PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

N° 81.07

Résolution des équations de Navier Stokes dans le cas stationnaire

P. GUILLAUME

F. CREPEL - D. SELIGMANN

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 ORSAY France

Code matière : Equations aux dérivées partielles 35
Analyse Numérique 65
Equations de Navier-Stokes 35.Q10
(Equations et Problèmes spéciaux)
Eléments finis 65.N30

Mots clés : Eléments finis
Equations de Navier-Stokes

PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

N° 81.07

Résolution des équations de Navier Stokes dans le cas stationnaire

P. GUILLAUME

F. CREPEL - D. SELIGMANN

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 ORSAY France

Table des matières

Cet ouvrage constitue la poursuite du travail de Monsieur Guillaume décédé accidentellement pendant la préparation de sa thèse.

0. Introduction :

Nous nous proposons d'étudier le mouvement d'un fluide contenu dans une cavité carrée. C'est le problème : "WALL-DRIVEN SQUARE".

Nous nous donnons :

- la géométrie de la cavité, sous forme d'un maillage représentant la section plane
- les constantes physiques du fluide
  - masse volumique
  - viscosité

  ou le Reynolds du fluide
- la vitesse initiale du fluide
- les conditions aux limites(aux bords de la cavité)
- les forces volumiques, éventuellement fonctions du temps.

I - Hypothèses de travail et mise en équation :

L'objet de cette étude est le traitement numérique des équations de Navier-Stokes dans le cas stationnaire, par une méthode de pénalisation.

Nous avons employé des éléments finis mixtes, et seul le cas de la dimension 2 en espace a été envisagé.

Le modèle proposé est établi pour une température donnée uniforme et constante dans le temps.

Equations du mouvement :

On donne ici les équations d'un fluide incompressible visqueux à température constante et uniforme.

L'état du fluide est caractérisé par :

- le champ des vitesses $\vec{u}$
- le champ des pressions hydrostatiques p

a/ Equations de conservation :

MASSE :

L'équation de continuité dans le cas incompressible est :

(1) $u_{i,i} = 0$ dans Ω [ceci en adoptant la convention d'Einstein]

QUANTITE DE MOUVEMENT :

(2) $\sigma_{ij,j} + \rho f_i = \rho \dot{u}_i$ dans Ω

ceci pour $i = 1,2$ et $j = 1,2$

$\underset{\sim}{\sigma}$ étant le tenseur des contraintes du fluide, de composantes σ_{ij} et ρ la masse volumique du fluide

$\dot{u}_i$ désignant la dérivée particulaire de u_i, et f le champ des forces extérieures.

b/ Loi de comportement :

(3) $\underset{\sim}{\sigma} = - p \underset{\sim}{id} + \mu_o(\underset{\sim}{grad}\ u + \underset{\sim}{grad}\ u^T)$ dans Ω

μ_o étant le coefficient de viscosité.

Cette équation s'écrit pour chaque élément du tenseur :

$$\sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij} + \mu_o(u_{i,j} + u_{j,i})$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Nous faisons l'hypothèse de fluide visqueux, ce qui nous fait choisir comme conditions aux bords (aux limites) les valeurs de u_N et u_T sur la frontière Γ de Ω.

En combinant les relations (1), (2) et (3) nous obtenons la forme traditionnelle des équations de Navier-Stokes (pour plus de détails on pourra se référer au livre de P. GERMAIN cf [3]).

$$(S_1)\quad \begin{cases} \rho_o \dfrac{\partial u_i}{\partial t} - \mu_o\, u_{i,jj} + p_{,i} + \rho_o\, u_j \cdot u_{i,j} = \rho_o\, f_i \\ \qquad\qquad i = 1,2 \quad \text{dans } \Omega \\ u_{i,i} = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ u_N = u_N^d \\ u_T = u_T^d \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma$$

où u^d est une vitesse donnée

$\rho_o = \rho(0, x_1, x_2)$ est une constante

Remarquons que la condition (1) qui est primordiale n'est pas toujours satisfaite dans les approximations utilisées.

Le système (S_1) peut être mis sous forme adimensionnelle en posant :

$$u = V_c\, \bar{u} \quad ; \quad x_i = L_c\, \bar{x_i} \quad ; \quad p = p_c\, \bar{p}$$

ce qui nous donne :

$$\rho_o V_c \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} - \mu_o \frac{V_c}{L_c^2} \bar{u}_{i,\bar{j}\bar{j}} + \frac{p_c}{L_c} \bar{p}_{,\bar{i}} + \rho_o \frac{V_c^2}{L_c} \bar{u}_{\bar{j}} \cdot \bar{u}_{i,\bar{j}} = \rho_o f_i$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\mu_o}{\rho_o L_c^2} \bar{u}_{i,\bar{j}\bar{j}} + \frac{p_c}{\rho_o V_c L_c} \bar{p}_{,\bar{i}} + \frac{V_c}{L_c} \bar{u}_{\bar{j}} \cdot \bar{u}_{i,\bar{j}} = \frac{1}{V_c} f_i$$

$$\Leftrightarrow \frac{L_c}{V_c} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} - \frac{\mu_o}{\rho_o L_c V_c} \bar{u}_{i,\bar{j}\bar{j}} + \frac{p_c}{\rho_o V_c^2} \bar{p}_{,\bar{i}} + \bar{u}_{\bar{j}} \cdot \bar{u}_{i,\bar{j}} = \frac{L_c}{V_c^2} f_i$$

Nous choisissons un temps caractéristique T_c tel que $\frac{L_c}{T_c V_c} = 1$

et une pression caractéristique p_c telle que $\frac{p_c}{\rho_o V_c^2} = 1$

Nous obtenons alors :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} - \frac{\mu_o}{\rho_o L_c V_c} \bar{u}_{i,\bar{j}\bar{j}} + \bar{p}_{,i} + \bar{u}_{\bar{j}} \cdot \bar{u}_{i,\bar{j}} = \frac{L_c}{V_c^2} f_i = \overline{f_i}$$

Le nombre de Reynolds $\mathcal{R}$ du fluide étant égal à $\frac{\rho_o L_c V_c}{\mu_o}$ nous obtenons finalement le système adimensionnel suivant :

$$(S\tfrac{1}{1}) \begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t} - \dfrac{1}{\mathcal{R}} u_{i,jj} + p_{,i} + u_j \cdot u_{i,j} = f_i & \text{dans } \Omega \\ u_{i,i} = 0 & \text{dans } \Omega \\ u_N = u_N^d \\ u_T = u_T^d \end{cases} \text{ sur } \Gamma$$

II - Formulation variationnelle mixte du problème :

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ et soit Γ sa frontière, nous désirons calculer une solution approchée du problème sans dimension.

Trouver u et p tels que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u_o \nabla u - \dfrac{1}{\mathcal{R}} \nabla^2 u + \nabla p = f \quad \text{dans } \Omega \\ \text{div } u = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ u = \alpha \quad \text{avec } \alpha = \alpha(x,y,t) \quad \text{sur } \Gamma \\ u\big|_{t=0} = u_o \quad \text{avec } u_o = u_o(x,y,0) \quad \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

où $\mathcal{R}_0$ est le Reynolds du fluide.

Nous ne ferons l'étude que dans le cas stationnaire et avec des conditions limites homogènes, si celles-ci ne le sont pas onpourra se ramener au cas étudié par translation.

Avant d'introduire la formulation variationnelle mixte des équations de Navier-Stokes nous définissons :

- la forme bilinéaire sur $H^1(\Omega)^4$:

$$a(u,v) = \int_\Omega u_{j,i}\, v_{j,i}\, dx$$

- les formes trilinéaires sur $H^1(\Omega)^6$:

$$\begin{cases} b(u,v,w) = \int_\Omega u_i\, v_{j,i}\, w_j\, dx \\ \tilde{b}(u,v,w) = \dfrac{1}{2}\left[b(u,v,w) - b(u,w,v)\right] \end{cases}$$

La forme trilinéaire $u,v,w \to \tilde{b}(u,v,w)$ est continue sur $H_o^1(\Omega)^6$.

En effet :

D'après les théorèmes d'inclusion sur les Sobolev, nous avons $(H_o^1(\Omega))^N \subset (L^4(\Omega))^N$ pour $N \leqslant 3$

donc $u,w \in (H_o^1(\Omega))^2 \Rightarrow u,w \in (L^4(\Omega))^2$

et $v \in (H_o^1(\Omega))^2 \Rightarrow D_i\, v_j \in L^2(\Omega) \quad \forall\, i,j$ (où $D_i\, v_j = v_{j,i}$).

$$\Rightarrow \left| \int_\Omega u_i \, v_{j,i} \, w_j \, dx \right| \leqslant \| u_i \|_{L^4(\Omega)} \, \| D_i \, v_j \|_{L^2(\Omega)} \, \| w_j \|_{L^4(\Omega)} < +\infty$$

et donc la forme trilinéaire $u,v,w \longrightarrow \tilde{b}(u,v,w)$ est continue sur $H_o^1(\Omega)^6$.

Remarque :

- $\tilde{b}(u,v,w) = b(u,v,w) \quad \forall\, v,w \in (H_o^1(\Omega))^2$ et $\forall\, u \in \left\{ v \ (H_o^1(\Omega))^2 / \text{div } v = 0 \right\}$
- $\tilde{b}(u,v,w) = 0 \quad \forall\, u,v \in (H_o^1(\Omega))^2$

Notation :

$$V = \left\{ v \in (H_o^1(\Omega))^2 / \ \text{div } v = 0 \right\}$$

Nous définissons alors la formulation variationnelle mixte des équations de Navier-Stokes, qui est :

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Etant donné } f \in V', \text{ trouver } (u,p) \in (H_o^1(\Omega))^2 \times L^2(\Omega)/\mathbb{R} \text{ tels que} \\ \tilde{b}(u,u,v) - (p, \text{ div } v) + \dfrac{1}{\mathcal{R}} \, a(u,v) = (f,v) \\ (\text{div } u, q) = 0 \\ \qquad\qquad \text{ceci } \forall\, (v,q) \in (H_o^1(\Omega))^2 \times L^2(\Omega)/\mathbb{R} \end{array} \right.$$

Définissons $$N = \operatorname{Sup}_{u,v,w \in (H_o^1(\Omega))^2} \frac{|\tilde{b}(u,v,w)|}{\| u \|_{(H_o^1(\Omega))^2} \, \| v \|_{(H_o^1(\Omega))^2} \, \| w \|_{(H_o^1(\Omega))^2}}$$

et introduisons l'hypothèse suivante :

(H.1) f est telle que $N \mathcal{R}^2 \| f \| \leqslant 1 - \delta \qquad \delta > 0$

Nous avons alors le théorème suivant (cf LIONS [4])

Pour tout f donné dans V', vérifiant l'hypothèse (H.1) le problème (P) admet une solution unique (u,p).

Remarque : L'unicité n'est possible que dans un espace Ω de dimension $n \leqslant 3$. Elle est montrée grâce à la continuité de $\tilde{b}$ et à (H.1).

III - Problème perturbé:

Pour obtenir une solution approchée du problème sans dimension nous allons introduire une famille d'équations avec une petite perturbation.

Nous remplacerons la condition div u = 0 par le terme de pénalisation $\frac{1}{\varepsilon} \nabla(\text{div } u_\varepsilon)$. Le problème perturbé est alors :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_\varepsilon \text{ tel que :} \\ \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon - \frac{1}{\mathcal{R}} \nabla^2 u_\varepsilon + \frac{1}{2}(\text{div } u_\varepsilon) \cdot u_\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} \nabla(\text{div } u_\varepsilon) = f \\ \\ u_\varepsilon = \alpha \qquad \text{sur } \Gamma \\ \\ u\big|_{t=0} = u_0 \qquad \text{dans } \Omega \end{cases}$$

Remarquons que le terme $\frac{1}{2}(\text{div } u_\varepsilon) \cdot u_\varepsilon$ est nécessaire pour obtenir un système de Cauchy - Kowaleska, la démonstration est due à R. TEMAM (cf [5]).

En utilisant les mêmes notations que celles du chapitre précédent nous obtenons la formulation variationnelle mixte du problème perturbé:

$$(P_\varepsilon) \quad \begin{cases} \text{Etant donné } f \in V' \text{ , trouver } (u^\varepsilon, p^\varepsilon) \in (H_0^1(\Omega))^2 \times L^2(\Omega) \text{ tels que} \\ \\ \tilde{b}(u^\varepsilon, u^\varepsilon, v) - (p^\varepsilon, \text{div } v) + \frac{1}{\mathcal{R}} a(u^\varepsilon, v) = (f, v) \\ \\ + \varepsilon (p^\varepsilon, q) + (\text{div } u^\varepsilon, q) = 0 \\ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{ceci } \forall (v, q) \in (H_0^1(\Omega))^2 \times L^2(\Omega) \end{cases}$$

Et nous avons le théorème suivant :

> Sous l'hypothèse (H.1) et pour f donné dans V', le problème (P_ε) admet une solution unique $(u_\varepsilon , p_\varepsilon)$.
> Nous avons de plus :
>
> $$\| u - u_\varepsilon \|_V + \| p - p_\varepsilon \|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\varepsilon$$
>
> où (u, p) est la solution du problème **(P)**.

En utilisant la seconde équation du problème (P_ε) on peut éliminer le terme p^ε et nous obtenons :

(P'_ε)

> Etant donné $f \in V'$, trouver $u^\varepsilon \in (H_o^1(\Omega))^2$ tel que
>
> $$\tilde{b}(u^\varepsilon, u^\varepsilon, v) + \frac{1}{\varepsilon} (\operatorname{div} u_\varepsilon, \operatorname{div} v) + \frac{1}{\mathcal{R}} a(u_\varepsilon, v) = (f, v)$$
>
> ceci $\forall\, v \in (H_o^1(\Omega))^2$

La pression p^ε pouvant être calculée à l'aide de l'équation :

$$p^\varepsilon = - \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div} u^\varepsilon$$

IV - Méthode des éléments finis :

1/ Formulation variationnelle mixte

Soit $\mathcal{V} = (H_o^1(\Omega))^2$ et soit $\mathcal{W} = L^2(\Omega)$. La méthode des éléments finis consiste à rechercher la solution $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ du problème (P_ε) dans $\mathcal{V}_h \times \mathcal{W}_h$ où $\mathcal{V}_h$ est un sous espace de dimension finie de $\mathcal{V}$

$\mathcal{W}_h$ est un sous espace de dimension finie de $\mathcal{W}$

Nous définirons sur $\mathcal{V} \times \mathcal{W}_h$ l'opérateur bilinéaire $(\mathrm{div}_h \cdot, \cdot)$ tel que : $(\mathrm{div}_h\, u, p_h) = (\mathrm{div}\, u, p_h) \quad \forall\, u \in \mathcal{V}$ et $p_h \in \mathcal{W}_h$

Soit $f_h = \mathrm{Proj}_{\mathcal{V}_h} f$ nous devons alors résoudre le problème :

(P_{H_ε}) Etant donné f_h, trouver $(u_h^\varepsilon, p_h^\varepsilon) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{W}_h$ tels que

$$\tilde{b}(u_h^\varepsilon, u_h^\varepsilon, v_h) - (p_h^\varepsilon, \mathrm{div}_h\, v_h) + \frac{1}{\mathcal{R}} a(u_h^\varepsilon, v_h) = (f_h, v_h)$$

$$+ \varepsilon (p_h^\varepsilon, q_h) + (\mathrm{div}_h\, u_h^\varepsilon, q_h) = 0$$

$$\forall\, (v_h, q_h) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{W}_h$$

Le problème (P_H) correspondant à (P_{H_ε}) :

(P_H) Etant donné f_h, trouver $(u_h, p_h) \in \mathcal{V}_h \times \tilde{\mathcal{W}}_h$ tels que

$$\tilde{b}(u_h, u_h, v_h) - (p_h, \mathrm{div}_h\, v_h) + \frac{1}{\mathcal{R}} a(u_h, v_h) = (f_h, v_h)$$

$$(\mathrm{div}_h\, u_h, q_h) = 0$$

$$\forall\, (v_h, q_h) \in \mathcal{V}_h \times \tilde{\mathcal{W}}_h \quad \text{avec } \tilde{\mathcal{W}}_h \subset \mathcal{W}/R$$

Définissons $N_h = \mathrm{Sup} \dfrac{|\tilde{b}(u_h, v_h, w_h)|}{\|u_h\|_{\mathcal{V}_h} \|v_h\|_{\mathcal{V}_h} \|w_h\|_{\mathcal{V}_h}} \quad u_h, v_h, w_h \in \mathcal{V}_h$

Faisons les hypothèses suivantes :

i)

(H.1') $N_h \mathcal{R}^2 \|f_h\|_{V_h} \leqslant 1 - \delta \qquad \delta > 0$

ii) l'hypothèse fondamentale (cf BREZZI [8])

(H.2) $\exists_{k>0} / \sup_{u_h \in \mathcal{V}_h} \dfrac{(\mathrm{div}_h\, u_h,\ p_h)}{\|u_h\|_{V_h}} \geqslant k \|p_h\|_{W_h} \qquad \forall\, p_h \in \mathcal{W}/\mathcal{R}$

Nous obtenons alors le théorème :

<u>Théorème</u> : Sous les hypothèses (H.1), (H.1'), (H.2), si $(u_h^\varepsilon,\ p_h^\varepsilon)$ est l'unique solution du problème (P_{H_ε}), si $(u,\ p)$ est l'unique solution du problème (P et si $(u_h,\ p_h)$ est l'unique solution du problème (P_H) alors :

$$\|u - u_h^\varepsilon\|_{V_h} + \|p - p_h^\varepsilon\|_{W_h} \leqslant C_1 \varepsilon + \|u - u_h\|_{V_h} + \|p - p_h\|_{W_h}$$

(pour la démonstration de ce théorème, cf M. BERCOVIER, Thèse de Doctorat d'Etat, Rouen, [1]).

En éliminant finalement la pression dans (P_{H_ε}) nous obtenons le problème :

(P_{H_ε}') Etant donné f_h, trouver $u_h^\varepsilon \in \mathcal{V}_h$ tel que

$$\tilde{b}(u_h^\varepsilon,\ u_h^\varepsilon,\ v_h) + \frac{1}{\mathcal{R}}\, a(u_h^\varepsilon,\ v_h) + \frac{1}{\varepsilon}(\mathrm{div}_h\, u_h^\varepsilon,\ \mathrm{div}_h\, v_h) = (f_h,\ v_h)$$

ceci $\forall\, v_h \in \mathcal{V}_h$

2/ <u>Méthode de résolution</u> :

Le problème (P_{H_ε}') est non linéaire. Pour le résoudre nous utilisserons l'algorithme suivant ; en faisant la convention d'omettre les indices h et ε pour simplifier l'écriture :

Soit u° la valeur initiale ($u^\circ \equiv 0$), soit u^n la solution à la $n^{ième}$ itération, on calcule u^{n+1} solution de :

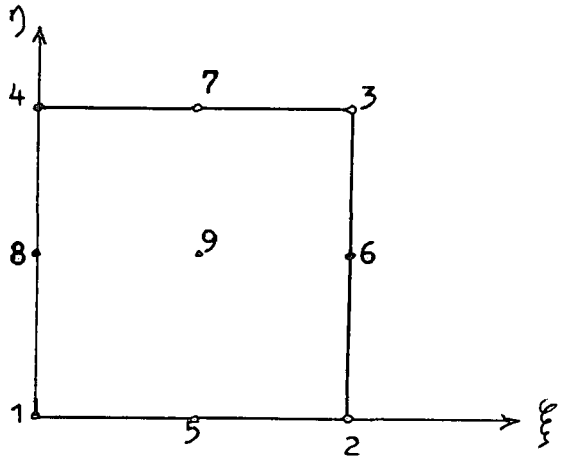
$$\frac{1}{\mathcal{R}} a(u^{n+1}, v_h) + \tilde{b}(u^n, u^{n+1}, v_h) + \frac{1}{\varepsilon} (div_h\ u^{n+1}, div_h\ v_h) = (f_h, v_h)$$

Le test d'arrêt de la méthode itérative portera sur $|u^{n+1} - u^n|$

3/ <u>Approximation par éléments finis</u> :

Nous considèrerons dans ce qui suit une approximation par des éléments finis de type Q_2.

Sur l'élément de référence, les fonctions de bases sont :



$$\begin{cases}
\varphi_1(\xi,\eta) = (\xi - \frac{1}{2})(\xi - 1)(\eta - \frac{1}{2})(\eta - 1)4 \\
\varphi_2(\xi,\eta) = (\xi - \frac{1}{2})\,\xi\,(\eta - \frac{1}{2})(\eta - 1)4 \\
\varphi_3(\xi,\eta) = (\xi - \frac{1}{2})\,\xi\,(\eta - \frac{1}{2})\,\eta\ 4 \\
\varphi_4(\xi,\eta) = (\xi - \frac{1}{2})(\xi - 1)(\eta - \frac{1}{2})\,\eta\ 4 \\
\varphi_5(\xi,\eta) = -\xi(\xi - 1)(\eta - \frac{1}{2})(\eta - 1)8 \\
\varphi_6(\xi,\eta) = -\xi(\xi - \frac{1}{2})\,\eta\,(\eta - 1)8 \\
\varphi_7(\xi,\eta) = -\xi(\xi - 1)(\eta - \frac{1}{2})\,\eta\ 8 \\
\varphi_8(\xi,\eta) = -(\xi - \frac{1}{2})(\xi - 1)\,\eta\,(\eta - 1)8 \\
\varphi_9(\xi,\eta) = (\xi - 1)\,\xi\,(\eta - 1)\,\eta\,16
\end{cases}$$

Tout $u_h \in \mathcal{V}_h$ s'écrira alors sous forme de combinaison linéaire des fonctions de base φ_i $i = 1, \ldots, 9$

Les matrices A et B(u) associées à $a(u^{n+1}, v_h)$ et $\tilde{b}(u^n, u^{n+1}, v_h)$ seront calculées à l'aide d'une intégration numérique portant sur les 3 x 3 points de Gauss.

Par contre la matrice associée au terme $(div_h\ u_h^{n+1}, div_h\ v_h)$ sera calculée à l'aide d'une intégration numérique portant sur les 2 x 2 points de Gauss, (cf 2 , M.S ENGELMAN).

I - Structure des principaux programmes :

D'une manière générale, les programmes débutent par une définition des plus complètes (du moins nous le souhaitons) des paramètres et quantités nécessaires aux calculs.

Une vérification des dimensions allouées est également faite d'une manière systématique dès qu'il y a création d'un tableau s'inscrivant dans notre zone de travail.

1/ Structure du programme principal :

- Initialisation par défaut des divers namelist, des unités de lecture et d'impression ainsi que du commun contenant les largeurs des différents tableaux.
- lecture du namelist "EXEC" définissant les principaux paramètres du travail du programme.
- appel des sous programmes O7QAD 1 et O7INQD en vue du remplissage des tableaux nécessaires à la partie géométrique de la méthode d'éléments finis.
- appel de O7PREP en vue du remplissage des tableaux donnant les fonctions de bases.
- appel de O7XSOL en vue d'initialiser le secteur "solution" en tenant compte des conditions limites.
- lecture du namelist "STRAT" définissant la stratégie employée dans la frontale.
- lecture du namelist "DISK" donnant les numéros des fichiers utilisés dans la frontale.
- appel de OOFRT1 définissant les tableaux nécessaires à la frontale.
- boucle pour la résolution itérative des différentes équations.

    - initialisation du 2^{nd} membre.
    - appel de OOFRT2 effectuant la "descente" de la méthode frontale, ce sous programme appelle O7MTLM.
    - Test éventuel de vérification de l'assemblage, entraîne la fin du programme (ie : renvoie au namelist EXEC).

- appel de OOFRT3 : remontée de la frontale.
- calcul des erreurs.
- appel de O8ERR qui dresse un tableau de l'erreur entre deux itérations.
- calcul de la composante horizontale de la vitesse le long de la médiane.
- calcul de la norme L^2 de la divergence grâce aux sous programme O7DIV.

Tests d'arrêt :

- nombre maximum d'itérations (donné dans le namelist EXEC).
- différences entre deux itérations,
- différences relatives entre deux itérations,
  (le choix se faisant à l'aide du namelist EXEC).

- Impression éventuelle du vecteur solution XSOL.
- Tracé éventuel des champs des vitesses et de la composante horizontale de la vitesse le long de la médiane.

2/ Structure de O7INQ D : "Remplissage du tableau inquad décrivant la méthode d'éléments finis".

- remplissage intermédiaire de 'inquad', numérotation des noeuds de la façon suivante :

4 7 3

8 9 6

1 5 2

- impression du nombre de noeuds
  de noeud de base
  de fonctions de base.

- remplissage définitif de 'inquad' :
  les noeuds libres sont au début ;
  les noeuds du bord sont à la fin.

3/ Structure de O7PREP : "Définition de la méthode d'intégration numérique sur le quadrangle de référence".

- lecture du nombre de points d'intégrations numériques.
- lecture des coordonnées, et du poids de chacun des points de Gauss.
- calcul des fonctions de bases du Q^2 et de leurs gradients:
  - avec 3 x 3 points de Gauss
  - avec 2 x 2 points de Gauss.

4/ Structure de O7XSOL : "Initialisation du tableau XSOL"

- On appelle les fonctions FU1 et FU2 qui donnent les composantes horizontale et verticale de la vitesse sur un bord, en un point.

5/Structure de O7MTLM : "Création de la matrice élémentaire de l'élément inq", méthode de Bercovier.

- Détermination des noeuds du quadrangle, ainsi que de leurs composantes.
- Calcul des quantités nécessaires au changement de base.
- Initialisation des divers tableaux.
- Boucle sur les éléments d'intégration numérique d'ordre supérieur
  - Détermination des coefficients du point de Gauss.
  - calcul du Jacobien au point de Gauss.
  - calcul des coordonnées des points de Gauss dans l'élément inq.
  - calcul de la dérivée du changement de variable : (elt qcque → elt de référence).
  - calcul de la dérivée du changement de variable inverse.
  - calcul des fonctions de base et de leurs dérivées dans le système réel aux points d'intégration numérique.
  - vecteur vitesse calculé à l'itération précédente en vue du remplissage du terme non linéaire.

- remplissage des tableaux élémentaires
  - i/ correspondant à la forme bilinéaire 'a'
  - ii/ correspondant au terme non linéaire '$\tilde{b}$'
  - iii/ correspondant au second membre, avec calcul des fonctions F1 et F2.

- fin de la boucle sur les éléments d'intégration numérique d'ordre supérieur.
- boucle sur les éléments d'intégration numérique d'ordre inférieur: pour le remplissage du terme en divergence.

  "l'approche est la même que précédemment".

- fin de la boucle sur les éléments d'intégration numérique d'ordre inférieur.
- remplissage de la matrice élémentaire.
- modification du second membre, dûe aux conditions aux bords.
- impressions éventuelles.

Méthode frontale :

L'approche utilisée nous a été suggérée par A. LICHNEWSKY [9].
On pourra trouver d'autres approches (cf [10]→[12]).

Structure de OOFRT1 : "Création des tableaux nécessaires à la méthode frontale".

- détermination du front de sortie d'un noeud.
- boucle sur les éléments d'un front
  - remplissage des tableaux
  - écriture sur fichier du descripteur et du nombre de degrés de liberté figés, restants, sortants.
- écriture de la taille nécessaire à la matrice : ie longueur maximale du front.

Structure de OOFRT2 : "Assemblage de la matrice et du second membre ainsi que 'descente de la méthode frontale".

- lecture de la taille de la matrice.
- boucle sur les éléments d'un front
  - appel du sous programme O7MTLM, qui calcule la matrice élémentaire et le second membre élémentaire en tenant compte des conditions limites.
  - remplissage de la matrice et du second membre.
  - lecture du descripteur.
  - méthode de Gauss sur la matrice et le second membre correspondant aux sortants.
  - écriture sur fichier de la matrice.
  - initialisation des lignes et colonnes de la matrice correspondant aux sortants.

Structure de OOFRT3 : "Remontée de la frontale"

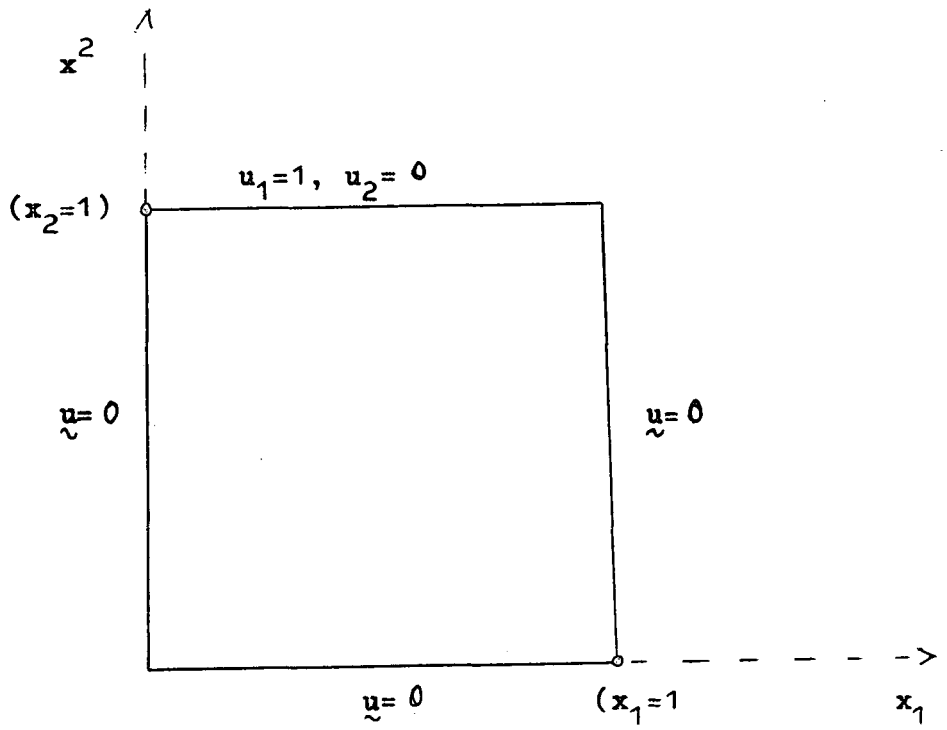
- lecture de la taille de la matrice.
- boucle sur les éléments du front
  - lecture du descripteur
  - lecture de la matrice
  - remontée de la méthode de Gauss sur la matrice des noeuds sortants.

III - Résultats numériques et commentaires :
Présentation du cas traité : la cavité carrée

Le problème classique de la cavité carrée a été choisi pour traiter les équations de Navier-Stokes, pour sa relative simplicité.

De nombreux travaux lui sont consacrés, (cf, par exemple ENGELMAN [2], BENAZETH [6], THOMASSET[7]).

- La cavité est un carré de côté unité
- les conditions aux limites sont :



- Nous utiliserons une "triangulation" en N^2 carrés égaux.

Evolution de la taille du problème en fonction du maillage :

Le maillage est toujours le plus simple et le plus régulier qui soit, le nombre des subdivisions est le même quel que soit l'axe,

nombre de subdivisions sur un axe	4	8	12	16
nombre de quadrangles	16	64	144	256
nombre de noeuds	81	289	625	1089
nombre de degrés de liberté	162	578	1250	2178
nombre de noeuds de base	49	225	529	961
nombre de fonctions de base(x)	98	450	1058	1922

(x) en chacun des noeuds de base nous définissons deux fonctions de base :

- i) l'une correspondant à une intégration numérique en 3 x 3 points de GAUSS.
- ii) l'autre à l'intégration numérique en 2 x 2 points de GAUSS.

Evolution de la taille de la matrice issue de la méthode frontale en fonction du maillage et de la stratégie choisie :

nombre de subdivisions sur un axe	4	8	12	16
stratégie quadrangle par quadrangle				
nombre d'étapes	16	64	144	256
dimension de la matrice (nombre d'éléments)	30 x 30 (900)	46 x 46 (2116)	62 x 62 (3844)	78 x 78 (6084)
stratégie : 1/2 ligne par 1/2 ligne				
nombre d'étapes	8	16	24	32
dimension de la matrice (nombre d'éléments)	38 x 38 (1444)	70 x 70 (4900)	102x102 (10404)	134x134 (17956)
stratégie : ligne par ligne				
nombre d'étapes	4	8	12	16
dimension de la matrice (nombre d'éléments)	54 x 54 (2916)	102x102 (10404)	150x150 (22500)	198x198 (39204)
taille de la matrice "pleine" (nombre d'éléments)	162x162 (26244)	578x578 (334084)	1250x1250 (1562500)	2178x2178 (4743684)

Interprétation des différents tracés :

Deux maillages différents ont été traité :

i/ 16 carrés : ce maillage primaire ne donne pas des résultats très satisfaisants comme le montrent les différents tracés qui suivent.

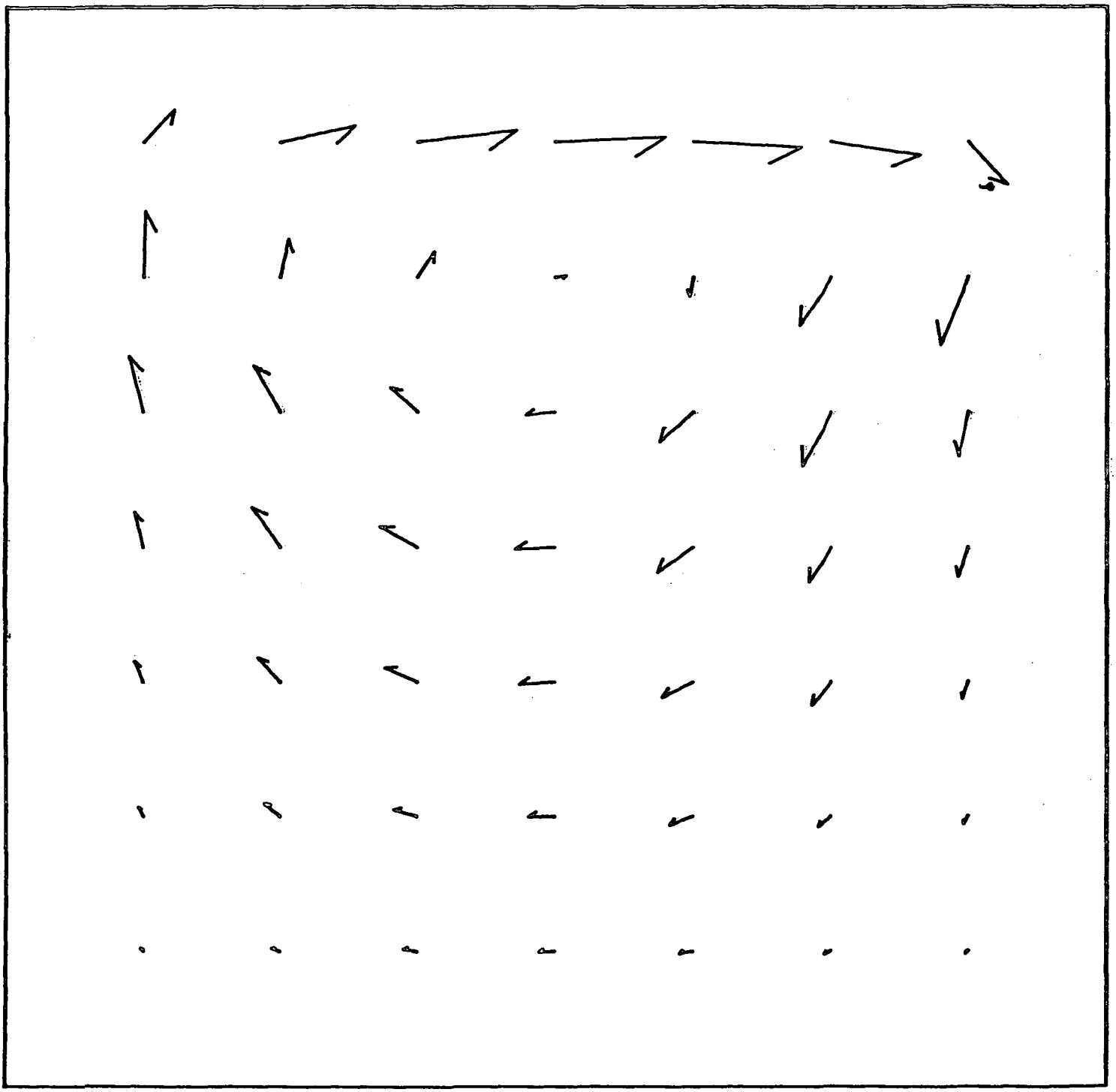
ii/ 64 carrés : ce maillage nous a permis de constater

- le décentrement du tourbillon principal qui diminue quand le Reynolds augmente.
- l'apparition de tourbillons secondaires (contre-tourbillons) dans la partie inférieure droite de la cavité pour les deux Reynolds étudiés (400 et 1000),

et dans la partie inférieure gauche de la cavité pour Reynolds égal à 1000 .

D'autre part l'allure générale de la composante horizontale de la vitesse le long de la médiane est conforme aux résultats déjà établis, (cf par exemple : F. THOMASSET [7]).

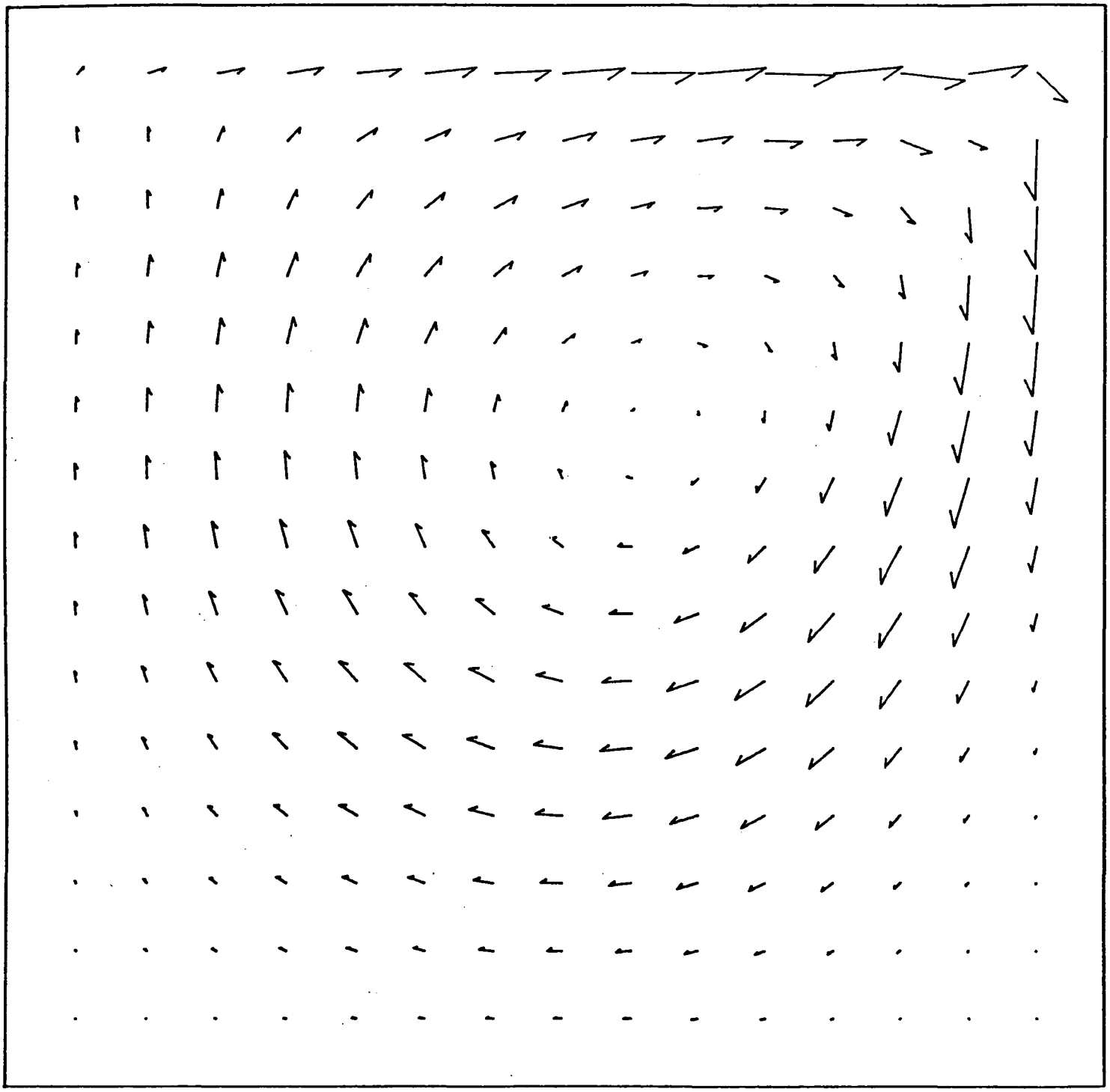
CHAMP DES VITESSES ,ECH=1



NX ,NY=4 ,REYNO=400 ,EPS=1E-5

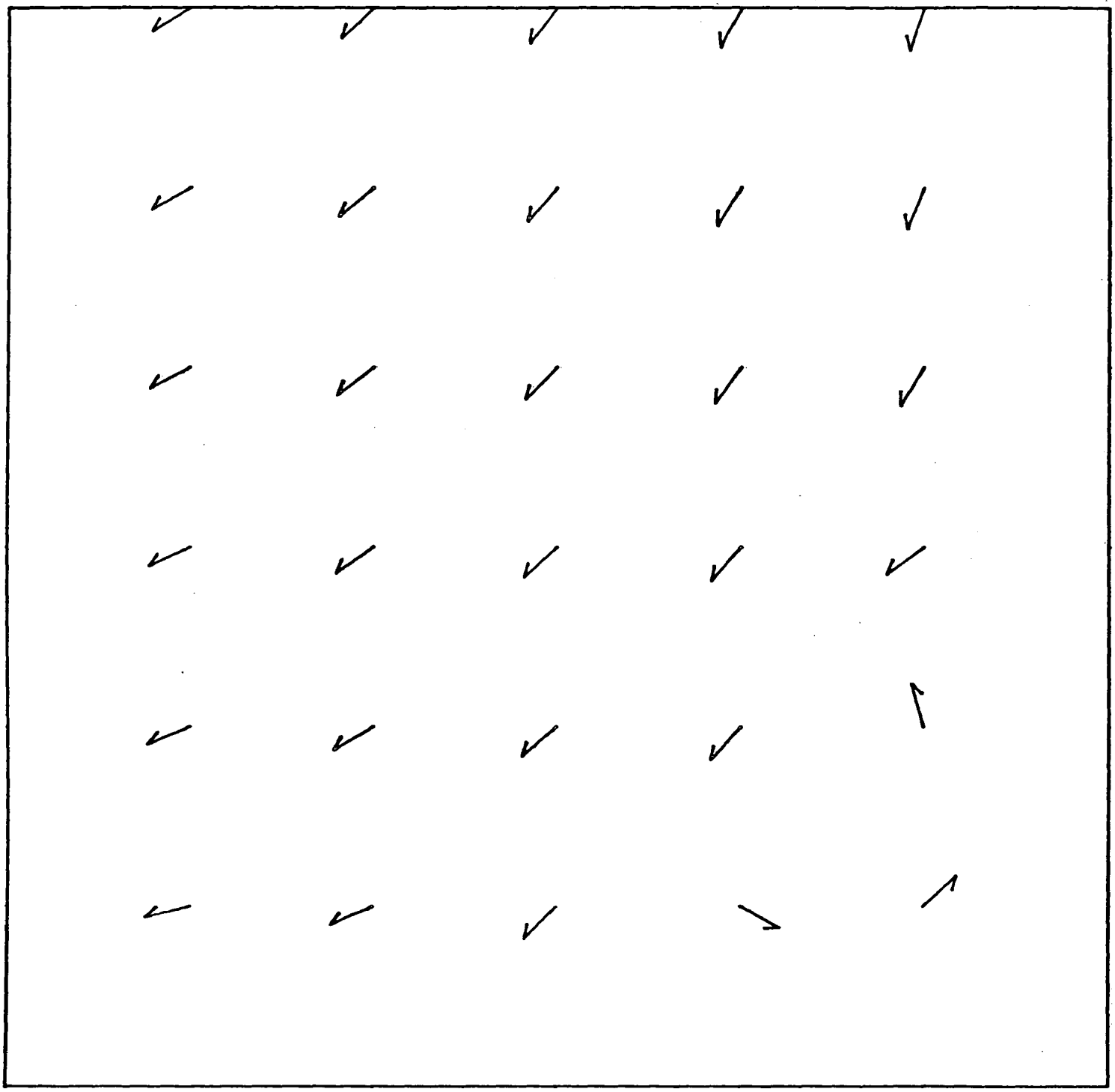
fig. 1

CHAMP DES VITESSES,ECH=1



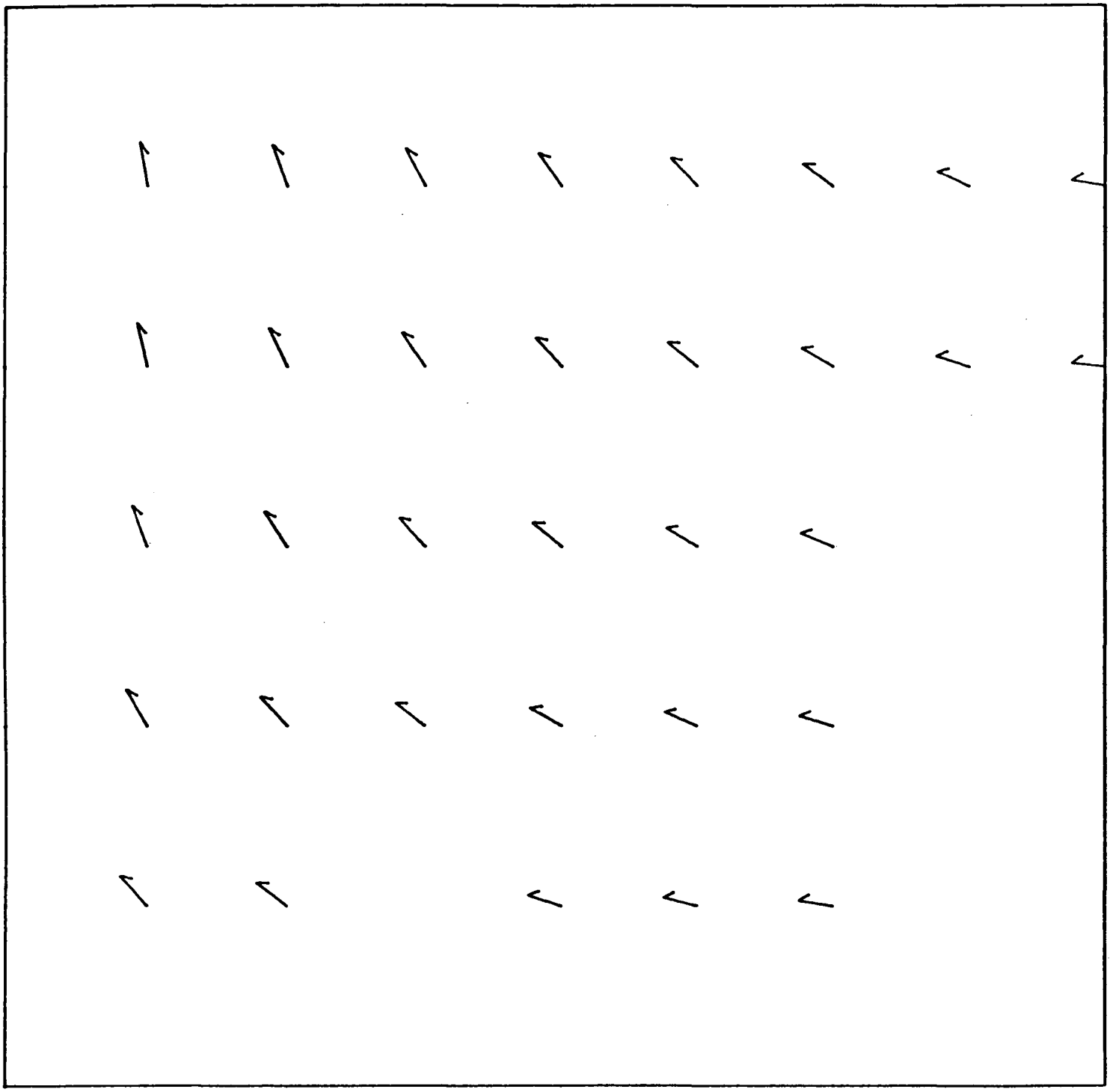
NX,NY= 8,REYNO=400,EPS=1E-5

CHAMP DES VITESSES, COIN BAS-DROITE



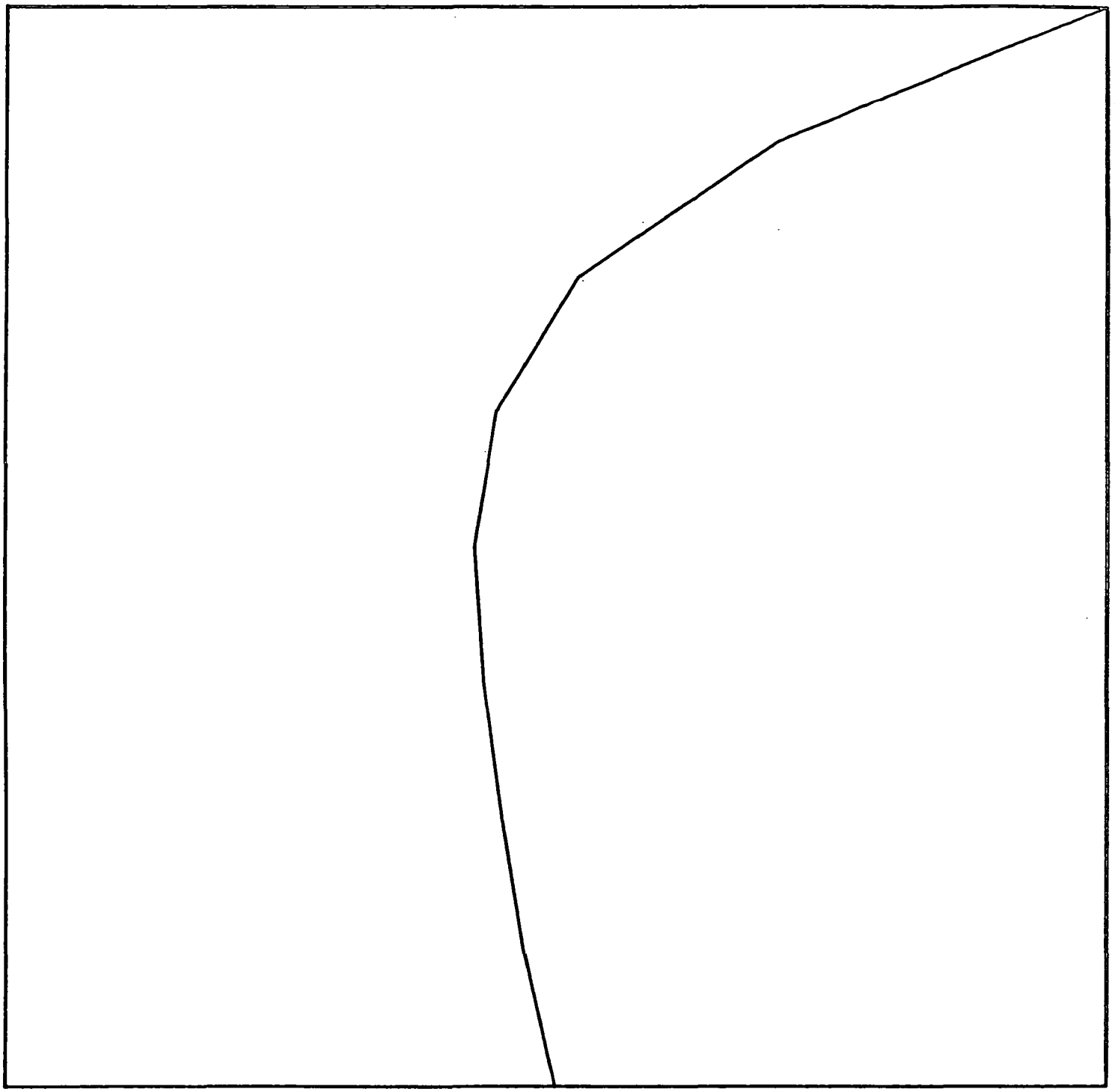
NX, NY = 8, REYNO = 400, EPS = 1E-5

CHAMP DES VITESSES, COIN BAS-GAUCHE



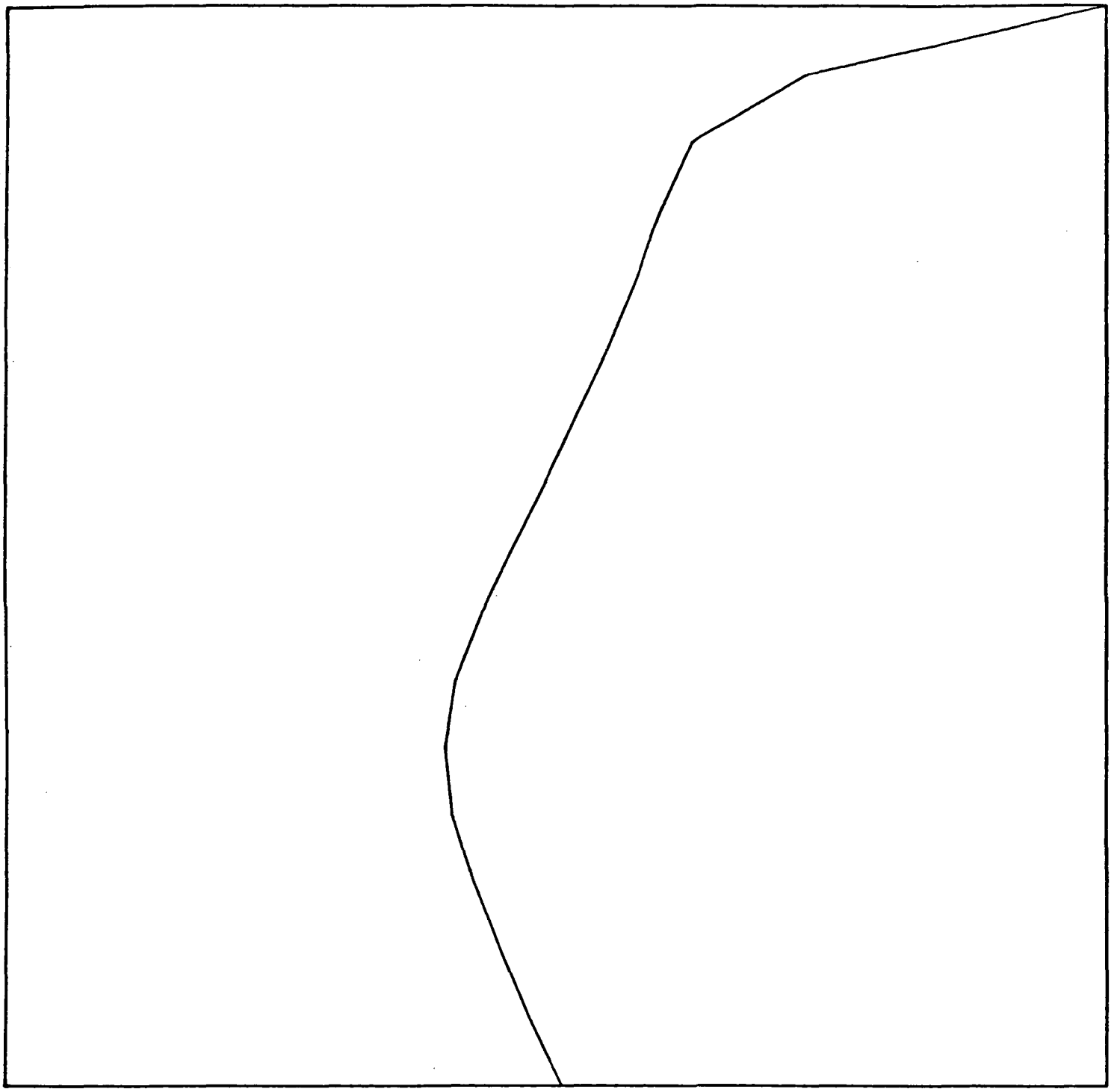
NX, NY = 8, REYNO = 400, EPS = 1E-5

COMPOSANTE HORIZONTALE DE LA VIT LE LONG DE LA MEDIANE



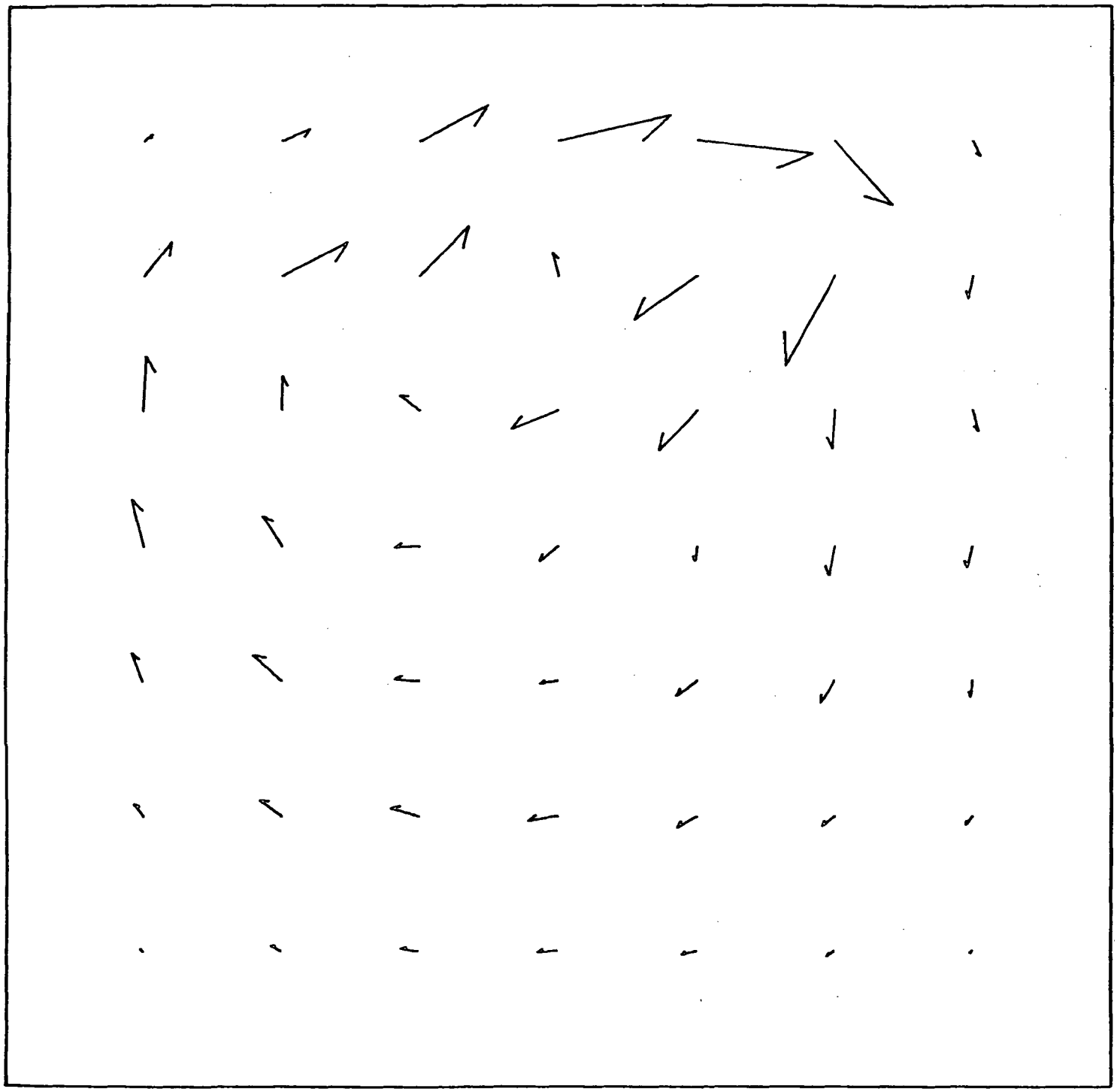
NX,NY= 8,REYNO=400,EPS=1E-5

COMPOSANTE HORIZONTALE DE LA VIT. LE LONG DE LA MEDIANE



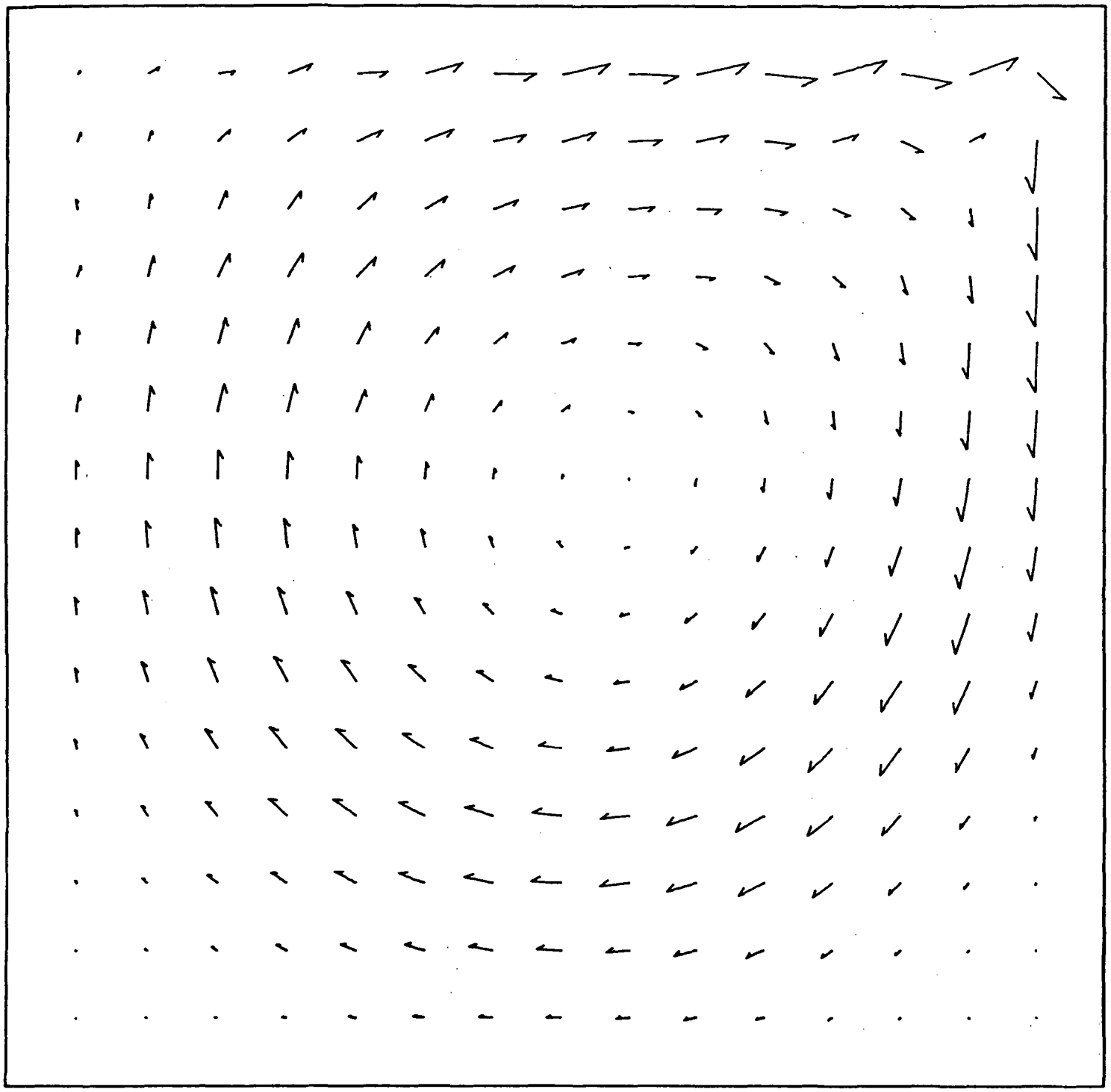
NX,NY = 8,REYNO=400,EPS=1E-5

CHAMP DES VITESSES,ECH=1



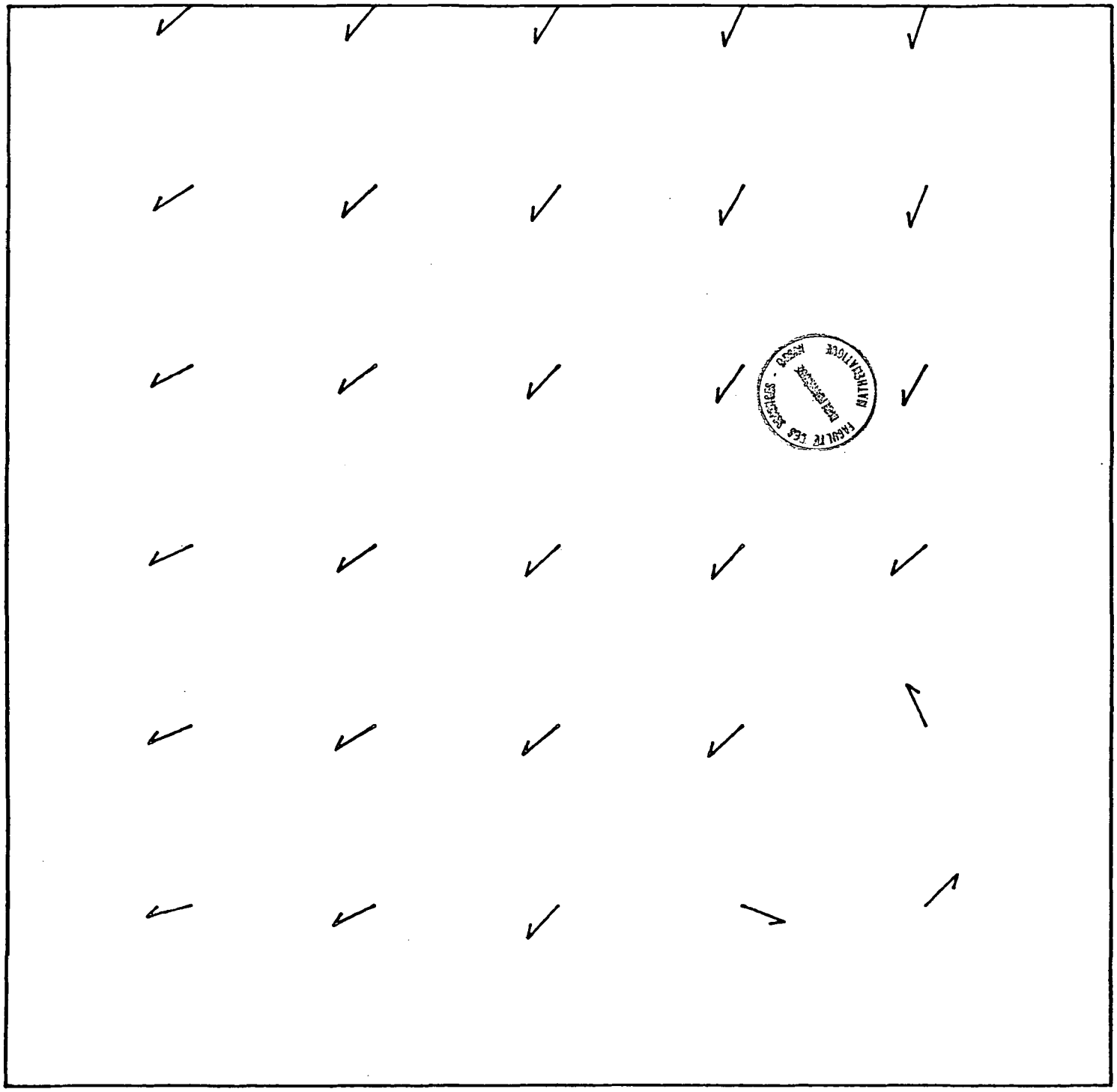
NX,NY= 4,REYNO=1000,EPS=1E-5

CHAMP DES VITESSES,ECH=1



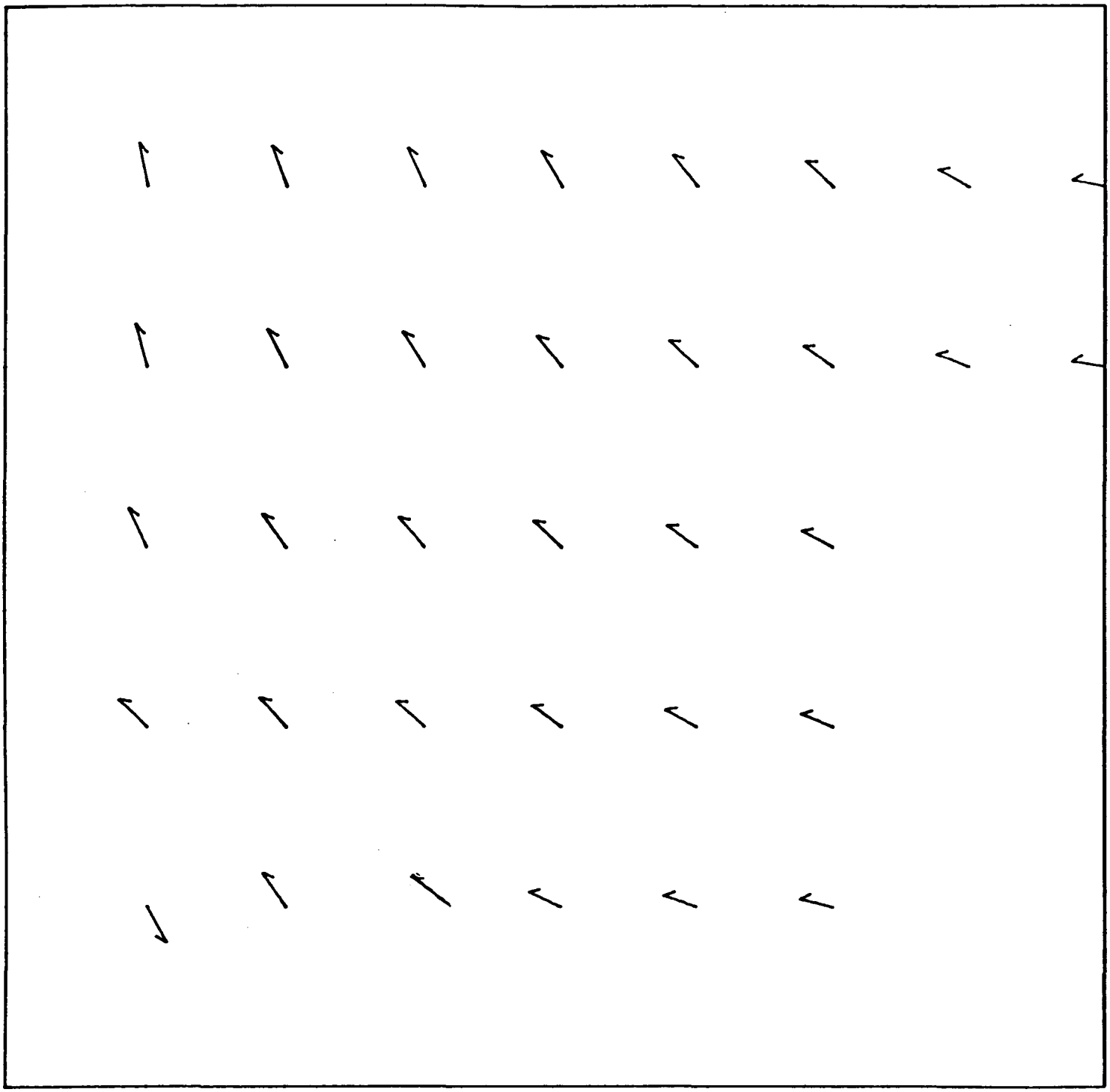
NX,NY= 8,REYNO=1000,EPS=1E-5

CHAMP DES VITESSES, COIN BAS-DROITE



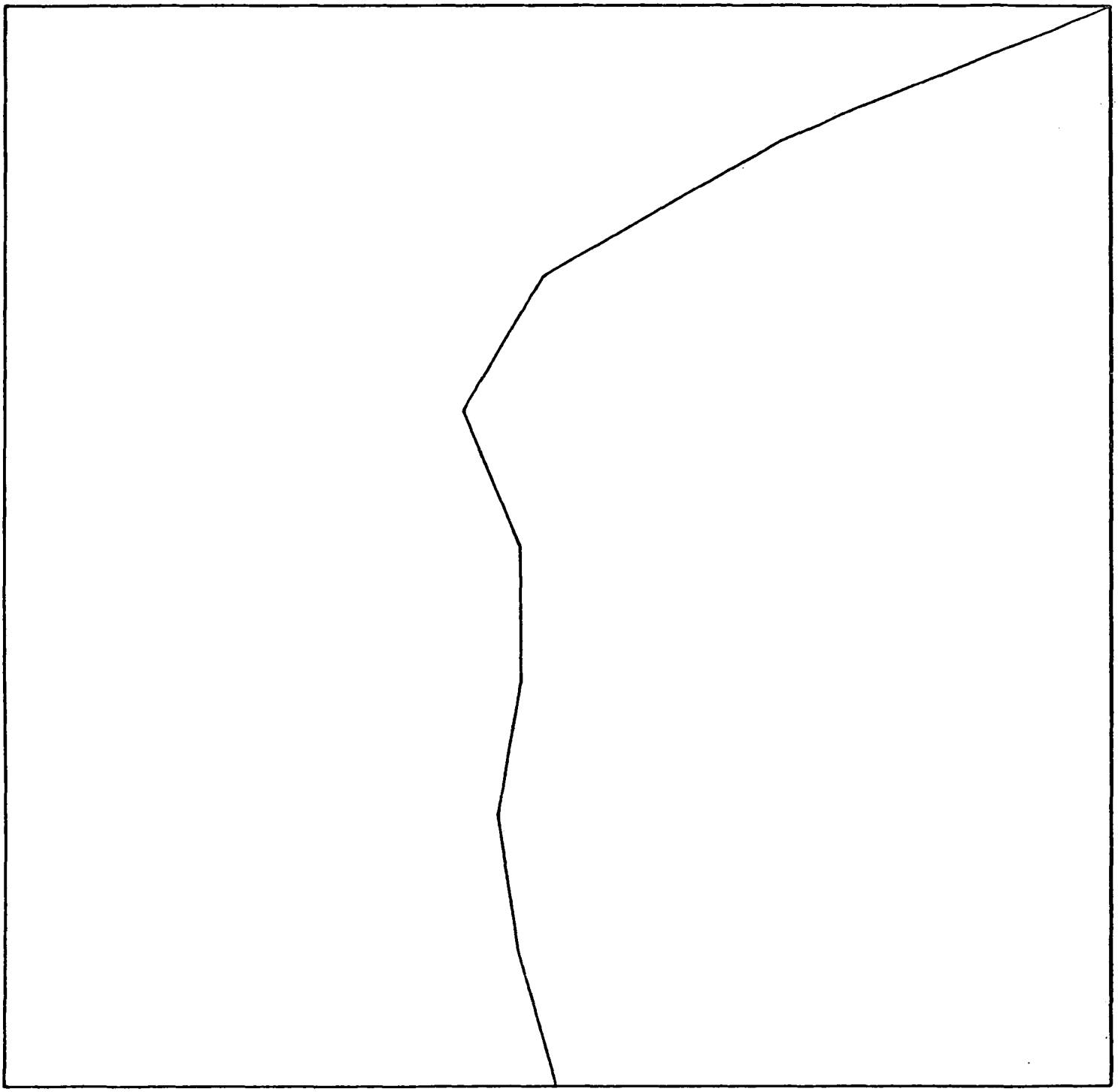
NX, NY = 8, REYNO=1000, EPS=1E-5

CHAMP DES VITESSES,COIN BAS-GAUCHE



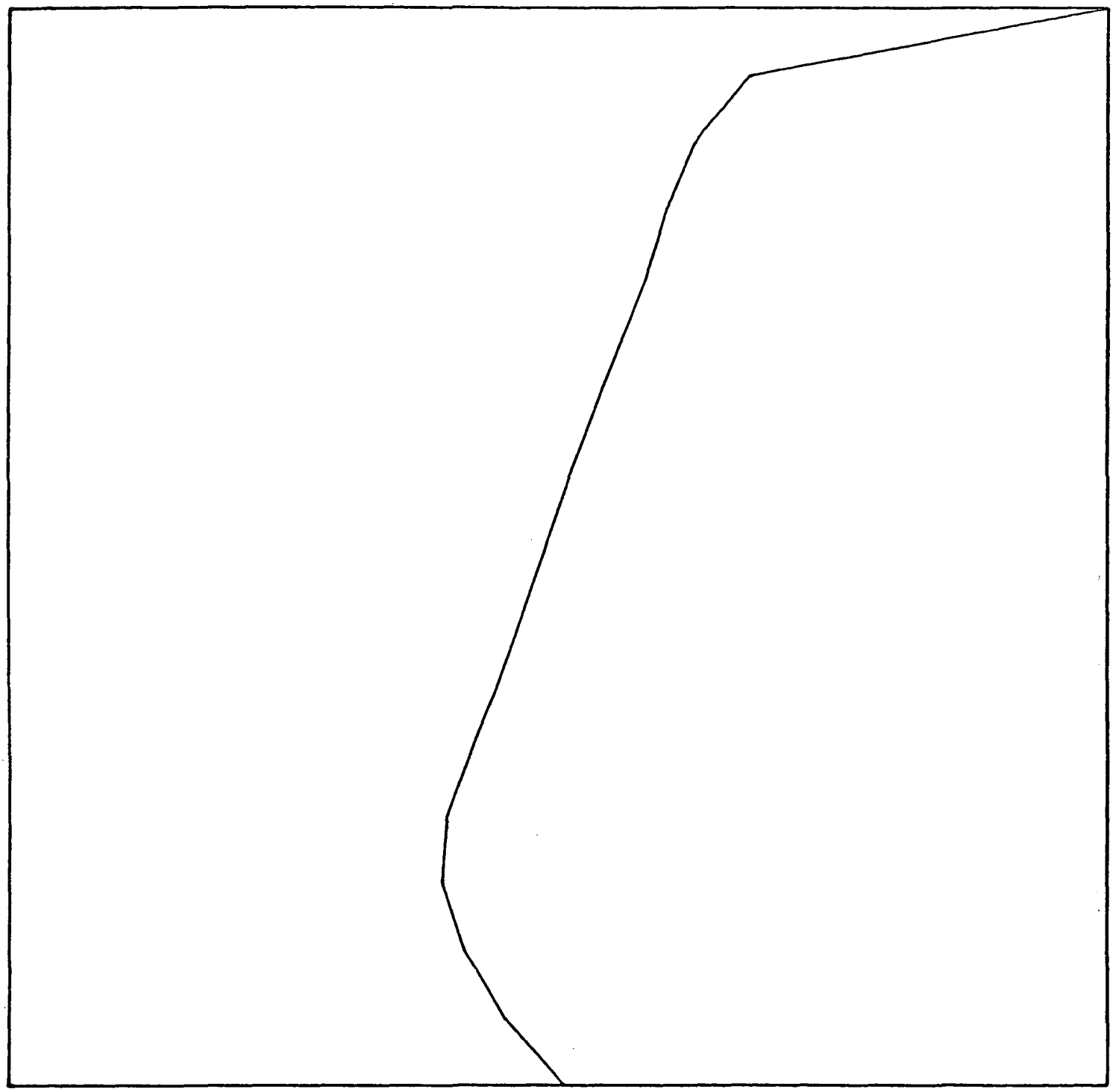
NX,NY= 8,REYNO=1000,EPS=1E-5

COMPOSANTE HORIZONTALE DE LA VIT. LE LONG DE LA MEDIANE



NX,NY= 8,REYNO=1000,EPS=1E-5

COMPOSANTE HORIZONTALE DE LA VIT. LE LONG DE LA MEDIANE



NX,NY= 8,REYNO=1000,EPS=1E-5

Résultats numériques sur la convergence - calcul d'erreur :

L'erreur due à l'approximation par des éléments finis de type "Q2" est en $O(h^2)$,

dans notre cas pour NX = NY = 4 : $\simeq 5\ 10^{-1}$

pour NX = NY = 8 : $\simeq 10^{-2}$

- sur les tableaux qui suivent nous nous apercevons que l'on peut considérer la convergence en :

  6 itérations pour Reynolds 400,

  8 itérations pour Reynolds 1000.

- les tableaux d'erreur donnent un coefficient de proportionalité entre les itérations (de 5 en 5). Pour lire ces tableaux il faut savoir que "plus le nombre est élevé, plus l'erreur est faible".

- la comparaison des deux courbes donnant "la différence entre deux itérations" semble confirmer le fait qu'il existe un lien entre "EPS" et le pas de discrétisation, ceci influençant la convergence.

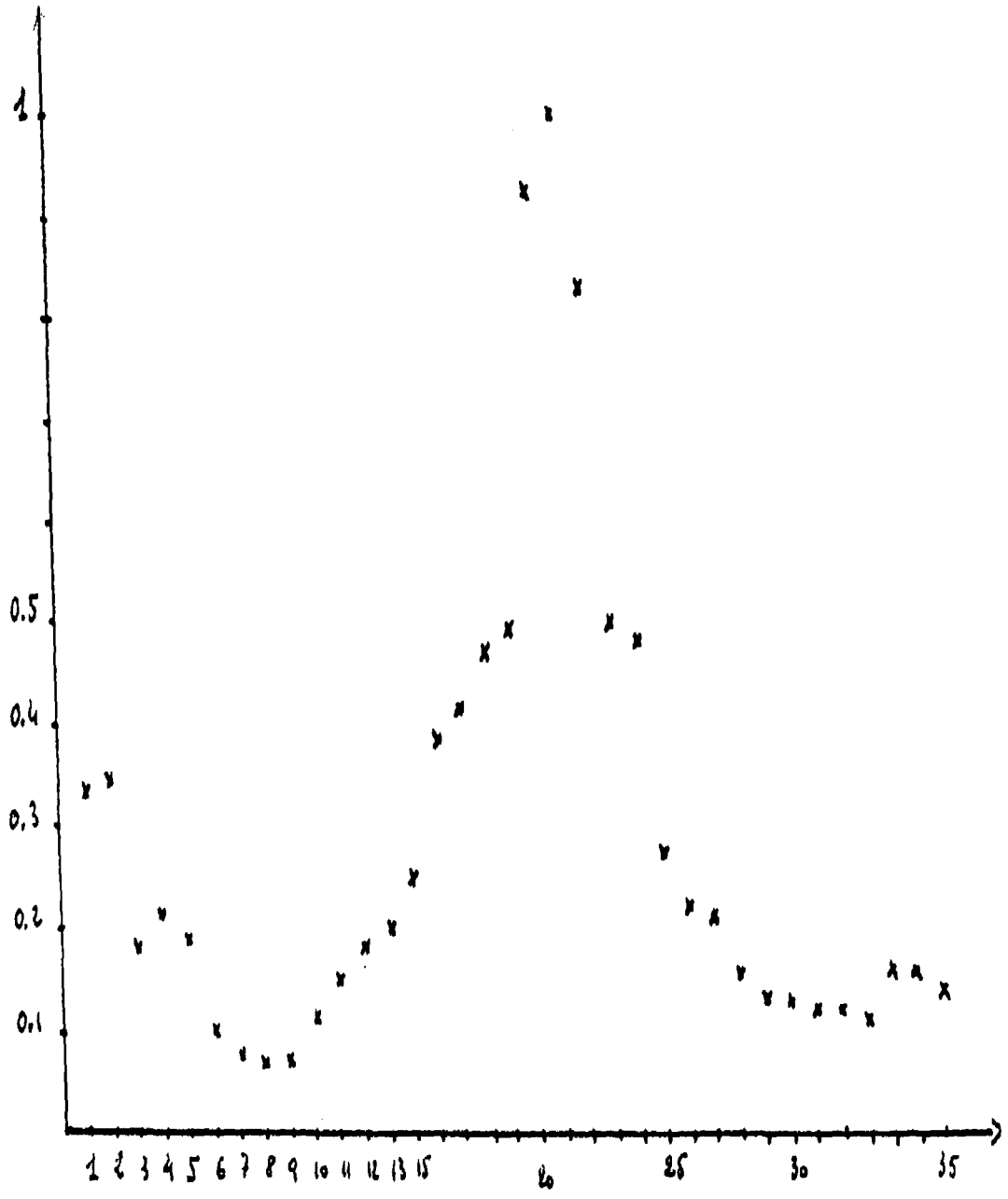
maillage : 16 quadrangles (NX=NY 4)

Reynolds : 1000

EPS : 10^{-5}

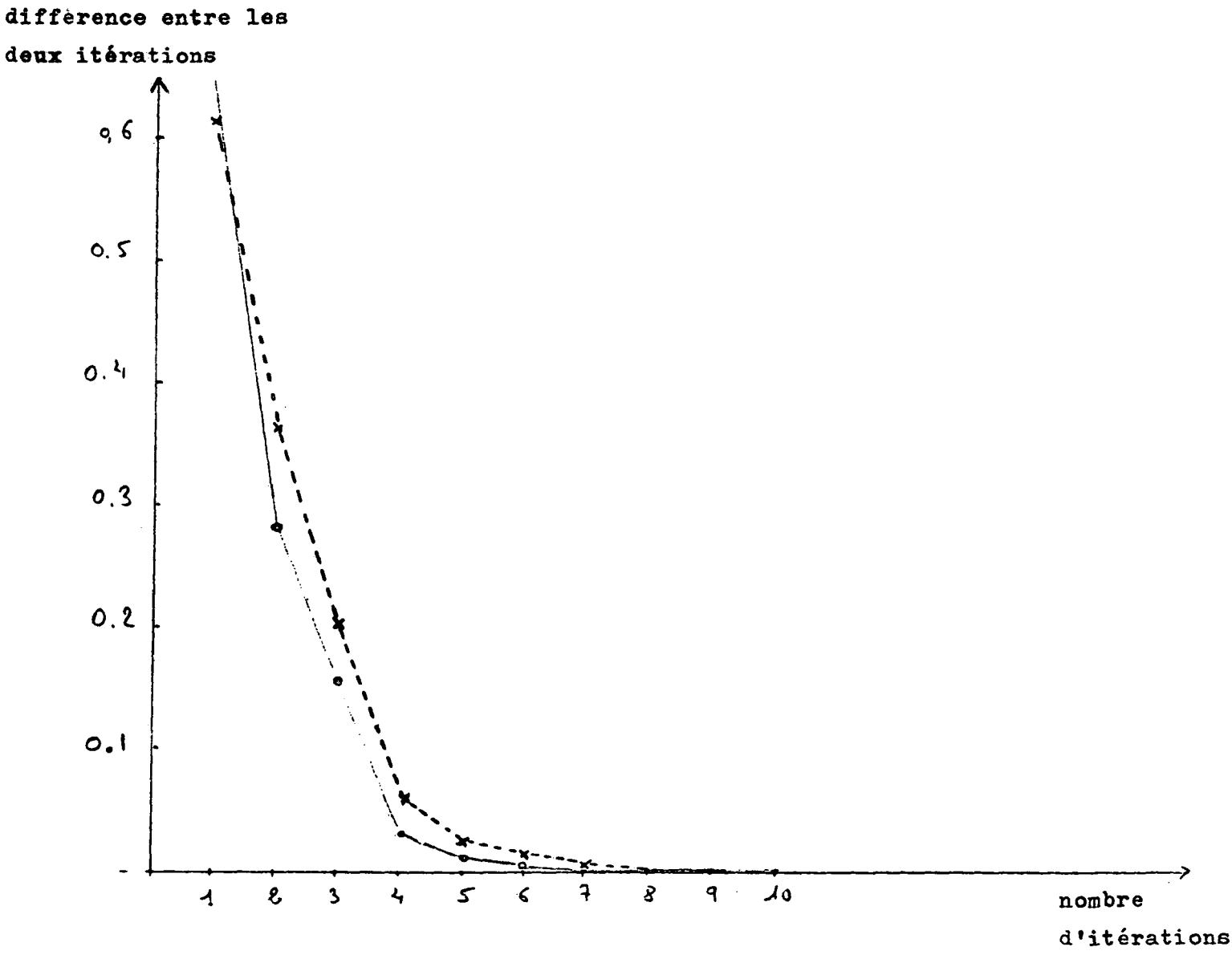
différence entre les deux itérations

erreur due à la méthode d'éléments finis $\simeq 5.10^{-2}$



Courbe "de la différence entre deux itérations"

maillage : 64 quadrangles (NX = NY = 8).
Reynolds : 1000 (x) ; 400 (o)
EPS = 10^{-5}



Reynolds : 400
nombre de subdivisions par axe : 8
second membre nul
initialisation au vecteur nul.

numéro de l'itération	différence entre les deux itérations	erreur relative entre deux itérations
1	0.6618	1
2	0.2843	120.20
3	0.1563	3.840
4	0.0337	8.9316
5	0.0118	4.241
6	0.0073	0.1604
7	0.0021	0.0750
8	0.0012	0.0286
9	0.0007	0.0168
10	0.0002	0.0113

RESULTATS PARTIELS DU PROBLEME DYNAMIQUE

LA DIFFERENCE ENTRE LES 2 ITERATIONS EST 0.24180E-03
L ERREUR REL. ENTRE LES 2 ITERATIONS EST 0.11324E-01

SOUS-PROGRAMME O8ERR
1 ERE COMPOSANTE

50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50
50	6	6	6	6	5	5	5	5	6	5	5	5	5	5	5	50
50	7	6	5	5	5	4	4	4	5	5	6	5	5	5	5	50
50	6	5	5	5	4	4	4	4	4	4	4	4	5	6	6	50
50	6	5	5	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	50
50	5	5	5	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	5	50
50	6	5	5	5	5	5	5	5	5	5	6	4	4	4	5	50
50	6	6	6	6	6	5	5	4	4	4	4	5	5	4	5	50
50	5	5	5	5	5	5	4	4	4	4	4	4	5	5	5	50
50	5	5	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	50
50	5	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	50
50	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	5	50
50	5	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	5	50
50	4	4	4	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	50
50	3	3	5	4	4	4	4	4	4	5	4	4	4	4	4	50
50	4	4	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	50
50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50

SOUS-PROGRAMME OBERR
2 EME COMPOSANTE

50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50
50	6	6	6	6	5	6	6	5	5	5	5	6	5	5	5	50
50	6	6	5	5	5	5	6	5	5	5	5	5	5	5	5	50
50	6	5	5	5	5	5	5	5	5	4	4	5	5	5	5	50
50	5	5	5	4	4	5	5	6	5	4	4	4	4	5	5	50
50	5	5	4	4	4	4	5	5	5	4	4	4	4	5	5	50
50	5	5	4	4	4	4	5	5	5	5	4	4	4	4	5	50
50	5	5	4	4	4	5	6	5	4	5	5	5	4	4	5	50
50	5	5	4	4	4	5	5	4	4	4	7	4	5	4	4	50
50	6	5	4	4	4	5	5	4	4	4	5	4	4	4	4	50
50	5	6	4	4	4	5	5	5	4	4	4	4	4	7	4	50
50	4	5	5	4	4	5	6	5	4	4	4	5	4	4	4	50
50	4	4	5	5	4	4	5	5	4	4	4	4	4	4	4	50
50	4	4	4	5	4	4	4	5	5	6	5	5	4	3	5	50
50	4	3	4	4	5	4	4	4	4	4	6	4	5	3	4	50
50	4	3	4	5	5	4	5	4	6	4	5	4	5	4	4	50
50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50

ORDONNEES	VITESSE HORIZONTALE
0.0	0.0
0.062500	-0.060371
0.125000	-0.112516
0.187500	-0.161767
0.250000	-0.201964
0.312500	-0.215730
0.375000	-0.196545
0.437500	-0.149973
0.500000	-0.091884
0.562500	-0.030559
0.625000	0.026831
0.687500	0.085207
0.750000	0.136175
0.812500	0.182938
0.875000	0.238926
0.937500	0.450743
1.000000	1.000000

LA NORME L2 DE LA DIVERGENCE EST : 0.305622D-06

Reynolds : 1000
nombre de subdivisions par axe : 8
second membre nul
initialisation au vecteur nulle

numéro de l'itération	différence entre les deux itérations	erreur relative entre deux itérations
1	0.63471	1
2	0.36025	167.85
3	0.20462	19.483
4	0.0610	19.306
5	0.0193	1.5943
6	0.0126	2.1193
7	0.0063	0.6326
8	0.0030	0.2485
9	0.0041	0.1583
10	0.0027	0.1147

RESULTATS PARTIELS DU PROBLEME DYNAMIQUE

LA DIFFERENCE ENTRE LES 2 ITERATIONS EST 0.27764E-02
L ERREUR REL. ENTRE LES 2 ITERATIONS EST 0.11473E+00

SOUS-PROGRAMME OBERR
1 ERE COMPOSANTE

50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50
50	4	4	4	4	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4	5	50
50	4	4	4	4	4	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4	50
50	5	4	5	4	4	6	4	3	3	3	3	3	3	3	4	50
50	5	4	4	3	4	4	5	4	5	4	3	3	3	3	4	50
50	4	4	3	3	3	4	5	5	4	4	3	4	3	3	3	50
50	4	3	3	4	4	4	4	5	4	4	3	3	3	4	4	50
50	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	3	3	3	4	50
50	4	3	3	4	4	4	5	4	4	4	4	4	3	3	4	50
50	4	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	50
50	4	3	4	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	5	4	50
50	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	4	4	4	4	50
50	3	3	4	3	3	3	3	3	4	4	4	4	3	4	4	50
50	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4	5	4	4	50
50	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4	50
50	3	3	4	3	3	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	50
50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50

SOUS-PROGRAMME OBERR
2 EME COMPOSANTE

50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50
50	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	3	4	4	5	50
50	4	4	4	4	4	3	3	3	3	4	3	3	3	3	4	50
50	4	4	4	4	4	3	3	3	3	3	4	3	3	3	4	50
50	4	4	4	5	3	3	3	3	3	3	4	3	3	3	3	50
50	4	4	4	4	3	3	3	3	3	3	3	4	3	3	3	50
50	4	4	4	4	3	3	3	3	3	3	4	4	3	3	3	50
50	4	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	3	3	3	50
50	3	3	4	3	3	3	3	3	3	3	4	4	3	3	3	50
50	3	3	4	3	3	3	3	3	3	4	4	5	3	3	3	50
50	3	3	4	4	3	3	3	3	3	4	4	4	3	3	3	50
50	4	4	4	4	3	3	3	3	3	4	4	4	3	3	3	50
50	5	3	4	4	3	3	3	3	3	4	4	4	4	3	3	50
50	3	3	4	4	4	4	3	4	3	5	3	3	5	3	3	50
50	3	3	3	3	3	4	4	3	4	3	4	3	4	3	3	50
50	3	3	3	3	3	3	4	3	5	3	4	4	4	3	3	50
50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50

ORDONNEES	VITESSE HORIZONTALE
0.0	0.0
0.062500	-0.108826
0.125000	-0.181224
0.187500	-0.221471
0.250000	-0.213592
0.312500	-0.169230
0.375000	-0.120310
0.437500	-0.077520
0.500000	-0.036327
0.562500	0.006114
0.625000	0.051592
0.687500	0.097573
0.750000	0.150842
0.812500	0.188235
0.875000	0.239815
0.937500	0.339727
1.000000	1.000000

LA NORME L2 DE LA DIVERGENCE EST : 0.2071160-06

Bibliographie

références générales :

[1] M. BERCOVIER : Thèse de Doctorat d'état, Rouen, 1976.

[2] M.S. ENGELMAN : Simulation of glow models of Newtonian and non-Newtonian viscous incompressible glows, Thesis, Hebrew University of Jerusalem, 1979.

[3] P. GERMAIN : Mécanique des milieux continus, Masson, 1962.

[4] J.L. LIONS : Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, 1969.

[5] R. TEMAM : - Une méthode d'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes, Bull. Soc. Math. France 96, 1968.

- Navier Stokes Equations, North Holland, 1977.

[6] J.C. BENAZETH : Résolution des équations de Navier-Stokes stationnaires par une méthode d'éléments finis mixte, Thèse, Paris, 1978.

[7] F. THOMASSET : F.E.M. for Navier-Stokes equations, INRIA, 1980.

[8] F. BREZZI : On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from Lagrangian multipliers , R.A.I.R.O., vol. 8, R2 , 1974.

<u>références pour la méthode frontale</u> :

[9] A. LICHNEWSKY : Cours de DEA, Université Paris XI, Orsay, 1980.

[10] B.M. IRONS : A frontal solution program for finite elements analysis, Int.J.Num.Meth. Eng., 2, 1970.

[11] P. HOOD : Frontal solution program for unsymmetric matrix, Int.J.Num.Meth.Eng., 10, 1976.

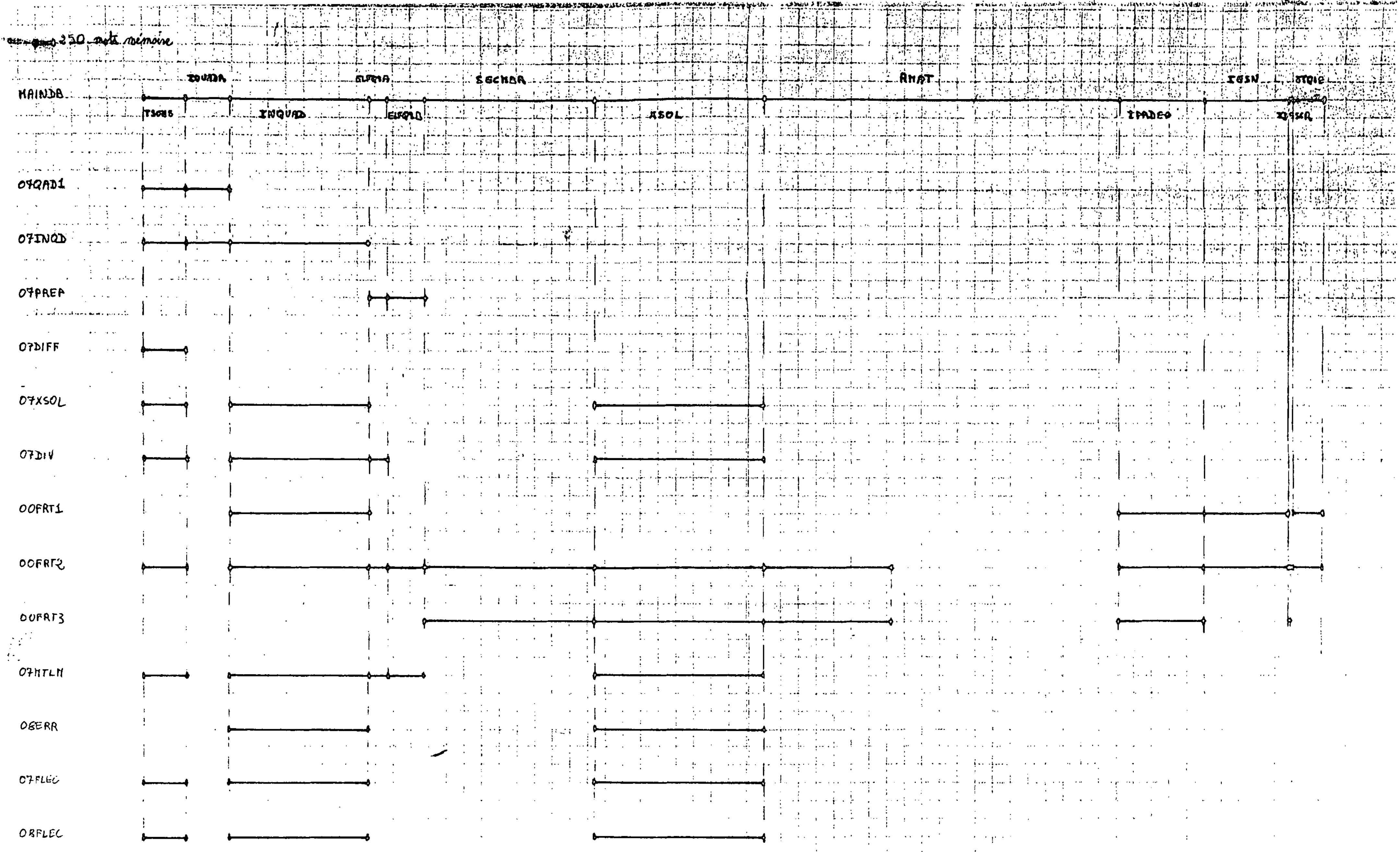
[12] O.C. ZIENKIEWICZ : The finite element method, 3rd edition, Mcgraw-Hill, 1977.

Répartition de la zone mémoire occupée par les principaux tableaux :

On remarquera que la taille des tableaux RMAT et IDESCR dépend de la stratégie utilisée pour la méthode frontale. Il faut donc faire attention à déclarer dans le programme principal une dimension suffisante. Il faut la répéter dans le commun ZLFTAB (LFMAT = ...). Le programme calcule lui-même la taille mémoire nécessaire (LNMAT = ...) et s'arrête si celle-ci est trop grande (c'est-à-dire LNMAT >LFMAT).

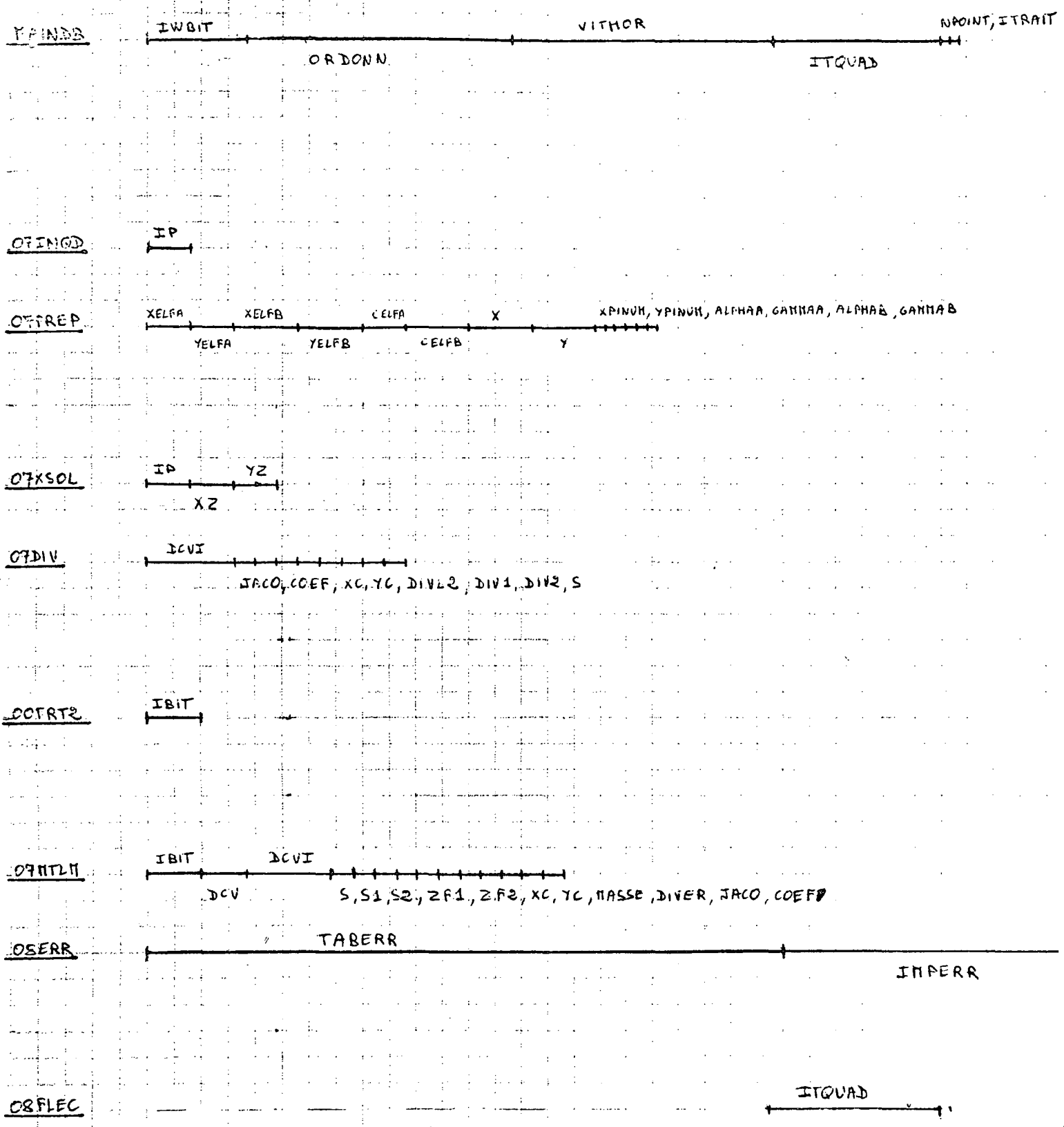
Dans la version actuelle RMAT(N,N) et IDESCR(N) sont dimensionnés pour N = 80, ceci permet par exemple de traiter le cas d'un carré subdivisé en 16 x 16 éléments avec une stratégie quadrangle par quadrangle.

Sur la figure suivante la longueur utilisée réellement correspond à NX = NY = 4 avec la même stratégie.


250 mots mémoire
MAINDB
INQUAD
XSOL
07QAD1
07INQD
07PREP
07DIFF
07XSOL
07DIV
00FRT1
00FRT2
00FRT3
07MTLM
08ERR
07FLEC
08FLEC

10 mots mémoire

VARIABLES LOCALES



(cf programme principal

Structure du programme "d'élément fini et résolution" :

Programme principal

| O7 init
| "initialisation des communs".

| O7 qad 1
| "quadrangulation d'un rectangle".

| O7 inqd
| "remplissage du tableau décrivant la méthode d'elt. fini".

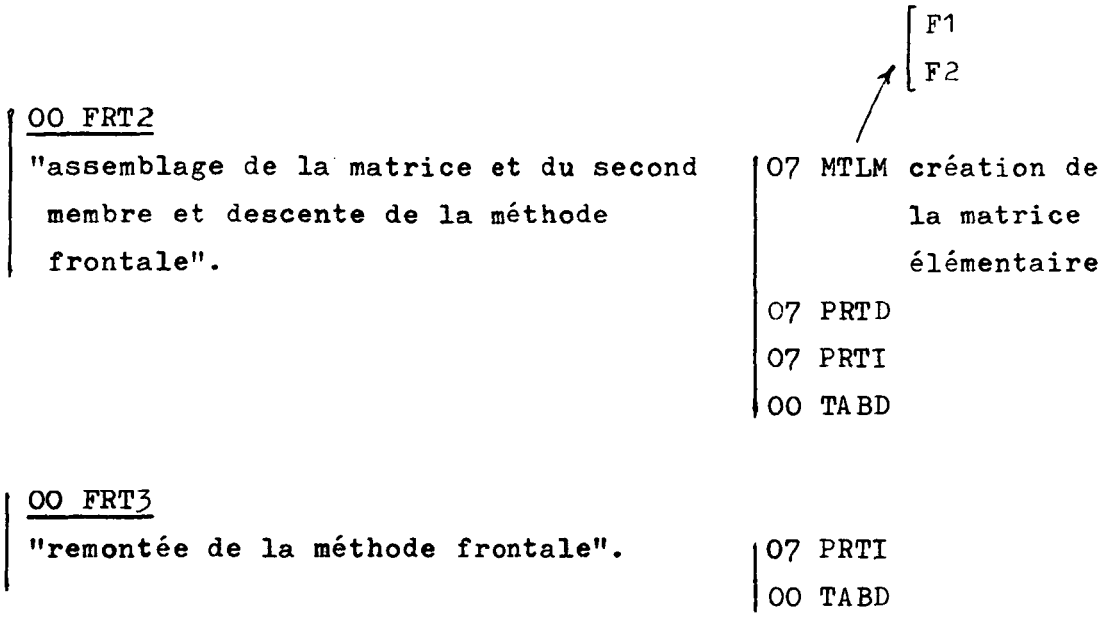
| O7 prep
| "définition de la méthode d'intégration numérique
| sur le quadrangle de référence".

| O7 diff
| "modification du maillage par difféomorphisme
| en vue de tester O7 MTLM".

| O7 Xsol — FU1, FU2, O7 PRTD
| " initialisation de la solution, en tenant compte
| des conditions de Dirichlet au bord".

| O7 Div
| "calcul de la norme L^2 de la divergence de la vitesse
| (en Q1, points de Gauss(4))".

| OO FRT1 — O7 PRTI, OO TABI
| "création des tableaux nécessaires à la méthode
| frontale".


F1
F2
00 FRT2
"assemblage de la matrice et du second membre et descente de la méthode frontale".
07 MTLM création de la matrice élémentaire
07 PRTD
07 PRTI
00 TABD
00 FRT3
"remontée de la méthode frontale".
07 PRTI
00 TABD
08 err
"erreur entre deux itérations".
07 div
"cf précédemment".
07 Flec
"représentation d'un champ de vecteur par des flèches".
GRFBE 2
08 Flec
"agrandissement de quelques quadrangles, du progamme 07 Flec, et donne la direction du champ".
GRFBE 2
GRFBE 1

Programmes d'impressions et fonctions :

Impressions :

07 PRTD
imprime un vecteur double précision.

07 PRTI
imprime un vecteur d'entiers.

00 TABI
imprime un tableau d'entiers.

00 TABD
imprime un tableau double précision.

Fonctions :

FU1
donne la composante horizontale de la vitesse sur un bord et en un point.

FU2
donne la composante verticale de la vitesse sur un bord et en un point.

F1
donne la composante horizontale de la force en un point.

F2
donne la composante verticale de la force en un point.

COMMONS / ROUTINES	ZWORK	ZLRTAB	ZUNITB	ZCONTX	ZQAD1	DISK	ZQUA
MAINDB	ZW (1600) (DP)	LZW, LRTSON, LFQUAD LFXSOL, LFSM, NFRONT LFPARDG, LFMAT	ULECT1, ULECT2 UPRT1, UPRT2, UPRT3	IPRINT, ITEST, IPREC, NSONS NQUADR, NBORD, NCOTE NNOEUD, NNBASE, NFNBAS NPINUA, NPINUB, NITER	XDIM, YDIM NX, NY	NDESCR NTABLE	
07INIT			ULECT1, ULECT2 UPRT1, UPRT2, UPRT3	IPRINT, ITEST, IPREC, NSONS NQUADR, NBORD, NCOTE NNOEUD, NNBASE, NFNBAS NPINUM			
07QAD1		LZW, LRTSON, LFQUAD	ULECT1, ULECT2 UPRT1, UPRT2, UPRT3	IPRINT, ITEST, IPREC, NSONS NQUADR	XDIM, YDIM NX, NY		
07INQD	ZW (3200)	LZW, LRTSON, LFQUAD	ULECT1, ULECT2 UPRT1, UPRT2, UPRT3	IPRINT, ITEST, IPREC, NSONS NQUADR, NBORD, NCOTE NNOEUD, NNBASE, NFNBAS			
07PREP			ULECT1, ULECT2 UPRT1, UPRT2, UPRT3	IPRINT, ITEST, IPREC, NSONS NQUADR, NBORD, NCOTE NNOEUD, NNBASE, NFNBAS NPINUA, NPINUB			
07DIFF		LZW, LRTSON	ULECT1, ULECT2 UPRT1, UPRT2, UPRT3	IPRINT, ITEST, IPREC NSONS			
07XSOL		LZW, LRTSON, LFQUAD, LFXSOL	ULECT1, ULECT2 UPRT1, UPRT2, UPRT3	IPRINT, ITEST, IPREC, NSONS NQUADR, NBORD, NCOTE NNOEUD, NNBASE, NFNBAS NPINUA, NPINUB			
07DIV	DIVISOR (1600) (DP)	LZW, LRTSON, LFQUAD, LFXSOL	ULECT1, ULECT2 UPRT1, UPRT2, UPRT3	IPRINT, ITEST, IPREC, NSONS NQUADR, NBORD, NCOTE NNOEUD, NNBASE, NFNBAS NPINUA, NPINUB			NUL, NZ(9) XZ(4), YZ(4) POL(2,4) POL3(4) (DP)
07PAT1	XDIVOR (1600)	LZW, LRTSON, LFQUAD LFXSOL, LFSM, NFRONT LFPARDG, LFMAT	ULECT1, ULECT2 UPRT1, UPRT2, UPRT3	IPRINT, ITEST, IPREC, NSONS NQUADR, NBORD, NCOTE NNOEUD, NNBASE, NFNBAS NPINUA, NPINUB		NDESCR	
07PAT2		LZW, LRTSON, LFQUAD LFXSOL, LFSM, NFRONT LFPARDG, LFMAT	ULECT1, ULECT2 UPRT1, UPRT2, UPRT3	IPRINT, ITEST, IPREC, NSONS NQUADR, NBORD, NCOTE NNOEUD, NNBASE, NFNBAS NPINUA, NPINUB		NDESCR NTABLE	NUL, NZ(9) XZ(4), YZ(4) POL(2,4) POL3(4) MAILH(15,15) (DP)

250 mots

(DP) double

communs / pages	ZWORK	ZLFTAB	ZUNITE	ZCONTX	ZQAD1	DISK	ZQUA
OOFRT3		LZW, LFTSOM, LFQUAD LFXSOL, LFSM, NFRONT LFPRDG, LFMAT	ULECT1, ULECT2 UPRT1, UPRT2, UPRT3	IPRINT		NDESCR NTABLE	
OPMTLM	SOMGRD(18,18), SOMDIV(18,18) B(18,18), PHI(9), DPHI(9,2) } DP	LZW, LFTSOM, LFQUAD LFXSOL, LFSM, LFPNTR LFMAT, LFTEMP	ULECT1, ULECT2 UPRT1, UPRT2, UPRT3	IPRINT, ITEST, IPREC, NSOMS NQUADR, NBORD, NCOTE NNOEUD, NNBASE, NFNBAS NPINUA, NPINUB			NUL, NZ(9) XZ(4), YZ(4) POL(2,4) POLI(4) MATLM(18,18) SM(18) } DP
OBEAR	XSOL1 (liste d'appel) (1200) DP	LFZW, LFTSOM, LFQUAD LFXSOL	ULECT1, ULECT2 UPRT1, UPRT2, UPRT3		XDIM, YDIM NX, NY		
OPFLEC	ZW(3200)	LFZW, LFTSOM, LFQUAD LFXSOL	ULECT1, ULECT2 UPRT1, UPRT2, UPRT3	IPRINT, ITEST, IPREC, NSOMS NQUADR, NBORD, NCOTE NNOEUD, NNBASE, NFNBAS			
OBFLEC	ZZW(2500)	LZW, LFTSOM, LFQUAD LFXSOL, LFPNTR, LFMAT		IPRINT, ITEST, IPREC, NSOMS NQUADR, NBORD, NCOTE NNOEUD			

850 mots mémoire

DP double precision

PROGRAMME DE RESOLUTION DES EQUATIONS DE

NAVIER-STOKES PAR UNE METHODE

D'ELEMENTS FINIS MIXTE DE BERCOVIER

AUTEUR :Patrick GUILLAUME

REVISE :Mr SELIGMAN
Mme CREPEL

CETTE DOC: Alain LICHNEWSKY

<<< LABORATOIRE D'ANALYSE NUMERIQUE >>>
<<< Universite de PARIS-SUD >>>
<<< 91405 ORSAY >>>

VERSIONS:

(1) Resolution des Systemes lineaires par Methode "LU " Matrice profil disp:Juin 79

(2) Resolution par Methode de Gauss/Frontale disp:Juin 80

REMARQUES 1/Les programmes documentes ici ont ete realises par divers stagiaires debutants, le lecteur excusera donc les erreurs de jeunesse dans les programmes.

2/Pour la documentation, les remarques permettront de l'ameliorer . M E R C I.

T A B L E D E S M A T I E R E S

<<N O T A T I O N S >>

1/ On utilise l'ecriture :: <var>:+=<var1>
pour indiquer :: <var>=<var>+<var1>

2/ On utilise '@' pour indiquer 'approximativement'

3/ On utilise le FOR_EACH ('element d un ensemble') DO..
dans une situation ou l'ordre des operations n'est
pas importante et ou un parallelisme pourrait exister.

4/ On a cherche a expliciter les indirections et autres
correspondances. Dans cette documentation les corres-
pondance sont notees par
(T_indx1 -> T_indx2)
ou T_indx sont des types d'indice relatifs a des
numerotations distinctes .Ce sont des FONCTIONS.

```
Navier_Stokes_Profil:
          MAIN_PROGRAM;
         DECLARE    SUBROUTINE                      --Sous Programmes
                    o7init   (INTEGER),             --Initialisations o7..
                    o7qad1   (                      --Construction maillage
                              T_tsoms,              --Tableau sommets
                              T_elem,),             --tableau elements
                    o7inqd   (                      --Construction table de
                              T_tsoms,              -- degres de liberte
                              T_elem ,              --
                              T_deglib),            --
                    o7prep   (                      --Construction table
                              T_descr,T_descr,      -- decrivant les elem-
                              ,),                   -- -de reference
                    o7diff   (T_tsoms),             --Deformation maillage
                    o7xsol   (                      --Initialisation du
                              T_tsoms,              -- vecteur "solution"
                              T_deglib,             --
                              T_vect(lnxsol),),     --vecteur solution
                    o7div    (                      --Calcul norme
                              T_tsoms,              -- divergence vitesse
                              T_deglib,             --
                              T_descr,              --Descr. pour int.num.
                              T_vect(lnxsol)),      --Solution
                    o8asmr    (                     --Assemblage de la
                               T_tsoms,T_deglib--   matrice profil
                               T_descr,T_descr,--   pour o7mtlm
                               T_mat_prs,           --Matrice profil
                               T_mat_prs_ptr,       --"adressage matrice
                                                    --  creuse "
                               T_vect       ,       --Second membre
                               T_vect       ,       --Solution (pour calcul
                                                    -- des non-linearites)
                               ,,),
                    mulmat   (T_mat_prs,            --Produit matrice profi
                              T_mat_prs_ptr,        -- par le vecteur:
                              ,T_vect),             -- ((*)1.0)
                    crmc3d   (T_mat_prs_ptr,        --Resolution methode
                              T_mat_prs     ,       -- de Crout pour matr.
                              ,,,,                  -- profil sym. non
                              T_mat_prs,)           -- sym /(C)MODULEF/
                              OPTION (ARGS(2,7) MAY_BE_OVERLAPPED)
                                                   ,--regarder avant d'
                                                    -- optimiser
                    drcr3d   (T_mat_prs_ptr,        --Resolution m.Crout
```

```
                                T_mat_prs,        -- /(C) MODULEF/
                                T_vect(*),        --Zone de travail
                                ...,T_vect),      --Solution
                      o7prtd   (T_vect,,),        --Impression
                      o8err    (T_deglib,         --Mise en forme et
                                                  -- impression de la
                                                  -- difference entre
                                                  -- iteres
                                T_vect,T_vect,    --Solutions a comparer
                                ...),
                     (startg,o7flec,o8flec,       --Pgms. graphiques
                      grfbe1,contrl)              -- sans interet ici
                                IN "graphics" PACKAGE; -- vu? ..
```

```
**************************************************************************
*                                                                        *
*                  Voici les principaux types de tableaux                *
*                  manipules                                             *
*                                                                        *
**************************************************************************
        DECLARE    TYPE
                    ( T_vect:REAL(*) ),          --Vecteurs
                    ( T_tsoms: 1 sommet (nsoms), --Pour chaque sommet:
                               2 (x,y) REAL  , --les coordonnees
                               2 code  INTEGER)--suivant que sur le
                                             , -- bord du domaine...
                    ( T_element:               --pour chaque element
                              1 element (nquadr),--
                               2 nsom  INTEGER(4)),-- numero de
                                             -- sommet.(Ceci sert
                                             -- a definir la geo-
                                             -- metrie.)
                    ( T_deglib:1 element (nquadr)--Pour chaque element:
                             ,  2 nsom  INTEGER(4),  -- num. sommets
                               2 ndeglib_sommets --num. des degres de
                                             -- liberte correspond.
                                     INTEGER(4),     -- aux sommets
                               2 ndeglib_milieu_cotes
                                             --degres de liberte
                                             -- associes aux milieu
                                             -- des cotes
                                     INTEGER(4),
                               2 ndeglib_centre
                                             --degre de liberte
                                     INTEGER)-- au centre
                               2 ndeglib     --au total 9 degres de
                                             --liberte par element
                                  REDEFINES ndeglib_sommet
                                       THRU ndeglib_centre
                                       INTEGER(9)
                    (T_descr:                --description de
                                             -- l'element de ref.
                              1 point_integr_num --par point d'
                                             -- integration
                                             -- numerique sur l'
                                  (npinu*)   , -- element reference
                               2 (x,y) REAL  , --coordonnees
                               2  coef REAL  , --coeff.integration
                               2  code INTEGER,--
```

```
                                2 (val_fonc_base--fonctions de base
                                 , val_ddx  ,    -- leurs d/dx
                                   val_ddy  )    -- leurs d/dy
                                        REAL(9)),

                --MATRICES dont le profil est symetrique mais
                -- dont les coefficients ne le sont pas forcement.
                --Stockees a l'aide de deux tableaux
                --      l'un decrivant la structure
                --      l'autre contenant les coefficients

               (T_mat_prs_ptr:                  --pour chaque ligne l
                                                -- de la matrice
                        INTEGER(nfbas+1)),      -- position dans le
                                                -- vecteur T_mat_prs
                                                -- de val(mat(l,l))
               (T_mat_prs    :    REAL(taille);--coefficients .

                -- 1/ nfbas=nombre d'inconnues du probleme.
                --      On represente 2 composantes de la vitesse
                --      par elements finis.A chaque degre de liber-
                --      te correspondent 2 fonctions de base inter-
                --      venant chacune dans l'approximation d'une
                --      composante.(Le nombre de degres de liberte
                --      est designe par 'nnoeud' dans le programme)
                --      Du fait des conditions au bord , il y a
                --      'nnbase' degres de liberte non figes
                --      et 'nfbas' inconnues .
                -- 2/ Heuristiques pour la taille.
                --      Pour un probleme bidim.
                --       taille # c2*(nsoms)**1.5
                --      Pour un probleme tridim.
                --       taille # c3*(nsoms)**1.67
                --      (Ici seuls les exposants sont a considerer
                --      )
                -- On a privilegie l'acces par ligne pour la partie
                -- de la matrice en dessous de la diagonale,et
                -- l'acces par colonnes pour le reste de la matrice
                -- dans cette representation.
                --                          La FUNCTION ncmuns permet
                -- l'adressage des elements representes a partir
                -- de leurs indices (l,k).Cet adressage individuel
                -- ne tire pas parti de la possibilite d'adresser
```

```
                        -- "plus directement" les portions de lignes ou
                        -- colonnes.              Dans Navier_Stokes_profil
                        -- on adresse les elements un par un sans chercher
                        -- ce gain en efficacite,en particulier dans
                        -- 'mulmat'.(Cette remarque ne s'applique pas aux
                        -- programmes 'crmc3d' et 'drcr3d')
```

```
*************************************************************************
*                                                                       *
*            Organisation des Communs D'Utilisation Globale             *
*                                                                       *
*          (sont exclus les communs,qui ne sont connus que localement)  *
*                                                                       *
*************************************************************************
        DECLARE    COMMON                    --
                     zcontx                  --options globales pour les
                                             -- programmes o7XXXX o8XXXX
                                             --dimension des tableaux
                           WRITTEN(o7init,o7inqd,o7prep,o7qad1,
                                   Navier_Stokes_profil          )
                           KNOWN   (o8asmr,o7div,o7mtlm,o7flec,o7xsol,
                                    o8flec                        ),
                     zlftab                  --longueur maximales disp.
                                             -- pour les tableaux.
                           WRITTEN(Navier_Stokes_profil)
                           KNOWN   (mulmat,ncmuns,o7flec,o7inqd,o7mtlm,
                                    o7xsol,o8asmr,08flec),
                     zunite                  --unites e/s
                           WRITTEN(Navier_Stokes_profil) -- P.princ.
                           KNOWN   (*) ,     --sert partout
                     zqad1                   --parametres de o7qad1
                           WRITTEN(o7qad1)--
                           KNOWN   ("graphics"),-- sert a faciliter
                                             -- la lecture des resultats
                                             -- (mise en page .) .
                     zwork                   --zone de travail
                           WRITTEN(o7div,o7flec,o7inqd,o8flec    )
                           KNOWN   (Navier_Stokes_profil);


*************************************************************************
     DECLARE LOCAL_VAR                  --Principaux tableaux pour tout
                                        -- le programme
                 xsol  :T_vect,         --solution apres 1°iteration
                 zw    :T_vect,         --          a 1°iteration preced.
                 tsoms :T_tsoms,        --Sommets
                 iquadr:T_element,      --Elements
                 inquad:T_deglib ,      --Degres de liberte
                (elfq2a,
                 elfq2b):T_descr ,      --Formules integration numerique
                 mat   :T_mat_prs ,     --|  M A T R I C E
```

pntr :T_mat_prs_ptr;--| ----------

```
initialiser:                          --Initialisation des communs ( options
    DO;                               -- et dimensions variables)
        CALL startg;                  --Pour les graphiques ....
etiq_1000:                            --Passage au cas suivant si 1°
        CALL o7init;                  -- utilisateur est content et presse.
    END initialiser;                  --


geometrie  :                          --Definition de la geometrie par les
    do;
        CALL o7qad1(tsoms,iquadr);-- tableaux des sommets et elements
        CALL o7inqd(tsoms,iquadr,--Definition des degres de liberte
                    inquad);      -- suivant geom. elements finis et
                                  -- fonctions approchees:
                                  --        vitesse ux,uy
        IF(.)CALL o7diff(tsoms); --Deformation du domaine?

    END geometrie;


    CALL o7prep(elfq2a,elfq2b)    --Definition fonctions de base de la
                                  -- methode d°elements finis sur ref.


    -- Les donnees "statiques" sont maintenant pretes.On donne les
    -- valeurs initiales aux quantites ux,uy sur lesquelles on va
    -- iterer pour la resolution du probleme NON-LINEAIRE).

    CALL o7xsol(tsoms,inquad,xsol); --Remplit xsol:point de depart
    CALL 07div (tsoms,inquad,elfq2a, --Impressions seulement
                xsol);

    --  <<<<  I T E R O N S    M A I N T E N A N T     >>>>


iteration_non_lineaire:
    DO UNTIL("convergence");          --On utilise la difference entre
                                      -- iteres pour apprecier.
        ...
        CALL o8asmr (tsoms,           --Assemblage de la matrice et du
                     inquad,          -- second membre.
                     elfq2a,elfq2b,
                     mat,             --Matrice creuse sera remplie
                     pntr,            --T_mat_prs_ptr associe sera rempli
                                      -- une fois pour toute au premier
```

```
                                    -- appel.
                        secmbr,     --Second membre (terme non-lineaire)
                                    -- a calculer
                        xsol        --Vecteur solution (iteration prec.
                                    -- sert ici a calculer termes non
                                ); -- lineaires.
          IF("test")    THEN        --Test sans interet en exploitation
 test_assemblage_et_resolution:
                DO;
                     CALL mulmat(...);CALL crmc3d(...);
                     CALL drcr3d(...);CALL o7prtd(...);
                END test_assemblage_et_resolution;


          -- Sauver valeur de xsol a l'iteration precedente pour tests
          zw = xsol  ;
          -- Decomposer la matrice sous forme L*U
          CALL crmc3d(pntr,mat,,,,,mat,)     ;  --  2 fois mat (pgm
                                                --  (C) MODULEF )
          -- Resoudre le systeme lineaire
          CALL drcr3d(pntr,mat,secmbr,,,,xsol); --xsol:solution ecrit
                                                --secmbr:verifier
          -- Calculer la difference entre iteres
          erreur=MAX(ABS(XSOL-ZW)(*));
          IF (erreur<eps )  THEN "convergence=oui" ;
          ...
          IF ("option_d_impression")
                    THEN DO;.........;END;
     END iteration_non_lineaire;


     IF ("option") THEN  DO;
                            CALL o7prtd;     -- impression solution
                            CALL o7flec;...CALL grfbe1; -- Graphiques
                          END;


     IF ("..") GO TO etiq_1000;     -- passer au cas suivant si l'utili
                                    -- -sateur n'est pas degoute.
 fin:...
     CALL contrl;                   -- n'interesse que les Graphiques

     END Navier_Stokes_profil;      -- voila !!!!
```

```
o7init: SUBROUTINE ;
        DECLARE ARGUMENT IN
                    ifile:integer           --fichier sur lequel on
                                ;           -- trouve les parametres
        DECLARE COMMON
                    zcontx                  --options globales pour les
                                            -- programmes o7XXX o8XXX
                                            --dimensions tableaux
                            WRITTEN(o7init,
                                                                    )
                            KNOWN   (o8asmr,o7div,o7mtlm,o7flec,o7xsol,
                                     o8flec,o7inqd,o7prep,
                                     Navier_Stokes_profil),
                    zunite                    --unites liees aux divers fichier
                            WRITTEN(o7init)
                            KNOWN   (o7qad1,o7inqd,o7prep,o7diff,
                                     o7xsol,o7div,o8asmr,o7prtd,
                                     o8err,o8flec,o7flec);
  ...
                                      --initialisation des communs
  END o7init;
```

```
 o7qad1:SUBROUTINE;
        DECLARE ARGUMENT IN
                    iunit:INTEGER  ;  --unite lecture parametres
        DECLARE ARGUMENT OUT
                    tsoms: T_tsoms ;  --Table des sommets
                    iquadr:T_elem  ;  --Table des elements(quadrangl)
        DECLARE COMMON
                    zlftab            --Longueur disponibles pour
                                      -- les tables crees.
                          WRITTEN(Navier_Stokes_profil)
                          KNOWN  (o7qad1,
                                                                    )
                    zcontx            --Options generales
                                      --Nombre elements et sommets
                          WRITTEN(o7init,o7qad1)
                          KNOWN  (o7****,o8****),
                    zunite            --unites logiques fichiers
                          WRITTEN(o7init)   --initialisation
                          KNOWN(******),    --utilisation generale
                    zqad1             --parametres maillage
                          WRITTEN(o7qad1)   --suivant demande
                          KNOWN("graphics");--
 DO;
   ...                    --lire les parametres,les imprimer
   FOR_EACH(isomet)       --Boucle pour remplir table des
           DO;            -- Sommets.
                tsoms.sommet(isomet)=...; -- code  '0' :Interieur du
                                          --              domaine
                                          --       '1' :bord verticaux
                                          --       '2' :bord horizont.
                                          --      '-2' :bord horizont.
                                          --              vitesse ¬=0
           END;
   FOR_EACH(ielemt)       --Boucle pour remplir table des elements
                iquadr.element(ielemt)=...; --Numeros des sommets
   IF("option") THEN ...  ;  --Impressions eventuelles
 END o7qad1;
```

```
o7inqd:SUBROUTINE;                          --Identification et numerotation
                                            -- des degres de liberte.
       DECLARE ARGUMENT IN
                    tsoms  :T_tsoms,  --Table des sommets
                    iquadr :T_element;--Table des elements
       DECLARE ARGUMENT OUT
                    inquad :T_deglib ;--Table des degres de liberte
       DECLARE COMMON
                    zcontx  WRITTEN(o7init,o7qad1,o7inqd)
                            KNOWN  (o7****,o8****)
                            ::(,,,,,nnoeud,     -- deglib figes ou non
                                  nnbas ,       -- deglib non figes
                                  nfbas,,),     -- inconnues
                    zunite  WRITTEN(o7init)
                            KNOWN(*******),
                    zlftab  WRITTEN(Navier_Stokes_profil)
                            KNOWN(o7qad1,o7inqd),
                    zwork   WRITTEN(o7inqd)          --zone de travail
                                          ;     -- 'volatile'
    ...                                  -- Initialisations
    FOR_EACH(element)                    -- Placer dans inquad les degres
         DO;                             --  de liberte correspondant aux
              inquad(element).nsom=...; --  sommets du maillage
              inquad(element).ndeglib_sommet=...;
                                         -- Pour l'instant le ndeglib
                                         --  est egal au nsom.Mais on
                                         --  renumerotera pour avoir la
                                         --  structure bande.
         END;


id_deglib:                               --Numeroter les degres de lib.
         DO;                             -- ceci necessite leur identifi-
                                         -- cation en tenant compte des
                                         -- proprietes 'globales' de la
                                         -- geometrie.
    -- Numerotation des degres de libertes portes par les sommets
      -- Il se trouve qu'il y a 1 degre de liberte par sommet et il
      -- suffit donc de lui attribuer le meme numero qu'au sommet.
    --
    -- Numerotation des degres de liberte portes par les cotes
      -- On emploie la methode suivante basee sur l'observation qu'un
      --  cote figure dans 2 elements au plus (1 si au bord)
      -- La structure liste_cotes ,implementee a l'aide de
      --    II         (dans le COMMON ZW)
```

```
      --    IDEP,JDEP  pointeurs
      -- represente la liste des cotes qui ont ete trouves une fois en
      -- explorant le maillage element par element.Un cote est repere
      -- par la cle formee des numeros des deux sommets dans l'ordre
      -- croissant.
      -- Lorsque l'on trouve un nouveau cote on lui affecte un numero
      -- et l'on identifie les degres de liberte associes;on introduit
      -- ce cote dans la liste liste_cotes.On tient a jour le premier
      -- numero de degre de liberte disponible.
      -- Lorsque l'on retrouve le cote on connait les degres de liberte
      -- associes ,ceci permet de leur affecter le meme numero.On retire
      -- alors le cote de la liste.
      -- Ceci pourrait etre rendu plus performant en remplacant la
      -- liste par une structure permettant des recherches sur cle
      -- plus efficaces.Toutefois la liste des cotes reste relativement
      -- courte,d'ou la methode retenue.
    --
    -- Numerotation des degres de liberte a l'interieur des elements.
      -- Ces degres de liberte ne sont rencontres qu'une fois lorsqu'
      -- on parcourt la  liste des elements.On leur affecte le premier
      -- numero de degre de liberte disponible,que l'on met a jour.
    --
   --<<CECI documente les lignes 800 a 1920 de o7inqd>>



   -- Mise a jour du commun zcontx contenant les dimensions
     nnoeud=        ;                -- nombre degres de liberte
     nnbas =        ;                --  ...  non figes
     nfbas = 2*nnbas;                -- nombre inconnues



   --Renumerotation pour obtenir une structure bande refletant la
   --numerotation initiale des elements.
     --on attribue les nouveaux numeros aux degres de libertes non figes
     --dans l'ordre dans lequel ils apparaissent lorsque l'on parcourt
     --le maillage element par element.
     --les degres de libertes sur le bord sont places a la fin avec
     --cette numerotation.(Ceci permet de tenir compte des donnees
     --de Dirichlet non homogenes dans o7mtlm,o8asmr,o0frt2).
     --pour ce faire on emploie une structure de liste implementee
     -- a l'aide du tableau jj (dans le COMMON ZWORK).Ceci est
     -- plus complique qu'efficace.(Une table donnant pour chaque
     -- ancien numero le nouveau et permettant d'identifier les
```

```
      -- degres de liberte non encore renumerotes suffit...)
    --<<CECI documente les lignes 1940 a 2750 >>



    --Rappel sur degres_de_liberte et fn_base

     1/ Les degres de liberte sont lies a la methode d'element finis
        :ils 'parametrent' l'espace de fonctions dans lequel on repre-
         -sente chacune des composantes de la vitesse.
        Un degre de liberte est dit 'fige' s'il correspond a une donnee
        au bord (de type 'Dirichlet' non homogene).
     2/ Le terme fonction de base fait ICI reference a la base de l'espac
        vectoriel ou evolue la solution du probleme representant les 2
        composantes de la vitesse.CECI n'est pas une TERMINOLOGIE
        CLASSIQUE mais a ete utilise ICI de facon suffisamment
        systematique pour ne pas poser de probleme.
     3/ Du fait de 1/ et 2/ une fonction de base pourra etre figee ou
        non.
     4/ Au degre_de_liberte i on fait correspondre les fn_base id_1,id_2
        avec                id_1=2*i-1    id_2=2*i pour maintenir une
        structure  profil creuse au systeme global , du fait des COUPLA-
        GES entre les 2 composantes.
  END o7inqd;
```

```
o7prep: SUBROUTINE;                          --Definition des fonctions de
                                             -- base (i.e. 'de FORME ') sur
                                             -- l'element de reference,ainsi
                                             -- que des formules d'integration
                                             -- numerique.
        DECLARE ARGUMENT IN
                    (idima,idimb) :          --longueur fournies pour les
                         INTEGER ;           -- tables
        DECLARE ARGUMENT OUT
                    (elfq2a,elfq2b):         --tables decrivant les elements
                         T_descr ;
        DECLARE COMMON
                     zcontx
                            WRITTEN (o7prep),
                     zunite;


  -- Determiner si formules standart ?
  READ(..,..);     .........  ;IF ("dimension_insuffisante") THEN STOP;
  ...
  IF  ("nonstandart")
        THEN                                 --Lire coordonnees des points et
             READ elfq2*.x(*),               -- coefficients associes.
                        .y(*),               --L'utilisateur donne ici les
                        .coef(*);            -- formules souhaitees.
        ELSE                                 --Calculer les coefficients pour
             DO;                             -- les formules usuelles.
                  elfq2*.x(*)=...            --On dispose de plusieur formule
                  elfq2*.y(*)=...            -- les unes donnant des coeff.
                  elfq2*.coef(*)=...         -- faciles a verifier,les autres
             END;                            -- visant la precision.


  --Maintenant que les points et les coefficients sont connus,on
  -- calcule UNE FOIS POUR TOUTES les valeurs en ces points des
  -- fonctions de base et de leurs derivees.


   FOR_EACH(pinum)                           --operer par point d'integration
         DO;                                 -- sur elmt.ref.
             elfq2*.val_fonc_base= ...;--dans le programme on remplit
                   .val_ddx=       ...;--separement les 2 tables bien
                   .val_ddy=       ...;--que les formules soient ident.
          END;
   IF("impresion_desiree") THEN ....         --Pour verifications
```

```
    -- Toute la partie "METHODE D'APPROXIMATION / CHOIX DE L'ELEMENT
    -- FINI " est concentree dans 3 sous programmes :o7prep,o7mtlm et
    -- o7div.(o7div est une specialisation de certains 'sous-algorithmes'
    -- de o7mtlm destinee a calculer et imprimer la  norme de la
    -- divergence .)
    -- Le reste est largement independant de l'approximation.
    --
   END o7prep;
```

```
o7mtlm:SUBROUTINE;                          --Calcul des matrices elementai-
                                            -- res.Ces matrices elementaires
                                            -- representent la contribution
                                            -- d'un element aux matrices
                                            -- representant le systeme
                                            -- 'global'.(Il s'agit de
      DECLARE ARGUMENT IN                   -- contributions ADDITIVES ).
                  inq     :INTEGER,         --Numero de l'element considere
                  tsoms   :T_tsoms,         --Table des sommets
                  inquad  :T_deglib,        --Table des degres de liberte
                 (elfq2*) :T_descr ,        --Description elmt. reference
                  xsol    :T_vect  ,        --Vecteur vitesse a l'iteration
                                            -- precedente,pour calcul des
                                            -- NON-LINEARITES.
                 (reyno,eps)                --Coefficients scalaires:
                          :REAL     ,       -- nb. de Reynolds,penalisation
                                            -- divergence.
                  icode   :BIT(4)           --Options:permet de selection-
                                          ; -- ner les calculs desires.
      DECLARE ARGUMENT OUT ()               --Tous les resultats sont places
                                            -- dans le COMMON /ZQUA/ qui est
                                            -- entierement calcule a chaque
                                            -- appel.Ces resultats ne sont
                                          ; -- utilises "qu'une fois".
      DECLARE COMMON
                  zcontx ,
                  zunite ,
                  zlftab ,
                  zwork   WRITTEN (o7mtlm)  -- zone de travail
                          KNOWN   (*******) -- Attention sert de zone
                                           ,-- de travail "volatile".
                  zqua    WRITTEN (o7mtlm)  --Resultats :matrices
                                            -- elementaires.
                          KNOWN   (CALLING_PROC)
                                  (o8asmr,front2);
  --


  -- Ce programme contient tout ce qui permet de calculer une quantite
  --  sur un element de la discretisation du domaine.
  --
```

```
-- << D E S C R I P T I O N   S I M P L I F I E E >>


-- De maniere generale on opere comme suit

--     1) le degre_de_liberte_sur_el_reference ir °correspond° au
--        degre de liberte i=inquad(inq).ndeglib(ir) pour le systeme
--        global.

--     2) On construit une application "changement de variable"
--        CV envoyant l°element de reference sur l°element
--        inquad.element(inq),de telle sorte que ir->i.Cette
--        application doit etre un diffeomorphisme assez regulier pour
--        que l'on puisse effectuer le changement de variables dans
--        les integrales,et calculer les gradients des fonctions de
--        base.

--     3) Les fonctions sur l°element sont construites comme images
--        de fonctions sur l°element de reference.

--     4) Le changement de variable est utilise pour ramener a des
--        integrations numeriques sur l°element de reference.

--     5) On obtient des matrices elementaires indexees par degre
--        de liberte °ir° (c.f. 1/ ).Si bien que matlm(ir1,ir2)
--        est la contribution de l°element au terme
--        mat(ir1->i1,ir2->i2) de la matrice "complete" (dite aussi
--        "conceptuelle" ou "virtuelle" parceque TROP GRANDE POUR
--         ETRE STOCKEE)
--
--
--
--
--
--   << D E S C R I P T I O N   PLUS   P R E C I S E  >>
--
--
--
-- En fait,tout ce qui vient d°etre dit plus haut est essentiellement
-- valable dans le cas d°UNE SEULE EQUATION.Ici a un degre de liberte
-- de la methode d°elements finis correspondent 2 fonctions de base
-- associees au meme parametre (degre de liberte) dans le parametrage
-- de chacune des composantes de la vitesse.Le systeme etant COUPLE
-- il y a lieu d'en considerer les inconnues dans leur ensemble.
```

```
--
--
--    1-bis/ Le degre_de_liberte_sur_el_reference ir °correspond
--           au degre_de_liberte i =inquad(inq).ndeglib(ir) dans
--           la description GLOBALE de l°approximation d°UNE
--           composante.
--           Il correspond aux  fn_base
--              id = 2*i-1      pour la premiere composante
--              id = 2*i        pour la deuxieme .
--
--    2-bis/ <cf. 2/ > .
--
--    3-bis/ <cf. 3/ > .On travaille fonction inconnue par fonction
--              inconnue,pour chaque fonction on revient a la
--              definition de l°approximation et donc aux degres de
--              libertes et aux CV decrits.Les termes de couplage
--              sont des produits <de derivees> des 2 fonctions inc.
--
--    4-bis/ <cf. 4/ > .
--
--    5-bis/ On obtient des matrices elementaires indexees par
--              fn_base_sur_el_reference idr.
--           La correspondance
--              fn_base_sur_el_reference <->  fn_base
--                                    idr <->  id
--           s°effectue en passant par l°application
--              degre_de_liberte_sur_el_reference  <-> deglib
--                                                 ir  <-> i
--           si bien que matlm(idr_1,idr_2) est la contribution
--           au terme mat(id_1,id_2) avec
--           idr -> id :: id = 2*inquad(inq).ndeglib(idr/2)-1+
--                             +MOD(idr,2)
--
```

```
   --
   construire_CV:                          -- construction changement vars.
           DO;                             --
               FOR_EACH (ir)               -- pour chaque degre de liberte
                    DO;                    -- correspondant a un sommet
                                           -- sur l'elmt.ref.
                      nz(ir)=inquad.ndeglib_sommet(inq,ir);--num "global"
                      xz    =tsoms.x(inquad.nsom(inq,ir)) ;--coordonnee
                      ...
                    END;
                pol(*,*)= ....             -- coefficients des polynomes
                                           -- representant CV.
                polj(*)=  ....             -- polynome representant |dCV|
           END construire_CV;              --


   --Integration numerique  termes ordre interieur
  calcul_1:FOR_EACH(pinum)                 -- on travaille point par point
                                           -- de facon a ne calculer qu'une
                DO;                        -- fois les donnees "geometriques
                  jaco=...                 -- |dCV|() Jacobien de CV
                  (x,y)=CV(elfq2a.point_integr_num.(x,y)(pinum))
                  dcv(*,*)=(dCV)(x,y)      -- Derivees de CV en x,y
                  dcvi="inverse(dcv)"      -- L'inverse sert aussi,mais on
                                           -- simplifie un peu...
                  --Fonctions de base au point x,y.On utilise aussi
                  -- leurs derivees ,un peu plus complexes a calculer.
                  ...
                  --Interpole du vecteur vitesse xsol au point (x,y)
                  --Ce vecteur est represente comme somme de fonctions
                  -- de base,avec coefficients dans xsol.
                  (s1,s2)=SUM(xsol((idr->id)(*))*
                              elfq2a.val_fonc_base((id->ir)(*)));
                  --
                  --remplissage de la contribution de ce point d'integra
                  -- -tion numerique a toutes les quantites calculees.
                  somgrd(*,*):+=           -- par produit de fonctions de
                  b(*,*):+=                -- base en numerotation "idr"
                  sm(*) :+=                -- Second membre
                END calcul_1;


   -- Termes de degre plus eleve    les formules se compliquent,mais
```

```
  -- ceci releve des memes idees que "calcul1"
 calcul_2:DO;
                  somdiv(*,*)=          --
          END calcul2;
  --
  -- Matrices elementaires.
  --
     matlm=somgrd/reyno + somdiv/eps + (b-TRANSPOSE(b))/2.;
  --
  -- Influence conditions aux limites sur second membre
  --
     if ("option") then                  -- ce traitement peut etre
                                         -- effectue au choix par o7mtlm
                                         -- ou lors de l'assemblage
report_figes_sm:
       DO;                               -- voir (*) ci dessous
        FOR_EACH(idr_1)                  -- boucle sur colonnes matlm
         IF((idr->id)(idr_1)>nfbas)      -- ne concerne que les figes.
           THEN
            FOR_EACH(idr_2)              -- boucle sur les lignes
                                         -- reporter au second membre
                                         -- les contributions de la
                                         -- fn_base figee.
            sm(idr_2):+= -matlm(idr_2,idr_1)*xsol((idr->id)(idr_1));
        END report_figes_sm;
   -- (*) NOTE
   --          Les fonctions de base figees ne correspondent pas a
   -- des inconnues du probleme :la matrice et le second membre ne
   -- possedent donc pas de ligne les concernant.(Au moins dans leur
   -- representation mathematique).
   -- Toutefois le vecteur solution compte
   --   1/les inconnues effectives : de 1 a nfbas
   --   2/les valeurs figees :donnees de Dirichlet non homogenes de
   --      nfbas+1 a 2*nnoeud.
  IF("option_d_impression") THEN ...;
  END o7mtlm;
```

```
o7xsol:SUBROUTINE;                          --Initialisation solution
                                            -- pour iterations non lineaires
                                            -- permettant les donnees de
                                            -- Dirichlet non homogenes
      DECLARE ARGUMENT IN
                  tsoms: T_tsoms,   --Geometrie
                  inquad:T_deglib;  --les degres de liberte indexent
                                    -- naturellement xsol
      DECLARE ARGUMENT OUT
                  xsol : T_vect(lnxsol),-- Vecteur vitesse
                  lnxsol:INTEGER  ; --longueur necessaire
      DECLARE SUBROUTINE            --Voici les points d'entree
                                    -- par lesquels l'utilisateur
                                    -- donne ses conditions aux
                                    -- limites
                  fu1 ((x,y):REAL IN-- coordonnees d'un sommet
                       ,code:INTEGER IN ) -- code du sommet
                      RETURNS(REAL),-- Composante horizontale vitesse
                  fu2 LIKE fu1    ; -- ---------- verticale   ------


  END o7xsol;                       -- le reste ne presente pas
                                    -- d'interet particulier pour
                                    -- etre plus documente..
```

```
o7div :SUBROUTINE;                          --Calcul de la norme L2 de la
                                            -- divergence de la vitesse.
       --Cette quantite sert a juger du resultat,n'etant pas fixee a
       -- 0, mais simplement l'objet d'une PENALISATION.
       --
       --Ce programme est une combinaison/specialisation d'algorithmes
       -- de o7mtlm et o8asmr.



   DECLARE ARGUMENT IN
                    tsoms:T_tsoms,     -- Sommets
                    inquad:T_deglib,   -- Degres de liberte
                    elfq2a:T_descr ,   -- Un seul type integration
                    xsol  :T_vect;     -- On calcule ||div(xsol)||
   DECLARE ARGUMENT OUT ();            -- Sans influence exterieure
                                       --  ne fait qu'imprimer
   DECLARE COMMON   zqua               -- Zone de travail "volatile"
                        WRITTEN(o7div)
                    zwork          ,   -- Autre zone de travail
                    zlftab         ,
                    zcontx         ;



div2=0.;
FOR_EACH(element)                      -- Balayage par elements
   DO;
     ...                               -- Construire CV comme o7mtlm
     FOR_EACH(pinum)                   -- Par point d'integration
        DO;
        ...                            -- Valeur CV au point,jacobien,
        dcvi(*,*)=                     -- dCV pour calcul des derivees.
        FOR_EACH (inquad(element).ndeglib(*))
            DO;
            div2:+="contribution"(xsol((i ->id)(inquad(element).ndeglib
                                  (*))));
            END;
         END;
    END;
END o7div;
```

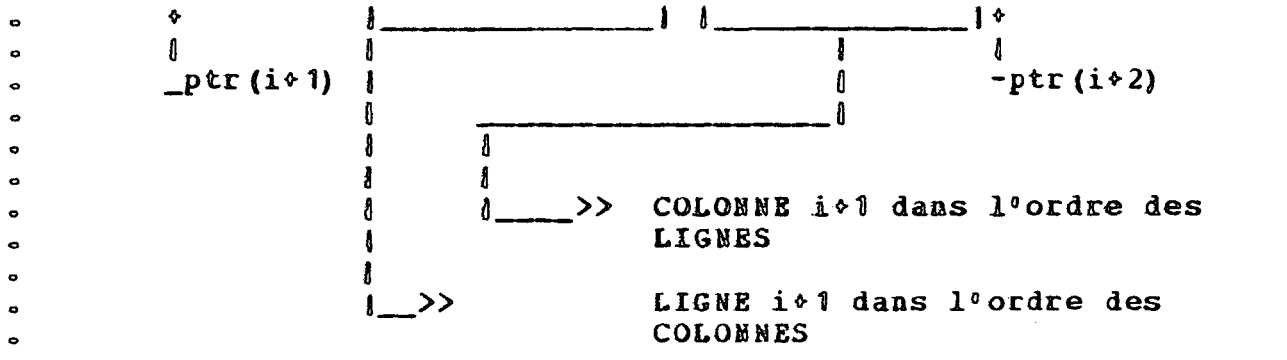
****

NOTE concernant le stockage des matrices de type T_mat_prs

On utilise la notation Vmat(*,*) pour faire reference a la matrice conceptuelle (mathematique) que l'on represente. (La notation Vmat signifie "matrice VIRTUELLE" alors que mat_ ou Rmat est la matrice effectivement representee.

Ces matrices sont de profil symetrique. On represente donc
1/En dessous de la diagonale, les coefficients ranges ligne par ligne:
(soit nummin(i)=MIN (j|Vmat(i,j)~=0))
Vmat(i,nummin(i)),Vmat(i,1+nummin(i)),...Vmat(i,i)
2/Au dessus de la diagonale, les coefficients sont ranges colonne par colonne, sur la colonne i on represente :
(soit nummin(i)=MIN(j|Vmat(j,i)~=0))
Vmat(nummin(i),i),Vmat(1+nummin(i),i),...Vmat(i,i)
Ceci est realise en placant les coefficients dans mat_prs et des pointeurs dans mat_prs_ptr. Plus precisement mat_prs_ptr(i+1) donne la position dans le tableau mat_prs du coefficient Vmat(i,

Les coefficients de Vmat sont ranges dans l'ordre suivant



L'interet de ce mode de stockage est que l'on ne represente que la partie de la matrice risquant de se remplir lors de :
1/Decomposition "LU" / "LDL'" / "LL'"
2/Resolution par methode d'elimination (GAUSS...) .

Ceci signifie que si A est de type T_mat_prs et est associe a P_A:T_mat_prs_ptr,alors
1/A=LU avec L :triangulaire inferieure
U : superieure
et la matrice L*U est de type T_mat_prs et est aussi associee a P_A.

Si on impose par exemple une des conditions diag(L)=(*)1 ou bien diag(U)=(*)1 on peut representer tous les autres coefficients de L et U dans une matrice de type T_mat_prs associee au meme descripteur P_A.

On peut aussi realiser la decomposition LU ou LL' "en place".

Du fait du mode de stockage,on a privilegie l'acces aux colonnes de la partie de la matrice au dessus de la diagonale,et l'acces aux lignes en dessous de la diagonale.
Ceci permet certaines optimisations aussi bien pour le calcul des decompositions LU que pour la resolution des systemes de la forme LUX=b.

PLUS PRECISEMENT :

1/DECOMPOSITION
L U =A
On identifie les coefficients de L et U un par un.Pour un coefficient a identifier on accede a une ligne de L et une colonne de U.Des optimisations sont possibles car on identifie en operant dans un ordre fixe:ligne de L ,puis colonne de U ,.
Le mode de representation assure une bonne localite des acces pour cet algorithme.

2/RESOLUTION de LUX=b
On effectue successivement LY=b et UX=Y
La resolution de LY=b ("descente") se fait naturellement en operant par lignes.Ceci permet l'accumulation de resultats partiels en double precision,sans stocker ni L ni U ,ni X,ni b en double precision.
Pour la resolution de UX=Y l'acces par colonne est efficace en reordonnant le calcul:

```
DO i=DIM(U) TO 1 STEP -1
   Y(i)= ...
   FOR_EACH (j| j<i ) Y(j)=Y(j)-U(j,i)*Y(i);
```

END ;
Ceci permet l'acces par colonnes de U.Toutefois,pour pouvoir accumuler les resultats partiels en double precision il faut stocker Y en double precision.

```
o8asmr:SUBROUTINE ;                          -- Assemblage en vue de la
                                             -- resolution par la methode "LU
                                             -- La matrice est a profil syme-
                                             -- trique,mais n'est pas nec.
                                             -- symetrique.
        DECLARE ARGUMENT IN
                    tsoms  :T_tsoms  ,       -- Table des sommets -> o7mtlm
                    inquad :T_deglib,        -- Degres de liberte
                    (elfq2a,elfq2b)          -- A l'intention de
                           :T_descr  ,       --       -> 07mtlm
                    xsol   :T_vect   ,       -- Calcul NON LINEARITES ->o7mtl
                    icode  :INTEGER  ,       -- Options
                    reyno  :REAL     ,       -- Parametre "physique" du fluid
                    eps    :REAL     ;       -- Parametre de PENALISATION div
        DECLARE ARGUMENT OUT
                    mat    :T_mat_prs,       --|Matrice profil symetrique
                    pntr   :T_mat_prs_ptr,   --| et pointeurs associes.
                    secmbr :T_vect;          -- Second membre assemble aussi
        DECLARE COMMON
                    zelftab,
                    zcontx,
                    zunite,
                    zqua;                    -- Zone de communications avec
                                             -- o7mtlm.Cette zone est utilise
                                             -- par o7mtlm en ECRITURE seulem
                                             -- ./Tenir compte de ceci pour
                                             -- etudier la parallelisation de
                                             -- appels a o7mtlm.
 -- IF ("option_de_icode") THEN              -- Remplissage de pntr:descripti
rempli_pntr:                                 -- de la structure de la matrice
          DO;
            ...                              -- verification dimension pntr.
                                             -- pour verifier mat il faut
                                             -- attendre de connaitre pntr.
            -- Premiere etape :pntr(j)=min(i|Vmat(i,j)¬=0 & i<=j)
            DO i=1 TO LENGTH(pntr) ;         -- indiquer que le terme diagona
               pntr(i)=i ;                   -- doit etre represente.Sinon io
            END;                             -- decomposition impossible.



            -- Boucle sur les elements pour rechercher les contributions
            -- aux divers termes de Vmat.Ces contributions sont consider
            -- comme non nulle et on ne TIENT PAS COMPTE de l'annullatio
            -- de contributions entre elles.
```

```
            FOR_EACH (element)          -- on reconstruit les positions
                                        -- dans la matrice: fn_base id
                                        -- a partir des degres de liberte.
               DO;                      -- (Cf. o7mtlm)
                 nummin=MIN((i->id)(inquad(element).ndeglib(*)))
                                        -- voici la premiere colonne a
                                        -- representer pour les lignes et
                                        -- ou intervient cet element.
                 FOR_EACH (deglib IN inquad(element).deglib(*))
                   IF (deglib<=nnbase)-- Seulement les deglib non figes
                     THEN               -- correspondent a des inconnues e
                     DO;                -- donc a des lignes de matrice.
                     (lig_1,lig_2)=(i->id)(deglib); -- num. fn_base
                     pntr(lig_1)=MIN(pntr(lig_1,nummin) -- voila
                     END;
               END;
            -- Maintenant on a toute l'information necessaire pour
            -- positionner les coefficients diagonaux de Vmat et remplir
            -- pntr de maniere definitive.
            DO i=1 TO nfbas+1;          -- Ce truc est fondamentalement
               pntr(i)=...              -- sequentiel.
            END;
            ...                         -- verifier dimension de mat
         END remplir_pntr;


remplir_mat:                            -- calcul des coefficients
         DO;
           FOR_EACH(element)            -- Par element:les contributions
                                        -- sont des integrales calculees
              DO;                       -- element par element.
                CALL o7mtlm(element,    -- ref. element concerne
                     tsoms,tquad,inquad,  -- geometrie
                     elfq2a,elfq2b,       -- formules integration
                     xsol,              -- pour calcul non linearites
                     icode,reyno,eps);
                 -- reporter les contributions dans la matrice
                 FOR_EACH(idr_1)        -- idr_1:fn_base_sur_el_referenc
                    IF((idr->id)(idr_1)<=nnbase) -- seulement si non fi
                       THEN
                        DO;
```

```
                        FOR_EACH(idr_2) -- boucle sur les colonnes
                         IF((idr->id)(idr_2)<=nnbase) -- si non fige.
                           THEN
                            DO;          -- accumuler la contribution a
                                         -- Vmat(id_1,id_2)
                            mat(ncmuns((idr->id)(idr_1),(idr->id)(idr_2
                                  :+=matlm(idr_1,idr_2);
                            END;
                       IF("option_icode")  -- accumuler second membre
                         THEN
                           secmbr((idr->id)(idr_1)):+=sm(idr_1);
                       END;
              END;
         END remplir_mat;
   END o8asmr;
```

<< M E T H O D E F R O N T A L E >>
<< Principes >>

Telle qu'implementee ici la methode frontale consiste a effectuer la resolution de la matrice "conceptuelle" Vmat (qui sera dite matrice VIRTUELLE) , en operant etape par etape,et en ne representant,a chaque etape que les intersections des lignes et de colonnes ACTIVES (utiles) a cette etape dans Rmat.

En outre ,on parvient a conduire simultanement a la descente dans la methode de Gauss,l'accumulation des contributions des elements (dans Rmat).

A chaque etape on effectue:

DESCENTE DANS LA METHODE DE GAUSS,ACCUMULATION DES CONTRIBUTIONS

1/ Assemblage d'une liste d'elements.Les fn_base qui y interviennent sont soit deja actives,soit le deviennent (fn_base "ENTRANTES").On doit accumuler les contributions elementaires pour chaque coefficient de Vmat.Toutes les positions necessaires sont representees dans Rmat.

2/ On trie les fn_base actives en 3 categories

a/ les fn_base figees et qui n'interviennent plus par la suite (sortantes) elles sont dites FIGEES_S

b/ les fn_base non figees et qui n'interviennent plus dans les etapes suivantes;elles sont dites SORTANTES

c/ les autres sont dites RESTANTES

Normalement il y a toujours des restantes sauf a la derniere etape sinon le systeme se decouplerait ... et on en profiterait...

3/ On procede aux operations suivantes:

a/ On modifie le second membre pour tenir compte des fn_base FIGEE_S.(Ne correspondent pas a des inconnues).

b/ On elimine les inconnues des lignes SORTANTES. Ceci revient a conduire la phase de descente pour les pivots en Vmat(SORTANTE,SORTANTE).

c/ On garde Rmat(SORTANTE,*) pour calculer les inconnues eliminees lors de la remontee.(Ici on simplifie les transferts en gardant tout Rmat.

d/ On recupere les positions de Rmat qui viennent d'etre liberees par les fn_base SORTANTES et FIGEE_S, en y mettant des '0.' pour les utiliser a accumuler d'autres coefficients.

ETAPE DE REMONTEE

Les etapes sont parcourues en sens inverse de la descente.
A chaque etape on effectue:

a/On restore Rmat dans l'etat ou il etait a la fin de l'elimination dans l'etape correspondante de la descente.

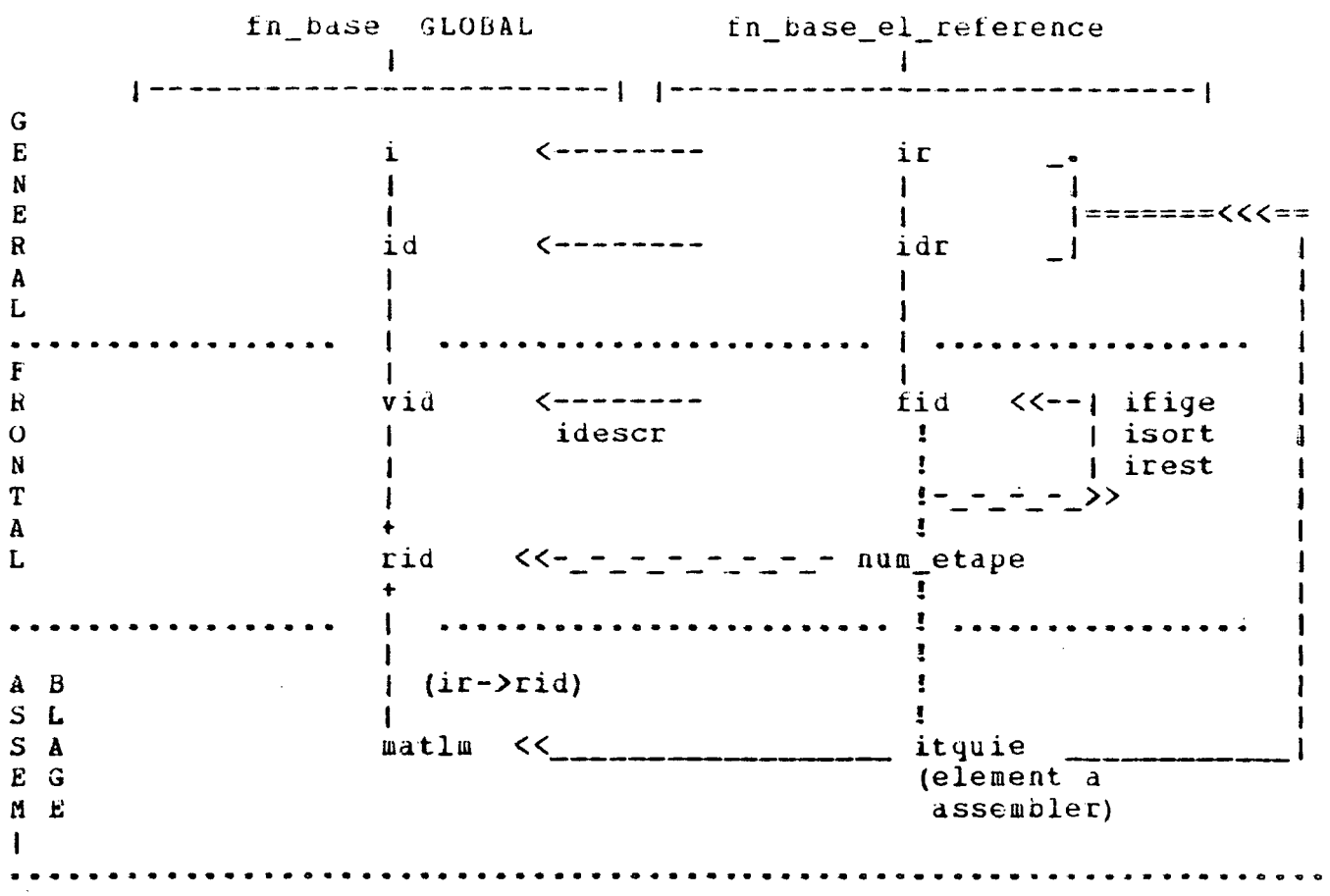
b/On calcule les composantes de la solution correspondantes aux fn_base SORTANTES

On remarque qu'a la derniere etape tous les fn_base sont SORTANT ce qui perment de passer a la remontee.

STRUCTURES DE DONNEES UTILISEES

Vmat	indexe par fn_base:c'est la matrice conceptuelle du probleme.Elle est bien sur trop importante pour etre stockee.De plus elle est bordee par les colonnes correspondant aux fn_base FIGES, ce qui permet de tenir compte des donnees de Dirichlet.
Rmat	matrice (npos,npos) dans laquelle on represente les coefficients utiles (ACTIFS) a une etape donnee.D'une etape a l'autre on modifie la correspondance Rmat->Vmat
Fmat	represente la partie utilisee ,a une etape donnee dans Rmat.Les lignes et les colonne de Fmat sont ordonnees suivant l'ordre logique pour les operations de la metho de de Gauss: FIGES_S de 1 a ifige SORTANT de ifige+1 a ifige+isort RESTANT de ifige+isort+1 a ntot=ifige+isort+irest

ON a le SCHEMA GLOBAL decrivant les INDEXATIONS :



REALISATION de ces APPLICATIONS

Par ETAPE:	ifige,isort,irest,ntot	calcules par o0frt1 servent a structurer Fmat logiquement.
	idescr	application: (fid->vid=id).
GLOBALEMENT		
	iprdeg	application id=vid-> rid Cette application est globale car on ne modifie pas la positi rid affectee a un id dans Rmat d'une etape a l'autre.
	id=vid	on identifie ces indices

```
Navier_Stokes_Frontal;
        MAIN_PROGRAM;
       DECLARE    SUBROUTINE                        --Sous Programmes
                    o7init   (INTEGER),             --Initialisations o7..
                    o7qad1   (                      --Construction maillage
                              T_tsoms,              --Tableau sommets
                              T_elem,),             --tableau elements
                    o7inqd   (                      --Construction table de
                              T_tsoms,              -- degres de liberte
                              T_elem ,              --
                              T_deglib),            --
                    o7prep   (                      --Construction table
                              T_descr,T_descr,      -- decrivant les elem-
                              ,),                   -- -de reference
                    o7diff   (T_tsoms),             --Deformation maillage
                    o7xsol   (                      --Initialisation du
                              T_tsoms,              -- vecteur "solution"
                              T_deglib,             --
                              T_vect(lnxsol),),     --vecteur solution
                    o7div    (                      --Calcul norme
                              T_tsoms,              -- divergence vitesse
                              T_deglib,             --
                              T_descr,              --Descr. pour int.num.
                              T_vect(lnxsol)),      --Solution
              o0frt1 (                              --Preparer  frontale
                    T_deglib,                       --geometrie
                    T_strat ,                       --description etapes
                    T_vect_i,                       --rend (vid->rid)
                    T_vect_i),                      --zone de travail
              o0frt2(                               -- Descente/Assembl.
                    T_deglib,                       -- geometrie pour
                                                    -- mtlm et assembl.
                    T_tsoms,                        -- pour o7mtlm
                    (2) T_descr,                    -- pour o7mtlm
                    T_vect_i,                       -- (vid->rid)
                    T_strat,                        -- pour assemblage
                    T_vect,                         -- second membre
                    T_vect,                         -- Rmat
                    T_vect_i ,                      -- zone de travail
                    T_vect,                         -- solution a l'etape
                                                    -- precedente (NON
                              -- LINEARITES et Dirichlet non homo-
                              -- gene.
                    INTEGER,(2) REAL),              -- parametres
          o0frt3  (                                 -- remontee methode
```

```
                                          -- frontale
                    T_vect,               -- rend solution
                    T_vect,               -- second membre tel
                                          -- que rendu par frt2
                    T_vect_i,             -- vid->rid
                    Rmat,T_vect_i,        -- zones de travail
                    INTEGER),             -- non utilise


                   o7prtd   (T_vect,,),   --Impression
                   o8err    (T_deglib,    --Mise en forme et
                                          -- impression de la
                                          -- difference entre
                                          -- iteres
                             T_vect,T_vect, --Solutions a comparer
                             ,,,),
                  (startg,o7flec,o8flec,  --Pgms. graphiques
                   grfbe1,contrl)         -- sans interet ici
                             IN "graphics" PACKAGE; -- vu? ..
```

```
*************************************************************************
*                                                                       *
*                  Voici les principaux types de tableaux               *
*                  manipules                                            *
*                                                                       *
*************************************************************************
        DECLARE    TYPE
                    ( T_vect:REAL(*) ),          --Vecteurs
                    ( T_tsoms: 1 sommet (nsoms)  --Pour chaque sommet:
                                 2 (x,y) REAL    --les coordonnees
                                 2 code  INTEGER)--suivant que sur le
                                                 -- bord du domaine...
                    ( T_element:                 --pour chaque element
                               1 element (nquadr),--
                                 2 nsom  INTEGER(4)),-- numero de
                                                 -- sommet.(Ceci sert
                                                 -- a definir la geo-
                                                 -- metrie.)
                    ( T_deglib:1 element (nquadr)--Pour chaque element:
                                 2 nsom  INTEGER(4),  -- num. sommets
                                 2 ndeglib_sommets --num. des degres de
                                                 -- liberte correspond.
                                         INTEGER(4),     -- aux sommets
                                 2 ndeglib_milieu_cotes
                                                 --degres de liberte
                                                 -- associes aux milieu
                                                 -- des cotes
                                         INTEGER(4),
                                 2 ndeglib_centre
                                                 --degre de liberte
                                         INTEGER)-- au centre
                                 2 ndeglib       --au total 9 degres de
                                                 --liberte par element
                                    REDEFINES ndeglib_sommet
                                         THRU ndeglib_centre
                                         INTEGER(9)
                    (T_descr:                    --description de
                                                 -- l'element de ref.
                             1 point_integr_num --par point d'
                                                 -- integration
                                                 -- numerique sur l'
                                 (npinu*)    , -- element reference
                                 2 (x,y) REAL  , --coordonnees
                                 2  coef REAL  , --coeff.integration
                                 2  code INTEGER,--
```

```
                                2 (val_fonc_base--fonctions de base
                                 , val_ddx  ,   -- leurs d/dx
                                   val_ddy  )   -- leurs d/dy
                                        REAL(9)),
                T_strat:                -- description des elements
                                        -- entrants a une etape donnee
                     1 front(nfront), -- indexe par etape
                         2 de:INTEGER,-- premier element
                         2 a :INTEGER,-- dernier element
                         2 pas:INTEGER,-- pas d'increment de numero
                                       -- d'element
                     -- de maniere generale on aurait pu associer a
                     -- chaque etape la liste des elements entrants.
                     -- Ceci est NECESSAIRE pour operer sur un
                     -- maillage quelconque.
                T_vect_i:INTEGER(*);  -- vecteur d'indices .Sert
                                      -- a realiser les indirections
                                      -- vid->rid ,  etc...
```

```
*****************************************************************************
*                                                                           *
*              Organisation des Communs D'Utilisation Globale               *
*                                                                           *
*           (sont exclus les communs, qui ne sont connus que localement)    *
*                                                                           *
*****************************************************************************
         DECLARE    COMMON                      --
                      zcontx                    --options globales pour les
                                                -- programmes o7XXXX o8XXXX
                                                --dimension des tableaux
                            WRITTEN(o7init, o7inqd, o7prep, o7qad1,
                                    Navier_Stokes_Frontal          )
                            KNOWN  (o0frt*, o7div, o7mtlm, o7flec, o7xsol,
                                    o8flec                          ),
                      zlftab                    --longueur maximales disp.
                                                -- pour les tableaux.
                            WRITTEN(Navier_Stokes_Frontal)
                            KNOWN  (o0frt*, o7flec, o7inqd, o7mtlm,
                                    o7xsol, 08flec),
                      zunite                    --unites e/s
                            WRITTEN(Navier_Stokes_Frontal) -- P.princ.
                            KNOWN  (*)          --sert partout
                      zqad1                     --parametres de o7qad1
                            WRITTEN(o7qad1)--
                            KNOWN  ("graphics"),-- sert a faciliter
                                                -- la lecture des resultats
                                                -- (mise en page .)
                      zwork                     --zone de travail
                            WRITTEN(o7div, o7flec, o7inqd, o8flec, o0frt*)
                            KNOWN  (Navier_Stokes_Frontal),

                   disk     WRITTEN (Navier_Stokes_Frontal)
                            KNOWN(o0frt*) ;
                                      -- fichiers utilises par la
                                      -- methode frontale pour garder
                                      -- le contexte des etapes.


*****************************************************************************
     DECLARE LOCAL_VAR                  --Principaux tableaux pour tout
                                        -- le programme
                   xsol  :T_vect,       --solution apres 1'iteration
                   zw    :T_vect,       --          a 1'iteration preced.
                   tsoms :T_tsoms,      --Sommets
```

```
                    iquadr:T_element,    --Elements
                    inquad:T_deglib ,    --Degres de liberte
                   (elfq2a,
                    elfq2b):T_descr ,    --Formules integration numerique
                    Rmat  :T_vect(lnmat),--|  M A T R I C E   R E E L L E
                    iesn  :T_mat_vect_i, --zone de travail pour o0frt1
                                         --il est indique de mettre cette
                                         --variable et Rmat en recouvre-
                                         -- ment.
                    itquie:T_strat,      -- definition des  etapes
                    iprdeg:T_vect_i;     -- utilise par o0frt* :vid->rid
```

```
initialiser:                          --Initialisation des communs ( options
    DO;                               -- et dimensions variables)
        CALL startg;                  --Pour les graphiques ....
etiq_1000:                            --Passage au cas suivant si 1°
        CALL o7init;                  -- utilisateur est content et presse.
    END initialiser;                  --


geometrie  :                          --Definition de la geometrie par les
    do;
        CALL o7qad1(tsoms,iquadr);-- tableaux des sommets et elements
        CALL o7inqd(tsoms,iquadr,--Definition des degres de liberte
                    inquad);      -- suivant geom. elements finis et
                                  -- fonctions approchees:
                                  --        vitesse ux,uy
        IF(.)CALL o7diff(tsoms); --Deformation du domaine?

    END geometrie;


    CALL o7prep(elfq2a,elfq2b)    --Definition fonctions de base de la
                                  -- methode d°elements finis sur ref.


    -- Les donnees "statiques" sont maintenant pretes.On donne les
    -- valeurs initiales aux quantites ux,uy sur lesquelles on va
    -- iterer pour la resolution du probleme NON-LINEAIRE).

    CALL o7xsol(tsoms,inquad,xsol);  --Remplit xsol:point de depart
    CALL 07div (tsoms,inquad,elfq2a, --Impressions seulement
                xsol);
    --
    -- P R E P A R A T I O N  des  D O N N E E S pour F R O N T A L E
    --
    itquie(*).*= ...;                    -- definition des etapes
    --
    -- O0frt1 est appele UNE FOIS POUR TOUTES pour construire la
    -- description des etapes qui sera utilisee par o0frt2,o0frt3
    --
    CALL o0frt1(inquad,                  -- degres de liberte
                itquie,                  -- description etapes
                iprdeg,                  -- construit par o0frt1
                iesn);                   -- zone de travail
                                         -- resultats dans le fichier
                                         -- ndescr et iprdeg
```

```
     --
     --

     --  <<<<  I T E R O N S    M A I N T E N A N T     >>>>


iteration_non_lineaire:
     DO UNTIL("convergence");       --On utilise la difference entre
                                    -- iteres pour apprecier.
          ...
          secmbr=0.;                --le second membre sera rempli
                                    --par o0frt2 qui lui fera subir
                                    --les combinaisons de la descente.
          CALL o0frt2(              -- premiere phase methode frontale
               inquad,              -- pour assemblage et calculs mtlm
               tsoms,elfq2a,elfq2b,-- pour 07mtlm
               secmbr,              --second membre
               Rmat,idescr,         -- zones de travail
               xsol,                -- solution a l'iteration precedente
                                    -- pour calcul NON LINEARITES et
                                    -- donnees Dirichlet non homogenes
               icode,eps,reyno ); -- pour o7mtlm:parametres divers
          ...
          IF("test")   THEN         --Test sans interet en exploitation
test_assemblage_et_resolution:
               DO;
                    CALL o0frt3(...,icode);-- le test est selectionne
                    CALL o7prtd(...);      -- par icode
               END test_assemblage_et_resolution;


          -- Sauver valeur de xsol a l'iteration precedente pour tests
          zw = xsol  ;
          -- remontee de la methode frontale
          CALL o0frt3(xsol,         -- solution
                      secmbr,       -- construit par o0frt2
                      iprdeg,       -- construit par o0frt1
                      Rmat,         -- zone de travail
                      idescr,       -- ---  --  ----
                      icode);       -- code inutilise pour l'instant
          -- Calculer la difference entre iteres
          erreur=MAX(ABS(XSOL-ZW)(*));
          IF (erreur<eps )  THEN "convergence=oui" ;
          ...
          IF ("option_d_impression")
```

```
                    THEN DO;.........;END;
     END iteration_non_lineaire;


     IF ("option") THEN  DO;
                           CALL o7prtd;     -- impression solution
                           CALL o7flec;...CALL grfbe1; -- Graphiques
                         END;


     IF ("..") GO TO etiq_1000;     -- passer au cas suivant si l'utili
                                    -- -sateur n'est pas degoute.
fin:...
     CALL contrl;                   -- n'interesse que les Graphiques

     END Navier_Stokes_Frontal;      -- voila !!!!
```

```
o0frt1:SUBROUTINE;                          -- Phase preparatrice de la
                                            -- methode frontale.Preparation
                                            -- des tableaux iprdeg et idescr.
                                            -- Identification des Etapes.
      DECLARE ARGUMENT IN
         inquad   : T_deglib,                -- Identif. fn_base
         itquie   : T_strat ;                -- determination des elements a
                                            -- faire entrer a chaque etape.
      DECLARE ARGUMENT OUT
         iprdeg  :  T_vect_i,                -- (vid->rid)
         iesn    :  T_vect_i;                -- zone de travail:on y marque,
                                            -- pour chaque fn_base l'etape ou
                                            -- sort.
      DECLARE COMMON
         zwork                              -- zone de travail volatile
              :: (idescr:                   -- implemente une liste servant
                                            -- a l'affectation des positions
                   1 list_alloc,            -- dans Rmat:LIST_ACTIF.
                  -- 2   rid                    implicite chaque element de la
                  --                           liste correspond a une positio
                  --                           dans Rmat
                     2   fid,
                     2   vid,
                     2   rid  )             -- pointeur de liste
               WRITTEN (o0frt1),
         zlftab,
         zunite,
         zcontx,
         disk  WRITTEN (Navier_Stokes_frontal)
               KNOWN   (o0frt1,o0frt2,o0frt3)
               ::(ndescr:INTEGER,           --unite logique fichier descrip-
                                            --tion des etapes construit frt1
                  ntable:INTEGER)  ;        --fichier servant a garder Rmat
```

```
--remplir iesn                                pour chaque fn_bas determiner
remplir_iesn:                                -- l°etape ou elle sort
    DO etape=1 TO nfront;                    -- etape par etape
       DO element=itquie(etape).de TO .a BY .pas; -- voici les elements
                                                  -- a inserer.
         FOR_EACH(inquad(element).deglib)
           iesn((i->id)(.deglib))=etape;
       END;
     END remplir_iesn;


-- Maintenant,on sait a quelle etape les fn_base sortent.On peut donc
-- leur affecter des positions (:rid )  dans Rmat, etape par etape.
-- On obtient aussi les positions dans Fmat en les classant.
par_etape:
   DO etape=1 TO nfront     ;
      ifige,irest,isort=0   ;          -- pour compter les divers types

      -- collecter les informations element par element.
      DO element=itquie(etape).de TO .a BY .pas;
          DO idr_1=1 TO 18;            -- par fn_base_sur_el_reference
            IF (iprdeg((idr->id)(idr_1))¬=0)
               THEN                    -- fn_base entrante
fn_base_entrante:                      -- lui attribuer une position dan
                DO;                    -- Rmat: rid.
                  ipos,iprdeg((idr->id)(idr_1))=ilibre;
                  list_alloc(ipos).vid=(idr->id)(idr_1);
                  ilibre=list_alloc(ipos).ptr;
                END fn_base_entrante;
            END;
       END;
      --


  -- Compter les figes,les sortants et les sortants en decrivant la
  -- liste LISTE_ACTIF.Attribuer les position dans Fmat au fur  et a
  -- mesure

  list_alloc(*).fid=  ...;

  --(*) NOTE .Dans le programme on a prefere decrire list_alloc(*) en
  --          reperant les elements non dans la LISTE_ACTIF par le
  --          fait que  .rid=0
  --
  -- On a maintenant determine la situation et les tables de correspon
```

```
    -- -dance pour cette etape.On ecrit la description sur le fichier
    -- ndescr .La seule information est .fid qui deviendra idescr :
    -- et determinera pour cette etape l'application fid->rid.



    WRITE ntot,ifige,irest,isort,list_alloc(*).fid ON ndescr;
    --
    --
    -- Preparer pour l'etape suivante
    -- Exclure les sortants de LISTE_ACTIF
    --
    --(*) NOTE .Dans le programme on opere en 2 etapes qui gagneraient
    --          a etre confondues .
    END par_etape;
    --
    --On connait maintenant seulement la dimension maximale de Rmat
    -- necessaire .
    lnmat=...;
    REWIND ON ndescr;                    -- on va utiliser ce fichier pour
                                         -- la descente.
    END o0frt1;
```

```
o0frt2:SUBROUTINE;                          -- Phase de descente dans la
                                            -- methode de Gauss et d'accumu-
                                            -- lation des coetficients de la
                                            -- matrice.
        DECLARE ARGUMENT IN
                    inquad  :T_deglib,  -- pour assemblage
                    tsoms   :T_tsoms,   -- pour o7mtlm
                   (elfq2a,elfq2b)      -- formules integration numerique
                            :T_descr,   -- pour o7mtlm
                    iprdeg  :T_vect_i ,-- definition de (vid->rid)
                    itquie  :T_strat,   -- definition liste des elements
                                        -- entrants par etape.pour assemb
                    icode   :INTEGER,   -- pour o7mtlm
                    eps     :REAL,      -- parametre de penalisation
                    reyno   :REAL ;     -- parametre "physique"
        DECLARE ARGUMENT OUT
                    secmbr  :T_vect,    -- second membre .Il est modifie
                                        -- pendant la descente.ON le
                                        -- rend dans cet etat:pret pour
                                        -- remontee.
                    rmat    :T_vect(lnmat),-- zone de travail on y rend
                                        -- la valeur de rmat prete pour l
                                        -- remontee.
                    idescr  :T_vect_i,  -- zone de travail .
                    xsol    :T_vect  ;  -- solution .on y trouve les
                                        -- de Dirichlet non homogenes
        DECLARE COMMON
                    zlftab,
                    zunite,
                    zcontx,
                    disk    ::(ndescr,  --fichier prepare par o0frt1
                               ntable),--fichier de sauvegarde de Rmat
                                        -- en attendant la remontee.
                    zqua    WRITTEN (o7mtlm)-- zone de communication
                            KNOWN(o0frt1);  -- avec o7mtlm.(cf. o8asmr)
```

```
   Rmat(*,*)=0.          ;                  -- initialiser Rmat (les
                                            -- contributions sont additives
   descente_par_etape:                      -- par etape accumuler,eliminer..
     DO   etape=1,nfront;
   accumulation_contrib:
       DO element=itquie(element).de TO .a BY .pas;
                                            -- accumuler les contributions pa
                                            -- element.
          CALL o7mtlm(element,....,);       -- remplir matlm dans zqua
                                            -- par ligne de matlm:idr_1 est
                                            -- un numero de fonction de base
                                            -- sur element de reference
          DO idr_1=1  TO 18;
             DO idr_2 =1 TO 18 ;            -- par colonne
                Rmat((idr->id->rid)(idr_1,idr_2)) :+=
                                                matlm(idr_1,idr_2) ;
             END;
             secmbr((idr->id)(idr_1)):+=sm(idr_1);
          END;                              -- accumuler aussi second membre
       END accumulation_contrib;
       --
       -- on va passer a l'elimination (descente dans la methode de Gauss
       -- il faut d'abord lire la definition de (fid->vid)
       --
       READ ntot,ifige,isort,irest,idescr(*) FROM ndescr;
       --
  elimination_fn_base_figees_sortantes:
       DO;                                  --Ici ceci est effectue par o7mtl
         ...                                -- ,ce programmne pourrait aussi
       END;                                 -- faire.
  descente_gauss:
       DO;                                  -- Eliminer les inconnues SORTANT
         DO f_ipiv=ifige TO ifige+isort;    -- ligne du pivot=num. inconnue a
                                            -- eliminer.
           DO f_il=f_ipiv+1 TO ifige+isort+irest ;
                                            -- On elimine l'inconnue sur
                                            -- TOUTES les lignes SORTANTES et
                                            -- RESTANTES.
           -- On DEMONTRE que ceci est correct.En remarquant,en parti-
           -- culier que les colonnes correspondant aux fn_base SORTANTES
           -- sont aussi totalement accumulees,et que l'on effectue sim-
           -- plement une permutation dans l'ordre d'accumulation de
           -- contributions ADDITIVES.
           --
               DO f_ic=f_ipiv+1 TO ifige+isort+irest; -- par colonne sur
```

```
                                                    -- une ligne.
                Rmat((fid->vid->rid)(f_il,f_ic))=
                        Rmat((fid->vid->rid)(f_il,f_ic)) -
                        Rmat((fid->vid->rid)(f_ipiv,f_ic)) *
                        Rmat((fid->vid->rid)(f_il,f_ipiv)) /
                        Rmat((fid->vid->rid)(f_ipiv,f_ipiv));
             END;
            --combinaison avec le second membre
            secmbr((fid->vid)(f_il))=
                        secmbr((fid->rid)(f_il) -
                        secmbr((fid->rid)(f_ipiv)) *
                        Rmat((fid->vid->rid)(f_il,f_ipiv)) /
                        Rmat((fid->vid->rid)(f_ipiv,f_ipiv));
          END;
        END;
      END descente_gauss;
      --   Sauver la matrice Rmat (on utilisera les lignes
      --   correspondant aux fn_base sortantes lors de la remontee.
      WRITE Rmat ON ntable;
  END descente_par_etape ;
END o0frt2;
```

```
o0frt3:SUBROUTINE;                          -- Remontee methode frontale.
                                            -- L'algorithme revient a
                                            -- effectuer la remontee de
                                            -- la methode de Gauss.
      DECLARE ARGUMENT IN
                  secmbr:    T_vect,   -- second membre deja modifie
                                       -- par o0frt2 pendant la descent
                  iprdeg:    T_vect_i,--realise l'application vid->rid
                  icode :    INTEGER; --option sans objet actuellement
      DECLARE ARGUMENT OUT
                  xsol  :    T_vect,   --solution du systeme lineaire
                  idescr:    T_vect_i,--zone de travail
                  rmat  :    REAL(lnmat);-- zone de travail
      DECLARE COMMON
                  zlftab,
                  zunite,
                  zcontx,
                  disk;                 -- definit les fichiers construit
                                        -- par o0frt1 et o0frt2 resp.
```

```
   --on opere etape par etape mais dans l'ordre INVERSE
   DO etape=nfront TO 1 BY -1;
        READ ntot,ifige,irest,isort,idescr(*) FROM ndescr BACKWARDS;
        READ Rmat                             FROM ntable BACKWARDS;
                                        --restaurer le contexte de cette
                                        -- etape
  remontee_gauss:
                                        -- remontee dans la methode de
                                        -- Gauss
           DO  f_ipiv=ifige+isort TO ifige  BY -1;
                                        -- on calcule les inconnues
                                        -- dans l'ordre INVERSE de leur
                                        -- elimination.
               xsol((fid->vid)(f_ipiv))=secmbr((fid->vid)(f_ipiv));
               DO f_icol=f_ipiv+1 TO ifige+isort+irest;
                  xsol((fid->vid)(f_ipiv)):+=
                              - Rmat((fid->vid->rid)(f_ipiv,f_icol)
                              * xsol((fid->vid)(f_icol));
               END;
               xsol((fid->vid)(f_ipiv))=
                                xsol((fid->vid)(f_ipiv))
                              / Rmat((fid->vid->rid)(f_ipiv,f_ipiv));
           END remontee gauss;
      END;                              -- Fin de l'etape
  END o0frt3;
```