens généralisé).

Nous aurons besoin de trois théorèmes [1, 3]

(a) (<u>Existence</u>) Soit $\mu(z)$ mesurable et $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$ dans le plan complexe $\mathbb{C}$: alors il y a une solution w^μ, unique à une transformation de Möbius près.

(b) Si f^μ et g^μ sont μ-conformes dans un voisinage d'un point, alors $g^\mu = h \circ f^\mu$ où h est conforme.

(c) Si $f : D_1 \longrightarrow D_2$ est quasi-conforme, alors $f^{-1} : D_2 \longrightarrow D_1$ est aussi quasi-conforme.

§ 4. Nous pouvons maintenant énoncer notre :

<u>Théorème Principal</u> : Supposons qu'on puisse appliquer un domaine Ω sur un "circle-domain" par une application quasi-conforme. Alors on peut appliquer Ω sur un (autre) "circle-domain" par une application conforme, c'est-à-dire que la conjecture de Koebe est vraie pour tous les domaines qu'on peut appliquer par

une application quasi-conforme sur un "circle-domain".

<u>Démonstration</u> : Soit f une application quasi-conforme d'un "circle-domain" K_o sur le domaine Ω. Elle définit une fonction $\mu(z) = f_{\bar{z}}/f_z$, telle que $\|\mu\|_\infty \leqslant k < 1$ sur K_o. Si nous prolongeons μ à l'intérieur des composantes circulaires de la frontière de K_o nous pouvons obtenir une fonction $\mu(z)$ qui est définie dans le plan complexe $\mathbb{C}$ et telle que $\|\mu\|_\infty \leqslant k < 1$ dans $\mathbb{C}$.
Le théorème (a) de § 3 nous donne une application quasi-conforme $w^\mu : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$.
Puis, en vertu du théorème (b) de § 3, $g = w^\mu \circ (f^\mu)^{-1}$ est une application conforme de Ω sur le domaine $K = w^\mu (K_o)$.

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[dr, "g"'] & K_o \arrow[l, "f^\mu"'] \arrow[d, "w^\mu"] & \subset & \mathbb{C} \arrow[d, "w^\mu"] \\
& K=w^\mu(K_o) & \subset & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

Mais, que deviennent les composantes circulaires de la frontière de K_o par l'application w^μ, et donc par l'application g ? Cela dépend de la manière dont était définie μ dans l'intérieur des cercles. Nous devons faire le prolongement de manière que les cercles deviennent encore des cercles.

Nous avons besoin du

<u>Lemme Principal</u> : Soit $\Gamma = \{z : | \quad - a| = \rho\}$. Supposons que $\mu(z)$ soit définie dans $\mathbb{C}$, et que μ soit <u>compatible</u> avec l'inversion par rapport au cercle

Γ, i.e. $\mu(R(z)) = \overline{\mu(z)}\,(R_z/\overline{R_z})$ où $R(z) = a + \rho^2/\overline{z - a}$ est l'inversion par rapport à Γ.

Alors chaque application μ-conforme du plan sur lui-même applique Γ sur un cercle.

<u>Démonstration du lemme</u> : Soit $u(z)$ une application μ-conforme du plan $\mathbb{C}$ sur lui-même, tel que $u(a) = 0$ et $u(\infty) = \infty$. Alors $u(z)$ et $v(z) = 1/\overline{u(R(z))}$ satisfont la même équation de Beltrami (c'est là un simple calcul). Donc $u = A \circ v$ où A est une application de Möbius. Mais, en plus, $v(a) = 0 = u(a)$ et $v(\infty) = \infty = u(\infty)$. D'où $u = \lambda v$ où λ est une constante. Pour $\zeta \in \Gamma$, $|u(\zeta)|^2 = \lambda$ donc λ est réel et positif. Par suite u applique Γ sur un cercle.

Revenons à la démonstration du théorème : Soient C_1, C_2,... les composantes circulaires de la frontière de K_0 (Il y en a au plus une infinité dénombrable).

Nous avons la fonction $\mu(z)$ définie dans K_0. Nous la prolongeons dans l'inverse de K_0 par rapport à C_1 par la condition qu'elle soit compatible avec l'inversion R_1 par rapport à C_1. Soit $K_1 = K_0 \cup R_1(K_0)$. Puis, nous définissons $\mu(z)$ dans l'inverse de K_1 par rapport à C_2 par la condition qu'elle soit compatible avec l'inversion R_2 par rapport à C_2. Maintenant est définie dans le domaine $K_2 = K_1 \cup R_2(K_1)$. Nous refaisons l'inversion par rapport à C_1, puis à C_2, puis à C_3. Ensuite nous faisons les inversions successives par rapport à C_1, C_2, C_3, C_4 ; C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 etc. A la fin, nous obtenons un ensemble K_o^* sur lequel μ est compatible avec l'inversion par rapport à chaque cercle C_j. Le complémentaire de K_o^* est mesurable. Soit $\mu = 0$ dans cet ensemble. Alors, μ est définie dans $\mathbb{C}$ et il est compatible avec l'inversion par rapport à chaque cercle C_j. Donc, d'après le lemme ci-dessus, $w^\mu(C_j)$ est un cercle pour chaque j, $K = w^\mu(K_o)$ est un "circle-domain", et puisque $g : \Omega \longrightarrow K$ est une application conforme le théorème est démontré.

§ 5. Quelques exemples (cf. [10]).

Exemple 1 : Soit Δ un domaine simplement connexe tel que la fermeture $\overline{\Delta} \subset K$ où K est un "circle-domain". Donc $K - \overline{\Delta}$ est conformément équivalent à un "circle-domain".

On démontre cela grâce au lemme suivant :

Lemme : Soient γ_1 et γ_2 deux connexes compacts non réduits à un point et intérieurs à une courbe de Jordan analytique γ. Alors il y a une application quasi-conforme $f : R(\gamma, \gamma_1) \longrightarrow R(\gamma, \gamma_2)$ telle que, pour tout $z \in \gamma$ $f(z) = z$. (En général, $R(\alpha, \beta)$ désigne la couronne bornée par les courbes α et β).

Nous omettons la démonstration de ce lemme (on applique conformément les deux couronnes sur des couronnes circulaires et on construit explicitement une application quasi-conforme entre les deux couronnes circulaires qui donne la correspondance voulue sur le bord). L'exemple se déduit immédiatement du lemme.

En effet, soit γ_1 la frontière du domaine Δ, et soit γ une courbe de Jordan analytique qui "entoure" γ_1. Si γ_2 est un cercle intérieur à γ, nous pouvons trouver d'après le lemme une déformation quasi-conforme de $R(\gamma, \gamma_1)$ sur $R(\gamma, \gamma_2)$ qui est l'identité sur γ. Cette application définie dans l'intérieur de la couronne, et prolongée par l'identité dans le reste de $K - \bar{\Delta}$ est une application quasi-conforme de $K - \bar{\Delta}$ sur un "circle-domain". Donc, d'après le théorème, il y a une application conforme de ce domaine sur un "circle-domain".

<u>Exemple 2</u> : Supposons que $D_1, \ldots, D_n$ aient des complémentaires disjoints et que chaque D_j soit conformément équivalent à un "circle-domain". Alors l'intersection $\bigcap_{j=1}^{n} D_j$ est aussi conforme à un "circle-domain".

La démonstration est analogue à celle de l'exemple 1 mais elle emploie le

<u>Lemme</u> : Soient $S_1(z)$ et $S_2(z)$ des applications conformes définies sur un voisinage des cercles c_1 et c_2 respectivement et telles que S_j applique c_j sur lui-même. Alors il y a une application quasi-conforme

$f : R(c_1, c_2) \longrightarrow R(c_1, c_2)$ telle que $f(z) = S_j(z)$ pour tout $z \in C_j$

REFERENCES

[1] AHLFORS (L.V.) and BERS (L.).- Riemann's mapping theorem for variable metrics.- Ann. of Math., 72, 1960.

[2] AHLFORS (L.V.) and BEURLING (A.).- Conformal invariants and function-theoretic null-sets.- Acta Math., 83, 1950.

[3] BERS (L.).- Uniformization by Beltrami equations.- Comm. Pure Appl. Math., 14, 1961.

[4] DENNEBERG (R.).- Konforme abbildung einer Klasse unendlich vielfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Kreisbereiche.- Diss., Leipziger Berichte, 84, 1932.

[5] GROTZCH (H.).- Eine Bemerkung zum Koebeschen Kreisnormierungsprinzip.- Leipziger Berichte, 87, 1935.

[6] KOEBE (P.).- Uber die Uniformisierung beliebiger analytischen Kurven III.- Nachr. Ges. Wiss. Gött., 1908.

[7] KOEBE (P.).- Abhandlungen zur Theorie der konformen abbildung : VI.- Abbildung mehrfach zusammenhängender Bereiche auf Kreisbereiche, etc., Math. Zeit., 7, 1920.

[8] KOEBE (P.).- Uber die konforme abbildung endlich - und unendlich - vielfach zusammenhängender symmetrischer Bereiche auf Kreisbereiche.- Acta Math., 43, 1922.

[9] SARIO (L.).- Uber Riemannsche Flächen mit hebbarem Rand.- Ann. Acad. Sc. Fenn., 50, 1948.

[10] SIBNER (R.J.).- Remarks on the Koebe Kreisnormierungs problem to appear.- Comment., Math. Helv.

[11] STREBEL (K.).- Uber das Kreisnormierungsproblem der konformen Abbildung.- Ann. Acad. Sc. Fenn., 101, 1951.

[12] STREBEL (K.).- Uber die konforme Abbildung von Gebieten unendlich hohen Zusammenhangs.- Comment. Math. Helv., 27, 1953.