Publications Mathématiques d'Orsay

Analyse Différentielle

(notes informelles d'un cours de IIIème cycle, 1971)

par

V. Poenaru

Année 1971

Publications Mathématiques d'Orsay

Analyse Différentielle

(notes informelles d'un cours de IIIème cycle, 1971)

par

V.Poenaru

Année 1971

Ces notes, correspondant à un premier semestre d'un cours d'Analyse différentielle, contiennent essentiellement des outils :

1) Le théorème de préparation de Weierstrass-Malgrange-Mather, sous ces différentes formes. On a choisi ici la démonstration de Mather [2], quoiqu'il y ait des démonstrations plus élégantes (voir : Proceedings of the Liverpool Singularities-Symposium I, Springer 1971). Elle est, peut-être, celle qu'on a la probabilité la plus grande de trouver tout seul.

2) Le théorème d'extension de Whitney.

3) Le théorème "de recollement" de Łojasiewicz.

4) Le théorème de "synthèse spectrale" (idéaux fermés) de Whitney.

Pour le plaisir du lecteur, on a inclus, à titre d'exemple d'application simple d'idées "géométrico-algébriques" à un problème de "géométrie différentielle", un chapitre 0 sur les équivalences de contact.

Pour rédiger ces notes, on s'est servi très largement de :

[1] B. Malgrange : "Ideals of differentiable functions" . Oxford Univ. Press 1966.

[2] J. Mather : Stability of C^∞ mapping I (Ann. of Math. 87 (1968) pp. 89 - 104)

III (Journal bleu N° 35 (1968) pp. 279-308).

INTRODUCTION

1) Définitions et notations : sauf mention explicite du contraire, on ne s'occupera que de variétés de classe C^∞.

$C^\infty(X,Y)$ = l'ensemble des applications de classe $C^\infty : X \to Y$. Sur cet ensemble on peut mettre la topologie C^p $(0 \leqslant p \leqslant \infty)$.

$C^\infty_x(X,Y)$ = l'ensemble des germes d'applications C^∞ de $(X,x) \to Y$.

$C^\infty_x(X,R) = C^\infty_x(X)$ a une structure naturelle d'anneau (en fait de R-algèbre). C'est un anneau local dont l'idéal maximal (unique) :

$\mathfrak{m}C^\infty_x(X)$ = l'ensemble des germes d'applications $C^\infty : (X,x) \to R$ qui s'annulent au point x.

$C^\infty_{x,y}(X,Y)$ = l'ensemble des germes $(X,x) \to (Y,y)$.

$\mathcal{J}^k_{x,y}(X,Y)$ = l'ensemble des k-jets $(X,x) \to (Y,y)$

$\mathcal{J}^k_x(X,Y) = \bigcup\limits_y \mathcal{J}^k_{x,y}(X,Y)$.

$\mathcal{J}^k(X,Y) = \bigcup\limits_x \mathcal{J}^k_x(X,Y)$.

L'application naturelle $\pi^k = \mathcal{J}^k(X,Y) \to X \times Y$ est une fibration C^∞, où la fibre a une structure naturelle algébrique- réelle (puisque les formules de transformation des dérivées partielles, par changement de variables, sont algébriques).

On a aussi, une application naturelle

$$j^k : C^\infty(X,Y) \to C^\infty(X,\mathcal{J}^k(X,Y))$$

telle que

$$j^k(f)\ (x) = j^k_{x,f(x)}(f)\ .$$

2) <u>Equivalence de contact</u> : ce paragraphe donne un exemple (relativement facile) de réduction d'un problème d'applications différentiables, à un problème algébrique.

Soient (X,x_o) , (Y,y_o) deux germes de variétés C^∞ , et :

$$\mathcal{F} = C^\infty_{x_o,y_o}(X,Y)\ .$$

On considère le groupe $\mathrm{Diff}^\infty_{x_o \times y_o}(X \times Y)$, des germes de difféomorphisme :

$(X \times Y\ ,\ x_o \times y_o) \xrightarrow[\approx]{} (X \times Y\ ,\ x_o \times y_o)$, et un <u>sous-groupe</u>

$$\mathcal{C} \subset \mathrm{Diff}^\infty_{x_o \times y_o}(X \times Y)$$

défini comme suit :

On considère l'inclusion naturelle :

$$(X,x_o) \xrightarrow[i]{} (X \times Y\ ,\ x_o \times y_o)$$

définie par : $i(x) = x \times y_o$ $(x \in X)$, et la projection naturelle :

$$\pi : (X \times Y\ ,\ x_o \times y_o) \to (X,x_o)\ .$$

Par définition : $H \in \mathrm{Diff}^\infty_{x_o \times y_o}(X \times Y)$ est un élément de $\mathcal{C}\,(H \in \mathcal{C})$ si et seulement si, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & (X \times Y\ ,\ x_o \times y_o) \arrow[dd, "H"] \arrow[dr, "\pi"] & \\
(X,x_o) \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "i"'] & & (X,x_o)\ . \\
 & (X \times Y\ ,\ x_o \times y_o) \arrow[ur, "\pi"'] &
\end{tikzcd}$$

Si $f \in C^\infty_{x_o,y_o}(X,Y)$ on définit un <u>germe de sous-variété</u> :

$$\mathrm{graph}(f) \hookrightarrow X \times Y$$

par :

$$\mathrm{graph}(f) = \{(x,f(x))\} .$$

On définit une action de groupe :

$$\mathcal{C} \times \mathcal{K} \to \mathcal{K}$$

par :

$$H(\mathrm{graph}(f)) = \mathrm{graph}(H.f)$$

(on remarque que l'image, par H, d'un graphe, est toujours un graphe).

Définition : $f,g \in C^{\infty}_{x_0,y_0}(X,Y)$ sont (contact)-équivalentes s'il existe $H \in \mathcal{C}$ tel que $H.f = g$.

Si $f \in \mathcal{K}$, on a un homomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres :

$$f^* : C^{\infty}_{y_0}(Y) \to C^{\infty}_{x_0}(X) .$$

L'idéal :

$I(f) = f^*(\mathfrak{m}\, C^{\infty}_{y_0}(Y)) \cdot C^{\infty}_{x_0}(X) \subset C^{\infty}_{x_0}(X)$ est appelé l'anneau des coordonnées de f .

(Si f est écrit sous la forme : $y_i = f_i(x_1 ,\ldots x_n)$ $(i = 1,\ldots,m)$, c'est l'idéal engendré par les fonctions $f_i(x) \ldots$) .

THEOREME 1.- (J. Mather, Public. Math. de l'IHES, no. 35 (1968)) : $f,g \in \mathcal{K}$ ont une équivalence de contact $\Longleftrightarrow$

$I(f) = I(g)$ (égalité entre sous-ensembles de $C^{\infty}_{x_0}(X)$).

Démonstration :

Lemme : soit $(x_1 ,\ldots, x_n)$ un système de coordonnées locales autour de $x_0 \in X$ $(x(x_0) = 0)$, et $N \subset X$ le germe de sous-variété défini par :

$$x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0 \qquad (k \leqslant n) .$$

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $u \in \{x_1 , \dots , x_k\}^{\ell} \, C^{\infty}_{x_o}(X)$

(ii) u, ainsi que toutes ses dérivées d'ordre $< \ell$ s'annulent sur N (identiquement) (ici $u \in C^{\infty}_{x_o}(X)$) .

Démonstration : (i) $\Longrightarrow$ (ii) trivialement).

(ii) $\Longrightarrow$ (i) se démontre par induction sur ℓ .

On définit :

$$u_i \in C^{\infty}_{x_o}(X) \quad \text{par :}$$

$$u_i(x_1 , \dots , x_n) = \int_o^1 \frac{\partial u}{\partial x_i} (o , \dots , o , tx_i , x_{i+1} , \dots , x_n) \; dt .$$

On a : $x_i u_i(x_1 , \dots x_n) = u(o , \dots , o , x_i , x_{i+1} , \dots , x_n) -$

$- u(o , \dots o , x_{i+1} , \dots x_n)$. Donc :

$$u(x_1 , \dots x_n) - \underbrace{u(o, \dots o, x_{k+1} , \dots x_n)}_{} = \sum_{i=1}^{k} x_i u_i$$

$$= o \quad \text{(puisqu'on suppose (ii))} .$$

Ceci démontre déjà le cas $\ell = 1$.

Si $\ell > 1$, u_i s'annule, ainsi que toutes ses dérivées d'ordre $< \ell - 1$ sur N , e.a.d.s.

Le théorème 1 est impliqué par le :

THEOREME 2.- Si $f, g \in \mathcal{X}$, les assertions suivantes sont équivalentes :

1°. f et g ont une équivalence de contact.

2°. $\exists$

$$H \in \mathrm{Diff}^{\infty}_{x_o \times y_o}(X \times Y)$$

tel que $H \mid X \times y_o$ = identité, et :

$$H(\text{graph } f) = \text{graph } g .$$

3°. $I(f) = I(g) \subset C^{\infty}_{x_o}(X)$.

4°. Si l'on désigne par $m = \dim Y$, il existe une matrice inversible :

$$(u_{ij}(x)) \in GL(m, C^{\infty}_{x_o}(X))$$

telle que :

$$f^*(y_i) = \Sigma \; u_{ij}(x) \; g^*(y_j) \; .$$

<u>Démonstration</u> : 1° $\Longrightarrow$ 2° trivialement.

On va montrer 2° $\Longrightarrow$ 3° . Soit $V \hookrightarrow X \times Y$ un germe de sous-variété C^{∞} :

$$x_o \times y_o \in V \; .$$

On désigne par :

$$Z(V) \subset \mathcal{F}$$

l'idéal des (germes de) fonctions C^{∞} qui s'annullent sur V . Il est évident que :

$$Z(V) = Z(V') \Longleftrightarrow V = V' \; .$$

Je dis que :

$$Z(\text{graph } f) = \{y_i - f_i(x)\} \, C^{\infty}_{x_o, y_o}(X \times Y) \; .$$

(Ceci résulte du lemme 1 : considérons le difféomorphisme

$$X \times Y \xrightarrow[F]{} X \times Y$$

défini, en coordonnées, par :

$$(F) \begin{cases} Y_i = y_i - f_i(x) \\ \\ X_j = x_j \end{cases}$$

alors $F(\text{graph } f) = \{Y_i = o\}$. D'après le lemme 1 :

$$Z(\{Y_i = 0\}) = \{Y_i\}\mathcal{F} \quad \text{et :}$$

$$Z(\text{graph } f) = F^*(Z(\{Y_i = o\})) =$$
$$= F^*(\{Y_i\}\mathcal{F}) = \{y_i - f_i(x)\}\mathcal{F} \ldots).$$

On considère, en outre de graph $f \subset X \times Y$, le germe de sous-variété $X \times y_o \subset X \times Y$, et les restrictions des fonctions de $Z(\text{graph } f) \subset \mathcal{F}$ à $X \times x_o$, (considérées comme des fonctions en x, seulement). On a :

$$Z(\text{graph } f) \mid X \times y_o =$$

$$= \underbrace{\{y_i(y_o)}_{=0} - f_i(x)\} \underbrace{(C^\infty_{x_o,y_o}(X \times Y) \mid X \times y_o)}_{= C^\infty_{x_o}(X)} =$$

$$= \{-f_i(x)\}\, C^\infty_{x_o}(X) = I(f) \subset C^\infty_{x_o}(X) .$$

Puisque $H \in \mathrm{Diff}^\infty_{x_o \times y_o}(X \times Y)$ possède les propriétés :

$$H \mid X \times y_o = \text{identité}$$
$$H\,(\text{graph } f) = \text{graph } g$$

il en résulte que l'homomorphisme :

$$H^* : \mathcal{F} \xrightarrow[\approx]{} \mathcal{F}$$

possède les deux propriétés suivantes :

a) $H^*(Z(\text{graph } g)) = Z(\text{graph } f)$

b) Pour tout $\varphi \in \mathcal{F}$:

$$\varphi \mid X \times y_o = H^*\varphi \mid X \times y_o .$$

Donc : $I(f) = Z(\text{graph } f) | X \times y_o =$

$= H^*(Z(\text{graph } g)) | X \times y_o = Z(\text{graph } g) | X \times y_o = I(g)$.

Donc $2° \Longrightarrow 3°$.

<u>3° $\Longrightarrow$ 4°</u> : d'après 3°, ils existent des matrices à $m \times m$ éléments, dans, $C^{\infty}_{x_o}(X)$; $(W_{ij}(x))$, $(V_{ij}(x))$, telles que :

$$f^*(y_i) = \Sigma\, W_{ij}(x)\, g^*(y_j)$$

$$g^*(y_i) = \Sigma\, V_{ij}(x)\, f^*(y_j) .$$

~ Ceci <u>n'implique pas</u> que $(W_{ij}(x))$, $(V_{ij}(x))$ soient inversibles (parce que $(f^*(y_1) ,\dots, f^*(y_m))$ et $(g^*(y_1) ,\dots, g^*(y_m))$ ne sont <u>pas</u>, nécessairement, des bases du $C^{\infty}_{x_o}(X)$ - module (libre) :

$$C^{\infty}_{x_o}(X) + \dots + C^{\infty}_{x_o}(X) \quad (m \text{ fois}) .$$

<u>Lemme</u> (d'algèbre linéaire) : soient A,B des matrices (carrées) à $m \times m$ éléments, à coefficients dans R .

Il existe une autre matrice à $m \times m$ éléments, C , telle que :

$$C(1 - AB) + B \in GL(m,R) .$$

<u>Démonstration</u> :

$A,B \in Hom_R(R_m , R_m)$.

Il existe une base $e_1 ,\dots, e_m$ de R_m , t.q. :

$$Be_{r+i} = o \quad (i = 1,\dots, m - r)$$

où $r = rang(B)$.

$(Be_1 ,\dots, Be_r)$ peut être complété à une base :

$$(Be_1 ,\dots, Be_r , e'_{r+1} ,\dots, e'_m) \text{ de } R_m .$$

Par rapport à cette base, B s'écrit comme :

$$\begin{array}{c|c|c|} & e_i & e_{r+i} \\ \hline Be_i & \begin{matrix} 1 & & & o \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ o & & & \ddots\, 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline e'_{r+i} & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Considérons

$$C \in \mathrm{Hom}_R\,(R_m\ ,\ R_m)$$

défini par :

$$\begin{array}{c|c|c|} & e_i & e_{r+i} \\ \hline Be_i & 0 & 0 \\ \hline e'_{r+i} & 0 & \begin{matrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{matrix} \\ \hline \end{array}$$

$C(1 - AB) + B$ s'écrit alors :

$$\begin{array}{c|c|c|} & e_i & e_{r+i} \\ \hline Be_i & \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline e'_{r+i} & \lambda & \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \\ \hline \end{array}$$

d'où le lemme algébrique.

Prenons $B = (W_{ij}(x_o))$, $A = (V_{ij}(x_o))$. En appliquant le lemme algébrique on trouve un C tel que

$$C(1 - (V_{ij}(x_o))(W_{ij}(x_o))) + (W_{ij}(x_o)) \in GL(m,R) \ .$$

Ceci implique que :

$$(u_{ij}(x)) = C(1 - (V_{ij}(x))\ (W_{ij}(x))) + (W_{ij}(x)) \in GL(m,\mathcal{E}) \ .$$

D'autre part :

$$(1 - (V_{ij})\ (W_{ij}))\ .\ (g^*(y)) \equiv 0$$

$\Longrightarrow$

$$f^*(y_i) = \Sigma\, u_{ij}(x)\ g^*(y_j) \qquad \text{e.a.d.s.}$$

<u>$4^o \Longrightarrow 1^o$</u> . Considérons le difféomorphisme

$$H : X \times Y \to X \times Y$$

donné par :

$$H(x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_m) =$$

$$= (x_1, \ldots x_n, \Sigma\, u_{ij}(x)\, y_j)$$

C'est clair que $H \in \mathcal{E}$

et $$f^*(y_i) = \Sigma\; u_{ij}\, g^*(y_j)$$

nous dit que :

$$H(\text{graph } g) = \text{graph } f \quad .$$ q.e.d.

CHAPITRE I.

LE THEOREME DE DIVISION DE MATHER.

-::-::-

1) Une forme "globale" du théorème de préparation de Weierstrass : on commence par rappeler le théorème de Weierstrass, sous une forme commode pour la suite :

THEOREME 1.- Soit $\Gamma_p(z,u)$ le polynôme générique : $\Gamma_p(z\ ;\ u_1,\dots,u_p) = \Gamma_p(z,u) = z^p + \sum_{i=1}^{p} u_i\, z^{p-i}$.

Soit M une variété analytique complexe et :

$$\upsilon_1,\dots,\upsilon_p \in \mathcal{E}^h(M) = \text{l'ensemble des fonctions analytiques sur } M.$$

On considère $z \in \mathbb{C}$, $a \in M$.

Soit $f(z,a) \in \mathcal{E}^h(\mathbb{C} \times M)$.

Ils existent des :

$$q(z,a) \in \mathcal{E}^h(\mathbb{C} \times M)$$

$$h_i(a) \in \mathcal{E}^h(M)\ ,\ (i=1,\dots,q)$$

(uniques, dépendant linéairement de f) telles que l'identité suivante soit satisfaite :

$$f(z,a) = \Gamma_p(z\ ,\ \upsilon(a))\ q(z,a) + \sum_{i=1}^{p} h_i(a)\, z^{p-i}.$$

Démonstration : on a l'IDENTITE FONDAMENTALE :

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{\Gamma_p(z,u)}{\Gamma_p(\zeta,u)(\zeta-z)} + \sum_{j=1}^{p} \frac{\Gamma_{j-1}(\zeta,u)}{\Gamma_p(\zeta,u)}\, z^{p-j}$$

où, par définition : $\Gamma_q(z,u) = z^q + \sum_{i=1}^{q} u_i z^{q-i}$ si $q \leqslant p$.

(Cette identité résulte du calcul suivant :

$$\frac{\Gamma_p(\zeta,u) - \Gamma_p(z,u)}{\zeta - z} = \frac{\zeta^p - z^p}{\zeta - z} + \Sigma\, u_i\, \frac{\zeta^{p-i} - z^{p-i}}{\zeta - z} =$$

$$= \sum_j z^{p-j} \zeta^{j-1} + \sum_{i,j} u_i (z^{p-i-j} \zeta^{j-1}) = \sum z^{p-j} (\zeta^{j-1} + u_1 \zeta^{j-2} + u_2 \zeta^{j-3} + \dots)$$

$$= \sum_{j=1}^{p} z^{p-j} \Gamma_{j-1}(\zeta,u) \ .$$

D'où :

$$\frac{\Gamma_p(\zeta,u)}{\zeta - z} = \frac{\Gamma_p(z,u)}{\zeta - z} + \sum \Gamma_{j-1}(\zeta,u)\, z^{p-j} \ , \text{ e.a.d.s)}$$

Si $z \in C$, $a \in M$, on considère, dans la "fibre" $C \times a \subset C \times M$ un contour simple fermé, orienté "directement" :

$$\gamma = \gamma_{a,z} \subset C \times a$$

qui contient dans son <u>intérieur</u> le point $z \times a \in C \times a$ et les racines de

$$\Gamma_p(\zeta, U\ (a)) = 0 \ .$$

Dans l'identité fondamentale on remplace

$$u_i \Longrightarrow U_i(a) \ .$$

(On remarque que l'identité fondamentale nous fournit des fonctions rationnelles en ζ : $A(\zeta,z,u)$, $B_i(\zeta,u)$, telles que :

$$\frac{1}{\zeta - z} = \Gamma_p(z,u)\, A + \sum z^{p-i} B_i \ ;$$

on pense à (z,u) comme des paramètres (dont on a fixé la valeur) et a ζ comme le "point courant" de $(C \times u)$).

En appliquant l'intégrale de Cauchy :

$$f(z,a) = \frac{1}{2\pi_i} \int_\gamma \frac{f(\zeta,a)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi_i} \Gamma_p(z, U\ (a)) \underbrace{\int_\gamma \frac{f(\zeta,a)\, d\zeta}{\Gamma_p(\zeta, U\ (a))(\zeta - z)}} \qquad +$$

C'est une fonction <u>analytique</u> $q(z,a)$
(indépendante de γ).

$$+ \frac{1}{2\pi_i} \sum_{j=1}^{p} z^{p-j} \underbrace{\int_\gamma \frac{\Gamma_{j-1}(\zeta, \upsilon(a))\, f(\zeta,a)\, d\zeta}{\Gamma_p(\zeta, \upsilon(a))}}_{h_j(a)} .$$

Ceci montre l'existance.

L'unicité : supposons que la division soit possible avec des q', h_i'. On a :

$$q - q' = \sum_{j=1}^{p} \frac{h_j(a) - h_j'(a)}{\Gamma_p(z, \upsilon(a))} z^{p-j}$$

Le second membre n'est pas partout holomorphe sur $M \times C$. Pour $a \in M$ fixé c'est

$$\frac{\text{un polynome en } z, \text{ de degré } \leqslant p-1}{\text{un polynome en } z \text{ de degré } = p} \quad .\text{q.e.d.}$$

Remarque : L'analogue analytique-réel du théorème précédant est FAUX (quoiqu'il y ait des formes "locales" du théorème de préparation qui sont vraies dans le cas analytique-réel, comme on le verra).

Exemple : $M = R$, on considère

$$\Gamma(t,u) = t^2 + u$$

Soit $f(t,u) \in C^\omega(R \times R)$ et supposons que, dans $C^\omega(R \times R)$ on ait une décomposition :

$$f(t,u) = (t^2 + u)\, q(t,u) + h_1(u)\, t + h_2(u) .$$

En particulier, prenons : $f(t,u) = \frac{1}{t^2+\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$:

$$(\times) \qquad \frac{1}{t^2+\varepsilon} = (t^2 + u)\, q(t,u) + h_1(u)\, t + h_2(u) .$$

Si $u < 0$, posons $t = \pm\sqrt{-u}$ dans $(\times)$. Ceci nous donne deux équations pour $h_1(u)$, $h_2(u)$, avec la solution unique :

$$h_1(u) = 0$$

$$h_2(u) = \frac{1}{\varepsilon - u} .$$

Mais $h_2(u) = \frac{1}{\varepsilon - u}$ (défini pour $u < 0$) n'a pas d'extension analytique (réelle) pour $u > 0$.

2) Le théorème de division de Mather (Ann. of Math. vol.87, (1968) pp.89-104).

THEOREME 2.- Soit M une variété C^∞ quelconque (de dimension pas nécéssairement finie), et :

$\Gamma_p(x ; u_1 ,\ldots, u_p) = \Gamma_p(x ; u) = x^p + \sum_{i=1}^{p} x^{p-i} u_i$, le polynôme générique, qui sera donné une fois pour toutes. On se donne aussi :

$$\mathrm{U}_1 (a) , \mathrm{U}_2 (a) ,\ldots, \mathrm{U}_p (a) \in C^\infty(M)$$

(où $a \in M$ est le point courant de M . Par abus de notation la fonction : $\mathrm{U}_i : M \to R$ sera souvent désignée par $\mathrm{U}_i(a)$, dans ces notes).

Pour tout $f(x,a) \in C^\infty(R \times M)$ (où $x \in R$ est le point courant de R), ils existent des fonctions

$$q(x,a) \in C^\infty(R,M)$$
$$h_i(a) \in C^\infty(M) \quad (i = 1,\ldots,p) ,$$

telles que la condition suivante soit satisfaite :

$$f(x,a) = \Gamma_p(x ; \mathrm{U}(a))\, q(x,a) + \sum_{i=1}^{p} x^{p-j} h_j(a) .$$

Remarques: q, h_j ne sont pas nécessairement uniques :

Soit $M = R$, $\Gamma_p(x ; \mathrm{U}(a)) = x^2 + a^2$.

On va considérer $f(x,a) = f(a) =$ une fonction qui est plate au point 0 (c'est-à-dire telle que

$$f(o) = 0 , \forall i : D^{(i)} f = 0) .$$

alors, l'équation

$$f = (x^2 + a^2)\, Q(x,a) + h_1(a) + h_2(a)$$

admet la solution :

$$Q = h_1 = 0 \quad , \quad h_2(a) \equiv f(a) \ ,$$

mais aussi :

$$Q = \frac{f(a)}{x^2+a^2} \quad \text{(qui a bien un sens } C^\infty) \ ,$$

$$h_1 = h_2 \equiv 0 \ .$$

D'autre part, une fois la démonstration finie, on verra qu'on peut dire plus : ils existent des application <u>linéaires</u>, continues, C^∞(dans un sens qui reste à préciser) :

$$Q : C^\infty(R \times M) \to C^\infty(R \times M)$$

$$r : C^\infty(R \times M) \to (C^\infty(M))^p$$

telles que l'identité de division (écrite ci-dessus), soit satisfaite pour :

$$q(t,a) = Q(f)$$

$$(h_1(a) ,\ldots, h_p(a)) = r(f) \ .$$

<u>Démonstration</u> :

1. <u>Rappels sur la transformation de Fourier</u> :

Soit $C_o^\infty(R)$ = l'ensemble des fonctions C^∞ sur R, à valeurs <u>réelles</u> et à support <u>compact</u>.

Si $g \in C_o^\infty(R)$ on a :

$$g(t) = \frac{1}{\Pi} \int_0^\infty d\tau \int_{-\infty}^\infty dx \ g(x) \cos \tau(x-t) \ .$$

Pour la complétitude de l'exposé on va démontrer cette formule. En fait on démontre un peu plus :

Soit $\mathcal{S}$ l'espace de Schwartz des fonctions à <u>décroissance rapide</u> : $\mathcal{S}$ - l'espace des fonctions C^∞ , à valeurs <u>complexes</u>, sur R , $g : R \to C$, telles que, pour chaque $(N > 0 , \alpha > 0)$ il existe une constante $C_{N,\alpha}$ telle que :

$$|x|^N \, |D^\alpha g(x)| < C_{N,\alpha}$$

Si $g \in \mathcal{S}$, on définit sa transformée de Fourier :

$$\hat{g} : R \to C \quad , \quad \text{par :}$$

$$\hat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, e^{-ix\xi}\, dx \quad .$$

Je dis que $\hat{g} \in \mathcal{S}$. (Ceci résulte des remarques suivantes : si $g \in \mathcal{S}$ on a :

(i) $D^\alpha g \in \mathcal{S}$

(ii) $(D^\alpha g)^\wedge (\xi) = i^\alpha \xi^\alpha \hat{g}(\xi)$

(iii) $D^\alpha \hat{g}(\xi) = ((-ix)^\alpha g(x))^\wedge$

(iv) $g \in L^1(R)$ et $|\hat{g}(\xi)| < \|g\|_{L^1}$.

donc :

$$|\xi^N D^\alpha \hat{g}(\xi)| = |\xi^N ((-ix)^\alpha g(x))^\wedge| =$$

$$= |(D^N ((-ix)^\alpha g(x)))^\wedge(\xi)| \leqslant \|D^N(-ix)^\alpha g(x)\|_{L^1}) \quad .$$

<u>La formule d'inversion</u> : si $f \in \mathcal{S}$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x}\, d\xi$$

<u>Démonstration</u> : soit $\varphi \in \mathcal{S}$. On a : $\varphi \hat{f} \in L^1(R)$ et par Fubini :

$$\int \varphi(\xi)\, \hat{f}(\xi)\, e^{i\xi x}\, d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \varphi(\xi) e^{ix\xi} \left(\int f(y) e^{-iy\xi}\, dy\right) d\xi$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(y)dy \int \varphi(\xi)\, e^{-i(y-x)\xi} d\xi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x+t)dt \int \hat{\varphi}(\xi) e^{-it\xi} d\xi \quad =$$

$$= \int f(x + t)\, \hat{\varphi}(t)\, dt .$$

Soit $g \in \mathcal{S}$ et $\varphi(\xi) = g(\varepsilon\, \xi)$, $\varepsilon > 0$

Alors : $\hat{\varphi}(t) = \frac{1}{\varepsilon}\ \hat{g}(\frac{t}{\varepsilon}) \Longrightarrow$

$$\int g(\varepsilon\xi)\, \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi = \int f(x + \varepsilon t)\, \hat{g}(t)\, dt .$$

On peut faire $\varepsilon \to 0$:

$$g(0) \int \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = f(x) \int \hat{g}(t)\, dt .$$

On choisit $g(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ qui possède la propriété $\hat{g}(t) = g(t)$ e.a.d.s.

Pour passer au cas réel on remarque que

$C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}$. On a donc :

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, e^{ix(x-t)} dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cos\tau(x - t)\, dx$$ (puisque la partie imaginaire disparaît).

Vu que la fonction à intégrer, en x, est paire on a la formule désirée.

2. Le Lemme de division de $\cos \tau(t - x)$: "Ils existent des fonctions :

$Q(\tau,t,x,u) = Q(\tau,t,x\ ;\ u_1, \ldots, u_p)$

$H_i(\tau,t,u) \quad (i = 1,\ldots,p)$

telles que :

$$\cos \tau(t - x) = \Gamma_p(x,u)\ Q(\tau,t,x,u) + \sum_{i=1}^{p} x^{p-i} H_i(\tau,t,u)$$

et que :

(I) $Q, H_i \in C^\infty$.

(II)$_1$ $$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = - \tau^2 Q \ .$$

(II)$_2$ $$\frac{\partial^2 H_i}{\partial t^2} = - \tau^2 H_i \ .$$

(III) Pour tout couple (ℓ,k) (où : $\ell \in N^+ = (0,1,\ldots)$, $k \in (N^+)^p$), ils existent un $N > 0$ et des fonctions continues $C(x,u)$, $C(u)$, telles que :

$$\left|\frac{\partial^\ell}{\partial x^\ell} \frac{\partial^{|k|}}{\partial u^k} Q(\tau,t,x,u)\right| \leqslant C(x,u) \ (1 + \tau)^N$$

$$\left|\frac{\partial^{|k|}}{\partial u^k} H_i(\tau,x,u)\right| \leqslant C(u) \ (1 + \tau)^N \ .$$

<u>Ce lemme</u> (qui se passe dans R_{p+3}) <u>implique le THM. de DIVISION</u> ; en effet :

Choisissons :

$$S(t,u_1 ,\ldots, u_p) \in C^\infty(R_{p+1})$$

t.q. :

(i) $S(t,u) \equiv 1$ pour $(t,u) \in V$ où V est un voisinage de l'ensemble :

$$\{(t,u) \ ; \ \Gamma_p(t,u) = 0\} \subset R_{p+1} \ .$$

(ii) Pour chaque compact $K \subset R_p = (u_1 ,\ldots, u_p)$, $\exists$ un compact $\zeta \subset R$ tel que $S(t,u) \equiv 0$ si $u \in K$, $t \notin \zeta$.

On a :

$$f(x,a) = S(x,u(a)) \, f(x) + (1 - S(x,u(a))) \, f(x,a) =$$

$$= \underbrace{\frac{(1 - S(x,u(a))) \, f(x,a)}{\Gamma_p(x,u(a))}}_{\text{fonction } C^\infty} \Gamma_p(x,u(a)) \quad +$$

$$+ \frac{1}{\Pi} \int_0^\infty dx \int_{-\infty}^\infty dt \underbrace{S(t,u(a)) \, f(t,a)}_{C_0^\infty(R)} \cos \tau(t - x) \qquad \text{où } R = (t) \ .$$

(on peut donc appliquer la transformée de Fourier des fonctions de $C_0^\infty(R)$).

On a <u>formellement</u> :

$$\int_0^\infty dx \int_{-\infty}^\infty dt \ s(t,u(a))\, f(t,a) \cos \tau(t - x) =$$

$$= \Big(\int_0^\infty d\tau \ \underbrace{\int_{-\infty}^\infty dt \ s(t,u(a))\, f(t,a)\, Q(\tau,t,x,u(a))}_{B(\tau,x,u(a))} \Big) \ \Gamma_p(x,u(a)) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{p} x^{p-i} \Big(\int_0^\infty dx \ \underbrace{\int_{-\infty}^\infty dt \ s(t,u(a))\, f(t,a)\, H_i(\tau,t,u(a))}_{C_i(\tau,u(a))} \Big) .$$

C'est évident que $B(\tau,x,u(a))$, $C_i(\tau,u(a))$ (qui sont représentées par des intégrales de fonctions à support compact - donc à intégrales convergentes) sont C^∞.

Ils nous faut montrer que les intégrales :

$\int_0^\infty d\alpha \ B(\tau,x,u(a))$ (ainsi que les intégrales qu'on y déduit par différentiation). (par rapport à (x,a)), sous le signe $\int_0^\infty$ sont toutes uniformément convergentes. (et de même pour C_i).

On a :

$$B(\tau,x,u(a)) = \int_{-\infty}^\infty dt \ s(t,u(a))\, f(t,a)\, Q(\tau,t,x,u(a)) =$$

$$= \frac{-1}{\tau^2} \int_{-\infty}^\infty dt \ \underbrace{sf}_{\text{fonction à support compact.}} \ (-\tau^2 Q)$$

$$= \frac{-1}{\tau^2} \int_{-\infty}^\infty dt \ (sf) \ \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = \frac{-1}{\tau^2} \int_{-\infty}^\infty dt \ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \ (sf) \ . \ Q =$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \int_{-\infty}^\infty dt \ \frac{\partial^{2q}}{\partial t^{2q}} \ (sf) \ . \ \frac{Q(\tau,t,x,u(a))}{(-1)^q \ \tau^{2q}}$$

(par le même procédé).

(Ceci étant vrai pour q arbitraire)

D'après (III) :

$$Q(\tau,t,x,u(a)) \leqslant C'(x,a)\ (1+\tau^N)$$

où $C'(x,a)$ est continue.

Il en résulte que, pour un voisinage V de $(x,a) \in R \times M$ et pour un $\ell > 0$ arbitrairement grand on a une constante K telle que

$|B(\tau,x,u(a))| < \frac{K}{\tau^\ell}$ (pour τ suffisamment grand).

Donc $\int_0^\infty d\tau\ B(\tau,x,u(a))$ est uniformément convergente.

Soit D une certaine dérivée partielle par rapport à (x,a). $D.B(\tau,x,u(a))$ est une somme finie d'intégrales de la forme :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\quad D'(sf)\ .\ D''Q$$

où D' et D'' sont des dérivées partielles en (x,a).

Vu que $D'(sf)$ reste à support compact (en t) et que

$$\frac{\partial^2 D''Q}{\partial t^2} = -\tau^2\ D''\ Q,$$

on peut réappliquer à chacune de ces intégrales le raisonnement précédant. On aura :

$DB(\tau,x,u(a))| < \frac{K'}{\tau^\ell}$ (pour τ suffisamment grand),

et $\int_0^\infty dx\quad Db(\tau)$ sera donc, aussi, uniformément convergente. Les mêmes raisonnements sont valables pour C_i.

3. Démonstration du Lemme de Division de $\cos \tau(t-x)$:

Soient $U \subset V \subset R^{n+m} = \{(v_1, \ldots, v_m, u_1, \ldots, u_n)\}$ deux ouverts,

et

$$V \xrightarrow{f} R$$

$$U \xrightarrow{g} R^+$$

deux fonctions C^∞. On dira que g domine f :

$$f < \alpha\, g \iff \forall y \in U \ : |f(y)| \leqslant C(1 + g(y)^N) \ .$$

$$f\, D_u^K < \alpha\, g \iff \forall k : |k| \leqslant K : \frac{\partial^{|k|} f}{\partial u^k} < \alpha\, g \ .$$

On a les sorites suivantes :

$$f_1 D_u^K < \alpha\, g \quad \text{et} \quad f_2 D_u^K < \alpha\, g \Longrightarrow (f_1 + f_2) D_u^K < \alpha\, g \quad \text{et } f_1 f_2 D_u^K < \alpha\, g \ .$$

Si, en plus $\frac{1}{f_2} < \alpha\, g \Longrightarrow \frac{f_1}{f_2} D_u^K < \alpha\, g$.

Si $f < \alpha\, g$ et $h \in C^\infty(R)$, h étant <u>bornée</u> (unif.) de même que toutes ses dérivées successives d'ordre $< K$), alors : $h(f) D_u^K < \alpha\, g$.

<u>Le lemme du multiplicateur</u> :

" $\exists$ une fonction C^∞ : $\rho(\tau,\lambda,u_1, \ldots, u_p)$ $(\tau \geqslant 0)$ telle que :

1. $\rho(\tau,\lambda,u) = 0$ dans un voisinage de l'ensemble $\{(\tau,\lambda,u)\}$, $\lambda = \Im mz$, $\Gamma_p(z,u) - 0$.

2. $$\int_{\frac{1}{2(1+\tau)}}^{\frac{1}{1+\tau}} \rho(\tau,\lambda,u)\, d\lambda = 1 \ .$$

3. Pour tout K il existe une fonction continue $C(\lambda,u)$, telle que : $\rho(\tau,\lambda,u)\, D_u^K < \alpha\, C(\lambda,u)|\tau|$.

4. (qui précise 1.)

Soit :

$$\delta(\lambda,u) = \min\ |\ |m\ z - \lambda\ |$$

$$\text{pour } \Gamma_p(z,u) = 0 \ .$$

Il existe une constante β , telle que :

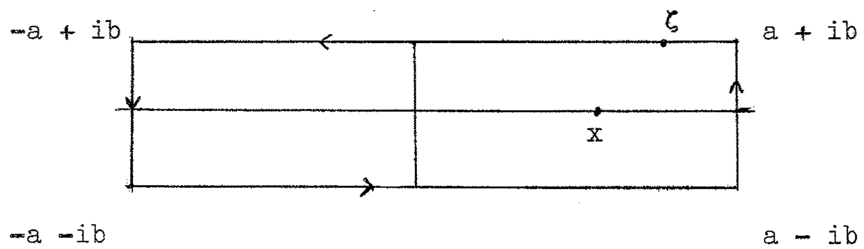
$$\delta(\lambda,u) \leqslant \frac{1}{\beta(1+|\tau|)} \Longrightarrow \rho(\tau,\lambda,u) \equiv 0 \ \text{"} .$$

LE LEMME DU MULTIPLICATEUR $\Longrightarrow$

LE LEMME DE DIVISION DE $\cos \tau(t - x)$:

Si $a, b > 0$ on considère le contour :

$C_{a,b} \subset C$ = plan complexe, dessiné ci-dessous :



En considérant τ, t comme des paramètres, on écrit l'intégrale de Cauchy :

$$\cos \tau(t - x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{a,|\lambda|}} \frac{\cos \tau(t-\zeta)}{\zeta - x} \, d\zeta$$

$(a > |x|)$. Soit $\tau, t, x, \lambda \in R$, $u \in R^p$ choisis.

On suppose que :

$$a > \max (|x| \ , \ \text{Re } z|)$$

$$(\text{où } \Gamma_p(z,u) = 0)$$

et $\lambda \neq \text{Im } z$ (toujours $\Gamma_p(z,u) = 0$) .

En exprimant $1/\zeta - x$ dans l'intégrale ci-dessus, par l'identité fondamentale, on a :

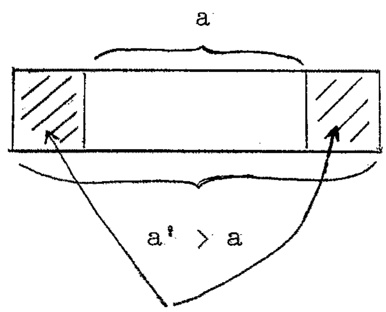
$$\cos \tau(t - x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{a,|\lambda|}} \frac{\cos \tau(t - \zeta)}{\zeta - x} \, d\zeta =$$

$$= \Gamma_p(x,u) \, [\underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{a,|\lambda|}} \frac{\cos \tau(t - \zeta) \, d\zeta}{\Gamma_p(\zeta,u)(\zeta - x)}}_{Q^*(\lambda,\tau,t,x,u) \,\in\, C^\infty}] \quad +$$

$$+ \Sigma\, x^{p-j} \underbrace{\left[\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\cos \tau(t-\zeta)\Gamma_{j-1}(\zeta,u)d\zeta}{\Gamma_p(\zeta,u)}\right]}_{H_j^*(\lambda,\tau,t,u)\ \in\ C^\infty} .$$

(Remarques : les intégrales écrites sont des fonctions C^∞ , réelles, bien indépendantes de a . En effet : d'une part Q^* , H^* ; ne prennent que des valeurs réelles puisqu'elles sont des sommes de résidus : les pôles sont des solutions d'équations algébriques réelles, donc symétriques par rapport à l'axe réel, de même que le contour à intégrer ....

D'autre part, si on agrandit a, on n'attrape pas plus de solutions de ces équations :



pas de nouveaux pôles.

Si λ est suffisamment grand, les fonctions sont indépendantes de λ , aussi, mais on aura besoin, dans la suite, de tous les λ).

En multipliant :

$$\cos \tau(t - x) = \Gamma_p(x,u)Q^* + \Sigma\, x^{p-j}\, H_j^*$$

avec $\rho(\tau,\lambda,u)$ et un intégrant en λ entre $\frac{1}{2(1+\tau)}$ et $\frac{1}{1+\tau}$ on aura : (vu ②)

$$\cos \tau(t-x) = \Gamma_p(x,u)\ Q(\tau,t,x,u) +$$
$$+ \Sigma\, x^{p-j} H_j(\tau,t,u), \quad \text{où :}$$

(par définition) :

$$Q(\tau,t,x,u) = \int_{\frac{1}{2(1+\tau)}}^{\frac{1}{1+\tau}} Q^*(\lambda,\tau,t,x,u)\ \rho(\tau,\lambda,u)\ d\lambda$$

$$H_j\ (\tau,t,u) = \int_{\frac{1}{2(1+\tau)}}^{\frac{1}{1+\tau}} H_j^*(\lambda,\tau,t,u)\quad \rho(\tau,\lambda,u)\ d\lambda\ .$$

Il faut montrer, I, II, III du lemme de division de cos : I est évidente à cause de (1). (II)$_{1,2}$ résulte par linéarité (vu que Q,H_j n'obtiennent en intégrant $\cos \tau(t-\zeta)$, avec des noyaux qui ne dépendent pas de t).

<u>Démonstration de III</u> : Soit :

$$\cosh y = \frac{e^y+e^{-y}}{2}\quad .$$

On a :

$$\frac{\partial^\ell}{\partial x^\ell}\ \frac{\partial^{|k|} Q^*}{\partial u^k} = \frac{1}{2\pi_i} \int_{C_{a,|\lambda|}} \frac{\cos \tau(t-y)\ R_{k,\ell}(\zeta,x,u)\ d\zeta}{\Gamma_p(\zeta,u)^{|k|+1}(\zeta-x)^{\ell+1}}\quad ,$$

$$\frac{\partial^{|k|}}{\partial u^k}\ H_j^* = \frac{1}{2\pi_i} \int_{C_{a,|\lambda|}} \frac{\cos \tau(t-\zeta)\ R'_{k,j}(\zeta,u)\ d\zeta}{\Gamma_p(\zeta,u)^{|k|+1}}$$

où $R,R \in \mathcal{C}^\infty$.

Donc

$$\left|\frac{\partial^\ell}{\partial x^\ell}\ \frac{\partial^{|k|}}{\partial u^k}\ Q^*\right| < \text{longueur}\ \ C_{a,|\lambda|}\ \times\ \max|R_{k,\ell}|\ \times$$

$$\underbrace{\times \max|\cos \tau(t-\zeta)|}_{<(\text{const} \times \cosh(\tau\lambda))} \times \underbrace{(\min \Gamma_p^{|k|+1})^{-1}}_{>\delta(\lambda,u)^{p(|k|+1)}} \times \underbrace{(\min)(\zeta - x)|^{|\ell|+1})^{-1}}_{>\lambda^{|\ell|+1}} .$$

(et une inégalité analogue pour H_j^*)

Donc :

$$(1) \begin{cases} Q^* D^K_{x,u} < \alpha\, C(\lambda,x,u)(\cosh \tau\lambda)\ (\delta(\lambda,u))^{-1}\ \lambda^{-1} \\ H_j^* D_u^K < \alpha\ C'(\lambda,u)(\cosh \tau\lambda)\ (\delta(\lambda,u))^{-1} \end{cases}$$

(où $C(\lambda,x,u)$, $C'(\lambda,u) \in \mathcal{C}^o$) .

(1) et (3) donnent :

$$(2) \begin{cases} \rho Q^*\ D^K_{x,u} < \alpha\ C_1(\lambda,x,u)(\cosh \tau\lambda)\ \delta(\lambda,u)^{-1}\lambda^{-1}\ |\tau| \\ \rho H_j^*\ D_u^K < \alpha\ C_1'(\lambda,u)(\cosh \tau\lambda)|\tau|\ \delta(\lambda,u)^{-1} . \end{cases}$$

Mais d'après (4) :

$\delta(\lambda,u)^{-1} \geqslant \beta^{-1}(1+|\tau|)$ implique : $\rho \equiv 0$,

qui implique : $D^K_{x,u}(\rho\, Q^*) = D^K_u\ (\rho H_j^*) \equiv 0$.

Donc : <u>les inégalités (2) restent vraies si l'on remplace $\delta(\lambda,u)^{-1}$ par $\beta^{-1}(1+|\tau|)$</u> .

D'autre part, les seuls λ qui nous intéressent sont :

$$\frac{1}{2(1+\tau)} \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{1+\tau}$$

(C'est-à-dire $\lambda \sim \frac{1}{1+\tau}$, ce qui implique : $\cosh\left(\tau\lambda\right)$ <u>borné</u>). Ceci implique (III).

4. <u>Démonstration du lemme du multiplicateur</u> : On rappelle que :

$\delta(\lambda,u) = \min | \operatorname{Im} z - \lambda |$ (où z est tel que $\Gamma_p(z,u) = 0$). Il en résulte que $\delta(\lambda,u) \in \mathcal{C}^0$ et que $\delta(\lambda,u) = \delta(-\lambda,u)$.

<u>LEMME 1</u>.- "Soit (pour λ,u : $\delta(\lambda,u) > 0$) :

$$\sigma(\lambda,u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} \quad \log \Gamma_p(x + i\lambda,u)|^2 \quad dx .$$

Alors : $\frac{1}{2}\, \delta(\lambda,u)^{-1} \leqslant \sigma(\lambda,u) \leqslant \frac{p^2}{2} \quad \delta(\lambda,u)^{-1}$

(Donc $\sigma(\lambda,u) \sim \delta(\lambda,u)^{-1}$) ".

Démonstration : Soient $z_1, \dots, z_p$ les racines de $\Gamma_p(z,u) = 0$ on a :

$$\left| \frac{d}{dx} \log \Gamma_p(x + i\lambda,u)\right|^2 = \left| \sum_j \frac{1}{x+\lambda i - z_j} \right|^2 =$$

$$= \underbrace{\left(\sum_j \frac{1}{x+\lambda i - z_j}\right) \left(\sum_j \frac{1}{x-\lambda i-\overline{z}_j} \right)}_{= 2\pi P(x) \quad (\text{définition}).} \qquad (x \in R)$$

$P(z)$ est méromorphe et $|z|^2 P(z)$ est bornée à l'infini. Donc, si $P(z)$ n'a pas des pôles réels ($\Longleftrightarrow \delta(\lambda,u) > 0$) on a :

$$\sigma(\lambda,u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(x)dx = i \times (\text{la somme des résidus de } P(z) \text{ dans le demi-plan supérieur}).$$

Donc :

$$\sigma(\lambda,u) = i \Big[\sum_{j\in A} \sum_{k=1}^{k} \underbrace{\frac{1}{z_j - \overline{z}_k - 2\lambda i}}_{\text{résidu du pôle } (z_j - \lambda i)} +$$

$$+ \sum_{j\in A'} \sum_{k=1}^{p} \underbrace{\frac{1}{\overline{z}_j - z_k + 2\lambda i}}_{\text{résidu du pôle } (\overline{z}_j + \lambda i)} \Big] ,$$

où : $j \in A \iff \mathrm{Im}\, z_j > \lambda$

$j \in A' \iff \mathrm{Im}\, z_j < \lambda$.

Si $j,k \in A$ le terme (j,k) dans la somme ci-dessus est :

$$\frac{1}{z_j-\bar{z}_k-2\lambda i} + \frac{1}{z_k-\bar{z}_j-2\lambda i} = \frac{1}{(Rz_j - Rz_k) + i(\mathrm{Im}\, z_j + \mathrm{Im}\, z_j - 2\lambda)} +$$

$$+ \frac{1}{(Rz_k - Rz_j) + i(\mathrm{Im}\, z_j + \mathrm{Im}\, z_k - 2\lambda)} = \frac{i(\mathrm{Im}\, z_j + \mathrm{Im}\, z_k - 2\lambda)}{|z_j - \bar{z}_k - 2\lambda i|^2} .$$

Si $j \in A$, $k \in A'$ le terme (j,k) est :

$$\frac{1}{z_j-\bar{z}_k-2\lambda i} + \frac{1}{\bar{z}_k-z_j-2\lambda i} = 0 \quad , \qquad \text{c.a.d.s.}$$

Donc :

$$\sigma(\lambda,u) = \sum_{1 \leqslant j,k \leqslant p} \beta_{jk} \frac{(\mathrm{Im}\, z_j + \mathrm{Im}\, z_k - 2\lambda)}{|z_j - \bar{z}_k - 2\lambda i|^2}$$

où $\beta_{jk} = 1 \iff ((j,k) \in A)$

$\beta_{jk} = 0 \iff ((j \in A,\ k \in A') \text{ ou } (j \in A',\ k \in A))$.

$\beta_{jk} = -1 \iff ((j,k) \in A')$.

Donc : $\sigma(\lambda,u)$ est une somme de p^2 quantités

$$\beta_{jk} \frac{(\mathrm{Im}\, z_j - \lambda) + (\mathrm{Im}\, z_k - \lambda)}{(Rz_j - Rz_k)^2 + ((\mathrm{Im}\, z_j - \lambda) + (\mathrm{Im}\, z_k - \lambda))^2} \geqslant 0$$

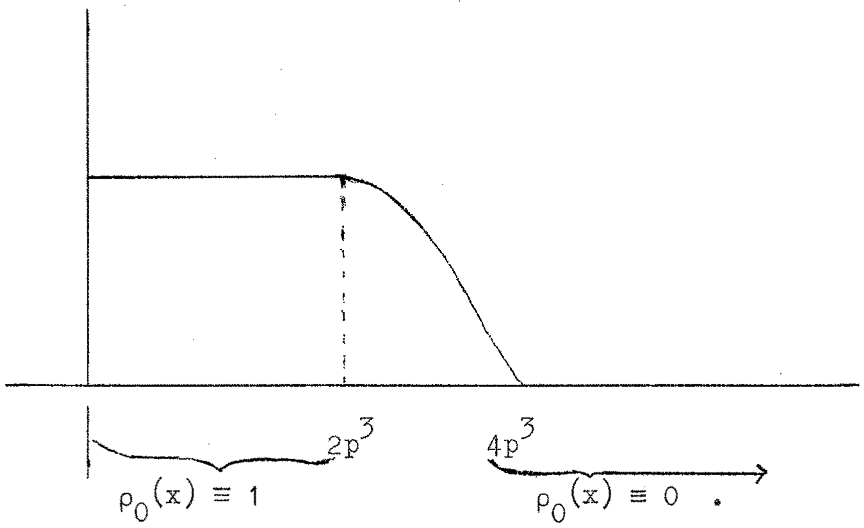
Chaque quantité est $\leqslant \frac{1}{2\delta(\lambda,u)}$.

Mais il y en a une : $(j,k = j_o$ où :

$$|\mathrm{Im}\, z_j - \lambda| = \delta(\lambda,u))$$

<u>égale</u> à $\dfrac{1}{2\delta(\lambda,u)}$, d'où le lemme 1.

Choisissons $0 \leqslant \rho_o \in C^\infty(R^+)$:



Remarquons que, au voisinage de $\{(u,\lambda),\ \lambda = \mathrm{Im} z,\quad \Gamma_p(z,u) = 0\} = V,\ \ \delta(\lambda,u)^{-1}$ est très grand, donc :

$$\rho_0(\sigma(\lambda,u)/1 + \tau) = 0$$

On peut donc définir :

$$\rho_0(\sigma(\lambda,u)/1 + \tau) \in \mathscr{C}^\infty$$

en posant $\quad \rho_0(\quad(\lambda,u)/1 + \tau) \equiv 0 \quad , \quad$ pour $\quad (\lambda,u) \in V$.

<u>DEFINITION</u>.-

$$\rho(\tau,\lambda,u) = \frac{\rho_0(\sigma(\lambda,u)/1 + \tau)}{\displaystyle\int_{\frac{1}{2(1+\tau)}}^{\frac{1}{1+\tau}} \rho_0(\sigma(\lambda,u)/1 + \tau)\, d\lambda}$$

On remarque que le dénominateur $\neq 0$ (donc $\rho \in \mathscr{C}^\infty$). D'une manière plus précise :

Soit $X(\tau,u) \subset R$ l'ensemble des $\lambda \in R$ tels que : $\dfrac{1}{2(1+\tau)} \leqslant \lambda \leqslant \dfrac{1}{1+\tau}$ et $\delta(\lambda,u) \geqslant \dfrac{1}{4(1+\tau)p}$. Je dis que $\left(\text{mesure } X(\tau,u)\right) \geqslant \dfrac{1}{4(1+\tau)}$:

(En effet ; il y a u plus $p/2$ racines avec $\mathrm{Im} z > 0$ et chacune enlève de $[\frac{1}{2(1+\tau)}, \frac{1}{1+\tau}]$ au plus un intervalle de longueur $\frac{1}{2(1+\tau)p}$) .

D'autre part, si : $\lambda \in X(\tau,u) \Longrightarrow \sigma(\lambda,u) \leqslant \frac{p^2}{2\delta(\lambda,u)} \leqslant 2p^3(1+\tau)$. Donc

$$\lambda \in X(\tau,u) \Longrightarrow \frac{\sigma(\lambda,u)}{1+\tau} \leqslant 2p^3 \Longrightarrow \rho_o \quad (\frac{\sigma(\lambda,u)}{1+\tau}) \geqslant 1 \quad .$$

Il s'ensuit que :

$$\int_{\frac{1}{2(1+\tau)}}^{\frac{1}{1+\tau}} \rho_o(\sigma(\lambda,u)/1+\tau)\, d\lambda \geqslant \frac{1}{4(1+\tau)} \quad .$$

On doit montrer 1 - 2 - 3 - 4 du lemme du multiplicateur. 1 , 2 sont évidentes.

<u>LEMME 2.-</u> "Soit $\ell > 0$, $R(x,\lambda,u_1,\dots,u_p) \in \mathcal{E}^\infty$, telle que R soit un polynome de degré $2p\ell - \ell$, en x . Alors, pour tout K , il $\exists$ une fonction continue $C(\lambda,u)$, t.q. :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(x,\lambda,u)\, dx}{|\Gamma_p(x+\lambda_i,u)|^{2\ell}} \quad D_u^K < \alpha \quad C(\lambda,u)\ \delta(\lambda,u)^{-1} .$$

<u>Démonstration (du lemme 2)</u> : on va faire une induction sur K . Si $K = 0$:

$$R(x,\lambda,u) = \sum_{j=0}^{2p\ell-2} r_j(\lambda,u)x^j \quad ,$$

$$|\Gamma_p(x+i\lambda,u)|^{2\ell} = x^{2p\ell} + \sum_{j=0}^{2p\ell-1} b_j(\lambda,u)x^j$$

où r_j , $b_j \in \mathcal{E}^\infty$. Soient :

$$b(\lambda,u) = \max\ (1, 2\ \Sigma|b_j|)$$

$$r(\lambda,u) = \Sigma|r_j| \ .$$

Si $|x| > b(\lambda,u)$:

$$|\Gamma_p(\ldots)|^{2\ell} \geqslant |x|^{2p\ell} - \Sigma|b_j|\ |x|^j \geqslant \frac{|x|^{2p\ell}}{2} \ .$$

Donc :

$$\int_{-\infty}^{-b} + \int_{b}^{\infty} dx\ \frac{|R|}{|\Gamma_p|^{2\ell}} \leqslant \int_{-\infty}^{-1} + \int_{1}^{\infty} dx\ \frac{r(\lambda,u)}{\frac{|x|^2}{2}} = r(\lambda,u) \ .$$

D'autre part :

$$|\Gamma_p(x + i\lambda,u)|^{2\ell} \geqslant \delta(\lambda,u)^{2p\ell} \quad \text{, donc :}$$

$$\int_{-b(\lambda,u)}^{+b(\lambda,u)} dx\ \frac{|R|}{|\Gamma_p|^{2\ell}} \leqslant 2b(\lambda,u)^{2p\ell-1}\ r(\lambda,u)\ \delta(\lambda,u)^{-2p\ell} \ .$$

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R dx}{|\Gamma_p|^{2\ell}} < \alpha\ C(\lambda,u)\ \ \delta(\lambda,u)^{-1} \ .$$

Si $K = 1$ on remarque que :

$$\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{R}{|\Gamma_p|^{2\ell}}\right) = \frac{\text{polyn. de deg } \leqslant 4p\ell - 2}{|\Gamma_p|^{4\ell}} \quad \text{, e.a.d.s.}$$

Vu que :

$$\sigma(\lambda,u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\frac{\partial}{\partial x}\ \Gamma_p(x + i\lambda,u)|^2}{|\Gamma_p(x + i\lambda,u)|^2}\ dx$$

Le lemme 2, implique que :

$$\sigma(\lambda,u)\ D_u^K < \alpha\ C(\lambda,u)\ \delta(\lambda,u)^{-1} \ .$$

D'autre part, ρ_0 a le support compact, donc il est borné, avec toutes ses dérivées. Donc :

(3) $\rho_0(\sigma(\lambda,u)/1+\tau)\ D_u^K < \alpha\ C(\lambda,u)\ \delta(\lambda,u)^{-1}$

Mais : $\delta(\lambda,u) \leqslant \dfrac{1}{8p^3(1+\tau)} \Longrightarrow \dfrac{\sigma(\lambda,u)}{1+\tau} \geqslant 4p^3$.

Donc :

(4) Si $\delta(\lambda,u) \leqslant \dfrac{1}{8p^3(1+\tau)} \Longrightarrow \rho_0(\sigma(\lambda,u)\ /\ 1+\tau) = 0$.

4 résulte de (4) .

Il nous reste à démontrer 3 .

On remarque que : si $\delta(\lambda,u)^{-1} \geqslant 8p^3(1+\tau) \Longrightarrow \rho_0(\ \ ) = 0$ (d'après (4)).
Dans (3), on peut donc remplacer $\delta(\lambda,u)^{-1}$ par τ :

(5) $\rho_0(\sigma(\lambda,u)/\ 1+\tau)\ D_u^K < \alpha\ C(\lambda,u)\tau$.

On a aussi :

$$\int_{\frac{1}{2(1+\tau)}}^{\frac{1}{1+\tau}} \rho_0(\sigma(\lambda,u)/1+\tau)\ d\lambda\ D_u^K < \alpha\ C(\lambda,u)\tau$$

puisque $\int_I <$ longueur I $\times$ max. fonction.

Si l'on se rappelle que :

$$\frac{1}{\displaystyle\int_{\frac{1}{2(1+\tau)}}^{\frac{1}{(1+\tau)}} \rho_0(\ldots)\ d\lambda} \leqslant \text{const.}\ (1+\tau) \quad ,$$

On peut démontrer 3 sans peine.

Ceci finit la démonstration.

3. <u>Remarque finale</u> : la construction donnée ci-dessus est "canonique" ; elle exprime $q(x,a)$, $h_j(a)$ comme des intégrales de $(f(y,b)$ avec des noyaux en (x,a,y,b), C^∞ . Il en résulte que :

1°. q, h_j dépendent linéairement de f .

2°. Si N est une autre variété C^∞, et T un espace topologique, et si

$$f_{u,v}(x,a) : N \times T \times M \times R \to R$$

$(u \in N , v \in T)$ est continue, C^∞ en $N \times M \times R$, avec toutes les dérivées continues, en $N \times T \times M \times R$, il en est de même pour $q_{u,v}(x,a)$, $(h_j)_{u,v}(a)$.

3°. Si $X \subset M$ est tel que :

$$f \mid X \times R \equiv 0 \implies q \mid X \times R \equiv 0 \ , \ h_j \mid X \equiv 0 \ .$$

Des énoncés plus précis sur la manière dont q, h_j dépendent de f, peuvent être trouvés dans l'article de Mather, cité plus haut.

-::-::-::-

CHAPITRE II.

LE THEOREME DE PREPARATION DE WEIERSTRASS-MALGRANGE-MATHER.

1/ Un théorème de division locale :

Théorème de division locale : "Soit $R^{m+1} = \{(x_1, \dots, x_m, t)\}$ et

$$f \in C_o^\infty(x, t) = C_o^\infty(R^{m+1})$$

un germe tel que :

$$f(0) = \frac{\partial^i f}{\partial t^i}(0) = 0 \quad \text{si} \quad i < p \quad \text{et} \quad \frac{\partial^p f}{\partial t^p}(0) \neq 0.$$

Pour tout $g \in C_o^\infty(x, t)$, ils existent des $q(x, t) \in C_o^\infty(x, t)$ et $a_1(x), \dots, a_p(x) \in C_o^\infty(x)$ tels que :

$$(\times) \qquad g(x, t) = f(x, t)\, q(x, t) + \sum_{j=1}^{p} t^{p-j} a_j(x) \text{ ".}$$

Démonstration : (Le raisonnement qui suit est du à Hörmander :)

On introduit des "variables auxiliaires" $(y_o, y_1, \dots, y_{p-1})$ et le polynôme "générique" :

$$\Gamma(t, y) = t^p + \sum_{i=0}^{p-1} y_i\, t^i .$$

$f \in C_o^\infty(x, t) \hookrightarrow C_o^\infty(x, y, t)$, et par germification, le théorème de division du chapitre I donne :

$$(1) \qquad f(x, t) = \Gamma(t, y)\, q(x, y, t) + \sum_{i=0}^{p-1} t^i\, h_i(x, y) .$$

En posant $x = y = 0$ et un comparant les deux membres :

$$t^p(\alpha + o(t)) = t^p\, q(0, 0, t) + \sum h_i(0, 0)\, t^i .$$

Puisque $\alpha \neq 0 \Longrightarrow q(0, 0, 0) \neq 0$, $h_i(0, 0) = 0$. Appliquons $\left.\frac{\partial^{j+1}}{\partial t^j\, \partial y_i}\right|_{(0, 0, 0)}$ aux deux membres de (1) : $(0 \leq j < p)$:

$$0 = \underbrace{\frac{\partial^j}{\partial t^j}\left(\Gamma(t, y)\frac{\partial q}{\partial y_i}\right)}_{= 0, \text{ puisque } j<p} + \underbrace{\frac{\partial^j}{\partial t^j}(t^i\, q)}_{\substack{= 0 \text{ si } j<i \\ \neq 0 \text{ si } j=i}} + j\,!\, \frac{\partial h_j}{\partial y_i}$$

$\Longrightarrow$ La matrice $\left(\frac{\partial h_j}{\partial y_i}\right)_o$ est $\neq 0$, partout sur la diagonale et $= 0$ d'un côté de la diagonale $(j < i)$.

Donc $\det(\frac{\partial h_j}{\partial y_i})_0 \neq 0$, donc les équations $h_i(x, y) = 0$ admettent une solution $y = \varphi(x)$ passant par $(0, 0) = \varphi(0) = 0$.

En remplaçant dans (1) :

$$f(x, t) = \Gamma(t, \varphi(x)) . q(x, \varphi(x), t).$$

$q(x, \varphi(x), t)$ est une <u>unité</u> dans $C_0^\infty(x, t)$ et $\Gamma(t, \varphi(x))$ est un polynôme par lequel on "sait diviser" (germification du théorème de division du chapitre I). Donc on peut diviser $g(x, t)$ par $f(x, t)$ q.e.d.

<u>Corollaire</u>. "Soit $f(x, t) \in C_0^\infty(x, t)$ comme ci-dessus. Il existe : un polynôme distingué :

$$P(t, x) = t^p + \sum_{i=1}^{p} h_i(x)\, t^{p-i} \quad , \quad h_i \in \mathfrak{m} C_0^\infty(x),$$

et une <u>unité</u> : $u \in C_0^\infty(x, t)$ $(u(0) \neq 0)$ tels que :

$$f = P\, u \text{ ".}$$

Démonstration : En fait on a déjà prouvé ce corollaire, au cours de la démonstration précédente. Si l'on veut utiliser seulement l'énoncé précédent, on choisit $g = t^p$ et on applique le théorème précédent :

$$t^p = f(x, t)\, q(x, t) + \sum_{j=1}^{p} t^{p-j}\, a_j(x)$$

En faisant $x = 0$ et en comparant les séries de Taylor formelles des deux côtés :

$$q(0, 0) \neq 0 \quad , \quad a_j(0) = 0 \qquad \text{q.e.d.}$$

2/ <u>Le théorème de préparation</u> :

Si M est un module sur l'anneau A, on dira que M est <u>fini</u> s'il possède un nombre fini de générateurs. Si $B \xrightarrow{u} A$ est un morphisme d'anneau, M devient B-module par restriction des scalaires : $\qquad b\, m = u(b)\, m \qquad$ (définition).

Supposons maintenant que A, B sont des <u>anneaux locaux</u> et que u est un <u>morphisme local</u>, c'est-à-dire que

$$u(\mathfrak{m} B) \subset \mathfrak{m} A.$$

En fait tous les anneaux locaux A qu'on va considérer auront les propriétés supplémentaires suivantes :

1) A est une $\mathbb{R}$-algèbre (locale).

2) Soit $\mathbb{R} \xrightarrow[\varepsilon]{} A$ le morphisme canonique : $\varepsilon(\alpha) = \alpha . 1$ $(1 \in A)$.

On demande que la composition :

$$\mathbb{R} \xrightarrow[\varepsilon]{} A \longrightarrow A/\mathfrak{m}A$$

soit une bijection.

Soit $A \xrightarrow[u]{} B$ un morphisme local. On dira que u <u>possède la propriété de Weierstrass</u> si :

"Pour tout B-module <u>fini</u> M on a l'implication :

$$\dim_{\mathbb{R}} M / u(\mathfrak{m}A) M < \infty \Longrightarrow M \text{ est } A\text{-fini "}.$$

<u>Lemme</u> : Considérons la composition de morphismes locaux $A \xrightarrow[u]{} B \xrightarrow[v]{} C$. Si u et v ont la propriété de Weierstrass alors $v \circ u$ possède, aussi la propriété de Weierstrass".

Démonstration : Soit M un C-mordule fini tel que $\dim_{\mathbb{R}} M / v \circ u(\mathfrak{m}A) M < \infty$.

On remarque que :

$$M / v \circ u(\mathfrak{m}A) M \longrightarrow M / v(\mathfrak{m}B) M \longrightarrow 0 .$$

Donc $\dim_{\mathbb{R}} M / v(\mathfrak{m}B) M < \infty$ donc M est B-fini. c.q.f.d.

Pour un moment on va abandonner le cadre des $\mathbb{R}$-algèbres locales, et donner le théorème de préparation <u>sous forme paramétrée</u> ($\mathbb{R}$-algèbres $\Longrightarrow$ $C_0^{\infty}(u)$ - algèbres).

<u>Théorème</u> :(Le théorème de préparation paramétré) "Considérons trois germes de variétés C^{∞} : $(X, 0)$, $(U, 0)$, $(Y, 0)$ (source, paramètres, but), et un diagramme commutatif d'application C^{∞} :

$$\begin{tikzcd}
(X, 0) \times (U, 0) \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & (Y, 0) \times (U, 0) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi_2"] & (Y, 0) \\
& (U, 0) &
\end{tikzcd}$$

(les flèches horizontales sont les projections naturelles). Considérons les morphismes d'anneaux :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & C_o^\infty(y,\, u) \arrow[dl, "F^*"'] \\
C_o^\infty(u) \arrow[r, "\pi_1^*"'] & C_o^\infty(x,\, u) & & \\
 & & & C_o^\infty(y). \arrow[ul, "(\pi\, F)^*"]
\end{tikzcd}$$

Soit M un $C_o^\infty(x,\, u)$-module fini. On considère $M\,/\mathfrak{m}\, C_o^\infty(y)\, M$ comme $C_o^\infty(u)$ - algèbre. (c'est la structure induite par π_1^*) . On a :

$$\dim_{C_o^\infty(u)} M\,/\mathfrak{m}\, C_o^\infty(y)\, M < \infty \Longrightarrow M \;\text{ est }\; C_o^\infty(y,\, u) \text{ - fini".}$$

Démonstration : On peut trouver un plongement i, qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
X \times U \arrow[r, hook, "i"'] \arrow[dr] \arrow[rrr, bend left, "F"] & Y \times R^N \times U \arrow[rr, "P\, =\, \text{projection}"'] \arrow[d] & & Y \times U \arrow[r, "\pi"'] & Y. \\
 & U & & &
\end{tikzcd}$$

$$i^* : C_o^\infty(y\ ;\ t_1, \ldots, t_N\ ;\ u) \longrightarrow C_o^\infty(x,\, u)$$

est surjectif, donc M est automatiquement $C_o^\infty\,(y\ ;\ t\ ;\ u)$ - fini. D'autre part :

$M\,/\mathfrak{m}\, C_o^\infty(y) = M/(\pi\, F)^*\mathfrak{m}\, C_o^\infty(y)\, M \;\equiv\; M\,/(\pi\, P)^*\mathfrak{m}\, C_o^\infty(y)\, M$.

On peut "détailler" P comme suit :

$$Y \times R^N \times U \xrightarrow[p_N]{} Y \times R^{N-1} \times U \xrightarrow[p_{N-1}]{} \cdots \longrightarrow Y \times U.$$

C'est clair que l'on a une propriété d'associativité de "la propriété de Weierstrass" qu'on veut démontrer. C'est-à-dire qu'il suffit de montrer notre théorème pour chaque p_i.

(Si M est un $C^\infty(Y \times R^{i+1} \times U)$ - module fini :

$$\dim_{C_o^\infty(u)} M\,/\mathfrak{m}\, C_o^\infty(y)\, M < \infty \Longrightarrow M \;\text{ est }\; C^\infty(Y \times R^i \times U) \text{ - fini)}.$$

On est réduit donc à considérer la projection :

$$\begin{tikzcd} Y \times R \times U \arrow[rr, "p"] \arrow[dr] & & Y \times U \arrow[dl] \\ & U & \end{tikzcd}$$

et à démontrer notre théorème pour le cas spécial $F = p$. Soient donc $a_1, \dots, a_q$ un système d'éléments de M, qui engendrent M comme $C_o^\infty(y, t, u)$- module, et $M / \mathfrak{m}\, C_o^\infty(y)\, M$ comme $C_o^\infty(u)$ - module.

Donc, pour tout $a \in M$, $\exists$

$$c_i(u) \in C_o^\infty(u) \quad \text{et} \quad z_i(y, u, t) \in (\pi\, p)^* \, (\mathfrak{m}\, C_o^\infty(y))$$

telles que

$$a = \sum_i c_i(u)\, a_i + \sum_i z_i(y, u, t)\, a_i$$

$$(z_i(y, u, t) = \sum_j z'_{ij}(y)\, z''_{ij}(y, u, t) \quad \text{où} \quad z'_{ij}(0) = 0) .$$

En particulier :

$$t\, a_j = \sum_i c_{ij}(u)\, a_i + \sum_i z_{ij}(y, u, t)\, a_i .$$

Soit $\Delta = \det\,(t\, \delta_{ij} - c_{ij}(u) - z_{ij}(y, u, t)) \in C_o^\infty(y, u, t)$. On a (Cramer) $\Delta\, a_i = 0$ donc $\Delta\, M = 0$. Si Δ est une unité, $M = 0$ et on a fini. Si $\Delta(0) = 0$, on remarque que les propriétés des z_{ij} impliquent que :

$$\frac{\partial^{q'} \Delta}{\partial t^{q'}}(0) \neq 0 \qquad \text{pour un} \quad 0 < q' \leq q .$$

En effet, on a :

$$\frac{\partial^i}{\partial t^i}\, z'(y)\, z''(y, u, t)\, \Big|_o = z'(0)\, \frac{\partial^i}{\partial t^i}\, z''\Big|_o = 0$$

Or :

$$\Delta = t^q + \sum_{k=1}^{q} P_k(c_{ij}(u),\, z_{ij}(y, u, t))\, t^{q-k}$$

où P_k est un polynôme. On a :

$$\frac{\partial}{\partial t}\, P_k(c_{ij}(u),\, z_{ij}(y, u, t)) \equiv 0 \qquad \text{e.a.d.s.}$$

Il $\exists$ donc un $0 < q' \leq q$, tel que

$$\frac{\partial^{q'}\Delta}{\partial t^{q'}}(0) \neq 0 \ , \quad \frac{\partial^{i}\Delta}{\partial t^{i}}(0) = 0, \quad 0 \leq i < q' \ .$$

Donc, d'après le théorème de division (germifié) : tout $g(y, u, t) \in C_0^\infty(y, u, t)$ s'écrit :

$$g(y, u, t) = \Delta(y, u, t)\, q(y, u, t) + \sum_{i=1}^{q'} t^{q'-i}\, a_i(u, y) \ .$$

Donc $C_0^\infty(y, u, t) \,/\, \Delta\, C_0^\infty(y, u, t)$ est $C_0^\infty(y, u)$ - fini. Mais vu que $\Delta\, M = 0$, $C_0^\infty(y, u, t)$ opére sur M par l'intermidiaire de $C_0^\infty(y, u, t) \,/\, \Delta\, C_0^\infty(y, u, t)$ Donc M est en fait un $C_0^\infty(y, u, t) \,/\, \Delta\, C_0^\infty(y, u, t)$ module <u>fini</u> . Il est donc aussi $C^\infty(y, u)$-fini q.e.d.

En prenant U = un point, on trouve le : (vrai)

<u>Théorème de préparation</u> : "Soient X, Y des germes de variétés C^∞ autour de $0 \in X$, $0 \in Y$, et :

$$(X, 0) \xrightarrow[f]{} (Y, 0)$$

un germe d'application C^∞, et

$$C_0^\infty(x) \xleftarrow{f^*} C_0^\infty(y)$$

le morphisme d'anneaux induit.

Soit M un $C_0^\infty(x)$ -module fini.

Alors f^* possède la propriété de Weierstrass :

$$\dim_{\mathbb{R}} M \,/\, f^*(\mathfrak{m}\, C_0^\infty(y))\, M < \infty \implies M \text{ est } C_0^\infty(y) \text{ - fini ".} \quad \text{(Malgrange).}$$

3/ <u>Formes plus précises du théorème de préparation</u> :

On commence par quelques préliminaires algèbriques :

<u>Le lemme de Nakayama</u> : "Soit A un anneau commutatif unitaire et $I \subset A$ un idéal tel que : $\forall\, z \in I$, $(1 + z)$ est une unité (exemple : A local $I \subset \mathfrak{m}A$).

Soit $\alpha : E \longrightarrow F$ un homomorphisme de A-modules. Si F est A-fini, on a l'implication :

$$\alpha(E) + I \,.\, F = F \implies \alpha(E) = F \text{ ".}$$

Démonstration : Soit $f_1, \ldots, f_q$ un système de A-générateurs de F. Notre hypothèse nous dit qu'ils existent des $e_1, \ldots, e_q \in E$, $b_{ij} \in I$, tels que :

$$f_i = \sum_j b_{ij} f_j + \alpha(e_i) .$$

On remarque que $\det(\delta_{ij} - b_{ij}) \in 1 + I$ donc la matrice $(\delta_{ij} - b_{ij})$ est inversible,

e.a.d.s.

<u>Corollaire</u>. (Autre forme de Nakayanna) :

" Soient $I \subset A$ comme ci-dessus. Soit, aussi M un A-module fini. On a :

$$I\,M = M \implies M = \{0\} \text{ "}$$

Démonstration : On applique le lemme ci-dessus à l'inclusion naturelle $0 \in M$.

<u>Corollaire</u>. $C_0^\infty(x) = C_0^\infty(R^n)$ n'est <u>pas</u> un anneau noethérien .

Démonstration. On sait que

$\mathfrak{m}^\infty C_0^\infty(x) = \bigcap \mathfrak{m}^i C_0^\infty(x) = \{$ l'<u>idéal</u> des fonctions qui s'annulent ainsi que <u>toutes</u> leurs dérivées partielles, au point $0\} \neq 0$.

Or $C_0^\infty(x) \cdot \mathfrak{m}^\infty C_0^\infty(x) = \mathfrak{m}^\infty C_0^\infty(x)$. Si $C_0^\infty(x)$ était noethérien, $\mathfrak{m}^\infty C_0^\infty(x)$ serait $C_0^\infty(x)$ - fini donc, Nakayanna impliquerait $\mathfrak{m}^\infty C_0^\infty(x) = 0$.

Soit A un anneau commutatif unitaire et $p \subset A$ un idéal propre. A est un anneau topologique si on le munit de la topologie "p-adique", pour laquelle

$$p \supset p^2 \supset p^3 \supset \ldots\ldots \supset p^k \supset \ldots\ldots$$

constitue un système fondamental de voisinages de 0. Cette topologie est séparée si et seulement si :

$$p^\infty = \bigcap_{i=1}^{\infty} p^i = \{0\}$$

Si A est local, la topologie "$\mathfrak{m}A$ - adique" s'appelle "topologie de Krull".

Si M est un A-module on définit la topologie de Krull sur M en prenant comme système fondamental de voisinage de $0 \in M$ les $\mathfrak{m}^k(A)\,M$.

On peut montrer que, si M est A-fini et A est noethérien, M est <u>séparé</u> pour la topologie de Krull.

$$\hat{A} - \varprojlim A / \mathfrak{m}^k(A)$$

s'appelle le <u>séparé-complété</u> de A. On a une application naturelle

$$A \xrightarrow{\wedge} \hat{A} ,$$

la complétion. Si $A = C_0^{\infty}(x)$, $\hat{A} = R[[x]]$ = l'anneau des séries formelles en $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $\hat{}$ = l'application qui consiste à associer à f sa série (formelle) de Taylor à l'origine.

Si M est un A-module on définit, de la même manière le $\hat{A}$-module :

$$\hat{M} = \varprojlim M / \mathfrak{m}^k(A) M.$$

Si $A \xrightarrow[u]{} B$ est un morphisme local, u est continu pour la topologie de Krull, et induit, d'une manière canonique, un morphisme $\hat{A} \xrightarrow{\hat{u}} \hat{B}$.

Dorénavant, les anneaux locaux qu'on va considérer seront des R-algèbres telles que :

1) $\mathfrak{m}(A)$ est A-fini

2) L'application composée : $R \longrightarrow A \longrightarrow A/\mathfrak{m}(A)$ est une bijection.

Lemme 1. "Soit A comme ci-dessus et M un A-module fini. Soit, aussi $M' \subset M$ un sous A-module. On a :

$$\dim_R M / M' < \infty \Longleftrightarrow \exists\, k \in N^+ \text{ tel que } M' \supset \mathfrak{m}^k(A) M \text{"}.$$

Démonstration. Puisque $\mathfrak{m}(A)$ est A-fini, $\mathfrak{m}^k(A)$ est aussi A-fini. Donc

$$\mathfrak{m}^k(A)/\mathfrak{m}^{k+1}(A) = \mathfrak{m}^k(A) / \mathfrak{m}(A)\, \mathfrak{m}^k(A)$$

est $A/\mathfrak{m}(A) = R$-fini. Donc :

$$A / \mathfrak{m}^k(A) \text{ est } R\text{ - fini .}$$

(Ceci résulte par induction, à partir de la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m}^{k-1}(A)/\mathfrak{m}^k(A) \longrightarrow A / \mathfrak{m}^k(A) \longrightarrow A / \mathfrak{m}^{k-1}(A) \longrightarrow 0).$$

Pour voir $\Longleftarrow$: On remarque que $M / \mathfrak{m}^k(A) M$ est $A / \mathfrak{m}^k(A)$ - fini, donc, d'après la remarque de tout-à-l'heure R -fini. $\Longleftarrow$ résulte de la suite exacte :

$$M / \mathfrak{m}^k(A) M \longrightarrow M / M' \longrightarrow 0.$$

Pour voir $\Longrightarrow$ on remarque que les $\mathfrak{m}^k(A)(M / M')$ forment une suite décroissante d'espaces vectoriels de dimension finie. Il existe donc un k, tel que :

$$\mathfrak{m}^k(A)(M / M') = \mathfrak{m}^{k+1}(A)(M / M') = \mathfrak{m}(A)(\mathfrak{m}^k(A)(M / M')) .$$

Par Nakayama :

$$\mathfrak{m}^k(A)\ (M / M') = 0$$

Mais $\mathfrak{m}^k(A)(M / M') = (\mathfrak{m}^k(A)\ M)/ M' \cap \mathfrak{m}^k(A)\ M$. Donc $\mathfrak{m}^k(A)\ M \subset M'$. q.e.d.

Soit $p \subset A$ un idéal d'un anneau local. p est appelé <u>idéal de définition</u> s'il satisfait à l'une des deux conditions équivalentes ci-dessous :

i) La topologie p-adique coïncide avec la topologie de Krull.

ii) $\exists\ k$ tel que : $\mathfrak{m}^k(A) \subset p$.

Le lemme ci-dessus implique le :

<u>Corollaire</u> : " $p \subset A$ est un idéal de définition si et seulement si :

$$\dim_R A/p < \infty \text{ "}$$

Remarquons que, dans le cadre où on se place, $\hat{A}$ est de nouveau un anneau local, en fait une R-algèbre locale satisfaisant à nos axiomes 1), 2), et de plus, on a des isomorphismes canoniques

$$A / \mathfrak{m}^k(A) \xrightarrow[\approx]{} \hat{A} / \mathfrak{m}^k(\hat{A}) .$$

(En fait, si B est un anneau quelconque et $p \subset B$ un idéal maximal, le séparé-complété $\hat{B}$ (pour le topologie "p-adique") est un anneau local et :

$$\mathfrak{m}\hat{B} = \hat{p}\ ) .$$

Sans faire appel au théorème qu'on vient de citer, soient $x_1, \ldots, x_n$ un système de A-générateurs de $\mathfrak{m}(A)$. On a une surjection canonique :

$$R[[x_1, \ldots, x_n]] \longrightarrow \hat{A} \longrightarrow 0.$$

Donc $\hat{A}$ est toujours le quotient d'une algèbre de séries formelles.

$\hat{A}$ est local parce que tout quotient d'un anneau local est local. C'est trivial que : $\hat{A}/\mathfrak{m}(\hat{A}) \approx R$. $\mathfrak{m}(\hat{A})$ est engendré par les images des x_i. Donc $\hat{A}$ vérifie nos axiomes.

Remarquons, enfin, que dans le contexte où on se place, tout R-homomorphisme est automatiquement local : Si $A \xrightarrow[u]{} B$, on a un homomorphisme <u>non-nul</u> :

$$A / u^{-1}(\mathfrak{m}(B)) \longrightarrow B / \mathfrak{m}(B) = R .$$

Puisque cet homomorphisme est non-nul, il est <u>surjectif</u>, et comme il est de toute façon <u>injectif</u> : $u^{-1}(\mathfrak{m}(B)) = \mathfrak{m}(A)$ e.a.d.s.

<u>Lemme 2</u>. "Soit $A \xrightarrow[u]{} B$ un homomorphisme (local) et M un B-module fini. On suppose aussi que $\hat{M}$ est $\hat{B}$-fini .

On a

$$\dim_R M/u(\mathfrak{m}(A))\, M < \infty \iff \dim_R \hat{M}/\,\hat{u}(\mathfrak{m}(\hat{A}))\, \hat{M} < \infty \text{ ."}$$

<u>Remarque</u>. $\hat{M}$ est automatiquement $\hat{B}$-fini, en vertu de la proposition 16 Bourbaki, Algèbre Commutative ch. 3 p. 51.

Donc l'hypothèse que "$\hat{M}$ est $\hat{B}$-fini" est inutile.

Démonstration. D'après le lemme 1 il suffit de montrer que :

$$u(\mathfrak{m}(A))\, M \supset \mathfrak{m}^k(B)\, M \iff \hat{u}(\mathfrak{m}(\hat{A}))\, \hat{M} \supset \mathfrak{m}^k(\hat{B})\, \hat{M} \text{ .}$$

Soit $M' \subset M$ un sousmodule . Modulo $\mathfrak{m}^r(B)\, M$ $(\mathfrak{m}^r(\hat{B})\, \hat{M})$, M et $\hat{M}$ "sont la même chose", donc : on a :

$$(M' + \mathfrak{m}^r(B)\, M)\, /\, \mathfrak{m}^r(B)\, M \xrightarrow[\approx]{} (\hat{M}' + \mathfrak{m}^r(\hat{B})\, \hat{M})\, /\, \mathfrak{m}^r(\hat{B})\, \hat{M} \text{ .}$$

(Ici, par abus de notation, $\hat{M}' \subset \hat{M}$ ne désigne <u>pas</u> le complété-séparé de M', mais le sous $\hat{B}$-module (de $\hat{M}$) engendré par l'image de M' : $\hat{M}' = M'\,\hat{B}$).

Soit : $M' = u(\mathfrak{m}(A))\, M$. $\hat{M}' + \mathfrak{m}^r(\hat{B})\, \hat{M} \subset \hat{M}$ est un fermé pour la topologie de Krull (puisque $\mathfrak{m}^r(\hat{B})\, \hat{M}$ est un voisinage de $0 \in \hat{M}$). Il en résulte que :

$$\hat{M}' + \mathfrak{m}^r(\hat{B})\, \hat{M} = \mathfrak{m}(\hat{A})\, \hat{M} + \mathfrak{m}^r(\hat{B})\, \hat{M}$$

(puisque ce dernier module est emboité entre $\hat{M}' + \mathfrak{m}^r(\hat{B})\, \hat{M}$ et sa fermeture). On a donc :

$$(\mathfrak{m}(A)\, M + \mathfrak{m}^r(B)\, M)\, /\, \mathfrak{m}^r(B)\, M \xrightarrow[\approx]{} (\mathfrak{m}(\hat{A})\, \hat{M} + \mathfrak{m}^r(\hat{B})\, \hat{M})\, /\, \mathfrak{m}^r(\hat{B})\, \hat{M}.$$

Supposons maintenant que :

$$\mathfrak{m}(A)\, M \supset \mathfrak{m}^k(B)\, M \quad \text{et prenons : } r = K+1.$$

On a :

$$\begin{array}{ccc} (\mathfrak{m}(A)\, M + \mathfrak{m}^{k+1}(B)\, M) / \mathfrak{m}^{k+1}(B)\, M & \xleftarrow[i\,=]{} & \mathfrak{m}^{k}(B)\, M / \mathfrak{m}^{k+1}(B)\, M \\ \approx \Big\downarrow & \text{plongement naturel} & \ell \Big\downarrow \approx \\ (\mathfrak{m}(\hat{A})\, \hat{M} + \mathfrak{m}^{k+1}(\hat{B})\, \hat{M}) / \mathfrak{m}^{k+1}(\hat{B})\hat{M} & & \mathfrak{m}^{k}(\hat{B})\, \hat{M} / \mathfrak{m}^{k+1}(\hat{B})\, M\ . \end{array}$$

La ligne supérieure se passe dans $M / \mathfrak{m}^{k+1}(B)\, M$, tandis que la ligne inférieure se passe dans $\hat{M} / \mathfrak{m}^{k+1}(\hat{B})\, \hat{M}$. L'existence du plongement i, implique l'existance d'un plongement j :

$$\mathfrak{m}^{k}(\hat{B})\, \hat{M} / \mathfrak{m}^{k+1}(\hat{B})\, \hat{M} \xhookrightarrow[j]{} (\mathfrak{m}(\hat{A})\, \hat{M} + \mathfrak{m}^{k+1}(\hat{B})\, \hat{M}) / \mathfrak{m}^{k+1}(\hat{B})\, \hat{M}$$

Donc :

$$\mathfrak{m}^{k}(\hat{B})\, \hat{M} \hookrightarrow \mathfrak{m}(\hat{A})\, \hat{M} + \mathfrak{m}^{k+1}(\hat{B})\, \hat{M}.$$

Appliquons Nakayama à $\mathfrak{m}^{k}(\hat{B})\, \hat{M}$ et $\mathfrak{m}^{k}(\hat{B})\hat{M} \cap \mathfrak{m}(\hat{A})\, \hat{M} \hookrightarrow \mathfrak{m}^{k}(\hat{B})\, \hat{M}$.
(On remarque que $\mathfrak{m}^{k}(\hat{B})\, \hat{M}$ est $\hat{B}$-fini, puisque $\hat{M}$ et $\mathfrak{m}^{k}(\hat{B})$ le sont).

On a :

$$\mathfrak{m}^{k}(\hat{B})\, \hat{M} = \mathfrak{m}^{k}(\hat{B})\, \hat{M} \cap \mathfrak{m}(\hat{A})\, \hat{M}$$

donc :

$$\mathfrak{m}(\hat{A})\, \hat{M} \supset \mathfrak{m}^{k}(\hat{B})\, \hat{M}\ .$$

Dans l'autre sens, la démonstration se fait de la même façon.

<u>Lemme 3</u>. "Dans les mêmes conditions qu'au lemme 2, si $\dim_R M / u(\mathfrak{m}(A))\, M < \infty$,

$$M / u((\mathfrak{m}(A))\, M \xrightarrow[\approx]{} \hat{M} / \hat{u}(\mathfrak{m}(\hat{A}))\, \hat{M}$$

est bijective."

Démonstration. La démonstration précédente nous fournit un isomorphisme :

$$\mathfrak{m}(A)\, M / \mathfrak{m}^{k}(B)\, M \xrightarrow[\approx]{} \mathfrak{m}(\hat{A})\, \hat{M} / \mathfrak{m}^{k}(\hat{B})\, \hat{M}\ .$$

On a :

$$M / \mathfrak{m}(A)\, M = (M/\mathfrak{m}^{k}(B)\, M) / (\mathfrak{m}(A)\, M / \mathfrak{m}^{k}(B)\, M) \qquad \text{e.a.d.s.}$$

- LE THEOREME DE PREPARATION DE WEIERSTRASS DANS LE CAS FORMEL -

On commence par rappeler un vieux theorème d'Emile Borel ;

Théorème de Borel : "L'application de Taylor :

$$C_0^\infty(x) \xrightarrow{T_0 = \hat{}} R[[x]] \longrightarrow 0$$

est surjective."

Ce théorème est un cas particulier du théorème d'extension de Whitney du chapitre suivant .

Soit

$$u : R[[y]] \longrightarrow R[[x]]$$

un morphisme de R-algèbres. D'après le théorème de Borel, il existe toujours un $f \in C_{0,0}^\infty(X, Y)$ = espace des germes d'application C^∞ $x \longmapsto y$, tel que $\hat{f}^* = u$.

L'analogue formel du théorème de division locale. "Soit $(x, t) = (x_1, \ldots, x_m, t)$ et $\varphi \in R[[x, t]]$, tel que :

$$\varphi(0, t) = t^p(\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots)$$

avec $\alpha_0 \neq 0$. ($\alpha_i \in R$).

Pour chaque $\psi \in R[[x, t]]$, ils existent des $\rho \in R[[x, t]]$, $\chi_i \in R[[x]]$ ($i = 1, \ldots, p$) tels que :

$$\psi = \varphi\, \rho + \sum_{i=1}^{p} t^{p-i}\, \chi_i ."$$

Démonstration. D'après le théorème de Borel ils existent des $f, g \in C_0^\infty(x, t)$ tels que : $T_0 f = \varphi$, $T_0 g = \psi$ (T_0 = série de Taylor, formelle, en 0). On peut appliquer le théorème de division locale (C_0^∞), e.a.d.s.

A partir de ce théorème de division local, en procédant tout à fait comme dans le cas C^∞ on déduit :

Le théorème de préparation formel : "Tout morphisme de R-algèbres :

$$R[[y]] \xrightarrow{u} R[[x]]$$

possède la propriété de Weierstrass.

C'est-à-dire que, si M est un $R[[x]]$-module fini, alors :

$$\dim_R M/\mathfrak{m}(R[[y]])\, M < \infty \Longrightarrow M \text{ est } R[[y]]\text{-fini "} .$$

<u>Une forme plus précise du théorème de préparation</u> : "Soit

$$(X, 0) \xrightarrow[f]{} (Y, 0)$$

un germe d'application C^∞, et l'application associée :

$$C_0^\infty(x) \xleftarrow[f^*]{} C_0^\infty(y).$$

Soit M un $C_0^\infty(x)$-module fini, et $a_1, \ldots, a_q$ une famille d'éléments de M. On va désigner par $\bar{a}_i$, $\hat{a}_i$, $\bar{\hat{a}}_i$ les images des a_i dans $M/\mathfrak{m}\, C_0^\infty(y)\, M$, $\hat{M}$, $\hat{M}/\mathfrak{m}\, R[[y]]\, \hat{M}$.

Les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

i) les a_j engendrent M comme $C_0^\infty(y)$-module.

ii) les $\bar{a}_j$ engendrent $M/\mathfrak{m}\, C_0^\infty(y)\, M$ comme R-module (= espace vectoriel).

Si, en plus, $\hat{M}$ est $R[[x]]$-fini, (ce qui, en fait, est toujours le cas, en vertu d'une remarque antérieure), elles sont équivalentes avec :

iii) les $\hat{a}_j$ engendrent $\hat{M}$ comme $R[[y]]$-module.

iv) les $\bar{\hat{a}}_j$ engendrent $\hat{M}/\mathfrak{m}\, R[[y]]\, \hat{M}$ comme R-module".

Démonstration. (i) $\Longrightarrow$ (ii) est triviale. Si (ii) est satisfait M est $C_0^\infty(y)$-fini d'après le théorème de préparation. Soit $M' \subset M$ le $C_0^\infty(y)$-module engendré par les $a_1, \ldots, a_q$.

On a :

$$M' + \mathfrak{m}\, C_0^\infty(y)\, M = M \quad .$$

On peut appliquer Nakayama (puisque M est $C_0^\infty(y)$-fini !) et on conclut que $M' = M$.

D'une manière analogue, (iii) $\Longleftrightarrow$ (iv). (Théorème de préparation formel + Nakayama).

Enfin, les lemmes 2, 3 nous disent que (ii) $\Longleftrightarrow$ (iv).

<u>Corollaire.</u>1. "Soient f, f^* comme ci-dessus, et $\varphi_1, \ldots, \varphi_q \in C_0^\infty(x)$.

Les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

i) Les φ_i engendrent $C_0^\infty(x)$ comme $C_0^\infty(y)$ - module.

ii) Les $\bar{\varphi}_i$ engendrent $C_0^\infty(x)/\mathfrak{m}\, C^\infty(y) . C^\infty(x)$ comme R-module.

iii) Les $\hat{\varphi}_i = T_0\, \varphi_i$ engendrent $R[[x]]$ comme $R[[y]]$ - module.

iv) Les $\bar{\hat{\varphi}}_i$ engendrent $R[[x]]/\mathfrak{m}\, R[[y]] . R[[x]]$ comme R-module."

Corollaire 2. "Soient f, f^* comme ci-dessous. Soient M, N des $C_o^\infty(y)$, $C_o^\infty(x)$- modules (respectivement), N, M étant finis, et

$$\alpha : M \longrightarrow N$$

un morphisme linéaire compatible avec f^*. On a :

$$\alpha(M) + f^* \mathfrak{m}(C_o^\infty(y))\, N = N \Longrightarrow \alpha(M) = N \text{."}$$

Démonstration : On a :

$$M / \mathfrak{m}\, C_o^\infty(y)\, M \longrightarrow N / f^* \mathfrak{m}\, C_o^\infty(y)\, N \longrightarrow 0.$$

Vu que $M / \mathfrak{m}\, C_o^\infty(y)\, M$ est un $C_o^\infty(y)/\mathfrak{m}\, C_o^\infty(y) = R$-module fini, ceci implique que

$$\dim_R N / f^* \mathfrak{m}\, C_o^\infty(y)\, N < \infty.$$

Le théorème de préparation nous dit que N est $C_o^\infty(y)$-fini. On peut donc appliquer Nakayama, e.a.d.s.

4/ Premières applications :

Le théorème des fonctions symétriques (Glaeser) :

Soit $(R_n, 0)$ avec des coordonnées locales $(x_1, \dots, x_n)$. On va désigner par S_n le groupe symétrique des permutations de $(1, \dots, n)$. On a une action :

$$S_n \times C_o^\infty(x) \longrightarrow C_o^\infty(x)$$

définie par :

$$\pi \times f = f(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(x)}) .$$

On considère aussi les fonctions symétriques fondamentales :

$$G_1 = \Sigma\, x_j$$
$$G_2 = \Sigma\, x_i\, x_j$$
$$G_3 = \Sigma\, x_i\, x_j\, x_k$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$G_n = x_1, x_2, \dots, x_n .$$

$f \in C_o^\infty(x)$ sera dit symétrique, si pour tout $\pi \in S_n$: $\pi \times f \equiv f$.

On a le théorème :

"Si $f \in C_o^\infty(x)$ est symétrique, il existe un $g \in C_o^\infty(x)$ tel que

$$f(x) = g(\sigma_1(x), \sigma_2(x), \ldots, \sigma_n(x)) \text{"}.$$

Démonstration. Considérons $y = (y_1, \ldots, y_n)$ et l'application $\sigma : X \longrightarrow Y$ donnée par $y_i = \sigma_i(x)$. Soient $P_1(x), \ldots, P_k(x)$ les polynômes en x, où chaque x_i apparait avec un degré $< n$. Il est facile à voir que $P_1(x), \ldots, P_k(x)$ engendrent $R[[x]]$ comme $R[[y]]$-module(ici on considère

$$\hat{\sigma}^* : R[[y]] \longrightarrow R[[x]] ,$$

qui définit une structure de $R[[y]]$-module sur $R[[x]]$).

D'après le corollaire 1, $P_1(x), \ldots, P_k(x)$ engendrent $C_o^\infty(x)$ comme $C_o^\infty(y)$-module. Donc quel que soit $F(x) \in C_o^\infty(x)$, ils existent des $g_1(y), \ldots, g_k(y)$, tels que :

$$F(x) = \sum g_i(\sigma_1(x), \ldots, \sigma_n(x))\, P_i(x).$$

Supposons que $F(x)$ soit symétrique. On a :

$$F(x) = \frac{\sum_{\pi \in S_n} \pi \times F}{n!} = \sum_i \frac{g_i(\sigma(x))}{n!} \sum_\pi \pi \times P_i(x) .$$

$\sum_\pi \pi \times P_i(x)$ est un polynôme symétrique, et en lui appliquant le théorème de Newton, on a q.e.d.

Applications génériques de R^2 dans R^2 : (Whitney)

"Soient M, N deux variétés C^∞ compactes de dimension 2. Dans $C^\infty(M, N)$ il existe un ouvert dense $\Omega \subset C^\infty(M, N)$, tel que si $f \in \Omega$, pour chaque $p \in M$, f peut-être décrit (à un changement de coordonnées locales, près), au voisinage de p, par l'une des trois formes suivantes :

I (immersion) $\quad y_1 = x_1 \;,\; y_2 = x_2$

II (pli) $\quad y_1 = x_1 \;,\; y_2 = x_2^2$

III (cusp) $\quad y_1 = x_1 \;,\; y_2 = -x_1 x_2 + x_2^3$ " .

Démonstration. On commence par remarquer que, dans $C^\infty(M, N)$, l'ensemble Ω_1 des f dont le rang est partout ≥ 1 est un ouvert partout dense. Ceci résulte tout de suite de la transversalité (Thom) : considérons dans $J^1(M, N)$ la sous-variété $\Sigma \subset J^1(M, N)$ correspondant aux 1-jets qui ont la propriété que toutes les dérivées d'ordre 1 s'annullent. Alors : $f \in \Omega_1$ $(f \in C^\infty(M, N)) \Longleftrightarrow j^1 f(x) \notin \Sigma \quad (\forall x \in M)$.

Mais, vu que

$$\text{codimension } \Sigma = 4 > \dim M$$

on a : Image $j^1 f \cap \Sigma = \emptyset \Longleftrightarrow j^1 f$ est transverse à Σ, c.a.d.s.

Si $F \in \Omega$, on peut toujours supposer (localement) que F est de la forme :

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = f(x_1, x_2)$$

(En effet en supposant par exemple que F est : $y_1 = f_1(x_1, x_2)$, $y_2 = f_2(x_1, x_2)$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(0) \neq 0$ on peut résoudre $y_1 = f_1(x_1, x_2) \Rightarrow x_1 = \varphi(y_1, x_2)$ et passer, <u>à la source</u> : des coordonnées (locales) (x_1, x_2) aux coordonnées locales (y_1, x_2).)

Dans Ω_1 je considère $\Omega \subset \Omega_1$ défini par :

$$\text{si } p \in M \text{ est tel que } \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(p) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2}(p) \neq 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3}(p) \neq 0 \quad \text{(appelons ceci la "propriété } \omega\text{")}$$

Ω est ouvert et dense.

[Démonstration. (Elémentaire, il existe une autre démonstration utilisant des variétés bien choisies de l'espace des jets). Il est facile de voir que, pour tout voisinage de coordonnées compact $U = \{(x_1, x_2)\}$ de M, l'ensemble des $F \in \Omega$ qui sont tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{a) } F \mid U \text{ est de la forme } y_1 = x_1, \ y_2 = f(x_1, x_2) \\ \text{b) } f \text{ satisfait à } (\omega) \end{array} \right\} \text{ est un ouvert (de } C^\infty(M, N)).$$

Il nous faut montrer, alors, que, si $p \in M$, $F \in \Omega$, il existe un voisinage $p \in U \subset M$ et un voisinage $F \in W \subset \Omega$, tels que, tout $G \in W$ puisse être approximé par un $F' \in W$ tel que $F' \mid U$ satisfait à (ω).

Ceci résulte du lemme suivant :

Lemme : "Soit $f(x_1, x_2) \in C^\infty(R^2)$. L'ensemble des $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, tels que :

$$f'(x_1, x_2) = f - \lambda_1 x_2 - \lambda_2 x_1 x_2 - \lambda_3 x_2^2 - \lambda_4 x_2^3$$

ne satisfait pas à (ω) est de mesure nulle (dans R^4) ".

Démonstration. Ecrivons que $\dfrac{\partial f'}{\partial x_2} = \dfrac{\partial^2 f'}{\partial x_2^2} = \dfrac{\partial^2 f'}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$:

$$\begin{cases} \lambda_2 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \lambda_1 - \lambda_2 x_1 - 2\lambda_3 x_2 - 3\lambda_4 x_2^2 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \\ 2\lambda_3 - 6\lambda_4 x_2 = \dfrac{\partial^3 f}{\partial x_2^3} \end{cases}$$

On peut considérer ces trois équations comme définissant une application C^∞ (dépendans du paramètre λ_4) :

$$(x_1, x_2) \xrightarrow[\Phi_{\lambda_4}]{} (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

On considère :

$$\Psi(x_1, x_2, \lambda_4) \longrightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \quad \text{définie par :}$$

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \Phi_{\lambda_4}(x_1, x_2) \ , \quad \lambda_4 = \lambda_4 \ .$$

D'après Sard l'image Ψ est de mesure nulle.

Si l'on choisit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \notin$ Image Ψ on a évité que $\dfrac{\partial^2 f'}{\partial x_1 \partial x_2}$, $\dfrac{\partial f'}{\partial x_2}$, $\dfrac{\partial^2 f'}{\partial x_2^2}$ s'annullent à la fois, e.a.d.s.]

On veut montrer que le Ω qu'on vient de définir, satisfait aux conditions de l'énoncé.

On a trois cas possibles :

$$\text{I}' : \frac{\partial f}{\partial x_2}(0) = \not{0} \quad \text{(on en réduit alors, facilement, au cas I de l'énoncé)}$$

$$\text{II}' : \frac{\partial f}{\partial x_2}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(0) \neq 0$$

$$\text{III}' : \frac{\partial f}{\partial x_2}(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(0) = 0$$

On va montrer comment II' $\Longrightarrow$ II, III' $\Longrightarrow$ III.

II' On considère

$$F^* : C_o^\infty(y) \longrightarrow C_o^\infty(x).$$

Je dis que 1 et x_2 constituent une R-base de $C_o^\infty(x)/\mathfrak{m}\, C_o^\infty(y).C_o^\infty(x)$. En effet, diviser par $\mathfrak{m}C_o^\infty(y)$ revient à écrire $x_1 = 0$, $f = 0$ (et $f(0, x_2) = x_2^2\ (\alpha + 0(x_2))$ avec $\alpha \neq 0$; on fait donc, aussi $x_2^2 = 0$).

D'après le théorème de préparation 1 et x_2 engendrent $C_o^\infty(x)$ comme $C_o^\infty(y)$-module. En particulier, ils existent des $\Phi, \Psi \in C_o^\infty(y)$, tels que :

$$\boxed{x_2^2 = \Phi(x_1, f) + 2\Psi(x_1, f)\ x_2}$$

On a clairement : $\Phi(0) = \Psi(0) = 0$.

En reprenant maintenant les choses à l'autre bout : on change les coordonnées en x :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1' = x_1 \\ x_2' = x_2 - \Psi(x_1, f(x)) \end{pmatrix}$$

Quelque soit Ψ (avec $\Psi(0) = 0$) ceci représente bien un système de coordonnées vu que $\dfrac{\partial \Psi}{\partial x_2} = \dfrac{\partial \Psi}{\partial f}\dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 0$). On a

$$(x_2')^2 = \underbrace{x_2^2 - 2\,\Psi(x_1, f)\,x_2}_{= \Phi(x_1,\, f)} + \Psi^2(x_1, f).$$

Donc, si l'on passe de (y_1, y_2) à :

$$y_1' = y_1$$
$$y_2' = \Phi(y_1, y_2) + \Psi^2(y_1, y_2)$$

on a gagné, à condition que (y_1', y_2') représente bien un système de coordonnées locales [Ce qui se voit, comme suit : on a besoin de montrer que $\frac{\partial\Phi}{\partial y_2}(0) \neq 0$. Or en regardant l'identité ci-dessus pour $x_1 = 0$

$$x_2^2 = \Phi(0, f(0, x_2)) + 2\,\Psi(0, f(0, x_2))\, x_2 .$$

Vu que $f(0, x_2) = o(x_2^2)$ et que $\Phi(0) = \Psi(0) = 0$ on a :

$$2\,\Psi(0, f(0, x_2))\, x_2 = o(x_2^3), \quad \text{donc :}$$

$$\Phi(0, f(0, x_2)) = o(x_2^2)$$

ce qui implique $\frac{\partial\Phi}{\partial y_2}(0) \neq 0$].

III' On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(0) = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2}(0) \neq 0 \neq \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3}(0) .$$

Comme ci-dessus, on trouve des :

$$\Phi, \Psi, \Theta \in C_o^\infty(y) , \quad \text{tels que :}$$

$$\boxed{x_2^3 = \Phi(x, f) + \Psi(x_1, f)\, x_2 + 3\,\Theta(x_1, f)\, x_2^2 .}$$

$(1, x_2, x_2^2$ est une R-base de $C_o^\infty(x)/\mathfrak{m}\, C_o^\infty(y).\, C_o^\infty(x)$, e.a.d.s.). On a $\Phi(0) = \Psi(0) = \Theta(0) = 0$.

En effet, en faisant $x_1 = 0$, on est obligé d'avoir $\Phi(0) = 0$ puisque "x_2^3 n'a pas de terme libre".

$$\Phi(0, f(0, x_2)) = o(f(0, x_2)) = o(x_2^3)$$

$\Longrightarrow$ $\Psi(0) = 0$ puisque x_2^3 n'a pas de terme en x_2. Alors :

$$\Psi(0, f(0, x_2)) = o(x_2^3)$$

$\Longrightarrow$ $\Theta(0) = 0$. e.a.d.s.

Je commence par montrer que, sans perte de généralité on peut supposer $\Theta = 0$.

On commence, alors, par considérer un changement de coordonnées :

$$x'_1 = x_1$$
$$x'_2 = x_2 - \theta(x_1, I)$$

$((x'_1, x'_2)$ est bien un système de coordonnées, puisque $\theta(0, f(0, x_2)) = o(x_2^3))$.

Par rapport à ces nouvelles coordonnées, notre F s'écrit

$$y_1 = x'_1$$
$$y_2 = f(x(x')) = f'(x') .$$

Je dis que $\dfrac{\partial f'}{\partial x'_2}(0) = \dfrac{\partial^2 f'}{\partial (x'_2)^2}(0) = 0$ et :

$$\frac{\partial^2 f'}{\partial x'_1 \, \partial x'_2} \neq 0 \neq \frac{\partial^3 f'}{\partial (x'_2)^3} .$$

(En effet : $f'(x'(x)) = f(x)$ donc :

$$\frac{\partial f'}{\partial x'_2} \underbrace{\frac{\partial x'_2}{\partial x_2}}_{\neq 0} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \implies \frac{\partial f'}{\partial x'_2} = 0 .$$

$$\frac{\partial^2 f'}{\partial {x'_2}^2} \underbrace{\left(\frac{\partial x'_2}{\partial x_2}\right)^2}_{\neq 0} + \overbrace{\frac{\partial f'}{\partial x'_2} \underbrace{\frac{\partial^2 x'_2}{\partial x_2^2}}_{= 0} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 0}^{} \implies \frac{\partial^2 f'}{\partial {x'_2}^2} = 0 .$$

(puisque $\theta(0, x_2) = o(x_2^3)$)

$$0 \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \, \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f'}{\partial x'_2}\frac{\partial x'_2}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial^2 f'}{\partial x'_1 \, \partial x'_2} \underbrace{\frac{\partial x'_1}{\partial x_1}}_{=1} \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} + \underbrace{\frac{\partial^2 f'}{\partial (x'_2)^2}}_{= 0} \frac{\partial x'_2}{\partial x_1} \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} +$$

$$+ \underbrace{\frac{\partial f'}{\partial x'_2}}_{= 0} \frac{\partial^2 x'_2}{\partial x_1 \, \partial x_2} \implies \frac{\partial^2 f'}{\partial x'_1 \, \partial x'_2} \neq 0 , \quad \text{c.a.d.s.}).$$

D'autre part :

$$(x'_2)^3 = x_2^3 - 3\,\theta(x_1, f)\, x_2^2 + 3\,\theta(x_1, f)\, x_2 + \theta^3(x_1, f) = [\Phi(x_1, f) + \theta^3(x_1, f)] +$$

$$+ [\Psi(x_1, f) + 3\theta(x_1, f)]\,(x'_2 + \theta(x_1, f)) = \Phi_1(x'_1, f') + \Psi_1(x'_1, f')\, x'_2 .$$

Pour ne pas compliquer les notations on remplace x'_1, x'_2, Φ_1, Ψ_1 par

x_1, x_2, Φ, Ψ, mais, maintenant $\Theta = 0$.

Je dis que $\frac{\partial}{\partial x_1}(\Psi(x_1, f(x_1, x_2)) \neq 0$. En effet : en regardant les séries Tayleriennes formelles des deux termes de l'identité encadrée, ci-dessus :

$\frac{\partial\Phi}{\partial y_2}(0) \neq 0$ (puisque c'est le seul terme du côté droit qui peut produire un x_2^3).

$\Longrightarrow \quad T_0\,\Phi = \ldots + \alpha\, \chi_1\, x_2 + \ldots \qquad (\alpha \neq 0)$.

Puisque dans le membre gauche on a x_2^3, seulement, $\alpha\, x_1\, x_2$ doit s'annuler avec quelque chose. Ceci oblige $\frac{\partial \Psi'}{\partial x_1} \neq 0$ (où $\Psi'(x_1, x_2) = \Psi(x_1, f(x_1, x_2))$.

On peut donc considèrer un changement de coordonnées :

$$x_1' = \Psi(x_1, f)$$

$$x_2' = x_2 \ .$$

On a :

$$(x'_2)^3 = x_2^3 = \Phi(x_1, f) + \Psi(x_1, f)\, x_2 = \Phi(x_1, f) + x_1'\, x_2' \ .$$

On a donc gagné si l'on change les coordonnées en y :

$$y_1' = \Psi(y_1, y_2)$$

$$y_2' = \Phi(y_1, y_2).$$

(Il nous reste à démontrer que (y_1', y_2') est un vrai système de coordonnées.

On sait que

$$\frac{\partial\,\Phi}{\partial y_2}(0) \neq 0 \neq \frac{\partial\,\Psi}{\partial y_1}(0) + \frac{\partial\,\Psi}{\partial y_2}(0)\,\frac{\partial\, f}{\partial x_1}(0) \ .$$

D'autre part, en écrivant que le terme en x_1 de l'identité ci-dessus est nul, on a :

$$\frac{\partial\,\Phi}{\partial y_1}(0) + \frac{\partial\,\Phi}{\partial y_2}(0)\,\frac{\partial\, f}{\partial x_1}(0) = 0 \ .$$

On y déduit : $\frac{\partial\, f}{\partial x_1}(0) = -\frac{\partial\,\Phi}{\partial y_1}(0) \Big/ \frac{\partial\,\Phi}{\partial y_2}(0) \Longrightarrow \frac{\partial\,\Psi}{\partial y_1}(0) \cdot \frac{\partial\,\Phi}{\partial y_2}(0) - \frac{\partial\,\Psi}{\partial y_2}(0) \cdot \frac{\partial\,\Phi}{\partial y_1}(0)$

q.e.d.).

Actions de groupe plus générales Soit $G \hookrightarrow GL(n, R)$ un groupe de Lie compact. Soit $x \in R_n$. D'après la théorie des invariants (Hilbert), il existe une application polynomiale homogène $p : R_n \longrightarrow R_m$ y, telle que, si $R[x]^G \subset R[x]$ désigne les polynômes invariants, on ait :

a) $p = (p_1, \dots, p_m)$, $p_i \in R[x]^G$.

b) La suite :

$$0 \longleftarrow R[x]^G \xleftarrow{p^*} R[y]$$

est exacte.

Proposition. Supposons que G possède la propriété suivante :

(H) si l'on considère :

$$R[[x]] \xleftarrow{\hat{p}^*} R[[y]]$$

il existe un nombre fini de polynômes $Q_1, \dots, Q_R \in R[x]$ qui engendrent $R[[x]]$ comme $R[[y]]$-module.

(Exemple : G = le groupe des permutations de $(x_1, \dots, x_n)$, $n = 1$ et G le groupe $Z / z Z$ actionnant comme $(x) \longrightarrow (-x)$ ....)

$\Longrightarrow$

$$0 \longleftarrow C_0^\infty(x)^G \xleftarrow{p^*} C_0^\infty(y)$$

est exacte.

Ceci généralise le théorème de Glaeser (et se démontre de la même façon).

APPENDICE AU CHAPITRE II.

Le théorème de préparation dans le cas analytique-réel.

A partir du lemme donné ci-dessous, toute la théorie précédente se transpose mot-à-mot, dans le cas analytique-réel.

Lemme (de division) local : "Soit : $f(u, t) = f(u_1, \ldots, u_n, t) \in C_0^{\omega}(u, t)$ = anneau des germes de fonctions analytiques réelles, au point O.

Soit :

$$\Gamma_p(t, x) = t^p + \sum_1^p x_i \, t^{p-i}.$$

$\exists \quad q(u, t, x) \in C_0^{\omega}(u, t, x), \quad r_i \in C_0^{\omega}(u, x)$ tels que :

$$f(u, t) = \Gamma_p(t, x)\, q(u, t, x) + \sum_1^p t^{p-i}\, r_i(u, x) \quad ".$$

Démonstration : Soit $\tilde{f}(u, t)$ un représentant du germe $f(u, t)$. On peut le complexifier $(u, t \in C^{n+1})$. Ce sera une série entière convergente pour $|u|, \ |t| \leq \varepsilon$. On choisit $\delta > 0$, tel que si $|x| < \delta$ les racines de $\Gamma_p(t, x) = 0$ sont de module inférieur à $\varepsilon/2$. En appliquant l'identité fondamentale (ch. I, par 1) :

$$\tilde{f}(u, t) = \frac{1}{2\pi i}\, \Gamma_p(t, x) \int_{C_\varepsilon} \frac{\tilde{f}(u, \zeta)\, d\zeta}{\Gamma_p(\zeta, x)(\zeta - t)} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{p} t^{p-j} \int_{C_\varepsilon} \frac{\Gamma_{j-1}(\zeta, x)\, \tilde{f}(u, \zeta)\, d\zeta}{\Gamma_p(\zeta, x)}$$

où C_ε est le cercle $|\zeta| = \varepsilon$.

Il reste à montrer que :

$$q(u, t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{\tilde{f}(u, \zeta)\, d\zeta}{\Gamma_p(\zeta, x)\, (\zeta - t)}$$

$$r_j(u, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{\Gamma_{j-1}(\zeta, x)\, \tilde{f}(u, \zeta)\, d\zeta}{\Gamma_p(\zeta, x)}$$

sont réelles (pour u, t, x réels).

En considérant u, t, x comme des paramètres réels, fixés :

$$q(u, t, x) = \text{La somme des résidus de}$$

$$\phi(\zeta) = \frac{\tilde{f}(u, \zeta)}{\Gamma_p(\zeta, x)(\zeta - t)} \quad \text{à l'intérieur du cercle } |\zeta| < \varepsilon .$$

Les résidus correspondant aux pôles réels sont clairement réels. Les pôles complexes viennent en paires conjuguées......

CHAPITRE III.

LE THEOREME D'EXTENSION DE WHITNEY .

1/ Généralités. On a considérer un ouvert $\Omega \subset R^n$, $C^k(\Omega)$ = l'anneau des fonctions C^k sur Ω, $C^k_c(\Omega)$ = l'anneau des fonctions C^k, à support compact (sur Ω). Les fonctions seront toujours supposées à valeurs réelles mais la plupart des choses qui suivent restent vraies si les valeurs sont dans un Banach.

Soit $E \subset \Omega$ un fermé, et $K \in (0, 1, 2, \ldots, \infty)$. Un jet de Whitney d'ordre K est la donnée d'une collection $f = (f^k)$ $f^k \in C^0(E)$, $|k| \leq K$, $k \in N^n$. La totalité des jets de Whitney d'ordre K sur E, est un espace vectoriel $J^K(E)$ muni d'une topologie (E.V.T.) définie par les semi-normes : ($E_1 \subset E$ compact, $K' \leq K$).

$$|F|^{K'}_{E_1} = \sup_{\substack{x \in E_1 \\ |k| \leq K'}} |f^k(x)|$$

(On a besoin de K' seulement si $K = \infty$).

Avec cette topologie, $J^K(E)$ est un espace de Fréchet (complet).

Si $j \in N^n$, $|j| \leq K$ on définit l'application linéaire :

$$J^K \xrightarrow{\quad D^j \quad} J^{K-|j|}$$

par $(D^j f)^\ell = (f^{j+\ell})$ $(|\ell| \leq K - |j|)$. On a un opérateur d'"oubli":

$$J^{K+1}(E) \longrightarrow J^K(E) \ .$$

Dorénavant E sera compact.

On va définir un ensemble $C^K(E) \subset J^K(E)$, les "fonctions de classe C^K, dans le sens de Whitney, sur E". $f \in C^K(E) \Longleftrightarrow \forall k \in N^n$ tel que $|k| < K$ $\forall x_0 \in E$, on a (uniformément) :

$$\lim_{\substack{x,y \in E \\ x,y \to x_0}} \frac{1}{|x-y|^{K-|k|}} \left| f^k(y) - \sum_{\substack{\ell \in N^n \\ |\ell| \leq K - |k|}} \frac{(y-x)^\ell}{\ell!} f^{k+\ell}(x) \right| = 0.$$

Ceci veut dire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$, tel que, si $x,y \in E$,

$x \neq y$, $|x - y| < \delta$, on a :

$$|f^k(y) - \sum_{|\ell| \leq K-|k|} \frac{(y-x)^\ell}{\ell!} f^{k+\ell}(x)| < \varepsilon \, |x-y|^{K-|k|}.$$

(il est entendu ici que : $\frac{(y-x)^\ell}{\ell!} f^{k+\ell}(x) = \frac{(y_1-x_1)^{\ell_1} \ldots (y_n-x_n)^{\ell_n}}{\ell_1! \ldots \ell_n!} f^{k_1+\ell_1, \ldots, k_n+\ell_n}(x)$).

<u>Exemple</u>. Soit g une fonction de classe C^K sur E et $D^k = \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}$. On définit le K-jet :

$$J^K(E) \ni g|E = (D^i g) \quad (|i| \leq K) \quad (D^0 g = g).$$

La formule de Taylor, nous dit que :

$$g|E \in C^K(E).$$

D'autre part si $E = \Omega$ il est bien connu que $C^K(\Omega)$ défini comme ci-dessus, est la même chose que ce qu'on appelle d'habitude $C^K(\Omega)$. (Voir par exemple : "la réciproque du théorème de Taylor" Abraham Transversal mapping and flows, pp. 33 ; ça résulte d'ailleurs, aussi, des théorèmes ci-dessous). De toute façon, dorénavant, si $E = \Omega$, $C^K(\Omega)$ désignera l'ensemble des fonctions C^K sur Ω.

<u>Le théorème d'extension de Whitney dans le cas fini</u> : "Soit $E \subset \Omega$ un compact de R^n et $m < \infty$. Il existe une application linéaire, (continue, voir la topologie du chapitre suivant) :

$$\Phi : C^m(E) \longrightarrow C^m(R^n)$$

telle que, si $f \in C^m(E)$:

$$\Phi f|E = f \text{ ".}$$

<u>Le théorème d'extension de Whitney dans le cas</u> ∞ : "Pour tout $f \in C^\infty(E)$ il un $\tilde{f} \in C^\infty(R^n)$ tel que $\tilde{f}|E = f$."

2/ <u>Un lemme de partition</u> C^∞ <u>de l'unité</u> : "Soit $C \subset R^n$ un compact. Il existe un ensemble dénombrable d'indices I, une famille de fonctions C^∞ :

$\Phi_i \in C_c^\infty(R^n - C)$, $i \in I$ telles que :

1) $\Phi_i \geq 0$.

2) $\{\mathrm{Supp}\ \Phi_i\}$ est une famille localement finie. Il existe une constante $N(n)$ telle que chaque $x \in R^n$ appartient au plus à $N(n)$ ensembles $\mathrm{Supp}\ \Phi_i$.

3) Si $x \in R^n - C$: $\Sigma\, \Phi_i(x) = 1$.

4) $2\, d(\mathrm{Supp}\ \Phi_i, C) \geq \mathrm{diam}\ (\mathrm{Supp}\ \Phi_i)$.

5) Il existe une constante $c(k, n)$, telle que :

$$|D^k \Phi_i(x)| < c(k, n)\ (1 + d(x, C)^{-|k|})\ "$$

Démonstration : Pour chaque $p \geqslant 0$ on divise R^n en cubes de côté $1/2^p$ par les plans $x_i = \dfrac{j(i)}{2^p}$ $(j(i) \in Z)$. Définissons inductivement :

K_o = l'ensemble des cubes S de la sous division $p = 0$, tels que $d(S, C) \geq \sqrt{n}$.

....

K_p = l'ensemble des cubes S de la sous division p, tels que $S \not\subset S' \in K_{p-i}$ (quel que soit $S' \in K_{p-i}$), et que $d(S, C) \geq \dfrac{\sqrt{n}}{2^p}$ = la diagonale de S.

Soit $I = \bigcup\limits_{p \geq 0} K_p$; ce sera l'ensemble des indices $i \in I$ pour les Φ_i.

Soit $\Psi \in C^\infty(R^n)$ telle que :

a) $0 \leq \Psi \leq 1$.

b) Si $\forall i$ $|x_i| \leq \frac{1}{2} \Longrightarrow \Psi(x) = 1$

c) Si $\exists i$ $|x_i| \geq \frac{3}{4} \Longrightarrow \Psi(x) = 0$.

Si $S \in I$ désignons par ℓ_S la longueur du côté de S et définissons :

$$\Psi_S(x) = \Psi\left(\frac{x - x_S}{\ell_S}\right) \qquad \text{(où } x_S \in S \text{ est le centre de } S\text{)}.$$

Supp Ψ_s est contenu dans un cube de côté $\dfrac{3\ell_S}{2}$ de centre x_S.

Soient $S \in K_p$, $S' \in K_q$ tels que $S \cap S' \neq \emptyset$. On remarque tout de suite que $|p-q| \leq 1$. Soit $\bar{S}$ le cube de même centre que S, parallèle aux axes, et de côté $\dfrac{3\ell_S}{2}$. Pour que $\bar{S} \cap \bar{S}' \neq \emptyset$ il est nécessaire qu'il existe un $S'' \in I$, tel que $S \cap S'' \neq \emptyset \neq S' \cap S''$. Ces remarques impliquent qu'il existe un $N(n)$ tel que $x \in R^n$ touche, au plus à $N(r)$ ensemble Supp Ψ_S.

Désignons les $S \in I$ par $S_1, S_2, \ldots$

Définissons

$$\Phi_i(x) = \frac{\Psi_{S_i}(x)}{\sum\limits_{T\in I} \Psi_T(x)}$$

C'est une fonction C^∞ qui satisfait à 1), 2), 3). Soit $\Phi_i(x)$ avec $S_i \in K^p$ et $y \in \partial \bar{S}_i$ tel que $d(y, C) = d(y, \bar{S}_i)$. Soit $z \in S_i (\in \partial S_i)$ le point de S_i le plus proche de y. On a :

$$d(y, z) \leq \frac{1}{2}\,(\text{diagonale de } \bar{S}_i - \text{diag } S_i) = \frac{1}{2}\,(\text{diam } \bar{S}_i - \text{diam } S_i)$$

$$d(\text{Supp } \Phi_i, C) \geq d(y, C) \geq d(z, C) - d(y, z) \geq d(S_i, C) - d(y, z) \geq \text{diam } S_i$$
$$- \frac{1}{2}(\text{diam } \bar{S}_i - \text{diam } S_i) = \frac{3}{2}\,\text{diam } S_i - \frac{1}{2}\,\text{diam } \bar{S}_i = \frac{\text{diam } \bar{S}_i}{2} \geq \frac{1}{2}\,\text{diam } (\text{Supp } \Phi_i) .$$

Ceci démontre 4).

Pour démontrer 5) on commence par remarquer que :

$$1 \leq \sum_{S\in I} \Psi_S(x) \leq N(n) .$$

D'après Leibniz :

$$|D^k \Phi_i| = \Big|D^k \frac{\Psi_{S_i}}{\sum\limits_{T\in I} \Psi_T}\Big| = \Big| \sum_j \binom{k}{j} D^{k-j}\, \Psi_{S_i}\, D^j \frac{1}{\Sigma\Psi_T} \Big| .$$

D'autre part :

$$|D^k \Psi_S(x)| \leq \frac{1}{\ell_S^{|k|}}\, |D^k \Psi(\frac{x-x_S}{\ell_S}) \leq \frac{C(k)}{\ell_S^{|k|}}$$

(puisque Ψ est donnée ...).

Tout ceci, implique :

$$|D^k \Phi_S(x)| \leq C_1(k, n)\, \ell_S^{-|k|} .$$

Donc, si $S \in K^o$: $|D^k \Phi_S(x)| \leq C_1(k, n)$.

Si $x \in \text{Supp } \Phi_S$, on a :

$$d(x, C) \leq \lambda(n)\, \ell_S$$

(En effet "les cubes S d'une taille donnée ne sont pas plus loin que quelque chose de C" : si $x \in S \in K^{q+1}$, alors :

$$d(x, C) \leq d(\partial \bigcup_{\substack{S \in K_p \\ p \leq q}} S, C) \leq \lambda'(n) \frac{1}{2^q} \quad \text{c.q.f.d.})$$

Donc :

$$|D^k \Phi_i(x)| \leq C_1(k, n) \left(1 + (\lambda^{-1}(n)\, d(x, C))^{-|k|}\right) \leq c(k,n)(1 + d(x, C)^{-|k|}) \quad \text{q.e.d.}$$

3/ <u>Le théorème d'extension dans le cas fini</u> : Avant de donner la démonstration on commence par quelques sorites.

Soit $E \subset \Omega$ un compact et $f = \{f^k\} \in J^m(E)$ On a une application: $(a \in E)$:

$$J^m(E) \xrightarrow{T_a^m} C^\infty(R^n) :$$

définie par :

$$T_a^m f(x) = \sum_{|k| \leq m} \frac{(x-a)^k}{k!} f^k(a).$$

Ou aussi :

$$C^\infty(R^n) \xrightarrow{J^m} J^m(E)$$

et :

$$J^m(E) \xrightarrow{R_a^m} J^m(E) \text{, définie par :}$$

$$R_a^m f = f - J^m T_a^m f$$ ceci s'écrit d'une manière "détaillée" comme :

$$(R_a^m f)^k = f^k - T_a^{m-|k|} f^k \quad .$$

Avec ces notations :

$$f \in C^m(E) \iff \lim_{\substack{x,y \in E \\ x,y \to x_0}} \frac{1}{|x-y|^{m-|k|}} |(R_x^m f(y))^k| = 0$$

$(\forall |k| \leq m)$ (<u>uniformément</u>)

<u>Définition</u>. $\alpha : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ est appelé un "module de continuité" si :

- $\alpha(0) = 0$

- α est continue

- α est croissante

- α est convexe ($\Longleftrightarrow \forall\, p,q \geq 0$, $p+q = 1$ on a :

$$\alpha(px + qy) \geq p\alpha(x) + q\alpha(y)\ ).$$

Lemme 1. "Si $f \in C^k(E) \Rightarrow$ un module de continuité α, tel que :

$\forall\, x,y \in E$, $z \in R^n$:

$$|T_x^m f(z) - T_y^m f(z)| \leq \alpha(|x-y|)\ (|x-z|^m + |y-z|^m)\ ."$$

Démonstration : Considérons $\beta : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ définie par :

$$\beta(t) = \sup_{\substack{x,y \in E \\ |x-y| \leq t \\ x \neq y \\ |k| \leq m}} \frac{|(R_x^m f)^k (y)|}{|x-y|^{m-|k|}} .$$

$\beta(0) = 0$, β est continue au point $t = 0$ et croissante. Considérons $F \subset R^2$ = Le plan $\{(t, \beta)\}$ défini par :

$$F = (\text{graphe } \beta|\Delta) \cup (t \geq 0,\ \beta = 0),$$

où $\Delta = [0, \operatorname{diam} E] \subset [0, \infty)$.

Il existe un module de continuité α_1 tel que la fermeture convexe de F soit :

$$\{t \geq 0,\ \ 0 \leq \beta \leq \alpha_1(t)\} .$$

On a : $\alpha_1(t) \geq \beta(t)$.

On a aussi :

$$T_x^m f(z) - T_y^m f(z) = \sum_{|k| \leq m} \frac{(z-x)^k}{k!} (R_y^m f)^k (x).$$

(Démonstration de l'identité ci-dessus : cette identité s'écrit aussi :

$$(*) \qquad T_x^m f - T_y^m f = T_x^m (R_y^m f).$$

(*) résulte du calcul suivant :

$$T_x^m(R_y^m f) = T_x^m (f - J^m T_y^m f) = T_x^m f - T_x^m (J^m T_y^m f) .$$

On remarque que si $g(z)$ est un <u>polynôme</u> (ce qui est le cas pour $T_y^m f(z)$), alors

$$T_x^m(J^m g) = g, \quad \text{c.a.d. s.}).$$

On a donc :

$$|T_x^m f(z) - T_y^m f(z)| \leqslant \sum_{|k| \leq m} \frac{|z-x|^k}{k!} |x-y|^{m-|k|} \alpha_1(|x-y|) \leq$$

$$\leq \underbrace{c(m, n)\ \alpha_1(|x-y|)}_{\alpha(|x-y|)} (|z-x|^m + |z-y|^m).$$

Le lemme est démontré

Le même raisonnement permet de montrer que :

$$|D^k T_x^m f(z) - D^k T_y^m f(z)| \leq \alpha(|x-y|)\ (|x-z|^{m-|k|} + |y-z|^{m-|k|})$$

(pour un α bien choisi).

On passe maintenant à la démonstration du théorème d'extension.

On a $f \in C^k(E)$. On définit $R \ni \Phi f(x) = \tilde{f}(x)$ $x \in R^n$ par :

$$\tilde{f}(x) = f^o(x) \quad \text{si } x \in E$$

$$\tilde{f}(x) = \sum_{S \in I} \Phi_S(x)\, T_{a_S}^m f(x) \ . \quad (\text{si } x \notin E)$$

(Ici pour chaque $S \in I$ on choisit un $a_S \in E$ tel que

$$d(\operatorname{supp} \Phi_S, E) = d(\operatorname{supp} \Phi_S, a_S)\ .)$$

On définit aussi $\tilde{f}^k$ ($|k| \leq m$) par :

$$\tilde{f}^k(x) = f^k(x) \quad \text{si } x \in E$$

$$\tilde{f}^k(x) = D^k \tilde{f}(x) \text{ si } x \notin E \quad (\text{on remarque que } \tilde{f}|R^n - E \in C^\infty).$$

<u>Lemme 2.</u> Soit B un cube de côté λ tel que $E \subset \mathring{B}$. $\exists$ $C = C(m, n, \lambda)$ tel que $\forall |k| \leq m$, $x \in B$, $a \in E$:

$$|\tilde{f}^k(x) - D^k T_a^m f(x)| \leq C\ \alpha(|x-a|)\ |x-a|^{m-|k|} .$$

Démonstration :

Cas 1°/ $x \in E$: trivial à partir (de la démonstration) du lemme 1 (puisque

$$D^k T_a^m = T_a^{m-|k|} D^k\ ).$$

Cas 2°/ $x \notin E$:

$$\tilde{f}(x) - T_a^m f(x) = \sum_{S \in I} \Phi_S(x) \, (T_a^m f_S(x) - T_a^m f(x))$$

donc :

(vu que $x \notin E \Longrightarrow \tilde{f}^k(x) = D^k \tilde{f}^k(x))$:

$$|\tilde{f}^k(x) - D^k T_a^m f(x)| =$$

$$= \left| \sum_{S \in I} \sum_{\ell \leq k} \binom{k}{\ell} D^\ell \Phi_S(x) \, D^{k-\ell} [T_{a_S}^m f(x) - T_a^m f(x)] \right|$$

$$\leq | \text{Termes avec } \ell = 0| + |\text{Termes avec } \ell > 0| .$$

<u>Termes avec</u> $\ell = 0$.

$$|\text{Termes avec } \ell = 0| = \left| \sum_{S \in I} \Phi_S(x) \, [D^k T_{a_S}^m f(x) - D^k T_a^m f(x)] \right|$$

$$\leq N(n) \sum_{S \in I} | D^k T_{a_S}^m f(x) - D^k T_a^m f(x)| .$$

On a :

$$|D^k T_{a_S}^m f(x) - D^k T_a^m f(x)| \leq \alpha(|a_S - a|) \, (|x - a_S|^{m-|k|} + |x - a|^{m-|k|}).$$

On peut supposer $x \in \operatorname{Supp} \Phi_S$. On a :

$$|a - a_S| \leq |x - a_S| + |x - a| .$$

Soit $b \in \operatorname{Supp} \Phi_S$ tel que $d(b, a_S) = d(\operatorname{Supp} \Phi_S, E)$:

$$|x - a_S| \leq |x - b| + |b - a_S| \leq \operatorname{diam}(\operatorname{Supp} \Phi_S) + d(\operatorname{Supp} \Phi_S, E) \leq 3d(\operatorname{Supp} \Phi_S, E) \leq$$

$$\leq 3d(x, E) \leq 3|x - a| .$$

Vu la convexité de α (et le fait qu'elle est <u>croissante</u>) :

$$\alpha(|a_S - a|) \leq \alpha(4|x - a|) \leq 4\alpha(|x - a|)$$

$$\Longrightarrow \quad |D^k T_{a_S}^m f(x) - D^k T_a^m f(x)| \leq C' \, \alpha(|x - a|) \, |x-a|^{m-|k|}$$

$\Longrightarrow$ $|\text{Termes avec } \ell = 0|$ satisfait à une inégalité du type voulu.

<u>Termes avec</u> $\ell > 0$: (ℓ donné). On a :

Puisque $\ell > 0$:

$$\sum_{S \in I} D^{\ell}\, \Phi_S(x) \equiv 0.$$

Donc, <u>quel que soit</u> $b \in E$:

$$(\times) \qquad \sum_{S \in I} D^{\ell}\, \Phi_S(x)\, [D^{k-\ell}\, T^m_{a_S}\, f(x) - D^{k-\ell}\, T^m_a\, f(x)] =$$

$$= \sum_{S \in I} D^{\ell}\, \Phi_S(x)\, [D^{k-\ell}\, T^m_{a_S}\, f(x) - D^{k-\ell}\, T^m_b\, f(x)\,].$$

On va <u>choisir</u> $b \in E$ tel que $d(x, E) = |x - b|$ (donc $|x-a| \geq |x-b|$). On a (d'après le lemme de partition de l'unité donné au début) :

$$|D^{\ell}\, \Phi_S(x)| \leq \frac{C}{|x - b|^{|\ell|}}.$$

Par le même raisonnement qu'avant, on a aussi :

$$|D^{k-\ell}\, T^m_{a_S}\, f(x) - D^{k-\ell}\, T^m_b\, f(x)| \leq C''\, \alpha(|x - b|)\, |x - b|^{m-|k| + |\ell|}$$

$$|D^{\ell}\, \Phi_S(x)\, (D^{k-\ell}\, T^m_{a_S}\, f(x) - D^{k-\ell}\, T^m_b\, f(x))\,| \leq C'''\, \alpha(|x - b|)\, |x - b|^{m-|k|} \leq$$

$$\leq C'''\, \alpha(|x - a|)\, |x - a|^{m-|k|}.$$

D'autre part, pour x donné il n'y a que $N(n)$ termes de la somme $(\times)$, au plus qui sont différents de 0 e.a.d.s.

Le lemme 2 est démontré.

On va montrer maintenant que :

$$\tilde{f} \in C^m(R^n) \quad \text{et}, \quad \text{si} \quad |k| \leq m$$
$$D^k\, \tilde{f} = \tilde{f}^k.$$

On commence par montrer que $\tilde{f}$ est continue. La seule chose qui ne soit pas immédiate est que, si $a \in E$

$$\lim_{x \to a} \tilde{f}(x) = \tilde{f}(a) = f^{\circ}(a).$$

Or, d'après le lemme 2, (pour $k = 0$) :

$$|\tilde{f}^{\circ}(x) - f^{\circ}(a)| = 0(|x - a|).$$

De la même manière on montre que chaque $\tilde{f}^k$ est continu.

Enfin désignons par (i) $(i = 1,\dots, n)$ le multi-indice :

$$(i) = (0,\dots, 0, \underset{\underset{i}{|}}{1}, 0,\dots, 0)$$

Si $|\ell| < m$ on a : (toujours d'après le lemme 2) :

$$\frac{1}{|x - a|} \Big| \tilde{f}^{\ell}(x) - \tilde{f}^{\ell}(a) - \sum_{1}^{n} (x_i - a_i)\, \tilde{f}^{\ell+(i)}(a) \Big| = o(|x - a|)$$

(on ne retient dans le membre gauche de 2) que les termes de degré 1 en $(x - a)$).

Il en résulte que $\tilde{f}^{\ell}$ est de classe C^1 et admet comme dérivées partielles les $\tilde{f}^{\ell+(i)}$ c.q.f.d.

4/ <u>Le théorème d'extension dans le cas</u> ∞ : Soit L un cube $\subset R^n$ tel que $L^o \supset E$. Soit $\mathfrak{J}^m(E ; L) = \{f \in C^m(L),\ D^i f \mid E = 0,\ |i| \le m\}$.

<u>Lemme 3.</u> "$\mathfrak{J}^{\infty}(E ; L)$ est dense dans $\mathfrak{J}^m(E ; L)$".

Démonstration : On se donne une fois pour toutes une fonction C^{∞} : $\Phi(x)$ telle que

$$\Phi(x) = 1, \quad \text{si} \quad |x| \le \frac{1}{4},$$
$$\Phi(x) \ge 0,$$
$$\Phi(x) = 0, \quad \text{si} \quad |x| \ge \frac{3}{8}$$
$$\int \Phi = 1.$$

Soit $\Phi_{\delta}(x) = \frac{1}{\delta^n}\, \Phi(\frac{x}{\delta})$.

Soit $\alpha_{\delta}(x)$ la fonction caractéristique de l'ensemble $\{x,\ d(x, E) \ge \frac{\delta}{2}\}$ et

$$\beta_{\delta}(x) = \int \alpha_{\delta}(y)\, \Phi_{\delta}(x-y)\, dy .$$

On a :
1) $\beta_{\delta} \in C^{\infty}$
2) $\beta_{\delta}(x) \ge 0$
3) $\beta_{\delta}(x) = 0$ dans un voisinage de E.
4) $\beta_{\delta}(x) = 1$ si $d(x, E) \ge \delta$.
5) $|D^k \beta_{\delta}(x)| \le \frac{C(k, n)}{\delta^{|k|}}$

Soit $f \in \mathfrak{T}^m(E\,;\,L)$.

Définissons : $f_\delta(x) = f(x)\,\beta_\delta(x)$, $f_\delta(x) \in \mathfrak{T}^m(E\,;\,L)$ mais en fait, elle s'annule dans un voisinage de E. Je dis que (dans la topologie C^m)

$$\lim_{\delta \to 0} f_\delta = f .$$

(Démonstration : Puisque f s'annule, ainsi que toutes ses dérivées d'ordre $\leq m$ sur E, la formule de Taylor nous dit que : (si $x \in L$, $a \in E$) :

$$\lim_{x \to a} \frac{|D^k f(x)|}{|x-a|^{m-|k|}} = \lim_{x \to a} \frac{|D^k f(x) - D^k T_a^m f(x)|}{|x-a|^{m-|k|}} = 0$$

Par des raisonnements analogues à ceux appliqués plus haut, on trouve un module de continuité α tel que :

$$|D^k f(x)| \leq \alpha(|x-a|)\,|x-a|^{m-|k|}$$

En appliquant la formule de Leibniz à $f_\delta(x) = f(x)\,\beta_\delta(x)$: (où $d(x, E) \leq \delta$, $a \in E$ est tel que $d(x, a) \leq \delta$).

$$|D^k f(x) - D^k(f(x)\,\beta_\delta(x))| \leq \alpha(\delta)\,\delta^{m-|k|} + \sum_{|\ell| \leq |k|} C(k, \ell)\,|D^\ell f|\,|D^{k-\ell}\beta_\delta| \leq$$

$$\leq \alpha(\delta)\,\delta^{m-|k|} + \sum_{\ell} C'(k, \ell, n)\,\alpha(\delta)\,\underbrace{\delta^{m-|\ell|}\,\delta^{-|k|+|\ell|}}_{\delta^{m-|k|}} \quad).$$

Soient donc $\mathfrak{T}_*^m(E\,;\,L) \hookrightarrow \mathfrak{T}^m(E\,;\,L)$ les fonctions de classe C^m qui s'annullent dans un voisinage de E. On vient de montrer qu'elles sont denses dans $\mathfrak{T}^m(E\,;\,L)$. Maintenant si $\varphi \in \mathfrak{T}_*^m(E\,;\,L)$, on définit :

$$\varphi_\delta(x) = \int \varphi(y)\,\Phi_\delta(y-x)\,dy \in C^\infty$$

Si δ est assez petit, $\varphi_\delta(x) \in \mathfrak{T}^\infty(E\,;\,L)$ (puisque $\varphi \in \mathfrak{T}_*^m(E\,;\,L)$). D'autre part $\varphi_\delta \Longrightarrow \varphi$ (quand $\delta \to 0$) dans la C^m-topologie. (Puisque :

$$\int \varphi(y)\,\Phi_\delta(y-x)\,dy = \int \varphi(u+x)\,\Phi_\delta(u)\,du \qquad \text{e.a.d.s.})$$

Ceci est le procédé bien connu de "régularisation")

Maintenant, on peut démontrer le théorème d'extension : Soit $f \in C^{\infty}(E)$ et $f_m \in C^m(E)$ $(m < \infty)$ l'image canonique de f. A f_m on applique le théorème fini :

$$\tilde{f}_m = \Phi f_m \in C^{\infty}(L) .$$

On a : $\tilde{f}_m - \tilde{f}_{m-1} \in \mathfrak{J}^{m-1}(E ; L)$, donc, $\exists\, h_{m-1} \in \mathfrak{J}^{\infty}(E ; L)$ tel que :

$$\|\tilde{f}_m - \tilde{f}_{m-1} - h_{m-1}\|_{m-1} \leq \frac{1}{2^m} .$$

On définit :

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}_o(x) + \sum_{m \geq 1} (\tilde{f}_m(x) - \tilde{f}_{m-1}(x) - h_{m-1}(x)) .$$

On voit que $\tilde{f}(x) \in C^{\infty}$ c.q.f.d.

5/ <u>Le théorème d'extension dans le cas d'un fermé arbitraire</u> : Soit $\Omega \subset R_n$ un ouvert, et $E \subset \Omega$ un fermé (de Ω). On définit $C^m(E) \subset J^m(E)$ par :
$(f \in J^m(E))$

$$f \in C^m(E) \iff \forall \underset{\text{compact}}{K \subset E} ,\quad f \mid K \in C^m(K).$$

Par partition de l'unité les théorèmes données ci-dessus, impliquent que l'application de restriction :

$$C^m(\Omega) \longrightarrow C^m(E) \qquad (m \leq \infty)$$

est surjective.

CHAPITRE IV.

-::-::-

LE THEOREME "DE RECOLLEMENT" DE ŁOJASIEWICZ.

(Ensembles régulièrement situés)

-:-

1) Topologies dans les espaces des jets : Soit $\Omega \subset R_n$ un ouvert, et $E \subset \Omega$ un fermé de Ω. On rappelle que, pour E, le théorème d'extension de Whitney reste valable. Dans $J^K(E)$ $(K \leqslant \infty)$ on a introduit la topologie définie par les seminormes:

$$|f|_F^m = \sup_{\substack{F \ni x \\ |\ell| \leqslant m}} |f^{\ell}(x)|$$

où $m \in (0,1,\ldots)$, $m \leqslant K$, et $F \subset E$ est un compact. $J^K(E)$ et $C^K(\Omega)$ sont des espaces (de Fréchet) complets pour la topologie définie par ces seminormes; mais pas nécessairement $C^K(E)$. On définit (pour $C^K(E)$) les seminormes :

$$\|f\|_F^m = |f|_F^m + \sup_{\substack{x,y \in F \\ x \neq y \\ |\ell| \leqslant m}} \frac{(R_x^m f)^{\ell}(y)}{|x-y|^{m-|\ell|}}$$

PROPOSITION 1.- $C^K(E)$ est un espace (de Fréchet) complet pour la topologie définie par les seminormes $\|f\|_F^m$.

Démonstration : Il s'agit de montrer que, si E est compact et m est fini, la norme

$$\|f\| = |f| + \sup_{\substack{x,y \in E \\ x \neq y \\ |\ell| \leqslant m}} \frac{|(R_x^m f)^{\ell}(y)|}{|x-y|^{m-|\ell|}} ,$$

fait de $C^m(E)$ un <u>Banach</u> (complet).

Soient donc $f_n \in C^m(E)$, $f \in J^m(E)$ tels que $\lim\limits_{n,m} \|f_n - f_m\| = 0$, $\lim\limits_n |f_n - f| = 0$. Il s'agit de montrer que $f \in C^m(E)$.

Si $n,m \geqslant N$ on a :

$$\frac{\left|f_n^k(y) - f_m^k(y) - \sum\limits_{1 \leqslant |i| \leqslant \ell} \frac{(y-x)^i}{i!} (f_n^{k+i}(y) - f_m^{k+i}(y))\right|}{|x - y|^\ell} < \varepsilon \quad .$$

Si $m \to \infty$ ceci implique :

$$\frac{\left|f_n^k(y) - f^k(y) - \sum\limits_{|i| \leqslant \ell} \frac{(y-x)^i}{i!} (f_n^{k+i}(y) - f^{k+i}(y))\right|}{|x - y|^\ell} < \varepsilon \quad .$$

Puisque $f_n \in C^\infty$, $\exists\ \delta > 0$ tel que, si $|x - y| < \delta$:

$$\frac{\left|f_n^k(y) - \sum\limits_{|i| \leqslant \ell} \frac{(y-x)^i}{i!} f_n^{k+i}(y)\right|}{|x - y|^\ell} < \varepsilon \ .$$

Il s'ensuit que, si $|x - y| < \delta$:

$$\frac{\left|f^k(y) - \sum\limits_{|i| \leqslant \ell} \frac{(y-x)^i}{i!} f^{k+i}(y)\right|}{|x - y|^\ell} < 2\,\varepsilon \ , \quad \text{e.a.d.s.}$$

<u>PROPOSITION 2</u>.- Si $\Omega \subset R_n$ est un ouvert, les topologies $\{|\ldots|_K^m\}$ et $\{\|\ \ \|_K^m\}$ pour $C^m(\Omega)$ $(C^\infty(\Omega))$ sont équivalentes. (C'est-à-dire que, pour tout $\|\ldots\|_F^m$ il existe une seminorme $|\ldots|_{F_1}^{m_1}$,et une constante C , telles que

$$\|f\|_F^m \leqslant C\ |f|_{F_1}^{m_1}\ )$$

(C'est une conséquence immédiate du fait que $(C^m(\Omega), |\ldots|)$ est complet, et du théorème du graphe fermé).

2) <u>Ensembles régulièrement situés</u> : Soit $\Omega \subset R_n$ un ouvert et X , $Y \subset \Omega$ deux fermés (de Ω) . On considère les applications :

$$C^\infty(X \cup Y) \xrightarrow{\delta} C^\infty(X) \oplus C^\infty(Y)$$

$$C^\infty(X) \oplus C^\infty(Y) \xrightarrow{\pi} C^\infty(X \cap Y)$$

définies par :

$$\pi(f) = (f|X) \oplus (f|Y)$$

$$\delta(f_1 \oplus f_2) = f_1|X \cap Y - f_2|X \cap Y$$

<u>PROPOSITION 3</u>.- Quels que soient X,Y (fermés) :

a) δ est injectif .

b) π est surjectif.

c) $\pi \circ \delta = 0$ (donc $\operatorname{Im}\delta \subset \operatorname{Ker} \pi$)

d) $\operatorname{Im} \delta$ est <u>dense</u> dans $\operatorname{Ker} \pi$."

<u>Démonstration</u> : a) et c) sont évidentes. b) résulte du fait que tout $\psi \in C^\infty(X \cap Y)$ peut se prolonger à $C^\infty(X)$ $(C^\infty(Y))$. d) ne sera pas utilisé dans la suite ; on le laisse comme exercice.

<u>DEFINITION</u>.- X et Y sont "régulièrement situés" s'ils satisfont à l'une des deux conditions équivalentes suivantes :

(i) La suite :

$$0 \to C^\infty(X \cup Y) \xrightarrow{\delta} C^\infty(X) \oplus C^\infty(Y) \xrightarrow{\pi} C^\infty(X \cap Y) \to 0$$

est exacte.

(ii) Quels que soient : $f \in C^\infty(X)$, $g \in C^\infty(Y)$ tels que $f|X \cap Y \equiv g|X \cap Y \in C^\infty(X \cap Y)$ le jet $f \cup g \in J^\infty(X \cup Y)$ (défini par : $f \cup g|X = f$, $f \cup g|Y = Y$) a la propriété :

$$f \cup g \in C^\infty(X \cup Y)$$

(Cette condition est trivialement satisfaite si $X \cap Y = \emptyset$).

<u>Le théorème de Lojasiewicz</u>: Soient $X,Y \subset \Omega$ deux fermés de l'ouvert $\Omega \subset R_n$, tels que $X \cap Y \neq \emptyset$. X et Y sont régulièrement situés, si et seulement si la condition suivante est satisfaite :

(Λ) Pour tout couple de <u>compacts</u> $K \subset X$, $L \subset Y$, ils existent des constantes C , $\alpha > 0$, telles que, si $x \in K$:

$$d(x,L) \geqslant C \cdot d(x,X \cap Y)^\alpha \text{ "}$$

<u>Remarques</u>: (1) La condition (Λ) est, en fait, symétrique en X,Y :

On peut supposer, sans perte de généralité que $\alpha > 1$. On a :

$$d(y,X \cap Y) \leqslant d(y,x) + (x,X \cap Y) \leqslant d(y,x) + C' \, d(x,y)^{1/\alpha} \leqslant$$

$$< C'' \, d(x,y)^{1/\alpha}$$

Puisque $x \in K$ est arbitraire :

$$d(y,K) \geqslant C''' \, d(y,X \cap Y)^\alpha \quad .$$

2) La condition (Λ) est locale : X est Y satisfond à (Λ) $\Longleftrightarrow$ $\forall p \in X \cap Y$, $\exists V \ni x$ (voisinage) t.q. $V \cap X$ et $V \cap Y$ satisfont à (Λ).

3) (Λ) est invariante par difféomorphisme.

3) <u>$(\Lambda) \Longrightarrow (\mathrm{Ker}\ \pi = \mathrm{Im}\delta)$</u> :

Soient $f \in C^{\infty}(X)$, $g = C^{\infty}(Y)$, $f|X \cap Y = g|X \cap Y$, $h = f \cup g \in J^{\infty}(X \cup Y)$, et $M \subset X \cup Y$ un compact. Soient $K = M \cap X$, $L = M \cap Y$. On veut montrer que : pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ t.q. si $x,y \in M$, $|x - y| < \delta$ alors :

$$(X) \quad \Big|h^{k}(x) - \sum_{|\ell| \leqslant m} h^{k+\ell}(y) \frac{(x-y)^{\ell}}{\ell!}\Big| < \varepsilon\, |x - y|^{m} .$$

Ceci sera vrai si $x,y \in X$ ou $x,y \in Y$. Supposons dorénavant $x \in X$, $y \in Y$. (A cause de la symétrie de (Λ) il suffit d'étudier ce cas).

D'après le théorème d'extension de Whitney, $\exists \tilde{g} \in C^{\infty}(X \cup Y)$, tel que $\tilde{g}|Y = g$. Soit $f' = f \cup g - \tilde{g} \in J^{\infty}(X \cup Y)$. On remarque que $f'|X \in C^{\infty}(X)$, $f'|Y = 0$. Puisque $\tilde{g}$ est C^{∞} elle satisfait une inégalité du type (X) .

Il suffit donc de vérifier (X) pour f'. (Alors, (X) sera vérifiée pour f , aussi).

Dorénavant f' sera désignée par f . Mais : $f^{i}(y) = 0$. On veut montrer que, $\forall\ k,m$, $\exists\ C = C(m)$ telle que :

$$(XX) \qquad |f^{k}(x)| < C|x - y|^{m} .$$

D'après (Λ) , $\exists\ z \in X \cap Y$, tel que $|x - y| \geqslant C_1|x - z|^{\alpha}$. On peut supposer que $|x - z|$ est <u>borné</u> (puisque $x,y \in M$ = compact).

Soit m' un entier tel que $m' > \alpha m$.

On a :

$$|f^{k}(x)| = \Big|f^{k}(x) - \sum_{|\ell| \leqslant m'} f^{k+\ell}(z) \frac{(x-z)^{\ell}}{\ell!}\Big| \leqslant$$

$$\leqslant C_2|x - z|^{m'} \leqslant C_3|x - z|^{\alpha m} \leqslant C|x - y|^{m} .$$

4) <u>$(\mathrm{Ker}\ \pi = \mathrm{Im}\ \delta) \Longrightarrow (\Lambda)$</u> : $\mathrm{Ker}\ \pi \subset C^{\infty}(X) \oplus C^{\infty}(Y)$ est fermé, donc <u>complet</u>. Donc, si $\mathrm{Im}\ \delta = \mathrm{Ker}\ \pi$, $\because$

$$C^{\infty}(X \cup Y) \xrightarrow{\delta} \operatorname{Im} \delta$$

est une application linéaire, biunivoque, continue entre deux espace (de Fréchet) complet. D'après le théorème du graphe fermé,

$$\operatorname{Im} \delta \xrightarrow{\delta^{-1}} C^{\infty}(X \cup Y)$$

est continue. Considérons la seminorme (de $C^{\infty}(X \cup Y)$)

$$\alpha(f) = \sup_{\substack{x,y \in M \\ x \neq y}} \frac{|(R_x^1 f)^{\circ}(y)|}{|x-y|} \quad .$$

Ils existent des seminormes β de $C^{\infty}(X)$, γ de $C^{\infty}(Y)$ telles que :
$\forall f \in C^{\infty}(X \cup Y)$:

$$\alpha(f) \leqslant \beta(f|X) + \gamma(f|Y) \quad .$$

(Ceci est une conséquence de la définition du fait que δ^{-1} est continue).

L'inégalité ci-dessus s'écrit, en détail :

$$|\mathring{f}(x) - \mathring{f}(y) - \Sigma\,(x_i - y_i) f^{(i)}(y)| \leqslant (\beta(f|X) + \gamma(f|Y)).\,|x - y| \quad .$$

Soit $\varphi \in C^{\infty}(X)$ telle que $\varphi|X \cap Y = 0 \in C^{\infty}(X \cap Y)$. Puisque $\operatorname{Ker} \pi = \operatorname{Im} \delta$, le jet $\tilde{\varphi} \in J^{\infty}(X \cup Y)$ défini par $\tilde{\varphi}|X = \varphi$, $\tilde{\varphi}|Y = 0$ a la propriété :

$$\tilde{\varphi} \in C^{\infty}(X \cup Y) \quad .$$

En lui appliquant l'inégalité ci-dessus : il existe $\exists$ une seminorme β de $C^{\infty}(X)$, telle que, si $x \in K$:

$$|\mathring{\varphi}(x)| \leqslant \beta(\varphi)\, d(x,L) \; .$$

So $\Phi \in J^{\infty}(X \cap Y, \Omega)$ (donc Φ est une fonction C^{∞} de Ω qui est platte sur $X \cap Y$). On a :

si $x \in K$: $|\Phi(x)| \leqslant \beta(\Phi|X)\; d(x,L)$.

Mais, vu que $C^\infty(\Omega)$ est complet pour la topologie C^∞ (= la topologie des seminormes $|\ldots|_F^m$), ils existent : une constante $C > 0$, un compact $F \subset \Omega$ est un nombre $m > 0$, tels que :

$$\beta(\Phi|X) \leqslant C|\Phi|_F^m .$$

Donc, si $x \in K$:

$$\text{(I)} \quad |\Phi(x)| \leqslant C\, |\Phi|_F^m \ d(x,L) .$$

En particulier, soit $\psi \in C^\infty(R_n)$ $(\Omega \subset R_n)$ une fonction à support dans $|x| \leqslant 1$ telle que $\psi(0) = 1$. Soit $x_o \in X$, $\varepsilon = d\,(x_o\,,\ X \cap Y)$.

La fonction :

$$\Phi(x) = \psi\left(\frac{x-x_o}{\varepsilon}\right) \in J^\infty(X \cap Y\ ,\ \Omega) .$$

L'inégalité (I) est valable pour $x = x_o$:

$$1 \leqslant C\ \frac{d(x_o,L)}{\varepsilon^m}\ |\psi|_{R_n}^m .$$

On remarque que $|\psi|_{R_n}^m$ est une constante (dépendant de m,n,ψ, mais pas de $x,X,Y,\ldots$).

On a donc : $(x_o \in K)$:

$$d(x_o,L) \geqslant C'\ d(x_o,X \cap Y)^m \qquad \text{q.e.d.}$$

5) <u>Exemples</u> : Soit $\varphi : R \to R$ définie par :

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \leqslant 0$$
$$\varphi(x) = e^{-\frac{1}{x}} \quad \text{si } x > 0 .$$

On considère les fermés : $X,Y \subset R_2$:

$$Y = \{(x,\varphi(x))|\ x \in R\}$$

$$X = \{(x,0)\} .$$

Il est clair que X et Y "ont un contact d'ordre infini"; ils ne satisfont donc pas à la condition (Λ).

On peut vérifier directement, à la main, qu'ils ne satisfont pas à la condition de recollement non plus.

Soit $f \in C^{\infty}(X) \subset J^{\infty}(X)$, $0 \in C^{\infty}(Y) \subset J^{\infty}(Y)$. On suppose que $f|(x < 0) = 0 \in J^{\infty}(X)$.

Si $f \cup (0) \in J^{\infty}(X \cup Y)$ était C^{∞} , on devrait avoir

$$f^{\circ}(x) = 0(e^{-\frac{m}{x}}) \qquad \forall m > 0 .$$

Ceci impose une condition trop forte à f ....

*

* *

On rappelle aussi, sans démonstration :

<u>L'inégalité de Lojasiewicz</u> : "Soit $\Omega \subset R_n$ un ouvert et $f : \Omega \to R$ une fonction <u>analytique-réelle</u>. $\forall K \subset \Omega$ compact $\exists$, C, $\alpha > 0$: tels que :

$$\forall x \in K : |f(x)| \geqslant C\ d(x,f^{-1}(0))^{\alpha} " .$$

<u>COROLLAIRE</u>.- Deux ensembles analytiques réels $X,Y \subset \Omega$ sont toujours régulièrement situés".

<u>Démonstration</u> : localement X et Y sont définis par un nombre fini d'équations analytiques <u>réelles</u>. Puisque

$$f_1^{-1}(0) \cap \dots \cap f_p^{-1}(0) = (\sum_1^p f_i^2)^{-1}(0)$$

(on est dans le cas réel), on peut supposer que, localement : $X = f^{-1}(0)$, $Y = g^{-1}(0)$.

D'après Lojasiewicz, si $x \in K$:

$$f^2(x) + g^2(x) \geqslant C\, d(x, X \cap Y)^\alpha .$$

Supposons que $x \in K \cap X$:

$$\underbrace{d(x,Y) \geqslant C_1 |g(x)|}_{\text{le théorème de la moyenne}} =$$

$$= C_1 \sqrt{g^2(x)} \underbrace{\geqslant C_1 \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}}_{\text{puisque } f(x) = 0} \geqslant C_2 d(x, X \cap Y)^{\alpha/2} .$$

CHAPITRE V.

-::-::-::-

LE THEOREME DE SYNTHESE SPECTRALE DE WHITNEY.

1) Idéaux fermés : Soit $\Omega \subset R_n$ un ouvert et $C^m(\Omega)$ $(m \leqslant \infty)$ l'anneau de fonctions de classe C^m, dans Ω, muni de la topologie C^m, compacte-ouverte.

Soit $I \subset C^m(\Omega)$ un idéal et $\bar{I}$ la fermeture de I.

THEOREME 1.- "Soit $f \in C^m(\Omega)$. $f \in \bar{I}$ si et seulement si la condition suivante est satisfaite :

$\forall a \in \Omega$ il existe un $g_a = g \in I$ tel que

$$T_a^m f(x) \equiv T_a^m g(x)" .$$

(Ici, $T_a^m f(x) = T_a^m g(x) \in R[x-a]$ si $m < \infty$

et : $T_a^m f(x) = T_a^\infty f(x) = T_a f(x) =$

$= T_a^m g(x) = T_a^\infty g(x) = T_a g(x) \in R[[x-a]] =$

= l'algèbre des séries formelles en $(x-a)$, si $m = \infty$).

COROLLAIRE.- "I , idéal de $C^m(\Omega)$ est fermé si et seulement si la condition suivante est satisfaite : (pour chaque $f \in C^m(\Omega)$) :

$$f \in I \Longleftrightarrow \forall a \in \Omega \ , \exists \ g_a = g \in I \ , \text{ tel que :}$$

$$T_a^m f(x) = T_a^m g(x)" .$$

Remarque : Pour chaque $a \in \Omega$, considérons l'application Taylorienne :

$$C^m(\Omega) \xrightarrow{T_a^m} C^m(\Omega)/\mathfrak{J}^m(\{a\},\Omega) .$$

Ici $\mathfrak{J}^m(\{a\},\Omega) \subset C^m(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions plates au point a . Clairement:

$$C^m(\Omega)/\mathfrak{J}^m(\{a\},\Omega) = \begin{cases} \subset R\,[x-a] & \text{si} \quad m < \infty \\ \subset R\,[[x-a]] & \text{si} \quad m = \infty \,. \end{cases}$$

Le théorème ci-dessus s'énonce aussi par :

$$\boxed{\bar{I} = \bigcap_{a\in\Omega} (T_a^m)^{-1}(T_a^m(I)) = \underbrace{\hat{I}}_{\text{définition}}}$$

2) Un lemme : Soit $m < \infty$.

LEMME.- "Soit L un cube, $L \subset R_n$, $K \subset L$ un compact. On suppose que $\forall a \in K$:

$$\dim_R T_a^m I = p \quad \text{(constante)}.$$

Soit $\hat{I} = \bigcap\limits_{b\in L} (T_b^m)^{-1}(T_b^m I)$. Soit $F \in \hat{I}$.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \Phi \in C^m(L)$ t.q. Φ est identiquement 1 dans un voisinage de K ; et $\exists f \in I$, t.q. :

$$|\Phi F - f|_L^m < \varepsilon \text{ ".}$$

Démonstration : Soit $a \in K$. On peut trouver un voisinage $a \in V_a \subset L$ et des fonctions $f_1, \dots, f_p \in I$, telles que, pour tout $x \in V_a \cap K$:

$T_x^m f_1, \dots, T_x^m f_p$ est une R-base de $T_x^m I$. (En effet, on choisit $f_1, \dots, f_p$ telles que $T_a^m f_1, \dots, T_a^m f_p$ soient linéairement indépendants. $\exists\, V_a$ tel que $\forall x \in V_a$: $\{T_x^m f_i\}$ $(i = 1,\dots,p)$ soient encore indépendants. On applique ensuite notre hypothèse sur la constance de $\dim_R T_x^m I$ $(x \in K)$).

Ils existent donc :

$$\lambda_i \in C^0(V_a \cap K) \quad (i = 1,\dots,p),$$

telles que $\forall x \in V_a \cap K$;

$$T_x^m F = \sum_1^p \lambda_i(x)\, T_x^m f_i \,.$$

Par partition de l'unité, $\exists\ f_1, \ldots, f_s \in I$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in C^\circ(K)$, telles que : $\forall x \in K$:

$$T_x^m F = \sum_1^s \lambda_i(x) T_x^m f_i \quad .$$

(Remarque : les nouveaux $f_1, \ldots f_p$, $\lambda_1, \ldots \lambda_p$ n'ont rien à faire avec les anciens. Abus de notation).

Pour les évaluations qu'on va faire maintenant il est important que

$$\sup_{x \in L} |\lambda_i(x)| < C$$

donc que les λ_i sont <u>bornées</u> $\Longleftarrow$ λ_i <u>continues</u>. (C'est-à-çà que l'hypothèse supplémentaire : $\dim_R T_a^m I =$ constante $(a \in K)$, nous est utile).

On peut trouver un module de continuité α pour F, $f_1, \ldots, f_s$:

$$|T_x^m \varphi(z) - T_y^m \varphi(z)| \leq \alpha(|x - y|)(|x - z|^m + |y - z|^m)$$

pour $\varphi = F, f_1, \ldots, f_s$. (On procède comme dans le chapitre sur le théorème d'extension de Whitney : on construit α tel que :

$$\frac{|(R_x^m \varphi)^k(y)|}{|x - y|^{m-|k|}} < \alpha(|x - y|) \ ,$$

et ensuite on écrit que :

$$T_x^m \varphi(z) - T_y^m \varphi(z) = \sum_{|k| \leq m} \frac{(z - x)^k}{k!} (R_y^m \varphi)^k(x)$$

e.a.d.s).

Pour $\forall\ a \in K$, $x \in L$ on <u>définit</u> :

$$f_a(x) = \sum_1^s \lambda_i(a) f_i(x) \ .$$

Donc :

$$T_a^m F(z) = T_a^m f_a(z) \ ,$$

donc : $(a \in K$, $x \in L$, $z \in R^n)$:

$$|T_x^m F(z) - T_x^m f_a(z)| \leqslant$$

$$\leqslant |T_x^m F(z) - T_a^m F(z)| + |\underbrace{T_a^m F(z)}_{T_a^m f_a(z)} - T_x^m f_a(z)|$$

$$\leqslant C\ \alpha(|x - a|)\ (|z - x|^m + |z - a|^m)$$

(C provient des $\sup\limits_{x \in L} \lambda_i(x)$, et ne dépend pas de a,x,z) .

Par définition :

$$T_x^m F(z) - T_x^m f_a(z) = \sum_{|k| \leqslant m} \frac{(z - x)^k}{k!}\ (D^k F(x) - D^k f_a(x)) \ .$$

On a donc :

$$\left| \sum_{|k| \leqslant m} \frac{(z - x)^k}{k!}\ (D^k F(x) - D^k f_a(x))\right| \leqslant C\ \alpha(\ x - a|)\ (|z - x|^m + |a - z)^m) \ .$$

Désignons : $|x - a| = \lambda$ et définissons z' par :

$$z - x = \lambda(z' - x) \ .$$

On a :

$$\left| \sum_{|k| \leqslant m} \frac{\lambda^{|k|}}{k!}\ (z' - x)^k (D^k\ F(x) - D^k f_a(x))\right| \leqslant$$

$$\leqslant C'\ \alpha(|x - a|)\ (1 + |z' - x|^m)\ \lambda^m \ .$$

(On écrit : $|a - z| \leqslant |a - x| + |x - z| \leqslant \lambda\ (1 + |z' - x|)$, e.a.d.s.).

On <u>fixera</u> maintenant a et x . Le membre de gauche est un polynôme en $(z' - x)$.

Les coefficients d'un polynôme sont les fonctions <u>linéaires</u> des valeurs du polynome, calculées dans un nombre suffisamment grand de points. Il s'ensuit, qu'il existe une constante.

$$C_1 = C_1(m,n) \ , \quad \text{telle que :}$$

$$\left|\frac{\lambda^{|k|}}{k!}\left(D^k F(x) - D^k f_a(x)\right)\right| \leqslant C_1\ \alpha(|x - a|)\ \lambda^m .$$

$\Longrightarrow$

$$(\times) \qquad \boxed{|D^k F(x) - D^k f_a(x)| < C_2 |x - a|^{m-|k|}\ \alpha(|x - a|)\ .}$$

<u>LEMME</u>.- "Considérons la partition de R_n en cubes de côtés $d > 0$, parallèles aux axes. Soit J la famille de cubes ouverts, de côté $2d$ concentriques aux précédants. Il existe une partition C^∞ de l'unité, subordonnée à J , telle que :

$$(\times\times) \qquad \sum_{i \in J} |D^k \Phi_i(x)| \leqslant \frac{C}{d^{|k|}} \quad , \qquad |k| \leqslant m$$

où $C = C(m,n)$ ". La démonstration est facile. (On utilise les même évaluations comme dans le lemme de partition de l'unité du chapitre III).

Soit $J' \subset J$:

$$S \in J' \Longleftrightarrow S \cap K \neq \emptyset \ .$$

Soit $a_S \in S$ $(S \in J')$.

On définit :

$$\Phi = \sum_{S \in J'} \Phi_S$$

$$f \equiv \sum_{S \in J'} \Phi_S\, f_{a_S} \ .$$

C'est évident que $\Phi = 1$, dans un voisinage de K .

On a :

$$|\Phi F - f|^m_L = \sum_{|k| \leqslant m} \sup_{x \in L} |D^k(\Phi F - f)(x)|$$

Pour chaque $x \in L$ soit $J(x) \subset J'$ la famille des $S \in J'$ tels que $x \in S$. On remarque que le nombre d'éléments de $J(x) \leqslant \mu = \mu(n)$. On a :

$$\sup_{x \in L} |D^k(\Phi F - f)(x)| \leqslant$$

$$\leq \sum_{S \in J'(x)} \sup_{J \in S} |D^k \Phi_S(F - f_{a_S})(y)| .$$

D'après Leibniz, ($\times$) et ($\times\times$) :

$$\sup_{y \in S} |D^k \Phi_S(F - f_{a_S})| \leqslant C_3(n,m)\, \alpha(d)$$

$(D^k \Phi_S(F - f_{a_S})$ = une somme finie de termes de la forme $D^\ell \Phi_S \cdot D^{k-\ell}(F - f_{a_S})$, multipliés par des coefficients universels. On a :

$$|D^\ell \Phi_S \cdot D^{k-\ell}(F - f_{a_S})(y)| \leqslant$$

$$\leqslant C\, d^{-|\ell|} |y - a_S|^{m-|k| + |\ell|} \alpha(|y - a_S|) .$$

Mais $|y - a_S| \leqslant d$ e.a.d.s.)

On trouve que :

$$|\Phi F - f|^m_L \leqslant C_4(m,n)\, \alpha(d) .$$

Comme $\lim_{d \to 0} \alpha(d) = 0$ on a q.e.d.

3) <u>Le théorème des idéaux fermés : (synthèse spectrale)</u> :

<u>THEOREME 2.-</u> Soit L un cube, $L \subset R_n$ et $I \subset C^m(L)$ $(m < \infty)$ un idéal. On a :

$$\bar{I} = \hat{I} \text{''}$$

<u>Démonstration</u> : Soit

$$B_p \subset L : B_p = \{x \in L \,|\, \dim_R T^m_x I \leqslant p\} .$$

Soit $A_p = B_p - B_{p-1}$.

On considère la :

Proposition H_p : "Si $F \in \hat{I}$, $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \Phi \in C^m(L)$, $f \in I$ t.q. $\Phi = 1$ dans un voisinage de B_p, $|\Phi F - f|_L^m < \varepsilon$ ".

Démonstration par induction : Si $p = 0$ $B_o = A_o$ est un fermé, et on applique le lemme du paragraphe précédant.

Supposons que H_{p-1} soit vrai :

$\exists\ \Phi_{p-1} = 1$ dans un vois. de B_{p-1}, $f_{p-1} \in I$:

$$|\Phi_{p-1} F - f_{p-1}|_L^m < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Soit K' un voisinage compact de $\operatorname{Supp}(1 - \Phi_{p-1})$, tel que $K' \cap B_{p-1} = \emptyset$.
Soit $K = K' \cap B_p$ $(K \subset A_p)$. On peut appliquer notre lemme avec

$$F \Longrightarrow (1 - \Phi_{p-1})\, F :$$

$\exists\ \psi \in C^m(L)$, $\psi \equiv 1$ dans un voisinage de K, $f \in I$:

$$|\psi(1 - \Phi_{p-1})F - f|_L^m \leqslant \frac{\varepsilon}{2} .$$

On définit : Φ_p : $(1 - \Phi_p) = (1 - \psi)\,(1 - \Phi_{p-1})$ (donc : $\Phi_p = \Phi_{p-1} + \psi(1 - \Phi_{p-1})$)

$\Longrightarrow$ $\Phi_p = 1$ dans un voisinage de B_p ($\Phi_p = 1$ si $\Phi_{p-1} = 1$ (vois. de B_{p-1}) ou $\psi = 1$ ("essentiellement" dans $B_p - B_{p-1}$)).

On définit aussi :

$$f_p = f + f_{p-1} \in I .$$

On a :

$$|\Phi_p F - f_p|_L^m = |(\Phi_{p-1} + \psi(1 - \Phi_{p-1}))\, F - f_{p-1} - f|_L^m \leqslant \varepsilon .$$

Ceci prouve H_p.

Vu que $m < \infty$, on a : $L = B_{n_o}$ pour un certain n_o. Donc $H_{n_o} \Longrightarrow$ Thm.2.

<u>COROLLAIRE</u>.- $T_x^m I = T_x^m \bar{I}$.

COROLLAIRE.- "Soit $m < \infty$, $\Omega \subset R_n$ un ouvert. Soit $I \subset C^m(\Omega)$ un idéal :

$\hat{I} = \bar{I}$". (Ceci est le théorème 1, dans le cas $m < \infty$).

Démonstration : Soit φ_i une partition C^∞ de 1 dans Ω, chaque φ_i ayant le support compact. Supposons que $f \in \hat{I}$. D'après le théorème 2 :

$$\varphi_i f \in \bar{I} .$$

Puisqu'il s'agit de la topologie C^m compacte-ouverte :

$$\Sigma \varphi_i f \in \bar{I} .$$

Démonstration du théorème 1 dans le cas $m = \infty$: Soit $I \subset C^\infty(\Omega)$ un idéal. On veut montrer que $\bar{I} = \hat{I}$.

Soit $I_m \subset C^m(\Omega)$ $(m < \infty)$ l'idéal engendré par I dans $C^m(\Omega)$.

Soit $f \in \hat{I}$. On a $\hat{I} \subset \bar{I}_m$ donc $f \in \bar{I}_m$. Donc $\forall K \subset \Omega$ compact, $\varepsilon > 0$, $\exists\ \Phi_1, \ldots, \Phi_p \in C^m(\Omega)$, $g_1, \ldots, g_p \in I$:

$$\left| f - \sum_1^p g_i \Phi_i \right|_K^m < \varepsilon .$$

Mais $C^\infty(\Omega)$ est dense dans $C^m(\Omega)$. On peut donc supposer que $\Phi_i \in C^\infty(\Omega) \Longrightarrow \exists g \in I$:

$$|f - g|_K^m < \varepsilon .$$

Donc $f \in \bar{I}$. q.e.d.

4) Remarques finales.

I. Soit $I \subset C^\infty(\Omega)$ un idéal et $a \in \Omega$. On a :

$$C^\infty(\Omega) \xrightarrow{T_a} R\,[[x - a]] .$$

PROPOSITION.- "Soit $f \in C^\infty(\Omega)$. On a :

$$T_a f \in T_a I \Longleftrightarrow \forall m < \infty : T_a^m f \in T_a^m I \text{ "}.$$

Démonstration : On commence par remarquer que $R[[x - a]]$ est noethérien.

(Il faut donc montrer que

$$\mathcal{F}_n = R[[x_1, \dots, x_n]]$$

est noethérien. Soit $p \subset \mathcal{F}_n$ un idéal. $f \in p$, $f \neq 0$. Par transformation linéaire de coordonnées, $f(0,\dots,0,x_n) = ax_n^p + 0(x_n^{p+1})$ $a \neq 0$. Considérons $\mathcal{F}_{n-1} \to \mathcal{F}_n$ (induite par $(x_1, \dots, x_n) \to (x_1, \dots, x_{n-1})$. Soit $\mathcal{F}_n \to \mathcal{F}_n/(f)$ et $\bar{p} \hookrightarrow \mathcal{F}_n/(f)$ l'image de p. Le théorème de préparation (formel) nous dit que $\mathcal{F}_n/(f)$ est $\mathcal{F}_{n-1}$-fini. Si l'on suppose (par induction) que $\mathcal{F}_{n-1}$ est noethérien $\Longrightarrow$ $\bar{p}$ est $\mathcal{F}_{n-1}$-fini $\Longrightarrow$ p est $\mathcal{F}_n$-fini.)

THEOREME DE KRULL. - "Soient A un anneau local noethérien, E un A-module fini et $F \subset E$ un sous-module. On a :

1) La topologie de Krull de F = la topologie induite par $F \subset E$, à partir de la topologie de Krull de E.

2) E est Hausdorff.

3) F est fermé".

Considérons l'anneau local noethérien $R[[x - a]]$ et l'idéal $T_a I \subset R[[x - a]]$. D'après le théorème de Krull $T_a I$ est fermé (pour la topologie de Krull de $R[[x - a]]$).

Mais dire que :

$$T_a^m f \in T_a^m I \qquad (\forall m < \infty)$$

revient à dire que $T_a f$ est dans l'adhérence de $T_a I$, e.a.d.s.

II. RELATIONS AVEC LA THEORIE DES DISTRIBUTIONS.

Soit $\Omega \subset R_n$ un ouvert et $K \subset \Omega$ un compact. Soient $C_K^\infty(\Omega) \subset C^\infty(\Omega)$ les fonctions C^∞ sur Ω à support dans K. On définit :

$$C_c^\infty(\Omega) = \varinjlim_K C_K^\infty(\Omega) \qquad \text{et}$$

les <u>distributions</u> :

$$\mathcal{D}'(\Omega) = (C_c^\infty(\Omega))^* \qquad (* = \text{esp. dual}).$$

L'inclusion $C_c^\infty(\Omega) \hookrightarrow C^\infty(\Omega)$ induit un monomorphisme continu :

$$(C^\infty(\Omega))^* \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega) .$$

$(C^\infty(\Omega))^*$ contient $\mathcal{D}'_c(\Omega)$ = les distributions à support compact.

$\mathcal{D}'(\Omega)$ est un $C^\infty(\Omega)$-module.

<u>Problème (Schwartz)</u> : Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $f \in C^\infty(\Omega)$, existe-t-il un $U \in \mathcal{D}'(\Omega)$ t.q. :

$$f\,U = T \qquad (U = \tfrac{1}{f}\,T) \ ?$$

<u>Remarques</u> : 1) La solution ne sera sûrement pas unique, si elle existe. On peut ajouter à U une distribution de support $f^{-1}(0)$.

2) En général U n'existe pas :

<u>Exemple</u> : δ = la distribution de Dirac, $\psi : R \to R$ une fonction C^∞, <u>plate</u> à l'origine, telle que $\psi^{-1}(0) = 0$. δ/ψ <u>n'existe pas.</u>

En effet : $\frac{\delta}{\psi} \in \mathcal{D}'(R)$ serait une distribution à support $\{0\}$. Elle serait de la forme :

$$\frac{\delta}{\psi} = \sum_1^p c_i \delta^{(i)} \quad , \quad c_i \in R .$$

Mais $\psi\delta^{(i)} = 0 \in \mathcal{D}'(R)$ (puisque $< \psi\delta^{(i)} , g > = < \delta^{(i)} , \underbrace{\psi g}_{\text{plate à l'origine.}} > = 0$ $(g \in C_0^\infty(R))$.

<u>Théorème de la division des distributions</u> : (Lojasiewicz)

"Si $f : \Omega \to R$ est <u>analytique</u> réelle, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\exists U \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que :

$$fU = T \text{ "} .$$

Ceci se déduit par dualité du :

THEOREME 3.- " $f\, C^\infty(\Omega) \subset C^\infty(\Omega)$ est un idéal fermé ". (Lojasiewicz ; c'est vrai même pour $(f_1, \dots, f_p)\, C^\infty(\Omega)$, $p < \infty$, f_i = analytique-réelle (Malgrange)).

[En utilisant l'inégalité de Łojasiewcz , le chapitre IV et un raisonnement délicat, on montre que :

"Soit f un germe de fonction analytique réelle et g un germe de fonction C^∞ . (au point 0) . Supposons qu'il existe un voisinage V de 0 , telle que :

$$\forall a \in V \ : \ T_a f(x) \ \text{divise} \ T_a g(x) \quad (\text{dans } R\,[[x - a]] .$$

$$\Longrightarrow \ f \ \text{divise} \ g \text{ "} .$$

A partir de là, une simple partition de 1 et le théorème de Whitney donné plus haut, impliquent le thm.3].

Le théorème 3 implique la division des distributions : Supposons d'abord que T ait un support compact. On va construire :

$$U = \frac{1}{f}\, T \in (C^\infty(\Omega))^* \quad :$$

On commence par définir U sur $f\, C^\infty(\Omega)$:

$$\langle U, fg \rangle = \langle T, g \rangle \qquad (\text{définition}).$$

U défini ainsi sera continu, car vu que $f\, C^\infty(\Omega)$ est <u>fermé</u> le théorème du graphe fermé nous dit que l'inverse de :

$$C^\infty(\Omega) \xrightarrow[\times f]{} f\, C^\infty(\Omega)$$

est <u>continue</u>.

Par Hahn-Banach on prolonge ensuite U sur $C^\infty(\Omega)$.

Si T n'a pas de support compact on considère une partition C^∞ de l'unité : $\Sigma\, \varphi_i = 1$ $\quad (\varphi_i \geqslant 0)$. On écrit :

$$T = \Sigma\, \varphi_i T = \Sigma \sqrt{\varphi_i}\ \sqrt{\varphi_i}\ T \qquad (\text{où } \sqrt{\varphi_i} \in C^\infty)$$

$\dfrac{\sqrt{\varphi_i}\,T}{f}$ existe (dans $\mathcal{D}'(\Omega)$), d'après ce qu'on vient de dire, donc

$\sqrt{\varphi_i}\left(\frac{\sqrt{\varphi_i}\,T}{f}\right)$, qui aura le support dans supp φ_i . On définit :

$$U = \Sigma \sqrt{\varphi_i}\left(\frac{\sqrt{\varphi_i}\,T}{f}\right) \qquad \text{e.a.d.s.}$$

(Remarque : On a prouvé, implicitement, que si $\psi : R \to R$ est plate à l'origine et $\psi^{-1}(0) = 0$, $\psi\, C^{\infty}(R) \subset C^{\infty}(R)$ n'est pas fermé).

Le théorème de division des distributions à un contenu non-trivial même dans les cas simples.

Exemple : $\frac{T}{x} \in \mathcal{D}'(R)$ mais $\frac{1}{x} \notin L^1_{loc}(R)$

Ce théorème s'applique au problème d'existence pour les E.D.P. Exemple : $P(D))$ = polynôme différentiel (opérateur aux dérivées partielles à coefficients constants). $T \in \mathcal{S}^*$ = dual de l'espace de Schwartz. Par transformation de Fourier, la construction d'une solution de $P(D)\ U = T$ se ramène à la division par le polynôme $P(x)$. e.a.d.s.

-::-::-::-::-