UNIVERSITÉ PARIS XI
U.E.R. MATHÉMATIQUE
91405 ORSAY FRANCE

N° 136 - 7537

THEORIE DES INVARIANTS C .

(Notes informelles pour un cours de III$^{\text{ème}}$ cycle)

par

V. POENARU

Publications Mathématiques d'Orsay 1975

INTRODUCTION

Ces notes informelles sont écrites pour un cours de III$^{\text{ème}}$ cycle donné à Orsay au printemps 1975. Le but du cours est de prouver l'analogue C^∞ suivant, de la théorie des invariants de Hilbert-Mumford [2], [18], [10] :

"Si X est une variété C^∞ compacte sur laquelle le groupe de Lie compact G agit d'une maniere C^∞, alors l'espace des orbites X/G "peut se plonger d'une manière C^∞ dans un espace euclidien de dimension suffisamment grande". "

D'une maniere plus précise il existe une application C^∞ :

$$f : X \longrightarrow R^N$$

telle que

a) Si l'on munit R^N de l'action triviale de G, f est G-équivariante. En particulier $f^*C^\infty(R^N)$ est contenu dans $C^\infty(X)^G$ (les fonctions G-invariantes).

b) L'application

$$0 \longleftarrow C^\infty(X)^G \xleftarrow{f^*} C^\infty(R^N)$$

est surjective.

Ceci est une conséquence du théoreme récent de G. Schwarz [15] qui fournit l'analogue C^∞ du théoreme de finitude de la théorie des invariants de Hilbert. Le théoreme de Schwarz, qui traite du cas G compact est exposé en détail dans ce cours. D. Luna [6] a étendu le résultat au cas complément réductible.

Le "théoreme de plongement" qu'on a énoncé ci-dessus est fondamental pour la théorie des singularités, à la Mather, quand on impose une symétrie provenant d'un groupe de Lie compact (voir [13], [14]).

On a inclus une exposition du théoreme de finitude de Hilbert. Pour plus de détails on renvoie aux livres de H. Weyl [18] et J. Dieudonné- J. Carrel [2].

Pour tous les fondements de la topologie différentielle équivariante on renvoie à à [1], [7].

Je remercie P. Deligne (auquel est due une partie des remarques du chapitre II), M. Demazure et B. Malgrange pour les conversations ou la correspondance que j'ai eues avec eux.

CHAPITRE I. LE THEOREME DE FINITUDE DE HILBERT.

Dans ce chapitre on donne un bref aperçu de quelques aspects de la "Théorie des invariants". On s'est largement servi des livres de Dieudonné-Carrel [2] et H. Weyl [18], où on renvoie pour plus de détails.

1) Enoncé du théorème de finitude. On considère l'espace vectoriel de dimension n : $R^n \ni x = (x_1, \dots, x_n)$ et l'algèbre des polynômes (réels) :

$$A = R[x] = R[x_1, \dots, x_n].$$

Soit $G \xrightarrow{\Phi} GL(n,R)$ une représentation linéaire d'un groupe de Lie G. A partir de l'action canonique (à gauche)

$$GL(n,R) \times R^n \longrightarrow R^n$$

on induit une action à gauche

$$GL(n,R) \times A \longrightarrow A$$

par :
$$g\, P(x) = P(g^{-1}x) \quad \text{(définition)}.$$

En particulier, si G est comme ci-dessus, on introduit la R-algèbre des polynômes G-invariants :

$$A^G = R[x]^G \subset R[x]$$

(donc $P(x) \in R[x]^G \Longleftrightarrow P(gx) = P(x)$ pour tous les choix de $g \in G$, $x \in R^n$).

Considérons la décomposition en composantes homogènes :
$P(x) = P_o + P_1(x) + \dots + P_q(x)$, qui fait de $R[x]$ une R-algèbre graduée. C'est immédiat que si $P(x) \in R[x]^G$, alors tous les $P_i(x) \in R[x]^G$; donc $R[x]^G$ est une sous-algèbre graduée de $R[x]$.

Dorénavant on va supposer que la représentation linéaire considérée de G est complètement réductible, c'est-à-dire que pour chaque sous-espace invariant $V \subset R^n$ il existe un supplémentaire invariant. On peut énoncer maintenant le THEOREME DE FINITUDE :

THEOREME 1 (Hilbert). "Soit G un groupe de Lie et $G \xrightarrow{\Phi} GL(n,R)$ une représentation linéaire complètement réductible.

Il existe un nombre fini de polynômes invariants :

$$\rho_1(x), \ldots, \rho_k(x) \in R[x]^G$$

qui engendrent $R[x]^G$ en tant que R-algèbre."

La démonstration (sous la forme due à Nagata) sera donnée au paragraphe suivant.

Remarques : 1) On peut énoncer le théorème de finitude en disant qu'il existe une application polynomiale $y = \rho(x)$ $(y_i = \rho_i(x))$, donnée par des polynômes invariants, telle que l'application de pull-back

$$0 \leftarrow R[x]^G \xleftarrow{\rho^*} R[y]$$

soit surjective.

2) Si G est compact, toute représentation linéaire de G est complètement réductible. En effet si $<,>$ est un produit scalaire quelconque sur R^n, on peut fabriquer un produit scalaire invariant, par intégration :

$$[x_1, x_2] = \int_G < gx_1, gx_2 > d\mu(g)$$

(où $d\mu(g)$ est la mesure de Haar sur G). Si $V \subset R^n$ est un sous-espace invariant, son supplément orthogonal par rapport à $[\ ,\ ]$ est automatiquement invariant.

Par le même argument : si G est compact, une représentation linéaire de G est toujours équivalente à une représentation orthogonale.

3) Sans perte de généralité on peut supposer que les générateurs ρ_i sont homogènes, de degré >0. C'est ce qu'on va faire dans la suite.

4) Il existe des G et des représentations linéaires telles que $R[x]^G$ ne soit pas une algèbre finie. ("Contre-exemple de Nagata, au XIV-ème problème de Hilbert [2]").

5) La démonstration du théorème de finitude qu'on va donner ci-dessous, souffrira du vice fondamental de ne pas être "constructive". Ce vice peut être remédié, au moins en partie, par la théorie plus raffinée de Hilbert-Mumford [2], [10].

D'autre part, si G est <u>fini</u>, il y a une démonstration directe, très explicite (due à E. Noether) qu'on va reproduire à la fin du chapitre .

2) <u>Démonstration du théorème de finitude</u>.

Dans tout ce qui suit, il sera entendu qu'il s'agit d'une représentation linéaire complètement réductible de G.

<u>LEMME 1</u>. "Soit $V = R^m$ et supposons que la représentation linéaire

$$G \xrightarrow{\Phi} \mathrm{Aut}(V)$$

possède la propriété suivante : il existe un sous-espace invariant de codimension 1 : $W \subset V$ et une décomposition directe (pas nécessairement invariante) :

$$V = W \oplus Rx ,$$

telle que $\Phi(g)(w + \lambda x)$ est toujours de la forme

$$\Phi(g)(w+\lambda x) = w_1 + \lambda x \qquad (w,\ w_1 \in W,\ \lambda \in R).$$

Alors, il existe un $y \in V$ tel que :

$$y \in V^G - W ."$$

<u>Démonstration</u> : sous forme "matricielle", chaque $\Phi(g)$ est donc de la forme :

$$\begin{tikzcd} Rx \arrow[r, "id"] \arrow[ddr] & Rx \\ \oplus & \oplus \\ W \arrow[r] & W . \end{tikzcd}$$

Maintenant, puisque Φ est une représentation complètement réductible, il existe une décomposition invariante :

$$V = W \oplus V_1 .$$

On voit que les G-modules (i.e. espaces vectoriels munis de représentations linéaires de G) :

V_1 et $V/W = \{R$ muni de la structure de G-module <u>triviale</u>$\}$

sont isomorphes. Donc $V_1 \subset V^G$, et il suffit de choisir $y \in V_1 - (o)$.

<u>LEMME 2</u>. ("lemme de Nagata"). "Soit $f \in R[x]$.

Il existe un

$$f^{*} \in A^G \cap \sum_{s \in G} Rs.f$$

tel que :

$$f - f^{*} \in \sum_{s,t \in G} R(s.f - t.f)."$$

<u>Démonstration</u> : on considère $V \subset R[x]$, l'espace vectoriel (de dim. finie) des polynômes ayant le degré $\leq \deg f$. V est un G-module. On considère les sous-espaces vectoriels G-<u>invariants</u> de V :

$$\sum_{s \in G} Rs.f = M_f \supset N_f = \sum_{s,t \in G} R(s.f - t.f).$$

Si $f \in N_f$ on prend $f^{*} = 0$ et on a fini.

Si $f \notin N_f$ on peut écrire :

$$s.f = f + \underbrace{(s.f - f)}_{\text{dans } N_f}.$$

On a donc, dans ce cas, une décomposition directe :

$$M_f = N_f \oplus Rf.$$

On a $(\lambda \in R)$:

$$s.\lambda f = \lambda f + \lambda(s.f - f),$$

donc le G-module M_f satisfait l'hypothèse du lemme 1.

Il existe donc $f' \in A^G \cap M_f - N_f$, et une autre décomposition directe (automatiquement invariante) :

$$M_f = N_f \oplus Rf'.$$

En particulier, pour $f \in M_f$ il existe $\lambda \in R$ tel que

$$f - \lambda f' \in N_f .$$

On pose $\lambda f' = f^{*}$ q.e.d.

<u>LEMME 3</u>. " Soient $f_1, \ldots, f_r \in A^G$. Alors :

$$\boxed{A^G \cap \sum_{i=1}^{r} A\, f_i = \sum_{i=1}^{r} A^G f_i}\ ."$$

<u>Démonstration</u> : il est clair que l'on a l'inclusion $\supset$. On va faire l'induction sur r (si $r = 0$ il n'y a rien à démontrer). Soit donc :

$$A^G \ni f = \sum_{i=1}^{r} h_i\, f_i , \qquad h_i \in A.$$

D'après le lemme précédent :

$$h_i = \underbrace{h_i^*}_{A^G} + \sum_{s,t} \lambda^i_{s,t}(s\,h_i - t\,h_i) \qquad (\lambda^i_{s,t} \in R).$$

Donc :

$$f - \sum h_i^* f_i = \sum_{s,t,i} \lambda^i_{s,t}(s\,h_i - t\,h_i)f_i \ .$$

Mais, puisque f est invariant :

$$\sum_i (s\,h_i - t\,h_i)f_i = s.f - t.f = 0.$$

Donc :

$$\sum_{i=1}^{r-1} (s\,h_i - t\,h_i)f_i = (t\,h_r - s\,h_r)f_r \ .$$

Donc $\sum_{s,t,i} \lambda^i_{s,t}(s\,h_i - t\,h_i)f_i$ (qui est invariant) est de la forme

$$\sum_{i=1}^{r-1} \tilde{h}_i\, f_i, \qquad \text{e. a. d. s.}$$

<u>Remarque</u>. Si G est <u>compact</u> le lemme 3 résulte tout de suite par intégration, car

$$f(x) = \int_G f(gx)\, d\mu(g) = \sum_1^r \Big(\underbrace{\int_G h_i(gx)\, d\mu(g)}_{\text{ceci est invariant.}} \Big) f_i(x)$$

Donc, pour G compact la démonstration du théorème de finitude on simplifie beaucoup :

on prouve directement le lemme 3, par intégration, comme on vient de le faire, et ensuite on continue comme ci-dessous.

<u>LEMME 4</u>. "Soit

$$A = \sum_{i \geq 0} A_i$$

une R-algèbre graduée $(A_i A_j \subset A_{i+j})$, connexe (c'est-à-dire que : $A_o = R$). Soit

$$A_+ = \sum_{i>0} A_i \ ,$$

<u>l'idéal</u> des éléments "sans terme libre".

Si A_+ est fini en tant que A-module, alors A est fini en tant que R-algèbre".

<u>Démonstration</u>. Soient $a_1, \ldots, a_n$ des A-générateurs du A-module A_+. Sans perte de généralité les a_i sont homogènes.

Je dis que A est engendré (en tant que R-algèbre) par les a_i :

$A = R[a_1, \ldots, a_n]$ (les a_i ne sont pas nécessairement indépendants sur R).

On va prouver par induction sur j, que chaque

$$A_j \subset R[a_1, \ldots, a_n].$$

Supposons que c'est vrai déjà pour $\sum_{j \leq k} A_j$. Soit

$$A_{k+1} \ni \beta = \sum g_i a_i, \quad g_i \in A.$$

Sans perte de généralité, chaque g_i est homogène, avec

$$\deg \beta = \deg g_i + \deg a_i .$$

Donc $\deg g_i < \deg \beta = k+1$, donc, d'après l'hypothèse de l'induction :

$$g_i \in R[a_1, \ldots, a_n], \quad \text{e. a. d. s.}$$

Je rappelle le résultat classique suivant :

LEMME 5. "Si B est un anneau noethérien, $B[x]$ est, aussi noethérien."

En particulier $R[x_1, \ldots, x_n]$ est noethérien. Donc, pour toute famille

$$\mathcal{P} \subset R[x_1, \ldots, x_n]$$

il existe une sous-famille $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$ finie, telle que $\mathcal{P}'$ engendre l'idéal :

$$\mathcal{P}.R[x_1, \ldots, x_n]$$

(Ceci est le "Basissatz" de Hilbert).

Fin de la démonstration du théorème de finitude de Hilbert .

Comme on l'a vu déjà, A^G possède une structure canonique de sous-algèbre graduée de A. On considère alors :

$$A^G \hookrightarrow A \quad \text{et} \quad A^G_+ \hookrightarrow A_+ .$$

Soit $B = A(A^G_+)$ l'idéal engendré par A^G_+ dans A. D'après le Basissatz, B est A-engendré par un nombre fini d'éléments :

$$\rho_1(x), \ldots, \rho_k(x) \in A^G_+ .$$

D'après le lemme 3 les ρ_i engendrent, aussi, A^G_+ en tant que A^G-module.

Donc, d'après le lemme 4, les ρ_i engendrent A^G en tant que R-algèbre.

Ceci finit la démonstration.

Remarque : (Hilbert) Soient $R[x]^G$ et $\rho_1, \ldots, \rho_k$ comme dans le théorème fondamental de finitude. L'ensemble des relations polynomiales

$$Q(\rho_1, \dots, \rho_k) = 0$$

forment un idéal de $R[y_1, \dots, y_k]$.

D'après le Basissatz cet idéal, est engendré par un nombre fini d'éléments. Il existe donc un nombre fini de relations (polynomiales) :

$$Q_1(\rho) = Q_2(\rho) = \dots = Q_\ell(\rho) = 0$$

qui engendrent toutes les autres.

Quelquefois le théorème de finitude s'appelle "premier théorème fondamental" (pour G) et la remarque qu'on vient de faire "second théorème fondamental".

3) Le cas formel.

Comme G agit au niveau des polynômes homogènes de degré donné, quelconque, G agit, aussi, au niveau des séries formelles :

$$R[[x]] = R[[x_1, \dots, x_n]].$$

THEOREME 2. "Dans les conditions du théorème 1, l'application naturelle

$$0 \leftarrow R[[x]]^G \xleftarrow{\hat{\rho}^*} R[[y]]$$

(obtenue en substituant $y = \rho(x)$ dans $f(y) \in R[[y]]$), est surjective."

Démonstration. Tout $f(x) \in R[[x]]$ peut être décomposé en parties homogènes :

$$f(x) = f_o + f_1(x) + f_2(x) + \dots$$

et $f \in R[[x]]^G \longleftrightarrow \forall f_i \in R[x]^G$.

Supposons dorénavant que f est invariant.

D'après le théorème précédent, il existe des $g_i(y) \in R[y]$, tels que

$$f_i(x) = g_i(\rho_1(x), \dots, \rho_k(x)).$$

Disons que (en notation symbolique) :

$$g_i(y) = \sum_{|\alpha| \leq d_i} A_{i,\alpha} y^\alpha$$

où α est un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, $d_i = \deg g_i$, et $A_{i,\alpha} \in R$.

Les $\rho_i(x)$ sont homogènes, disons que

$$\deg \rho_i(x) = r_i > 0.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que les seuls termes qui apparaissent dans $g_i(y)$ sont ceux avec α ayant la propriété :

$$(\deg f_i) = i = \alpha_1 r_1 + \ldots + \alpha_k r_k \ .$$

Dans ces conditions, je dis que

$$g_o + g_1(y) + g_2(y) + \ldots$$

<u>converge dans le sens formel</u> (et représente donc un élément $g(y) \in R[[y]]$ tel que

$$\hat{\rho}^*(g) = f).$$

Il suffit de remarquer que si

$$\lambda_i = \{\inf |\alpha|, \text{ pour } i = \sum_j \alpha_j r_j\}$$

alors $\lim\limits_{i=\infty} \lambda_i = \infty$.

4) <u>Calculs explicites pour le cas où</u> G <u>est un groupe fini</u>.

Je commence par quelques rappels d'algèbre élémentaire.

Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $f(x) \in R[x]$, un polynôme. Si t est une variable scalaire on peut écrire :

$$f(x + ty) = f(x) + t\, f_1(x,y) + O(t^2)$$

$f_1(x,y)$ sera noté par $D_{yx}f$ et sera appelé le polynôme <u>polarisé</u> de f. On a, manifestement :

$$D_{yx}f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} y_i \ .$$

On a, aussi :

$$D(f + g) = Df + Dg$$

$$D(\lambda f) = \lambda\, Df \qquad (\lambda \in R)$$

$$D(f.g) = f.Dg + g.Df.$$

On va considérer maintenant des polynômes homogènes de degré p sur $V \ni x = (x_1, \ldots, x_n)$:

$$f(x) = \sum_{\underbrace{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = p}} a_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} = \sum_{|\alpha|=p} a_\alpha x^\alpha \ .$$

On peut écrire, aussi :

$$f(x) = \sum b(i_1, \ldots, i_p)\, x_{i_1} \ldots x_{i_p}$$

où les coefficients $b(i_1, \ldots, i_p)$ sont <u>symétriques</u>.

Cette dernière écriture est unique, car :

$$a_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = \frac{p!}{\alpha_1 ! \ldots \alpha_n !} \; b(\underbrace{1, \ldots, 1}_{\alpha_1}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{\alpha_2}, \ldots).$$

On obtient, ainsi, une bijection canonique :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{polynômes homogènes} \\ \text{de degré } p \text{ sur } V\end{array}\right\} \begin{array}{c}\longrightarrow \\ \longleftarrow\end{array} \left\{\begin{array}{l}\text{homomorphismes multilinéaires} \\ \text{symétriques } \quad V^p \longrightarrow R\end{array}\right\}.$$

[La flèche $\longleftarrow$ est la restriction à la diagonale tandis que $\longrightarrow$ passe de $f(x)$ à la forme multilinéaire désignée par abus de notation, avec la même lettre f :

$$f(x, y, \ldots, z) = \sum b(i_1, \ldots, i_p)\, x_{i_1} y_{i_2} \ldots z_{i_p} \;].$$

PROPOSITION. "La forme multilinéaire considérée ci-dessus, s'obtient à partir de $f(x)$ par polarisation complète (à un coefficient numérique près) :

$$D_{xu} D_{yu} \ldots\ldots D_{zu} f(u) = p\,!\, f(x, y, \ldots, z)."$$

Démonstration. On commence par remarquer que :

$$(\times) \qquad \sum b(i_1, \ldots, i_p)(x_{i_1} + t\, y_{i_1}) \ldots\ldots (x_{i_p} + t\, y_{i_p}) =$$

$$= f(x) + t \sum b(i_1, \ldots, i_p)\,(y_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_p} + x_{i_1} y_{i_2} x_{i_3} \ldots x_{i_p} + \ldots) + 0(t^2),$$

d'où :

$$D_{yx} f(x) = p \sum b(i_1, \ldots, i_p)\, y_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_p} .$$

[Dans $(\times)$ le terme $y_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_p}$ a été écrit exactement p fois : une fois comme $y_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_p}$, une autre comme $x_{i_2} y_{i_1} x_{i_3} \ldots x_{i_p}$, e. a. d. s.].

On laisse au lecteur le soin de finir la démonstration.

EXEMPLES :

(1) (Théorème de Newton). Soit $S(n)$ le groupe symétrique opérant par permutation des $(x_1, \ldots, x_n)$. L'algèbre $R[x]^{S(n)}$ est engendrée par les polynômes symétriques fondamentaux :

$$\sigma_1(x) = \sum_i x_i$$
$$\sigma_2(x) = \sum_{i<j} x_i\, x_j$$
$$\sigma_3(x) = \sum_{i<j<k} x_i\, x_j\, x_k$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\sigma_n(x) = x_1\, x_2 \ldots x_n\,.$$

[Ces polynômes sont définis, aussi, par :

$$\prod_1^n (t - x_i) = t^n - \sigma_1(x)t^{n-1} + \sigma_2(x)t^{n-2} \ldots \pm \sigma_n(x)\ ]$$

On laisse au lecteur, en exercice, le soin de vérifier qu'il n'y a pas de relations entre les σ_i.

(2) Soit $A(n) \subset S(n)$ le groupe des permutations paires et

$$\Delta(x) = \prod_{i<j} (x_i - x_j).$$

On remarque que $\Delta(x)$ est <u>antisymétrique</u> ($\Delta(\pi\, x) = \Delta(x)$ ou $-\Delta(x)$ suivant que la permutation π est paire ou impaire), en particulier il existe une relation polynomiale :

$$(*) \qquad \Delta^2 = Q(\sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

<u>THEOREME 3</u>. " $R[x]^{A(n)}$ est engendrée par $\Delta, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ et les relations sont engendrées par (*)."

<u>Démonstration</u>. Si $f(x) \in R[x]^{A(n)}$, sous l'action de $S(n) - A(n)$, $f(x)$ est transformé en un polynôme <u>unique</u> $f_1(x)$. $f(x) + f_1(x)$ est symétrique, tandis que $f(x) - f_1(x)$ est antisymétrique, donc divisible par Δ :

$$f - f_1 = \Delta . G$$

où $G \in R[x]^{S(n)}$. Donc les (Δ, σ) engendrent $R[x]^{A(n)}$

Soit maintenant $H(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta)$ une relation. En la considérant comme polynôme un η et en divisant par $\eta^2 - Q(\xi)$ on a :

$$H(\xi, \eta) = (\eta^2 - Q(\xi))\, q(\xi, \eta) + A(\xi)\eta + B(\xi).$$

(Relation dans $R[\xi, \eta]$).

Puisque

$$\prod_i (t - x_i) = t^n - \sigma_1(x)t^{n-1} + \sigma_2(x)t^{n-2} \ldots \pm \sigma_n(x),$$

on voit que pour tout choix de valeurs

$$\sigma_i(x) = a_i$$

scalaires ($\mathbb{C}$) il existe des x_i^o scalaires, qui réalisent ces valeurs. Soient $\pm b = \pm b(a)$ les deux solutions de $b^2 = Q(a)$. En arrangeant convenablement des x_i^o les deux valeurs

$$\pm b = \Delta(x^o)$$

sont réalisées. Comme on a identiquement :

$$A(\sigma(x))\,\Delta(x) + B(x) \equiv 0$$

on voit que pour des valeurs a, arbitraires, on a :

$$A(a)\,b + B(a) = -\,A(a)\,b + B(a) = 0 \;.$$

Donc $A \equiv B \equiv 0$.

(3) Soit $S(n)$ opérant sur $V \ni x = (x_1, \ldots, x_n)$ comme ci-dessus et sur $V^m \ni (x^{(1)}, \ldots, x^{(m)})$ pour $\pi(x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}) = (\pi\, x^{(1)}, \ldots, \pi\, x^{(m)})$.

On considère les polarisations (complètes) des polynômes symétriques fondamentaux (à un facteur près) :

$$\sigma_1(u) = \sum_i u_i$$

$$\sigma_2(u,v) = \sum_{i \neq j} u_i\, v_j$$

$$\sigma_3(u,v,w) = \sum_{i \neq j \neq k \neq i} u_i\, v_j\, w_k$$

. . . .

$$\sigma_n(u, v, \ldots, \omega) = \sum_{\underbrace{i \neq j \neq k \neq \ldots \neq \ell \neq i}} u_i\, v_j\, w_k \ldots \omega_\ell \;.$$

[Les σ_i qu'on vient de définir sont manifestement des formes multilinéaires symétriques. D'autre part, par restriction à la diagonale :

$$\sigma_i(u, u, \ldots, u) = \sum_{\underbrace{a_1 \neq a_2 \neq \ldots \neq a_i \neq a_1}} u_{a_1}\, u_{a_2} \ldots u_{a_i} = i\,!\; \sigma_i(u)\;].$$

Ces polynômes sont dans

$$R\,[x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}]^{S(n)} \;.$$

(En général, par polarisation on se sort pas du cadre des polynômes invariants).

THEOREME 4. "L'algèbre

$$R[x^{(1)}, \dots, x^{(m)}]^{S(n)}$$

est engendrée par les polynômes polarisés :

$$\sigma_i(x^{(\alpha_1)}, \dots, x^{(\alpha_i)})$$

$(\alpha_j \in (1, \dots, m))$."

[Remarque : les polynômes

$$\sigma_i(x^{(\alpha_1)}, \dots, x^{(\alpha_i)})$$

où les α_i ne sont pas nécessairement distincts, sont (à des coefficients numériques près), le résultat de polarisations successives des $\sigma_i(u)$.]

Démonstration : on fera une induction sur n. Pour $n = 1$ les $x^{(i)}$ sont des variables numériques et les $\sigma_1(x^{(\alpha)}) = x^{(\alpha)}$ engendrent $R[x^{(1)}, \dots, x^{(m)}]^{S(1)} =$
$= R[x^{(1)}, \dots, x^{(m)}]$.

On va désigner maintenant $x^{(1)}, \dots, x^{(m)}$ par $x, y, \dots, z$, et :

$$x = (x_1, \underbrace{x_2, \dots, x_n}_{x' \in R^{n-1}}).$$

Soient $\sigma'_1, \dots, \sigma'_{n-1}$ les polynômes fondamentaux (polarisés ou pas) en x'.
On a les relations (pas encore polarisées) :

$$\sigma_1(x) = x_1 + \sigma'_1(x')$$
$$\sigma_2(x) = x_1\, \sigma'_1(x') + \sigma'_2(x')$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\sigma_n(x) = x_1\, \sigma'_{n-1}(x'),$$

et, par polarisation (complète) :

$$(1) \qquad \sigma_i(x^{(1)}, \dots, x^{(i)}) = \sigma'_i(x'^{(1)}, \dots, x'^{(i)}) + \sum_{\alpha=1}^{i} x_1^{(\alpha)} \sigma'_{i-1}(x'^{(1)}, \dots, \widehat{x'^{(\alpha)}}, \dots, x'^{(i)}).$$

[Le lecteur remarquera que la première polarisation donne :

$$D_{x^{(1)}u}(u_1\, \sigma'_{i-1}(u')) = x_1^{(1)}\, \sigma'_{i-1}(u') + u_1\, D_{x^{(1)}u} \sigma'_{i-1}(u')$$

(où manifestement : $D_{x^{(1)}u} \sigma'_{i-1}(u') = D_{x'^{(1)}u'}\, \sigma'_{i-1}(u'))$. Ensuite :

$$D_{x^{(2)}u}\, D_{x^{(1)}u} = x_1^{(1)}\, D_{x^{(2)}u} \sigma'_{i-1}(u') + x_2^{(1)}\, D_{x^{(1)}u} \sigma'_{i-1}(u') +$$
$$+ u_1\, D_{x^{(2)}u}\, D_{x^{(1)}u}\, \sigma'_{i-1}(u')),$$

on peut continuer ainsi ...

Le coefficient de $x_1^{(1)}$, après polarisation complète, deviendra

$\sigma'_{i-1}(u'^{(2)}, \dots, u'^{(n)})$, e. a. d. s.]

Donc les polarisés des σ' s'expriment en fonction des $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ (polarisés) et de $x_1, y_1, \dots, z_1$.

D'autre part, si $f \in R[x, y, \dots, z]^{S(n)}$ on a :

$$f(x, y, \dots, z) = \sum x_1^{\alpha} y_1^{\beta} \dots z_1^{\gamma} f_{\alpha\beta\dots\gamma}(x', y', \dots, z')$$

avec

$$f_{\alpha\beta\dots\gamma}(x', \dots, z') \in R[x', y', \dots, z']^{S(n-1)}$$

Par hypothèse de l'induction les $f_{\alpha\dots\gamma}(x', \dots, z')$ s'expriment donc en fonction des polynômes σ' (polarisés).

Donc f est une somme de termes de la forme :

$$f(x, y, \dots, z) = \dots + x_1^{\alpha} y_1^{\beta} \dots z_1^{\gamma}(\sigma_1)^{\rho_1} \dots (\sigma_{n-1})^{\rho_{n-1}} + \dots$$

$$= \text{(par intégration)} = \dots + \frac{1}{n} \sum_i x_i^{\alpha} \dots z_i^{\gamma} (\sigma_1)^{\rho_1} \dots (\sigma_{n-1})^{\rho_{n-1}} + \dots .$$

Le polynôme $\sum_i x_i^{\alpha} \dots z_i^{\gamma}$ est obtenu par une succession de polarisations, à partir de

$$\psi_{\alpha+\dots+\gamma}(x) = \sum_i x_i^{\alpha+\dots+\gamma} \in R[x]^{S(n)} .$$

Ainsi, ψ_{ν} est un polynôme en σ (Newton) donc ses polarisés successifs sont des polynômes dans les polarisés des σ .

(4) (Emmy Noether). Soit G un groupe fini opérant orthogonalement sur $R^m \ni x = (x_1, \dots, x_m)$. Soient $\alpha_1 = 1, \alpha_2, \dots$ les éléments de G, et introduisons la notation : $x^{(\alpha)} = \alpha \circ x$. D'une manière explicite :

$$(\alpha . x)_i = x_i^{(\alpha)} = \sum_k a_{ik}^{(\alpha)} x_k \qquad (a_{ik}^{(\alpha)} \in R).$$

Soit $n = \operatorname{card} G$ et $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ les polynômes symétriques fondamentaux de $R[u_1, \dots, u_n]^{S(n)}$, (polarisés). On considère les m "vecteurs" (de R^n)

$$y_1 = y_1(x) = (x_1^{(\alpha_1)}, \dots, x_1^{(\alpha_n)})$$

$$y_2 = y_2(x) = (x_2^{(\alpha_1)}, \dots, x_2^{(\alpha_n)})$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y_m = y_m(x) = (x_m^{(\alpha_1)}, \dots, x_m^{(\alpha_n)})$$

On remarque que le polynôme :

$$\sigma_j(y_{i_1},\dots, y_{i_j}) \in R[x]$$

est G-invariant (donc dans $R[x]^G$).

[En effet, si $\beta \in G$, on a :

$$\sigma_j(y_{i_1}(\beta x),\dots, y_{i_j}(\beta x)) = \sum_{\alpha} x_{i_1}^{(\beta.\alpha_{i_1})} \dots x_{i_j}^{(\beta.\alpha_{i_j})} =$$

$$= \sum_{\alpha} x_{i_1}^{(\alpha_{i_1})} \dots x_{i_j}^{(\alpha_{i_j})} = \sigma_j(y_{i_1}(x),\dots, y_{i_j}(x)).$$

Dans les sommes qu'on vient d'écrire il est entendu qu'on prend tous les systèmes α tels que

$$\alpha_{i_1} \neq \alpha_{i_2} \neq \dots \neq \alpha_{i_1}.\,]$$

<u>THEOREME 5</u>. "L'algèbre $R[x]^G$ est engendrée par les polynômes :

$$\sigma_j(y_{i_1}(x),\dots, y_{i_j}(x))."$$

<u>Démonstration</u> : soit $f(x) \in R[x]^G$. Puisque f est G-invariant on a :

$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{\alpha \in G} f(x^{(\alpha)}) = \frac{1}{n} \sum_{\alpha} f(x_1^{(\alpha)},\dots, x_n^{(\alpha)}).$$

En tant que polynôme en $y_1,\dots, y_m$, cette dernière expression est dans $R[y_1,\dots, y_m]^{S(n)}$ (où $S(n)$ agit en permutant les coordonnées de chaque y_i). Le théorème 5 résulte donc du théorème 4.

<u>Exercices</u> : 1) Les générateurs $\sigma_i(x^{(\alpha_1)},\dots, x^{(\alpha_i)})$ sont les coefficients du polynôme en t :

$$\prod_{j=1}^{n} (1 + t_1 x_1^{(j)} + \dots + t_m x_m^{(j)}).$$

2) Soient $x^{(1)}, x^{(2)} \in R^n$ et considérons l'action du groupe $SO(n)$ sur $R^{2n} = \{x^{(1)}, x^{(2)}\}$ induite par l'action orthogonale habituelle sur R^n.

$R[x^{(1)}, x^{(2)}]^{SO(n)}$ est engendrée par les trois produits scalaires :

$$< x^{(1)}, x^{(1)} >,\ < x^{(1)}, x^{(2)} >,\ < x^{(2)}, x^{(2)} >.$$

3) Soient $\psi_p(x) = x_1^p + \dots + x_n^p$ et

$$\Psi(t) = \prod_1^n (1 - t x_i) = 1 - \sigma_1(x) t + \sigma_2(x) t^2 + \dots \pm \sigma_n(x) t^n .$$

A partir du développement formel :

$$- \frac{\Psi'(t)}{\Psi(t)} = \sum \frac{x_i}{1 - t x_i} = \psi_1(x) + \psi_2(x) t + \dots$$

établir les relations :

$$\psi_p - \sigma_1 \psi_{p-1} + \sigma_2 \psi_{p-2} + \dots \pm p\, \sigma_p = 0,$$

où, par définition $\sigma_p = 0$ si $p > n$.

Calculer les $\psi(\sigma)$ en fonction des $\sigma(\psi)$.

CHAPITRE II. INVARIANTS C^{∞}.

Dans ce chapitre on donne l'énoncé du THEOREME FONDAMENTAL, qui sera prouvé dans les chapitres III et IV.

Certains aspects partiels du théorème fondamental sont déjà démontrés, par des moyens plus rapides, ici. Ceci n'est pas nécessaire pour la lecture des chapitres suivants.

1) Le THEOREME FONDAMENTAL. Soit G un groupe de Lie compact opérant linéairement sur $R^n \ni x$ et $\rho_1, \ldots, \rho_k$, un système de générateurs de l'algèbre $R[x]^G$. On pourra toujours prendre les ρ_i homogènes de degré > 0. Ainsi $\rho(o) = 0$, ce qui sera quelquefois utile dans la suite.

A partir de ces données, on a automatiquement la :

PROPOSITION 1. "Soit $x \in R^n \xrightarrow{\rho} R^k \ni y$ l'application polynomiale $y_i = \rho_i(x)$. Alors :

a) ρ est propre.

b) ρ sépare les orbites de G.

c) il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} R^n \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\text{proj}"'] & & \rho R^n \subset R^k \\ & R^n/G \arrow[ur, "\approx"', "\rho'"] & \end{tikzcd}$$

où ρ' est un homéomorphisme."

Démonstration : soit $d\mu(g)$ la mesure de Haar sur G $(\int_G d\mu(g) = 1)$. Pour $f : R^n \longrightarrow R$ fonction de classe C^p définissons :

$$Avf(x) = \int_G f(gx)\, d\mu(g).$$

On remarque que $Avf(x) \in C^p(R^n)^G$ et que Av est une retraction :

$$C^p(R^n) \xrightarrow{Av} C^p(R^n)^G$$

où $C^p(R^n)^G = \{$l'anneau des fonctions de classe C^p, G-invariantes : $f(gx) = f(x)\}$.

Soit $L : (R^n)^m \longrightarrow R$ une forme multilinéaire. Alors :

$$AvL(x, y, \ldots, z) = \int_G L(gx, gy, \ldots, gz)\, d\mu(g)$$

est une forme multilinéaire G-invariante. En faisant la restriction à la diagonale on déduit que Av transforme un polynôme (homogène de degré m) en un polynôme (homogène de degré m) G-invariant.

En particulier, si $q : R^n \longrightarrow R$ est une forme quadratique positive non-dégénérée $Avq(x)$ est une forme quadratique G-invariante. Cette forme est encore positive non-dégénérée, car si $x \neq 0$ la valeur $Avq(x)$ est l'intégrale d'une fonction strictement positive par rapport à une mesure positive, donc $Avq(x) > 0$.

D'après Hilbert il existe $P \in R[y]$ tel que :

$$Avq(x) = P(\rho(x)).$$

Si $x_n \longrightarrow \infty$ on a $Avq(x_n) \longrightarrow \infty$, donc $\rho(x_n) \longrightarrow \infty$. Donc ρ est propre.

Si $x', x'' \in R^n$ et $Gx' \neq Gx''$, on peut considérer le compact $K = Gx' \cup Gx'' \subset R^n$ et la fonction continue G-invariante :

$$\psi : K \longrightarrow R$$

définie par $\psi(Gx') \equiv 1$, $\psi(Gx'') \equiv 0$.

Soit $\varepsilon > 0$ petit. Par Weierstrass, il existe un polynôme $Q(x)$ tel que :

$$|\psi - Q|_K < \varepsilon .$$

En intégrant :

$$|Av\psi - AvQ|_K = |\psi - AvQ|_K < \varepsilon .$$

Donc le polynôme invariant AvQ prend des valeurs différentes sur les orbites Gx', Gx''. D'où b). Le point c) est automatique.

COROLLAIRE. "Si $f : R^n \to R$ est une fonction (continue) G-invariante, il existe une fonction (continue) $f_1 : \rho R^n \to R$, univoquement déterminée par f, telle que : $f = f_1 \circ \rho$."

Remarque : ρR^n est un ensemble semi-algébrique.

C'est utile d'interpréter la proposition 1 de la manière suivante :

i) Si $f : R^n \to R$ est une application quelconque, G-invariante, f dépend de $x \in R^n$ par l'intermédiaire d'une fonction des $\rho_1, \ldots, \rho_k$ (ceci est le point de b) de la proposition 1).

ii) Si $f : R^n \to R$ est une application continue G-invariante, f dépend de $x \in R^n$ par l'intermédiaire d'une fonction continue des $\rho_1, \ldots, \rho_k$.

Et bien entendu, les ρ_i sont construits (d'après Hilbert) pour qu'un polynôme invariant en x dépende de x par l'intermédiaire d'un polynôme en ρ .

Le THEOREME FONDAMENTAL dit que tout ceci marche encore dans le cas C^∞ :

THEOREME FONDAMENTAL : "L'application naturelle

$$C^\infty(R^n)^G \xleftarrow{\rho^*} C^\infty(R^k)$$

est surjective. ($\Longleftrightarrow$ Dans le corollaire ci-dessus, si $f \in C^\infty$, la fonction continue $\rho R^n \xrightarrow{f_1} R$ s'étend à une fonction C^∞ sur R^k)."

Ce théorème a été conjecturé depuis assez longtemps, et prouvé récemment par G. Schwarz [15]. Pour $G = S(n)$ il avait été démontré par G. Glaeser [4].

Remarque : c'est facile à voir que $\rho^* C^\infty(R^k)$ est dense dans $C^\infty(R^n)^G$ (dans la topologie C^∞, compacte-ouverte). Comme d'autre part $C^\infty(R^n)^G$ est manifestement fermé dans $C^\infty(R^n)$, le théorème fondamental est équivalent à l'assertion suivante :

$$\boxed{\rho^* C^\infty(R^k) \text{ est fermé dans } C^\infty(R^n).}$$

Il est utile de penser au théorème fondamental comme étant un "théorème de plongement" : la proposition 1 nous donne un plongement (topologique, propre) de l'espace des orbites R^n/G dans l'espace euclidien R^k. Le théorème fondamental nous dit que si l'on considère

$\{R^n/G$ muni de l'anneau $C^\infty(R^n)^G\}$

ceci est la même chose que

$\{\rho R^n$ muni de l'anneau $C^\infty(R^k) \mid \rho R^n\}$;

on peut donc, en fait plonger R^n/G <u>d'une manière</u> C^∞ dans R^k (le plongement de la proposition 1 est donc pas seulement topologique, mais C^∞).

2) <u>Germes de fonctions</u>: Soient $(x_1, \ldots, x_m) = x \in R^m$, $y \in R^k$ et $C^\infty(x)$, $C^\infty(x)^G$, $C^\infty(y)$ les anneaux des germes de fonctions C^∞ : autour de $o \in R^m$, autour de $o \in R^m$ et G-invariantes, respectivement autour de $o \in R^k$. En utilisant l'opération Av on peut montrer facilement que l'application

$$C^\infty(R^m)^G \longrightarrow C^\infty(x)^G$$

qui consiste à prendre le germe en o est surjective. Le théorème fondamental implique, alors, automatiquement le

<u>COROLLAIRE</u>. "L'application

$$C^\infty(x)^G \xleftarrow{\rho^*} C^\infty(y)$$

est surjective."

<u>Remarque</u> : pour le théorème fondamental (comme pour le corollaire) il suffit de donner la démonstration pour un système de générateurs de $R[x]^G$. Ensuite il est automatiquement vrai pour tous les systèmes de générateurs.

Si G est un groupe <u>fini</u> ce corollaire devient beaucoup plus facile. (En fait il était déjà connu, avant la démonstration du théorème de G. Schwarz ; il apparaît un écrit chez E. Bierstone [0]).

On va démontrer le corollaire ci-dessus dans le cas G <u>fini</u>.

On utilise le théorème de préparation C^∞ de Malgrange (voir [8], [12], [16] pour plus de détails, et pour la démonstration), sous la forme suivante :

<u>THEOREME de préparation</u> C^∞. "Soit

$$x \in (R^n, o) \xrightarrow{\varphi} (R^k, o) \ni y$$

un germe d'application C^∞.

Soit φ^* l'homomorphisme de R-algèbres engendré par φ :

$$C^\infty(x) \xleftarrow{\varphi^*} C^\infty(y),$$

et $\hat{\varphi}$ l'homomorphisme de R-algèbres engendré par $T_o\varphi$ = le développement Taylorien (infini) de φ à l'origine :

$$R[[x]] \xleftarrow{\hat{\varphi}} R[[y]].$$

Soient $g_1, \ldots, g_q \in C^\infty(x)$. Si

$$T_o g_1, \ldots, T_o g_q \in R[[x]]$$

engendrent $R[[x]]$, en tant que $R[[y]]$-module, alors $g_1, \ldots, g_q$ engendrent $C^\infty(x)$ en tant que $C^\infty(y)$-module."

On remarque que $\hat{\varphi}$ est l'unique morphisme qui rend commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
C^\infty(x) \arrow[d, "T_o"] & C^\infty(y) \arrow[l, "\varphi^*"'] \arrow[d, "T_o"] \\
R[[x]] & R[[y]]. \arrow[l, "\hat{\varphi}"']
\end{tikzcd}$$

Je donne maintenant le

<u>LEMME 2</u>. "Soit $\psi_1, \ldots, \psi_q$ le système de générateurs de $R[x]^G$, construit par le théorème 5 du chapitre I. Considérons l'application

$$y = \psi(x) \qquad (y_i = \psi_i(x))$$

et

$$R[[x]] \xleftarrow{\hat{\psi}} R[[y]].$$

Il existe un nombre fini de polynômes $P_1(x), \ldots, P_N(x)$ qui engendrent $R[[x]]$ en tant que $R[[y]]$-module."

[Avant de démontrer ce lemme je remarque qu'il implique ce qu'on veut : d'après le théorème de préparation, les $P_i(x) \in C^\infty(x)$ engendrent $C^\infty(x)$ en tant que $C^\infty(y)$-module, où $C^\infty(y)$ agit sur $C^\infty(x)$ par φ^*. Donc, si $f(x) \in C^\infty(x)$ on peut l'écrire :

$$f(x) = \sum_1^N P_i(x)\, g_i(\varphi(x))$$

(avec $g_i(y) \in C^\infty(y)$). On remarque que $g_i(\varphi(x)) \in C^\infty(x)^G$. Donc, si $f \in C^\infty(x)^G$, on a :

$$f(x) = \mathrm{Av} f(x) = \sum_1^N (\mathrm{Av}\, P_i(x))\, g_i(\varphi(x)).$$

Mais $\mathrm{Av}\, P_i(x) \in R[x]^G = \varphi^* R[y]$, e.a.d.s.].

<u>Démonstration du lemme 2</u>. A partir de maintenant on va utiliser les notations du chapitre I , (3)-(4).

Disons donc que $x = (x_1, \dots, x_m)$,

$$G = \{\alpha_1 = 1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}.$$

On introduit les $x_i^{(\alpha_j)}$ et les

$$y_i = y_i(x) = (x_i^{(\alpha_1)}, \dots, x_i^{(\alpha_n)}) \qquad (i = 1, \dots m)$$

comme avant.

Soit

$$u = (u_1, \dots, u_m)$$

une indéterminée.

Puisque :

$$u_j^m - \sigma_1(u) u_j^{m-1} + \sigma_2(u) u_j^{m-2} - \dots \pm \sigma_m(u) = 0.$$

On déduit, sans peine, qu'il existe une famille <u>finie</u> de polynômes $\{Q_i(u)\}$ telle que tout polynôme en u puisse s'écrire sous la forme :

$$\sum_i Q_i(u)\, T_i(\sigma(u)),$$

où $T_i(\sigma) \in R[\sigma]$ donc

$$\Theta_i(u) = T_i(\sigma(u)) \in R[u]^{S(n)}$$

En particulier on aura :

$$(*) \qquad u_1^{q_1 + \dots + q_m} = \sum_i Q_i(u)\, T_i(\sigma(u)).$$

Par polarisation on obtient :

$$(**) \qquad D^{q_m}_{y_m u} D^{q_{m-1}}_{y_{m-1} u} \dots D^{q_1}_{y_1 u} (u_1^{\sum q_j}) = D^{q_m}_{y_m u} D^{q_{m-1}}_{y_{m-1} u} \dots (\sum_i Q_i(u) T_i(\sigma(u))).$$

Le membre gauche de $(**)$ est égal (à un coefficient numérique près) à :

$$[x_m^{(\alpha_1)}]^{q_m} [x_{m-1}^{(\alpha_1)}]^{q_{m-1}} \dots [x_1^{(\alpha_1)}]^{q_1} = x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_m^{q_m}.$$

Le membre droit de $(**)$ est une combinaison de produits de la forme :

$$\{\text{polarisé de } Q_i\} \times \{\text{polarisé de } T_i\}.$$

Maintenant, sans perte de généralité, on pourra supposer la chose suivante :

i) chaque Q_i est <u>homogène</u>.

ii) T_i est tel que $\Theta_i(u)$ est homogène et

$$\deg \Theta_i + \deg Q_i = \sum q_j$$

(on utilise ici l'homogénéité des σ_j).

Alors nos "polarisés de T_i" ne dépendant que de $y_m, y_{m-1}, \dots$. Ils seront des polynômes en

$$\sigma_j(y_{i_1}, \dots, y_{i_j}),$$

donc des polynômes en $\psi_j = \psi_j(x)$.

Les "polarisés de Q_i" distincts, forment une famille finie de polynômes, dont les monômes distincts seront, disons :

$$P_1(x), P_2(x), \dots, P_N(x).$$

En résumé : chaque $Q(x) \in R[x]$ peut s'exprimer comme :

$$Q(x) = \sum_1^N P_i(x)\, U_i(\psi(x))$$

avec $U(\psi) \in R[\psi]$.

Si $Q(x)$ est homogène on peut prendre les U_i tels que $U_i(\psi(x))$ soit homogène en x et que : $\deg P_i + \deg U_i(\psi) = \deg Q$. (On utilise ici le fait que les $\psi_i(x)$ sont homogènes en x).

A partir de là, le lemme 2 résulte facilement.

3) Approximation polynomiale : Considérons maintenant la situation du début de ce chapitre, avec un groupe de Lie compact G, opérant linéairement sur R^n. On considère

$$f \in C^\infty(R^n)^G,$$

l'application polynomiale du théorème de finitude de Hilbert :

$$R^n \xrightarrow{\rho} R^k$$

et la fonction continue $f_1 : \rho R^n \approx R^n/G \longrightarrow R$ canoniquement associée à f $(f = f_1 \circ \rho)$.

Indépendamment du théorème fondamental (qui nous dira que f_1 est la trace d'une fonction C^∞ sur R^k) on va montrer maintenant que f_1 peut être "bien approchée" par des polynômes. Ceci est très court et peut-être pas inutile.

On commence par le :

LEMME 3. "Soit $Gz \subset R^n$ une orbite de G, $f \in C^\infty(R^n)^G$ et $r > 0$ un entier donné.

Il existe

$$P(x) \in R[x]^G$$

tel que, le r-jet de P le long de Gz soit le même que le r-jet de f le long de Gz."

Démonstration : soit $J^r(R^n,R)$ l'ensemble des r-jets d'applications $R^n \to R$, muni de sa projection naturelle :

$$J^r(R^n,R) \xrightarrow{\pi} R^n \supset Gz\,.$$

On considère la restriction

$$\pi_1 = \pi|\pi^{-1}(Gz)$$

et l'application linéaire naturelle

$$j_1^r : C^\infty(R_n) \longrightarrow \Gamma^o(\pi_1)$$

($\Gamma^o(\pi_1)$ = l'espace des sections de π_1).

Puisque le j_1^r d'une fonction invariante f dépend seulement du r-jet de f au point z, on déduit que

$$\dim_R j_1^r(C^\infty(R_n)^G) < \infty\,.$$

En appliquant le théorème d'approximation de Weierstrass et l'opération Av, on déduit que $j_1^r(R[x]^G)$ est un sous-espace vectoriel <u>dense</u> de $j_1^r(C^\infty(R^n)^G)$. Donc

$$j_1^r(R[x]^G) = j_1^r(C^\infty(R^n)^G), \qquad \text{q.e.d..}$$

Je rappelle maintenant l'INEGALITE DE ŁOIASIEWICZ (voir [8], [16]).

"Soit U un ouvert de R^n, $f : U \to R$ une fonction <u>analytique</u> et $E \subset U$ l'ensemble des zéros de f. Pour tout compact $K \subset U$, il existe des constantes C, α, telles que, si $x \in K$

$$|f(x)| \geq C \; d(x,E)^\alpha."$$

Je peux donner maintenant la :

<u>PROPOSITION 4</u>. "Soit $u \in \rho R^n \subset R^k \ni y$, donné. Soit $f \in C^\infty(R^n)^G$ et $f_1 \in C^o(\rho R^n)$ la fonction (canoniquement attachée à f), telle que $f = f_1 \circ \rho$.

Si $N > 0$ est donné, il existe des constantes $\alpha, \beta > 0$, et un polynôme $P = P_u(y) \in R[y]$, tels que, si $t \in \rho R^n$, $d(t,u) < \alpha$ alors :

$$|f_1(t) - P(t)| < \beta \; d(t,u)^N\,."$$

Démonstration : soit $z \in R^n$ tel que $\rho(z) = u$. Pour un r très grand, soit

$Q(x) \in R[x]^G$ tel que

$$j^r Q|Gz = j^r f|Gz \qquad \text{(lemme 3)}.$$

D'après Hilbert, il existe

$$P(y) \in R[y]$$

tel que $Q = P \circ \rho$.

La fonction $(P - f_1) \circ \rho$ possède un zéro d'ordre r le long de Gz.

Soit $t = \rho(x)$. On a, (pour $d(z,x)$ petit) :

(1) $\quad |f_1(t) - P(t)| = |(f_1 - P) \circ \rho(x)| \leq C_1 \, d(x,Gz)^r$.

Maintenant :

$$d(x,Gz) = d(x,\rho^{-1}(u)).$$

On considère

$$d(\rho(x),u)^2 \in R[x].$$

Les zéros de ce polynôme sont exactement $\rho^{-1}(u)$. Donc d'après Łoiasiewicz :

(2) $\quad d(t,u) = d(\rho(x), u) > C_2 \, d(x, \rho^{-1}(u))^\mu = C_2 \, d(x, Gz)^\mu$.

Ici x est dans un voisinage compact de Gz et C_2, μ sont indépendantes de f, N

(1) + (2) nous donnent :

$$|f_1(t) - P(t)| < \text{const.}\, d(t,u)^{r\mu} ,$$

et en choisissant r suffisamment grand, on finit la démonstration.

4) Le THEOREME DE PLONGEMENT. Soit X une variété C^∞ compacte sur laquelle un groupe de Lie compact G agit. D'après un théorème classique de Palais-Mostow [11], [9], [7], [1], il existe une représentation (fidèle) de G :

$$G \hookrightarrow O(n) \quad (n \text{ grand})$$

et un plongement équivariant de X dans R^n :

$$e : X \hookrightarrow R^n .$$

(Donc e est un plongement C^∞ et $e(gx) = g\, e(x)$ pour tout $x \in X$, $g \in G$).

THEOREME 5. "Soit X une variété compacte, sur laquelle le groupe de Lie compact G agit. Il existe un k (entier positif suffisamment grand) tel que, si l'on munit R^k de l'action triviale de G, il existe une application équivariante

$$\varphi : X \longrightarrow R^k \qquad (\varphi(gx) = \varphi(x)),$$

avec la propriété que

$$C^\infty(X)^G \xleftarrow{\varphi^*} C^\infty(R^k)$$

est <u>surjective</u>." [Heuristiquement parlant, φ induit un "plongement C^∞" de l'espace des orbites X/G dans R^k].

Démonstration : d'après Palais-Mostow on peut plonger X d'une manière G-équivariante dans R^n : $e : X \hookrightarrow R^n$.

C'est facile à voir que

$$C^\infty(X)^G \xleftarrow{e^*} C^\infty(R^n)^G$$

est surjective. En effet, il suffit de prolonger $\psi \in C^\infty(X)^G$ à une fonction C^∞ (pas nécessairement invariante) sur R^n, ce qui est toujours possible (voir par exemple [12]) et d'appliquer ensuite l'opération Av.

Si $\rho : R^n \longrightarrow R^k$ est l'application polynomiale de Hilbert (qui engendre $R[x]^G$), le "théorème fondamental" nous dit que

$$C^\infty(R^n)^G \xleftarrow{\rho^*} C^\infty(R^k)$$

est surjective.

Il suffit maintenant de prendre

$$\varphi = \rho \circ e .$$

<u>Remarque</u>. Ceci est un analogue (C^∞) lointain du théorème fondamental (algébrique) de [10].

<u>Exercice</u> : Soit G un groupe de Lie compact et $\rho_1, \dots, \rho_k$ un système de générateurs de $R[x]^G$. On considère $R[[x]] \xrightarrow{\hat{\rho}} R[[y]]$.

Si G n'est pas fini, $R[[x]]$ n'est <u>pas</u> nécessairement un module fini sur l'anneau $R[[y]]$. En particulier, les méthodes du paragraphe 2 ci-dessus ne s'étendant <u>pas</u> aux groupes de Lie compacts quelconques.

CHAPITRE III. PRODUITS TENSORIELS TOPOLOGIQUES ; RAPPELS D'ANALYSE DIFFERENTIELLE.

1) Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Dans ce paragraphe on va faire quelques rappels (sans démonstration) sur les produits tensoriels topologiques. Pour des détails on renvoie à [5], [17].

En principe, tous les E.V.T. considérés ci-dessous seront localement convexes, séparés, complets. On va utiliser les notations : L = applications linéaires (continues), B = applications bilinéaires (continues), $\otimes$ = produit tensoriel (algébrique, "usuel", sur les scalaires R).

Si E, F sont des espaces normés munis des (semi)-normes p, q, on définit la semi-norme $p \otimes_{\varepsilon} q$ sur $E \otimes F$ de la manière suivante.

On a un diagramme commutatif canonique :

$$\begin{array}{ccc} E \otimes F & \xrightarrow{\alpha} & L(F^*, E) \\ \beta\downarrow & & \downarrow\Psi \\ L(E^*, F) & \xrightarrow[\varphi]{} & B(E^*, F^*; R) \end{array}$$

où φ, Ψ sont des isométries et $B(E^*, F^*; R)$ désigne l'espace des applications bilinéaires (continues) $E^* \times F^* \longrightarrow R$. La semi-norme induite sur $E \otimes F$ est par définition $p \otimes_{\varepsilon} q$. Une autre manière de définir $p \otimes_{\varepsilon} q$ est la suivante

$$p \otimes_{\varepsilon} q(\theta) = \sup |\xi \otimes \eta(\theta)|$$

où $\xi \in E^*$, $p^*(\xi) \leq 1$, $\eta \in F^*$ et $q^*(\eta) \leq 1$.

Si E, F sont localement convexes, on munit $E \otimes F$ de l'ensemble $\{p \otimes_\varepsilon q\}$ et en complétant, on obtient $E \hat{\otimes}_\varepsilon F$.

Si E est complet et X est une variété C^m on a un isomorphisme canonique

$$C^m(X, E) = C^m(X) \hat{\otimes}_\varepsilon E$$

(de même, si X est un espace topologique localement compact $C^o(X,E) = C^o(X) \hat{\otimes}_\varepsilon E$). On a aussi :

$$C^m(X \times Y) = C^m(X) \hat{\otimes}_\varepsilon C^m(Y).$$

Ceci généralise la propriété bien connue pour les polynômes :

$$R[x,y] = R[x] \otimes R[y].$$

On définit aussi la semi-norme

$$p \otimes_\pi q(\theta) = \inf \sum p(x_i)\, q(y_i)$$

où $\theta \in E \otimes F$ et $\theta = \sum x_i \otimes y_i$ (écrit de toutes les manières possibles). La topologie π est plus fine que la topologie ε. En complétant on obtient $E \hat{\otimes}_\pi F$ qui est la solution universelle du problème des applications bilinéaires :

$$L(E \hat{\otimes}_\pi F, G) = B(E, F ; G).$$

L'application de Kroenecker $E^* \otimes F \longrightarrow L(E, F)$ se prolonge en une application linéaire continue :

$$E^* \hat{\otimes}_\pi F \xrightarrow{\Theta} L(E,F).$$

Par définition $u : E \longrightarrow F$ est <u>nucléaire</u> si

$$u \in \operatorname{Im} \Theta .$$

Si E et F sont des Banach u est nucléaire

$\iff \exists$ une suite $x'_k \in E^*$, $\|x'_k\| \leq 1$

une suite $y_k \in F$, $\|y_k\| \leq 1$

une suite $\lambda_k \in R$, $\sum |\lambda_k| < \infty$

telles que : $u(x) = \sum \lambda_k < x'_k , x > y_k$. (On remarquera que ceci implique que u est complètement continue). (u "possède un noyau".)

Un E.V.T. localement convexe séparé E est dit NUCLEAIRE si $\forall$ semi-norme p, $\exists$ une semi-norme $q \geq p$, telles que l'inclusion canonique :

$$\hat{E}_q \longrightarrow \hat{E}_p$$

soit nucléaire.

THEOREME (Grothendieck). " E est nucléaire $\iff \forall F$ localement convexe séparé. On a un isomorphisme canonique :

$$E \hat{\otimes}_\pi F \approx E \hat{\otimes}_\varepsilon F \text{ !"}$$

(Dans cette situation on écrira $\hat{\otimes}$ au lieu de $\hat{\otimes}_\pi$ ou $\hat{\otimes}_\varepsilon$. Le $\hat{\otimes}$ jouit de toutes les propriétés usuelles de $\otimes$ ...).

La propriété d'être nucléaire se conserve pour les sous-espaces, quotients, produits, $\hat{\otimes}$, $\varprojlim$ (séparé), $\varinjlim$ (dénombrable).

Exemple fondamental. Si X est une variété C^∞, $C^\infty(X)$ est nucléaire.

Esquisse de démonstration : soit d'abord $X = S^1$. Par Fourier, $C^k(S^1)$ s'identifie à l'espace des suites $\sigma = (\sigma_p)_{p \in Z}$ telles que :

$$\sum_{p \in Z} (1 + |p|)^k \sigma_k < \infty \quad \text{(suites à décroissance rapide)}$$

(l'expression ci-dessus sera la norme-Banach de $C^k(S^1)$). L'espace dual $(C^k(S^1))^*$ s'identifiera à l'espace des suites à croissance lente :

$$\{(1 + |p|)^{-k} \sigma_k\} \text{ bornée.}$$

Je dis que l'inclusion

$$C^{k+2}(S^1) \hookrightarrow C^k(S^1),$$

est nucléaire (ce qui impliquera que $C^\infty(S^1)$ est nucléaire, puisque $C^k(S^1)$ s'identifie au complété de $C^\infty(S^1)$ pour la norme C^k).

[En effet, soit e_p la suite des σ :

$$e_p = \begin{cases} \sigma_p = 1 \\ \sigma_q = 0 \quad \text{si} \quad p \neq q . \end{cases}$$

On définit :

$$\lambda_p = (1 + |p|)^{-2} \quad (\text{donc } \sum |\lambda_i| < \infty)$$

$$x'_p = (1 + |p|)^{k+2} e_p \quad (\text{donc } x'_p \text{ est dans la boule unité du dual de } C^{k+2})$$

$$y_p = (1 + |p|)^{-k} e_p \quad (\text{donc } y_p \text{ est dans la boule unité de } C^k).$$

On vérifie que si $\sigma \in C^{k+2}$:

$$\sum \lambda_p \langle x'_p , \sigma \rangle y_p = \sigma \in C^k , \ldots].$$

Ensuite : $C^\infty(S^1)$ nucléaire $\Longrightarrow$ $C^\infty((S^1)^n)$ nucléaire $\Longrightarrow$ $C^\infty(X)$ nucléaire pour X compact (car X compact se plonge dans $(S^1)^n$, donc $C^\infty(X)$ est un quotient de $C^\infty((S^1)^n)$. Pour X non-compact on peut faire des choses analogues, en travaillant avec la transformée de Fourier plutôt qu'avec les séries de Fourier.

Je donne ci-dessous une liste de propriétés de $\hat{\otimes}$, utiles pour la suite :

a) $\hat{\otimes}$ est exact à droite. C'est-à-dire que si

$$0 \leftarrow E_1 \xleftarrow{\alpha} E_2$$

est exacte, et F est nucléaire, alors :

$$0 \leftarrow E_1 \hat{\otimes} F \xleftarrow{\alpha \hat{\otimes} \mathrm{id}} E_2 \hat{\otimes} F$$

est exacte.

b) $\hat{\otimes}$ donne la solution du problème universel des applications bilinéaires (si l'un des facteurs est nucléaire).

c) Si X, Y sont des variétés C^∞, alors l'application bilinéaire canonique

$$C^\infty(X) \times C^\infty(Y) \longrightarrow C^\infty(X \times Y)$$

$$(f(x),\ g(y)) \longmapsto f(x)\, g(y),$$

induit, un isomorphisme (d'E.V.T.) :

$$C^\infty(X \times Y) = C^\infty(X) \hat{\otimes} C^\infty(Y).$$

d) Soit X une variété C^∞ et F un E.V.T. séparé, complet, localement convexe. On commence par définir la différentiabilité des applications

$$f : X \longrightarrow F$$

de la manière évidente. [On veut, par exemple qu'il existe $v_i \in F$ tels que :

$$\lim_{x \to x^0} \frac{1}{|x - x^0|} \{f(x) - f(x_0) - \sum (x_i - x_i^0)\, v_i\} = 0, \quad \text{e.a.d.s.}].$$

On a une inclusion naturelle :

$$C^\infty(X) \otimes F \longrightarrow C^\infty(X,F)$$

$$(f(x),\ v) \longmapsto (x \longrightarrow f(x).v)$$

dont l'image est l'ensemble des $\varphi \in C^\infty(X,F)$ allant dans un sous-espace de dimension finie de F.

A partir de là, on a un isomorphisme :

$$C^\infty(X) \hat{\otimes} F = C^\infty(X,F).$$

En particulier :

$$C^\infty(X, C^\infty(Y)) = C^\infty(X) \hat{\otimes} C^\infty(Y) = C^\infty(X \times Y).$$

e) Soit $K \subset Y$ un fermé et

$$C^\infty(Y\ ;\ K) \subset C^\infty(Y)$$

va désigner l'ensemble des fonctions $\varphi \in C^\infty(Y)$ qui sont ∞-plates sur K.

Alors, le point d) ci-dessus induit un isomorphisme :

$$C^\infty(X, C^\infty(Y\ ;\ K)) = C^\infty(X) \hat{\otimes} C^\infty(Y\ ;\ K) = C^\infty(X \times Y\ ;\ X \times K).$$

Exercices : 1) Si $U \subset \mathbb{C}^n$ est un poly-disque ouvert, alors $\mathcal{O}(U)$ est nucléaire.

2) $R[[x]]$ et $R[x]$ munis de la topologie de la convergence (simple) des coefficients sont nucléaires.

3) Si X est ouverte, $C^\infty_{\text{comp}}(X)$ est nucléaire.

4) $\mathcal{D}(X)$ est nucléaire.

2) Application aux espaces des fonctions C^∞ invariantes. On va donner le théorème de paramétrisation suivant :

THEOREME 1. "Soit G un groupe de Lie compact et X, Y deux variétés C^∞. $K \subset Y$ sera un fermé. On se donne une action de G sur X, les actions triviales de G sur Y et R^k et une application C^∞, G-équivariante :

$$X \xrightarrow{\sigma} R^k$$

telle que $\sigma^* C^\infty(R^k) = C^\infty(X)^G$.

Alors :

a) $(\mathrm{id} \times \sigma)^* C^\infty(Y \times R^k) = C^\infty(Y \times X)^G$

b) $(\mathrm{id} \times \sigma)^* C^\infty(Y \times R^k\ ;\ K \times R^k) = C^\infty(Y \times X\ ;\ K \times X)^G$."

Démonstration : la démonstration va utiliser le fait que le produit tensoriel complété $\hat{\otimes}$ dans la classe des E.V.T. nucléaires jouit des propriétés suivantes a) e) ci-dessus.

On commence par construire le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
C^\infty(Y) \hat{\otimes} C^\infty(R^k) \arrow[r, "\mathrm{id}\hat{\otimes}\sigma^*"] \arrow[d, "\approx"] & C^\infty(Y) \hat{\otimes} C^\infty(X)^G \arrow[d, "u"] & C^\infty(Y) \hat{\otimes} C^\infty(X) \arrow[l, "\mathrm{id}\hat{\otimes}\mathrm{Av}"'] \arrow[d, "\approx"] \\
C^\infty(Y \times R^k) \arrow[r, "(\mathrm{id}\times\sigma)^*"] & C^\infty(Y \times X)^G & C^\infty(Y \times X). \arrow[l, "\mathrm{Av}"']
\end{tikzcd}$$

Içi la flèche u est construite à partir de l'application bilinéaire canonique :

$$C^{\infty}(Y) \times C^{\infty}(X)^{G} \longrightarrow C^{\infty}(Y \times X)^{G}$$

en utilisant la propriété universelle de $\hat{\otimes}$.

Av est surjective aux niveaux $Y \times X$ et X. En particulier, il en résulte que $id \,\hat{\otimes}\, Av$ est surjective.

A partir du carré commutatif droit on déduit que u est surjectif.

σ^{*} est surjectif par hypothèse : donc $id \,\hat{\otimes}\, \sigma^{*}$ est surjectif. Il en résulte que $(id \times \sigma)^{*}$ est surjectif, ce qui prouve a).

Pour prouver b) on procède d'une manière analogue, mais à partir du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
C^{\infty}(Y\,;\,K) \hat{\otimes} C^{\infty}(R^{k}) \arrow[r, "id \hat{\otimes} \sigma^{*}"] \arrow[d, "\approx"] & C^{\infty}(Y\,;\,K) \hat{\otimes} C^{\infty}(X)^{G} \arrow[d, "u"] & C^{\infty}(Y\,;\,K) \hat{\otimes} C^{\infty}(X) \arrow[l, "id \hat{\otimes} Av"'] \arrow[d, "\approx"] \\
C^{\infty}(Y \times R^{k}\,;\,K \times R^{k}) \arrow[r, "(id \times \sigma)^{*}"] & C^{\infty}(Y \times X\,;\,K \times X)^{G} & C^{\infty}(Y \times X\,;\,K \times X). \arrow[l, "Av"']
\end{tikzcd}$$

On laisse au lecteur le soin de finir la démonstration.

3) Rappels sur le théorème d'extension de Whitney. On va considérer R^{n} muni des coordonnées $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et un compact $K \subset R^{n}$.

Un jet de Whitney d'ordre m sur K, est par définition la donnée d'une collection de fonctions continues $f = (f^{\alpha})$ sur K, indexées par les multi-indices $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ tels que $|\alpha| = \sum_i \alpha_i \leq m$ $\quad (\alpha_i \in (0, 1, 2, \ldots))$.

$J^{m}(K)$ sera l'espace de Banach des jets de Whitney muni de la norme :

$$|f|_m = |f| = \sup_{\substack{|\alpha| \leq m \\ x \in K}} |f^{\alpha}(x)|.$$

On va considérer aussi $J^{\infty}(K) \ni f = \{f^{\alpha}\}$ (tous les α), qui sera un espace de Fréchet, muni de la collection de toutes les semi-normes $|\ |_m$.

On a une application naturelle (le jet d'ordre m le long de K) :

$$\gamma_K^{m} = J^{m} : C^{m}(R^{n}) \longrightarrow J^{m}(K).$$

Pour $a \in K$, $f \in J^{m}(K)$ on définit le polynôme taylorien :

$$T_a^{m} f(x) = \sum_{|k| \leq m} \frac{(x-a)^{k}}{k!} f^{k}(a) \qquad (x \in R^{n}).$$

Ici $k = (k_1, \dots, k_n)$ est un multi-indice et :

$$(x-a)^k = \prod_i (x_i - a_i)^{k_i}, \quad k\,! = \prod_i (k_i\,!).$$

On définit ainsi le reste Taylorien :

$$R_a^m f = f - J^m(T_a^m f) \in J^m K .$$

En détail, si $|k| \leq m$, on a :

$$(R_a^m f)^k(x) = f^k(x) - \sum_{|\ell| \leq m-|k|} \frac{(x-a)^\ell}{\ell!} f^{(k+\ell)}(a).$$

Pour $m < \infty$ on définit $C^m(K) \subset J^m(K)$ ("les fonctions (jets) de classe C^m de Whitney sur K ") par la condition suivante :

$$\forall\ |k| \leq m \text{ et } \forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0 \text{ tel que,}$$

$$\boxed{\frac{|(R_x^m f)^k(y)|}{|x-m|^{m-|k|}} < \varepsilon}$$

si $x, y \in K$, $x \neq y$ et $|x-y| < \delta$.

Par définition :

$$\varprojlim C^m(K) = C^\infty(K) \subset J^\infty(K).$$

Je rappelle maintenant le THEOREME D'EXTENSION DE WHITNEY :

" Pour $m \leq \infty$, $f \in C^m(K)$, il existe $F \in C^m(R^n)$ tel que $J^m F = f$."

Pour la démonstration je renvoie à [8], [16], [3], [12].

Pour $C^m(K)$ $(m < \infty)$ on définit la norme $\|\ \|_m$ par :

$$\|f\|_m = |f|_m + \sup_{\substack{x,y \in K \\ x \neq y \\ |k| \leq m}} \frac{|(R_x^m f)^k(y)|}{|x-y|^{m-|k|}} .$$

On peut montrer facilement que $C^m(K)$ est complet pour $\|\ \|_m$ (voir, par exemple [12]). Mais comme $|\ |_m$ et $\|\ \|_m$ ne sont pas, en général, équivalentes, $C^m(K)$ n'est pas nécessairement complet pour $|\ |_m$.

Remarque : pour $m < \infty$ on peut complèter l'énoncé du théorème d'extension de Whitney de la manière suivante :

"Il existe un opérateur linéaire continu

$$E : C^m(K) \longrightarrow C^m(R^n)$$

(pour $C^m(K)$ muni de la topologie $\|\ \|_m$ et $C^m(R^n)$ muni de la topologie C^m), tel que, si $f \in C^m(K)$ alors :

$$J^m E f|K \equiv f."$$

Exercices : 1) $C^m(K)$ n'est pas complet pour la topologie $|\ |_m$.

2) Pour $m = \infty$ l'analogue de la remarque ci-dessus est faux.

PROPOSITION (Whitney). "Supposons que :

a) K est connexe par arcs rectifiables.

b) La distance euclidienne et la distance géodésique sur K sont équivalentes. (Un tel K sera dit 1-régulier).

Dans ces conditions, les normes $|\ |_m$ et $\|\ \|_m$ de $C^m(K)$ sont équivalentes, En particulier, si K est 1-régulier, $C^m(K)$ est complet pour $|\ |_m$." (Voir aussi [3], [16]).

Démonstration : Soit $f \in C^m(K)$ et $F \in C^m(R^n)$ telle que $J^m F = f$. Pour $x \in K$, $y \in R^n$ et $|k| \leq m$ on considère :

$$g(y) = D^k(F - T_x^m f)\ (y)$$

qui est une fonction de $C^{m-|k|}(R^n)$, $(m - |k|)$-plate en x. Si, en plus $y \in K$ on voit que

$$(*) \qquad g(y) = (R_x^m f)^k\ (y).$$

Remarquons, enfin, que si $y \in K$, $|\ell| = m - |k|$

$$D^\ell g(y) = f^{k+\ell}(y) - f^{k+\ell}(x).$$

Du simple fait que g est de classe C^1, on voit que, si x et y sont joints par un chemin rectifiable Γ :

$$|g(y) - g(x)| \leq C(n)\ |\Gamma| \sup_{\substack{z \in \Gamma \\ |\ell|=1}} |D^\ell g(z)|.$$

Ceci est une conséquence immédiate du théorème des accroissements finis.

Si en plus $p \geq 1$ est tel que g soit $(p-1)$-plate en x, on peut itérer l'inégalité qu'on vient d'écrire, et on trouve :

$$|g(y)| \leq C_1(n,p)\ |\Gamma|^p \sup_{\substack{z \in \Gamma \\ |\ell|=p}} |D^\ell g(z)|.$$

En prenant $x, y \in K$, $\delta(x,y)$ = la distance géodésique entre x et y (dans K) et

$p = m - |k|$ on a donc :

$$(**) \qquad |g(y)| \leq C_1(n, m-|k|)\, \delta(x,y)^{m-|k|} \sup_{\substack{z \in K \\ |\ell|=m}} |f^{\ell}(z) - f^{\ell}(x)| .$$

Puisque K est supposé 1-régulier, on trouve

$$\frac{|(R_x^m f)^k(y)|}{|x-y|^{m-|k|}} \leq \text{const.}\ |f|_m$$

ce qui finit la démonstration.

On peut considérer maintenant des fermés $L \subset R^n$ et définir

$C^m(L) = \varprojlim_{\substack{K \subset L \\ K \text{ compact}}} C^m(K)$. $C^m(L)$ est complet pour la topologie définie par les semi-normes $\| \ \|_m^K$ (K compact, $K \subset L$).

Tout ceci peut se globaliser facilement.

CHAPITRE IV. DEMONSTRATION DU THEOREME FONDAMENTAL.

Soit G un groupe de Lie compact opérant orthogonalement sur $R^n \ni x$. Soit $\rho_1, \ldots, \rho_k$ un système de générateurs homogènes, de degré > 0, de l'algèbre polynomiale $R[x]^G$. On veut montrer que

$$0 \longleftarrow C^\infty(R^n)^G \xleftarrow{\rho^*} C^\infty(R^k)$$

est exacte. [Ceci va impliquer, automatiquement, que pour un système de générateurs quelconques $\sigma_1, \ldots, \sigma_\ell$, la flèche correspondante, σ^* est surjective, aussi]. Soit $d_i = \deg \rho_i$. On va considérer, aussi, la sphère-unité

$$S^{n-1} \subset R^n$$

et, par définition : $\rho_o = \rho | S^{n-1}$.

On dira que l'action $G \longrightarrow 0(n)$ satisfait à l'HYPOTHESE (H) si l'ensemble des points fixes est réduit à $o \in R^n$:

$$\mathrm{Fix}(G) = (o).$$

On va décomposer la démonstration en étapes :

1 LEMME 1. "Considérons l'application C^∞ (des "coordonnées polaires") :

$$\Phi : \underbrace{[o, \infty)}_{R_+} \times S^{n-1} \longrightarrow R^n$$

définie par $\Phi(t, \theta) = t\,\theta$.

On considère l'homomorphisme induit :

$$C^\infty(R_+ \times S^{n-1}) \xleftarrow{\Phi^*} C^\infty(R^n).$$

Alors : a) Φ^* est injectif.

b) On a :

$$\Phi^* C^\infty(R^n \ ; \{o\}) = C^\infty(R_+ \times S^{n-1} \ ; o \times S^{n-1})".$$

<u>Démonstration</u> : a) est une conséquence immédiate de la surjectivité de Φ .

On remarque ensuite que

$$R^n - o \xrightarrow{\Phi^{-1}} (o, \infty) \times S^{n-1}$$

est bien définie (et C^∞) et que, par définition, si

$$R^n \ni x = \Phi(t, \theta),$$

alors : $|x| = t$.

Pour une carte locale : $R^{n-1} \ni u_i \xrightarrow{\psi_i} S^{n-1}$, on considère l'application évidente :

$$\Phi((o, \infty) \times \psi_i(R^{n-1})) \ni x \xrightarrow{\Phi_i^{-1} = (id, \psi_i^{-1}) \circ \Phi^{-1}} (t, u_i) \in (o, \infty) \times R^{n-1} .$$

((t, u_i) sont les "vraies" coordonnées polaires de x).

Je dis, qu'on peut recouvrir S^{n-1} avec un nombre fini de cartes locales $\psi_1(D), \dots, \psi_p(D)$, où $D \subset R^{n-1}$ est un ouvert borné, telles que, pour chaque multi-indice α , il existe des C_α , $A_\alpha > 0$, tels que, pour $|x|$ assez petit, on ait :

(1) $$|D^\alpha \Phi_i^{-1}(x)| \le C_\alpha |x|^{-A_\alpha} .$$

[Pour la démonstration il suffit de regarder des formules explicites de passage des "coordonnées polaires" ou "coordonnées cartésiennes".]

On démontre maintenant le point b). L'inclusion

$$\Phi^* C^\infty(R^n \ ; \{o\}) \subset C^\infty(R_+ \times S^{n-1} \ ; o \times S^{n-1})$$

est évidente. Il faut prouver $\supset$.

Soit maintenant

$$f \in C^\infty(R_+ \times S^{n-1} \ ; o \times S^{n-1}).$$

Si α est un multi-indice quelconque, pour tout $n > 0$ il existe une constante $B = B(\alpha, n)$, telle que :

(2) $$|D^{\alpha} f(t, u_i)| \leq B\, t^n$$

(pour t suffisamment petit).

On veut montrer que la fonction C^{∞} $f \circ \Phi^{-1}$, définie sur $R^n - 0$ s'étend à une fonction C^{∞} sur R^n, ∞-platte en 0. Il suffit de montrer que, pour tout α :

$$\lim_{|x| \to 0} |D^{\alpha} f \circ \Phi^{-1}(x)| = 0 .$$

Si x est dans le domaine de définition de Φ_i^{-1}, on peut exprimer $D^{\alpha} f \circ \Phi^{-1}(x) = D^{\alpha} f \circ \Phi_i^{-1}(x)$ comme somme de termes de la forme

$$D^{\beta} f(|x|, u_i)\, D^{\gamma}\, \Phi_i^{-1}(x) \qquad (u_i = u_i(x)).$$

En utilisant (1) et (2) on voit bien que ce terme tend vers 0 quand $|x| \longrightarrow 0$, q.e.d.

A partir du lemme 1 et de sa démonstration on déduit tout de suite le :

<u>LEMME 2</u>. "Soit G un groupe de Lie (compact) agissant orthogonalement sur R^n. En considérant l'action induite sur S^{n-1} et l'action <u>triviale</u> sur R on a une action de G sur $R \times S^{n-1}$.

Considérons aussi l'action canonique du groupe cyclique d'ordre 2

$$Z/2 \times (R \times S^{n-1}) \longrightarrow (R \times S^{n-1})$$

où l'élément non-trivial de $Z/2$ agit par :

$$(t, \theta) \xmapsto{\overline{A}} (-t, -\theta).$$

On remarque que si $g \in G$:

$$\overline{A}\, g(t, \theta) = \overline{A}(t, g(\theta)) = (-t, -g(\theta)) = (-t, g(-\theta)) = g(-t, -\theta) = g\overline{A}\,(t, \theta).$$

A partir de $\overline{A}$ et de G on fabrique donc une action de $(Z/2) \times G$ sur $R \times S^{n-1}$.

Soit $\Phi : R \times S^{n-1} \longrightarrow R^n$ définie comme le Φ du lemme 1, par : $\Phi(t, \theta) = t\,\theta$. Si l'on considère l'action triviale de $Z/2$ sur R^n, Φ est $G \times (Z/2)$-équivariante ; en particulier, on a un homomorphisme :

$$C^{\infty}(R \times S^{n-1})^{G \times (Z/2)} \xleftarrow{\Phi^*} C^{\infty}(R^n)^G .$$

Alors : a) Φ^* est injective.

b) On a :

$$C^{\infty}(R \times S^{n-1} ; o \times S^{n-1})^{Z/2} = \Phi^* C^{\infty}(R^n ; \{o\})$$

et : $$C^\infty(R\times S^{n-1}\,;\,o\times S^{n-1})^{G\times(Z/2)} = \Phi^* C^\infty(R^n\,;\,\{o\})^G."$$

② On considère l'espace euclidien

$$R^{k+1} = R\times R^k \ni (t,\, y_1,\dots,\, y_k)$$

et les deux applications C^∞ de R^{k+1} en lui-même :

$$(t,\, y_1,\dots,\, y_k) \xmapsto{A} (-t,\, (-1)^{d_1} y_1,\dots,\, (-1)^{d_k} y_k)$$

$$(t,\, y_1,\dots,\, y_k) \xmapsto{B} (t^2,\, t^{d_1} y_1,\dots,\, t^{d_k} y_k).$$

A (qu'il ne faut pas confondre avec le $\bar{A}$ ci-dessus) est une involution et définit donc une nouvelle action :

$$Z/2\times R^{k+1} \longrightarrow R^{k+1}.$$

La sous-variété

$$o\times R^k \subset R^{k+1}$$

est $Z/2$-invariante (c'est-à-dire qu'elle est A-invariante).

LEMME 3. "Considérons les deux sous-algèbres :

$$B^*C^\infty(R\times R^k\,;\,\{o\}),\ C^\infty(R\times R^k\,;\,o\times R^k)^{Z/2} \subset C^\infty(R\times R^k).$$

On a :

$$B^*C^\infty(R\times R^k\,;\,\{o\})\,|R\times\rho_o(S^{n-1}) = C^\infty(R\times R^k;\, o\times R^k)^{Z/2}\,|\,R\times\rho_o(S^{n-1})."$$

[Si θ est le point courant de S^{n-1} (θ = vecteur de longueur 1 de R^n), on a :

$$R\times\rho_o(S^{n-1}) = \{(t,\, \rho_1(\theta),\dots,\, \rho_k(\theta))\}.$$

On a aussi :

$$A(t,\, \rho_1(\theta),\dots,\, \rho_k(\theta)) = (-t,(-1)^{d_1}\rho_1(\theta),\dots,(-1)^{d_k}\rho_k(\theta)) = (-t,\, \rho_1(-\theta),\dots,\rho_k(-\theta)).$$

Donc, le sous-ensemble :

$$R\times\rho_o(S^{n-1}) \subset R\times R^k$$

est A-invariant. En plus, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} R\times S^{n-1} \arrow[r, "\bar{A}"] \arrow[d, "(\mathrm{id},\rho_o)"] & R\times S^{n-1} \arrow[d, "(\mathrm{id},\rho_o)"] \\ R\times R^k \supset R\times\rho_o(S^{n-1}) \arrow[r, "A"] & R\times\rho_o(S^{n-1}), \end{tikzcd}$$

où $\bar{A}(t,\theta) = (-t,\, -\theta)$, comme dans le lemme 2.]

Démonstration. Soit

$$f(t, y_1, \ldots, y_k) \in C^\infty(R \times R^k).$$

Par définition : $(B^* f)\ (t, y_1, \ldots, y_k) = f(t^2, t^{d_1} y_1, \ldots, t^{d_k} y_k)$. Si f est ∞-platte en o, $B^* f$ est ∞-platte en $o \times R^k$, donc :

$$B^* C^\infty(R \times R^k ; \{o\}) \subset C^\infty(R \times R^k ; o \times R^k).$$

D'autre part :

$$(B^* f \,|\, R \times \rho_o(S^{n-1}))(t, \rho_o \theta) = f(t^2, t^{d_1} \rho_1(\theta), \ldots, t^{d_k} \rho_k(\theta)) = f(t^2, \rho_1(t\,\theta), \ldots, \rho_k(t\,\theta))$$

(puisque ρ_i est un polynôme homogène de degré d_i).

Donc :

$$(B^* f \,|\, R \times \rho_o(S^{n-1}))(t, \rho_o \theta) = f(t^2, \rho(\Phi(t, \theta))) = (\text{par définition}) = g(t, \theta).$$

Je dis que la restriction $B^* f \,|\, R \times \rho_o S^{n-1}$ est A-invariante. En effet :

$$(B^* f \,|\, R \times \rho_o S^{n-1})(A(t, \rho_o \theta)) = g(\bar{A}(t, \theta)) = g(-t, -\theta) = f(t^2, \rho(\Phi(-t, -\theta))) =$$

$$= f(t^2, \rho(\Phi(t, \theta))) = (B^* f \,|\, R \times \rho_o S^{n-1})\ (t, \rho_o \theta).$$

Comme, d'autre part, $C^\infty(R \times R^k ; o \times R^k)$ est préservé par A^*, on déduit que $B^* f \,|\, R \times \rho_o S^{n-1}$ est la restriction à $R \times \rho_o S^{n-1}$ d'une fonction C^∞ sur $R \times R^k$, ∞-platte sur $o \times R^k$ et A-invariante.

En d'autres termes, on a montré la moitié $\subset$ de l'égalité qu'on veut prouver.

On va montrer maintenant que :

$$C^\infty(R \times R^k ; o \times R^k)^{Z/2} \,|\, R \times \rho_o S^{n-1} \subset B^* C^\infty(R \times R^k ; \{o\}) \,|\, R \times \rho_o S^{n-1} .$$

Soit Δ un cube k-dimensionel de R^k contenant $\rho_o S^{n-1}$ dans son intérieur, et :

$$K = [-1, 1] \times \Delta \subset R \times R^k .$$

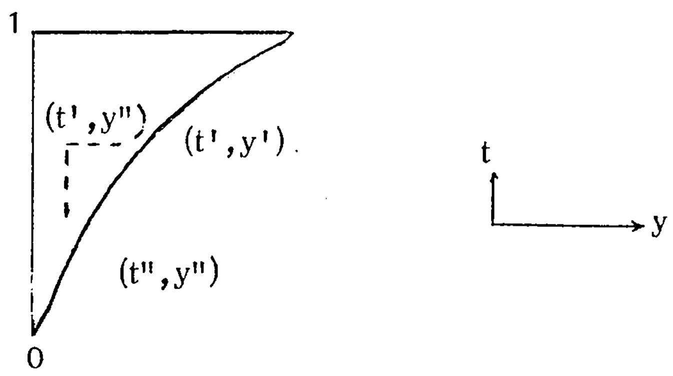
Je dis que le compact

$$L = B(K) \subset R \times R^k$$

est <u>1-régulier</u>. En effet, si $t' \geq t''$ et

$$(t', y'), (t'', y'') \in L$$

alors les segments $[(t', y'), (t', y'')]$ et $[(t', y''), (t'', y'')]$ sont complètement contenues dans L . (voir la figure ci-après)



Donc :

$$\mathrm{dist}((t',y'),(t'',y'')) \leq \text{dist. géod. } ((t',y'),(t'',y'')) \leq |t'-t''|+|y'-y''|$$
$$\leq 2\ \mathrm{dist}((t',y'),(t'',y'')).$$

Soit maintenant

$$h \in C^{\infty}(R \times R^k\ ;\ o \times R^k)^{Z/2} .$$

Le lecteur remarquera que, "formellement" :

$$B^* h(t^{1/2},\ t^{-d/2} y) = h(t,y),$$

ce qui conduit aux considérations suivantes :

Pour $\varepsilon > 0$, $t \geq 0$ on définit :

$$H_\varepsilon (t,\ y_1, \ldots,\ y_k) = h((t+\varepsilon)^{1/2}, (t+\varepsilon)^{-d_1/2} y_1, \ldots, (t+\varepsilon)^{-d_k/2} y_k).$$

On peut faire les remarques suivantes :

a) pour $t \geq 0$, H_ε est une fonction C^∞ dans le demi-plan $t \geq 0$ de $R \times R^k$, en particulier sur L. En considérant l'application $\mathcal{J}^\infty : C^\infty(R^{k+1}) \longrightarrow C^\infty(L)$ on peut définir la fonction (ou jet) C^∞ de Whitney :

$$\mathcal{J}^\infty H_\varepsilon \in C^\infty(L).$$

b) Puisque L est 1-régulier, l'espace $C^\infty(L)$ est complet pour la topologie des semi-normes habituelles $|\ldots|_m = |\ldots|_m^L$.

c) Pour $\varepsilon \longrightarrow 0$ la famille $\{H_\varepsilon\}$ converge dans la topologie des semi-normes habituelles $|\ldots|_m^L$.

[En effet, considérons l'application :

$$R_+ \times R^k \xrightarrow{\ \beta_\varepsilon\ } R_+ \times R^k$$

définie par :

$$(t,y_1,\ldots,y_k) \longmapsto ((t+\varepsilon)^{1/2},\ (t+\varepsilon)^{-d_1/2}\,y_1,\ \ldots\ldots).$$

Si $(t,y) \ni L$ donc $(t,y) = (\tau^2, \tau^d z)$ (avec $0 \le \tau \le 1$, $z \in \Delta$), alors :

$$\beta_\varepsilon(t,y) = ((\tau^2+\varepsilon)^{1/2}\ ,\ \frac{\tau^d}{(\tau^2+\varepsilon)^{d/2}}z)$$

et comme

$$0 < \frac{\tau^d}{(\tau^2+\varepsilon)^{d/2}} < 1$$

on en déduit que $\beta_\varepsilon(L)$ est contenu dans un compact P de $R \times R^k$, <u>indépendant de</u> ε.

D'autre part $h \in C^\infty(R \times R^k\ ;\ o \times R^k)$ veut dire que pour tout compact $P \subset R^k$ et tout multi-indice α on a :

$\forall N$, $\exists\, C = C(P,\alpha)$ telle que $|D^\alpha h(t,y)| \le C\, t^N$.

D'autre part, par définition :

$$H_\varepsilon(t,y) = h(\beta_\varepsilon(t,y)) = h((t+\varepsilon)^{1/2},\ (t+\varepsilon)^{-d/2}y).$$

La quantité $\sup\limits_{(t,y)\in L} |D^\alpha(H_\lambda(t,y) - H_\mu(t,y))|$ est majorée :

(1) pour $t \ge \delta > 0$ par une somme de termes de la forme :

(quantité bornée) $\times |D^\gamma \beta_\lambda(t,y) - D^\gamma \beta_\mu(t,y)| \xrightarrow[(\lambda,\mu)\to 0]{} 0$,

(2) pour $0 \le t \le \delta$ par une somme de termes de la forme :

$\sup\limits_{\substack{(t,y)\in P\\ 0\le t\le\delta}} |D^\alpha h(t,y)| \times$ (quantité bornée par un polynôme en t^{-1}).

Ceci,(vu la décroissance de $D^\alpha h$ plus rapide que tout t^N), tend vers 0 quand $\delta \longrightarrow 0$.

A partir de toutes ces considérations la démonstration est facile.]

d) D'après b) et c), la "suite" de jets C^∞ de Whitney $\{\mathcal{J}^\infty H_\varepsilon\}$ est convergente dans la topologie $\|\ldots\|$ (ou $|\ldots|$) de $C^\infty(L)$. Il existe donc un

$$H = \{H^\alpha\} \in C^\infty(L)$$

tel que :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{J}^\infty H_\varepsilon = H\ .$$

D'après le théorème d'extension de Whitney, H est la trace sur L d'une fonction C^∞ globale sur $R \times R^k$, qu'on va désigner, par abus de notation par la même lettre H. En particulier, la fonction continue $H^o \in C^o(L)$ s'étend à la fonction C^∞ sur R^{k+1}, H. Manifestement :

$$H \in C^\infty(R \times R^k, \{o\}).$$

Remarque. Les considérations qu'on vient de faire montrent, en fait, la proposition suivante :

LEMME 3.1."Soit $K \subset R^n$ un compact 1-régulier et $f_1, f_2, \ldots \in C^\infty(R^n)$ une suite de fonctions telles que pour tout multi-indice α la suite $D^\alpha f_i|K$ converge uniformément.

Alors la fonction continue $\varphi : K \longrightarrow R$ définie par $\varphi = \lim f_i|K$ s'étend à une fonction C^∞ de R^n."

e) On remarque que l'application :

$$(t, y_1, \ldots, y_k) \longmapsto (t^{1/2}, t^{-d_1/2} y_1, \ldots, t^{-d_k/2} y_k)$$

induit un difféomorphisme :

$$(t,y) \in L - 0 \xrightarrow{\beta_o} (0,1] \times \Delta \subset K,$$

inverse de :

$$(t,y) \in L - 0 \xleftarrow{B} (0,1] \times \Delta .$$

On a :

$$\begin{cases} H|L - 0 = h(t^{1/2}, \ t^{-d/2}y) = h(\beta_o(t,y)) \\ H(o) = 0 . \end{cases}$$

Puisque $B^* h(\beta_o(t,y)) = h$ on en déduit que

$$B^* H|(0,1] \times \Delta = h|(0,1) \times \Delta,$$

donc, par continuité :

$$B^* H|[0,1] \times \Delta = h|[0,1] \times \Delta.$$

En particulier

$$B^* H|[0,1] \times \rho_o(S^{n-1}) = h|[0,1] \times \rho_o(S^{n-1}).$$

Mais h est A-invariante par hypothèse et $B^* H|R \times \rho_o(S^{n-1})$ est, comme on l'a déjà vu, A-invariante.

Donc, vu que $A([0,1] \times \rho_o(S^{n-1})) = [-1,0] \times \rho_o(S^{n-1})$, on a aussi :

(*) $$B^* H|[-1,1] \times \rho_o(S^{n-1}) = h|[-1,1] \times \rho_o(S^{n-1}).$$

D'autre part comme B est non-singulière en dehors de $0 \times R^k$, on peut modifier H de telle manière qu'elle soit ∞-platte en o et que (*) devienne :

$$B^*H\,|R \times \rho_o(S^{n-1}) = h\,|R \times \rho_o(S^{n-1}) \qquad \text{q.e.d.}$$

(3) On dira que le groupe de Lie (compact) G' est "plus petit que G si :

a) ou bien $\dim G' < \dim G$.

b) ou bien $\dim G' = \dim G$ mais G' a moins de composantes connexes que G.

On écrira $G' < G$.

On va supposer dans ce numéro (3) que les deux hypothèses suivantes sont vérifiées :

I. HYPOTHESE D'INDUCTION : Le groupe de Lie compact G est tel que, pour tout $G' < G$ (et toute action orthogonale de G') le théorème fondamental est vrai.

II. L'action orthogonale de G considérée, satisfait à l'HYPOTHESE (H) : $\mathrm{Fix}(G) = (o)$.

<u>LEMME Clef 4</u>. "Avec les deux hypothèses ci-dessus, on a :

$$\rho^* C^\infty(R^k - (o)) = C^\infty(R^n - (o))^G.$$

En particulier :

$$\rho_o^* C^\infty(R^k) = C^\infty(S^{n-1})^G."$$

Avant de donner la démonstration, remarquons le

<u>COROLLAIRE 5</u>. "Dans les mêmes conditions que ci-dessus, on a :

a) $(\mathrm{id} \times \rho_o)^* C^\infty(R \times R^k\ ;\ 0 \times R^k) = C^\infty(R \times S^{n-1}\ ;\ 0 \times S^{n-1})^G$

b) $(\mathrm{id} \times \rho_o)^* C^\infty(R \times R^k\ ;\ 0 \times R^k)^{Z/2} = C^\infty(R \times S^{n-1}\ ;\ 0 \times S^{n-1})^{G\times(Z/2)}$."

[On considère ici l'action triviale de G sur R ; le groupe cyclique $Z/2$ agit par $\overline{A}$ sur $R \times S^{n-1}$ et par A sur $R \times R^k$. L'application $\mathrm{id} \times \rho_o$ est $Z/2$-équivariante.]

<u>Démonstration du corollaire 5</u>. Le point a) résulte tout de suite de la dernière ligne du lemme 4 et du théorème 1 (point b) du chapitre III.

Soit maintenant

$$\varphi \in C^\infty(R \times S^{n-1}\ ;\ 0 \times S^{n-1})^{G\times(Z/2)}.$$

D'après a) il existe un

$$\psi \in C^{\infty}(R \times R^k \; ; 0 \times R^k)$$

tel que

$$\varphi = (\mathrm{id} \times \rho_o)^* \psi \; .$$

Puisque φ est $\overline{A}$-invariant, on peut écrire :

$$\varphi = \tfrac{1}{2}(\varphi + \overline{A}^* \varphi) = \tfrac{1}{2}((\mathrm{id} \times \rho_o)^* \psi + \overline{A}^*(\mathrm{id} \times \rho_o)^* \psi) =$$

$$= (\mathrm{id} \times \rho_o)^* \left[\tfrac{1}{2}(\psi + A^* \psi)\right].$$

Ceci montre que :

$$C^{\infty}(R \times S^{n-1} \; ; 0 \times S^{n-1})^{G \times (Z/2)} \subset (\mathrm{id} \times \rho_o)^* C^{\infty}(R \times R^k \; ; 0 \times R^k)^{Z/2} \; .$$

L'inclusion inverse est immédiate. $\square$

Démonstration du lemme 4. On a déjà remarqué que la décomposition d'un polynôme G-invariant en composantes homogènes nous fournit automatiquement des polynômes G-invariants homogènes.

Donc $R[x]^G$ possède une structure naturelle d'anneau gradué :

$$R[x]^G = \sum_{i \geq 0} R[x]^G_i \; , \text{ où}$$

$R[x]^G_i$ = {l'ensemble des polynômes G-invariants homogènes de degré i}.

D'une manière analogue

$$R[[x]]^G = \prod_{i \geq 0} R[x]^G_i \; ,$$

égalité dont l'interprétation explicite est laissée au lecteur.

On introduira les notations :

$$R[x]^G_+ = \sum_{i \geq 1} R[x]^G_i$$

$$R[[x]]^G_+ = \prod_{i \geq 1} R[x]^G_i \; .$$

LEMME 4.1. "Soit $\rho_1, \ldots, \rho_k \in R[x]^G$ un système de générateurs homogènes de l'algèbre $R[x]^G$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

a) $\rho_1, \ldots, \rho_k$ est une R-base de l'espace vectoriel :

$$R[x]^G_+ / (R[x]^G_+)^2 \; .$$

b) Il n'y a pas de relations polynomiales du type :

$$\rho_j = P(\rho_1, \ldots, \hat{\rho}_j, \ldots, \rho_k).$$

Un système satisfaisant à a) - b) existe toujours, et est dit <u>minimal</u>."

<u>Démonstration</u>. On va supposer que

$$i \geq j \implies \deg \rho_i \geq \deg \rho_j .$$

Une relation non-triviale :

$$\rho_j = \sum_{i \neq j} \lambda_i \rho_i + \sum \mu_\alpha \rho^\alpha$$

(avec $\lambda_i \in R$, $\mu_\alpha \in R$, α un multi-indice avec $|\alpha| \geq 2$) implique

$$\rho_j = \sum_{i \neq j} \lambda_i \rho_i \quad (\mathrm{mod}\ (R[x]_+^G)^2).$$

Donc a) $\Rightarrow$ b).

Soit, maintenant

$$\sum_1^k \lambda_i \rho_i \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\,(R[x]_+^G)^2)$$

une relation non-triviale et i_o le plus petit indice tel que $\lambda_{i_o} \neq 0$.

Au niveau de $R[x]^G$, on aura, donc :

$$(*) \qquad \rho_{i_o} = \sum_{j > i_o} \mu_j \rho_j + \sum_{\alpha \in S} \chi_\alpha \rho^\alpha$$

où S = {l'ensemble des multi-indices α avec $|\alpha| \geq 2$} et $\mu_j, \chi_\alpha \in R$. L'égalité (*) est encore vraie quand on la restreint aux termes homogènes de degré d_{i_o}. Alors, elle devient :

$$(**) \qquad \rho_{i_o} = \sum_{\substack{j > i_o \\ d_j = d_{i_o}}} \mu_j \rho_j + \sum_\alpha \chi_\alpha \rho^\alpha$$

où cette fois-çi $|\alpha| \geq 2$ et $\sum \alpha_i d_i = d_{i_o}$. Donc ρ_{i_o} n'apparaît <u>pas</u> au membre droit de (**).

Donc b) $\Rightarrow$ a).

<u>LEMME 4.2</u>. (Comparer à Glæser [4]). " Soient $U \subset R^n$, $V \subset R^m$ deux ouverts et $C^\infty(U)$ $(C^\infty(V))$ les algèbres respectives des fonctions C^∞, munies de la topologie C^∞ compacte-ouverte.

On se donne $f \in C^\infty(U,V)$, qui induit :

$$C^\infty(U) \xleftarrow{f^*} C^\infty(V).$$

Soit

$$\overline{f^* C^\infty(V)} \subset C^\infty(U)$$

l'adhérence de l'image de f^*.

Pour tout

$$\varphi \in \overline{f^* C^\infty(V)} \qquad \text{et} \qquad a \in U$$

il existe $\psi \in C^\infty(V)$ tel que :

$$T_a \varphi = \hat{f}_a(T_{f(a)}\, \psi)."$$

[$\hat{f}_a$ est le morphisme induit par f :

$$R[[x-a]] \xleftarrow{\hat{f}a} R[[y-f(a)]]$$

et $T_a\varphi$ est le développement Taylorien de φ au point a. Dans un langage plus terre-à-terre , ceci veut dire qu'on peut retrouver notre $T_a\varphi$ à partir de

$$T_{f(a)}\psi = \psi(f(a)) + \sum_{|\alpha|>0} \frac{(y-f(a))^\alpha}{\alpha!} D^\alpha\, \psi(f(a))$$

en remplaçant

$$y_i - f_i(a) \quad \text{par} \quad \sum_{|\beta|>0} \frac{(x-a)^\beta}{\beta!} D^\beta f_i(a). \;]$$

<u>Démonstration</u>. On considère les morphismes d'E.V.T. fréchetiques :

$$R[[x-a]] \xleftarrow{T_a} C^\infty(U) \xleftarrow{f^*} C^\infty(V),$$

et les inclusions :

$$T_a(f^* C^\infty(V)) \subset T_a(\overline{f^* C^\infty(V)}) \subset \overline{T_a(f^* C^\infty(V))} \;.$$

Pour prouver que

$$\boxed{T_a(f^* C^\infty(V)) = T_a(\overline{f^* C^\infty(V)})}$$

(affirmation qui contient la conclusion de notre lemme) ; il suffit de montrer que :

$$T_a(f^* C^\infty(V)) \text{ est } \underline{\text{fermé}} \text{ dans } R[[x-a]].$$

Par dualité, ceci équivaut à montrer que :

Image($R[[x-a]]' \xrightarrow{{}^t(T_a\, f^*)}$ {distribution de V à support compact}) est fermée.

Mais $R[[x-a]]'$ n'est rien d'autre que l'espace des distributions de support a et Image $R[[x-a]]'$ sera contenu dans les distributions de support $f(a)$. Les distributions de support $f(a)$ ce sont les combinaisons linéaires de la fonction de Dirac $\delta_{f(a)}$ et de ses dérivées ; tout sous-espace vectoriel de cet espace est automatiquement fermé. En particulier ce sera le cas pour notre

${}^t(T_a \circ f^*)\, R[[x-a]]'$ ce qui finit la démonstration. □

Revenons maintenant aux conditions du lemme 4. Soit $p \in R^n - 0$ et $G_p \subset G$ le groupe d'isotropie de p. D'après l'hypothèse II) on a : $G_p < G$.

L'orbite $G_p \subset R^n$ est une sous-variété compacte de codimension $q > 0$. Soit

$$t \in R^q \xrightarrow{L} R^n \ni x$$

une injection linéaire, telle que $p + L\,R^q$ soit orthogonale à la variété G_p (au point p). L'application

$$x = p + L(t)$$

induit une structure euclidienne sur R^q et une action orthogonale

$$G_p \times R^q \xrightarrow{\text{slice}} R^q .$$

Soit $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ un système <u>minimal</u> de générateurs homogènes de l'algèbre $R[t]^{G_p}$.

Soit $S \subset R^q \approx p + L\,R^q$ le disque :

$$S = \{p + L(t),\ |t| \leq \varepsilon\} \qquad (\varepsilon > 0 \text{ petit}).$$

Par l'action slice, G_p agit sur S.

On remarque que $GS \subset R^n$ est un voisinage tubulaire équivariant de G_p. On a un G-difféomorphisme

$$G \times_{G_p} S \xrightarrow{\approx} GS$$

qui envoit le point $[g,t]$ du produit tordu $G \times_{G_p} S$ sur $gt \in GS$.

Soit $\lambda : S \hookrightarrow GS$ l'inclusion canonique. C'est facile à voir que λ induit un <u>isomorphisme</u> <u>canonique</u> (d'algèbres)

$$\boxed{C^\infty(GS)^G \xrightarrow[\lambda^*]{\approx} C^\infty(S)^{G_p}} .$$

Soient $\bar{\rho}_i$ $(\bar{\sigma}_i)$ les germes en p des restrictions des $\rho_i(\sigma_i)$.

<u>LEMME 4.3</u>. "Il existe des germes de fonctions C^∞ : $B_j(z_1, \ldots, z_k)$ tels que

$$\sigma_j = B_j(\bar{\rho}_1, \ldots, \bar{\rho}_k)."$$

<u>Démonstration</u>. On commence par remarquer que les polynômes

$$\mu_i(t) = \rho_i(p + L(t)) \in R[t]$$

sont G_p invariants. Il existe donc des polynômes $A_i(Z_1, \ldots, Z_s)$ tels que :

(1) $$\mu_i = \mu_i(p) + A_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_s).$$

En particulier :

$$\overline{\rho_i} = \rho_i(p) + A_i\,(\overline{\sigma_1}, \dots, \overline{\sigma_s}).$$

Considérons maintenant les flèches successives

$$S \xrightarrow{\lambda} GS \hookrightarrow R^n \xrightarrow{\rho} R^k$$

[le germe de $\rho\circ\lambda$ en p est notre $\bar{\rho}$.]

GS est un compact de R^n, donc toute fonction dans $C^\infty(GS)$ peut être approchée par un polynôme ; vu que GS est aussi invariant, on déduit que

$$C^\infty(GS)^G = \overline{(R[x]^G|GS)} = \overline{\rho^* R[y]|GS}\ .$$

On en déduit que

$$C^\infty(S)^{G_p} = \overline{\lambda^* \rho^* C^\infty(R^k)}\ .$$

Donc, pour tout $\pi \in S$, $\varphi \in C^\infty(S)^{G_p}$, il existe

$$\Phi \in R[[z_1, \dots, z_k]]$$

telle que, dans $R[[t-\pi]]$ on ait :

$$T_\pi \varphi = \Phi(T_\pi \mu_1 - \mu_1(\pi), \dots, T_\pi \mu_k - \mu_k(\pi)).$$

En appliquant ceci pour $\pi = p$, $\varphi = \sigma_j$, on a :

(2) $\qquad \sigma_j = \Phi_j(\mu_1 - \mu_1(p), \dots, \mu_k - \mu_k(p))$

(égalité dans $R[[t]]$).

Ecrivons

$$\Phi_i(z) = \underbrace{L_i(z)}_{\text{homogène de degré } 1} \quad + \quad (\text{termes de degré } \geq 2).$$

En combinant (1) et (2) on trouve :

(3) $\qquad L_i(A_1(\sigma), \dots, A_k(\sigma)) - \sigma_i \in (R[t]_+^{G_p})^2\ .$

Soit $\mathcal{A}$ la R-algèbre (triviale) :

$$\mathcal{A} = R[Z_1, \dots, Z_s]/\{Z^2\}.$$

Puisque $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ est un système minimal, la correspondance $\sigma_i \longrightarrow Z_i$ induit un isomorphisme d'algèbres :

$$R[t]^{G_p}/(R[t]_+^{G_p})^2 \approx \mathcal{A}\ .$$

Donc (3) se lit comme une égalité dans $\mathcal{A}$:

(4) $\qquad L_i(A_1(Z), \dots, A_k(Z)) = Z_i\ .$

Ceci implique

(5) $$L_i(A_1(Z),\ldots, A_k(Z)) = Z_i + O(Z^2),$$

égalité dans $R[Z]$. Il en résulte que la matrice jacobienne de A possède la propriété que

$$\underbrace{\{\text{matrice jac. de } \Phi\}}_{L(R^k,R^s)} \times \underbrace{\{\text{matrice jac. de } A\}}_{L(R^s,R^k)} = \mathrm{id}(R^s).$$

Donc par le théorème des fonctions implicites, on peut résoudre

$$\bar\rho - \bar\rho(p) = A(\bar\sigma)$$

pour trouver

$$\bar\sigma = B(\bar\rho).$$

$\square$

On peut démontrer maintenant notre lemme 4.

Soit donc $\psi \in C^\infty(R^n - o)^G$ et $p \in R^n - o$. On a $\lambda^*\psi \in C^\infty(S)^{G_p}$ et par l'hypothèse d'induction I, $\lambda^*\psi$ dépend d'une manière C^∞ des $\sigma_i|S$.

En utilisant le lemme 4.3, on voit qu'il existe un voisinage G-invariant de p dans $R^n\text{-}o \subset R^n$: U_p, un voisinage $\rho(p) \in V_p \subset R^k - o$ et $\varphi_p \in C^\infty(V_p)$ tels que $\rho(U_p) \subset V_p$ et

$$\rho^* \varphi_p = \psi | U_p .$$

Clairement $\rho(U_p)$ est un <u>ouvert</u> de l'espace des orbites $\rho(R^n) \subset R^k$; on peut donc supposer que $V_p \cap \rho(R^n) = \rho U_p$. Avec les U_p (V_p) on peut faire un recouvrement localement fini de $R^n - o$ $(\rho R^n - o)$. Soit $\{h_p\}$ une partition C^∞ de 1 sur $\rho R^n - o$, subordonnée à $\{V_p\}$. $\{\rho^* h_p\}$ est une partition de 1 sur $R^n - o$, G-invariante, subordonnée à $\{U_p\}$.

On vérifie que

$$\rho^*(\textstyle\sum h_p \varphi_p) = \psi$$ ce qui finit la démonstration.

④ Sur R^n on considère la fonction

$$r(x) = |x|^2.$$

Ceci est un polynôme O(n)-invariant, donc G-invariant. D'après Hilbert, il existe donc un polynôme :

$$\psi(y) \in R[y] \qquad (y \in R^k)$$

tel que $r(x) = \psi(\rho(x))$.

LEMME 6. "Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & & & R^k \arrow[dr, shift left, "{(\psi,\mathrm{id})}"'] & \\
R \times S^{n-1} \arrow[rr, "\Phi"'] \arrow[drr, "(\mathrm{id} \times \rho_o)"] & & R^n \arrow[ur, "\rho"'] \arrow[rr, "{(r,\rho)}"'] & & R \times R^k \arrow[ul, shift left, "\pi = \text{proj.}"'] \\
 & & R \times R^k \arrow[urr, "B"] & &
\end{tikzcd}$$

. "

Démonstration. On vérifie, par exemple, que :

$$(r,\rho)\circ\Phi(t,\theta) = (r,\rho)(t,\theta) = (t^2, \rho_1(t\,\theta), \ldots, \rho_k(t\,\theta))$$

$$= (t^2, t^{d_1}\rho_1(\theta), \ldots, t^{d_k}\rho_k(\theta)) = B(t, \rho_o(\theta)),$$

et ainsi de suite.

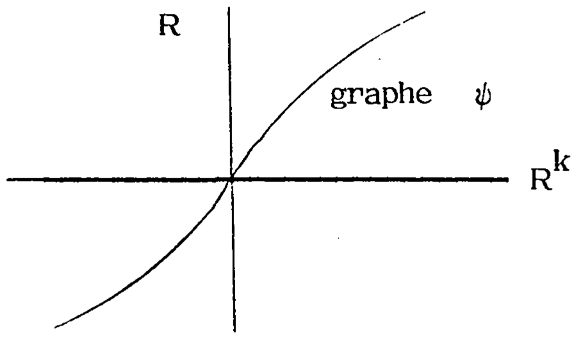
LEMME 7. "Si G agit orthogonalement sur R^n de telle façon que les hypothèses I) - II) du point (3) sont satisfaites, alors :

$$\rho^* C^\infty(R^k ; \{o\}) = C^\infty(R^n ; \{o\})^G . \text{ "}$$

Démonstration. On commence par remarquer que :

$$(\psi, \mathrm{id})^* C^\infty(R \times R^k ; \{o\}) = C^\infty(R^k ; \{o\}).$$

[En effet dans $R \times R^k$ on considère la sous-variété graphe $\psi \subset R \times R^k$, qui



passe par l'origine, puisque :

$$o = r(o) = \psi(\rho(o)) = \psi(o).$$

On peut identifier la flèche $(\psi,\mathrm{id})^*$ avec la restriction

$$C^\infty(R \times R^k) \longrightarrow C^\infty(R \times R^k)|\text{graphe } \psi ,$$

et il s'agit d'étendre une fonction C^∞, ∞-platte en o, sur graphe ψ, en une fonction C^∞, ∞-platte en o, sur $R \times R^k$; je laisse les détails au lecteur].

En se référant au diagramme commutatif précédent, on a :

$$\Phi^* C^\infty(R^n ; \{o\})^G \underbrace{=}_{\text{(lemme 2)}} C^\infty(R \times S^{n-1} ; o \times S^{n-1})^{G \times (Z/2)} \underbrace{=}_{\text{(corr.5)+(lemme 3)}}$$

$$= (id \times \rho_o)^* B^* C^\infty(R \times R^k ; \{o\}) \underbrace{=}_{\text{(lemme 6)}} \Phi^* \circ (r, \rho)^* C^\infty(R \times R^k ; \{o\}) =$$

$$= \Phi^* \rho^* \underbrace{(\psi, id)^* C^\infty(R \times R^k ; \{o\})}_{C^\infty(R^k ; o)}.$$

Vu que Φ^* est injectif, on a q.e.d.

(5) DEMONSTRATION DU THEOREME FONDAMENTAL. Soit G groupe de Lie compact agissant orthogonalement sur R^n. D'après le chapitre III pour prouver le théorème fondamental pour G, il suffit de le prouver dans le cas où l'action n'a pas de points fixes autres de o

[En effet si G est une action orthogonale quelconque on a un sous-espace vectoriel $\mathrm{Fix}\, G \subset R^n$ et G agit orthogonalement, sans points fixes sur le complémentaire orthogonal :

$$V = (\mathrm{Fix}\, G)^\perp \subset R^n.$$

Donc l'action de G sur R^n est :

(l'action de G sur V) $\times$ (l'action triviale sur Fix G).

Soit $V \xrightarrow{\sigma} R^q$ l'application de Hilbert pour l'action de G sur V .

On peut prendre comme application de Hilbert pour l'action de G sur R^n :

$$\underbrace{\mathrm{Fix}\, G \times V}_{R^n} \xrightarrow{\rho = id \times \sigma} \underbrace{\mathrm{Fix}\, G \times R^q}_{R^k} .$$

Supposons que l'on sache démontrer que

$$\sigma^* C^\infty(R^q) = C^\infty(V)^G.$$

Le théorème du chapitre III implique alors que :

$$\underbrace{(id \times \sigma)^*}_{\rho^*} C^\infty(\mathrm{Fix}\, G \times R^q) = C^\infty(R^n)^G .]$$

D'après la remarque précédente et en appliquant une induction sur les groupes $G' < G$, on peut donc supposer que les hypothèses I, II sont satisfaites.

Soit $f \in C^{\infty}(R^n)^G$. On voit que

$$T_o f \in R[[x]]^G.$$

D'après la version formelle de la théorie de Hilbert donnée au chapitre I, il existe

$$\hat{\psi}(y) \in R[[y]]$$

tel que $$T_o f = \hat{\rho}(\hat{\psi}).$$

D'après le théorème d'Emil Borel, il existe $\psi(y) \in C^{\infty}(y)$, tel que $T_o \psi = \hat{\psi}$.

On a :

$$f - \rho^* \psi \in C^{\infty}(R^n ; \{o\})^G.$$

En appliquant le lemme 7 on a :

$$f - \rho^* \psi \in \rho^* C^{\infty}(R^k ; \{o\}),$$

ce qui finit la démonstration.

(6) UN COMPLEMENT : le lemme 7 ci-dessus est vrai sans aucune hypothèse :

PROPOSITION 8. "Soit G un groupe de Lie compact agissant orthogonalement sur R^n. Alors :

$$\boxed{\rho^* C^{\infty}(R^k ; \{o\}) = C^{\infty}(R^n ; \{o\})^G} \ ."$$

Démonstration. On sait déjà que

$$\rho^* C^{\infty}(R^k) = C^{\infty}(R^n)^G .$$

Toute fonction C^{∞}, G-équivariante sur la sphère unité $S^{n-1} \subset R^n$, s'étend en une fonction C^{∞} G-équivariante de R^n (il suffit de l'étendre d'une manière quelconque et d'appliquer l'opérateur Av).

Donc l'égalité

$$\rho_o^* C^{\infty}(R^k) = C^{\infty}(S^{n-1})^G$$

est vraie (sans les restrictions du lemme 4). A partir de là le corollaire 5) est vrai sans aucune restriction.

Comme les points (1) et (2) sont vrais sans aucune hypothèse supplémentaire on peut utiliser sans aucune modification le raisonnement de (4) pour aboutir à la conclusion cherchée.

APPENDICE. Les résultats de D. Luna [6].

Luna considère un groupe de Lie quelconque G et une représentation complètement réductible $G \longrightarrow GL(n,R)$. Dans ce cas, l'application $y = \rho(x)$ ne sépare plus nécessairement les orbites, mais on regarde ses fibres. On a :

THEOREME A. $\rho^* C^\infty(R^k) = \{$l'ensemble des applications C^∞, $R^n \longrightarrow R$, constantes sur les fibres de $R\}$.

THEOREME B. Si $f \in C^\omega(R^n)^G$, il existe un ouvert $\rho R^n \subset U \subset R^k$ et $g \in C^\omega(U)$ telle que $\rho^* g = f$.

L'analogue analytique-complexe du théorème B est vrai, aussi, et, dans ce cas, g est partout définie.

Les démonstrations utilisent les techniques exposées ci-dessus, mais, en plus, et d'une façon essentielle, la description des opérations linéaires des groupes réductifs, obtenue avant, par Luna dans deux articles.:

Slices étales. Bull. Soc. Math. France Mem. 33 (1973) pp. 81-105.

Sur certaines opérations différentiables des groupes de Lie (à paraître).

BIBLIOGRAPHIE

[0] E. Bierstone : Smooth functions invariant under the action of a finite group (à paraître).

[1] G. Bredon : Introduction to compact transformation groups. Acad. Press (1972).

[2] J. Dieudonné, J. Carrel : Invariant theory, old and new. Adv. in Math. (1970).

[3] G. Glaeser : Etude de quelques algèbres tayloriennes. J. An. Math. (1958), pp. 1-125.

[4] G. Glaeser : Fonctions composées différentiables. Ann. of Math. (1963) pp. 193-209.

[5] A. Grothendieck : Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Mem. Amer. Math. Soc. 16 (1955).

[6] D. Luna : Fonctions différentiables invariantes sous l'action d'un groupe réductif (à paraître).

[7] K. Jänich : Differgierbone G-ManningfaltigKeiten. Springer L. N. 59 (1968).

[8] B. Malgrange : Ideals of differentiable functions. Oxford (1966).

[9] G.D. Mostow : Equivariant embedding in euclidean space. Ann. of Math. 65 (1957) pp. 432-446.

[10] D. Mumford : Geometric Invariant theory. Springer (1965).

[11] R. Palais : Embedding of compact differentiable transformation groups in othogonal representation. J. Math. Mech. 6 (1957) pp. 673-678.

[12] V. Poénaru : Analyse différentielle, Springer L.N. 371 (1974).

[13] V. Poénaru : Déploiement (uni)-versel de fonctions G-invariantes (à paraître).

[14] V. Poénaru : Stabilité structurelle équivariante (à paraître).

[15] G. Schwarz : Smooth functions invariant under the action of a compact Lie group. Topology 14 (1975) pp. 63-68.

[16] J.C. Tougeron : Idéaux de fonctions différentiables, Springer (1972).

[17] F. Trèves : Topological vector spaces, distributions and kernels. Acad. Press (1967).

[18] H. Weyl : The classical groups. Princeton (1946).