UNIVERSITÉ PARIS XI

U.E.R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

n° 143

Sur certaines martingales de B. Mandelbrot

J.-P. Kahane
J. Peyrière

Analyse Harmonique d'Orsay
1975

SUR CERTAINES MARTINGALES DE BENOIT MANDELBROT

par J.-P. Kahane et J. Peyrière

En hommage au Professeur Norman Levinson

En analysant de façon critique le modèle aléatoire de turbulence de A. M. Yaglom, Benoit Mandelbrot a introduit son propre modèle, qu'il appelle "canonique" ([1], [2], [3]). On part d'un pavé, qu'on divise successivement en $c, c^2, \ldots c^n, \ldots$ pavés semblables ; chaque pavé de la n-ième étape est divisé en c pavés égaux de la (n+1)ième étape. On donne une suite de variables aléatoires indépendantes W_P, équidistribuées, positives, d'espérance 1 et indexés par les pavés P qu'on vient de considérer. Partant de la mesure de Lebesgue μ_o sur le pavé initial, on construit par étapes la suite des mesures μ_n : μ_n a une densité constante sur chaque pavé P de la n-ième étape, et la densité de μ_n sur P est le produit par W_P de la densité de μ_{n-1} sur P. La suite des mesures μ_n est une martingale vectorielle, qui converge vers une mesure aléatoire μ. Dans [2] et [3] sont indiqués des résultats et des problèmes concernant la mesure μ (conditions de non dégénérescence ; étude des moments de $\|\mu\|$; étude des boréliens portant μ et de leur dimension de Hausdorff). Certaines conjectures de B. Mandelbrot ont été résolues par Jacques Peyrière [4] ou par J.-P. Kahane [5]. On se propose ici d'exposer ces résultats sous une forme améliorée. Les théorèmes 1, 2, 3 ci-dessous sont dus à J.-P. Kahane, le théorème 4 à J. Peyrière.

Il sera commode de prendre pour pavé initial l'intervalle $[0, 1[$. Les "pavés" P sont alors les intervalles c-adiques

$$I(j_1, j_2, \dots j_n) = \left[\sum_1^n j_k c^{-k} , \sum_1^n j_k c^{-k} + c^{-n} \right[$$

$(n = 1, 2, \dots ; j_k = 0, 1, \dots c-1)$.

On donne un entier $c \geq 2$, et une variable aléatoire positive d'espérance 1. On désigne par $W(j_1, j_2, \dots j_n)$ une suite de v. a. indépendantes, de même distribution que W, et par μ_n la mesure, définie sur $[0, 1[$, dont la densité est $W(j_1) W(j_1 j_2) \dots W(j_1, j_2, \dots j_n)$ sur l'intervalle $I(j_1, j_2, \dots j_n)$.

Posons

$$Y_n = \|\mu_n\| = c^{-n} \sum_{j_1, j_2, \dots j_n} W(j_1) W(j_1, j_2) \dots W(j_1, j_2, \dots j_n). \tag{1}$$

C'est une martingale positive, et $E(Y_n) = 1$. Elle converge p. s. vers une v. a. Y_∞ telle que $E(Y_\infty) \leq 1$. De même, pour tout intervalle c-adique I, $\mu_n(I)$ est une martingale d'espérance $|I|$ qui converge p. s. vers une limite $\mu(I)$. Donc μ_n tend p. s. vers une mesure μ de masse totale Y_∞, au sens de la topologie faible.

Il est commode d'écrire (1) sous la forme

$$Y_n = c^{-1} \sum_{j=0}^{c-1} W(j) Y_{n-1}(j). \tag{2}$$

Les v. a. $W(j)$ et $Y_{n-1}(j)$ sont mutuellement indépendantes, et les $Y_{n-1}(j)$ ont la même distribution que Y_{n-1}.

Considérons enfin l'équation fonctionnelle

$$Z = c^{-1} \sum_{j=0}^{c-1} W_j Z_j \tag{3}$$

où les v. a. W_j et Z_j sont mutuellement indépendantes, les W_j ayant même distribution que W et les Z_j même distribution que Z. L'inconnue dans (3) est la distribution de Z ; par abus de langage, on dira que Z est solution de (3). Il est clair que Y_∞ est solution de (3). Il peut y avoir d'autres solutions ; par exemple, dans le cas $W \equiv 1$, une variable de Cauchy est solution de (3), et elle ne peut pas être du type Y_∞ puisqu'elle n'est ni positive, ni sommable.

Il sera commode d'associer à W la fonction convexe

$$\varphi(h) = \log_c E(W^h) - (h-1) \quad (\text{où } \log_c x = \frac{\log x}{\log c}), \tag{4}$$

qui est toujours définie pour $0 \leq h \leq 1$, et peut être définie pour des valeurs $h > 1$. La fonction φ s'annule au point 1 et éventuellement en un autre point, α_o. La dérivée à gauche de φ au point 1 est

$$\varphi'(1-0) = E(W \log_c W) - 1 = -D.$$

On verra le rôle joué par D dans la non-dégénérescence de μ, et dans la dimension des boréliens portant μ. On verra aussi le rôle de α_o en relation avec les moments de Y_∞.

Les illustrations les plus frappantes sont 1) le cas où $W = e^{\tau\xi - \frac{\tau^2}{2}}$, ξ étant une variable normale (c'est l'origine de la théorie) - alors φ est un polynôme du second degré - 2) le cas où W prend seulement deux valeurs, dont la valeur 0 - alors φ est une fonction linéaire, et $c^n Y_n$ peut s'interpréter comme la population au temps n dans un processus de naissance et de mort (chaque individu donnant naissance à c rejetons, ayant pour chance de survie $P(W \neq 0)$) -.

Toutes ces notions ont été introduites par B. Mandelbrot dans [2] et [3].

Nous allons établir les résultats suivants.

THEOREME 1 (condition de non dégénérescence). Les assertions suivantes sont équivalentes :

α) $E(Y_\infty) = 1$

β) $E(Y_\infty) > 0$

γ) (3) a une solution Z telle que $E(Z) = 1$

δ) $E(W \log W) < \log c$.

THEOREME 2 (condition d'existence des moments). Soit $h > 1$. Supposons $P(W=1) \neq 1$. On a $E(Y_\infty^h) < \infty$ si et seulement si $E(W^h) < c^{h-1}$.

THEOREME 3 (cas où Y_∞ a des moments de tous les ordres). 1) Les assertions suivantes sont équivalentes : α_1) $0 < E(Y_\infty^h) < \infty$ pour tout $h > 1$

β_1) $\|W\|_\infty = \text{ess.sup}\, W \leq c$ et $P(W = c) < \frac{1}{c}$ (inégalité stricte). 2) Si β_1) a lieu, on a

$$\lim_{h \to \infty} \frac{\log E(Y_\infty^h)}{h \log h} = \log_c \|W\|_\infty . \tag{5}$$

THEOREME 4 (étude de la mesure μ). On suppose $E(Z \log Z) < \infty$. Pour chaque $x \in [0,1[$, on désigne par $I_n(x)$ l'intervalle c-adique d'ordre n contenant x ; la mesure de Lebesgue est $m(I_n(x)) = c^{-n}$. On a p. s.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log \mu(I_n(x))}{\log m(I_n(x))} = D = 1 - E(W \log_c W) \quad \mu\text{-presque partout.} \tag{6}$$

COROLLAIRE. <u>La mesure</u> μ <u>est p. s. portée par un borélien de dimension</u> D, <u>tandis que tout borélien de dimension</u> $< D$ <u>est de</u> μ-<u>mesure nulle</u>.

Avant de donner les démonstrations, voici quelques remarques.

La condition $\delta)$ du théorème 1 s'écrit $D > 0$. Dans [5], on avait seulement établi que

$$D > 0 \Longrightarrow \alpha) \Longrightarrow \beta) \Longrightarrow \gamma) \Longrightarrow D \geq 0.$$

Le rôle de D dans l'étude de la dégénérescence avait été deviné dans [2] (section 10).

Le théorème 2 répond à une conjecture de [2]. Il est établi dans [5]. La démonstration qu'on va donner est plus simple. Remarquons que la condition $E(W^h) < c^{h-1}$ s'écrit aussi $\varphi(h) < 0$. Si φ s'annule en $\alpha_o > 1$, c'est aussi $h < \alpha_o$.

Le théorème 3 constitue un commentaire critique de la proposition 10 de [2]. Il correspond à $\alpha_o = \infty$. La démonstration donnera des variantes de (5).

Le corollaire du théorème 4 répond à une conjecture de [2]. Il améliore [4].

<u>Démonstration du théorème</u> 1.

Visiblement $\alpha) \Longrightarrow \beta) \Longrightarrow \gamma)$. Supposons $\gamma)$, et soit Z une solution de (3) telle que $E(Z) = 1$. Il existe une suite de v. a. indépendantes $W(j_1, j_2, \dots j_n)$ $n = 1, 2, \dots ; j_k = 0, 1, \dots c-1)$, ayant même distribution que W, et une suite de v. a. $Z(j_1, j_2, \dots j_n)$ ayant même distribution que Z et indépendantes des $W(i_1, i_2, \dots i_k)$ lorsque $k \leq n$, telles que pour tout n

$$(7) \qquad Z = c^{-n} \sum_{j_1, \dots j_n} W(j_1)\, W(j_1, j_2) \dots W(j_1, j_2 \dots j_n)\, Z(j_1, j_2 \dots j_n).$$

En effet, (7) se réduit à (3) pour $n = 1$ ($W(j) = W_j$ et $Z(j) = Z_j$), et l'équation (3), appliquée à $Z(j_1, j_2, \dots j_n)$ s'écrit

$$Z(j_1, j_2 \dots j_n) = c^{-1} \sum_{j_{n+1}} W(j_1, j_2, \dots j_{n+1})\, Z(j_1, j_2, \dots j_n, j_{n+1})$$

avec les conditions requises pour les v. a. du second membre. L'espérance conditionnelle de Z par rapport à la tribu engendrée par les $W(j_1, \dots j_k)$ $(k \leq n)$ est Y_n (défini par (1)). Il s'ensuit que la martingale Y_n est uniformément intégrable et que $Z = Y_\infty$ p. s. (voir p. ex. [6] V 8). Donc $\gamma) \Longrightarrow \alpha)$, et de plus $\gamma)$ entraîne $Z \geq 0$ p. s.

Supposons encore $\gamma)$, et en conséquence $Z \geq 0$. Pour $0 < h < 1$ la fonction x^h est sous-additive, donc (3) donne

$$E(c^h Z^h) \leq \sum_{j=0}^{c-1} E((W_j Z_j)^h) = c\ E(W^h)\, E(Z^h) \tag{8}$$

avec $0 < E(Z^h) \leq 1$. La fonction $\varphi(h)$ définie par (4) est donc positive sur $[0,1]$, ce qui entraîne $\varphi'(1-0) \leq 0$, soit $D \geq 0$. Pour aller plus loin, on doit améliorer (8).

LEMME A. $(x+y)^h \leq x^h + hy^h$ pour $x \geq y > 0$, $0 < h < 1$.

Preuve. $y = 1$, et la formule des accroissements finis.

LEMME B. Soit X une v. a. positive sommable, et X' une v. a. équidistribuée avec X et indépendante de X. Il existe un nombre $\varepsilon_X > 0$ tel que

$$E(X^h 1_{X' \geq X}) \geq \varepsilon_X\, E(X^h) \quad \text{pour} \quad 0 \leq h \leq 1.$$

Preuve. Chacune des esparances écrites est une fonction continue de h et strictement positive sur $[0,1]$.

Comme la fonction x^h est sous-additive, on a à partir de (3)

$$c^h Z^h \leq \sum_{j=0}^{c-1} W_j^h Z_j^h \quad \text{p. s.}$$

D'après le lemme A,

$$c^h Z^h \leq h\, W_o^h Z_o^h + \sum_{j=1}^{c-1} W_j^h Z_j^h \quad \text{si} \quad W_1 Z_1 \geq W_o Z_o,$$

donc

$$E(c^h Z^h) = \sum_{j=0}^{c-1} E(W_j^h Z_j^h) - (1-h)\, E(W_o^h Z_o^h\, 1_{W_1 Z_1 \geq W_o Z_o}),$$

d'où, en utilisant le lemme B,

$$(9) \qquad E(c^h Z^h) \leq c\, E(W^h)\, E(Z^h) - (1-h)\, \varepsilon_{WZ}\, E(W^h)\, E(Z^h).$$

(9) est l'amélioration souhaitée de (8). En divisant par $E(Z^h)$ et en prenant les logarithmes, on a

$$\varphi(h) + \log_c\left(1 - \frac{(1-h)\,\varepsilon}{c}\right) \geq 0 \quad \text{sur} \quad [0,1] \qquad (\varepsilon = \varepsilon_{WZ})$$

d'où $\varphi'(1-0) + \frac{\varepsilon}{c \log c} \leq 0$, donc $D > 0$.

On a montré $\alpha) \Leftrightarrow \beta) \Leftrightarrow \gamma) \Rightarrow \delta)$. On va terminer la démonstration en montrant que $\delta)$ entraîne $\beta)$.

LEMME C. $(x+y)^h \geq x^h + y^h - 2(1-h)(xy)^{h/2}$ pour $x > 0$, $y > 0$, $h_o < h < 1$.

Preuve. Posons $f(t) = e^{th} + e^{-th} - (e^t + e^{-t})^h$ et $C_h = \sup_t f(t)$. Il s'agit de montrer que $C_h \leq 2(1-h)$ quand $h < 1$ est assez voisin de 1. On vérifie que $f(t)$ a un minimum local en $t = 0$, tend vers 0 quand $t \to \infty$, et

$$f(t) = 2\, \frac{e^{(1-h)t} - e^{-(1-h)t}}{e^t - e^{-t}}$$

aux points $t \neq 0$ où $f'(t) = 0$. Or la fonction

$$g(\varepsilon) = e^{\varepsilon t} - e^{-\varepsilon t} - \varepsilon(e^t - e^{-t})$$

est nulle pour $\varepsilon = 0$ et sa dérivée est négative pour $\varepsilon < \frac{\sqrt{3}}{3}$ (on le vérifie sur son développement de Taylor) ; donc $g(\varepsilon) \leq 0$ pour $\varepsilon < \frac{\sqrt{3}}{3}$, et il en résulte que

$f(t) \leq 2(1-h)$ aux points t où f admet un maximum local, lorsque $0 < 1-h < \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Le lemme est établi.

En voici un corollaire : on a

$$(\sum_1^c x_j)^h \geq \sum_1^c x_j^h - 2(1-h) \sum_{i<j} (x_i x_j)^{h/2} \tag{10}$$

pour $x_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots c)$ et $h_o < h < 1$. En effet, (10) s'obtient par induction à partir de

$$(\sum_1^c x_j)^h \geq x_1^h + (\sum_2^c x_j)^h - 2(1-h)\, x_1^{h/2} (\sum_2^c x_j)^{h/2} \geq x_1^h + (\sum_2^c x_j)^h - 2(1-h) \sum_{j>1} (x_1 x_j)^{h/2}$$

qui résulte du lemme C et de la sous-additivité de la fonction $x^{h/2}$.

Reprenons la formule (2), que nous écrivons provisoirement

$$Y = c^{-1} \sum_{j=0}^{c-1} W_j X_j \tag{11}$$

(Y, W_j, X_j étant écrits pour Y_n, $W(j)$, $Y_{n-1}(j)$). Supposons $h_o < h < 1$.

Appliquons le lemme C sous la forme (10) avec $x_{j+1} = W_j X_j$. On obtient

$$c^h Y^h \geq \sum_{j=0}^{c-1} W_j^h X_j^h - 2(1-h) \sum_{i<j} W_i^{h/2} W_j^{h/2} X_i^{h/2} X_j^{h/2},$$

d'où, en prenant les espérances,

$$c^h E(Y^h) \geq c\, E(W^h)\, E(X^h) - c(c-1)(1-h)\, E^2(W^{h/2})\, E^2(X^{h/2}).$$

En revenant aux notations initiales,

$$E(Y_n^h) \geq c^{1-h} E(W^h)\, E(Y_{n-1}^h) - c^{1-h}(c-1)(1-h)\, E^2(W^{h/2})\, E^2(Y_{n-1}^{h/2}).$$

Compte tenu de $E(Y_n^h) \leq E(Y_{n-1}^h)$ (inégalité des surmartingales),

$$E(Y_n^h)(1 - c^{1-h} E(W^h)) \geq -c^{1-h}(c-1)(1-h)\, E^2(W^{h/2})\, E^2(Y_{n-1}^{h/2})$$

donc

$$E(Y_n^h)(c^{\varphi(h)} - 1) \leq c^{1-h}(c-1)(1-h)\, E^2(Y_{n-1}^{h/2})$$

et, en faisant tendre h vers 1,

$$D \log c \leq (c-1)\, E^2(Y_{n-1}^{1/2}).$$

Or les v. a. $Y_n^{1/2}$ sont équiintégrables, puisque $E(Y_n) = 1$. Comme elles convergent p. s. vers Y_∞, on a $E(Y_\infty^{1/2}) = \lim_{n\to\infty} E(Y_n^{1/2})$ (cf. p. ex. [6], II.21), donc $E(Y_\infty^{1/2}) \neq 0$. Cela entraîne β), ce qui termine la démonstration du théorème 1.

<u>Démonstration du théorème</u> 2.

Supposons d'abord que (3) ait une solution positive Z telle que $E(Z^h) < \infty$, h donné > 1. Comme la fonction x^h est suradditive, on a

$$c^h Z^h \geq \sum_{j=0}^{c-1} (W_j Z_j)^h$$

et l'inégalité est stricte sur un évènement de probabilité strictement positive, sauf si $W \not\equiv 1$. Donc, à part ce cas,

$$c^h E(Z^h) > c\, E(W^h)\, E(Z^h),$$

soit $E(W^h) < c^{h-1}$.

Inversement, supposons $E(W^h) < c^{h-1}$, c'est-à-dire $\varphi(h) < 0$, et soit k l'entier tel que $k < h \leq k+1$. Comme la fonction $x^{\frac{h}{k+1}}$ est sous-additive, on a, pour $x_j \geq 0$ $(j = 1, 2, \dots c)$,

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_c)^h \leq (x_1^{\frac{h}{k+1}} + \dots + x_c^{\frac{h}{k+1}})^{k+1} = x_1^h + \dots + x_c^h + \Sigma\, \gamma_{\alpha_1, \dots \alpha_c} (x_1^{\alpha_1} \dots x_c^{\alpha_c})^{\frac{h}{k+1}}$$

dans la dernière somme, les exposants de x_j ne dépassent pas k, les coefficients sont positifs, et $\Sigma\, \gamma_{\alpha_1, \dots \alpha_c} = c^{k+1} - c$.

Reprenant la formule (2) sous la forme (11), on obtient ici

$$c^h E(Y^h) \leq c\, E(W^h)\, E(X^h) + (c^{k+1} - c)\, E(W^k)\, E(X^k)$$

donc

$$E(Y_n^h) \leq c^{1-h}\, E(W^h)\, E(Y_{n-1}^h) + c\, E(W^k)\, E(Y_{n-1}^k)$$

et, compte tenu de l'inégalité $E(Y_n^h) \geq E(Y_{n-1}^h)$ (sous-martingale)

$$E(Y_n^h)(1-c^{1-h}\, E(W^h)) \leq c\, E(W^k)\, E(Y_\infty^k).$$

En faisant tendre n vers l'infini, on voit que

$$E(Y_\infty^k) < \infty \Longrightarrow E(Y_\infty^h) < \infty.$$

Cela établit le résultat cherché quand $1 < h \leq 2$. Supposons maintenant $h > 2$. Comme l'hypothèse $\varphi(h) < 0$ entraîne $\varphi(\ell) < 0$ pour tout entier $\leq h$, on a aussi

$$E(Y_\infty^{\ell-1}) < \infty \Longrightarrow E(Y_\infty^{\ell}) < \infty$$

pour $\ell = 2, \dots k$. Les implications écrites montrent que $E(Y_\infty^h) < \infty$. Cela termine la démonstration du théorème 2.

Démonstration du théorème 3.

Partie 1. D'après les théorèmes 1 et 2, $\alpha_1)$ équivaut à $E(W \log W) < \log c$ et $E(W^h) < c^{h-1}$ pour tout $h > 0$, ou $W \equiv 1$. Cela entraîne $\beta_1)$. Inversement, si $\beta_1)$ a lieu, la condition $\delta)$ du théorème 1 est satisfaite, donc $E(Y_\infty^h) > 0$. De plus $E(W^h) \leq c^h$ soit $\varphi(h) \leq 1$ pour tout $h > 0$. Comme $\varphi(1) = 0$ et que φ est convexe, cela entraîne $\varphi(h) < 0$ pour tout $h > 0$, c'est-à-dire $E(W^h) < c^{h-1}$, ou $\varphi \equiv 0$, c'est-à-dire $W \equiv 1$. Donc $E(Y_\infty^h) < \infty$ pour tout $h > 0$. Ainsi $\alpha_1) \Longleftrightarrow \beta_1)$.

Partie 2. $\beta_1)$. Alors (théorème 1) $E(Y_\infty) = 1$; d'autre part il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $\varphi(h) < \log_c(1-\varepsilon)$ pour $h \geq 2$, soit

(12) $$E(W^h) \leq (1-\varepsilon)\, c^{h-1} \qquad (h \geq 2).$$

Considérons la formule (3), avec $Z = Y_\infty$, et soit h un entier ≥ 2. On a

$$c^h Z^h = \Big(\sum_{j=0}^{c-1} W_j Z_j\Big)^h$$

d'où

(13) $$c^h E(Z^h) = c\, E(W^h) E(Z^h) + \sum_{\substack{h_1+\ldots+h_c=h \\ h_j \leq h-1}} \frac{h!}{h_1! \ldots h_c!} \prod_{j=1}^{c} E(W^{h_j}) \prod_{j=1}^{c} E(Z^{h_j}).$$

(13) avec (12) donne

(14) $$\varepsilon\, c^h E(Z^h) \leq \sum_{\text{idem}} \frac{h!}{h_1! \ldots h_c!} \prod E(W^{h_j}) \prod E(Z^{h_j})$$

donc

$$E(Z^h) \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{\text{idem}} \frac{h!}{h_1! \ldots h_c!} \prod E(Z^{h_j}).$$

LEMME D. Pour tout $\alpha > 0$, on a

$$\sum_{\substack{h_1+\ldots+h_c=h \\ h_j \leq h-1}} (h_1! \ldots h_c!)^\alpha = o((h!)^\alpha) \qquad (h \to \infty).$$

Preuve immédiate pour $c = 2$, et de là par récurrence sur c.

Posons ($\alpha > 0$ étant fixé) $A_h = \sup\limits_{\ell<h} \Big(\frac{E(Z^\ell)}{(\ell!)^{1+\alpha}}\Big)^{1/\ell}$; (14) donne

$$A_{h+1}^h \leq \sup\Big(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\Sigma(h_1! \ldots h_c!)^\alpha}{(h!)^\alpha} A_h^h\,,\ A_h^h\Big).$$

D'après le lemme D, la suite A_h est bornée, donc

$$E(Z^h) \leq A^h (h!)^{1+\alpha}, \qquad A = A(\alpha) < \infty.$$

En conséquence

(15) $$\overline{\lim_{h\to\infty}} \frac{\log E(Y_\infty^h)}{h \log h} \leq 1.$$

Supposons maintenant $\|W\|_\infty = \gamma < c$. (14) donne ici

$$E(Z^h) \leq \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\gamma}{c}\right)^h \Sigma \frac{h!}{h_1!\dots h_c!} \prod E(Z^{h_j}).$$

En posant $B_h = \sup\limits_{\ell<h} \left(\frac{E(Z^\ell)}{\ell!}\right)^{1/\ell}$ et en observant que le nombre de termes dans la somme Σ ne dépasse pas h^c, on obtient

$$B_{h+1}^h \leq \sup\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\gamma}{c}\right)^h h^c B_h^h,\ B_h^h\right)$$

donc la suite B_h est bornée. Il en résulte que $E(e^{tZ}) < \infty$ pour $t > 0$ assez petit.

Posons $e^{\chi(t)} = E(e^{tZ})$. La formule (3) s'écrit

$$e^{\chi(ct)} = E^c(e^{\chi(Wt)}). \tag{16}$$

L'hypothèse $\|W\|_\infty = \gamma < c$ entraîne $\chi(ct) \leq c\,\chi(\gamma t)$, donc $\chi((\frac{c}{\gamma})^n) = 0(c^n)$ $(n \to \infty)$.

Posant $(\frac{c}{\gamma})^K = c$, on a

$$\chi(t) = 0(t^K) \qquad (t \to \infty). \tag{17}$$

C'est un exercice de vérifier que (17) équivaut à l'existence d'un réel positif B tel que

$$E(Z^h) \leq B^h (h!)^{1-\frac{1}{K}}.$$

Or $1 - \frac{1}{K} = \log_c \gamma$. Donc on a

$$\overline{\lim_{h\to\infty}} \frac{\log E(Y^h)}{h \log h} \leq \log_c \gamma. \tag{18}$$

Choisissons maintenant $1 < \gamma_1 < \|W\|_\infty$ (le cas $\|W\|_\infty = 1$ est évident). Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $E(W^h) \geq \varepsilon\, \gamma_1^h$. Reprenons la formule (13). Comme

$$\sum_{\substack{h_1+\dots h_c = h \\ h_j \leq h-1}} \frac{h!}{h_1!\dots h_c!} = c^h - c,$$

on a

$$E(Z^h) \geq \frac{c^h - c}{c^h} \inf \prod_{j=1}^{c} E(W^{h_j}) E(Z^{h_j})$$

$$\geq \frac{1}{2} \varepsilon^c \gamma_1^h \operatorname{Inf} \prod_{j=1}^{c} E(Z^{h_j})$$

la borne inférieure étant prise sur tous les c-uples $(h_1, h_2, \dots h_c)$ tels que

$h_1 + h_2 + \dots h_c = h$ et $\sup\limits_j h_j \leq h-1$. Supposons h multiple de c. La borne inférieure est alors $E^c(Z^{h/c})$. Donc

$$\frac{\log E(Z^{ch})}{ch} \geq \frac{\log E(Z^h)}{h} + h \log \gamma_1 + 0(\frac{1}{h})$$

par conséquent

(19) $$\log E(Z^h) \geq \eta \, h \log h + 0(h), \quad \eta = \log_c \gamma_1$$

d'où

(20) $$\varliminf_{h\to\infty} \frac{\log E(Y_\infty^h)}{h \log h} \geq \log_c \gamma_1$$

(15), (18) et (20) donnent bien

$$\lim_{h\to\infty} \frac{\log E(Y_\infty^h)}{h \log h} = \log_c \|W\|_\infty .$$

Cela achève la démonstration du théorème 3.

Remarquons que dans le cas $0 < P(W=c) < \frac{1}{c}$ on a $\gamma = c$ dans (19), et il en résulte que $E(e^{tZ}) = \infty$ pour $t > 0$ assez grand.

Démonstration du théorème 4.

Soit Ω l'espace sur lequel sont définies les variables aléatoires $W(j_1, \dots, j_n)$. Considérons sur l'espace produit $\Omega \times [0,1[$ la probabilité Q définie par

$$Q(A) = E(\int 1_A \, d\mu).$$

Posons $X_n = \sum_{j_1,\dots,j_n} W(j_1,\dots,j_n)\, 1_{I(j_1,\dots,j_n)}$. On a alors

$\mu_n = \prod_{1\leq j\leq n} X_n$ (avec un abus de notation évident).

Ecrivons $\mu = \mu_n\, \nu_n$, ici ν_n est une mesure dont la restriction à chaque intervalle de la $n^{\text{ième}}$ étape est définie de façon analogue à μ.

Observons que les variables $c^n\, \nu_n(I(j_1,\dots,j_n))$ ont la même distribution que Y_∞ et que, pour n fixé, elles sont mutuellement indépendantes. En outre, les variables $\nu_n(I(j_1,\dots,j_n))$ et $W(k_1,\dots,k_p)$ sont indépendantes lorsque l'intervalle $I(k_1,\dots,k_p)$ n'est pas strictement contenu dans l'intervalle $I(j_1,\dots,j_n)$.

Il est commode de considérer la fonction aléatoire

$T_n = \sum_{j_1,\dots,j_n} c^n\, \nu_n(I(j_1,\dots,j_n))\, 1_{I(j_1,\dots,j_n)}$.

Si u est une fonction définie sur $[0,1[$, constante sur les intervalles de la $n^{\text{ième}}$ étape, on a

$$\int u\, d\mu = \int_0^1 u(x)\, \mu_n(x)\, T_n(x)\, dx. \tag{21}$$

Le théorème résulte des deux lemmes qui suivent.

LEMME E. Si $E(W \log_c W) < 1$, alors presque sûrement μ-presque partout $\frac{1}{n}\log \mu_n$ tend vers $E(W \log W)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Démonstration. On va montrer que l'on a

$$\sum_{n\geq 1} Q(\{X_n > e^{n-1}\}) < \infty \tag{22}$$

et que

(23) la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\left[\log \inf(X_n, e^{n-1}) - E(W \log \inf(W, e^{n-1}))\right]$ converge Q- p. s.

On aura alors Q-presque sûrement $X_n \leq e^{n-1}$ à partir d'un certain rang et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \log \inf(X_j , e^{j-1}) = E(W \log W),$$

d'où le lemme.

Commençons par évaluer $Q(\{X_n > e^{n-1}\})$. On a

$$Q(\{X_n > e^{n-1}\}) = E(\int 1_{\{X_n > e^{n-1}\}} d\mu) ,$$

tenant compte de (21) et des propriétés d'indépendance des variables, on obtient

$$Q(\{X_n > e^{n-1}\}) = E\int_0^1 1_{\{X_n(x) > e^{n-1}\}} \mu_n(x) T_n(x) dx$$

$$= \int_0^1 E(X_n(x) 1_{\{X_n(x) > e^{n-1}\}}) E(\mu_{n-1}(x)) E(T_n(x)) dx$$

$$= E(W 1_{\{W > e^{n-1}\}}),$$

d'où

$$\sum_{n\geq 1} Q(\{X_n > e^{n-1}\}) \leq E(W \sum_{n\geq 1} 1_{\{W > e^{n-1}\}})$$

$$\leq E(W(1 + \log^+ W)),$$

ce qui prouve (22).

Posons, pour alléger l'écriture, $X'_n = \log \inf(X_n, e^{n-1})$. Nous allons calculer $E_Q(X'_n | X_1, \ldots, X_{n-1})$. Soit u une fonction borélienne bornée de $\mathbb{R}^{n-1}$ dans $\mathbb{R}$.

On a

$$\int u(X_1, \ldots, X_{n-1}) X'_n \, dQ = E\int_0^1 u(X_1(x), \ldots, X_{n-1}(x)) X'_n(x) \mu_n(x) T_n(x) dx$$

$$= \int_0^1 E\left[u(X_1(x), \ldots, X_{n-1}(x)) \mu_{n-1}(x)\right] E\left[X'_n(x) X_n(x)\right] dx$$

$$= E\left[W \log \inf(W, e^{n-1})\right] \int_0^1 E\left[u(X_1(x), \ldots \right.$$

$$\left. \ldots X_{n-1}(x)) \mu_{n-1}(x) T_{n-1}(x)\right] dx$$

Ceci prouve que l'on a $E_Q(X'_n | X_1, \ldots, X_{n-1}) = E\left[W \log \inf(W, e^{n-1})\right]$.

On a aussi

$$\int (X'_n)^2 \, dQ = E \int_0^1 (X'_n(x))^2 \mu_n(x) \, T_n(x) \, dx = E\left[W(\log \inf(W, e^{n-1}))^2\right],$$

donc

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2} \int (X'_n)^2 \, dQ = E\left[W \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2}(\log \inf(W, e^{n-1}))^2\right]$$

$$\leq E\left[W(\mathrm{Log}\, W)^2 \sum_{n\geq \sup(2,\, 1+\log W)} n^{-2} + W \sum_{2\leq n<1+\log W} \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right]$$

$$\leq E\left[W\left(\log^+ W + \frac{(\log W)^2}{\sup(1, \log W)}\right)\right].$$

Le théorème de convergence des martingales de carrés sommables donne alors (23).

LEMME F. Supposons que $E(W \log_C W) < 1$ et que $E(Y_\infty \log Y_\infty) < \infty$. Alors presque sûrement μ-presque partout $\frac{1}{n} \log \nu_n(I_n(x))$ tend vers $-\log C$.

Démonstration. On a

$$\int T_n^{-1/2} \, dQ = E \int_0^1 \mu_n(x)(T_n(x))^{1/2} \, dx = E(Y_\infty^{1/2}),$$

d'où

$$\int \left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} T_n^{-1/2} \right) dQ < \infty.$$

Par suite, Q-presque sûrement, à partir d'un certain rang on a $T_n^{-1/2} \leq n^2$, d'où $\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log T_n \geq 0$. Jusqu'à présent nous n'avons pas utilisé la seconde hypothèse.

Montrons maintenant que, Q-presque sûrement, on a $\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mathrm{Log}\, T_n \leq 0$. Soit un nombre $\alpha > 1$. On a

$$E \int 1_{\{T_n > \alpha^n\}} d\mu = E(Y_\infty 1_{\{Y_\infty > \alpha^n\}})$$

(on utilise (21)).

Par suite

$$\sum_{n\geq 1} Q(\{T_n > \alpha^n\}) = E(Y_\infty \sum_{n\geq 1} 1_{\{Y_\infty > \alpha^n\}})$$

$$\leq E(Y_\infty \log^+_\alpha Y_\infty).$$

Ceci prouve que, pour tout $\alpha > 1$, Q-presque sûrement on a $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \log T_n \leq \log \alpha$, d'où le résultat annoncé. Puisque l'on a $\nu_n(I_n(x)) = c^{-n} T_n(x)$ le lemme est démontré.

Pour démontrer le corollaire, on utilise un théorème de Billingsley ([7], p. 136-145).

Remarque. Sous la seule hypothèse, $E(W \log_c W) < 1$, on obtient que presque sûrement tout borélien de dimension $< D$ est de μ-mesure nulle.

[1] MANDELBROT, B. Intermittent turbulence in self similar cascades : Divergence of high moments and dimension of the carrier. J. Fluid Mech. 62 (1974), 331-358.

[2] MANDELBROT, B. Multiplications aléatoires itérées et distributions invariantes par moyenne pondérée aléatoire. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 278 (1974), 289-292.

[3] MANDELBROT, B. Multiplications aléatoires itérées et distributions invariantes par moyenne pondérée aléatoire : quelques extensions. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 278 (1974), 355-358.

[4] PEYRIERE, J. Turbulence et dimension de Hausdorff. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 278 (1974), 567-569.

[5] KAHANE, J.-P. Sur le modèle de turbulence de Benoit Mandelbrot. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 278 (1974), 621-623.

[6] MEYER, P. A. Probabilités et potentiel, Hermann 1966.

[7] BILLINGSLEY, P. Ergodic theory and information, Wiley 1965.