UNIVERSITÉ PARIS XI
U.E.R. MATHÉMATIQUE
91-ORSAY (FRANCE)

N°44

séminaire d'algèbre non commutative

1973

(Publications mathématiques d'Orsay)

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Année 1972/1973

-:- 2ème PARTIE -:-

-:-:-:-

TABLE DES MATIERES

-:-:-:-:-:-:-:-:-

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

CENTRE D'ORSAY

Conférences N^{os} 8-9 des 22,29

JANVIER 1973

-:-:-:-:-

UNE CARACTERISATION DES ANNEAUX REGULIERS A IDENTITE POLYNOMIALE,

par Mme A. PAGE

-:-:-:-:-

INTRODUCTION.

Dans tout ce qui suit A désigne un anneau unitaire de centre Z. L'annulateur à gauche (resp. à droite) d'un sous-ensemble S de A sera noté $l(S)$ (resp. $r(S)$). On supposera que A vérifie une identité polynomiale non triviale $p(x_1,\dots,x_s) = 0$, p étant un polynôme à coefficients centraux non tous nuls. Nous serons souvent amenés à supposer que tout anneau quotient non nul de A satisfait une identité polynomiale non triviale ; nous dirons alors que A est un anneau <u>quasi-commutatif</u>. Ceci se produit en particulier si l'idéal engendré par les coefficients du polynôme p coïncide avec A, dans ce cas on dit que l'identité polynomiale $p(x_1,\dots,x_s) = 0$ est <u>homomorphique</u>.

On sait que si A satisfait une identité polynomiale non triviale, il satisfait une <u>identité multilinéaire</u>

$$q(x_1,\dots,x_d) = \sum_{i\in S_d} a_i x_{i_1} \dots x_{i_d} = 0 ,$$

S_d désignant le groupe des permutations de $\{1,\dots,d\}$, avec

$$\forall_i \in S_d , \quad a_i \in Z ; \quad \exists i \in S_d , \quad a_i \neq 0 .$$

Nous désignerons par Ω l'idéal engendré par les coefficients de q et le coefficient de q indexé par l'élément neutre de S_d sera noté a_1. L'identité multilinéaire $q(x_1,\dots,x_d) = 0$ sera dite <u>fidèle</u> si $\bigcap (l(a_i) ; i \in S_d) = 0$.

Dans une première partie on étudie les anneaux semi-premiers quasi-commutatifs : ce sont des anneaux à idéaux singuliers à gauche et à droite nuls, dont les enveloppes injectives à gauche et à droite sont des anneaux réguliers de Von Neumann, auto-injectifs, de type I – au sens de la théorie des anneaux de Baer – (Théorème 1.7).

I.Kaplansky a montré que pour un anneau commutatif il est équivalent de dire que c'est un anneau régulier, ou qu'il vérifie la propriété (V) : tout module simple est injectif. On sait que dans le cas non commutatif, la propriété (V) ne caractérise pas les anneaux réguliers [3]. La seconde partie de ce travail a pour but de démontrer le résultat suivant :

<u>THEOREME 2.13.</u> <u>Soit</u> A <u>un anneau quasi-commutatif. Il y a équivalence entre les assertions suivantes</u> :

(i) A <u>est un anneau régulier.</u>

(ii) <u>Tout A-module à gauche simple est injectif.</u>

(iii) <u>Tout idéal bilatère de A est semi-premier.</u>

L'équivalence entre les assertions (i) et (ii) a déjà été établie par G.O. Michler et O.E. Villamayor [7] pour un anneau affine A (i.e. A est une Z-algèbre de type fini et c'est un anneau quasi-commutatif), au moyen de méthodes différentes. La troisième partie est consacrée à l'étude directe de ce cas particulier.

J'adresse mes remerciements à M. G. Renault pour ses sombreuses suggestions.

I. <u>ANNEAUX SEMI-PREMIERS A IDENTITE POLYNOMIALE.</u>

Rappelons que <u>l'idéal singulier à gauche</u> de A est l'idéal bilatère <u>J</u> constitué des éléments x tels que $l(x)$ soit un idéal à gauche essentiel dans A.

<u>LEMME 1.1.</u> <u>Si A est un anneau semi-premier satisfaisant l'identité multilinéaire</u> $q(x_1,\dots,x_d) = 0$, <u>l'idéal</u> Ω <u>engendré par les coefficients de</u> q <u>est tel que</u> $\Omega J = 0$.

Il nous suffit de montrer que $\Omega J^d = 0$, ceci entraîne en effet $(\Omega J)^d = 0$, d'où $\Omega J = 0$ puisque l'anneau A est semi-premier. On a pour tout idéal bilatère K de A , $r(K) = l(K)$; on désignera par <u>complément bilatère</u> un idéal bilatère K tel que $K = l[l(K)]$.

Soient $y_1,\dots,y_d \in J$ et $y = y_1\dots y_d$; supposons $\Omega y \neq 0$. En modifiant éventuellement l'ordre des variables dans q on peut se ramener au cas où a_1 vérifie $a_1 y \neq 0$. Posons $Y_1 = l(y_1)$, $Y_2 = l(y_1 y_2),\dots,Y_d = l(y_1 y_2\dots y_d)$, et considérons l'ensemble Q des couples (K,π) où K est un complément bilatère et où π est un polynôme multilinéaire à coefficients dans Z :

$$\pi(x_1,\dots,x_k) = \sum_{i\in S_k} \alpha_i x_{i_1} \dots x_{i_k} \quad \text{avec (i) } k \leqslant d, \text{ (ii) } \alpha_1 y \notin K,$$

(iii) $\forall x_1 \in Y_1,\dots,x_k \in Y_k$, $\pi(x_1,\dots,x_k) \in K$. Q contient le couple $(0,q)$ et il existe donc $(K,\pi) \in Q$ tel que le degré k de π soit minimum. On posera $K' = l(K) = r(K)$.

Supposons que $k = 1$; l'unique coefficient α de π vérifie $\alpha \in Z$, $\alpha y \notin K$, $\alpha y \notin K \Longrightarrow \alpha \notin K \Longrightarrow \alpha K' \neq 0 \Longrightarrow \alpha K' \cap Y_1 \neq 0$ puisque Y_1 est un idéal à gauche essentiel. Or la relation $(Y_1 \cap \alpha K')^2 \subset \alpha K' Y_1$ entraîne $(Y_1 \cap \alpha K')^2 = 0$ d'où $Y_1 \cap \alpha K' = 0$.

L'hypothèse $k = 1$ menant à une contradiction, on a $k > 1$.

Pour $x_1 \in Y_1,\dots,x_k \in Y_k$, $\pi(x_1,\dots,x_k)$ et par suite $\pi(x_1,\dots,x_k)y_1\dots y_{k-1}$ sont dans K. D'autre part $i_k \neq k \Longrightarrow x_{i_k} \in Y_{k-1} \Longrightarrow x_{i_1}\dots x_{i_k} \cdot y_1\dots y_{k-1} = 0$. On en déduit : $\left(\sum_{i\in S_{k-1}} \alpha_i x_{i_1}\dots x_{i_{k-1}}\right)x_k y_1\dots y_{k-1} \in K$.

Posons $L = \{a \,;\, a \in A,\ aY_k y_1\dots y_{k-1} \subset K\}$; L est un idéal bilatère de A et d'après ce qui précède :

$$x_1 \in Y_1,\dots,x_{k-1} \in Y_{k-1} \Longrightarrow \sum_{i\in S_{k-1}} \alpha_i x_{i_1}\dots x_{i_{k-1}} \in L.$$

De plus, la relation $L = l(Y_k y_1\dots y_{k-1} K')$ montre que $L = l[l(L)]$ et L est donc un complément bilatère. Enfin nous allons montrer que L ne contient pas $\alpha_1 y$. Remarquons tout d'abord que $Y_k y_1\dots y_{k-1}$ est un idéal à gauche essentiel dans $Ay_1\dots y_{k-1}$: Soit $by_1\dots y_{k-1} \neq 0$, si $by_1\dots y_k = 0$ on a $b \in Y_k$ d'où $by_1\dots y_{k-1} \in Y_k y_1\dots y_{k-1}$; si $by_1\dots y_k$ n'est pas nul, comme $l(y_k)$ est un idéal à gauche essentiel on peut trouver $b' \in A$ avec $b'by_1 \dots y_{k-1} \neq 0$ et $b'by_1 \dots y_k = 0$, $b'by_1 \dots y_{k-1}$ est alors un élément non nul de $Y_k y_1 \dots y_{k-1}$. Soit $a \in L$; on a les implications

$$K'aY_k y_1 \dots y_{k-1} = 0 \Longrightarrow K'ay_1 \dots y_{k-1} Y_k y_1 \dots y_{k-1} = 0$$
$$\Longrightarrow (K'ay_1 \dots y_{k-1} \cap Y_k y_1 \dots y_{k-1})^2 = 0 .$$

Il en résulte que $K'ay_1 \dots y_{k-1} \cap Y_k y_1 \dots y_{k-1} = 0$, et en vertu de ce qui précède $K'ay_1 \dots y_{k-1} = 0$. D'où la relation $a \in L \Longrightarrow ay_1 \dots y_{k-1} \in K$. Supposons maintenant que l'on ait $\alpha_1 y \in L$:

$\alpha_1 y \in L \Longrightarrow \alpha_1 yA \subset L \Longrightarrow \alpha_1 yAy_1 \dots y_{k-1} \subset K \Longrightarrow \alpha_1 yAy \subset K \Longrightarrow (A\alpha_1 y)^2 \subset K$
$(A\alpha_1 y)^2 \subset K \Longrightarrow K'(A\alpha_1 y)^2 = 0 \Longrightarrow (K'\alpha_1 y)^2 = 0 \Longrightarrow K'\alpha_1 y = 0 \Longrightarrow \alpha_1 y \in K$,
d'où la contradiction.

Si l'on pose $\pi'(x_1, \dots, x_{k-1}) = \sum_{i \in S_{k-1}} \alpha_i x_{i_1} \dots x_{i_{k-1}}$, on voit que le couple (L, π') est dans Q , ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur le degré de π . L'hypothèse $a_1 y \neq 0$ mène donc à une contradiction.

PROPOSITION 1.2. Soit A un anneau semi-premier vérifiant l'une des des propriétés suivantes :

(a) A satisfait une identité multilinéaire fidèle.

(b) A est quasi-commutatif.

Alors les idéaux singuliers à gauche et à droite de A sont nuls.

Compte-tenu de la symétrie, il suffit de montrer que l'idéal singulier à gauche J est nul. Dans le cas (a) on a $r(\Omega) = 0$ et le résultat est immédiat d'après le lemme 1.1. Plaçons nous dans le cas (b). Supposons $J \neq 0$ et posons $L = l(J) = r(J)$; on a $L \neq 0$ et il est facile de voir que l'idéal singulier à gauche J' de l'anneau $B = A/L$ est essentiel dans B . D'autre part, comme l'anneau B est semi-premier et vérifie une identité polynomiale non triviale, on sait (lemme 1.1.) que J' admet un annulateur à gauche $\neq 0$. Or il est évident que dans un anneau semi-premier tout idéal à gauche essentiel n'est annulé à gauche par aucun élément $\neq 0$. D'où la contradiction.

LEMME 1.3. Soit A un anneau semi-premier satisfaisant l'identité multilinéaire $q(x_1,\dots,x_d) = 0$, et soit $S = \oplus (X_j \ ; \ j = 1,\dots,n)$ une somme directe d'idéaux à gauche (resp. à droite) de A, non nuls, isomorphes entre eux. Alors on a $n < d$ dans chacun des cas suivants :

(a) $\Omega S \neq 0$.

(b) $S \subset \Omega$.

(c) L'identité $q(x_1,\dots,x_d) = 0$ est fidèle.

(a) On peut se ramener au cas où l'on a $a_1X_1 \neq 0$. Supposons $d \leqslant n$ et considérons $x_1 \in X_1,\dots,x_{d-1} \in X_{d-1}$. On a pour tout $x_d \in X_d$, $\sum_{i \in S_d} a_i x_{i_1} \dots x_{i_d} = 0$ et, comme la somme $\Sigma(X_j \ ; \ j = 1,\dots,d)$ est directe $(\sum_{i \in S_d} a_i x_{i_1} \dots x_{i_{d-1}})x_d = 0$.

Posons $X = \oplus(X_j \ ; \ j = 1,\dots,d-1)$, $a = \sum_{i \in S_{d-1}} a_i x_{i_1} \dots x_{i_{d-1}}$; la dernière égalité entraîne $aX_d = 0$, d'où compte-tenu de l'isomorphisme entre X_j, $aX = 0$. On a alors $a \in X$ et $aX = 0 \Longrightarrow (Aa)^2 = 0 \Longrightarrow a = 0$, puisque l'anneau A est semi-premier. On a donc montré que pour $x_1 \in X_1,\dots,x_{d-1} \in X_{d-1}$,

$\sum_{i \in S_{d-1}} a_i x_{i_1} \dots x_{i_{d-1}} = 0$.

En itérant le raisonnement $d-1$ fois on aboutit à la contradiction $a_1X_1 = 0$.

(b) Comme l'anneau A est semi-premier et comme S n'est pas nul on a $S^2 \neq 0$. L'inclusion $S \subset \Omega$ entraîne alors $\Omega S \neq 0$ et l'on peut appliquer le résultat précédent.

(c) On a $r(\Omega) = 0$ d'où $\Omega S \neq 0$.

Les définitions suivantes s'appliquent à un anneau A ne vérifiant pas nécessairement une identité polynomiale. A est dit <u>fini</u> s'il remplit la condition

$$x \in A,\ y \in A,\ xy = 1 \Longrightarrow yx = 1 .$$

Un idempotent e de A est dit <u>abélien</u> si dans l'anneau eAe les idempotents sont centraux. Si A est un anneau régulier, auto-injectif à gauche, ceci équivaut à dire qu'il n'existe pas dans Ae d'idéaux à gauche X et Y , isomorphes, non nuls et tels que $X \cap Y = 0$ [2] . On dit qu'un anneau régulier, auto-injectif à gauche A est de <u>type I</u> (au sens de la théorie des anneaux de Baer) si tout idéal à gauche non nul de A contient un idempotent abélien $\neq 0$ [9] . On sait [8, corollaire 1-2] que A est fini, de type I , si, et seulement si, c'est un anneau de type I auto-injectif (à droite et à gauche). Enfin <u>l'indice de nilpotence</u> d'un anneau A est le nombre fini ou non $i(A) = \sup\{k \; ; \; \exists x \in A, x^{k-1} \neq 0, x^k = 0\}$.

<u>LEMME 1.4. Soit A un anneau régulier auto-injectif à gauche. Alors</u>

(a) <u>L'indice de nilpotence i(A) est égal à la borne supérieure des entiers m tels qu'il existe dans A une somme directe de m idéaux à gauche (resp. à droite) non nuls, isomorphes entre eux.</u>

(b) <u>Si i(A) est fini, A est un anneau de type I auto-injectif.</u>

(a) Le résultat est dû à Y. Utumi [11, théorème 3].

(b) Soit W un idéal à gauche non nul de A ; on peut considérer une somme directe d'idéaux à gauche monogènes inclus dans W , non nuls, isomorphes entre eux, dont le nombre de termes soit maximum. Soit Ae, $e = e^2$, l'un de ces idéaux, il est évident que Ae ne contient pas d'idéaux à gauche non nuls X de Y , isomorphes et tels que $X \cap Y = 0$. e est donc un idempotent abélien $\neq 0$ de W . Par suite, $\hat{A}$ est de type I . D'autre part, il n'existe pas dans $\hat{A}$ de sommes directes infinies d'idéaux à gauche non nuls-isomorphes, et [5, théorème 2] $\hat{A}$ est donc fini. $\hat{A}$ est donc bien de type I, auto-injectif.

Considérons maintenant un anneau A semi-premier qui vérifie l'une des conditions suivantes : A satisfait une identité multilinéaire fidèle, ou A est quasi-commutatif. Comme l'idéal singulier à gauche de A est nul (proposition 1-2), l'enveloppe injective $\hat{A}$ de A considéré comme A-module à gauche, est un sur-anneau de A , régulier de Von Neumann, auto-injectif [4] . Nous allons donner des précisions sur $\hat{A}$.

<u>THEOREME 1.5. Soit A un anneau semi-premier à identité multilinéaire fidèle de degré d . Alors les enveloppes injectives à gauche et à droite de A sont des sur-anneaux de A, réguliers, auto-injectifs, de type I, d'indice de nilpotence inférieur à d</u> .

Considérons par exemple l'enveloppe injective à gauche $\hat{A}$ de A. Les sommes directes d'idéaux à gauche de A, non nuls, isomorphes entre eux, ont au plus $d-1$ termes (lemme 1.3, (c)), et il est évident que l'anneau $\hat{A}$ vérifie la même propriété. Le lemme 1.4. permet alors de conclure.

Remarquons que si U est un idéal bilatère d'un anneau semi-premier il est équivalent de dire que U est un idéal à gauche essentiel, que U est un idéal à droite essentiel, ou que l'annulateur de U est nul. Nous dirons que U est un idéal essentiel.

PROPOSITION 1.6. Soit A un anneau semi-premier quasi-commutatif et soit $\hat{A}$ l'enveloppe injective à gauche de A. Il existe une famille $(h_i)_{i\in I}$ d'idempotents centraux de $\hat{A}$ telle que :

(a) La somme $\Sigma(\hat{A}h_i\ ;\ i \in I)$ soit directe et essentielle dans $\hat{A}$.

(b) Pour tout $i \in I$ l'anneau $\hat{A}h_i$ soit d'indice de nilpotence fini.

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des idéaux bilatères non nuls K de A tels qu'il existe un entier m vérifiant la propriété suivante : toute somme directe d'idéaux à gauche inclus dans K, non nuls, isomorphes entre eux, a au plus m termes. Si Ω est l'idéal bilatère engendré par les coefficients d'une identité multilinéaire satisfaite par A, on a $\Omega \in \mathcal{E}$ (lemme 1.3.,(b)). Comme $\mathcal{E}$ n'est pas vide, on peut considérer une famille $(K_i\ ;\ i \in I)$ d'idéaux bilatères appartenant à $\mathcal{E}$ telle que la somme $\Sigma(K_i\ ;\ i \in I)$ soit directe et maximale. Nous allons montrer que l'idéal bilatère $U = \oplus(K_i\ ;\ i \in I)$ est essentiel dans A Supposons que l'on ait $V = l(U) \neq 0$ et posons $L = l(V)$. L'anneau $A/_L$ est un anneau semi-premier à identité polynomiale non triviale et d'après le lemme 1.3., il contient un idéal bilatère non nul Ω' tel que le nombre de termes de toute somme directe d'idéaux isomorphes non nuls de Ω', soit borné par un entier m. Soit W l'idéal bilatère de A contenant L tel que $W/_L = \Omega'$; posons $W.V = K$. K est un idéal bilatère de A, non nul puisque l'on a :

$$\Omega' \neq 0 \Longrightarrow W \neq L \Longrightarrow W \not\subset L \Longrightarrow WV \neq 0\ .$$

D'autre part, considérons un idéal $S = \oplus(X_j \ ; \ j = 1,\ldots,k)$ somme directe d'idéaux à gauche $X_j \neq 0$, inclus dans K, isomorphes entre eux. Si $\bar{X}_j$ désigne l'image de X_j dans $A/_L$, il est immédiat de vérifier que les idéaux $\bar{X}_j$ sont isomorphes et que leur somme est directe ; on a donc $k \leqslant m$. Ceci montre que l'idéal K appartient à $\mathcal{E}$ et contredit la maximalité de la famille $(K_i \ ; \ i \in I)$. Pour tout $i \in I$, l'enveloppe injective de K_i considéré comme A-module à gauche se met sous la forme $\hat{A}h_i$ où h_i est un idempotent central de $\hat{A}$. Il est évident que la famille $(h_i \ ; \ i \in I)$ vérifie les propriétés (a) et (b) de la proposition.

THEOREME 1.7. Soit A un anneau semi-premier quasi-commutatif ; alors
(a) Les enveloppes injectives à gauche et à droite de A sont des sur-anneaux de A, réguliers, de type I, auto-injectifs.

(b) Il n'existe pas dans A de sommes directes infinies d'idéaux à gauche (resp. à droite) non nuls isomorphes.

(a) L'enveloppe injective à gauche $\hat{A}$ de A est extension essentielle d'une somme directe d'anneaux finis de type I (proposition 1.6, lemme 1.4). Il est alors immédiat de vérifier que $\hat{A}$ est lui-même un anneau fini, de type I.

(b) Il suffit de remarquer que dans $\hat{A}$, il n'existe pas de sommes directes infinies d'idéaux à gauche non nuls isomorphes.

Remarques, exemples, problèmes. Les résultats que nous avons établis pour les anneaux semi-premiers à identité multilinéaire fidèle valent pour les anneaux semi-premiers à identité polynomiale homomorphique d'après le lemme suivant :

LEMME 1.8. Un anneau A semi-premier à identité polynomiale homomorphique vérifie une identité standard.

La propriété découle immédiatement du fait que A est plongé dans un anneau de matrices à coefficients dans un anneau commutatif [1, démonstration du théorème 12].

Dans le cas particulier où le centre de A est un anneau régulier, le lemme 1.8 admet une réciproque que nous serons amenés à utiliser.

LEMME 1.9. Soit A un anneau à identité multilinéaire fidèle $q(x_1,\dots,x_d) = 0$. Alors si le centre Z de A est un anneau régulier, cette identité est homomorphique.

Soit Ω l'idéal engendré par les coefficients a_i de q. On a $\cap l(a_i)=0$ d'où $\Sigma Za_i = Z$, ce qui entraîne $\Omega = A$.

Soit F un corps commutatif ; considérons le sous-anneau A du produit $\prod_{n=1}^{\infty} M_n(F)$ constitué des éléments (x_n) vérifiant la condition suivante

$\exists \xi \in F$, $\exists p$, tels que $n \geqslant p \Longrightarrow x_n = \xi$.

Posons pour tout entier i, $h_i = (x_n)$ avec $x_i = 1$, $x_n = 0$ si $n \neq i$. L'anneau A est un anneau semi-premier qui vérifie l'identité polynomiale non triviale $h_1(xy-yx) = 0$. A ne satisfait pas d'identité polynomiale homomorphique : sinon en effet pour tout entier n, $M_n(F)$ vérifierait une identité polynomiale non triviale de degré d indépendant de n, et il est bien connu que ceci est impossible. Le centre Z de A est le sous-anneau de F^{N^*} constitué des éléments (ξ_n) satisfaisant à :

$$\exists \xi \in F, \ \exists p \text{, tels que } n \geqslant p \Longrightarrow \xi_n = \xi$$

et c'est donc un anneau régulier (en fait A est lui-même un anneau régulier). Par suite (lemme 1.9) A ne vérifie pas d'identité multilinéaire fidèle.

Enfin A est un anneau quasi-commutatif : soit K un idéal bilatère de A, $K \neq A$. S'il existe n tel que K ne contienne pas $M_n(F)$, l'anneau A/K vérifie l'identité non triviale $h_n[x_1,\dots,x_{2n}]$ ($[x_1,\dots,x_{2n}]$ désignant l'identité standard de degré $2n$) ; sinon A/K est un sous-anneau de $A/\bigoplus_{n=1}^{\infty} M_n(F)$ qui, isomorphe à F, est commutatif.

Les enveloppes injectives à gauche et à droite de A sont égale à $\hat{A} = \prod_{n=1}^{\infty} M_n(F)$, et si M est un idéal bilatère maximal de $\hat{A}$ contenant $\bigoplus_{n=1}^{\infty} M_n(F)$ l'anneau $\hat{A}/M$ est un anneau régulier auto-injectif qui n'est pas de type I [8]. On en déduit que $\hat{A}$ n'est pas un anneau quasi-commutatif (théorème 1.7). On voit donc qu'il existe des anneaux quasi-commutatifs dont l'enveloppe injective à gauche (ou à droite) n'est pas un anneau quasi-commutatif. On peut néanmoins se poser les problèmes suivants.

Soit A un anneau semi-premier à identité multilinéaire fidèle, alors :

I. A admet-il même enveloppe injective à gauche et à droite ?

II. L'enveloppe injective $\hat{A}$ de A est-elle un anneau à identité polynomiale, et vérifie-t'elle les mêmes identités polynomiales que A ?

On sait répondre par l'affirmative à ces deux questions lorsque A est un anneau premier [1, théorème 7]. Nous allons mettre en évidence un autre cas dans lequel ces propriétés sont vérifiées.

Un anneau de <u>Zorn</u> est un anneau tel que tout idéal à gauche (ou à droite, c'est équivalent) qui n'est pas un nilidéal contienne un idempotent non nul. On voit facilement qu'un anneau de Zorn semi-primitif est un anneau tel que tout idéal à gauche $\neq 0$ contienne un idempotent $\neq 0$, et l'anneau est alors semi-premier à idéaux singuliers à gauche et à droite nuls.

Un anneau <u>réduit</u> est un anneau sans éléments nilpotents non nuls. Un tel anneau est lui aussi semi-premier à idéaux singuliers nuls, de plus pour tout élément x on a $l(x) = r(x)$ et les idempotents sont centraux.

<u>LEMME 1.10.</u> <u>Soit B un anneau de Zorn réduit d'enveloppe injective à gauche $\hat{B}$ et soit m un entier. Alors si l'anneau de matrices $M_m(B)$ vérifie une identité polynomiale, $M_m(\hat{B})$ vérifie la même identité polynomiale.</u>

Supposons que $M_m(B)$ satisfasse l'identité $p(x_1,\dots,x_n) = 0$ et considérons $y_1,\dots,y_n \in M_m(\hat{B})$. L'ensemble T des coefficients de $y_1,\dots,y_n$

est fini et il existe donc un idéal à gauche X essentiel dans B tel que $a \in T \Longrightarrow Xa \subset B$. Soit e un idempotent de X ; e est central et il s'identifie naturellement à un idempotent de $M_m(B)$. On voit facilement que $p(ey_1,\dots,ey_n) = ep(y_1,\dots,y_n)$ et comme $ey_1,\dots,ey_n$ sont dans $M_m(B)$ on en déduit que $ep(y_1,\dots,y_n) = 0$. Dans l'anneau de Zorn réduit B, X est extension essentielle d'une somme directe $\oplus(Be_\lambda ; \lambda \in \Lambda)$ d'idéaux à gauche engendrés par des idempotents e_λ. Si α est un coefficient de la matrice $p(y_1,\dots,y_n)$, on a pour tout $\lambda \in \Lambda$, $e_\lambda \alpha = 0$, d'où $(\oplus Be_\lambda)\alpha = 0$. Or, l'anneau B est à l'idéal singulier à gauche nul, et l'idéal à gauche $\oplus(Be_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ est essentiel dans B, l'étude précédente montre donc que tous les coefficients de la matrice $p(y_1,\dots,y_n)$ sont nuls. D'où le résultat.

On a d'autre part, la propriété suivante.

PROPOSITION 1.11. [G. RENAULT, 8, Proposition 2.8]. *Soit* A *un anneau de Zorn semi-primitif dont l'enveloppe injective à gauche* $\hat{A}$ *est un anneau fini de type* I. *Alors il existe une famille* $(u_i, i \in I)$ *d'idempotents centraux de* A *telle que :*

(a) *Pour tout* $i \in I$, Au_i *soit isomorphe à un anneau de matrices* $M_m(B_i)$ *sur un anneau de Zorn réduit* B_i.

(b) $\hat{A}$ *soit isomorphe à l'anneau produit* $\pi(\hat{A}u_i, i \in I)$.

De plus $\hat{A}$ *est également l'enveloppe injective à droite de* A.

Si en outre l'anneau A vérifie une identité polynomiale, tous les anneaux Au_i la vérifient, et par suite si $\hat{B}_i$ désigne l'enveloppe injective à gauche de B_i (B_i admet en fait même enveloppe injective à gauche et à droite), $M_n(\hat{B}_i) = \hat{A}u_i$ vérifie la même identité polynomiale que A. D'où la :

PROPOSITION 1.12. *Si* A *est un anneau de Zorn semi-primitif à identité multilinéaire fidèle ; alors :*

(a) A *admet même enveloppe injective à gauche et à droite* $\hat{A}$.

(b) $\hat{A}$ *vérifie les mêmes identités polynomiales que* A.

Remarque : On connait des anneaux non semi-premiers à idéaux singuliers à gauche et à droite nuls, satisfaisant une identité standard, et qui n'admettent pas même enveloppe injective à gauche et à droite : soit A l'anneau des matrices triangulaires $\begin{pmatrix} a & b \\ o & c \end{pmatrix}$ où b et c décrivent le corps des réels et où a décrit le corps des rationnels. A est artinien à droite et considéré comme A-module à gauche et il est de dimension de Goldie infinie. Il admet l'anneau de matrices $M_2(\mathbb{R})$ comme enveloppe injective à droite, alors qu'à gauche son enveloppe injective est de dimension infinie.

II. ANNEAUX REGULIERS A IDENTITE POLYNOMIALE.

On entendra par anneau quasi-simple, un anneau A dont les seuls idéaux bilatères sont 0 et A , par anneau simple un anneau artinien quasi-simple.

Un V-anneau à gauche est un anneau A tel que tout A-module à gauche simple soit injectif. Les V-anneaux et les anneaux réguliers qui dans le cas commutatif constituent la même classe ont dans le cas général des propriétés communes.

LEMME 2.1. Soit A un anneau qui est un V-anneau à gauche (resp. à droite) ou un anneau régulier ; alors

a) tout idéal à gauche (resp. à droite) est idempotent.

b) le centre de A est un anneau régulier.

a) La propriété est évidente pour un anneau régulier, pour un V-anneau à gauche (resp. à droite) elle a été démontrée par G.O. Michler et O.E. Villamayor [7, Corollaire 2.2.].

En particulier, les idéaux bilatères d'un V-anneau à gauche ou à droite, ou d'un anneau régulier sont idempotents ; il revient au même de dire que les idéaux bilatères sont semi-premiers.

LEMME 2.2. Le centre d'un anneau dans lequel tout idéal bilatère est semi-premier, est un anneau régulier.

On pourra se reporter par exemple à G.O. Michler et O.E. Villamayor [7, démonstration du lemme 2.3.].

Un anneau birégulier A est un anneau tel que pour tout élément $x \in A$, l'idéal bilatère (x) soit engendré par un idempotent central.

Un idéal à gauche d'un anneau A est <u>irréductible</u> s'il n'est pas l'intersection de deux idéaux à gauche qui le contiennent strictement.

<u>PROPOSITION 2.3.</u> <u>Soit</u> A <u>un anneau dans lequel les idéaux à gauche sont idempotents ; si</u> X <u>est un idéal à gauche irréductible, le plus grand idéal bilatère</u> P <u>inclus dans</u> X <u>est un idéal premier.</u>

Nous allons montrer que si Y et Y' sont deux idéaux bilatères de A vérifiant $Y'Y \subset P$, ils sont tels que $(Y+X) \cap (Y'+X) = X$. Soit $a = y+x = y'+x'$, $y \in Y$, $y' \in Y'$, $x,x' \in X$. On a $Y'a = Y'(y+x)$, d'où $Y'a \subset X$. $Y'a \subset X \Longrightarrow Y'(y'+x') \subset X \Longrightarrow Y'y' \subset X \Longrightarrow (Ay')^2 \subset X$. Comme $(Ay')^2 = Ay'$, on en déduit $y' \in X$, soit $a \in X$. On a donc $X = Y+X$ ou $X = Y'+X$, soit $Y \subset X$ ou $Y' \subset X$, et P étant le plus grand idéal bilatère inclus dans X, ceci entraîne $Y \subset P$ ou $Y' \subset P$.

<u>PROPOSITION 2.4.</u> <u>Soit</u> A <u>un anneau quasi-commutatif. Alors si</u> A <u>est un anneau régulier ou birégulier, les idéaux à gauche (resp. à droite) irréductibles sont maximaux.</u>

Soit, par exemple X un idéal à gauche irréductible de A et soit P le plus grand idéal bilatère inclus dans X ; l'anneau $B = A/_P$ vérifie les mêmes hypothèses que A. Nous allons montrer que B est un anneau simple, ce qui suffit pour conclure : tout idéal à gauche irréductible de B est maximal et X est donc un idéal à gauche maximal dans A. Si A est régulier d'après la proposition 2.3., B est un anneau premier, comme c'est un anneau à identité polynomiale non triviale il admet un anneau de fractions simple Q (1, théorème 7), mais comme B est régulier on a $B = Q$, d'où le résultat. Supposons maintenant A birégulier, $\bar{X}$ désignera l'image de X dans B ; soit h un idempotent central de B. On a $(\bar{X}+Bh) \cap (\bar{X}+B(1-h)) = \bar{X}$, et comme $\bar{X}$ est irréductible $Bh \subset \bar{X}$ ou $B(1-h) \subset \bar{X}$. Compte tenu de l'hypothèse faite sur P on a alors $h = 0$ ou $h = 1$. B est birégulier et l'on a pour tout $x \in B$, $(x) = 0$ ou $(x) = 1$, il en résulte que B est quasi-simple. Comme c'est un anneau à identité polynomiale non triviale il est simple.

<u>COROLLAIRE 2.5.</u> <u>Si</u> A <u>est un anneau quasi-commutatif ou birégulier alors</u> A <u>est un V-anneau.</u>

Soient S un A-module à gauche simple, $E(S)$ son enveloppe injective ; pour tout $x \in E(S)$, $l(x)$ est un idéal à gauche irréductible et (proposition 2.4) Ax est donc un module simple. On en déduit l'inclusion $E(S) \subset S$, et S est bien injectif.

Nous allons maintenant étudier la réciproque.

PROPOSITION 2.6. Soit A un anneau quasi-commutatif dans lequel tout idéal bilatère est semi-premier ; on a les propriétés suivantes :

(a) Tout élément $x \in A$ tel que $l(x) = 0$ (resp. $r(x) = 0$) est inversible dans A.

(b) Pour tout idéal premier P de A, $A/_P$ est un anneau simple.

(c) A est un anneau semi-primitif.

L'assertion (a) résultera des lemmes suivants.

LEMME 2.7. Soit A un anneau à identité polynomiale non triviale. Pour tout élément $x \in A$, il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que $Ax^k+l(x^k)$ contienne un idéal bilatère non nul.

Cette propriété établie par S.A. Amitsur [1, théorème 9] lorsque A est un anneau premier est valable pour un anneau A quelconque : A satisfait une identité multilinéaire non triviale et l'on peut donc considérer un polynôme multilinéaire $p(x_1,\ldots,x_s)$ à coefficients dans Z de degré s minimum, tel qu'il existe un idéal Ax^k, $k \geqslant 1$ vérifiant l'identité $p(x_1,\ldots,x_s) = 0$. Si $s = 1$, il existe $a \in Z$, $a \neq 0$ et $k \geqslant 1$ tels que $aAx^k = 0$; $l(x^k)$ contient alors l'idéal bilatère non nul Aa. Si $s > 1$, on peut écrire :

$$(*) \qquad p(x_1,\ldots,x_s) = \Big(\sum_{i \in S_{s-1}} \alpha_i x_{i_1} \ldots x_{i_{s-1}}\Big) x_s + \sum_{\substack{i \in S_s \\ i_s \neq s}} \alpha_i x_{i_1} \ldots x_{i_s} ,$$

en supposant de plus $\alpha_1 \neq 0$. Comme le degré de p a été choisi minimum, on peut trouver $y_1,\ldots y_{s-1} \in A$ tels que $\sum_{i \in S_{s-1}} \alpha_i y_{i_1} x^{2k} \ldots y_{i_{s-1}} x^{2k}$ soit un élément $a \neq 0$. On a, pour tout $y \in A$, $p(y_1 x^{2k}, \ldots, y_{s-1} x^{2k}, y\, x^k) = 0$ et la relation (*) entraîne donc $aAx^k \subset Ax^{2k}$. Il en résulte que l'idéal bilatère engendré par a est inclus dans $Ax^k + l(x^k)$. Ceci achève la démonstration du lemme.

<u>LEMME 2.8.</u> <u>Soit</u> A <u>un anneau quasi-commutatif et</u> $x \in A$ <u>tel que</u> $l(x) = 0$. <u>Alors si tout idéal bilatère inclus dans</u> Ax <u>est égal à son carré, on a</u> $Ax = A$.

Soit K le plus grand idéal bilatère inclus dans Ax ; supposons que l'on ait $K \neq A$. L'anneau $B = A/K$ vérifie une identité polynomiale non triviale et l'idéal à gauche $B\bar{x}$ engendré par l'image de x dans B ne contient pas d'idéal bilatère non nul. D'après le lemme 2.7. l'annulateur à gauche $l(\bar{x})$ de $\bar{x}$ dans B est différent de zéro. Posons $l(\bar{x}) = X/K$ où X est un idéal à gauche de A contenant K. On a $X \neq K$, $K = Xx$. L'égalité $K^2 = K$ entraîne $Xx.Xx = Xx$ et comme $l(x)=0$, $XxX = X$

$$XxX = X \Longrightarrow KX = X \Longrightarrow X \subset K \Longrightarrow X = K \text{ , d'où la contradiction.}$$

Le (a) de la proposition 2.6. se démontre alors immédiatement : si $l(x) = 0$ x est inversible à gauche, et comme A est un anneau fini (§ I) x est inversible dans A.

(b) Soit P un idéal premier de A, en appliquant le (a) à l'anneau A/P on constate que ce dernier coïncide avec son anneau total de fractions, et c'est donc un anneau simple [1, théorème 7].

(c) D'après le (b) tout idéal premier de A est un idéal bilatère maximal et le radical de Jacobson R de A coïncide donc avec le radical premier. Comme l'anneau A est semi-premier on a $R = 0$.

Un idéal bilatère K d'un anneau A est dit <u>régulier</u> si pour tout $x \in X$ il existe $a \in A$ (ou $a \in K$, c'est équivalent) tel que $x = xax$.

<u>LEMME 2.9.</u> <u>Si</u> A <u>est un anneau réduit quasi-commutatif et si</u> K <u>est un idéal bilatère de</u> A <u>tel que tout idéal bilatère inclus dans</u> K <u>soit idempotent, alors</u> K <u>est un idéal régulier.</u>

Soit $x \in K$; posons $B = A/_{l(x)}$, l'image $\bar{x}$ de x dans B n'est pas diviseur de zéro ($ax \in l(x) \Longrightarrow ax^2 = 0 \Longrightarrow xax = 0 \Longrightarrow (ax)^2 = 0 \Longrightarrow ax = 0 \Longrightarrow a \in l(x)$). Nous allons montrer que tout idéal bilatère inclus dans $B\bar{x}$ est égal à son carré. Soit L un idéal bilatère de A vérifiant $l(x) \subset L \subset Ax+l(x)$, comme $Ax \cap l(x) = 0$, on a $L = L \cap Ax \oplus l(x)$. $(L \cap Ax)l(x) = 0 \Longrightarrow L \cap Ax \subset l[l(x)]$, et $l[l(x)] \cap l(x) = 0 \Longrightarrow L \cap Ax = L \cap l[l(x)]$. $L \cap Ax$ qui est un idéal bilatère inclus dans L , vérifie $(L \cap Ax)^2 = L \cap Ax$. On a donc $L \subset L^2 + l(x)$ d'où $L/_{l(x)} = [L/_{l(x)}]^2$.

On peut alors appliquer à B et $\bar{x}$ le lemme 2.8. : il existe $a \in A$ tel que $1-ax \in l(x) = r(x)$, soit $x = xax$.

COROLLAIRE 2.10. <u>Un anneau réduit quasi-commutatif dans lequel tout idéal bilatère est semi-premier est un anneau régulier.</u>

LEMME 2.11. <u>Soit</u> A <u>un anneau quasi-commutatif semi-premier ; alors tout idéal à gauche</u> $X \neq 0$ <u>contient un élément</u> x <u>tel que l'anneau des endomorphismes</u> End Ax <u>soit un anneau réduit et tel que</u> $r(1-x)x$ <u>ne soit pas nul.</u>

Soit $\hat{A}$ l'enveloppe injective à gauche de A . L'enveloppe injective $\hat{X}$ de X contient un idempotent abélien $e \neq 0$, et l'anneau des endomorphismes de $\hat{A}e$ isomorphe à l'opposé de l'anneau $e\hat{A}e$ est un anneau réduit [2, proposition 0.1] Comme A est semi-primitif on peut trouver $x \in \hat{A}e \cap A$ tel que $r(1-x) \neq 0$. En effet dire que $r(1-y) = 0$ équivaut à dire que $1-y$ est inversible (prop. 2.6.) et cette propriété ne peut être satisfaite par tout élément de $\hat{A}e \cap A$. On a de plus :

$$r(1-x) \neq 0 \Longrightarrow xr(1-x) \neq 0 \Longrightarrow AxAr(1-x) \neq 0 \quad Ar(1-x)Ax \neq 0 \Longrightarrow r(1-x)x \neq 0.$$

Il est alors évident que x répond aux conditions du lemme puisque End Ax sous-anneau de End $\hat{A}e$ est un anneau réduit.

PROPOSITION 2.12. <u>Soit</u> A <u>un anneau à identité polynomiale standard dans lequel tout idéal bilatère est semi-premier ; alors</u>

(a) <u>Si</u> $x \in A$ <u>est tel que</u> End Ax <u>soit un anneau réduit, pour tout</u> $a \in r(1-x)$, Aax <u>est un idéal à gauche engendré par un idempotent.</u>

(b) A <u>est un anneau régulier.</u>

(a) Nous allons déduire la propriété du lemme 2.9. Posons $\mathfrak{B} = \text{End } Ax$. Soit $\varphi \in \mathfrak{B}$ défini par $\varphi(x) = x^2$. Comme $\mathfrak{B}$ est un anneau réduit $r(1-\varphi)$ est un idéal bilatère $\mathfrak{J}$ de $\mathfrak{B}$. On constate que tout idéal bilatère inclus dans $\mathfrak{J}$ est égal à son carré : soit $f \in \mathfrak{J}$; posons $f(x) = ax$. On a $f(1-\varphi) = 0$, $(1-\varphi)f = 0$, d'où $f = \varphi f \varphi$ soit $ax = xax^2$. Par hypothèse l'idéal bilatère (ax) est idempotent et l'on peut donc trouver $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in A$, $i = 1,\ldots,n$, tels que

$$ax = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i ax\beta_i ax\gamma_i \quad \text{soit} \quad ax = \sum_{i=1}^{n} x\alpha_i ax\beta_i ax\gamma_i x \ .$$

Soient pour tout $i = 1,\ldots,n$, g_i, h_i, k_i, les endomorphismes de Ax définis par $g_i(x) = x\alpha_i x$, $h_i(x) = x\beta_i x$, $k_i(x) = x\gamma_i x$. On a :

$$ax = \sum_{i=1}^{n} k_i f h_i f g_i(x) \quad \text{d'où} \quad f = \sum_{i=1}^{n} k_i f h_i f g_i \ .$$

f appartient donc à $\mathfrak{B} f \mathfrak{B} f \mathfrak{B}$ et l'égalité $(f) = (f)^2$ en résulte.

D'autre part l'anneau $\mathfrak{B}$ est <u>quasi-commutatif</u>, plus précisèment l'opposé $\mathfrak{B}^0$ de l'anneau $\mathfrak{B}$ vérifie les mêmes identités polynomiales que A, et en particulier une identité standard. Il suffit en effet de remarquer que si $f_1,\ldots,f_k$ sont des endomorphismes de Ax tels que $f_1(x) = a_1 x,\ldots$ $f_k(x) = a_k x$, on a $f_1 \ldots f_k(x) = a_k \ldots a_1 x$.

On peut donc appliquer le lemme 2.9. à l'anneau $\mathfrak{B}$ et à l'idéal $\mathfrak{J}$ et $\mathfrak{J}$ est un idéal régulier. Considérons alors $a \in r(1-x)$ et $f \in \mathfrak{B}$ défini par $f(x) = ax = xax$. f est un élément de $\mathfrak{J}$ et par suite il existe $g \in \mathfrak{J}$ tel que $f = fgf$. Posons $g(x) = bx = xbx$. L'égalité $f = fgf$ entraîne $ax = axbax$ et l'idéal à gauche Aax est engendré par l'idempotent bax.

En rapprochant le lemme 2.11. de ce qui précède, on voit que tout idéal à gauche $\neq 0$ de A contient un idempotent $\neq 0$. A est un anneau de Zorn semi-primitif.

(b) A contient un idéal bilatère régulier $\neq 0$. La proposition 1.11. montre que A contient un idempotent central non nul u tel que Au soit isomorphe à un anneau de matrices $M_n(B)$ sur un anneau de Zorn réduit B.

B satisfait les mêmes identités polynomiales que Au , et donc les mêmes que A , et dans B tout idéal bilatère est évidemment semi-premier. D'après le lemme 2.11 B est un anneau régulier et $Au = M_n(B)$ est un idéal régulier de A .

Comme tout anneau quotient $C \neq 0$ de A vérifie les mêmes hypothèses que A, on en déduit que C contient un idéal bilatère régulier $\neq 0$. On sait [6, théorème 23] qu'il existe dans A un idéal bilatère $\mathfrak{m}$ tel que $\mathfrak{m}$ soit régulier, et tel que $A/\mathfrak{m}$ ne contienne pas d'idéaux bilatères réguliers non nuls. D'après ce qui précède ceci implique $A = \mathfrak{m}$.

<u>THEOREME 2.13.</u> <u>Soit</u> A <u>un anneau quasi-commutatif ; il y a équivalence entre les assertions suivantes</u> :

(i) A <u>est un anneau régulier</u>.

(ii) A <u>est un V-anneau à gauche (resp. un V-anneau à droite, resp. un V-anneau)</u>.

(iii) <u>Tout idéal bilatère de</u> A <u>est semi-premier.</u>

Les implications (i) $\Longrightarrow$ (ii) et (ii) $\Longrightarrow$ (iii) résultent du corollaire 2.5. et du lemme 2.1.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Ici encore il suffit de démontrer que A contient un idéal bilatère régulier $\neq 0$. Soit Ω l'idéal bilatère engendré par les coefficients d'une identité multilinéaire satisfaite par A . Il est évident que l'anneau $A/_{l(\Omega)}$ est à identité multilinéaire fidèle, et comme le centre de cet anneau est régulier (lemme 2.2.) $A/_{l(\Omega)}$ vérifie une identité polynomiale homomorphique (lemme 1.9.) et par suite une identité standard (lemme 1.8.). $A/_{l(\Omega)}$ est donc un anneau régulier (proposition 2.12) et l'on en déduit immédiatement que Ω est un idéal régulier de A.

<u>COROLLAIRE 2.14.</u> <u>Un anneau A birégulier quasi-commutatif est un anneau régulier</u>.

On sait en effet que c'est un V-anneau (corollaire 2.5.). La réciproque est vraie si A est une Z-algèbre de type fini [7, théorème 6.3.].

<u>Problème.</u> Dans le cas général un anneau régulier quasi-commutatif est-il un anneau birégulier ?

III. ANNEAUX AFFINES REGULIERS.

Les démonstrations de ce paragraphe ont été trouvées en collaboration avec G. Renault.

A est un anneau affine si c'est une Z-algèbre de type fini et si c'est un anneau quasi-commutatif.

LEMME 3.1. Soient M un idéal maximal du centre Z de A, A_M le localisé de A en M, Z_M le localisé de Z en M, (M) l'idéal bilatère engendré par M dans A. Alors

(a) Le centre C de A_M est égal à Z_M.

(b) Si Z est un anneau régulier, les anneaux A_M et $A/(M)$ sont isomorphes.

(a) On a évidemment $Z_M \subset C$. Soit $x/s \in C$: $x \in A$, $s \in Z-M$, pour tout $y \in A$, il existe $t \in Z-M$ tel que $t(xy-yx) = 0$. Désignons par $y_1,\dots,y_n$ des éléments engendrant la Z-algèbre A et soient $t_1,\dots,t_n \in Z-M$ tels que :

$$\forall i = 1,\dots,n, \quad t_i(xy_i-y_ix) = 0 .$$

On voit facilement que l'élément $\tau = t_1 \dots t_n$ vérifie :

$$\forall y \in A, \quad \tau(xy-yx) = 0 .$$

On a donc $\tau x \in Z$, d'où $x \in Z_M$.

(b) Il suffit de remarquer que $(M) = \{x \in A ; \exists s \in Z-M, \ sx = 0\}$.

Si A est un V-anneau à gauche, Z est un anneau régulier (lemme 2.2.) et d'après le (a) du lemme 3.1., on est ramené à l'étude des anneaux affines, qui sont des V-anneaux à gauche et dont le centre est un corps. Nous allons montrer qu'un tel anneau est un anneau simple. Les propositions suivantes ne supposent pas que l'anneau A vérifie une identité polynomiale.

PROPOSITION 3.2. Soit A un anneau semi-premier à idéal singulier à gauche nul dont l'enveloppe injective à gauche $\hat{A}$ est un anneau fini de type I. Il y a équivalence entre les assertions suivantes :

(i) A est un anneau de Goldie.

(ii) A satisfait la condition de chaîne ascendante sur les annulateurs à gauche (ou à droite).

(iii) Toute somme directe d'idéaux bilatères non nuls de A n'a qu'un nombre fini de termes.

(i) $\Longrightarrow$ (ii). Par définition d'un anneau de Goldie.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). L'implication découle immédiatement du résultat suivant facile à démontrer : Si K et K' sont deux idéaux bilatères de A tels que $K \cap K' = 0$, on a $l[l(K)] \cap l[l(K')] = 0$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i). Dans l'anneau $\hat{A}$, il n'existe pas de famille infinie d'idempotents centraux orthogonaux, et par conséquent [8, corollaire 12] $\hat{A}$ est un produit fini d'anneaux de matrices $M_{n_i}(B_i)$ sur des anneaux réguliers réduits B_i. Pour tout i les sommes directes d'idéaux bilatères non nuls de B_i ont un nombre fini de termes, et comme dans un anneau réduit tous les idéaux sont bilatères, B_i est un anneau semi-simple ; $\hat{A}$ est donc lui-même un anneau semi-simple. A est un anneau semi-premier à idéal singulier à gauche nul dont l'enveloppe injective à gauche est un anneau semi-simple, il est alors immédiat de vérifier que c'est un anneau de Goldie.

PROPOSITION 3.3. Soit A un V-anneau à gauche (ou à droite) qui est un anneau de Goldie à gauche, alors tout idéal bilatère I de A est tel que $I \oplus l(I) = A$.

Considéré comme idéal à gauche $I \oplus l(I)$ est essentiel dans A, il contient donc un élément régulier a. Si A est un V-anneau à gauche on a $(Aa)^2 = Aa$, et comme a n'est pas diviseur de zéro $A = (a)$, d'où le résultat.

COROLLAIRE 3.4. Un anneau affine A qui est un V-anneau à gauche (ou à droite) et dont le centre est un corps, est un anneau simple.

A est semi-premier (lemme 2.1.) et vérifie une identité polynomiale à coefficients dans le corps Z. A est donc plongé dans un anneau de matrices à coefficients dans un anneau commutatif [1, démonstration du théorème 12]. On peut alors démontrer que A vérifie la condition de chaîne ascendante sur les annulateurs [10, démonstration du lemme 2]. C'est donc un anneau de Goldie (proposition 3.2) et les idéaux bilatères sont facteurs directs (proposition 3.3). Comme Z est un corps, les seuls idempotents centraux de A sont 0 et 1, et A est donc quasi-simple. Comme A satisfait une identité polynomiale, c'est un anneau simple et en vertu du lemme 3.1. on a le

COROLLAIRE 3.5. *Soit* A *un anneau affine qui est un V-anneau à gauche ou à droite ; pour tout idéal maximal* M *du centre,* (M) *est un idéal bilatère maximal de* A.

Ceci va nous permettre de donner une démonstration simple du résultat de G.O. Michler et O.E. Villamayor [7].

THEOREME 3.6. *Pour un anneau affine, il y a équivalence entre les assertions suivantes :*

(i) A *est birégulier.*

(ii) A *est régulier.*

(iii) A *est un V-anneau à gauche (resp. un V-anneau à droite, resp. un V-anneau).*

(i), (ii) $\Longrightarrow$ (iii). D'après le corollaire 2.5.

(iii) $\Longrightarrow$ (i). Soit $x \in A$, nous allons montrer que (x) est engendré par un idempotent central h. Si $(x) = A$, $h = 1$. Si $(x) \neq A$, (x) est inclus dans un idéal bilatère maximal P. $M = P \cap Z$ est un idéal maximal du centre, et l'on a $(M) \subset P$, soit (corollaire 3.5.) $(M) = P$. Comme $(M) = \{x \in A ; \exists s \in Z-M, sa = 0\}$, on peut trouver un idempotent central $k \notin M$ tel que $kx = 0$, $h = 1-k$ est alors un idempotent central vérifiant $Ah \neq A$, $(x) \in Ah$. Posons $l[(x)] = L$, et appliquons le résultat précédent à l'anneau $B = A/_L$. L'image $(\bar{x})$ de (x) dans B est un idéal essentiel et il ne peut donc être inclus dans un facteur direct propre. Par suite, on a $(\bar{x}) = B$, d'où $(x) \oplus L = A$, et (x) est engendré par un idempotent central.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii). Il est facile de voir que l'intersection nulle, l'intersection des idéaux (M) où M décrit l'ensemble des idéaux maximaux du centre est nulle. Et l'on peut donc trouver M tel que $x \notin (M)$. Comme $A/_{(M)}$ est un anneau simple il existe $a \in A$ tel que $x-xax \in (M)$, et il existe un idempotent central $h \notin M$ tel que $h(x-xax) = 0$.

$h \notin M$, $x \notin (M) \Longrightarrow hx \neq 0 \Longrightarrow hax \neq 0$, et hax est un idempotent non nul de Ax.

Ceci montre que A est un anneau de Zorn, on conclut alors comme dans le § II (proposition 2.12, (b)).

<u>Remarques</u> : Les anneaux réguliers à identité polynomiale homomorphisme sont caractérisés par le fait qu'ils sont des V-anneaux, ou encore que tout idéal à gauche ou à droite irréductible est maximal. On sait que dans le cas général il existe des V-anneaux qui ne sont pas réguliers [J.H. Cozzens, 3], mais l'on peut se demander si un anneau dans lequel les idéaux irréductibles sont maximaux est un anneau régulier (dans le contre-exemple de J.H. Cozzens, 0 est irréductible à droite et à gauche, et il n'est maximal ni à droite ni à gauche).

D'autre part, on sait aussi qu'il existe des anneaux réguliers qui ne sont pas des V-anneaux à gauche [7]. On a cependant le résultat suivant qui est une conséquence immédiate de la proposition 2.3.

<u>PROPOSITION 3.7. Soit</u> A <u>un anneau dans lequel les idéaux à gauche sont idempotents ; alors si pour tout idéal bilatère premier</u> P, $A/_{P}$ <u>est un anneau simple, les idéaux à gauche irréductibles sont maximaux.</u>

BIBLIOGRAPHIE

[1] S.A. AMITSUR, Prime Rings having Polynomial Identities with Arbitrary Coefficients. Proc. London Math. Soc. (3) 17 (1967), pp. 470-86.

[2] A. CAILLEAU et G. RENAULT, Sur l'enveloppe injective des anneaux semi-premiers à idéal singulier nul. J. of Alg. (1) 15 (1970), pp. 133-41.

[3] J.H. COZZENS, Homological Properties of the Ring of Differential Polynomials. Bull. Amer. Math. Soc. 76 (1970), pp. 75-79.

[4] P. GABRIEL, Des catégories abéliennes. Bull. Soc. Math. Fr. 90 (1962), pp. 323-48.

[5] N. JACOBSON, Some Remarks on One-Sided Inverses. Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950), pp. 352-55.

[6] I. KAPLANSKY, Fields and Rings. Chicago Lectures in Mathematics.

[7] G.O. MICHLER et O.E. VILLAMAYOR, On rings whose simple Modules are injective. Journées d'Algèbre Pure et Appliquée, Montpellier (France) 1971.

[8] G. RENAULT, Anneaux réguliers auto-injectifs à droite (à paraître).

[9] J.E. ROOS, Reports of the Midwest Category Seminar, Springer Verlag Berlin/New York (1967), pp. 156-81.

[10] L.W. SMALL, An Exemple in P.I. Rings, J. of Alg. 17 (1971), pp. 434-36.

[11] Y. UTUMI, A note on an Inequality of Levitski. Proc. Japan Acad. 33 (1957), pp. 249-51.

-:-:-:-:-:-:-:-:-

UNIVERSITE PARIS SUD

CENTRE D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 10 du 5 Février 1973

DEVIATION DANS LES ANNEAUX

par B. LEMONNIER

-:-:-:-:-:-

- non rédigée -

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

CENTRE D'ORSAY

Conférence n° 11 du 26 Février 1973

SUR LE SPECTRE D'UN ANNEAU NON COMMUTATIF

par J.P. DELALE

-:-:-:-:-:-

I.1. PRELIMINAIRES.

Il est bien connu des géomètres algébristes que l'étude d'un schéma X est plus ou moins équivalente à l'étude d'un foncteur $F : \mathcal{A} \to \mathcal{E}$, où $\mathcal{A}$ désigne la catégorie des anneaux commutatifs (associatifs, unitaires, non réduits à l'élément 0 (i.e. $1 \neq 0$)) et $\mathcal{E}$ désigne la catégorie des ensembles. Cette correspondance est la suivante :

Au schéma X on fait correspondre le foncteur F qui à l'anneau associatif A associe l'ensemble $F(A) = \mathcal{Sch}(\mathrm{Spec}(A), X)$(*).

Inversement, au foncteur F on associe un schéma X dont l'ensemble sous-jacent $|X|$ est défini par

$$|X| = \varinjlim_{K \in \mathcal{Corps}} F(K) .$$

On dira que $|X|$ est l'ensemble sous-jacent au foncteur F. On peut mettre sur $|X|$ une topologie et un faisceau structural $\mathcal{O}_X$ (voir par exemple [6]), mais nous ne nous préoccuperons pas ici de ces structures supplémentaires.

On vérifie facilement que, dans la correspondance ci-dessus, le schéma affine $\mathrm{Spec}(A)$ correspond exactement au foncteur représentable $\mathcal{A}(A,-) : \mathcal{A} \to \mathcal{E}$ $(B \mapsto \mathcal{A}(A,B))$.

(*) Si $\mathcal{C}$ est une catégorie et si X, Y sont deux objets de $\mathcal{C}$, on notera $\mathcal{C}(X,Y)$ l'ensemble des morphismes $u : X \to Y$ dans $\mathcal{C}$.

Il est donc naturel d'aborder la construction du spectre d'un anneau non commutatif A en considérant la catégorie $\mathcal{A}'$ des anneaux (associatifs, unitaires, avec $1 \neq 0$) puis en construisant un "ensemble sous-jacent" au foncteur représentable $\mathcal{A}'(A,-) : \mathcal{A}' \to \mathcal{E}$.

I.2. ENSEMBLE SOUS-JACENT A UN FONCTEUR.

Il se trouve que l'on sait construire pour toute catégorie $\mathcal{C}$ et pour tout foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ un "ensemble sous-jacent" $|F|$ au foncteur F . Cette construction est fonctorielle en F et jouit de nombreuses propriétés qui sont détaillées dans [4] . Nous allons ici simplement donner quelques indications générales ainsi que la description explicite de $|F|$ lorsque F est un foncteur représentable.

Soit donc $\mathcal{C}$ une catégorie quelconque et soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ un foncteur. On considère l'ensemble (*) des sous-foncteurs de F (on dit que $S \subset F$ est un <u>sous-foncteur</u> de F si, pour tout objet X de $\mathcal{C}$, $S(X)$ est une partie de l'ensemble $F(X)$ et si pour tout $u : X \to Y$, $S(u) : S(X) \to S(Y)$ est la restriction de $F(u)$ à $S(X)$).

L'ensemble de ces sous-foncteurs, ordonné par l'inclusion, possède des intersections et des réunions quelconques et celles-ci jouissent des mêmes propriétés de distributivité que celles vérifiées par l'algèbre de Boole des parties d'un ensemble. Malheureusement, un sous-foncteur $S \subset F$ ne possède pas en général de complémentaire, mais il existe un plus grand sous-foncteur, noté S^c , tel que $S \cap S^c = \emptyset$ ($\emptyset$ désigne ici le "sous-foncteur vide" de F). On a, a priori, $S \underset{\neq}{\subset} (S^c)^c$ et la technique standard en théorie des treillis consiste à se restreindre à l'étude des sous-foncteurs qui vérifient $S = (S^c)^c$. On dira qu'un tel sous-foncteur <u>est induit par F</u> . On montre alors ([2], [4]) que l'ensemble des sous-foncteurs induits par F est une algèbre de Boole.

Pour pouvoir énoncer le théorème qui suit, nous aurons besoin de la définition importante suivante :

(*) Ce n'est pas a priori un "ensemble" sauf si la classe des objets de $\mathcal{C}$ est elle-même un ensemble, mais nous ne nous préoccuperons pas de ces difficultés logiques.

DEFINITION : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et soit $u:A \to X$ un morphisme de $\mathcal{C}$ on dit que u est un morphisme quasi-filtré (dans $\mathcal{C}$) si

$$\forall Y,Y', \ \forall v:X \to Y, \ \forall v':X \to Y', \ \exists T, \ \exists w:Y \to T, \ \exists w':Y' \to T$$

tels que $$wvu = w'v'u'$$

$$\begin{tikzcd}
 & & Y \arrow[dr, "\exists w"] & \\
A \arrow[r, "u"] & X \arrow[ur, "\forall v"] \arrow[dr, "\forall v'"'] & & T \\
 & & Y' \arrow[ur, "\exists w'"'] &
\end{tikzcd}$$

On dira que l'objet A de $\mathcal{C}$ est quasi-filtré (dans $\mathcal{C}$) si l'identité de A est un morphisme quasi-filtré.

THEOREME 1 ([4]) : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) Pour tout foncteur $F:\mathcal{C} \to \mathcal{E}$, l'algèbre de Boole des sous-foncteurs induits par F est isomorphe à l'algèbre des parties d'un ensemble U.

ii) Pour tout foncteur représentable $\mathcal{C}(A,-):\mathcal{C} \to \mathcal{E}$, l'algèbre de Boole des sous-foncteurs induits par $\mathcal{C}(A,-)$ est isomorphe à l'algèbre des parties d'un ensemble.

iii) Tout objet A de $\mathcal{C}$ est source d'au moins un morphisme quasi-filtré $u:A \to X$.

La condition iii) ci-dessus sera appelée axiome de filtration. Lorsqu'elle est satisfaite, l'ensemble U dont l'existence est assurée par l'assertion i) est évidemment isomorphe à l'ensemble des sous-foncteurs induits minimaux non vides de F (c'est-à-dire les atomes de l'algèbre de Boole des sous-foncteurs induits). Cet ensemble des atomes peut être considéré même si l'axiome de filtration n'est pas satisfait.

DEFINITION : Si $\mathcal{C}$ est une catégorie quelconque et $F:\mathcal{C} \to \mathcal{E}$ est un foncteur, on appelle ensemble sous-jacent au foncteur F, et on note $|F|$ l'ensemble des sous-foncteurs induits minimaux non vides de F.

COROLLAIRE : Si $\mathcal{C}$ satisfait à l'axiome de filtration, pour tout $F:\mathcal{C} \to \mathcal{E}$, l'algèbre de Boole des sous-foncteurs induits par F est isomorphe à l'algèbre $\mathcal{P}(|F|)$ des parties de F.

En particulier, $|F|$ est alors non vide dès que F n'est pas le foncteur vide (en effet $\emptyset$ et F lui-même sont alors deux sous-foncteurs induits distincts). Inversement, nous allons constater que si $|\mathcal{C}(A,-)|$ est non vide pour tout foncteur représentable $\mathcal{C}(A,-)$, alors $\mathcal{C}$ satisfait à l'axiome de filtration.

Donnons la description explicite de l'ensemble sous-jacent à un foncteur représentable $\mathcal{C}(A,-) : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ ($\mathcal{C}$ quelconque).

PROPOSITION 1. Soit $P \subset \mathcal{C}(A,-)$ un sous-foncteur induit minimal non vide. Alors :

1) Tout élément de P est quasi-filtré, c'est-à-dire : si $u : A \to X$ appartient à $P(X) \subset \mathcal{C}(A,X)$, u est quasi-filtré.

2) Si $u : A \to X$ et $v : A \to Y$ appartiennent respectivement à $P(X)$ et $P(Y)$, il existe T, $u' : X \to T$ et $v' : Y \to Y$ tels que $u'u = v'v$.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dr, "u'"] & \\ A \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "v"'] & & T \\ & Y \arrow[ur, "v'"'] & \end{tikzcd}$$

Inversement,

si $u : A \to X$ est un morphisme quasi-filtré, on définit un sous-foncteur induit minimal non vide $P \subset \mathcal{C}(A,-)$ en posant, pour tout Y:

$P(Y) = \{v : A \to Y \mid \exists u' : X \to T, \exists v' : Y \to T$ tels que $u'u = v'v\}$.

COROLLAIRE : L'ensemble sous-jacent au foncteur représentable $\mathcal{C}(A,-)$ est canoniquement isomorphe à l'ensemble des classes d'équivalence de morphismes quasi-filtrés $u : A \to X$ pour la relation d'équivalence

$u : A \to X \approx v : A \to Y \iff \exists T, \exists u' : X \to T, \exists v' : Y \to T$ tels que $u'u = v'v$.

(Ceci est bien une relation d'équivalence car les morphismes considérés sont quasi-filtrés).

En particulier, on voit que si A est un objet quasi-filtré dans $\mathcal{C}$, alors $|\mathcal{C}(A,-)|$ est réduit à un seul élément (la réciproque est d'ailleurs vraie si l'on suppose que $\mathcal{C}$ satisfait à l'axiome de filtration).

I.3. EXEMPLE DES ANNEAUX COMMUTATIFS.

On sait que si K est un corps et si $u:K \to X$, $v:K \to Y$ sont deux homomorphismes d'anneaux commutatifs, alors $X \underset{K}{\otimes} Y$ est non nul, donc est un objet de $\mathcal{A}$, de sorte que l'on a dans $\mathcal{A}$ un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dr, "u'"] & \\
K \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "v"'] & & X \otimes_K Y \\
 & Y \arrow[ur, "v'"'] &
\end{tikzcd}$$

Il en résulte que le corps K est un objet quasi-filtré de $\mathcal{A}$ et donc que tout homomorphisme $A \to K$ est quasi-filtré dans $\mathcal{A}$. Comme tout anneau A possède au moins un tel homomorphisme, on en déduit que

- $\mathcal{A}$ satisfait à l'axiome de filtration.
- Si $u:A \to X$ est quasi-filtré (*), u est équivalent à un homomorphisme $A \to K$ où K est un corps (on envoie X dans un corps et on considère l'homomorphisme composé $A \xrightarrow{u} X \to K$).

Il est alors immédiat de vérifier que l'ensemble sous-jacent au foncteur représenté par A s'identifie à $\varinjlim_{K \in \mathcal{C}orps} \mathcal{A}(A,K)$ et qu'il s'identifie aussi à l'ensemble des idéaux premiers de A grâce au "lemme" suivant.

LEMME : 1) Deux homomorphismes $u:A \to K$ et $u':A \to K'$ (K,K' corps) sont équivalents si et seulement si ils ont même noyau $\mathfrak{p}$.

2) Pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \subset A$, il existe un corps K et un homomorphisme $A \to K$ dont le noyau est $\mathfrak{p}$.

Il convient maintenant de mentionner un résultat qui est à l'origine du choix de la terminologie de sous-foncteur induit et qui peut justifier l'usage que l'on fera de la théorie de la localisation.

(*) On peut aussi montrer ([4]) que $u:A \to X$ est quasi-filtré si et seulement si l'application $\mathrm{Spec}(u):\mathrm{Spec}(X) \to \mathrm{Spec}(A)$ est une application constante.

THEOREME 2 ([4]) : Soit $u: A \to B$ un homomorphisme d'anneaux commutatifs. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) L'homomorphisme de foncteurs représentables $\mathcal{A}(B,-) \to \mathcal{A}(A,-)$ défini par u est injectif et identifie $\mathcal{A}(B,-)$ à un sous-foncteur induit par $\mathcal{A}(A,-)$

ii) L'homomorphisme de schémas $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ défini par u est injectif et identifie $\mathrm{Spec}(B)$ à son image (celle-ci est munie de la topologie induite par celle de $\mathrm{Spec}(A)$ et de la restriction du faisceau structural de $\mathrm{Spec}(A)$).

iii) $u: A \to B$ est un épimorphisme plat.

iv) u est un épimorphisme d'anneaux et si $v: A \to X$ est un homomorphisme quelconque, v se factorise à travers u si et seulement si $\forall w: X \to Y$, $\exists w': Y \to T$ tel que $w'wv$ se factorise à travers u .

On sait ([5]) que la condition iii) équivaut à dire que B est le localisé de A pour une localisation "parfaite". Par ailleurs, les assertions i) et iv) sont de caractère purement catégorique et celles-ci restent équivalentes si, au lieu de $\mathcal{A}$, on prend une catégorie quelconque.

Remarque : Il est fondamental d'exclure de la catégorie $\mathcal{A}$, l'anneau 0 réduit à un seul élément. Si cela n'avait pas été fait, il est facile de voir que tout anneau A aurait été quasi-filtré, de sorte que l'ensemble sous-jacent $|\mathcal{A}(A,-)|$ au foncteur représenté par A aurait été réduit à un seul élément. Un tel canular se produit chaque fois que la catégorie $\mathcal{C}$ considérée possède un objet final.

II.1. REDUCTIONS ELEMENTAIRES DU PROBLEME LORSQUE L'ON CONSIDERE UNE CATEGORIE D'ANNEAUX.

Soit $\mathcal{A}'$ la catégorie dont les objets sont les anneaux associatifs unitaires non réduits à 0 et dont les morphismes sont les homomorphismes unifères d'anneaux.

Le problème est donc de caractériser, pour un anneau A donné, l'ensemble des classes d'équivalence d'homomorphismes quasi-filtrés $u: A \to X$. Accessoirement, on se demande si la catégorie $\mathcal{A}'$ satisfait à l'axiome de filtration.

Plus généralement, on se pose ces questions non seulement pour $\mathcal{A}'$ mais pour toute catégorie $\mathcal{B}$, avec

$$\mathcal{K} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{A}' ,$$

pourvu que $\mathcal{B}$ soit raisonnable. En l'espèce, on suppose que <u>si</u> $A \in \mathcal{B}$ <u>et si</u> $\mathfrak{m}$ <u>est un idéal bilatère maximal de</u> A, <u>alors</u> $A/\mathfrak{m}$ <u>est encore un objet de</u> $\mathcal{B}$ <u>et la projection</u> $A \to A/\mathfrak{m}$ <u>est un morphisme de</u> $\mathcal{B}$. Nous étudierons plus loin de telles catégories.

Par analogie au cas des anneaux commutatifs, on peut essayer de décomposer en deux parties le problème de la recherche des morphismes quasi-filtrés.

1) On recherche une classe $\mathcal{K} \subset \mathcal{B}$ telle que tout objet de $\mathcal{K}$ soit quasi-filtré.

2) On étudie comment on peut envoyer un anneau $A \in \mathcal{B}$ dans un anneau $K \in \mathcal{K}$.

Si $\mathcal{K}$ est suffisamment grosse pour que tout objet de $\mathcal{B}$ s'envoie au moins d'une façon dans un objet de $\mathcal{K}$, on saura alors que :

- $\mathcal{B}$ satisfait à l'axiome de filtration.
- Tout morphisme quasi-filtré $A \to X$ est équivalent à un morphisme $A \to K$, avec $K \in \mathcal{K}$, de sorte qu'il suffit d'étudier les classes d'équivalence de morphismes $A \to K$.

<u>LEMME : Soit</u> $\mathfrak{S}$ <u>une catégorie comme ci-dessus et soit</u> K <u>un objet quasi-filtré dans</u> $\mathfrak{S}$. <u>Alors si</u> $u:K \to X$ <u>et</u> $v:K \to Y$ <u>sont deux homomorphismes avec</u> X <u>et</u> Y <u>quasi-simples, on a</u> $\ker u = \ker v$. <u>En particulier,</u> K <u>ne possède qu'un seul idéal (bilatère) maximal.</u>

Par ailleurs, si K est quasi-filtré d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, il est immédiat de constater que $K/\mathfrak{m}$ est aussi un objet quasi-filtré. Si l'on a trouvé une classe $\mathcal{K}$ d'objets quasi-filtrés, on voit que l'on ne perd rien (vis-à-vis du problème 2) en remplaçant $\mathcal{K}$ par la classe des anneaux quasi-simples $K/\mathfrak{m}$, $K \in \mathcal{K}$. Le problème 1) se réduit donc à

1') Rechercher une classe $\mathcal{K}'$ d'anneaux quasi-simples et quasi-filtrés dans $\mathfrak{S}$.

Pour l'étude du problème 2) et des classes d'équivalence de morphismes quasi-filtrés, on utilisera des techniques du type localisation, mais on est aussi guidé par le résultat suivant :

<u>PROPOSITION 2. Soit</u> $\mathfrak{S}$ <u>une catégorie comme ci-dessus. Alors il existe une application naturelle, fonctorielle en</u> $A \in \mathfrak{S}$:

$$k_A : |\mathfrak{S}(A,-)| \to \{\text{idéaux de } A\} .$$

En effet, si $P \in |\mathfrak{S}(A,-)|$, on choisit un représentant $u:A \to X$ de P . Par hypothèse sur $\mathfrak{S}$, on peut envoyer X dans un anneau quasi-simple S par un morphisme $v:X \to S$. On pose :

$$k_A(P) = \ker(vu : A \to S) .$$

Il faut montrer que ce noyau est indépendant du choix du représentant u et du choix du morphisme v . C'est un travail de routine.

Cette application k_A n'est a priori ni surjective ni injective. Par analogie avec le cas des anneaux commutatifs, on a envie d'appeler <u>idéal $\mathfrak{S}$-premier</u> de A un idéal qui est dans l'image de k_A .

II.2. LA CATEGORIE $\mathcal{A}'$.

On sait que si l'on se donne deux homomorphismes $u_1 : A \to X_1$ et $u_2 : A \to X_2$, on peut toujours construire une somme amalgamée S de X_1 et X_2 au-dessous de A. S est éventuellement réduit à 0, mais, par propriété universelle, on voit qu'il suffit qu'il existe $T \in \mathcal{A}'$ (i.e. $T \neq 0$) et $w_i : X_i \to T$ $(i = 1,2)$ vérifiant $w_1 u_1 = w_2 u_2$ pour pouvoir affirmer que $S \neq 0$.

Donc un anneau A est quasi-filtré dans $\mathcal{A}'$ si et seulement si $\forall u_1 : A \to X_1$, $\forall u_2 : A \to X_2$, la somme amalgamée S de X_1 et X_2 au-dessous de A est non réduite à 0. On a le résultat suivant :

PROPOSITION 3. *Si A est un anneau quasi-simple et régulier (au sens de Von Neuman), alors A est quasi-filtré dans* $\mathcal{A}'$.

Comme régulier équivaut à absolument plat, c'est une conséquence immédiate d'un très beau résultat dû à Cohn ([3]).

THEOREME. *Soient* $u_1 : A \to X_1$ *et* $u_2 : A \to X_2$ *et soit* S *leur somme amalgamée. Si* u_1 *et* u_2 *sont injectifs et si* $X_{1/A}$ *et* $X_{2/A}$ *sont plats à gauche (resp. à droite) sur* A, *alors*

- *les homomorphismes canoniques* $v_i : X_i \to S$ $(i = 1,2)$ *sont injectifs.*

De plus,

- A *s'identifie au produit fibré de* X_1 *et* X_2 *au-dessus de* S.
- $S_{/X_i}$ *est plat à gauche (resp. à droite) sur* X_i $(i = 1,2)$ *et* $S_{/A}$ *est plat à gauche (resp. à droite) sur* A.

C'est à peu près tout ce que je sais dire actuellement sur $\mathcal{A}'$. En réalité, je n'ai pas étudié davantage $\mathcal{A}'$ car elle présente la pathologie suivante : Si l'on part d'un anneau $A \in \mathcal{A}'$ qui se trouve être commutatif, on aimerait que l'ensemble sous-jacent $|\mathcal{A}'(A,-)|$ au foncteur représenté par A dans $\mathcal{A}'$ soit précisément le spectre usuel de A. Or cela n'est pas en général le cas.

Exemple : Soit $A = \mathbb{Q}[T]_{/T^n}$. A ne possède qu'un seul idéal premier. Considérons l'homomorphisme d'anneaux

$$f: A \to M_n(\mathbb{Q}) = \text{anneau des matrices de rang } n \text{ sur } \mathbb{Q}$$

défini par $f(T) = (a_{ij})$ avec $a_{ij} = \delta_{i,j+1}$. Comme $M_n(\mathbb{Q})$ est simple (donc quasi-simple et régulier), f est un morphisme quasi-filtré dans $\mathcal{A}'$ et définit donc un élément $P \in |\mathcal{A}'(A,-)|$. Mais cet élément P n'est pas dans le spectre usuel de A puisque son image par k_A n'est autre que l'idéal 0 de A (en effet, f est injectif).

II.3. On va rechercher des catégories $\mathcal{B}$ satisfaisant aux conditions du § II 1 et qui ne présentent pas la pathologie que l'on a rencontré pour $\mathcal{A}'$. Deux telles catégories se présentent naturellement.

1) La catégorie des algèbres, que l'on notera $\mathcal{Alg}$.

Les objets de $\mathcal{Alg}$ sont les mêmes que ceux de $\mathcal{A}'$ mais on ne prend comme morphismes que les homomorphismes (unifères) d'anneaux $u: A \to B$ qui envoient le centre $Z(A)$ de A dans le centre $Z(B)$ de B .

Il revient au même de dire que u confère à B non seulement une structure de $A \otimes_{\mathbb{Z}} A^{opp}$-module à gauche mais une structure de $A \otimes_{Z(A)} A^{opp}$-module à gauche. On conviendra d'appeler A-module bilatère un $A \otimes_{Z(A)} A^{opp}$-module à gauche (le terme de "bimodule" sera utilisé plus loin pour désigner une autre notion).

2) La catégorie des extensions, que l'on notera $\mathcal{P}$ (pour Procesi).

Les objets de $\mathcal{P}$ sont encore les mêmes que ceux de $\mathcal{A}'$, mais on prend comme morphismes seulement les homomorphismes $u: A \to B$ dont l'image $u(A)$ et le centralisateur

$$Z_A(B) = \{b \in B \mid b.u(a) = u(a).b \quad \forall a \in A\}$$

de l'image engendrent B tout entier (en tant qu'anneau).

Un tel homomorphisme sera appelé une extension. Si $u: A \to B$ est une extension telle que le centralisateur $Z_A(B)$ de l'image de A est égale au centre de B , on dira que u est une extension centrale. Ces notions ont été introduites par Procesi ([9]) puis développées par Artin ([1]). Les extensions sont des morphismes sympathiques qui ont un comportement très analogue à celui que l'on rencontre dans le cas commutatif. On établit, par exemple que, si $u : A \to B$ est un homomorphisme d'anneaux,

- Si A est commutatif, u est une extension si et seulement si $u(A)$ est contenu dans le centre de B.
- Si u est une extension, alors u envoie le centre de A dans le centre de B. En d'autres termes, on a les inclusions

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{A}lg \subset \mathcal{A}' .$$

- Si u est surjectif, u est une extension centrale.
- Si u est une extension, l'image réciproque d'un idéal premier de B est un idéal premier de A.

Par ailleurs, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{A}lg$ ne présentent plus la pathologie rencontrée pour $\mathcal{A}'$. En effet, c'est un jeu de vérifier que ces deux catégories satisfont aux hypothèses du théorème suivant.

<u>THEOREME 3. Soit</u> $\mathcal{S}$ <u>une catégorie, avec</u> $\mathcal{A} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{A}'$ <u>et telle que</u>

a) <u>Si</u> X <u>est un objet de</u> $\mathcal{S}$ <u>et si</u> $\mathfrak{m}$ <u>un idéal maximal de</u> X, <u>alors</u> $X/_{\mathfrak{m}}$ <u>et la projection</u> $X \to X/_{\mathfrak{m}}$ <u>sont dans</u> $\mathcal{S}$.

b) <u>Le plongement canonique</u> $\mathcal{A} \to \mathcal{S}$ <u>possède un adjoint à droite</u> $Z : \mathcal{S} \to \mathcal{A}$ <u>(cet adjoint est, dans les cas qui nous occupent, le foncteur qui associe à l'anneau</u> X <u>son centre</u> $Z(X)$.

c) <u>Si</u> K <u>est un corps commutatif,</u> K <u>est un objet quasi-filtré de</u> $\mathcal{S}$.

<u>Alors on a un isomorphisme canonique, unique, fonctoriel en</u> $F : \mathcal{A} \to \mathcal{S}$

$$|F_o Z|_{\mathcal{S}} \xrightarrow{\sim} |F|_{\mathcal{A}}$$

<u>En particulier, si</u> $F = \mathcal{A}(A,-)$ (A <u>anneau commutatif), on a</u>

$$F_o Z \simeq \mathcal{S}(A,-)$$ <u>(par adjonction), de sorte que</u>

$$|\mathcal{S}(A,-)|_{\mathcal{S}} \cong \mathrm{Spec}(A)$$

III. ETUDE DE LA CATEGORIE DES EXTENSIONS.

III.1. LA CATEGORIE DES BIMODULES.

Soit A un anneau dont on note $Z(A)$ ou Z le centre. Soit M un $A\otimes_Z A^{opp}$-module à gauche. On pose :

$$Z_A(M) = \{m \in M \mid am = ma \quad \forall a \in A\}$$

$Z_A(M)$ est canoniquement isomorphe à l'ensemble des homomorphismes de $A\otimes_Z A^{opp}$-modules $f:A \to M$, de sorte que $Z_A(M)$ est un $\mathrm{End}_{A\otimes_Z A^{opp}}(A)=Z(A)$-module.

On dira, reprenant la terminologie d'Artin, que M est <u>un A-bimodule</u> si $Z_A(M)$ engendre M (en tant que $A\otimes_Z A^{o}$-module ou en tant que A-module à droite ou à gauche, cela revient au même).

On remarque qu'un homomorphisme d'anneaux $u:A \to B$ est une extension si et seulement si B est un A-bimodule.

Par ailleurs, si A est commutatif, on constate avec plaisir que la notion de A-bimodule coïncide avec celle de A-module.

Tout bimodule est un $A\otimes_{Z(A)} A^{opp}$-module (i.e. un module bilatère) la réciproque étant évidemment en général fausse (voir § IV), mais tout module bilatère M possède un plus grand bimodule contenu dans M (à savoir le A-module engendré par $Z_A(M)$).

Les sorites généraux sur les bimodules ont déjà été écrits par Artin, et on renvoie à son article ([1]) pour tous les détails. Il nous faut cependant rappeler un point important :

Si $u_1:A \to X_1$ et $u_2:A \to X_2$ sont deux extensions d'anneaux, alors $X_1\otimes_A X_2$ est muni d'une unique structure d'anneau prolongeant sa structure sur A et telle que

$$(x_1\otimes x_2)(x_1'\otimes x_2') = x_1x_1'\otimes x_2x_2' \quad \text{dès que} \quad x_1' \in Z_A(X_1)$$
$$\text{ou que} \quad x_2 \in Z_A(X_2)$$

et les applications canoniques $v_i:X_i \to X_1\otimes_A X_2$ $(i = 1,2)$ sont alors des extensions d'anneaux.

Remarque : Si $w_1 : X_1 \to Y$ et $w_2 : X_2 \to Y$ sont des extensions vérifiant $w_1 u_1 = w_2 u_2$, il existe une et une seule application de A-bimodules $\theta : X_1 \otimes_A X_2 \to Y$ telle que $\theta v_i = w_i$, mais θ n'est en général pas un homomorphisme d'anneaux, de sorte que $X_1 \otimes_A X_2$ n'est pas la somme amalgamée dans $\mathcal{P}$ de X_1 et X_2 au-dessous de A .

Ceci répond par la négative à une question posée (sans réfléchir) par Artin ([1]). En fait, on peut montrer que dans $\mathcal{P}$ il n'existe pas de somme amalgamée (même en admettant l'anneau 0). On a cependant le résultat suivant :

Si $u_1 : A \to X_1$ ou $u_2 : A \to X_2$ est une extension centrale, alors $X_1 \otimes_A X_2$ est somme amalgamée dans $\mathcal{P} \cup \{0\}$.

III.2. ETUDE DES OBJETS QUASI-FILTRES DE $\mathcal{P}$.

Si $u_1 : A \to X_1$ et $u_2 : A \to X_2$ sont deux extensions, il se peut que $X_1 \otimes_A X_2$ soit l'anneau 0 . Cependant, si il existe $Y \neq 0$ et w_i, $i = 1,2$ comme dans la remarque ci-dessus, on constate que $\theta : X_1 \otimes_A X_2 \to Y$ envoie l'unité $1 \otimes 1$ de $X_1 \otimes X_2$ sur l'unité de Y , de sorte que l'on a :

LEMME. Un anneau A est quasi-filtré dans $\mathcal{P}$ si et seulement si pour tout couple d'extensions (u_1, u_2) on a $X_1 \otimes_A X_2 \neq 0$.

Encore une terminologie : on dira qu'un bimodule L est un bimodule libre s'il est isomorphe (en tant que A-module bilatère) à une somme directe d'exemplaires de A (une telle somme directe est d'ailleurs toujours un bimodule).

PROPOSITION 4. Si A est un anneau quasi-simple, tout A-bimodule est libre.

On peut faire une démonstration à la main (en exhibant une base), mais on peut aussi s'appuyer sur un résultat du § IV.

COROLLAIRE. Tout anneau quasi-simple est quasi-filtré dans $\mathcal{P}$.

Conséquences :

1) $\mathcal{S}$ satisfait à l'axiome de filtration (puisque, répétons le, les surjections sont des extensions).

2) Si A est un anneau, l'image de l'application canonique (§ II,1)

$$k_A : |\mathcal{S}(A,-)| \to \{\text{idéaux de } A\}$$

est formée exactement de tous les idéaux qui sont noyau d'un homomorphisme $A \to K$ avec K quasi-simple. En particulier, k_A prend ses valeurs dans les idéaux premiers de A (car l'image réciproque d'un idéal premier est un idéal premier) et l'image de k_A contient tous les idéaux maximaux de A.

III.3. LOCALISATION DANS LA CATEGORIE DES BIMODULES.

Pour pouvoir décrire plus explicitement l'ensemble $|\mathcal{S}(A,-)|$, il est nécessaire de disposer d'une notion "d'anneau quasi-simple des fractions". C'est l'objet de la théorie de la localisation développée ici.

La difficulté réside en ce que la catégorie des A-bimodules n'est pas une catégorie abélienne. Cependant, on peut montrer que la catégorie des A-bimodules admet des limites projectives et des enveloppes injectives (mais ni les unes ni les autres ne se calculent comme on le fait usuellement dans une catégorie de modules), de sorte que les travaux récents de J. Lambek ([8]) pourraient être utilisés ici.

Cependant les résultats que l'on a en vue nécessitent d'examiner les choses de façon explicite et les résultats généraux de J. Lambek ne semblent pas être utilisables pour démontrer les théorèmes qui vont être énoncés.

Dans la suite, nous parlerons du noyau et du conoyau d'un homomorphisme de bimodules. Il faut remarquer qu'il s'agira toujours du noyau et du conoyau usuels (calculés en tant que modules bilatères) et que s'il est vrai que le conoyau est un bimodule, le noyau quant à lui n'est en général pas un bimodule.

DEFINITION. On appelle théorie de torsion σ sur A la donnée, pour tout A-bimodule M d'un sous-module bilatère $\sigma(M) \subset M$ tel que

- Si $f : M' \to M$ est un homomorphisme de bimodules, $f(\sigma(M')) \subset \sigma(M)$.
- Si $M' \subset M$, on a $\sigma(M') = M' \cap \sigma(M)$.
- $\sigma(M/\sigma(M)) = 0$.

A la théorie de torsion σ on associe la famille $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\sigma)$ des idéaux bilatères $U \subset A$ tels que $\sigma(A/_U) = A/_U$ (i.e. $A/_U$ est de <u>σ-torsion</u>). $\mathfrak{F}$ possède les propriétés suivantes :

a) Si $U \in \mathfrak{F}$ et $V \supset U$, alors $V \in \mathfrak{F}$.

b) Si $U, V \in \mathfrak{F}$, alors $U \cap V \in \mathfrak{F}$.

Inversement, la famille $\mathfrak{F}$ ne détermine pas complètement σ, mais on a :

<u>PROPOSITION 5. Si σ et τ sont deux théories de torsion telles que $\mathfrak{F}(\sigma) = \mathfrak{F}(\tau)$ alors un bimodule</u> M <u>est de σ-torsion si et seulement si il est de τ-torsion.</u>

Dans tout ce qui suit, et afin d'éliminer définitivement certaines complexités techniques, on va se limiter aux seules théories de torsion qui satisfont la condition supplémentaire suivante.

(*) Pour tout bimodule M , l'ensemble des $m \in M$ pour lesquels il existe $U \in \mathfrak{F}(\sigma)$ vérifiant $Um = mU = 0$ est contenu dans $\sigma(M)$.

Cette condition entraîne que la famille $\mathfrak{F}(\sigma)$ est stable par produits, c'est-à-dire que l'on a

c) Si $U, V \in \mathfrak{F}(\sigma)$, alors $U.V \in \mathfrak{F}(\sigma)$.

Certains des théorèmes qui suivent sont faux si l'on ne suppose pas la condition (*) vérifiée. C'est d'ailleurs un peu à cause de l'impossibilité de tester cette condition (*) lorsque l'on raisonne abstraitement que l'on doit développer la théorie explicitement.

Désormais, "théorie de torsion" signifiera "théorie de torsion satisfaisant à la condition supplémentaire (*)".

<u>Exemples de théories de torsion.</u>

1) Soit $\mathcal{G}$ une famille d'idéaux bilatères. Alors il existe une plus grande théorie de torsion σ telle que pour toute extension $f: A \to X$ qui vérifie $Xf(U) = X \quad \forall U \in \mathcal{G}$, on ait $\sigma(X) = 0$.

Cette théorie de torsion satisfait à (*) et $\mathfrak{F}(\sigma)$ est la plus grande des familles $\mathfrak{F}$ d'idéaux qui vérifient pour toute extension $f: A \to X$ la propriété

$$Xf(U) = X \quad \forall U \in \mathcal{G} \implies Xf(V) = X \quad \forall V \in \mathfrak{F} .$$

<u>Nota.</u> Pour tout bimodule M et tout idéal bilatère $U \subset A$, on a $UM \approx MU$. Dans le cas d'une extension X de A, on a donc

$$Xf(U) = f(U)X = Xf(U)X .$$

2) Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier et $E(A/\mathfrak{p})$ l'enveloppe injective (en tant que bimodule) de $A/\mathfrak{p}$. Pour tout bimodule M, on pose

$$\pi_{\mathfrak{p}}(M) = \cap \ker \varphi , \quad \varphi: M \to E(A/\mathfrak{p}) .$$

La collection des $\pi_{\mathfrak{p}}(M)$ définit une théorie de torsion qui satisfait à (*) et on a :

$$\boxed{\mathfrak{F}(\pi_{\mathfrak{p}}) = \mathfrak{F}_{\mathfrak{p}} = \{U \subset A \mid U \not\subset \mathfrak{p}\}}$$

Une telle théorie de torsion est formellement ce que l'on appelle une <u>localisation première au sens de Goldman</u> et qui ont été étudiées en [5]. En effet, si l'on pose $X = A/\mathfrak{p}$, on vérifie que l'on a

- $\sigma \subset \pi_{\mathfrak{p}} \iff \sigma(X) = 0$.
- Tout quotient de X distinct de X est de $\pi_{\mathfrak{p}}$-torsion.

<u>Inversement</u>, si π est une théorie de torsion pour laquelle il existe un bimodule X qui satisfait aux conditions ci-dessus, alors il existe un et un seul idéal premier $\mathfrak{p}$ tel que $\pi = \pi_{\mathfrak{p}}$.

Il y a donc bijection entre les idéaux premiers de A et les "localisations premières au sens de Goldman" sur la catégorie des A-bimodules.

<u>Bimodule des quotients pour une théorie de torsion σ.</u>

Soit σ une théorie de torsion sur A.

Si M est un bimodule, par analogie avec la théorie classique, on construit un bimodule $Q_\sigma(M)$ et un homomorphisme $i_M : M \to Q_\sigma(M)$ tels que :

- $\ker(i_M) = \sigma(M)$ et $\operatorname{coker}(i_M)$ est un bimodule de σ-torsion.
- $Q_\sigma(M)$ est un bimodule <u>fidèlement σ-divisible</u>, c'est-à-dire que tout homomorphisme de bimodules $f: N' \to N$ tel que $\ker(f) \subset \sigma(N')$ et $\operatorname{coker}(f)$ est un bimodule de σ-torsion induit un isomorphisme

$$\operatorname{Hom}(f,Q_\sigma(M)) : \operatorname{Hom}(N,Q_\sigma(M)) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(N',Q_\sigma(M)) .$$

Ces deux propriétés caractérisent $Q_\sigma(M)$ à un isomorphisme unique près et permettent de définir un foncteur Q_σ de la catégorie des A-bimodules dans elle-même.

Tout l'intérêt des théories de torsion sur la catégorie des bimodules prend sa source dans les deux théorèmes suivants (qui n'ont pas d'analogues en théorie classique) :

THEOREME 4. Soit σ une théorie de torsion sur A . Alors :

1) $Q_\sigma(A)$ est muni d'une unique structure d'anneau telle que $i_A : A \to Q_\sigma(A)$ soit un homomorphisme d'anneaux et i_A est alors une extension centrale.

2) Tout bimodule fidèlement σ-divisible M est canoniquement muni d'une structure à droite et à gauche sur $Q_\sigma(A)$ et celles-ci font de M un $Q_\sigma(A)$-bimodule.

3) Tout A-homomorphisme $N \to M$ où N est un $Q_\sigma(A)$-bimodule et M un A-bimodule fidèlement divisible est un $Q_\sigma(A)$-homomorphisme (à droite et à gauche).

THEOREME 5. Soit σ une théorie de torsion sur A et soit $u : A \to B$ une extension d'anneaux. Alors :

1) σ induit sur les B-bimodules une théorie de torsion $u.\sigma$ définie par $u.\sigma(M) = \sigma(M_A)$ pour tout B-bimodule M (M_A désigne le A-bimodule obtenu par restriction des scalaires), et on a

$$\mathfrak{F}(u.\sigma) = \{V \subset B \mid u^{-1}(V) \in \mathfrak{F}(\sigma)\} .$$

2) Si u est une extension centrale , pour tout B-bimodule M , on a un isomorphisme canonique :

$$(Q_{u.\sigma}(M))_A \approx Q_\sigma(M_A) .$$

En particulier, $Q_\sigma(B_A)$ est une extension centrale de B et de plus, $Q_\sigma(u) : Q_\sigma(A) \to Q_\sigma(B)$ est alors une extension centrale d'anneaux.

On appliquera ceci dans le cas particulier où $u: A \to B$ est surjectif. Il faut remarquer que je ne sais pas démontrer la partie 2) du théorème 5 lorsqu'on ne suppose pas que B est une extension <u>centrale</u> de A, mais il semble que cette restriction pourrait être levée.

Enfin, on a un théorème analogue au théorème classique ([5], [7]) pour caractériser les théories de torsion "parfaites" :

<u>THEOREME 6. Soit</u> σ <u>une théorie de torsion sur</u> A. <u>Les assertions suivantes sont équivalentes</u> :

i) <u>Pour tout</u> $U \in \mathfrak{F}(\sigma)$, <u>on a</u> $Q_\sigma(A).i_A(U) = Q_\sigma(A)$. (*)

ii) <u>Tout</u> Q_σ<u>-bimodule est fidèlement</u> σ<u>-divisible.</u>

iii) <u>Pour tout</u> A<u>-bimodule</u> M, <u>on a un isomorphisme</u> (**)

$$Q_\sigma(M) \simeq Q_\sigma(A) \otimes_A M$$

<u>qui identifie</u> $i_M: M \to Q_\sigma(M)$ <u>et</u> $i_A \otimes M: M \to Q_\sigma(A) \otimes_A M$.

De plus, on peut montrer que lorsque les conditions du théorème sont satisfaites, on a :

1) Pour tout idéal à droite (resp. à gauche) $J \subset Q_\sigma(A)$, on a :

$$\boxed{J = i_A(i_A^{-1}(J)).Q_\sigma(A)}$$

$$[\text{resp.} \quad J = Q_\sigma(A).i_A(i_A^{-1}(J))].$$

En particulier, si A est noethérien (resp. artinien) à droite ou à gauche, il en est de même de $Q_\sigma(A)$

2) Le morphisme $i_A: A \to Q_\sigma(A)$ est un épimorphisme d'anneaux et pour tout morphisme injectif de <u>bimodules</u> $f: M' \to M$, l'homomorphisme

---

(*) Si $U \subset A$ est un idéal bilatère qui vérifie $Q_\sigma(A).i_A(U) = Q_\sigma(A)$ on peut montrer en toute généralité qu'alors U appartient nécessairement à $\mathfrak{F}(\sigma)$.

(**) Pour tout bimodule M et toute extension $A \to X$, on a en fait un isomorphisme canonique de <u>X-bimodules</u> $X \otimes_A M \simeq M \otimes_A X$.

$Q_\sigma(A) \otimes f : Q_\sigma(A) \otimes_A M' \to Q_\sigma(A) \otimes_A M$ est encore injectif (on dit que $Q_\sigma(A)$ est plat pour les bimodules ([1])).

3) L'homomorphisme de foncteurs représentables

$$\mathcal{P}(Q_\sigma(A),-) \to \mathcal{P}(A,-)$$

défini par l'extension i_A est un homomorphisme injectif qui identifie $\mathcal{P}(Q_\sigma(A),-)$ à un sous-foncteur induit par $\mathcal{P}(A,-)$.

Nota. Je ne sais pas, à la différence du cas commutatif (théorème 2) démontrer de réciproque aux assertions 2) et 3).

III.4. ETUDE DES CLASSES D'EQUIVALENCE DE MORPHISMES QUASI-FILTRES DANS $\mathcal{P}$.

Tout découle du théorème principal de la théorie, qui s'énonce comme suit :

THEOREME 7. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A et soit $\pi_{\mathfrak{p}}$ la théorie de torsion qui lui est associée. On note $p : A \to A/\mathfrak{p}$ la projection canonique. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) La théorie de torsion $\pi_{\mathfrak{p}}$ satisfait aux conditions équivalentes du théorème 6,

ii) $Q_{\mathfrak{p}}(A)$ possède un seul idéal maximal $\mathfrak{m}$ et $i_A^{-1}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{p}$,

iii) La théorie de torsion $p.\pi_{\mathfrak{p}}$ sur $A/\mathfrak{p}$ satisfait aux conditions équivalentes du théorème 6,

iv) $Q_{\mathfrak{p}}(A/\mathfrak{p})$ est un anneau quasi-simple,

v) Il existe une extension $f : A \to X$ vérifiant

$\ker(f) = \mathfrak{p}$ et $Xf(V) = X$ pour tout $V \not\subset \mathfrak{p}$.

De plus, $Q_{\mathfrak{p}}(A/\mathfrak{p})$ est alors universel pour les extensions ci-dessus, c'est-à-dire que pour toute extension $f : A \to X$ satisfaisant à la condition v), il existe une et une seule extension d'anneaux $Q_{\mathfrak{p}}(A/\mathfrak{p}) \to X$ qui prolonge f .

Enfin, $Q_{\mathfrak{p}}(A/\mathfrak{p})$ s'identifie alors canoniquement à $Q_{\mathfrak{p}}(A)/\mathfrak{m}$ et on a $\mathfrak{m} = Q_{\mathfrak{p}}(A).i_A(\mathfrak{p})$.

On dira sous ces conditions que $\mathfrak{p}$ est un <u>bon idéal premier</u> de A .

Avant d'en revenir à l'ensemble sous-jacent à $|\mathcal{P}(A,-)|$, il convient ici de faire le lien avec des remarques qui avaient été faites dans [5] . On avait constaté que si $\mathfrak{p}$ était un idéal premier de A , alors l'image réciproque de $\mathfrak{p}$ dans $A \otimes_Z A^o$ était un <u>idéal à gauche critique</u> de $A \otimes_Z A^o$, de sorte que l'enveloppe injective, en tant que module bilatère, de $A/\mathfrak{p}$ était un injectif indécomposable dont le coeur C est non nul et contient $A/\mathfrak{p}$. On peut montrer (même si les conditions du théorème 7 ne sont pas satisfaites) que $Q_{\mathfrak{p}}(A/\mathfrak{p})$ est le plus grand A-bimodule contenu dans le coeur C et que le centre de $Q_{\mathfrak{p}}(A/\mathfrak{p})$ s'identifie à l'anneau des endomorphismes de C . On avait donné ([5] prop. 16) la description explicite de cet anneau d'endomorphismes, dont on savait que c'était un corps commutatif, et on avait donné un exemple montrant qu'il n'était pas en général isomorphe au corps des fractions du centre de $A/\mathfrak{p}$.

Comme conséquence immédiate du théorème 7, on a :

<u>PROPOSITION 6. Soit</u> A <u>un anneau. Un idéal</u> $\mathfrak{p} \subset A$ <u>est un bon idéal premier de</u> A <u>si et seulement si c'est le noyau d'une extension</u> $A \to X$, <u>avec</u> X <u>quasi-simple. Par ailleurs, l'application canonique</u>

$$k_A : |\mathcal{P}(A,-)| \to \{\text{idéaux de } A\}$$

<u>est injective et a pour image l'ensemble des bons idéaux premiers de</u> A .

La question qui se pose est évidemment de savoir si tous les idéaux premiers sont de bons idéaux premiers. La réponse est négative, et on peut en donner pour exemple l'idéal 0 de l'anneau $A = k\langle X,Y\rangle$ des polynômes en deux variables sur un corps commutatif k (X et Y commutent avec k mais pas entre eux). Pour montrer que 0 n'est pas un bon premier, on commence par montrer (grâce à la description explicite qui en est donnée en [5]) que le centre de $Q_0(A)$ est égal à k , puis on utilise la proposition suivante (qui donne en fait une condition suffisante pour qu'un idéal premier soit bon).

<u>PROPOSITION 7.</u> <u>Soit</u> A <u>un anneau premier de centre</u> Z . <u>Les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

i) <u>Pour tout idéal bilatère</u> $U \neq 0$ <u>de</u> A, <u>on a</u> $U \cap Z \neq 0$.

ii) <u>L'idéal</u> 0 <u>est un bon idéal premier et le centre de</u> $Q_o(A)$ <u>est isomorphe à</u> Frac(Z) .

iii) $Q_o(A)$ <u>est quasi-simple et est isomorphe à Frac</u>$(Z) \otimes_Z A$.

Les bons idéaux premiers ne sont cependant pas tous du type décrit par la proposition 7. Cependant, notons que la proposition 7 recouvre le cas des anneaux à identité polynomiale, car ceux-ci satisfont à la condition i) ci-dessus ([10]).

<u>PROPOSITION 8.</u> <u>Si</u> A <u>est tel que pour tout idéal premier</u> $\mathfrak{p} \subset A$, $A/\mathfrak{p}$ <u>est un anneau à identité polynomiale, alors</u> $|\mathcal{P}(A,-)|$ <u>s'identifie à l'ensemble des idéaux premiers de</u> A <u>et, pour tout idéal premier</u> $\mathfrak{p} \subset A$, $Q_{\mathfrak{p}}(A/\mathfrak{p})$ <u>est une algèbre centrale simple.</u>

En effet, si $A/\mathfrak{p}$ est à identité polynomiale, $A/\mathfrak{p}$ possède un anneau classique de fractions à gauche $\mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p})$ qui est une algèbre centrale simple (théorème de Posner) et il suffit de vérifier que le morphisme $A/\mathfrak{p} \to \mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p})$ est une extension.

<u>Remarque</u> : Il est un autre cas classique où l'on peut construire un anneau de fractions à gauche $\mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p})$: c'est le cas où $A/\mathfrak{p}$ est un anneau de Goldie et le théorème de Goldie dit alors que $\mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p})$ est un anneau simple. Malheureusement, il ne semble pas que le morphisme $A/\mathfrak{p} \to \mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p})$ soit une extension et on ne peut donc rien dire dans ce cas.

IV. <u>ANNEAUX AFFINES.</u>

On recherche une condition permettant d'identifier l'ensemble sous-jacent $|\mathcal{P}(A,-)|$ (resp. $|\mathcal{Alg}(A,-)|$) avec le spectre d'un anneau commutatif X .

Pour que cette identification soit complète, on voit que la traduction raisonnable de ce problème est de rechercher à quelle condition on peut trouver une équivalence de catégories

$$(\text{A-bimodules}) \xrightarrow{\sim} (\text{X-modules})$$

$$[\text{resp. } (\text{A-modules bilatères}) \xrightarrow{\sim} (\text{X-modules})]$$

qui envoie A sur X et envoie toute extension B de A (resp. toute algèbre B sur A) en une algèbre sur X. (On remarque que, X étant commutatif, les notions de X-bimodule, X-module bilatère, X-bimodule se confondent et, par ailleurs, on dispose dans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Alg}$ du théorème 3).

On va caractériser, pour $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Alg}$, les anneaux pour lesquels il existe une équivalence de catégories comme ci-dessus. Ces anneaux sont ce qu'on pourrait appeler des "anneaux affines".

1) <u>Cas où l'on considère la catégorie des A-bimodules.</u>

On ne sait traiter que le cas où l'on suppose a priori que $X = Z(A)$ est le centre de A et où l'équivalence

$$(\text{A-bimodule}) \to (\text{Z-modules})$$

est donnée par le foncteur $Z_A(-) = \mathrm{Hom}(A,-)$ introduit au début du § III.1. Ce problème a déjà été abordé par Artin ([1]) qui donne une condition "suffisante" pour que $Z_A(-)$ définisse une équivalence de catégories. Comme sa démonstration est erronée et qu'il semble par ailleurs que sa condition ne soit pas suffisante (bien que je n'ai pas réussi à trouver de contre-exemple) il convient de rétablir ce théorème et d'y ajouter une réciproque.

<u>THEOREME 8.</u> <u>Soit</u> A <u>un anneau de centre</u> Z. <u>Les assertions suivantes sont équivalentes</u> :

i) <u>Le foncteur</u> $Z_A(-) : (\text{A-bimodules}) \to (\text{Z-modules})$ <u>est une équivalence de catégories</u>.

ii) <u>On a</u> a) <u>Tout sous-module bilatère d'un A-bimodule libre est un A-bimodule</u>.

b) $\forall \mathfrak{m} \subset Z$, <u>idéal maximal, on a</u> $A\mathfrak{m} \neq A$.

iii) <u>Pour tout</u> $a \in A$, <u>l'idéal bilatère</u> AaA <u>est engendré par des éléments de</u> Z <u>et il existe un élément</u> $z \in Z$ <u>tel que</u> $z-a$ <u>appartienne à l'idéal bilatère engendré par les éléments</u> $ax - xa$, $x \in A$.

<u>Nota.</u> La condition ii)a) est la condition suffisante donnée par Artin. Elle implique que le facteur $Z_A(-)$ est <u>pleinement fidèle</u> et aussi que A est <u>plat</u> sur Z, mais il ne semble pas qu'elle implique que A est <u>fidèlement plat</u> sur Z (or cela est nécessaire), d'où la condition ii)b).

Lorsque A satisfait aux hypothèses ci-dessus, on peut montrer que les applications $I \to AI$ et $J \to J \cap Z$ sont des bijections inverses l'une de l'autre entre les idéaux de A et de Z.

<u>COROLLAIRE. Soit</u> A <u>un anneau de centre</u> Z <u>et satisfaisant aux conditions du théorème 8. Alors on a des isomorphismes canoniques</u> :

$$|\mathfrak{P}(A,-)| \cong \{\text{idéaux premiers de } A\} \cong \mathrm{Spec}(Z) .$$

<u>De plus, pour tout idéal premier</u> $\mathfrak{p} \subset A$ <u>la proposition 7 s'applique et on a</u> :

$$Q_{\mathfrak{p}}(A_{|\mathfrak{p}}) \cong \mathrm{Frac}(Z(A_{|\mathfrak{p}})) \otimes_Z A .$$

<u>Exemple</u> : Il est immédiat de vérifier que tout anneau quasi-simple A satisfait à la condition iii) du théorème 8, de sorte que la catégorie des A-bimodules est alors équivalente à celle des Z-modules. Comme Z est un corps, on retrouve immédiatement la proposition 4.

2) <u>Cas où l'on considère la catégorie des A-modules bilatères.</u>

<u>THEOREME 9. Soit</u> A <u>un anneau de centre</u> Z. <u>Les assertions suivantes sont équivalentes</u> :

i) <u>Il existe un anneau commutatif</u> X <u>et une équivalence de catégories</u> $(A \otimes_Z A^{opp}\text{-modules}) \xrightarrow{\sim} (X\text{-modules})$ <u>qui envoie</u> A <u>sur</u> X,

ii) <u>On a</u> $X = Z$ <u>et le foncteur</u> $\mathrm{Hom}(A,-) : (A \otimes_Z A^{opp}\text{-modules}) \to (Z\text{-modules})$ <u>est une équivalence de catégories,</u>

iii) <u>Tout A-module bilatère est un A-bimodule</u>,

iv) A <u>est une algèbre d'Azumaya.</u>

Ce théorème utilise à fond les résultats de Gabriel ([7]) relatifs aux équivalences de catégories abéliennes. Gabriel démontre d'ailleurs l'implication iv) ⟹ ii). D'autre part, on peut constater que Artin dans [1] démontre en fait (par une technique tout à fait différente) l'implication iv) ⟹ iii).

Il est clair, au vu des propriétés ii) et iii) que toute algèbre d'Azumaya satisfait en particulier aux conditions du théorème 8.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. ARTIN, "On Azumaya Algebras and Finite Dimensional Representations..." J. of Alg. 11, 532-563 (1969).

[2] G. BIRKHOFF, "Lattice Theory". A.M.S. Colloq. Publ., Vol. XXV, 3rd edition, Providence, 1967.

[3] P.M. COHN, "On the Free Product of Associative Rings". Math. Zeitschr. 71, 380-398 (1959).

[4] J.P. DELALE, "Ensemble sous-jacent à un foncteur". (à paraître au J. of Pure and Applied Alg.).

[5] J.P. DELALE, "Localisations et Premiers à gauche". Séminaire d'Algèbre non Commutative, 1971-1972, Publ. Math. d'Orsay.

[6] M. DEMAZURE et P. GABRIEL, "Groupes Algébriques". Masson et Cie, Paris et North Holland Publ. C°, Amsterdam, 1970.

[7] P. GABRIEL, "Des catégories abéliennes", Bull. Soc. Math. de France 90 (1962).

[8] J. LAMBEK et B.A. RATTRAY, "Localization at Injectives in Complete Categories". (A paraître).

[9] C. PROCESI, "Non Commutative Affine Rings". Atti. Accad. Naz. Lincei, ser. VIII, 8, 239-255 (1967).

[10] L. ROWEN, "Some results on the center of a ring with polynomial identity" Bull. A.M.S., t. 742, p. 226 (1973).

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

Conférence n° 13 du 12 Mars 1973

par G. CAUCHON

-:-:-:-:-

DECOMPOSITION DES MODULES EN INTERSECTIONS FINIES

INTRODUCTION.

Nous introduisons dans cet exposé la notion de fonction de décomposition dans un cas plus général que le cas étudié par J. Fisher dans [2].

Etant donnée une fonction de décomposition Γ, nous établissons, par le même procédé que celui de J. Fisher dans [2] les théorèmes d'existence et d'unicité des Γ-décompositions.

Nous appliquons ensuite ces résultats aux problèmes de la décomposition tertiaire et de la décomposition isotypique et améliorons ainsi certains résultats obtenus par L. Lesieur et R. Croisot dans [4].

Dans tout cet exposé, A désigne un anneau qui n'est pas supposé commutatif.

Tous les modules considérés sont des A-modules à gauche.

Sauf dans le paragraphe III, l'anneau A n'est pas supposé unitaire.

I. FONCTIONS DE DECOMPOSITION.

1) Définitions :

Soit $\mathfrak{X}$ une classe d'objets.

Soit $\mathcal{P}(\mathfrak{X})$ la classe de tous les ensembles dont les éléments appartiennent à $\mathfrak{X}$.

Soit $\Gamma : \text{Mod } A \to \mathcal{P}(\mathfrak{X})$ une application qui, à tout module M associe un ensemble $\Gamma(M)$ dont les éléments appartiennent à $\mathfrak{X}$.

Notons que $\Gamma(M)$ peut être l'ensemble vide.

DEFINITION I.1. : Un module M est dit Γ-stable s'il vérifie les deux propriétés suivantes :

1) $M \neq 0$.

2) $\Gamma(M) = \{x\}$ $(x \in \mathfrak{X})$ et, pour tout sous-module non nul N de M, $\Gamma(N) = \{x\}$.

DEFINITION I.2. : On dira que la correspondance Γ est une fonction de décomposition définie sur Mod A et à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathfrak{X})$ si elle satisfait aux deux axiomes suivants :

Axiome 1 : Soient M et N deux modules.
Si la suite $0 \to N \to M$ est exacte, alors $\Gamma(N) \subseteq \Gamma(M)$.

Axiome 2 : Soit M un module et soit $x \in \Gamma(M)$.
Il existe un sous-module S , Γ-stable, de M tel que

$\Gamma(S) = \{x\}$.

Dans toute la suite de ce paragraphe, nous supposons que Γ désigne une fonction de décomposition donnée une fois pour toutes.

Il résulte de l'axiome 2 que $\Gamma(0) = \emptyset$.

Il résulte de l'axiome 1 que :

Si M_1 et M_2 sont deux modules isomorphes, alors :

1) $\Gamma(M_1) = \Gamma(M_2)$.

2) M_1 est Γ-stable si et seulement si M_2 est Γ-stable.

DEFINITION I.3. : Soit M un module et soit N un sous-module de M .
On appelle Γ-décomposition de N dans M , toute décomposition

$$N = N_1 \cap \dots \cap N_k$$

de N en intersection d'un nombre fini de sous-modules N_i de M telle que :

1) Aucun des N_i n'est superflu.

2) Pour tout $i \in \{1,2,\dots,k\}$, $\frac{M}{N_i}$ est Γ-stable et

$\Gamma(\frac{M}{N_i}) = \{x_i\}$.

3) Si $i \neq j$, alors $x_i \neq x_j$.

2) <u>Existence et unicité des Γ-décompositions</u> :

Les deux résultats fondamentaux sont les suivants :

<u>Théorème d'unicité des Γ-décompositions</u> : Soit M un module, soit N un sous-module de M et soient :

$$N = N_1 \cap \dots \cap N_k = N'_1 \cap \dots \cap N'_{k'}$$

deux Γ-décompositions de N dans M avec :

$$\forall i \in \{1,\dots,k\} \quad \Gamma(\frac{M}{N_i}) = \{x_i\} \quad \text{et}$$

$$\forall j \in \{1,\dots,k'\} \quad \Gamma(\frac{M}{N'_j}) = \{x'_j\} .$$

Alors 1) $k = k'$.

2) On peut permuter l'ordre des N'_i de manière que $x_i = x'_i$ pour tout $i \in \{1,\dots,k\}$.

3) $\Gamma(\frac{M}{N}) = \{x_1,\dots,x_k\}$.

<u>Théorème d'existence des Γ-décompositions</u> : Soit M un module et soit N un sous-module propre de M .

Une condition nécessaire et suffisante pour que N admette une Γ-décomposition dans M est que les 2 propriétés suivantes soient vérifiées :

1) $\Gamma(\frac{M}{N})$ est fini.

2) Tout sous-module non nul de $\frac{M}{N}$ contient un sous-module Γ-stable.

(Nous dirons aussi, pour exprimer cette deuxième propriété, que $\frac{M}{N}$ est riche en sous-modules Γ-stables).

La méthode utilisée pour démontrer ces 2 résultats est analogue à la méthode utilisée par Bourbaki dans [1] à propos de la décomposition primaire.

Elle consiste à établir d'abord les propriétés suivantes :

PROPOSITION I.1. : Si la suite de modules

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0 \text{ est exacte, alors}$$

$$\Gamma(M') \subseteq \Gamma(M) \subseteq \Gamma(M') \cup \Gamma(M'') .$$

Démonstration : Il suffit d'établir le résultat lorsque M' est un sous-module de M et que $M'' = \frac{M}{M'}$.

Soit $x \in \Gamma(M)$.

Il existe un sous-module Γ-stable S de M tel que

$$\Gamma(S) = \{x\} .$$

Soit $S' = S \cap M'$.

Si $S' \neq 0$, $\Gamma(S') = \{x\} \subseteq \Gamma(M') \Longrightarrow x \in \Gamma(M')$.

Si $S' = 0$, S est isomorphe à un sous-module S'' de M''. Donc

$$\Gamma(S'') = \{x\} \subseteq \Gamma(M'') \Longrightarrow x \in \Gamma(M'') .$$

Par suite $\Gamma(M) \subseteq \Gamma(M') \cup \Gamma(M'')$.

L'inclusion de gauche résulte de l'axiome 1.

PROPOSITION I.2. : Soit M un module et soit $(M_i)_{i\in I}$ une famille de sous-modules de M tels que $M = \bigcup_{i\in I} M_i$.

Alors $$\Gamma(M) = \bigcup_{i\in I} \Gamma(M_i) .$$

Démonstration : L'inclusion $\Gamma(M) \supseteq \bigcup_{i\in I} \Gamma(M_i)$ résulte de l'axiome 1.

Soit $x \in \Gamma(M)$. Il existe un sous-module Γ-stable S de M tel que $\Gamma(S) = \{x\}$.

Il existe i tel que $S \cap M_i \neq 0$ donc $\Gamma(S \cap M_i) = \{x\} \subseteq \Gamma(M_i)$. Donc $x \in \bigcup_{i\in I} \Gamma(M_i)$ donc $\Gamma(M) = \bigcup_{i\in I} \Gamma(M_i)$.

PROPOSITION I.3. : Soit M un module et soit $(M_i)_{i\in I}$ une famille de modules tels que $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$.

Alors $\Gamma(M) = \bigcup_{i\in I} \Gamma(M_i)$.

Démonstration : On établit d'abord le résultat lorsque I est fini par récurrence sur le nombre d'éléments de I en utilisant la proposition I.1. On en déduit ensuite le résultat lorsque I est infini par application de la proposition I.2.

PROPOSITION I.4. : Si un module M est somme directe d'une famille $(S_i)_{i\in I}$ de modules Γ-stables, il est riche en sous-modules Γ-stables.

Pour établir ce résultat, on suppose d'abord I fini et on démontre le résultat par récurrence sur le nombre d'éléments de I . Le passage au cas où I est infini est alors immédiat car tout sous-module non nul X de M contient un sous-module non nul Y lui-même inclus dans une somme finie de S_i .

Démonstration du théorème d'unicité :

Il nous suffit d'établir le 3).

Si $N = N_1 \cap \dots \cap N_k$, alors, il existe une suite exacte de la forme

$$0 \to \frac{M}{N} \to \frac{M}{N_1} \oplus \dots \oplus \frac{M}{N_k} .$$

Donc $\underline{\Gamma(\frac{M}{N}) \subseteq \Gamma(\frac{M}{N_1} \oplus \dots \oplus \frac{M}{N_k}) = \{x_1, \dots, x_k\}}$

d'après la proposition.

Pour montrer l'inclusion contraire, il nous suffit de montrer, par exemple, que $\underline{x_1 \in \Gamma(\frac{M}{N})}$.

$$Y = N_2 \cap \dots \cap N_k \supsetneq N \quad \text{car} \quad N_1 \quad \text{n'est pas superflu} .$$

$Y \cap N_1 = N$ donc $\frac{Y}{N}$ est isomorphe à un sous-module non nul de $\frac{M}{N_1}$ donc $\Gamma(\frac{Y}{N}) = \{x_1\}$. Or $\Gamma(\frac{Y}{N}) \subseteq \Gamma(\frac{M}{N})$ donc $x_1 \in \Gamma(\frac{M}{N})$ d'où le résultat.

Démonstration du théorème d'existence :

Les conditions 1) et 2) sont nécessaires.

Si $N = N_1 \cap \dots \cap N_k$ est une Γ-décomposition de N dans M, alors $\frac{M}{N}$ est isomorphe à un sous-module de $\frac{M}{N_1} \oplus \dots \oplus \frac{M}{N_k}$ qui est riche en sous-modules Γ-stables. D'où le 2).

Le 1) est nécessaire d'après le théorème d'unicité.

Les conditions 1) et 2) sont suffisantes :

Faisons la démonstration dans le cas $N = 0$, le résultat pour N quelconque s'en déduisant immédiatement.

Nous supposons par hypothèse que $M \neq 0$ et que

1) $\Gamma(M)$ est fini, soit $\Gamma(M) = \{x_1, \dots, x_k\}$.

2) M est riche en sous-modules Γ-stables.

Soit à trouver une Γ-décomposition de 0 dans M.

Soit $i \in \{1, \dots, k\}$.

Soit $\mathfrak{F}$ la famille de tous les sous-modules X de M tels que

$x_i \notin \Gamma(X)$.

$\mathfrak{F}$ n'est pas vide car $0 \in \mathfrak{F}$.

$\mathfrak{F}$ est inductive d'après la proposition I.2.

$\mathfrak{F}$ admet donc un élément maximal, soit N_i.

a) Pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $\Gamma(\frac{M}{N_i}) = \{x_i\}$ et $\frac{M}{N_i}$ est Γ-stable.

En effet, il existe une suite exacte de la forme

$0 \to N_i \to M \to \frac{M}{N_i} \to 0$. Donc $\Gamma(M) \subseteq \Gamma(N_i) \cup \Gamma(\frac{M}{N_i})$

$x_i \in \Gamma(M)$

$x_i \notin \Gamma(N_i)$ donc $x_i \in \Gamma(\frac{M}{N_i})$.

Soit $u \in \Gamma(\frac{M}{N_i})$. Il existe un sous-module Γ-stable S de $\frac{M}{N_i}$ tel que $\Gamma(S) = \{u\}$.

Nous pouvons écrire $S = \frac{X}{N_i}$ avec $N_i \underset{\neq}{\subset} X \subseteq M$.

Il existe une suite exacte $0 \to N_i \to X \to \frac{X}{N_i} \to 0$ donc

$$\Gamma(X) \subseteq \Gamma(N_i) \cup \Gamma(S) = \Gamma(N_i) \cup \{u\} .$$

Or $X \notin \mathfrak{F}$ donc $x_i \in \Gamma(X)$. Donc $u = x_i$ et par suite

$$\underline{\Gamma(\frac{M}{N_i}) = \{x_i\}} .$$

Tout sous-module non nul de $\frac{M}{N_i}$ est de la forme $\frac{Y}{N_i}$ avec $N_i \underset{\neq}{\subset} Y \subseteq M$.

Un raisonnement analogue au précédent permet de montrer que $x_i \in \Gamma(\frac{Y}{N_i})$.

Comme $\Gamma(\frac{Y}{N_i}) \subseteq \Gamma(\frac{M}{N_i})$, nous en déduisons que $\Gamma(\frac{Y}{N_i}) = \{x_i\}$ et $\frac{M}{N_i}$ est bien Γ-stable.

b) $N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_k = 0$.   (1)

Posons a priori $X = N_1 \cap \dots \cap N_k$.

$$X \subseteq M \quad \text{donc} \quad \Gamma(X) \subseteq \Gamma(M) = \{x_1, \dots, x_k\} .$$

Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $X \subseteq N_i$, donc $x_i \notin \Gamma(X)$, par suite $\Gamma(X) = \emptyset$.

Si X n'était pas nul, X contiendrait un sous-module Γ-stable S puisque M est riche en sous-modules Γ-stables et $\Gamma(X)$ ne serait pas vide.

<u>Et nécessairement</u> $X = 0$.

La décomposition (1) a toutes les propriétés requises pour être une Γ-décomposition de 0 dans M sauf que certains des N_i peuvent être superflus.

Par suppression de ces éléments superflus, nous obtenons une Γ-décomposition de 0 dans M , ce qui achève la démonstration.

II. <u>DECOMPOSITION DE FISHER ET DECOMPOSITION TERTIAIRE.</u>

Dans tout ce paragraphe, nous désignons par $\mathfrak{B}$ l'ensemble des idéaux bilatères de l'anneau A .

1) <u>Décomposition de Fisher</u> :

Dans [2] , Fisher pose les définitions suivantes :

<u>DEFINITION II.1.</u> : <u>On appelle fonction radicale, toute correspondance</u> $r : \mathrm{Mod}\ A \to \mathfrak{B}$ <u>telle que si la suite</u> $0 \to N \to M$ <u>est exacte, alors</u> $r(M) \subseteq r(N)$.

<u>Exemples</u> : On vérifie aisément que le <u>radical tertiaire</u> $t : \mathrm{Mod}\ A \to \mathfrak{B}$ défini par : $t(M)$ = ensemble des éléments a de A tels que a annule un sous-module essentiel de M , est une fonction radicale.

De même le <u>radical primaire</u> $p : \mathrm{Mod}\ A \to \mathfrak{B}$ défini par $p(M)$ = le radical premier de $0 \cdot . M$, est une fonction radicale.

<u>DEFINITION II.2.</u> : <u>Soit</u> r <u>une fonction radicale. Un module</u> M <u>est dit r-stable si :</u>

1) $M \neq 0$ <u>et</u>

2) <u>Pour tout sous-module non nul</u> N <u>de</u> M, $r(N) = r(M)$.

A toute fonction radicale, on peut associer une fonction de décomposition grâce à la propriété suivante :

<u>PROPOSITION II.1.</u> : <u>Soit</u> r <u>une fonction radicale.</u>

La correspondance Γ_r : Mod A $\rightarrow \mathfrak{P}(\mathfrak{B})$ définie par $\Gamma_r(M)$ = ensemble des idéaux bilatères $r(S)$ lorsque S décrit l'ensemble des sous-modules r-stables de M , est une fonction de décomposition.

<u>Démonstration</u> : On vérifie aisément les deux résultats suivants :

<u>Résultat II.1.</u> : Soient M et M' deux modules isomorphes, alors

1) $r(M) = r(M')$.

2) M est r-stable si et seulement si M' est r-stable.

<u>Résultat II.2.</u> : Si M est r-stable, alors M est Γ_r-stable et

$\Gamma_r(M) = \{r(M)\}$.

Il résulte immédiatement du résultat 2, que Γ_r satisfait à l'axiome 2 des fonctions de décomposition.

Pour établir l'axiome 1, considérons une suite exacte

$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\varphi} M$.

Soit $\mathfrak{P} \in \Gamma_r(N)$. Il existe un sous-module r-stable S de N tel que $\mathfrak{P} = r(S)$.

$S' = \varphi(S)$ est un sous-module de M isomorphe à S , donc r-stable. Donc $\mathfrak{P} = r(S') \in \Gamma_r(M)$ et on a bien $\Gamma_r(N) \subseteq \Gamma_r(M)$.

<u>DEFINITION II.3.</u> : <u>On dit que</u> Γ_r <u>est la fonction de décomposition associée à la fonction radicale</u> r . <u>On note</u> $r \rightarrow \Gamma_r$.

Ce sont les fonctions de décomposition associées à une fonction radicale qui ont été étudiées par Fisher.

Remarquons que, inversement, à toute fonction de décomposition

Γ: Mod A $\rightarrow$ $\mathcal{P}(\mathcal{S})$, on peut associer une fonction radicale r_Γ de la façon suivante :

$$\underline{r_\Gamma(M) = \bigcap_{\mathcal{P} \in \Gamma(M)} \mathcal{P} .}$$

Malheureusement, les correspondances $\Gamma \rightarrow r_\Gamma$ et $r \rightarrow \Gamma_r$ ne sont pas réciproques l'une l'autre.

Nous avons cependant :

<u>PROPOSITION II.2.</u> : <u>Soit</u> r <u>une fonction radicale, soit</u> Γ <u>la fonction de décomposition associée à</u> r <u>et soit</u> r_Γ <u>la fonction radicale associée à</u> Γ .

Alors : pour tout module M , $r(M) \subseteq r_\Gamma(M)$ (cependant l'inclusion peut être stricte).

<u>Démonstration</u> : Soit $\mathcal{P} \in \Gamma(M)$; $\mathcal{P} = r(S)$ avec $S \subseteq M$, donc $\mathcal{P} \supseteq r(M)$. Par suite $r_\Gamma(M) = \bigcap_{\mathcal{P} \in \Gamma(M)} \mathcal{P} \supseteq r(M)$.

2) <u>Applications à la décomposition tertiaire</u> :

Rappelons que si N est un sous-module d'un module M , on pose $R_3(N) = t(\frac{M}{N})$ = radical tertiaire de N dans M et on dit que N est tertiaire dans M si :

Pour tout idéal bilatère $\mathcal{A}$ de A et tout sous-module X de M ,

$$\mathcal{A}X \subseteq N \text{ et } X \not\subseteq N \Longrightarrow \mathcal{A} \subseteq R_3(N) \qquad \text{(voir [4])}$$

Nous désignons par T la fonction de décomposition associée à t.

<u>PROPOSITION II.3.</u> : <u>Soit</u> M <u>un module non nul. Les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

1) 0 <u>est tertiaire dans</u> M <u>et</u> $t(M) = \mathfrak{P}$.

2) M <u>est t-stable et</u> $t(M) = \mathfrak{P}$.

3) M <u>est T-stable et</u> $T(M) = \{\mathfrak{P}\}$.

<u>Démonstration</u> :

1) $\Longrightarrow$ 2) : Soit N un sous-module non nul de M . Soit $a \in t(N)$, a annule un sous-module X essentiel de N . X est non nul donc $a \in t(M)$ et par suite $t(N) = t(M)$.

2) $\Longrightarrow$ 3) : Il s'agit là d'une propriété générale déjà signalée.

3) $\Longrightarrow$ 1) : Supposons $aX = 0$ avec $a \in A$ et X sous-module non nul de M .

Puisque M est T-stable, $T(X) = \{\mathfrak{P}\}$.

Donc $\mathfrak{P} = t(S)$ où S désigne un sous-module t-stable de X
$aS = 0 \Longrightarrow a \in \mathfrak{P}$.

Posons $E = (0 \,.\!\cdot (a))$.

Soit Y un sous-module non nul de M .

Comme précédemment, Y contient un sous-module t-stable S_1 tel que $t(S_1) = \mathfrak{P}$.

$a \in t(S_1)$, donc a annule un sous-module Z essentiel de S_1 . Par suite $Y \cap E$ contient $Z \neq 0$.

Donc E est essentiel dans M ; donc $a \in t(M)$, donc 0 est bien tertiaire dans M .

Le fait que 1) $\Longrightarrow$ 3) montre que $t(M) = \mathfrak{P}$.

Il résulte de ceci qu'il y a coïncidence entre les T-décompositions et les décompositions tertiaires réduites.

Les théorèmes d'unicité et d'existence des Γ-décompositions nous permettent donc d'énoncer :

<u>Théorème d'unicité des décompositions tertiaires réduites</u> :

Soit M un module, soit N un sous-module et soient :

$$N = N_1 \cap \ldots \cap N_k = N'_1 \cap \ldots \cap N'_{k'}$$

deux décompositions tertiaires réduites de N dans M (voir [4]).

Posons $R_3(N_i) = \mathfrak{P}_i$ pour tout $i \in \{1,\ldots,k\}$

et $R_3(N'_j) = \mathfrak{P}'_j$ pour tout $j \in \{1,\ldots,k'\}$.

Alors : 1) $k = k'$.

2) On peut changer l'ordre des N'_i de manière que

$\mathfrak{P}_i = \mathfrak{P}'_i$ pour tout $i \in \{1,\ldots,k\}$.

3) $T(\frac{M}{N}) = \{\mathfrak{P}_1,\ldots,\mathfrak{P}_k\}$.

<u>Théorème d'existence des décompositions tertiaires réduites</u> :

Soit M un module et soit N un sous-module propre de M .

Une condition nécessaire et suffisante pour que N admette une décomposition tertiaire réduite dans M est que les deux propriétés suivantes soient vérifiées :

1) $T(\frac{M}{N})$ est fini.

2) $\frac{M}{N}$ est riche en sous-modules t-stables.

Signalons un cas important dans lequel les propriétés 1) et 2) du théorème d'existence s'appliquent :

<u>PROPOSITION II.1.</u> : <u>Soit</u> M <u>un module et soit</u> N <u>un sous-module propre de</u> M .

<u>Si</u> $\frac{M}{N}$ <u>est de dimension finie au sens de Goldie, alors</u> N <u>admet dans</u> M <u>une décomposition tertiaire réduite.</u>

Démonstration : Nous nous appuierons sur les deux résultats suivants qu'on vérifie aisément.

Résultat II.3. : Tout module co-irréductible est t-stable.

Résultat II.4. : Si M est extension essentielle de E, alors

$T(M) = T(E)$.

(Ce résultat est d'ailleurs une propriété générale des fonctions de décomposition).

$\frac{M}{N}$ étant de dimension finie au sens de Goldie, $\frac{M}{N}$ est extension essentielle d'un module E de la forme :

$E = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ où les U_i sont des modules co-irréductibles. Donc $T(\frac{M}{N}) = T(E) = \bigcup_{i=1}^{k} T(U_i)$ est fini puisque chaque $T(U_i)$ est réduit à un élément.

D'où le 1) du théorème d'existence des décompositions tertiaires réduites.

Le 2) résulte de ce qu'un module de dimension finie au sens de Goldie, est riche en sous-modules co-irréductibles.

D'où le résultat.

Nous en déduisons en particulier :

COROLLAIRE II.1. : Soit M un module artinien ou noethérien. Tout sous-module propre N de M admet une décomposition tertiaire réduite dans M .

Donnons un exemple de module sur lequel les résultats de L. Lesieur et R. Croisot (voir [4]) ne permettent pas de conclure à l'existence (ou à la non-existence) de la décomposition tertiaire, alors que les résultats précédents le permettent.

Exemples : Prenons $A = \mathbb{Z}$ et considérons le $\mathbb{Z}$-module

$$M = \bigoplus_{n=1}^{+\infty} M_n \quad \text{avec}$$

$$M_n = \begin{cases} \dfrac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Chaque M_n est simple, donc co-irréductible, donc t-stable et

$$t(M_n) = \begin{cases} 2\mathbb{Z} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3\mathbb{Z} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Par suite $T(M) = \{2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}\}$ est fini et M est riche en sous-modules t-stables puisque, étant semi-simple , il est riche en sous-modules simples.

Il en résulte donc, d'après les théorèmes d'existence et d'unicité que <u>0 admet dans M une décomposition tertiaire réduite de longueur 2.</u>

On vérifie d'ailleurs de la même façon que tout sous-module propre N de M admet dans M une décomposition tertiaire réduite de longueur 1 ou 2.

Cependant, les résultats obtenus par L.LESIEUR et R.CROISOT dans [4] ne permettent pas de conclure sur cet exemple puisque M n'est ni artinien, ni noethérien.

III. APPLICATIONS A LA DECOMPOSITION ISOTYPIQUE.

Dans tout ce paragraphe, nous supposons l'anneau A unitaire. Tous les modules considérés sont des A-modules à gauche unitaires.

Nous désignons par $\mathfrak{X}$ la classe dont les objets sont les types d'isomorphie de tous les modules injectifs indécomposables.

Soit $\Gamma_j : \mathrm{Mod}\ A \to \mathfrak{P}(\mathfrak{X})$ l'application définie par :

Pour tout module M , $\Gamma_j(M)$ est l'ensemble de types d'isomorphie de tous les sous-modules injectifs indécomposables de l'enveloppe injective $E(M)$ de M .

Remarquons que $\Gamma_j(M)$ est l'ensemble de tous les types de toutes les enveloppes injectives $E(u)$ où u décrit l'ensemble de tous les sous-modules co-irréductibles de M .

Remarquons également que tout module co-irréductible u est Γ_j-stable et $\Gamma_j(u) = \{\pi\}$ où π est le type de l'injectif indécomposable $E(u)$.

Par suite, il est clair que Γ_j <u>est une fonction de décomposition</u>.

<u>Rappel</u> : Soit M un module et soit $\pi \in \mathfrak{X}$.

On dit que M est π isotypique si une enveloppe injective $E(M)$ se décompose en une somme directe d'injectifs indécomposables ayant tous π pour type d'isomorphie.

La propriété suivante montre que les notions de module Γ_j-stable et de module isotypique sont étroitement liées.

<u>PROPOSITION III.1.</u> : <u>Soit</u> M <u>un module et soit</u> $\pi \in \mathfrak{X}$.
<u>Pour que</u> M <u>soit</u> π-<u>isotypique, il faut et il suffit qu'il satisfasse aux deux conditions suivantes</u> :

1) M <u>est</u> Γ_j-<u>stable et</u> $\Gamma_j(M) = \{\pi\}$.

2) $E(M)$ <u>se décompose en une somme directe d'injectifs indécomposables.</u>

Pour la démonstration, nous utiliserons le lemme suivant :

<u>LEMME III.1.</u> : <u>Soit</u> E <u>un module injectif.</u>

<u>Si</u> E <u>admet une décomposition en somme directe d'injectifs indécomposables, il en est de même pour tout sous-module injectif</u> E' <u>de</u> E .

<u>Démonstration</u> : Puisque E' est injectif, nous pouvons écrire

$$E = E' \oplus E''$$

E étant une somme directe d'injectifs indécomposables, est riche en co-irréductibles (cf. J.FORT [3]).

Il en est donc de même pour E' et E'' .

Il en résulte, toujours d'après [3] que E' est extension essentielle d'une somme directe d'injectifs indécomposables $F' = \bigoplus_{\alpha \in L} F'_\alpha$ et que E'' est extension essentielle d'une somme directe d'injectifs indécomposables $F'' = \bigoplus_{\beta \in K} F''_\beta$.

Par suite $F = F' \oplus F''$ est essentiel dans E . Il résulte de [3] que E et F sont isomorphes.

Par suite F est injectif, donc F' est injectif, donc $F' = E'$.

<u>Démonstration de la proposition III.1.</u> : Il est clair que les conditions 1) et 2) sont suffisantes et que la condition 2) est nécessaire.

Montrons que la condition 1) est nécessaire.

M étant π-isotypique, $E(M) = \bigoplus_{i \in I} E_i$ où les E_i sont injectifs indécomposables de même type π .

Soit F un injectif indécomposable contenu dans $E(M)$ $E(M) = F \oplus F'$.

D'après le lemme, F' se décompose en une somme directe d'injectifs indécomposables. Il résulte alors du théorème de Azumaya que F est de type π et, par suite

$$\underline{\Gamma_j(M) = \{\pi\}} \; .$$

Comme précédemment, M est riche en co-irréductibles, donc, pour tout sous-module non nul N de M, $\Gamma_j(N)$ n'est pas vide.

Par suite M <u>est</u> Γ_j-<u>stable. D'où le résultat</u>.

<u>Rappel</u> : Soit M un module et soit N un sous-module. On appelle décomposition isotypique de N dans M , toute décomposition :

$N = N_1 \cap \ldots \cap N_k$ telle que :

1) Aucun des N_i n'est superflu.

2) Pour tout i , N_i est π_i-isotypique dans M (c'est-à-dire : $\frac{M}{N_i}$ est π_i-isotypique).

3) Si $i \neq j$, alors $\pi_i \neq \pi_j$.

Il résulte de la proposition III.1, que toute décomposition isotypique est une Γ_j-décomposition.

Le théorème d'unicité des Γ_j-décompositions nous permet donc d'énoncer :

<u>Théorème d'unicité des décompositions isotypiques</u> :

Soit M un module, N un sous-module et soient $N = N_1 \cap \ldots \cap N_k = N'_1 \cap \ldots \cap N'_{k'}$, deux décompositions isotypiques de N dans M . Nous supposons que :

Pour tout $i \in \{1,\ldots,k\}$, N_i est π_i-isotypique dans M.

Pour tout $j \in \{1,\ldots,k'\}$, N'_j est π'_j-isotypique dans M.

Alors :

1) $k = k'$.

2) On peut permuter l'ordre des N'_j de manière que

$\forall i \in \{1,\ldots,k\}$; $\pi_i = \pi'_i$.

3) $\Gamma_j(\frac{M}{N}) = \{\pi_1, \ldots, \pi_k\}$.

Cependant, une Γ_j-décomposition n'est pas nécessairement une décomposition isotypique. Et les conditions nécessaires et suffisantes d'existence des Γ_j-décompositions ne sont que des conditions nécessaires d'existence des décompositions isotypiques.

Il est clair qu'un module est riche en sous-modules Γ_j-stables si et seulement si il est riche en sous-modules co-irréductibles.

Nous pouvons donc énoncer :

<u>PROPOSITION III.2.</u> : <u>Soit</u> M <u>un module et soit</u> N <u>un sous-module propre de</u> M . <u>Pour que</u> N <u>admette dans</u> M <u>une décomposition isotypique, il est nécessaire que les deux conditions suivantes soient satisfaites</u> :

1) $\frac{M}{N}$ <u>est riche en co-irréductibles</u>.

2) $\Gamma_j(\frac{M}{N})$ <u>est fini</u>.

On obtient, en renforçant légèrement la condition 1) une condition nécessaire et suffisante d'existence de la décomposition isotypique.

<u>Théorème d'existence des décompositions isotypiques</u> :

Soit M un module et soit N un sous-module propre de M . Une condition nécessaire et suffisante pour que N admette une décomposition isotypique dans M est que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

1) $E(\frac{M}{N})$ est une somme directe d'injectifs indécomposables.

2) $\Gamma_j(\frac{M}{N})$ est fini.

<u>Démonstration</u> : Nous pouvons supposer $N = 0$.

<u>Les conditions sont nécessaires</u> :

Soit $0 = N_1 \cap \dots \cap N_k$ une décomposition isotypique de 0 dans M.

Alors $E(M)$ est isomorphe à un sous-module de

$$E' = E(\frac{M}{N_1}) \oplus \dots \oplus E(\frac{M}{N_k}) .$$

E' se décompose en une somme directe d'injectifs indécomposables. Il en est donc de même pour $E(M)$.

<u>D'où le 1)</u>. <u>Le 2) résulte de la proposition III.2.</u>

<u>Les conditions sont suffisantes</u> :

Par hypothèse, $E(M) = \bigoplus_{i \in I} E_i$ chaque E_i étant un injectif indécomposable.

En regroupant tous les E_i de même type, on voit que $E(M)$ se met sous la forme :

$$E(M) = F_1 \oplus \dots \oplus F_k ,$$

chaque F_α étant une somme directe d'injectifs indécomposables de même type π_α, les divers types $\pi_1, \dots, \pi_k$ intervenant dans cette décomposition étant deux à deux distincts.

Posons, pour tout $\alpha \in \{1, \dots, k\}$:

$$G_\alpha = \bigoplus_{p \neq \alpha} F_p .$$

Dans $E(M)$, 0 admet la décomposition réduite :

$$0 = G_1 \cap \dots \cap G_k .$$

Posons $N_\alpha = M \cap G_\alpha$.

M étant essentiel dans $E(M)$, 0 admet dans M la décomposition réduite :

$$0 = N_1 \cap \ldots \cap N_k \, .$$

Pour tout $\alpha \in \{1,\ldots,k\}$, $\frac{M}{N_\alpha}$ est isomorphe à un sous-module non nul de $\frac{E(M)}{G_\alpha} \simeq F_\alpha$.

Il en résulte que N_α est π_α-isotypique dans M , <u>d'où le résultat.</u>

<u>COROLLAIRE</u> : <u>Si</u> $\frac{M}{N}$ <u>est de dimension finie,</u> N <u>admet une décomposition isotypique dans</u> M .

<u>BIBLIOGRAPHIE</u>

[1] N.BOURBAKI, Eléments de Mathématique, Algèbre commutative, Fasc. XXVIII, chapitre IV.

[2] J.FISHER, Decomposition Theories for modules. Trans. Amer. Math. Soc. 1969, Tome 145, pp. 241-269.

[3] J.FORT, Sommes directes de sous-modules co-irréductibles d'un module. Séminaire Dubreil-Pisot, Algèbre et Théorie des Nombres, 1966-67. Fasc. 1, Exp. N° 3.

[4] L.LESIEUR et R.CROISOT, Algèbre noethérienne non commutative. Mémorial des Sciences Mathématiques, 1963, Fasc. CLIV.

-:-:-:-:-:-:-

Conférence du 19 Mars 1973

par G. CAUCHON

-:-:-:-

DECOMPOSITION DES MODULES EN INTERSECTIONS INFINIES.

INTRODUCTION.

Cet exposé est doublement motivé. Son premier but est d'étendre au cas des décompositions de longueur infinie les résultats exposés dans [2] à propos des fonctions de décomposition.

D'autre part, nous savons, d'après [2] , que les décompositions tertiaires et isotypiques sont des cas particuliers de Γ-décompositions pour certaines fonctions de décomposition Γ bien choisies.

Cependant, si nous étudions les décompositions irréductibles, nous voyons qu'il n'existe certainement pas de fonction de décomposition Γ telle que toute décomposition irréductible réduite de longueur finie soit une Γ-décomposition.

En effet, soit A un anneau, Γ une fonction de décomposition définie sur Mod A (voir [2]), soit M un A-module à gauche, soit N un sous-module et soit :

$$N = N_1 \cap \dots \cap N_k$$

une Γ-décomposition de N dans M .

Alors, si $i \neq j$, $\frac{M}{N_i} \ncong \frac{M}{N_j}$ sinon on aurait $\Gamma(\frac{M}{N_i}) = \Gamma(\frac{M}{N_j})$.

Or, on peut toujours trouver un module M , un sous-module N et une décomposition irréductible réduite $N = N_1 \cap \ldots \cap N_k$ de N dans M telle que les $\frac{M}{N_i}$ soient 2 à 2 isomorphes.

Nous allons exposer ici une nouvelle théorie qui généralise la théorie des fonctions de décomposition et dans le cadre de laquelle entrent les décompositions irréductibles réduites ainsi que les décompositions complètement irréductibles réduites. Ceci constitue le second but de l'exposé.

Comme toutes les intersections que nous envisagerons pourront être de longueur infinie, nous commencerons par préciser la notion de décomposition réduite de longueur infinie.

Dans tout cet exposé, A désigne un anneau qui n'est supposé ni commutatif, ni unitaire. Tous les modules considérés sont des A-modules à gauche.

I. DECOMPOSITIONS REDUITES DE LONGUEUR QUELCONQUE.

Soit M un module, N un sous-module et soit

(1) $$N = \bigcap_{i \in I} N_i$$

une décomposition de N en intersection d'une famille $(N_i)_{i \in I}$ de sous-modules de M .

Soit $\varphi : \frac{M}{N} \xrightarrow{\subset} \prod_{i \in I} \frac{M}{N_i}$ le monomorphisme canonique.

Posons $S = \bigoplus_{i \in I} \frac{M}{N_i}$.

Lorsque I est fini, $\underline{\varphi(\frac{M}{N}) \subseteq S}$.

Lorsque I est infini, ce n'est plus le cas et il apparait, lorsqu'on désire étendre au cas infini, le théorème d'unicité des Γ-décompositions, ainsi que le théorème de Kurosh-Ore, que les principales difficultés auxquelles on se heurte sont dues à ce que $\varphi(\frac{M}{N})$ peut être très éloigné de S.

C'est pourquoi nous posons la définition suivante :

<u>DEFINITION I.1.</u> : La décomposition (1) est une décomposition <u>réduite</u> de N dans M si elle satisfait aux deux conditions suivantes :

1) Aucun N_i n'est superflu.

2) $\varphi^{-1}(S) < \frac{M}{N}$.

(Rappelons que la notation $E < F$ signifie : E essentiel dans F).

<u>Remarque</u> : Dans le cas d'une intersection finie, la notion de décomposition réduite introduite ci-dessus coïncide avec la notion classique puisque le 2) est toujours réalisé.

<u>DEFINITION I.2.</u> : Nous dirons que la décomposition (1) est <u>fortement réduite</u>, si elle est réduite au sens de la définition I.1. et si, de plus :

$$M \supseteq X_{i_o} \underset{\neq}{\supset} N_{i_o} \Longrightarrow X_{i_o} \cap [\bigcap_{i \neq i_o} N_i] \underset{\neq}{\supset} N .$$

II. <u>FAMILLES DE DECOMPOSITION.</u>

Soit C une classe de modules non nuls.

<u>DEFINITION II.1.</u> : Soit M un module et soit N un sous-module.

On dit que <u>N est C-essentiel dans M</u> si, pour tout sous-module X de M appartenant à C, $X \cap N \neq 0$.

Notation :

$$N \underset{C}{<} M .$$

Nous dirons qu'un module M est riche en éléments de C si tout sous-module non nul X de M contient au moins un élément de C .

Il est clair qu'on a l'implication suivante :

$$\left.\begin{array}{l} M \text{ riche en éléments de } C \\ N \underset{C}{<} M \end{array}\right\} \Longrightarrow N < M .$$

DEFINITION II.2. : Soit $(M_i)_{i\in I}$ une famille de modules.

Nous disons que la somme directe $M = \bigoplus\limits_{i\in I} M_i$ est C-réduite si :

1) $(\forall i \in I)\ M_i \in C$.

2) $i \neq j \Longrightarrow M_i \oplus M_j \notin C$.

DEFINITION II.3. : Nous dirons que C est une famille de décomposition si elle satisfait aux trois axiomes suivants :

Axiome 1 : Soient M et M' deux modules non nuls tels qu'il existe une suite exacte de la forme $0 \to M' \to M$.

Si $M \in C$, alors $M' \in C$.

Axiome 2 : Soient M_1 et M_2 deux éléments de C .

Soit L_1 un sous-module non nul de M_1 et soit L_2 un sous-module non nul de M_2 .

Si $M_1 \oplus M_2 \notin C$, alors $L_1 \oplus L_2 \notin C$.

<u>Axiome 3</u> : Si un module M contient au moins un élément de C , alors il existe une somme directe C-réduite $K = \bigoplus_{i \in I} K_i$ telle que $M \underset{C}{>} K$.

Les axiomes 1 et 2 ont été choisis de façon à avoir la propriété suivante :

<u>PROPOSITION II.1.</u> : <u>Soit $(M_i)_{i \in I}$ une famille de modules. Soit, pour tout $i \in I$, L_i un sous-module non nul de M_i</u> .

<u>Si la somme directe $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ est C-réduite, alors la somme directe $L = \bigoplus_{i \in I} L_i$ est C-réduite.</u>

Nous supposons désormais, que C désigne une famille de décomposition choisie une fois pour toutes.

<u>DEFINITION II.4.</u> : Soit M un module et soit N un sous-module. <u>On appelle C-décomposition de N dans M</u> , toute décomposition :

(1) $$N = \bigcap_{i \in I} N_i$$ de N en intersection d'une famille $(N_i)_{i \in I}$ de sous-modules de M telle que :

1) La décomposition (1) est réduite au sens du paragraphe I.

2) Pour tout $i \in I$, $\frac{M}{N_i}$ est extension essentielle d'un sous-module $L_i \in C$, les L_i étant tels que la somme directe

$$L = \bigoplus_{i \in I} L_i \text{ soit } C\text{-réduite.}$$

Si on remplace dans cette définition la condition 1) par la condition plus faible suivante :

1)* Aucun des N_i n'est superflu ; nous disons que la décomposition (1) est <u>une C-décomposition faible de N dans M</u> .

PROPOSITION II.2. : Soit M un module et soit N un sous-module propre de M. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) N admet une C-décomposition dans M.

ii) $\frac{M}{N}$ est extension essentielle d'une somme directe C-réduite.

iii) $\frac{M}{N}$ est riche en éléments de C.

iv) N admet une C-décomposition fortement réduite dans M.

v) N admet une C-décomposition faible dans tout sous-module X de M qui contient N strictement.

Démonstration : i) $\Longrightarrow$ iii).

LEMME : Toute somme directe $L = \bigoplus_{i \in I} L_i$ d'éléments $L_i \in C$ est riche en éléments de C.

On vérifie aisément ce résultat par récurrence sur le nombre d'éléments de I lorsque I est fini. Pour l'étendre au cas où I est infini, il suffit de remarquer que tout sous-module non nul X de L contient un sous-module non nul Y lui-même contenu dans une somme finie de L_i.

Soit $N = \bigcap_{i \in I} N_i$ une C-décomposition de N dans M. Soit $\varphi : \frac{M}{N} \xrightarrow{\subset} \prod_{i \in I} \frac{M}{N_i} \supseteq S = \bigoplus_{i \in I} \frac{M}{N_i}$ le monomorphisme canonique. Pour tout i, $\frac{M}{N_i} > L_i \in C$. Donc $S > L = \bigoplus_{i \in I} L_i$ (voir [1] page 267, exercice 15). Donc S est riche en éléments de C. Donc $\varphi^{-1}(S)$ est riche en éléments de C. Puisque $\frac{M}{N} > \varphi^{-1}(S)$, nous voyons que $\frac{M}{N}$ est riche en éléments de C.

iii) $\Longrightarrow$ ii) : c'est une conséquence immédiate de l'axiome 3.

ii) $\Longrightarrow$ iv) : Il est clair que toute C-décomposition (resp. faible ou fortement réduite) de 0 dans $\frac{M}{N}$ se relève en une C-décomposition (resp. faible ou fortement réduite) de N dans M.

Il suffit donc de faire le raisonnement pour $N = 0$.

Soit $K = \bigoplus_{i \in I} K_i$ une somme directe C-réduite, essentielle dans M.

Soit, pour tout $i \in I$, N_i un complément relatif de K_i dans M tel que $N_i \supseteq \bigoplus_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} K_j$.

Nous allons montrer que les N_i déterminent une C-décomposition fortement réduite de 0 dans M.

Pour prouver que $\bigcap_{i \in I} N_i = 0$, il suffit de prouver que $\bigcap_{i \in I} N_i \cap K = 0$.

Or $N_i \cap K = N_i \cap [K_i \oplus (\bigoplus_{j \neq i} K_j)] = \bigoplus_{j \neq i} K_j$ (modularité). Nous avons donc bien

$\underline{\bigcap_{i \in I} N_i = 0 \quad (1)}$.

Si $i \neq j$, $N_i \supseteq K_j$, la décomposition (1) est donc sans élément superflu.

Soit $\varphi : M \xrightarrow{\subseteq} \prod_{i \in I} \frac{M}{N_i} \supseteq S = \bigoplus_{i \in I} \frac{M}{N_i}$ le monomorphisme canonique. Pour tout $i \in I$, $\varphi(K_i) \subseteq \frac{M}{N_i} \subseteq S$. Donc $\varphi(K) \subseteq S$. Donc $K \subseteq \varphi^{-1}(S)$ et par suite $\varphi^{-1}(S) < M$.

La décomposition <u>(1) est donc réduite</u> au sens du paragraphe I.

Soit $i_0 \in I$, soit X_{i_0} un sous-module de M qui contient strictement N_{i_0}.

$$X_{i_0} \cap K_{i_0} \neq 0 \Longrightarrow X_{i_0} \cap [\bigcap_{i \neq i_0} N_i] \neq 0 .$$

Par suite, la décomposition (1) <u>est fortement réduite</u>.

Puisque N_i est un complément relatif de K_i , nous avons :

$$\frac{M}{N_i} > L_i \simeq K_i$$

Donc la décomposition (1) <u>est une C-décomposition fortement réduite</u>.

Comme iv) implique clairement i), nous avons démontré l'équivalence des assertions i), ii), iii) et iv).

iii) $\Longrightarrow$ v) : Supposons $M \supseteq X \underset{\neq}{\supset} N$.

$\frac{M}{N}$ étant riche en éléments de C , il en est de même pour $\frac{X}{N}$ et par suite N admet une C-décomposition dans X .

v) $\Longrightarrow$ iii) : Nous pouvons supposer $N = 0$.

Soit X un sous-module non nul de M .

Soit $0 = \bigcap\limits_{i \in I} N_i$ une C-décomposition faible de 0 dans X.

Soit $\varphi : X \xrightarrow{\subset} \prod\limits_{i \in I} \frac{X}{N_i}$ le monomorphisme canonique.

Soit $i_o \in I$; puisque N_{i_o} n'est pas superflu, $\varphi(X) \cap \frac{X}{N_{i_o}} \neq 0$.

Par suite, $\varphi(X)$ contient un élément de C .

Il en est donc de même pour X et M <u>est bien riche en éléments de C .</u>

En ce qui concerne l'équivalence des propriétés ii) et iv), nous pouvons apporter la précision suivante :

<u>PROPOSITION II.3.</u> : <u>Soit</u> M <u>un module,</u> N <u>un sous-module et soit</u> I <u>un ensemble d'indices.</u>

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

ii)* $\frac{M}{N}$ est extension essentielle d'une somme directe C-réduite de la forme $K = \bigoplus_{i\in I} K_i$.

iv)* N admet dans M une C-décomposition fortement réduite de la forme $N = \bigcap_{i\in I} N_i$.

<u>Démonstration</u> : ii)* $\Longrightarrow$ iv)* a déjà été démontré.

Pour démontrer que iv)* $\Longrightarrow$ ii)* , nous pouvons supposer $N = 0$.

Soit $\varphi : M \xrightarrow{\subset} \prod_{i\in I} \frac{M}{N_i} \supseteq S = \bigoplus_{i\in I} \frac{M}{N_i}$ le monomorphisme canonique.

Posons, pour tout $i \in I$, $Y_i = \bigcap_{j\neq i} N_j$.

<u>La somme $Y = \sum_{i\in I} Y_i$ est directe.</u>

Puisque la décomposition $0 = \bigcap_{i\in I} N_i$ est fortement réduite, N_i est un complément relatif de Y_i $(\forall i \in I)$.

Par suite, Y_i est isomorphe par φ à $Y_i' < \frac{M}{N_i}$ donc

$$\varphi(Y) = \bigoplus_{i\in I} Y_i' < S$$

donc $\underline{Y < \varphi^{-1}(S) < M}$.

D'autre part, pour tout $i \in I$, $\frac{M}{N_i}$ est extension essentielle d'un élément L_i de C , les L_i étant tels que la somme directe $L = \bigoplus_{i\in I} L_i$ soit C-réduite.

Il en résulte que Y_i est extension essentielle d'un sous-module K_i tel que la somme directe $K = \bigoplus_{i \in I} K_i$ soit C-réduite. Donc $M > K$ d'où le résultat.

PROPOSITION II.4. : Soit M un module. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Tout sous-module propre N de M, admet une C-décomposition dans M.

ii) Tout sous-module propre N de M, admet une C-décomposition faible dans M.

iii) Tout quotient $\frac{M}{N}$ de M est riche en éléments de C.

Démonstration : L'équivalence i) $\Longleftrightarrow$ iii) résulte de la proposition II.2. Il est clair que i) $\Longrightarrow$ ii).

Montrons que ii) $\Longrightarrow$ iii).

Remarquons d'abord que, si M satisfait à ii), il en est de même pour tout quotient $M' = \frac{M}{N}$ de M.

Soit en effet X' un sous-module propre de M' ; $X' = \frac{X}{N}$ avec $N \subseteq X \underset{\neq}{\subset} M$

$\frac{M'}{X'} \simeq \frac{M}{X}$.

X admet une C-décomposition faible dans $M \Longrightarrow X'$ admet une C-décomposition faible dans M'.

Il nous suffit donc de montrer que M est riche en éléments de C.

Soit X un sous-module non nul de M.

Soit X' un complément relatif de X dans M.

X est isomorphe à $X'' < \frac{M}{X'}$.

Puisque X' admet une C-décomposition faible dans M, $\frac{M}{X'}$ contient un élément de C (même démonstration que prop. II.2 ; v) $\Longrightarrow$ iii)). Par suite, X contient au moins un élément de C.

Et M est bien riche en éléments de C.

III. APPLICATIONS.

1) FONCTIONS DE DECOMPOSITION :

Soit Γ une fonction de décomposition définie sur Mod A à valeurs dans $\mathcal{P}(\mathfrak{X})$ où $\mathfrak{X}$ désigne une certaine classe d'objets.

Nous sommes conduits à généraliser la notion de Γ-décomposition de longueur finie de la façon suivante :

DEFINITION III.1. : Soit M un module et N un sous-module.

On appelle Γ-décomposition de N dans M toute décomposition :

(1) $\quad N = \bigcap_{i \in I} N_i$ de N en intersection d'une famille $(N_i)_{i \in I}$ de sous-modules de M telle que :

1) La décomposition (1) est réduite au sens du paragraphe I.

2) $(\forall i \in I)$ $\frac{M}{N_i}$ est Γ-stable et $\Gamma(\frac{M}{N_i}) = \{x_i\}$.

3) $i \neq j \Longrightarrow x_i \neq x_j$.

Si nous remplaçons, dans cette définition, la condition 1) par la condition suivante plus faible :

1)* Aucun N_i n'est superflu, nous dirons que la décomposition (1) est une Γ-décomposition faible de N dans M.

Soit C la classe de tous les modules Γ-stables.

C est une famille de décomposition. En effet :

L'axiome 1 est évident.

L'axiome 2 résulte du lemme suivant.

LEMME III.1. : Soit $(M_i)_{i \in I}$ une famille de modules Γ-stables avec, pour tout $i \in I$, $\Gamma(M_i) = \{x_i\}$.

Alors $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ est Γ-stable si et seulement si tous les x_i sont égaux.

Démonstration : Si M est Γ-stable, $\Gamma(M) = \{x\} = \{x_i\}_{i \in I}$. Donc tous les x_i sont égaux.

Si tous les x_i sont égaux à $x \in \mathfrak{X}$, $\Gamma(M) = \{x\}$ et si $0 \neq N \subseteq M$, $\Gamma(N) = \{x\}$ car, M étant somme directe de modules Γ-stables, M est riche en sous-modules Γ-stables, donc $\Gamma(N) \neq \emptyset$.

Il en résulte d'ailleurs de ce lemme que :

La somme directe $K = \bigoplus_{i \in I} K_i$ est C-réduite si et seulement si elle satisfait aux deux propriétés suivantes :

1) K_i est Γ-stable et $\Gamma(K_i) = \{x_i\}$ pour tout $i \in I$.

2) $i \neq j \Longrightarrow x_i \neq x_j$.

Démontrons l'axiome 3 : Soit M un module qui contient au moins un élément de C.

Soit $(S_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ la famille de tous les sous-modules de M qui appartiennent à C.

Soit $\mathfrak{F}$ la famille de toutes les parties P de Λ telles que la somme $\sum_{\alpha \in P} S_\alpha$ soit directe.

$\mathfrak{F}$ est non vide et est inductive pour la relation d'inclusion.

Par suite, $\mathfrak{F}$ admet un élément maximal, soit P_0.

La somme directe $K = \bigoplus_{\alpha \in P_o} S_\alpha$ est C-essentielle dans M.

Si nous regroupons dans cette somme tous les S_α qui ont même image par Γ, nous voyons que K peut s'écrire sous la forme d'une somme directe C-réduite $K = \bigoplus_{i \in I} K_i$ d'où le résultat.

Toute extension essentielle d'un module Γ-stable étant Γ-stable, nous avons, compte-tenu du lemme III.1 :

PROPOSITION III.1. : Soit M un module et N un sous-module. Soit $N = \bigcap_{i \in I} N_i$ (1) une décomposition de N en intersection d'une famille $(N_i)_{i \in I}$ de sous-modules de M.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) La décomposition (1) est une C-décomposition (resp. une C-décomposition faible) de N dans M.

2) La décomposition (1) est une Γ-décomposition (resp. une Γ-décomposition faible) de N dans M.

Les propositions II.2. et II.4. nous permettent en particulier d'énoncer :

PROPOSITION III.2. : Soit M un module et soit N un sous-module propre de M.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) N admet une Γ-décomposition dans M.

ii) $\frac{M}{N}$ est extension essentielle d'une somme directe $K = \bigoplus_{i \in I} K_i$ telle que chaque K_i soit Γ-stable avec $i \neq j \Longrightarrow \Gamma(K_i) \neq \Gamma(K_j)$.

iii) $\frac{M}{N}$ est riche en sous-modules Γ-stables.

iv) N admet une Γ-décomposition fortement réduite dans M.

v) N admet une Γ-décomposition faible dans tout sous-module X de M tel que $N \underset{\neq}{\subset} X$.

<u>PROPOSITION III.3.</u> : <u>Soit</u> M <u>un module ; les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

i) <u>Tout sous-module propre</u> N <u>de</u> M <u>admet une Γ-décomposition faible dans</u> M .

ii) <u>Tout quotient de</u> M <u>est riche en sous-modules Γ-stables</u>.

Remarquons que l'équivalence des assertions i) et iii) de la proposition III.2. est la généralisation au cas des décompositions de longueurs quelconques, du théorème d'existence des Γ-décompositions de longueurs finies établies dans [2].

Le théorème d'unicité des Γ-décompositions se généralise également de la manière suivante.

<u>PROPOSITION III.4.</u> : <u>Soit</u> M <u>un module et soit</u> N <u>un sous-module</u>.

Soient $N = \bigcap_{i\in I} X_i = \bigcap_{j\in J} Y_j$ deux Γ-décompositions de N dans M.

Posons $(\forall i \in I)\ (\Gamma(\frac{M}{X_i}) = \{x_i\})$

et $(\forall j\in J)\ (\Gamma(\frac{M}{Y_j}) = \{y_j\})$.

Alors :

1) Il existe une bijection $\sigma : I \to J$ telle que

$$(\forall i\in I)\ (x_i = y_{\sigma(i)})$$

2) $\Gamma(\frac{M}{N}) = \{x_i\}_{i\in I}$.

<u>Démonstration</u> : Il suffit de prouver le 2).

Soit $\varphi : \frac{M}{N} \xrightarrow{\subset} \prod_{i\in I} \frac{M}{N_i}$ le monomorphisme canonique.

Soit $\quad S = \bigoplus_{i \in I} \frac{M}{N_i}$.

$$\frac{M}{N} > \varphi^{-1}(S) \Longrightarrow \Gamma(\frac{M}{N}) = \Gamma(\varphi^{-1}(S)) \subseteq \Gamma(S) \ .$$

Donc $\quad \underline{\Gamma(\frac{M}{N}) \subseteq \{x_i\}_{i \in I}}$.

L'inclusion contraire s'établit comme dans le cas des Γ-décompositions de longueur finie.

Compte tenu de ce résultat, et de la proposition II.3., nous voyons que l'équivalence des assertions i), ii) et iii) de la proposition III.2. peut être précisée de la manière suivante.

PROPOSITION III.5. : *Soit* M *un module,* N *un sous-module propre et soit* I *un ensemble d'indices.*

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) N admet une Γ-décomposition dans M de la forme :

$N = \bigcap_{i \in I} N_i$.

ii) $\frac{M}{N} > K = \bigoplus_{i \in I} K_i$ chaque K_i étant Γ-stable avec

$i \neq j \Longrightarrow \Gamma(K_i) \neq \Gamma(K_j)$.

iii) $\frac{M}{N}$ est riche en sous-modules Γ-stables et

Card $\Gamma(\frac{M}{N})$ = Card I .

Il convient naturellement de se poser la question suivante : Le théorème d'unicité est-il encore valable pour les Γ-décompositions faibles de longueur infinie ?

Nous allons montrer à l'aide d'un contre-exemple, que la réponse est négative.

<u>EXEMPLE III.1.</u> : Nous prenons $A = \mathbb{Z}$.

Nous notons t le radical tertiaire et T la fonction de décomposition associée à t .

Soit $(P_n)_{n=1}^{+\infty}$ la suite de tous les nombres premiers positifs.

Posons $M = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathbb{Z}}{P_n\mathbb{Z}}$.

M est un $\mathbb{Z}$-module.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit M_n l'ensemble de tous les éléments de M ayant toutes leurs composantes nulles sauf éventuellement la nième.

M_n est un sous-module de M isomorphe à $\frac{\mathbb{Z}}{P_n\mathbb{Z}}$, donc simple.

Donc M_n est t-stable et $t(M_n) = (0 \cdot . M_n) = P_n\mathbb{Z}$.

Donc M_n est T-stable et $T(M_n) = \{P_n\mathbb{Z}\}$.

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n le sous-module de M constitué de tous les éléments de M dont la nième composante est nulle.

Il est clair que :

$$0 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} X_n \quad (1) ,$$

et qu'aucun X_i n'est superflu.

D'autre part, $\frac{M}{X_n} \simeq M_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Donc la décomposition (1) est une T-décomposition faiblement réduite de 0 dans M avec

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad T(\frac{M}{X_n}) = \{P_n\mathbb{Z}\} .$$

Si le théorème d'unicité s'appliquait, on en déduirait :

$$\underline{T(M) = \{P_n\mathbb{Z}\}_{n\in\mathbb{N}^*}} \quad (2) .$$

Or le sous-module S de M engendré par l'élément $\omega = (\bar{1},\ldots,\bar{1},\ldots)$ est isomorphe à $\mathbf{Z}$, donc co-irréductible, donc t-stable avec $t(S) = t(\mathbf{Z}) = 0$.

Donc $\underline{0 \in T(M)}$. Contradiction avec (2) et le théorème d'unicité ne s'applique pas si les décompositions considérées ne sont pas réduites au sens du paragraphe I.

Ceci montre que le 2) de la proposition III.4. est faux pour de telles décompositions. On peut aussi montrer que le 1) est faux lorsque les T-décompositions sont seulement sans élément superflu.

En effet, $\mathbf{Z}$ étant noethérien, on démontre (voir le paragraphe suivant), que M est riche en sous-module T-stables.

Par suite 0 admet une T-décomposition dans M soit

$$0 = \bigcap_{i \in I} Y_i \qquad (3) .$$

Posons $T(\frac{M}{Y_i}) = \{\mathfrak{P}_i\}$ $(\forall i \in I)$ où $\mathfrak{P}_i$ désigne un idéal de $\mathbf{Z}$.

Puisque $T(M) = \{\mathfrak{P}_i\}_{i \in I}$, il reste $i_o \in I$ tel que

$$\mathfrak{P}_{i_o} = 0 .$$

Et les décompositions (1) et (3) ne satisfont pas à la condition 1) de la proposition III.4.

<u>EXEMPLE III.2.</u> : Prenons les mêmes notations que dans l'exemple III.1. et posons :

$$L = \bigoplus_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathbf{Z}}{P_n \mathbf{Z}} .$$

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, soit $Y_i = \bigoplus_{n \neq i} \frac{\mathbf{Z}}{P_n \mathbf{Z}}$.

Nous avons $L = Y_i \oplus \frac{\mathbf{Z}}{P_i \mathbf{Z}}$. Donc Y_i est $P_i\mathbf{Z}$-tertiaire dans L.

Il est clair que, dans L, nous avons :

$$\underline{0 = \bigcap_{i=1}^{+\infty} Y_i \quad (1)} .$$

et que ceci est une T-décomposition faible.

$$\text{Soit} \quad \varphi : L \to \prod_{i=1}^{+\infty} \frac{L}{Y_i} \supseteq S = \bigoplus_{i=1}^{+\infty} \frac{L}{Y_i} .$$

Il est clair que $\underline{\varphi(L) = S}$.

Donc la décomposition (1) est une T-décomposition de 0 dans L .

Cet exemple nous fournit donc une T-décomposition clairement explicitée alors que dans l'exemple précédent, si nous sommes assurés de l'existence d'une T-décomposition de 0 dans M , nous ne voyons pas très bien comment en expliciter une.

2) APPLICATION AUX DECOMPOSITIONS TERTIAIRES :

Nous sommes naturellement conduits à généraliser la notion classique de décomposition tertiaire réduite de longueur finie, de la manière suivante :

DEFINITION III.2. : Soit M un module et N un sous-module.

On appelle décomposition tertiaire réduite de N dans M , toute décomposition $N = \bigcap_{i \in I} N_i$ (1) de N dans M telle que :

1) La décomposition (1) soit réduite au sens du paragraphe I.

2) Pour tout $i \in I$, N_i est tertiaire dans M et $R_3(N_i) = \mathfrak{P}_i$.

3) $i \neq j \Longrightarrow \mathfrak{P}_i \neq \mathfrak{P}_j$.

Si on remplace la condition 1) par la condition suivante plus faible :

1*) Aucun N_i n'est superflu.

On dira que (1) est une décomposition tertiaire sans élément superflu de N dans M .

D'après [3] (Théorème 5.3. page 254], nous voyons immédiatement que les décompositions tertiaires réduites ne sont autres que les T-décompositions et que les décompositions tertiaires sans élément superflu ne sont autres que les T-décompositions faibles.

D'où les résultats :

<u>PROPOSITION III.6.</u> :(Théorème d'existence des décompositions tertiaires).

<u>Soit</u> M <u>un module et</u> N <u>un sous-module propre.</u>

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) N admet une décomposition tertiaire réduite dans M.

ii) $\frac{M}{N} > K = \bigoplus_{i \in I} K_i$ chaque K_i étant t-stable, les radicaux $t(K_i)$ étant 2 à 2 distincts.

iii) $\frac{M}{N}$ est riche en sous-modules t-stables.

iv) N admet une décomposition tertiaire fortement réduite dans M.

v) N admet une décomposition tertiaire sans élément superflu dans tout sous-module X de M tel que $N \underset{\neq}{\subset} X$.

<u>PROPOSITION III.7.</u> : (Théorème d'unicité des décompositions tertiaires).

<u>Soit</u> M <u>un module et</u> N <u>un sous-module</u>.

Soient $N = \bigcap_{i \in I} N_i = \bigcap_{j \in J} N'_j$ deux décompositions tertiaires <u>réduites</u> de N dans M.

Nous supposons que :

$(\forall i \in I)$ N_i est $\mathcal{P}_i$-tertiaire dans M et

$(\forall j \in J)$ N'_j est $\mathcal{P}'_j$-tertiaire dans M.

Alors :

1) Il existe une bijection $\sigma : I \to J$ telle que :

$(\forall i \in I)$ $(\mathcal{P}_i = \mathcal{P}'_{\sigma(i)})$.

2) $T(\frac{M}{N}) = \{\mathcal{P}_i\}_{i \in I}$.

3) $$R_3(N) = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{P}_i \ .$$

Le 3) résulte de la propriété suivante établie par Fisher ([3] prop. 5.2., p. 254)

Si M est riche en sous-modules t-stables, alors :

$$t(M) = \bigcap_{\mathfrak{P} \in T(M)} \mathfrak{P} \ .$$

Nous allons montrer maintenant que ces résultats prennent un aspect remarquable pour un module M qui satisfait à la condition de chaîne D' que nous définissons ci-dessous :

<u>DEFINITION III.3.</u> : Un module M satisfait à la condition de chaîne D' si, pour tout sous-module N de M, la famille des résiduels à gauche de N dans M satisfait à la condition de chaîne ascendante.

Notons que cette condition est toujours réalisée si l'anneau A est noethérien bilatère.

Etant donné un module M, un sous-module N et un résiduel à gauche de N dans M $\mathfrak{P} = N \cdot\!\!. X$, nous dirons que :

<u>$\mathfrak{P}$ est un résiduel associé de N relativement à X</u> si les deux conditions suivantes sont réalisées :

1) $N \underset{\neq}{\subset} X$.

2) $N \underset{\neq}{\subset} Y \subseteq X \Longrightarrow \mathfrak{P} = N \cdot\!\!. Y$.

On voit ([5] proposition 7.5., page 67) que si $\mathfrak{P} = N \cdot\!\!. X$ avec $N \underset{\neq}{\subset} X \subseteq M$ est un résiduel à gauche maximal de N dans M, alors $\mathfrak{P}$ est un résiduel associé de N relativement à X.

Par suite, si M satisfait à la condition D', tout sous-module propre N de M admet au moins un résiduel associé dans M.

On vérifie aisément le résultat suivant :

<u>LEMME III.2.</u> : Si $\mathcal{P}$ est un résiduel associé de N relativement à X dans M , alors :

$$\frac{X}{N} \text{ est t-stable et } t\left(\frac{X}{N}\right) = \mathcal{P}.$$

Par suite, si M satisfait à la condition D' , tout quotient $\frac{M}{N}$ de M est riche en sous-modules t-stables.

Nous en déduisons :

<u>PROPOSITION III.8.</u> : <u>Soit</u> M <u>un module satisfaisant à la condition D'.</u>

Alors : Tout sous-module propre N de M admet dans M une décomposition tertiaire réduite (et même fortement réduite). Fisher démontre dans [3] (proposition 6.1., page 256) que, si M est un module satisfaisant à la condition D' , alors, pour tout sous-module N de M , $T(\frac{M}{N})$ = Ass N dans M où Ass N dans M désigne l'ensemble de tous les résiduels associés de N dans M .

Nous en déduisons les résultats suivants qui, avec la proposition III.8., généralisent au cas où seule la condition D' est satisfaite, les résultats obtenus par L.Lesieur et R.Croisot dans [5] lorsque la condition D , qui est plus forte que D' , est satisfaite, et que le module M est artinien ou noethérien.

<u>PROPOSITION III.9.</u> : <u>Soit</u> M <u>un module satisfaisant à la condition</u> D' . <u>Soit</u> N <u>un sous-module et soit</u> $N = \bigcap_{i \in I} X_i$ <u>une décomposition tertiaire réduite de</u> N <u>dans</u> M , <u>chaque</u> X_i <u>étant</u> $\mathcal{P}_i$<u>-tertiaire dans</u> M . <u>Alors</u>

1) Ass N = $\{\mathcal{P}_i\}_{i \in I}$.

2) $R_3(N) = \bigcap_{i \in I} R_3(X_i) = \bigcap_{i \in I} \mathcal{P}_i$.

<u>Démonstration</u> : C'est une conséquence immédiate de la proposition III.7.

PROPOSITION III.10 : Soit M un module satisfaisant à la condition D'. Soit N un sous-module propre de M et soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier de A. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) N est $\mathfrak{P}$-tertiaire dans M.

ii) $\mathfrak{P}$ est l'unique résiduel associé de N dans M.

Démonstration : C'est une conséquence immédiate des propositions III.8. et III.9.

3) APPLICATION AUX DECOMPOSITIONS IRREDUCTIBLES REDUITES :

Nous sommes naturellement conduits à généraliser la notion de décomposition irréductible réduite de longueur finie, de la façon suivante :

DEFINITION III.3. : Soit M un module et N un sous-module.

On appelle décomposition irréductible réduite de N dans M, toute décomposition $N = \bigcap_{i \in I} N_i$ (1) de N en intersection d'une famille $(N_i)_{i \in I}$ de sous-modules de M telle que :

1) La décomposition (1) est réduite au sens du paragraphe I.

2) Tous les N_i sont irréductibles dans M.

Si on remplace la condition 1) par la condition plus faible :

1*) Aucun N_i n'est superflu ;

nous disons que (1) est une décomposition irréductible sans élément superflu.

Bien entendu, lorsque I est fini, ces deux définitions coïncident avec la définition usuelle de décomposition irréductible réduite de longueur finie.

Soit C_u la classe de tous les modules co-irréductibles.

Il est immédiat que C_u est une famille de décomposition et que les sommes directes C_u-réduites ne sont autres que les sommes directes de co-irréductibles.

Toute extension essentielle d'un module co-irréductible est un module co-irréductible et par suite :

Les décompositions irréductibles réduites ne sont autres que les C_u-décompositions et

les décompositions irréductibles sans élément superflu ne sont autres que les C_u-décompositions faibles.

Nous avons même la précision suivante :

PROPOSITION III.11. : Soit M un module, soit N un sous-module et soit $N = \bigcap_{i \in I} N_i$ (1) une décomposition de N dans M.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) (1) est une décomposition irréductible réduite de N dans M.

ii) (1) est une décomposition irréductible fortement réduite de N dans M.

Démonstration : Il suffit de démontrer que i) $\Longrightarrow$ ii).

Soit $i_o \in I$ et soit X_{i_o} un sous-module de M avec $X_{i_o} \underset{\neq}{\supset} N_{i_o}$.

Supposons par l'absurde :

$$X_{i_o} \cap [\bigcap_{i \neq i_o} N_i] = N$$

$$N_{i_o} \not\supseteq \bigcap_{i \neq i_o} N_i \quad \text{donc} \quad N_{i_o} + \bigcap_{i \neq i_o} N_i \underset{\neq}{\supset} N_{i_o}$$

$$X_{i_o} \cap [N_{i_o} + \bigcap_{i \neq i_o} N_i] = N_{i_o} + X_{i_o} \cap [\bigcap_{i \neq i_o} N_i] \text{ (modularité)}$$
$$= N_{i_o} .$$

Ceci contredit l'hypothèse : N_{i_o} est irréductible dans M.

Les résultats du paragraphe II nous permettent alors d'énoncer :

PROPOSITION III.12. : *Soit M un module et soit N un sous-module propre de M . Les propriétés suivantes sont équivalentes* :

i) N admet une décomposition irréductible réduite dans M .

ii) $\frac{M}{N}$ est extension essentielle d'une somme directe de sous-modules co-irréductibles.

iii) $\frac{M}{N}$ est riche en sous-modules co-irréductibles.

iv) N admet une décomposition irréductible sans élément superflu dans tout sous-module X de M tel que $X \underset{\neq}{\supset} N$.

Remarque : L'équivalence des assertions ii), iii) et iv) a déjà été établie par J.Fort dans [4] , dans le cas des modules unitaires sur un anneau unitaire en passant par l'intermédiaire des enveloppes injectives.

PROPOSITION III.13. : *Une condition nécessaire et suffisante pour que tout sous-module N d'un module M admette une décomposition irréductible sans élément superflu dans M est que tout quotient $\frac{M}{N}$ de M soit riche en co-irréductibles.*

Compte tenu du fait qu'il y a coïncidence entre les décompositions irréductibles réduites et les décompositions irréductibles fortement réduites, la proposition II.3. nous permet d'énoncer :

PROPOSITION III.14. : *Soient M un module, N un sous-module propre et I un ensemble d'indices.*

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) N admet dans M une décomposition irréductible réduite de la forme $N = \bigcap_{i \in I} N_i$.

ii) $\frac{M}{N}$ est extension essentielle d'une somme directe de co-irréductibles de la forme $K = \bigoplus_{i \in I} K_i$.

Lorsque I est fini, ceci nous redonne le résultat classique suivant :

<u>COROLLAIRE III.1.</u> : Soit M un module et soit N un sous-module propre. N admet une décomposition irréductible réduite de longueur finie dans M si et seulement si $\frac{M}{N}$ est de dimension finie au sens de Goldie.

De plus, s'il en est ainsi, l'invariant de Kurosh-Ore de N dans M n'est autre que la dimension de Goldie de $\frac{M}{N}$.

Afin d'établir, dans le cas général, le théorème d'unicité des décompositions irréductibles réduites, nous allons établir, pour tout module M , l'unicité des longueurs des sommes directes de co-irréductibles essentielles dans M.

Cette unicité a déjà été établie par J.Fort dans [4] , dans le cas des modules unitaires en passant par l'intermédiaire des sommes directes d'injectifs indécomposables.

La démonstration que nous allons donner ici s'applique également au cas des modules non unitaires.

<u>LEMME III.3.</u> : Soit M un module.

Soient $S = \bigoplus_{i \in I} S_i$ et $T = \bigoplus_{j \in J} T_j$ deux sommes directes de sous-modules co-irréductibles de M .

Nous supposons $S < M$ et $T < M$.

Alors pour tout $\alpha \in I$, il existe $\beta \in J$ tel que :

1) La somme $T_\beta + [\bigoplus_{i \neq \alpha} S_i]$ est directe et essentielle dans M .

2) Il existe un sous-module non nul de S_α qui est isomorphe à un sous-module de T_β .

<u>Démonstration</u> : Supposons que :

$$\forall j \in J \,;\; R_j = T_j \cap [\underset{i \neq \alpha}{\oplus} S_i] \neq 0 \,.$$

Alors : $\forall j \in J \,;\; R_j < T_j$

$$\Longrightarrow R = \underset{j \in J}{\oplus} R_j < T < M$$

$$\Longrightarrow \underset{i \neq \alpha}{\oplus} S_i < M \,,$$ ce qui est absurde.

Il existe donc $\beta \in J$ tel que la somme

$$\underline{P = T_\beta + [\underset{i \neq \alpha}{\oplus} S_i] \text{ soit directe.}}$$

$P \cap S_\alpha \neq 0$ sinon la somme $(T_\beta \oplus [\underset{i \neq \alpha}{\oplus} S_i]) + S_\alpha$ serait directe et on aurait $T_\beta \cap S = 0$.

Par suite $P \supseteq P \cap S_\alpha \oplus [\underset{i \neq \alpha}{\oplus} S_i]$ qui est essentiel dans M.

Donc <u>$P < M$</u> , <u>d'où le 1)</u>.

Pour montrer le 2), posons $T' = T_\beta \cap S$.

Nous avons : $0 \underset{\neq}{\subset} T' \subseteq S = S_\alpha \oplus [\underset{i \neq \alpha}{\oplus} S_i]$. Or $T' \cap (\underset{i \neq \alpha}{\oplus} S_i) = 0$.

Donc T' est isomorphe à un sous-module non nul de S_α. D'où le 2).

<u>PROPOSITION III.15.</u> : <u>Soit</u> M <u>un module.</u>

Soient $S = \underset{i \in I}{\oplus} S_i$ et $T = \underset{j \in J}{\oplus} T_j$ deux sommes directes de sous-modules co-irréductibles de M avec $S < M$ et $T < M$.

<u>Alors</u> : Il existe une bijection $\sigma : I \to J$ qui satisfait à la propriété suivante :

Pour tout $i \in I$, il existe un sous-module non nul de S_i qui est isomorphe à un sous-module de $T_{\sigma(i)}$.

<u>Démonstration</u> : Soit $\mathcal{F}$ la famille des couples (Δ,μ) où Δ est une partie de I et où μ est une application injective de Δ dans J satisfaisant aux propriétés suivantes :

1) La somme $[\bigoplus_{j\in\mu(\Delta)} T_j] + [\bigoplus_{i\notin\Delta} S_i]$ est directe.

2) Pour tout $i \in \Delta$, il existe un sous-module non nul de S_i qui est isomorphe à un sous-module de $T_{\mu(i)}$.

Nous supposons $\mathcal{F}$ ordonnée par la relation $\leqslant$ définie par :

$$(\Delta_1, \mu_1) \leqslant (\Delta_2, \mu_2) \iff \begin{cases} \Delta_1 \subseteq \Delta_2 \quad \text{et} \\ \\ \mu_1 = \dfrac{\mu_2}{\Delta_1} \end{cases} .$$

Il résulte du lemme III.3. que $\mathcal{F}$ <u>est non vide</u>.

<u>Montrons que</u> $\mathcal{F}$ <u>est inductive</u>.

Soit $(\Delta_\ell, \mu_\ell)_{\ell\in\Omega}$ une famille totalement ordonnée d'éléments de $\mathcal{F}$.

Posons $\Delta = \bigcup_{\ell\in\Omega} \Delta_\ell$ et soit $\mu : \Delta \to J$ l'application définie par $\mu(x) = \mu_\ell(x)$ pour tout $\ell \in \Omega$ tel que $x \in \Delta_\ell$.

Il est immédiat que nous définissons bien une application et qu'elle est injective.

Nous allons montrer que (Δ,μ) appartient à $\mathcal{F}$.

Le 2) est clairement vérifié d'après la définition de μ.

Soit à montrer que la somme

$$L = [\bigoplus_{j\in\mu(\Delta)} T_j] + [\bigoplus_{i\notin\Delta} S_i] \quad (1) \quad \text{est directe.}$$

Soit $\quad x \in [\bigoplus_{j\in\mu(\Delta)} T_j] \cap [\bigoplus_{i\notin\Delta} S_i]$.

Il existe $j_1, \ldots, j_k \in \mu(\Delta)$ tels que

$$x = t_{j_1} + t_{j_2} + \ldots + t_{j_k} \quad (t_\alpha \in T_\alpha) .$$

Il existe alors $\ell \in \Omega$ tel que :

$$j_1, \ldots, j_k \in \mu_\ell(\Delta_\ell)$$

$$\Longrightarrow x \in [\bigoplus_{j \in \mu_\ell(\Delta_\ell)} T_j] \cap [\bigoplus_{i \notin \Delta_\ell} S_i] .$$

Or $\Delta \supseteq \Delta_\ell$ donc $x \in [\bigoplus_{j \in \mu_\ell(\Delta_\ell)} T_j] \cap [\bigoplus_{i \notin \Delta} S_i] = 0$.

Et la somme (1) est bien directe. $\mathcal{F}$ <u>est donc bien inductive</u>.

<u>Soit</u> (Δ, μ) <u>un élément maximal de</u> $\mathcal{F}$ <u>et posons à nouveau</u>

$$L = [\bigoplus_{j \in \mu(\Delta)} T_j] \oplus [\bigoplus_{i \notin \Delta} S_i] .$$

Nous allons montrer que $\underline{\Delta = I}$.

<u>Supposons par l'absurde,</u> $\Delta \underset{\neq}{\subset} I$.

Considérons la famille G de toutes les parties P de I telles que la somme $L + [\bigoplus_{i \in P} S_i]$ soit directe.

Si G est vide, posons $\underline{L' = L}$.

Si G est non vide, posons $\underline{L' = L \oplus [\bigoplus_{i \in P_1} S_i]}$ où P_1 est un élément maximal de G .

Pour tout $i \in I$, $L' \cap S_i \neq 0$, donc $\underline{L' < M}$.

Nous pouvons écrire :

$$L' = [\bigoplus_{j \in \mu(\Delta)} T_j] \oplus [\bigoplus_{\substack{i \notin \Delta \\ i \in I}} S_i] \oplus [\bigoplus_{h \in P_1} S_h] .$$

Ceci est une somme directe de sous-modules co-irréductibles de M .

Soit $\alpha \in I \setminus \Delta$.

Par application du lemme III.3. à L' et à T , on voit qu'il existe $\beta \in J$ tel que $\beta \notin \mu(\Delta)$ et

1) La somme

$$L'' = [\bigoplus_{j \in \mu(\Delta) \quad \{\beta\}} T_j] + [\bigoplus_{\substack{i \notin \Delta \\ i \in I}} \quad {}_{\{\alpha\}} S_i]$$

est directe et

2) Il existe un sous-module non nul de S_α qui est isomorphe à un sous-module de T_β .

Posons $\Delta_1 = \Delta \cup \{\alpha\}$ et soit $\mu_1 : \Delta_1 \to J$ l'application définie par $\frac{\mu_1}{\Delta} = \mu$ et $\mu_1(\alpha) = \beta$. Le couple $(\Delta_1, \mu_1) \in \mathcal{F}$.

Comme (Δ, μ) est strictement inférieur à (Δ_1, μ_1) , nous aboutissons à une contradiction et nécessairement <u>$\Delta = I$</u> .

<u>En résumé, nous avons établi le résultat suivant</u> :

Il existe une application injective $\mu : I \to J$ telle que pour tout $i \in I$, il existe un sous-module non nul de S_i qui soit isomorphe à un sous-module de $T_{\mu(i)}$.

<u>Symétriquement</u>, il existe une application injective $\nu : J \to I$ telle que, pour tout $j \in J$, il existe un sous-module non nul de T_j qui soit isomorphe à un sous-module de $S_{\nu(j)}$.

Un théorème fondamental de la théorie des ensembles montre que, dans ces conditions, il existe une bijection $\sigma : I \to J$ définie de la façon suivante :

Il existe une partition $\{I_1, I_2\}$ de I telle que :

a) $(\forall i \in I_1)\ (\sigma(i) = \mu(i))$ et

b) $\{I_2 \subseteq \nu(J)\}$ et $\{(\forall i \in I_2)\ (\sigma(i) = \nu^{-1}(i))\}$.

<u>Et la bijection</u> σ <u>ainsi construite, satisfait bien à l'énoncé de la proposition III.15.</u>

Le résultat suivant est dû à J. Fort (voir [4]).

<u>COROLLAIRE III.2.</u> : Soit A un anneau unitaire et soit M un A-module à gauche unitaire.

Soient $S = \bigoplus_{i \in I} S_i$ et $T = \bigoplus_{j \in J} T_j$ deux sommes directes de sous-modules co-irréductibles de M avec

$$S < M \text{ et } T < M .$$

<u>Alors</u> : Il existe une bijection $\sigma : I \to J$ telle que :

$$(\forall i \in I)\ (E(S_i) \simeq E(T_{\sigma(i)}))$$

($E(X)$ désignant l'enveloppe injective du module X).

<u>PROPOSITION III.16.</u> : (Théorème d'unicité des décompositions irréductibles réduites).

<u>Soit</u> M <u>un module et soit</u> N <u>un sous-module</u>.

<u>Soient</u> $N = \bigcap_{i \in I} X_i = \bigcap_{j \in J} Y_j$ <u>deux décompositions irréductibles réduites de</u> N <u>dans</u> M .

<u>Alors</u> : Il existe une bijection $\sigma : I \to J$.

<u>Démonstration</u> : Il résulte de la proposition III.14. que $\frac{M}{N}$ est extension essentielle de deux sommes directes de co-irréductibles de la forme

$$S = \bigoplus_{i \in I} S_i \text{ et } T = \bigoplus_{j \in J} T_j .$$

D'où le résultat d'après la proposition III.15.

Remarque : Si on se reporte à la démonstration de la proposition II.3., on voit qu'on peut choisir les S_i de manière que, pour tout $i \in I$, S_i soit isomorphe à un sous-module de $\frac{M}{X_i}$.

De même, on peut choisir les T_j de manière que, pour tout $j \in J$, T_j soit isomorphe à un sous-module de $\frac{M}{Y_j}$.

Nous pouvons donc préciser la proposition III.16. de la manière suivante :

PROPOSITION III.17. : Soit M un module, soit N un sous-module et soit

$N = \bigcap_{i\in I} X_i = \bigcap_{j\in J} Y_j$ deux décompositions irréductibles réduites de N

dans M.

Alors : Il existe une bijection $\sigma : I \to J$ telle que : pour tout $i \in I$, $\frac{M}{X_i}$ contienne un sous-module non nul isomorphe à un sous-module de $\frac{M}{Y_{\sigma(i)}}$.

Nous en déduisons :

COROLLAIRE III.3. : Soit A un anneau unitaire, soit M un A-module à gauche unitaire, soit N un sous-module de M et

$$N = \bigcap_{i\in I} X_i = \bigcap_{j\in J} Y_j$$

deux décompositions irréductibles réduites de N dans M.

Alors : Il existe une bijection $\sigma : I \to J$ telle que :

$$(\forall i \in I)\ (E(\frac{M}{X_i}) \simeq E(\frac{M}{Y_{\sigma(i)}}))$$

J.Fort pose dans [4] la question suivante :

Deux décompositions irréductibles sans élément superflu d'un même sous-module N d'un certain module M ont-elles nécessairement la même longueur ?

Nous allons montrer que la réponse est négative.

EXEMPLE III.3. : Soit $\mathbb{R}$ le corps des réels.

Posons $M = \prod_{n=1}^{+\infty} E_n$ avec $E_n = \mathbb{R}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

M est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel, donc un $\mathbb{R}$-module libre, de dimension infinie.

RESULTAT 1. : La dimension de M est strictement supérieure au cardinal de $\mathbb{N}$.

Démonstration : Supposons, par l'absurde, qu'il existe une base dénombrable de M soit $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$.

Posons : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $x_n = (\alpha_{n,i})_{i=1}^{+\infty}$ $(\alpha_{P,Q} \in \mathbb{R})$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\Pi_n : M \to \mathbb{R}^n$ l'application linéaire définie par :

$$\Pi_n(\delta_1, \dots, \delta_n, \dots) = (\delta_1, \dots, \delta_n).$$

Nous allons montrer qu'il existe $y = (\beta_1, \dots, \beta_n, \dots) \in M$ tel que :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Pi_n(y)$ ne puisse pas s'exprimer comme une combinaison linéaire de $n-1$ des $\Pi_n(x_i)$.

Nous allons construire la suite (β_n) par récurrence sur n. Prenons, par exemple, $\beta_1 = 1$. La propriété est évidente pour $n = 1$. Supposons choisis $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$.

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble de toutes les parties $\{i_1, \dots, i_{n-1}\}$ à $n-1$ éléments distincts de $\mathbb{N}^*$ telles que :

$(\beta_1, \dots, \beta_{n-1})$ soit combinaison linéaire de $\Pi_{n-1}(x_{i_1}), \dots, \Pi_{n-1}(x_{i_{n-1}})$ dans $\mathbb{R}^{n-1}$.

Si $\mathcal{E}$ est vide, nous prenons β_n d'une manière arbitraire. Et il est clair que $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ ne peut pas s'exprimer comme une combinaison linéaire de $n-1$ des $\Pi_n(x_i)$.

<u>Si</u> $\mathcal{E}$ <u>n'est pas vide</u>, $\mathcal{E}$ est fini ou dénombrable.

Posons $y_{n-1} = (\beta_1,\dots,\beta_{n-1})$.

Soit $\{i_1,\dots,i_{n-1}\} \in \mathcal{E}$.

Il existe $\lambda_{i_1},\dots,\lambda_{i_{n-1}} \in \mathbb{R}$ tels que :

$$y_{n-1} = \lambda_{i_1}\,\Pi_{n-1}(x_{i_1})+\dots+\lambda_{i_{n-1}}\,\Pi_{n-1}(x_{i_{n-1}}) \qquad (1)$$

$\Pi_{n-1}(x_{i_1}),\dots,\Pi_{n-1}(x_{i_{n-1}})$ forment une base de $\mathbb{R}^{n-1}$, sinon on pourrait exprimer y_{n-1} en fonction de $n-2$ d'entre eux.

Par suite, les réels $\lambda_{i_1},\dots,\lambda_{i_{n-1}}$ qui vérifient (1) sont déterminés de manière unique par le choix de l'élément $\{i_1,\dots,i_{n-1}\}$ de $\mathcal{E}$.

Soit $\mathcal{E}'$ l'ensemble de tous les nombres réels de la forme :

$\lambda_{i_1}\,\alpha_{i_1,n}+\dots+\lambda_{i_{n-1}}\,\alpha_{i_{n-1},n}$ lorsque $\{i_1,\dots,i_{n-1}\}$ décrit $\mathcal{E}$.

$\mathcal{E}'$ est fini ou dénombrable. <u>Prenons $\beta_n \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{E}'$.</u>

Vérifions que $y_n = (\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)$ ne peut pas s'exprimer comme une combinaison de $n-1$ des $\Pi_n(x_i)$.

Supposons :

$$y_n = \lambda_{i_1}\,\Pi_n(x_{i_1})+\dots+\lambda_{i_{n-1}}\,\Pi_n(x_{i_{n-1}}) .$$

Alors :

$$y_{n-1} = \lambda_{i_1}\,\Pi_{n-1}(x_{i_1})+\dots+\lambda_{i_{n-1}}\,\Pi_{n-1}(x_{i_{n-1}}) .$$

Alors :

$$\beta_n = \lambda_{i_1}\,\alpha_{i_1,n}+\dots+\lambda_{i_{n-1}}\,\alpha_{i_{n-1},n} \in \mathcal{E}' . \text{ Contradiction.}$$

Puisque $\mathfrak{B}$ est une base de M, y peut s'écrire :

$$y = \mu_{i_1} x_{i_1} + \dots + \mu_{i_k} x_{i_k}$$

$$\Longrightarrow \Pi_{k+1}(y) = \mu_{i_1} \Pi_{k+1}(x_{i_1}) + \dots + \mu_{i_k} \Pi_{k+1}(x_{i_k}) .$$

Ceci est impossible étant donné le choix de y.

<u>Par suite, il n'existe pas de base dénombrable de</u> M.

<u>RESULTAT 2.</u> : 0 admet dans M deux décompositions irréductibles sans élément superflu, de longueurs distinctes.

<u>Démonstration</u> : Soit $\mathfrak{B} = (b_i)_{i \in I}$ une base de M.

D'après le résultat 1 :

$$\underline{\text{Card } I \underset{\neq}{>} \text{Card } \mathbb{N}}$$

Nous avons $M = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{R}\, b_i \qquad (1)$

La théorie générale montre que, puisque les $\mathbb{R}\, b_i$ sont co-irréductibles, 0 admet dans M une décomposition irréductible réduite de la forme

$$\underline{0 = \bigcap_{i \in I} X_i} \qquad (2)$$

D'autre part, soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, y_n le sous-espace de M constitué par tous les éléments dont la nième composante est nulle.

y_n est maximal dans M, donc irréductible et nous avons :

$$\underline{0 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} y_n} \qquad (3)$$

La décomposition (3) est sans élément superflu.

Les décompositions (2) et (3) n'ont pas même longueur. D'où le résultat.

Remarque : Soit $\varphi : M \xrightarrow{\subset} \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{M}{y_n} \supseteq \bigoplus_{n=1}^{+\infty} \frac{M}{y_n} = S$ le monomorphisme canonique.

Il est clair que $\varphi^{-1}(S) = \bigoplus_{n=1}^{+\infty} E_n$.

Donc $\varphi^{-1}(S)$ n'est pas essentiel dans M et la décomposition (3) n'est pas réduite au sens du paragraphe I.

4) APPLICATION AUX DECOMPOSITIONS COMPLETEMENT IRREDUCTIBLES REDUITES :

Comme dans le 3), nous sommes amenés à distinguer la notion de décomposition complètement irréductible réduite de la notion plus faible de décomposition complètement irréductible sans élément superflu.

Leur étude se fait à l'aide de la famille de décomposition C_S de tous les modules simples.

Il est immédiat que la somme directe $K = \bigoplus_{i \in I} K_i$ sera C_S-réduite si et seulement si tous les K_i sont simples.

Rappelons que, étant donné un module M et un sous-module propre X, X est complètement irréductible dans M si et seulement si $\frac{M}{X}$ est extension essentielle d'un sous-module simple.

Il en résulte, compte tenu du fait que ce sont des cas particuliers de décompositions irréductibles, que :

Les décompositions complètement irréductibles réduites ne sont autres que les C_S-décompositions qui ne sont autres que les C_S-décompositions fortement réduites.

Les décompositions complètement irréductibles sans élément superflu ne sont autres que les C_S-décompositions faibles.

Les résultats du paragraphe II nous permettent alors d'énoncer :

PROPOSITION III.18. : *Soit* M *un module et soit* N *un sous-module propre. Les propriétés suivantes sont équivalentes* :

i) N admet une décomposition complètement irréductible réduite dans M.

ii) $\frac{M}{N}$ est extension essentielle de son socle.

iii) $\frac{M}{N}$ est riche en sous-modules simples.

iv) N admet une décomposition complètement irréductible sans élément superflu dans tout sous-module X de M tel que $X \underset{\neq}{\supset} N$.

PROPOSITION III.19. : *Soit* M *un module. Les propriétés suivantes sont équivalentes* :

i) Tout sous-module propre N de M admet une décomposition complètement irréductible sans élément superflu dans M.

ii) Tout quotient $\frac{M}{N}$ de M est riche en sous-modules simples.

Nous savons que ii) $\Longleftrightarrow$ M est semi-artinien. D'où le résultat, dû à J. Ravel [6].

COROLLAIRE : Pour que tout sous-module propre N d'un module M admette une décomposition complètement irréductible sans élément superflu dans M, il faut et il suffit que M soit semi-artinien.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. BOURBAKI, Algèbre non commutative, chapitre II (Algèbre linéaire).

[2] G. CAUCHON, Séminaire Lesieur-Renault. Exposé du 12 Mars 1973.

[3] J. FISHER, Decomposition theories for modules. Trans Amer Math. Soc. 1969. Tome 145, pp. 241-269.

[4] J. FORT, Sommes directes de sous-modules co-irréductibles d'un module. Séminaire Dubreil-Pisot, Algèbre et Théorie des Nombres, 1966-1967, fasc. 1, exp. n° 3.

[5] L. LESIEUR et R. CROISOT, Algèbre noethérienne non commutative. Mémorial des Sciences Mathématiques, 1963, fasc. CLIV.

[6] J. RAVEL, Sous-modules polyédraux d'un module. Séminaire Lesieur-Renault, Algèbre non commutative, n° 21, 1972, exp. N° 14.

-:-:-:-:-:-:-

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence nº 14 du 26 Mars 1973

-:-:-:-:-

CATEGORIES ABELIENNES AVEC OBJETS PRINCIPAUX

par Mme Elena WEXLER-KREINDLER

-:-:-:-:-:-

L'objet de ce qui suit est de reprendre dans le langage de la théorie des catégories abéliennes quelques résultats connus dans la théorie des modules sur les anneaux principaux, notamment le théorème concernant les sous-modules des modules libres sur des anneaux principaux (à gauche), ainsi que le théorème sur les facteurs invariants d'un sous-module de type fini d'un module libre sur un anneau principal (non commutatif (v., [1], [3], [5]).

Nous remarquons d'abord que le théorème des facteurs invariants est démontré généralement en supposant le module initial de rang fini et en utilisant les transformations élémentaires sur des matrices à coefficients dans un anneau principal. Dans [8] l'auteur de cette note a réussi à adapter au cas non commutatif une démonstration "quasi-nonatomistique", analogue à celle du cas commutatif [1]. Ceci permet de retrouver ce résultat dans une catégorie abélienne ([6], [7]). Pour qu'une telle transcription soit possible on suppose l'existence d'un objet dans la catégorie abélienne $\mathcal{C}$, dont les propriétés catégoriales ressemble à celles possédées par le A-module à gauche A_S, sous-jâcent à l'anneau principal A.

1. DEFINITIONS ET RESULTATS PREALABLES.

Par la suite toutes les catégories rencontrées seront supposées abéliennes. Pour les questions sur les catégories abéliennes nous renvoyons le lecteur à [2] et [4].

DEFINITION 1. : L'objet P non nul de la catégorie abélienne $\mathcal{C}$ est *principal* si et seulement si les conditions suivantes sont remplies :

a) Quel que soit $\varphi \in \mathrm{Hom}(P,P)$, $\varphi \neq 0$, φ est un monomorphisme ;
b) Quel que soit le monomorphisme $\xi \in \mathrm{Hom}(X,P)$, $\mathrm{Hom}(P,X)$ contient au moins un épimorphisme η.

Evidemment, si $X \neq 0$, l'épimorphisme η est un isomorphisme. Les résultats suivants sont des conséquences immédiates des définitions.

1. Un objet principal est indécomposable en somme directe.

2. Si P est un objet principal et Q un projectif, alors tout épimorphisme $P \to Q$ est un isomorphisme.

3. Tout morphisme non nul $P_1 \to P_2$, où P_1, P_2 sont principaux et P_2 projectif est un monomorphisme. De plus P_1 et P_2 sont isomorphes.

En particulier, si $\mathcal{C}$ possède un générateur principal U, tous les principaux projectifs sont isomorphes à U.

4. Si un objet principal P est injectif, alors $\mathrm{Hom}(P,P)$ est un corps.

A chaque sous-objet non nul (X,α) de l'objet principal P, on associe l'idéal principal à droite de l'anneau $\mathcal{R} = \mathrm{Hom}(P,P)$, engendré par $\alpha' = \alpha\xi$, $\xi : P \to X$ étant l'isomorphisme qui prolonge $\alpha : X \to P$. Cet idéal ne dépend pas du choix de (X,α) et on peut prendre tout aussi bien (P,α') comme représentant de ce sous-objet. Si au sous-objet nul de P on associe l'idéal nul de $\mathcal{R}$, on obtient une correspondance bijective entre l'ensemble des idéaux principaux à droite de $\mathcal{R}$ et la classe des sous-objets de P, qui conserve l'ordre, puisque $(P,\alpha) \subset (P,\beta)$ implique l'existence de $\xi : P \to P$, tel que $\alpha = \beta\xi$ et réciproquement, ξ étant inversible dans $\mathcal{R}$ si et seulement si $(P,\alpha) = (P,\beta)$. De plus si $(P,\gamma) = \sup\{(P,\alpha),(P,\beta)\}$, $(P,\delta) = \inf\{(P,\alpha), (P,\beta)\}$ alors $\delta\mathcal{R} \subseteq \alpha\mathcal{R} \subseteq \gamma\mathcal{R}$ $\delta\mathcal{R} \subseteq \beta\mathcal{R} \subseteq \gamma\mathcal{R}$. Ceci donne le résultat suivant.

PROPOSITION 1. : L'ensemble $\mathcal{P}$ des idéaux principaux à droite de $Hom(P,P)$ où P est un objet principal, est un treillis isomorphe au treillis des sous-objets de P.

On remarque toutefois qu'il est possible (conjecture) que $\mathcal{P}$ ne soit pas un sous-treillis du treillis de tous les idéaux à droite de $Hom(P,P)$, ce qui est le cas où $Hom(P,P)$ est un anneau de Bézout. On obtient néanmoins le résultat suivant.

PROPOSITION 2. : Pour un objet principal les propositions suivantes sont équivalentes :

i) P est co-irréductible ;

ii) $Hom(P,P)$ est un anneau d'Ore à droite.

En effet, si α,β sont deux morphismes non nuls de $Hom(P,P)$, $(P,\gamma) = (P,\alpha) \cap (P,\beta)$, $\gamma = \alpha\alpha' = \beta\beta'$, on a $\gamma \neq 0$ si et seulement si $\alpha\alpha' = \beta\beta' \neq 0$, et on a l'équivalence.

PROPOSITION 3. : Soit I l'enveloppe injective d'un objet P projectif co-irréductible principal. Alors $Hom(I,I)$ est un corps.

On remarque d'abord que si I est un injectif et si tout morphisme non nul $\alpha : I \to I$ est un monomorphisme, alors $Hom(I,I)$ est un corps. D'autre part, si P est un objet principal co-irréductible, tout monomorphisme non nul $X \to P$ est essentiel.

Ceci dit, nous allons montrer que si $\mu : P \to E$ est une extension essentielle de l'objet principal projectif co-irréductible P, alors tout morphisme non nul $\xi \in Hom(E,E)$ est un monomorphisme, ce qui prouve l'assertion. Posons $\bar{\bar{\xi}} : E \to Im\,\xi$ l'épimorphisme canonique $\xi = \xi_1\bar{\bar{\xi}}$. Puisque $P \cap Im\,\xi \neq 0$, il existe $\gamma : P \to Im\,\xi$, qui prolonge le monomorphisme $Im\,\xi \cap P \to Im\,\xi$. P étant projectif, il existe μ_1, $\gamma = \bar{\bar{\xi}}\mu_1$, $Ker\,\mu_1 = 0$. μ étant essentiel, $(P,\mu) \cap (P,\mu_1) = (P,\bar{\bar{\mu}}) \neq 0$, $\bar{\bar{\mu}} = \mu\nu = \mu_1\nu_1$ et puisque ν est essentiel, $\bar{\bar{\mu}}$ l'est aussi. D'autre part $\gamma\nu_1 = \bar{\bar{\xi}}\mu_1\nu_1 = \bar{\bar{\xi}}\mu\nu$ est un monomorphisme, ce qui implique $\bar{\bar{\xi}}$ monomorphisme et $Ker\,\xi = 0$.

2. <u>OBJETS LIBRES PAR RAPPORT A UN OBJET PRINCIPAL.</u>

Désormais on supposera dans $\mathcal{C}$ l'existence des sommes directes infinies (axiome Ab 3).

<u>DEFINITION 2.</u> : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne et soit P un objet principal de $\mathcal{C}$. Nous appellerons l'objet A de $\mathcal{C}$ <u>P-libre</u> si et seulement si $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, $A_i \simeq P$. A est de <u>rang défini</u> n par rapport à P si et seulement si $A = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$, $A_i \simeq P$ et si toute autre telle décomposition a n termes.

Il est immédiat que si $A = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i(\alpha_i)$, $A_i \simeq P$ et $\alpha \in \mathrm{Hom}(A,P)$, alors $\mathrm{Im}\,\alpha = \bigcup_{i}^{n} \mathrm{Im}(\alpha\alpha_i)$, $\alpha_i : A_i \to A$ étant les injections canoniques.

Le résultat suivant donne des conditions pour qu'un objet P-libre soit de rang défini par rapport à P.

<u>PROPOSITION 4.</u> : <u>Soit</u> P <u>un objet principal projectif co-irréductible de la catégorie</u> $\mathcal{C}$ <u>abélienne avec enveloppes injectives. Si</u> $A = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$, $A_i \simeq P$, <u>alors</u> A <u>est de rang défini</u> n <u>par rapport à</u> P.

En effet, si $A = \bigoplus_{j=1}^{m} B_j$, $B_j \simeq P$, alors $E(A) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} E(A_i) \simeq \bigoplus_{j=1}^{m} E(B_j)$, où par $E(X)$ on désigne l'enveloppe injective de X. P étant co-irréductible, $E(P)$ est indécomposable et $\mathrm{Hom}(E(P), E(P))$ est un corps (proposition 3). Le lemme suivant (v. [2]) permet de déduire successivement $n \leqslant m$ et $m \leqslant n$.

<u>LEMME</u> : Soit $M = M_1 \oplus M_2$ (i_1,i_2) (p_1,p_2) étant les injections, resp. les projections canoniques. Si $\alpha : P \to M$ est un monomorphisme tel que $p_1\alpha : P \to M_1$ est un isomorphisme, alors $M = P \oplus M_2$ $(i_1p_1\alpha,\ i_2)((p_1\alpha)^{-1}p_1, p_2)$.

<u>Application du lemme</u> : $\alpha_i : E(A_i) \to E(A)$, $\Pi_i : E(A) \to E(A_i)$ étant les injections et les projections canoniques on a $\beta_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Pi_i \beta_1 \neq 0$; $\beta_1 : E(B_1) \to E(A)$. Alors il existe i_1 tel que $\Pi_{i_1}\beta_1 \neq 0$. D'autre part,

les morphismes non nuls de $\mathrm{Hom}(E(B_1), E(A_{i_1}))$ étant des isomorphismes, $\Pi_{i_1}\beta_1$ en est un et par le lemme $E(A) \cong E(B_1) \oplus (\bigoplus_{i \neq i_1} E(A_i))$, ce qui par récurrence donne $m \leqslant n$.

Dans ce qui suit on va supposer $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne avec générateurs et satisfaisant à l'axiome Ab 5. On obtient alors des résultats connus pour les modules libres sur des anneaux principaux.

<u>THEOREME 1.</u> : <u>Soit</u> A <u>une somme directe de projectifs principaux. Quel que soit</u> M <u>un sous-objet non nul de</u> A, M <u>est somme directe de projectifs principaux.</u>

En particulier tout sous-objet non nul d'un objet P-libre est un objet P-libre si P est un projectif principal.

<u>Preuve</u> : On suppose I totalement ordonné, $A = \bigoplus_{i \in I} A_i(\alpha_i)$ et on pose pour chaque $i \in I$: $B_i = \bigoplus_{j \leqslant i} A_i$, $M_i = M \cap B_i$, $\mu_i : M_i \to M$, $\mu : M \to A$, $\bar{\beta}_i : M_i \to B_i$, $\beta_i : B_i \to A$ les injections canoniques et $\Pi_i : A \to A_i$ les projections canoniques.

Soit $(N_i, \nu_i) = \mathrm{Ker}(\Pi_i \mu\mu_i)$, $\Pi_i\mu\mu_i = \Pi_i\beta_i\bar{\beta}_i$ et soit $(C_i, \gamma_i) = \mathrm{Im}(\Pi_i\mu\mu_i)$, qui est un sous-objet de A_i. Puisque A_i est principal, si $C_i \neq 0$ $(\Pi_i\mu\mu_i \neq 0)$, C_i est isomorphe à A_i. A_i étant projectif, on déduit :

(1) $$M_i = N_i \oplus C_i(\nu_i, \delta_i) .$$

On désigne par $L = \{\ell \in I \mid \mathrm{Im}(\Pi_\ell\mu\mu_\ell) \neq 0\}$. Alors

(2) $$M_\ell = N_\ell \oplus C_\ell, \ (\forall \ell \in L) .$$

Pour prouver le théorème, il est suffisant de montrer que :

(3) $$M = \bigoplus_{\ell \in L} C_\ell\,(\mu_\ell\delta_\ell) .$$

A cette fin on pose pour chaque $i \in I$, $\bar{M}_i = \bigoplus_{\substack{\ell < i \\ \ell \in L}} C_\ell$ et on montre, par récurrence sur i, $\bar{M}_i = M_i (\forall i \in I)$. S'il en est ainsi, par l'axiome Ab 5, on déduit :

$$M = M \cap A = M \cap (\sup B_i) = \sup_{i \in I} M_i = \sup_{i \in I} \overline{M}_i = \bigoplus_{\ell \in L} C_\ell \ .$$

$B_1 = A_1$, $M_1 = M \cap A_1 \subset A_1$ et si $M_1 \neq 0$, $M_1 \simeq A_1$, $\Pi_1 \mu \mu_1$ est un monomorphisme, $C_1 \simeq M_1$, $N_1 = 0$. Si $N_1 = 0$ on a $C_1 = 0$ de même que $M_1 = 0$.

Supposons que pour chaque $j < i$ on ait $\overline{M}_j = M_j$. On montre successivement :

1) $\sup_{j<i} M_j = M \cap (\bigoplus_{j<i} A_j)$ (car $\sup_{j<i} B_j = \bigoplus_{j<i} A_j$) ;

2) $N_i \subset \bigoplus_{j<i} A_j$. On a le diagramme commutatif :

$$(4) \qquad \begin{tikzcd}
 & & N_i \arrow[ddll, dashed] \arrow[d, "\nu_i"] & & \\
 & & M_i \arrow[dl, "\overline{\beta}_i"'] \arrow[dr, "\mu_i"] \arrow[drr] & & \\
\bigoplus_{j<i} A_j \arrow[r, "\overline{\alpha}_i"] \arrow[ddrr, "0"'] & B_i \arrow[dr, "\beta_i"] \arrow[ddr, "\overline{\Pi}_i"] & & M \arrow[dl, "\mu"] & C_i \\
 & A_i \arrow[u, "\alpha_i"'] \arrow[dr, "1_{A_i}"] & A \arrow[d, "\Pi_i"] & & \\
 & & A_i \arrow[uurr, "\gamma_i"'] & &
\end{tikzcd}$$

$\overline{\Pi}_i : B_i \to A_i$ est la projection canonique, $\alpha_i : A_i \to B_i$, $\overline{\alpha}_i : \bigoplus_{j<i} A_j \to B_i$ étant les injections canoniques. Puisque $\Pi_i \beta_i \overline{\beta}_i \nu_i = 0$ $\overline{\Pi}_i \overline{\beta}_i \nu_i$ et $\operatorname{Ker} \overline{\Pi}_i = \overline{\alpha}_i$, il existe un monomorphisme $N_i \to \bigoplus_{j<i} A_j$.

3) $N_i \subset \sup_{j<i} M_j$, évidemment.

4) $\sup_{j<i} M_j \subset N_i$. Pour $j < i$ il existe $\lambda_j : M_j \to M_i$ et l'injection

canonique $B_j \to B_i$ (qui se factorise $\bar{\alpha}_i\beta_{ij}$, $\beta_{ij}: B_j \to \bigoplus\limits_{k<i} A_k$) telle que le diagramme suivant soit commutatif :

(5)
$$\begin{tikzcd}
& & M_j \arrow[ddll, "\bar\beta_j"'] \arrow[d] \arrow[ddr, "\mu_j"] & \\
& & M_i \arrow[dl, "\bar\beta_i"'] \arrow[dr, "\mu_i"] & \\
B_j \arrow[r, "\bar\alpha_i\beta_{ij}"] \arrow[drr, "\beta_j"'] & B_i \arrow[dr, "\beta_i"] & & M \arrow[dl, "\mu"] \\
& & A \arrow[d, "\Pi_i"] & \\
& & A_i &
\end{tikzcd}$$

En tenant compte du diagramme (4) on déduit $\Pi_i\mu\mu_i\lambda_j = 0$, ce qui implique $M_j \subset N_i$, car $\mathrm{Ker}(\Pi_i\mu\mu_i) = (N_i, \nu_i)$. Alors $\sup\limits_{j<i} M_j \subset N_i$.

De 3) et 4), on obtient

$$N_i = \sup_{j<i} M_j = \sup_{j<i} \bar{M}_j = \sup_{j<i} \Big(\bigoplus_{\substack{\ell \leqslant j \\ \ell \in L}} C_\ell \Big) = \bigoplus_{\substack{\ell < i \\ \ell \in L}} C_\ell .$$

Lorsque $i \in L$ (2) donne $M_i = \bigoplus\limits_{\substack{\ell \leqslant i \\ \ell \in L}} C_\ell$ et lorsque $i \notin L$, $C_i = 0$, ce qui donne $\mathrm{Ker}\, \Pi_i\mu\mu_i = M_i = N_i = \bigoplus\limits_{\substack{\ell \leqslant i \\ \ell \in L}} C_\ell$ et le théorème est complètement démontré.

<u>Remarque</u> : Soit, dans les conditions du théorème, un objet projectif P de la catégorie $\mathcal{C}$, tel que tout sous-objet de P soit P-libre. Si A est un objet P-libre, tout sous-objet de A est P-libre.

La démonstration suit le même schéma que pour le théorème 1 et on retrouve le théorème vrai pour une catégorie de A-modules, A étant un anneau dont tous les idéaux à gauche sont libres en tant que A-modules à gauche (v. [3]).

3. FAMILLES LIBRES DE SOUS-OBJETS. THEOREME DES FACTEURS INVARIANTS.

DEFINITION 3. : Nous dirons que la famille de sous-objets de A, $(A_i, \alpha_i)_{i \in I}$ est libre dans A si et seulement si le morphisme canonique $\bigoplus_{i \in I} A_i \to A$ est un monomorphisme. Dans le cas contraire la famille (A_i, α_i) sera dite liée dans A.

Dans une catégorie abélienne avec générateurs et satisfaisant l'axiome Ab 5 les propositions suivantes sont équivalentes pour la famille $(X_i)_{i \in I}$ de sous-objets de X :

i) $\bigoplus_{i \in I} X_i \to X$ est un isomorphisme ;

ii) $\sup_{i \in I} X_i = X$;

iii) $X_{i_0} \cap (\sup_{i \neq i_0} X_i) = 0$.

On déduit, dans les mêmes conditions, les résultats suivants (v. [9]) :

LEMME 1. : La famille de sous-objets (A_i, α_i) est libre dans A si et seulement si toute partie finie est libre dans A.

LEMME 2. : Soit $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ et soit $\mu : M \to A$ un monomorphisme non nul. Il existe une partie finie $N \subset I$ telle que $\{(M, \mu), (A_i, \alpha_i)_{i \in I}$ soit libre et $M \cap A_N \neq 0$, $A_N = \bigoplus_{i \in N} A_i$.

Nous allons supposer, sauf mention contraire, $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne avec générateurs et satisfaisant l'axiome Ab 5. Pour l'objet principal P de $\mathcal{C}$ nous allons supposer en plus, que $\mathcal{R} = \mathrm{Hom}(P, P)$ soit un anneau principal (à gauche et à droite).

Nous rappelons (v. [5]), qu'étant donné un anneau $\mathcal{R}$ principal, tout élément non nul et non inversible de $\mathcal{R}$ admet une décomposition :

$$a = b_1 \dots b_m$$

où b_i sont irréductibles (ils sont non inversibles et n'admettent pas de facteurs distincts d'eux-mêmes et d'éléments inversibles). Pour toute autre telle décomposition $a = c_1 \dots c_n$, on a $m = n$ et il y a une bijection Π, telle que $\mathcal{R}/b_i\mathcal{R} \simeq \mathcal{R}/c_{\Pi(i)}\mathcal{R}$, de même pour les idéaux à gauche. Le nombre n s'appelle la <u>longueur</u> de a et nous allons le désigner par $\ell(a)$. Lorsque $\mathcal{R}a \cup \mathcal{R}b = \mathcal{R}h$, $a\mathcal{R} \cup b\mathcal{R} = g\mathcal{R}$, alors $\ell(a) = \ell(h)$ si et seulement si $\mathcal{R}a \subseteq \mathcal{R}b$ et $\ell(a) = \ell(g)$ si et seulement si $a\mathcal{R} \subseteq b\mathcal{R}$.

<u>PROPOSITION 5.</u> : <u>Soit</u> P <u>un objet principal de</u> $\mathcal{C}$ <u>tel que</u> $\mathcal{R} = \mathrm{Hom}(P,P)$ <u>soit un anneau principal et soit</u> $\mu : P \to A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ <u>un monomorphisme. Il existe alors une partie finie</u> $N \subset I$ <u>telle que</u> $P \subset A_N$, <u>à savoir</u> $(P,\mu) \cap (A_N,\alpha_N) = (P,\mu)$, <u>où</u> $A_N = \bigoplus_{i \in N} A_i$.

Soit $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(I)$ l'ensemble des parties finies $N \subset I$, telles que $A_N \cap P \neq 0$. C'est une famille non vide et filtrante. Pour $N \in \mathcal{N}$, $A_N \cap P \subset P$, $(A_N,\alpha_N) \cap (P,\mu) = (P,\mu\bar{\mu})$, où $\bar{\mu} : A_N \cap P \to P$ est l'injection canonique. Si $\bar{\mu}$ est un isomorphisme, $P \hookrightarrow A_N$. Si $\bar{\mu}$ n'est pas un isomorphisme pour aucun $N \in \mathcal{N}$ on déduit que $P \cap A_N$ n'est pas le même pour tous les $N \in \mathcal{N}$, car $P \cap (\sup A_N) = \sup(P \cap A_N) = (P,\mu)$. Soit $N_1 \supset N$, tel que :

$$(P,\mu\bar{\mu}) = (A_N,\alpha_N) \cap (P,\mu) \neq (A_{N_1},\alpha_{N_1}) \cap (P,\mu) = P,\mu\bar{\mu}_1) .$$

Alors $\mu = \bar{\mu}_1\nu_1$, où ν_1 n'est pas inversible. En utilisant les décompositions des éléments de $\mathcal{R}$ en produits d'éléments irréductibles, on déduit l'existence d'un $N_0 \in \mathcal{N}$, pour lequel $(A_{N_0},\alpha_{N_0}) \cap (P,\mu) = (P,\mu\bar{\mu}_0)$, où $\bar{\mu}_0$ est un isomorphisme.

Si P est un objet principal de la catégorie $\mathcal{C}$, A un objet P-libre et $\mu : M \to A$ un monomorphisme, $M \simeq P$, à chaque morphisme $\varphi : A \to P$, $\varphi\mu \neq 0$ on associe le morphisme non nul $f \in \mathrm{Hom}(P,P)$, $f = \varphi\mu\xi$, $\xi : P \to M$ étant un isomorphisme. Bien que f ne soit pas unique, deux tels éléments ne diffèrent que par un facteur inversible de $\mathrm{Hom}(P,P)$ et leurs longueurs sont égales. Les résultats suivants fournissent un instrument commode pour démontrer le théorème 2.

Dans une catégorie abélienne $\mathcal{C}$ quelconque on obtient :

LEMME 3. : Soit P un objet principal tel que l'anneau $\mathcal{R} = \mathrm{Hom}(P,P)$ soit principal. Pour chaque monomorphisme $\mu : M \to A$ et chaque isomorphisme $\xi : P \to M$, l'ensemble $I\mu\xi \subset \mathcal{R}$ des morphismes $f = \varphi\mu\xi$, $\varphi \in \mathrm{Hom}(A,P)$ est un idéal à gauche de $\mathcal{R}$. Si φ_M est telle que, quels que soient $\varphi \in \mathrm{Hom}(A,P)$ et $\xi, \eta \in \mathcal{R}$ inversibles, on ait $\ell(f_M) \leqslant \ell(f)$, $f_M = \varphi_M\mu\xi$, $f = \varphi\mu\eta \neq 0$, alors pour chaque $\xi \in \mathcal{R}$ inversible, $I\mu\xi = \mathcal{R}f_M$.

En conservant les mêmes conditions imposées à P que dans le lemme précédent, on déduit lorsque $\mathcal{C}$ est une catégorie abélienne avec générateurs et satisfaisant l'axiome Ab 5 :

LEMME 4. : Soit A un objet P-libre, $M \subset A$ un sous-objet isomorphe à P. Alors l'idéal $I\mu\xi$ défini dans le lemme 3 est non nul et $\varphi_M \in \mathrm{Hom}(A,P)$ est un épimorphisme.

En effet, $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, $A_i \cong P$. Si $\mu : M \to A$ est un monomorphisme non nul, il y a une partie finie $N \subset I$, telle que $(M,\mu) \subset (A_N, \alpha_N)$, où $A_N = \bigoplus_{i \in N} A_i$, $\mu = \alpha_N\mu_N$, $\mu_N : M \hookrightarrow A_N$. $1_{A_N} = \sum_{k=1}^{u} \bar{\alpha}_{i_k}\bar{\Pi}_{i_k}$, où $N = \{i_1, \ldots, i_k\}$, ce qui donne $\mu = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{i_k}\bar{\Pi}_{i_k}\mu_N$, les $\bar{\alpha}_{i_k} : A_{i_k} \to A_N$, $\alpha_i : A_i \to A$ étant les injections et $\bar{\Pi}_{i_k} : A_N \to A_{i_k}$, $\Pi_i : A \to A_i$ les projections canoniques. Alors $\Pi_{i_k}\mu = \bar{\Pi}_{i_k}\mu_N$ et $\mu = (\sum_{k=1}^{n} \alpha_{i_k}\Pi_{i_k})\mu$. Soient $\xi : P \to M$, $\xi_i : P \to A_i$ des isomorphismes fixés. On a $f_k = \xi_{i_k}^{-1}\Pi_{i_k}\mu\xi \in I\mu\xi$ et $f_k = g_k f_M$, $f_M = \varphi_M\mu\xi$ (v. lemme 3). D'autre part $\varphi_M\alpha_{i_k}\xi_{i_k} \in \mathrm{Hom}(P,P)$ pour tout k et on trouve $\varphi_M(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{i_k}\xi_{i_k}g_k)f_M = f_M$, ce qui donne :

$$\varphi_M\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{i_k}\xi_{i_k}g_k\right) = 1_P, \tag{6}$$

car $\mathrm{Hom}(P,P)$ est intègre et par conséquent φ_M est un épimorphisme.

<u>THEOREME 2.</u> : <u>Soit</u> A <u>un objet P-libre de la catégorie</u> $\mathcal{C}$, <u>où</u> P <u>est un projectif principal tel que</u> $\mathrm{Hom}(P,P)$ <u>soit un anneau principal et soit</u> $M \hookrightarrow A$ <u>un sous-objet de</u> A <u>de rang fini par rapport à</u> P .

<u>Alors</u> :

1) <u>Il existe une décomposition</u> $A = \bigoplus\limits_{i \in I} E_i\ (\varepsilon_i)$, $E_i \simeq P$;

2) <u>Une partie finie</u> $N \subset I$, $\xi_k^* : P \to E_{i_k}$, $i_k \in N$ <u>des isomorphismes</u> ;

3) $f_1, \ldots, f_n \in \mathrm{Hom}(P,P)$ <u>non nuls, tels que</u> :

a) $\mathrm{Im}(\varepsilon_k \xi_k^* f_k) = (M_k, \tilde{\mu}_k) \subset (M, \mu)$;

b) <u>si</u> $\tilde{\mu}_k = \mu\mu_k$, $\mu_k : M_k \to M$, <u>alors</u> $M = \bigoplus\limits_{k=1}^{u} M_k(\mu_k)$;

c) <u>si</u> $\mu_k^* = \xi_k^* f_k \xi_k^{-1}$, <u>alors</u> $\tilde{\mu}_k = \varepsilon_k \mu_k^*$;

d) $\mathrm{Im}\, f_k \supseteq \mathrm{Im}\, f_{k+1}$, $f_k = h_k f_{k+1}$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

<u>De plus on a le diagramme commutatif</u> :

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[rr, "\xi_k^*"] & & E_{i_k} \arrow[dr, "\varepsilon_{i_k}"] & \\
P \arrow[ur, "f_k"] \arrow[rr, "\xi_k"'] & & M_k \arrow[ur, "\mu_k^*"] \arrow[rr, "\tilde{\mu}_k"] \arrow[dr, "\mu_k"'] & & A \\
 & & & M \arrow[ur, "\mu"'] &
\end{tikzcd} \tag{7}$$

La démonstration se fait par récurrence sur le rang de M . Si $n = 1$ la réponse est donnée par le lemme 4. φ_1 est l'épimorphisme désigné dans ce lemme par φ_M et $f_1 = \varphi_1 \mu \xi$. Par (6) soit ε_1^* tel que $\varphi_1 \varepsilon_1^* = 1_P$, $\varepsilon_1 = \mathrm{Im}\ \varepsilon_1^*$, $\varepsilon_1^* = \varepsilon_1 \xi_1^*$, $\mu_1 = \xi_1^* f_1 \xi^{-1}$, $\mu = \varepsilon_1 \mu_1$. Alors $A = N_1 \oplus E_1(\nu_1, \varepsilon_1)$, où $N_1 = \mathrm{Ker}\ \varphi_1$, puisque P est projectif. N_1 étant P-libre, $A = \bigoplus\limits_{i \in I} E_i(\varepsilon_i)$.

On suppose le théorème vrai pour tout sous-objet de rang $\leqslant n-1$ et soit (M, μ) un sous-objet de A de rang n . A chaque morphisme $\varphi : A \to P$, Im $\varphi\mu = (P_1, \psi) \neq 0$ on associe $f = \psi\xi$, où $\xi : P \to P_1$ est un isomorphisme, Im $\varphi\mu$ = Im f. Bien que le choix de f ne soit pas unique, la longueur de f dans $\mathcal{R} = \mathrm{Hom}(P,P)$ est la même. Soit $\varphi_1 \in \mathrm{Hom}(A,P)$ tel que $\mathrm{Im}(\varphi_1\mu) \neq 0$ et $(\forall\, \varphi \in \mathrm{Hom}(A,P))$, on ait $\ell(f_1) \leqslant \ell(f)$, Im f_1 = Im $\varphi_1\mu$, $f, f_1 \in \mathrm{Hom}(P,P)$, Im f = Im $\varphi\mu$.

Soient $\varphi_1\mu = \psi_1\zeta_1$ la factorisation canonique, $\mathrm{Im}(\varphi_1\mu) = (P_1, \psi_1)$, $\tilde{\xi}_1$ un isomorphisme $P \to P_1$, $f_1 = \psi_1\tilde{\xi}_1$, ζ_1^* tel que $\tilde{\xi}_1 = \zeta_1\zeta_1^*$ (P étant projectif), Im $\zeta_1^* = (M_1, \mu_1)$, $\zeta_1^* = \mu_1\xi_1$ et $\mu\mu_1 = \tilde{\mu}_1$. En appliquant à $(M_1, \mu_1) \subset A$ le raisonnement précédent, on déduit l'existence de $(E_1, \varepsilon_1) \subset A$, $\mu^*_1 : M_1 \to E_1$ $\tilde{\mu}_1 = \varepsilon_1\mu_1^* = \mu\mu_1$. D'autre part $M = M_1 \oplus N$, $A = E_1 \oplus A_1$, $N \subset A_1$ et par l'hypothèse de récurrence $M = \bigoplus_{k=1}^{n} M_k$, $A = \bigoplus_{i \in I} E_i(\varepsilon_i)$ et on vérifie sans difficulté (3), a,b,c) ainsi que la commutativité du diagramme (7) pour $k = 1,\ldots,n$.

Pour vérifier d) on considère $\varphi = \varphi_1 + \bar{\varphi}$, où $\bar{\varphi} = \xi^{*-1}\Pi_2$, $\Pi_2 : A \to E_2$ étant la projection canonique. Il est facile à voir que $\mathrm{Im}(\bar{\varphi}\mu)$ = Im f_2, Im $\varphi\mu = \bigcup_{k=1}^{n}$ Im $\varphi\mu\mu_k$ = Im $f_1 \cup$ Im f_2 = Im h. D'après le choix de φ_1 on déduit $\ell(h) = \ell(f_1)$, donc Im $f_1 \supset$ Im f_2. De manière analogue en posant $\mathcal{R}f_1 \cup \mathcal{R}f_2 = \mathcal{R}h$, $h = g_1f_1 + g_2f_2$, $\psi = g_1\varphi_1 + g_2\bar{\varphi}$ on déduit Im $\psi\mu$ = Im $f \supset$ Im h et $\ell(f) < \ell(h) < \ell(f_1)$ ce qui, par le choix de f_1 donne $\ell(h) = \ell(f_1)$, donc $\mathcal{R}h = \mathcal{R}f_1$ et $\mathcal{R}f_1 \supseteq \mathcal{R}f_2$. Le théorème est complètement démontré.

<u>Remarque</u> : Il serait intéressant de trouver des exemples d'objets principaux dont l'anneau Hom(P,P) ne soit pas un anneau principal (à gauche ou à droite).

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. BOURBAKI, Algèbre, Hermann, Paris 1959.

[2] I. BUCUR, A. DELEANU, Introduction to the theory of category and functors , Wiley and Sons, New York, 1968.

[3] P.M. COHN, Free rings and their relations, Academic Press, 1971.

[4] A. GROTHENDIECK, Sur quelques points d'algèbre homologique, Tôhoku Math. J., 1957, 9 , pp. 119-221.

[5] N. JACOBSON, Theory of rings, Math. Surveys, New York, 1943.

[6] E. KREINDLER, Sur les objets libres dans une catégorie abélienne avec objets principaux, C.R. Acad. Sci. Paris, 226, 1968, pp. 268-270.

[7] E. KREINDLER, Objets principaux dans les catégories abéliennes, Rev. Roum. Math. pures et appliquées, 13, .4, 1968, pp. 471-495.

[8] E. KREINDLER, Remarque sur le théorème des facteurs invariants, Bull. Math. Soc. Sc. Math. Roum., t. 11, 1967.

[9] E. KREINDLER, Remarque sur les familles libres de sous-objets, Rev. Roum. Math. pures et appliquées, 1969, pp. 367-370.

-:-:-:-:-:-:-:-

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

SEMINAIRE D'ALGEBRE NON COMMUTATIVE

Conférence n° 15 du 4 Avril 1973

-:-:-:-:-:-:-

ANNEAU DE GROUPES PRIMITIFS - ANNEAU DE GROUPES BIREGULIERS,

par G. RENAULT

-:-:-:-

I. ANNEAUX DE GROUPES PRIMITIFS.

Dans cette première partie, nous allons exposer l'article de Formanek et Snider [2].

PROPOSITION 1.1. : Soient G un groupe, k un corps. Il existe un groupe H contenant G tel que l'anneau de groupe $k[H]$ soit primitif.

On définit par récurrence une suite (G_i) de groupes, une suite (M_i) de modules de la façon suivante :

$$
\begin{array}{lll}
G_1 = G & ; & M_1 = k[G_1] \\
G_2 = \mathrm{Aut}_k\, M_1 & ; & M_2 = k[G_2] \oplus M_1 \\
\vdots & & \vdots \\
G_n = \mathrm{Aut}_k M_{n-1} & ; & M_n = K[G_n] \oplus M_{n-1} \\
\vdots & & \vdots
\end{array}
$$

Comme M_{n-1} est un $k[G_n]$-module, M_n est un $k[G_n]$-module. Les propriétés suivantes sont immédiates :

a) M_n est un $k[G_n]$-module fidèle.

b) M_n est un $k[G_{n+1}]$-module simple.

On pose :

$H = \bigcup G_n$; $M = \bigcup_n M_n$. Il résulte de ce qui précède que M est un $k[H]$-module simple et fidèle.

PROPOSITION 1.2. : *Soient k un corps, G un groupe localement fini dénombrable dont tout élément est d'ordre inversible dans k. Si $k[G]$ est un anneau premier, alors $k[G]$ est primitif.*

D'après le théorème de Masche, $k[G]$ est réunion dénombrable d'une suite croissante d'anneaux semi-simples ; l'assertion résulte alors du lemme suivant :

LEMME 1.3. : *Soit $R = \bigcup_i R_i$ un anneau premier qui est réunion d'une suite croissante d'anneaux semi-simples. Alors R est un anneau primitif.*

Soit $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ l'ensemble des idempotents centraux indécomposables des anneaux R_i . On notera que ces idempotents commutent deux à deux. On définit par récurrence une suite (R_{n_k}, f_k) , où f_k est un idempotent central indécomposable de R_{n_k} , vérifiant les propriétés suivantes :

a) $e_k \in R_{n_k}$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

b) $e_k f_k \neq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

c) $f_1 \times f_2 \times \dots \times f_k \neq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Supposons définis les k premiers termes de cette suite. Comme R est un anneau premier, il existe $r \in R$ tel que :

$$e_{k+1} r \, f_1 \times \dots \times f_k \neq 0 .$$

Soit n_{k+1} un entier tel que e_{k+1} et $r \in R_{n_{k+1}}$. Il existe un idempotent central indécomposable f_{k+1} de $R_{n_{k+1}}$ tel que l'on ait

$e_{k+1} r \, f_1 \times \dots \times f_k \times f_{k+1} \neq 0$.

Le couple $(R_{n_{k+1}}, f_{k+1})$ répond aux conditions imposées.

On désigne par I l'idéal à gauche engendré par les éléments $1-f_i$

1) <u>$I \neq R$</u>.

Sinon il existe une relation de la forme :

$$1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (1-f_i)$$

ce qui implique $f_1 \times \dots \times f_n = 0$, d'où la contradiction.

2) <u>Pour tout idéal bilatère</u> $B \neq 0$ <u>de</u> R <u>on a</u> $I+B = R$.

Soit e_i un idempotent central indécomposable qui appartient à B. La relation $e_i f_i \neq 0$, implique $f_i \in B$, d'où l'assertion.

Si M est un idéal à gauche maximal contenant I, d'après la propriété 2) M ne contient aucun idéal bilatère $\neq 0$ et R/M est un module simple et fidèle.

II. <u>ANNEAUX BIREGULIERS</u>.

<u>DEFINITION 2.1.</u> : On dit qu'un anneau A est <u>birégulier</u>, si pour tout élément x, l'idéal bilatère (x) est engendré par un idempotent central.

- Les anneaux biréguliers commutatifs sont les anneaux réguliers de Von Neumann.
- Le centre d'un anneau birégulier est un anneau régulier de Von Neumann.

<u>PROPOSITION 2.2.</u> : <u>Soit A un anneau semi-premier dont le centre Z est un anneau régulier. Les conditions suivantes sont équivalentes :</u>

(i) A <u>est un anneau birégulier.</u>

(ii) <u>Les idéaux premiers de</u> A <u>sont engendrés par les idéaux maximaux de</u> Z .

(i) $\Longrightarrow$ (ii) . Soit P un idéal premier de A ; $M = P \cap Z$ est un idéal premier, donc maximal de Z . Comme l'anneau quotient A/Am est quasi-simple, on a nécessairement $P = Am$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) . A étant semi-premier, pour tout élément x de A on a

$$(x) \cap \ell[(x)] = 0 \text{ .}$$

Supposons $I = (x) \oplus \ell[(x)] \neq A$. Il existe alors un idéal maximal m de Z tel que l'on ait $I \subset Am$ et l'on peut trouver $s \in Z-m$ tel que $sx = 0$. Ce qui implique que $s \in \ell[(x)]$, donc $s \in m$ et il y a contradiction.

On dit qu'un anneau est <u>quasi-commutatif</u>, si tout anneau quotient $\neq 0$ de A vérifie une identité polynomiale non triviale [4]. Le résultat qui suit a été établi par A.PAGE [4, Corollaire 2.14], nous en donnons une démonstration directe.

<u>PROPOSITION 2.3.</u> : <u>Un anneau birégulier quasi-commutatif</u> A <u>est un anneau régulier.</u>

Soient $x \in A$, m un idéal maximal du centre Z de A ; A/mA est un anneau quasi-simple, donc c'est un anneau de matrices. Il existe $a \in A$, h idempotent de $Z-m$ tel que :

$$h(x-xax) = 0 \text{ .}$$

Soit $I = \{h \in Z / \exists a \in A \quad h(x-xax)\} = 0$. I est un idéal de l'anneau de Boole B des idempotents de Z . En effet les relations

$$h(x-xax) = 0$$
$$h'(x-xbx) = 0$$

impliquent $(h+h'-hh')\,[x-x(ha+(1-h)b)x] = 0$.

D'après ce qui précède I n'est contenu dans aucun idéal maximal de B donc $I = B$ et $1 \in I$.

Nous montrerons dans le paragraphe III, qu'un anneau régulier quasi-commutatif n'est pas toujours birégulier.

Nous allons déterminer les anneaux réguliers auto-injectifs à droite de type I ou II qui sont biréguliers.

Pour les notions introduites, on pourra se reporter à [5].

LEMME 2.4. : *Soit A un anneau régulier auto-injectif à droite qui est un anneau birégulier. Si A contient un idempotent fini fidèle, alors A est un anneau fini.*

C'est une conséquence facile de la proposition 5.1. de [5].

Il résulte de ce lemme que les anneaux biréguliers de type I ou II sont finis.

LEMME 2.5. : *Soit A un anneau régulier auto-injectif à droite et fini tel que $A = \prod_i M_{n_i}(B_i)$ où les entiers n_i ne sont pas bornés. Alors A n'est pas birégulier.*

A l'aide de ce lemme, on obtient le résultat suivant :

PROPOSITION 2.6. :

a) *Un anneau birégulier de type I est isomorphe à un anneau produit $\prod_{i=1}^{k} M_{n_i}(A_i)$, où A_i est un anneau régulier réduit auto-injectif.*

b) *Un anneau birégulier de type II est un produit fini de facteurs de type II fini.*

Problème : Déterminer les anneaux biréguliers de type III.

III. ANNEAUX DE GROUPES BIREGULIERS.

Pour l'étude des anneaux de groupes, on pourra consulter [3].

PROPOSITION 3.1. : *Si l'anneau de groupe A[G] est birégulier alors :*

a) A *est un anneau birégulier.*

b) G *est un groupe localement normal.*

c) *L'ordre de tout élément de* G *est inversible dans* A ;

La propriété a) résulte du fait que tout quotient d'un anneau birégulier est régulier.

b) Soit H un sous-groupe de type fini de G, $H \neq \{1\}$. $\omega(H)$ désigne l'idéal à gauche de $A[G]$ engendré par les éléments $1-h$, $h \in H$.

L'idéal bilatère $B\omega(H)B$ qui est inclus dans $\omega(G)$ est engendré par un idempotent central e, où $e \neq 1$. On a donc $r[\omega(H)] \neq 0$, donc H est fini [3]. On pose :

$$e = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$$

on a donc $\quad 1-h = (1-h)\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i\right)$.

On en déduit que H est inclus dans le groupe H' engendré par le support de e et il est bien connu que H' est normal dans G.

c) Soit H un sous-groupe normal fini de G. $\omega(H)$ est un idéal bilatère facteur direct donc card H est inversible dans A [3].

<u>Problème</u> : Soient A un anneau birégulier, G un groupe localement normal donc l'ordre de tout élément est inversible dans A. $A[G]$ est-il un anneau birégulier ?

<u>LEMME 3.2.</u> : <u>Soient</u> H <u>un sous-groupe normal de</u> G, e <u>un idempotent central de</u> $A[H]$. <u>Alors</u> e <u>est un idempotent central de</u> $A[G]$.

Il suffit de prouver que $g^{-1}eg = e$, $\forall g \in G$. Cela résulte du fait que $g^{-1}eg$ et e sont deux idempotents centraux qui engendrent des idéaux isomorphes car on a :

$$eg \times g^{-1} = e$$

$$g^{-1}e \times eg = g^{-1}eg \, .$$

<u>Il suffit donc d'étudier le problème lorsque</u> G <u>est fini.</u>

Soient H un sous-groupe normal fini de G, e un idempotent central de $A[H]$. Nous allons montrer que $A[G]eA[G] = (e)$ est engendré par un idempotent central de $A[G]$.

On désigne par $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ les conjugués distincts de e dans $A[H]$. Les e_i sont des idempotents centraux de $A[H]$ et il existe un idempotent central f de $A[H]$ tel que :

$$A[H]f = \sum_{i=1}^{n} A[H]e_i .$$

On vérifie immédiatement la relation :

$$A[G]eA[G] = A[G]f .$$

(e) est un facteur direct bilatère de l'anneau semi-premier $A[G]$, il est donc engendré par un idempotent central.

Les deux résultats qui suivent ont été annoncés par BOVDI [1].

PROPOSITION 3.3. : *Soient A un anneau régulier commutatif, G un groupe localement normal dont tout élément est d'ordre inversible dans A. Alors $A[G]$ est birégulier.*

D'après ce qui précède, on peut supposer G fini ; $A[G]$ est alors un anneau régulier qui vérifie une identité polynomiale standard, et qui est de type fini sur son centre, on sait dans ce cas que l'anneau est birégulier [4].

PROPOSITION 3.4. : *Soient A un anneau quasi-simple, G un groupe localement normal dont tout élément est d'ordre inversible dans A. Alors $A[G]$ est birégulier.*

Soit $x \neq 0$; en considérant un élément $u \neq 0$ de (x) de longueur minimale, on montre que (x) contient un idempotent central. L'assertion résulte alors du fait que le centre de $A[G]$ est un anneau semi-simple. (Comme précédemment on a pu supposer G fini).

Remarque : Soient A un anneau birégulier, G un groupe fini dont l'ordre est inversible dans A. Si $x \in A[G]$, il existe un idempotent $e = \sum_{i=1}^{n} a_i\Gamma_i$, où les a_i commutent entre eux, et où Γ_i désigne la somme des éléments d'une classe de conjugaison.

<u>PROPOSITION 4.4. : Il existe un anneau régulier A vérifiant une identité standard de degré 2n , qui ne soit pas birégulier.</u>

Soient k le corps à p éléments $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, n entier non divisible par p. On pose $K = k(\xi)$, où ξ est une racine primitive de l'unité. On désigne par V l'espace vectoriel admettant une base dénombrable $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$, par f l'endomorphisme de V défini par $f(e_i) = \xi e_i$ pour $i \in \mathbb{N}$.

Soit G le groupe multiplicatif engendré par le groupe des translations T de V et f . T est indice fini dans G et si $\mathbb{C}$ désigne le corps des nombres complexes, $\mathbb{C}[G]$ est un anneau régulier qui vérifie une identité standard de degré 2n . Le groupe G n'est pas localement normal, car f admet une infinité de conjugués distincts. D'après la proposition 3.3., $\mathbb{C}[G]$ n'est pas un anneau birégulier.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BOVDI and S.V. MIHOVSKI, Idempotents in crossed products. Sorrit Math. Dokl. Vol. (11) (1970), n° 6, pp. 1439-1441.

[2] E. FORMANEK and R.L. SNIDER, Primitive group rings. Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 36, n° 2 (1972), pp. 357-360.

[3] J. LAMBEK, Lectures on rings and modules. Blaisdel 11. Waltkam (1966).

[4] A. PAGE, Une caractérisation des anneaux réguliers à I.P. Séminaire d'Algèbre non commutative (1972-1973).

[5] G. RENAULT, Anneaux réguliers auto-injectifs à droite. Bull. Soc. Math. France (à paraître).

-:-:-:-:-:-:-