

# THÈSES DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD (1971-2012)

**HERVÉ LE MEUR**

*Existence, unicité et stabilité d'écoulements de fluides viscoélastique avec interfaces, 1994*

Thèse numérisée dans le cadre du programme de numérisation de la bibliothèque mathématique Jacques Hadamard - 2016

Mention de copyright :

Les fichiers des textes intégraux sont téléchargeables à titre individuel par l'utilisateur à des fins de recherche, d'étude ou de formation. Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale.

Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente page de garde.



ORSAY  
n<sup>o</sup> d'ordre :

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD  
CENTRE D'ORSAY

# THÈSE

présentée  
pour obtenir

Le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES  
DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI ORSAY

Spécialité : Mathématiques

PAR

**Hervé LE MEUR**

Sujet : **Existence, unicité et stabilité d'écoulements de fluides viscoélastiques avec interfaces**

**Soutenue le** : 15 décembre 1994 devant la Commission d'examen

M.	Jean-Claude	SAUT	Président
Mme.	Geneviève	ALLAIN	
MM.	Yves	DEMAY	Rapporteur
	Jean-Michel	GHIDAGLIA	
	Claude	JOURON	
	Jean-Michel	PIAU	
	Jean-Pierre	PUEL	Rapporteur



Là, tout n'est qu'ordre et beauté,  
Luxe, calme et volupté ?





*Je tiens à remercier mon directeur de thèse, Claude Jouron, d'avoir su maintenir l'équilibre qu'il me fallait entre les "coups de gueule" nécessaires et les encouragements, que ce soit pour la partie numérique ou pour la partie théorique de ma thèse.*

*Je tiens également à adresser tous mes remerciements à Geneviève Allain qui a très gentiment relu avec attention tout mon manuscrit et m'a fait des commentaires dont la version finale tient compte.*

*Jean-Claude Saut a accepté de diriger en partie mon travail. Ses interventions m'ont toujours permis de reprendre confiance et de partir dans une bonne voie. C'est pourquoi je tiens à lui témoigner ma gratitude.*

*Je considère un peu mes deux rapporteurs Yves Demay et Jean-Pierre Puel comme deux fées qui se penchent sur mon "berceau" afin, d'un coup de "rapport magique", de mettre cette thèse sous le sceau des mathématiques appliquées dont ils sont d'éminents représentants et qui m'honorent de leur présence.*

*Quand j'ai demandé à Jean-Michel Ghidaglia auprès de qui je pouvais trouver un sujet théorique et appliqué, sur la mécanique des fluides, je n'imaginai pas qu'il comblerait si bien mes attentes en me mettant en contact avec Claude Jouron et Jean-Claude Saut. Je tiens à le remercier de m'avoir mis sur la piste "viscoélastique".*

*J'ai pu apprécier, lors des réunions du GdR 901, l'étendue des centres d'intérêts et l'humour de Jean-Michel Piau. Je tiens à remercier cette autre fée, qui met un peu du sceau expérimental sur mon "berceau".*

*De plus, je ne peux que regretter que Jean-François Agassant n'ait pu participer à mon jury. J'ai été très sensible à la gentillesse avec laquelle il a accepté de relire la partie "physique" de mon introduction, et à son encyclopédisme.*

*Enfin, je tiens à remercier la secrétaire du laboratoire, Mme Le Meur, pour sa gentillesse. Notre homonymie est pour moi un honneur.*





# Contents

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
1.1	Les fluides non newtoniens ; des phénomènes aux équations . . . . .	5
1.1.1	Quelques effets non newtoniens . . . . .	6
1.1.2	Les niveaux moléculaire et macroscopique . . . . .	11
1.1.3	Quelques exemples d'applications industrielles . . . . .	13
1.1.4	Quelques lois de comportement . . . . .	13
1.2	Non dimensionnement des équations . . . . .	16
1.3	Dérivation de diverses formes équivalentes . . . . .	20
1.4	Les équations constitutives en coordonnées cylindriques . . . . .	22
1.5	Les équations constitutives en coordonnées sphériques . . . . .	25
1.6	Une résolution exacte de l'équation constitutive lagrangienne . . . . .	27
<b>2</b>	<b>L'écoulement de Poiseuille de plusieurs Fluides Viscoélastiques</b>	<b>29</b>
2.1	Introduction . . . . .	29
2.2	L'écoulement de Poiseuille/Couette en géométrie plane . . . . .	30
2.2.1	Géométrie, modélisation, hypothèses . . . . .	30
2.2.2	Existence . . . . .	33
2.2.3	Perturbations 1D bornées pour l'écoulement de Poiseuille/ Couette 1 . . . . .	39
2.2.4	Perturbations 1D bornées pour l'écoulement de Poiseuille/ Couette 2 . . . . .	41
2.3	L'écoulement de Poiseuille en géométrie cylindrique . . . . .	51
2.3.1	Géométrie, modélisation, hypothèses . . . . .	51
2.3.2	Existence stationnaire . . . . .	52
2.3.3	Perturbations monodimensionnelles bornées . . . . .	57
2.4	Les modèles de PTT/MPTT interpolés . . . . .	58
2.4.1	Existence/unicité(s) . . . . .	58
2.4.2	Sur l'opérateur linéarisé de l'écoulement de Couette . . . . .	64
2.4.3	Stabilité linéaire de l'écoulement de Couette . . . . .	70
<b>3</b>	<b>Existence avec frontière libre</b>	<b>75</b>
3.1	Géométrie, équations, théorème . . . . .	75
3.2	Résolution du premier problème intermédiaire . . . . .	81



3.2.1	Plan de la démonstration . . . . .	81
3.2.2	Quelques lemmes utiles . . . . .	84
3.2.3	Majorations uniformes . . . . .	85
3.2.4	Convergence de la suite . . . . .	88
3.2.5	Relèvement des conditions aux limites . . . . .	92
3.2.6	Unicité, continuité . . . . .	93
3.3	Résolution du deuxième problème intermédiaire . . . . .	96
3.4	Estimations des termes complémentaires . . . . .	97
3.4.1	Lemmes divers . . . . .	99
3.4.2	Estimations de l'opérateur $E^1$ . . . . .	103
3.4.3	Estimations de l'opérateur $E^3$ . . . . .	104
3.4.4	Estimations de l'opérateur $E^4$ . . . . .	105
3.5	Point fixe . . . . .	106
<b>4</b>	<b>Stabilité linéaire</b>	<b>109</b>
4.1	Equations . . . . .	110
4.1.1	Solutions stationnaires . . . . .	110
4.1.2	Equations linéarisées . . . . .	112
4.1.3	La méthode d'Orr-Sommerfeld mathématique . . . . .	116
4.1.4	Le problème matriciel et une première méthode numérique . . . . .	119
4.2	Etude asymptotique . . . . .	123
4.2.1	Sur la validité de l'hypothèse $s^0 = 0$ . . . . .	124
4.2.2	La recherche des formules asymptotiques . . . . .	128
4.2.3	Les résultats . . . . .	133
4.3	Etude non asymptotique . . . . .	140
4.3.1	Une deuxième méthode numérique . . . . .	140
4.3.2	Les résultats . . . . .	141
<b>5</b>	<b>Conclusions</b>	<b>147</b>
<b>A</b>	<b>Formules asymptotiques</b>	<b>149</b>
<b>B</b>	<b>Ordres de grandeurs</b>	<b>151</b>

# List of Figures

1.1	Effet Weissenberg . . . . .	6
1.2	Enflement et retard à l'enflement . . . . .	8
1.3	Effet siphon . . . . .	9
1.4	Evolution des allures du jonc d'extrusion . . . . .	10
1.5	Verser du silicone . . . . .	10
1.6	Différents polymères . . . . .	11
1.7	Exemple de géométrie simple . . . . .	18
1.8	Définition de $\chi$ . . . . .	21
1.9	Coordonnées sphériques . . . . .	26
2.1	L'expérience physique . . . . .	31
2.2	La géométrie du domaine mathématique . . . . .	32
2.3	Détermination de $\alpha^1$ à partir de la condition d'adhésion à la paroi . . . . .	35
2.4	La géométrie du domaine axisymétrique mathématique . . . . .	51
2.5	Allure des fonctions $h$ . . . . .	59
3.1	La géométrie . . . . .	76
4.1	Géométrie . . . . .	111
4.2	L'interface perturbée . . . . .	115
4.3	Influence de la fréquence de coupure . . . . .	122
4.4	Stabilité asymptotique newtonienne . . . . .	134
4.5	Dépendance du Re critique en fonction de $\frac{\alpha_2 We_2}{\alpha_1 We_1} = Ml$ . . . . .	135
4.6	Signe de la pente en $Ml$ du Re critique . . . . .	136
4.7	Pente du Re critique pour différents $\varepsilon$ -Effets de l'inertie et de la pesanteur . . . . .	137
4.8	Re critique pour différents $\varepsilon$ . . . . .	138
4.9	Influence de la stratification d'élasticité sur la neutralité . . . . .	139
4.10	Influence de l'inertie sur la neutralité . . . . .	139
4.11	Neutralité quasi asymptotique . . . . .	142
4.12	Dépendance en la longueur d'onde . . . . .	143
4.13	Dépendance en la longueur d'onde . . . . .	144
4.14	Maximum sur $q$ des Re critiques en fonction de $We_2$ . . . . .	144



# Chapter 1

## Introduction

### 1.1 Les fluides non newtoniens ; des phénomènes aux équations

Les matériaux utilisés dans la vie de tous les jours ont une microstructure, que ce soit au niveau moléculaire, cristallin ou à une échelle supérieure. Pour leur étude mécanique, on a pu penser qu'on n'avait pas besoin de spécifier dans tous ses détails la microstructure. En effet, on s'intéresse d'habitude aux phénomènes macroscopiques qui ne sont que des moyennes locales de grandeurs microscopiques supposées uniformes. On a donc eu l'idée de décrire les matériaux dans les termes de la mécanique des milieux continus, pour laquelle les propriétés sont continues et non discrètes. Cette théorie a eu quelques succès éclatant comme la théorie de l'élasticité (petites déformations) ou la mécanique des fluides newtoniens. En effet, Stokes [4] et S<sup>t</sup> Venant [3], proposent l'équation dite de Navier-Stokes en 1843 uniquement sur la base de considérations de mécanique des milieux continus. Il est à noter que Navier [1] et Poisson [2] avaient déjà trouvé, séparément, à partir de considérations sur l'action des forces intermoléculaires l'équation dite de Navier-Stokes dès 1827 pour Navier et dès 1831 pour Poisson. Hélas, quand la complexité de ces matériaux et de leur sollicitation augmente, la Mécanique des Milieux Continus ne peut plus tout prévoir seule. D'où l'idée très transversale de faire travailler ensemble des spécialistes du génie des molécules et des procédés, des chimistes, des physiciens et des mathématiciens pour modéliser les différentes microstructures de matériaux qui ne sont pas continus. Cette modélisation produit une (ou plusieurs) équation appelée équation constitutive ou loi de comportement censée traduire à un niveau plus élevé la complexité des molécules et de leurs relations. Cette loi "macroscopique" trouvée, la mécanique des milieux continus reprend tous ses droits.

Suivant Larousse, nous appellerons rhéologie la science des lois du comportement des matériaux liant les contraintes aux déformations. Le développement des molécules de plus en plus compliquées et grandes (on parle de macromolécules) a notamment fourni des matériaux plus légers et plus résistants, mais qui ne suivent pas les équations de Navier-Stokes. Nous les appellerons "fluides non newtoniens" et nous montrerons en quoi

ils diffèrent des fluides newtoniens (ils obéissent aux équations de Navier-Stokes) plus loin. Citons dès à présent comme exemples de tels matériaux, les matières plastiques, les fibres de carbone, les peintures, les gels, ... etc. Tous ces matériaux non métalliques dépassent aujourd'hui en volume d'échange commerciaux les matériaux ferreux auxquels étaient habitués nos grands-parents. Ils touchent toute l'industrie, que ce soit les producteurs (Rhône-Poulenc, Michelin, Vallourec, ...), ou les consommateurs directs (Renault pour les équipements en plastique, Thomson pour les équipements sous-marins, ...). Dans la suite de cette section, nous montrerons quelques effets spécifiques aux fluides non newtoniens. Nous ferons une brève description physique des polymères et définirons les principaux comportements manifestés. Ensuite, nous donnerons des exemples concrets d'applications industrielles. Enfin, nous présenterons différentes lois constitutives couramment utilisées.

Nous continuerons le chapitre en rendant les équations sans dimension, donnerons diverses formes équivalentes, puis les expressions en coordonnées cylindriques et sphériques. Enfin, nous résoudrons exactement une équation constitutive choisie.

### 1.1.1 Quelques effets non newtoniens

Nous qualifierons de non newtonien un effet qui ne peut être expliqué par les équations de Navier-Stokes. Plusieurs de ces effets, et d'autres, sont décrits dans [5].

#### Effet Weissenberg

Si l'on met du fluide dans un bécher, avec une barre verticale en son milieu tournant à vitesse constante, un fluide newtonien, à cause de l'inertie aura tendance à s'écartier vers les parois. En revanche, un fluide composé de macro-molécules, fut-ce en solution, va remonter la tige comme on le voit sur la Figure 1.1.

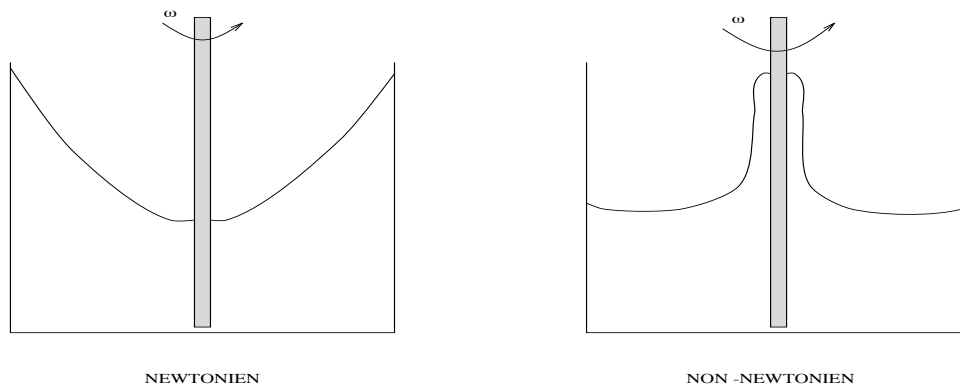


Figure 1.1: Effet Weissenberg

Ce phénomène est lié à la différence des contraintes normales, qui est non nulle. On a pu proposer une interprétation au niveau moléculaire, selon laquelle quelques macro-

molécules se collent à la tige et ratissent alors comme un filet celles qui sont un peu plus loin. En attirant à elles ces molécules, elles en compriment d'autres dans la direction normale à la tige. Celles-ci s'étendent donc dans la direction de la tige, ce qui explique la remontée de fluide. A un niveau plus macroscopique, [5] interprète ce phénomène en disant qu'on a, en fait, des écoulements de cisaillement entre des cylindres coaxiaux. Parcequ'il y a une tension dans la direction du cisaillement, il y a une sur-pression interne qui constitue, entre les différents cylindres, un gradient de pression, ce qui se traduit par une remontée de la surface libre vers le centre.

Les deux interprétations proposées, loin de s'exclure, sont en fait un peu les deux faces de Janus.

### **Relaxation des contraintes après cessation des déformations**

Un fluide newtonien cesse d'avoir des contraintes internes (d'origine moléculaire) dès que l'on cesse de le déformer. Ce n'est plus le cas pour un fluide non newtonien en général qui amortit le rapport entre contrainte et déformation. Il faut donc en déduire que le champ des contraintes tient compte non pas de la seule déformation que subit un élément de volume, mais en fait de toute l'histoire de ses déformations. C'est ainsi un gros problème dans tous les procédés de moulage où l'on doit attendre que le fluide ait "relaxé" ses déformations avant de retirer le moule, sinon, il risque de ne pas prendre la forme du moule, et prendre une forme intermédiaire entre celle du moule et celle qu'il avait avant le moulage. On voit ici un effet de mémoire. Pour une description plus expérimentale, on consultera [5].

### **L'écoulement de Poiseuille stationnaire dans un tuyau**

Les équations de Navier-Stokes d'un fluide newtonien permettent de lier le gradient de pression, entre la sortie et l'entrée, d'un tube circulaire rectiligne et le débit. Ce lien est linéaire, mais plusieurs fluides industriels ne vérifient pas cette relation.

### **Gonflement en sortie de filière**

On peut calculer, sur la base des équations de Navier-Stokes le facteur d'enflement ( $\chi = \frac{L}{d}$  : rapport du diamètre du jonc de sortie sur celui de la filière) à la sortie d'une filière, qu'elle soit ronde ou carrée, par des méthodes d'éléments finis (cf [6], [7]), de développement en série (cf [8]) ou expérimentales (cf [9]). Plusieurs de ces méthodes sont comparées dans [44] p 159 à 193. Les résultats sont à peu près uniformes et donnent un facteur d'enflement d'environ 1,13 et 1,19 dans les cas axisymétriques et plan respectivement. Il n'en est pas de même pour certains fluides non newtoniens pour lesquels on va jusqu'à trouver expérimentalement des facteurs de 4 !! Qui plus est, la forme de la filière ainsi que de ce qui la précède compte beaucoup.

Ce qui est encore plus frappant est que pour certains fluides, si l'on augmente le débit, on voit un retard à l'enflement (cf [10]) dessiné en Figure 1.2.

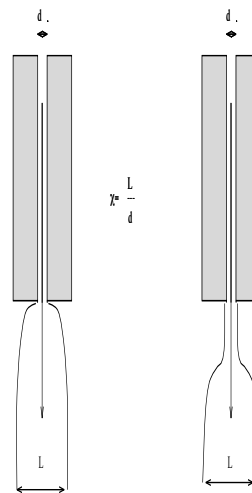


Figure 1.2: Enflément et retard à l'enflément

D.D. Joseph et al. [10] ont essayé de voir dans le changement de type de l'équation de vorticité (cf [11]) la cause théorique du retard à l'enflément. V. Delvaux et al. [12] ont tenté de retrouver numériquement ce phénomène. Cependant, pour des raisons numériques, ils font une hypothèse (viscosité de solvant non nulle) qui, normalement, interdit le changement de type des équations.

### Le siphon sans tube

Il est bien connu pour les fluides habituels que si l'on amorce un siphon, alors tant que la partie dans le bac initial est immergée, le siphon continuera de vider ce bac.

Dans le cas d'un fluide non newtonien, on peut voir l'effet de siphon continuer même si le tuyau ne reste pas immergé dans le bac comme on le voit sur la Figure 1.3.

Pour cela, il suffit de mettre très peu (50 p.p.m.) de polymère pour augmenter suffisamment la viscosité et laisser le siphon amorcé.

### La peau de requin et autres défauts de surface

Plusieurs expériences (cf [13], [14], [15] pex) ont bien montré l'allure du jonc d'extrusion d'un polymère en fonction du débit. A petits débits, l'extrudat est lisse. Puis, quand le débit augmente, des oscillations latérales de faible période apparaissent. Cet effet porte le nom de peau de requin (sharkskin) et dépend du débit, de la température, de la masse moléculaire ... Dans certains cas, on observe une succession de zones lisses et de zones de "peau de requin". Ce type de défaut est souvent désigné par "écoulement bouchon" (cork flow). A des débits plus grands, la "peau de requin" disparaît et l'extrudat est lisse. Dans le cas du polystyrène et du polypropylène, Quand le débit augmente encore,

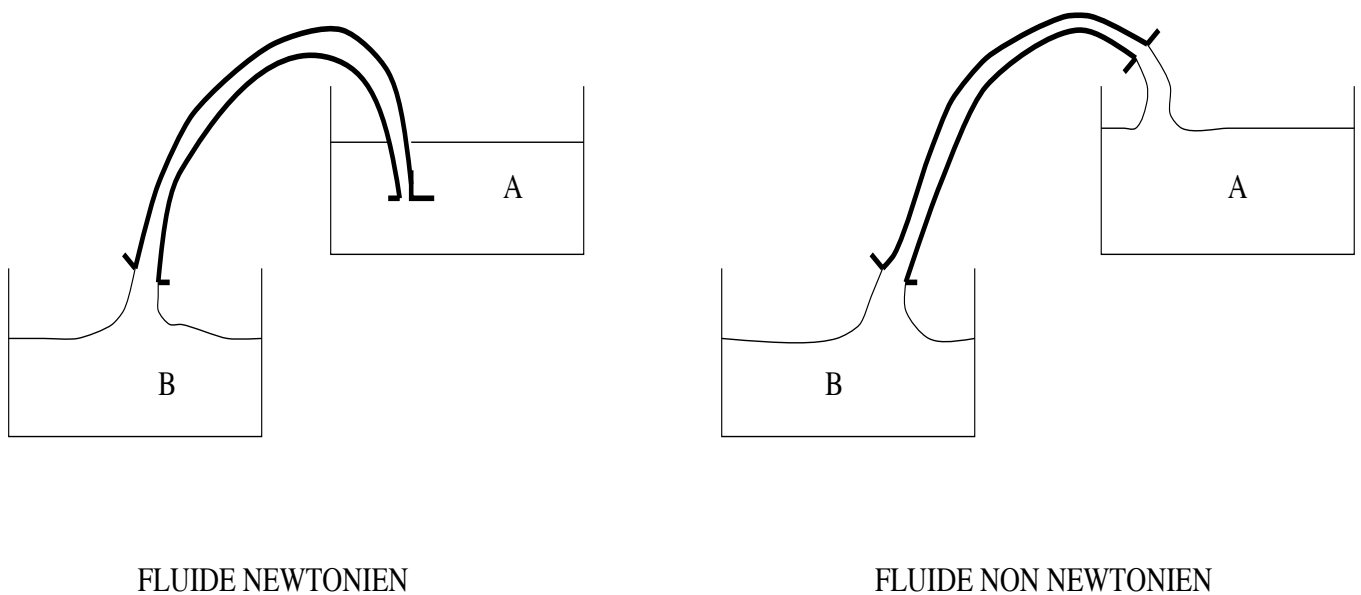


Figure 1.3: Effet siphon

les oscillations croissent en amplitude et en période pour présenter une allure de jonc régulier entouré d'anneaux ou d'une hélice (cf Figure 1.4).

Enfin, pour les grands débits, la sortie est complètement chaotique. Ce dernier phénomène est amorcé par une perturbation axiale en amont. Il est à noter que ce phénomène se produit à des nombres de Reynolds  $Re$  de l'ordre de  $10^{-15}$  !! (cf [16] cité par [37]). L'inertie n'est donc pas en cause. Peut être la compressibilité ?

On trouvera dans [5] une description plus complète de ces instabilités p 450 à 465, et une discussion des interprétations.

### Couper un fluide non newtonien !

Si l'on fait l'expérience de couper avec des ciseaux un fluide (silicone pex) à la sortie d'une filière verticale, la partie qui reste proche de la sortie de la filière va remonter, manifestant ainsi un comportement élastique comme on le voit sur la Figure 1.5. Cette expérience montre qu'un liquide non newtonien se comporte, en un certain sens partiellement comme un élastique. Il garde donc une forme de mémoire qui n'empêche pas que, mis dans un récipient, il épousera sa forme comme tout liquide.

### La viscosité d'un fluide non newtonien

Enfin, nous allons voir un effet un peu plus expérimental mais certainement le premier, historiquement à avoir justifié de chercher d'autres modèles que les équations de Navier-Stokes. On définit la viscosité en cisaillement  $\eta$  comme le rapport de la contrainte de cisaillement  $\tau$  sur le taux de déformation  $\dot{\gamma}$ . Les équations de Navier-Stokes prévoient une viscosité constante que ne confirme pas l'expérience. Cette viscosité dépend en fait très souvent de  $\dot{\gamma}$ . On a ainsi un effet rhéofluidifiant (shear-thinning) dans lequel



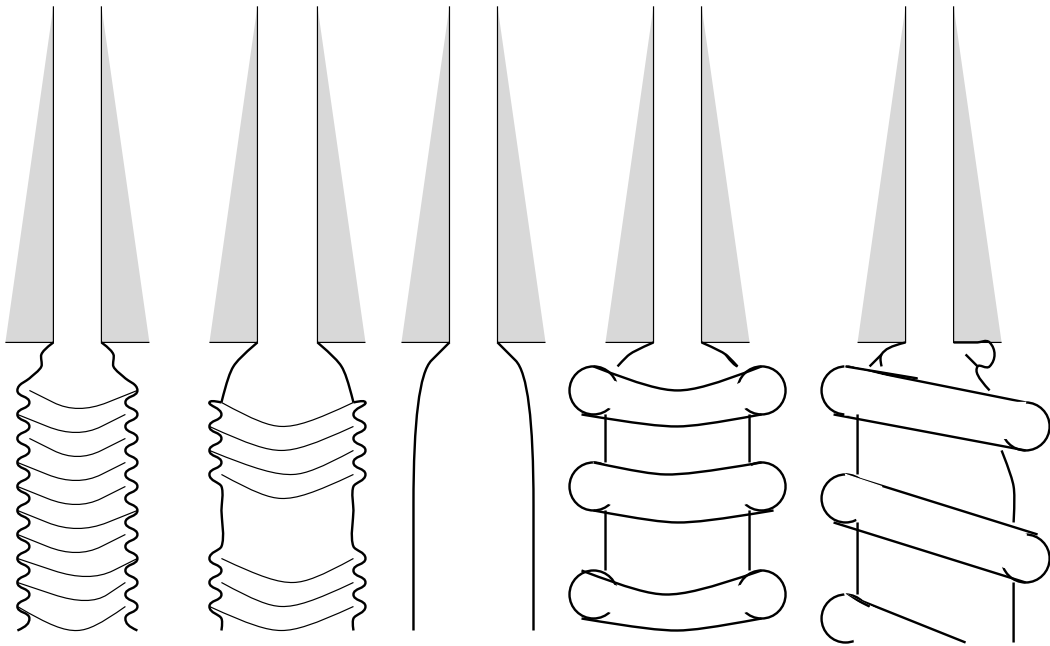


Figure 1.4: Evolution des allures du jonc d'extrusion

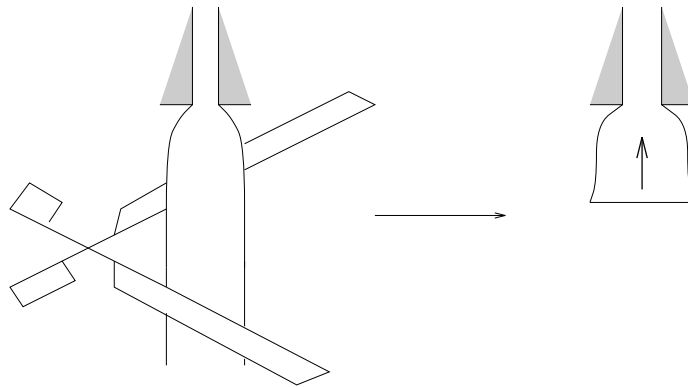


Figure 1.5: Verser du silicone

$\eta(\dot{\gamma}) \rightarrow 0$  quand  $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$ . Ceci signifie que sous forte déformation, la contrainte tend à être sous-linéaire. C'est souvent cet effet qui est le plus important dans les applications industrielles. Plusieurs lois (Carreau, ...) traduisant la dépendance de  $\eta(\dot{\gamma})$  ont été proposées pour garder la forme générale des équations de Navier-Stokes. Hélas, les phénomènes exposés ci-dessus ne peuvent être décrits par ces équations qui ont un domaine de validité qui ne recouvre pas l'objet de cette thèse.

### 1.1.2 Les niveaux moléculaire et macroscopique

Nous définissons un polymère comme la répétition un grand nombre ( $10^4$  à  $10^5$ ) de fois d'une séquence moléculaire appelée monomère. Nous nous intéresserons, ici, aux solutions de polymères, ou aux polymères seuls.

Un polymère peut être linéaire, ramifié ou réticulé (cf Figure 1.6). On devine que la réticulation augmente la rigidité.

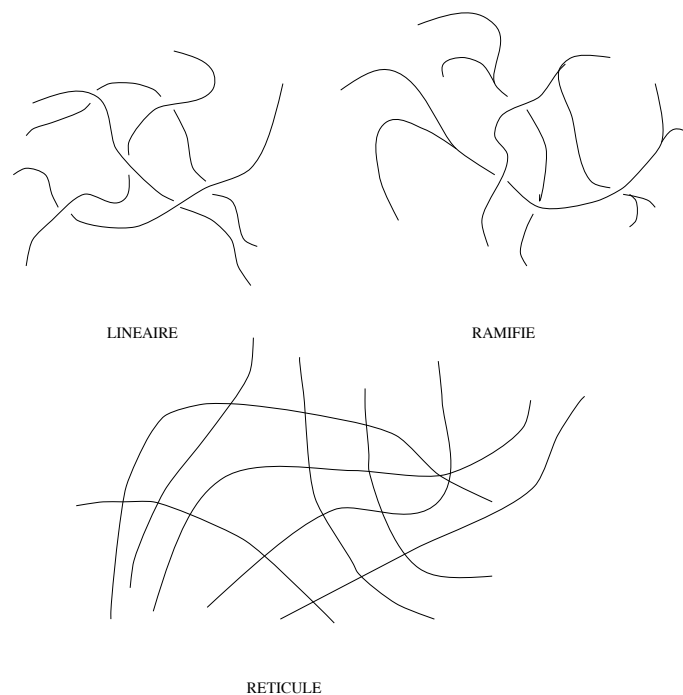


Figure 1.6: Différents polymères

On distingue divers type de comportement :

- élastique : le corps reprend sa forme initiale après le déchargement.
- plastique : le déchargement est accompagné d'une déformation résiduelle.
- élastoplastique : le comportement reste élastique, tant que les contraintes restent inférieures à un certain seuil

- visqueux : les déformations évoluent dans le temps avec une vitesse qui dépend des contraintes
- viscoélastique en petites déformations : la réponse à une sollicitation donnée comporte une partie instantanée et une partie différée : le corps reprend sa forme initiale avec un temps de retard après déchargement.

Les polymères se classent selon leurs propriétés physiques :

- Thermoplastiques : polymères linéaires ou ramifiés rigides à température ambiante. Ils se ramollissent à  $T > 300K$ . Par exemple : les jouets en polypropylène eltex P (société Solvay)
- Elastomères (caoutchouc) : polymères linéaires ou ramifiés ou faiblement réticulés. Ils sont élastiques à température ambiante (pneus, ...)
- Thermodurcissables : polymères fortement réticulés. Ils sont rigides à température ambiante à cause du réseau bati au cours de la polymérisation. On ne peut pas les faire fondre. Ils se dégradent à température haute (parfois supérieure à  $120^{\circ}C$ ). Par exemple, le répartiteur d'air pour moteur diesel (PSA/ Rhône-Poulenc). Les polymères ont l'avantage sur les matériaux ferreux d'être, s'ils sont bien conçus, légers et chimiquement indifférents.

Les propriétés des polymères dépendent d'une part de la structure chimique des monomères et de la régularité de leur assemblage, d'autre part de la longueur des chaînes et de leur distribution (polydispersité) enfin de l'arrangement des chaînes entre elles (linéaires, ramifiées ou réticulées). Par exemple, l'amortissement d'une lame composite polymérique peut être rendu beaucoup plus rapide que celui d'une lame en métal en jouant sur la réticulation. En plus, si le poids du matériaux composite est plus faible que celui d'un métal, à caractéristiques mécaniques égales, cela peut avoir de l'intérêt pour les industries de pointe (les rotors d'hélicoptères sont en matériaux composites).

De plus, le comportement d'un polymère peut changer du tout au tout selon la nature des molécules. Si l'on chauffe un polymère, il peut se contracter (chaleur, donc rupture des liaisons, donc les chaînes se repelotonnent) ou se dilater (chaleur, donc les chaînes s'allongent).

Pour ce qui est de l'influence de la sollicitation, à température donnée, si elle est rapide, les chaînes n'ont pas le temps de réagir. Elles semblent figées. Le matériaux est dans un état vitreux, rigide (cf le verre). Si la sollicitation est plus lente, les chaînes se déforment avec difficulté. Le matériaux est viscoélastique amortissant. Si la sollicitation est très lente, les chaînes peuvent suivre la déformation imposée sans effort. Le matériau est dans un état caoutchoutique souple, élastique.

Bien sûr toutes ces possibilités peuvent partiellement se combiner. Ainsi, dans l'industrie du pneumatique, on essaie d'avoir un comportement amortissant, pour une bonne adhérence, et élastique pour une faible consommation d'énergie. Un pneumatique utilise jusqu'à 200 matières premières dont l'interaction est un défi à la compréhension des scientifiques.

### 1.1.3 Quelques exemples d'applications industrielles

Nous avons déjà énuméré quelques matériaux qui, lors de leur mise en forme, sont non newtoniens. Rappelons uniquement l'exemple des plastiques (textiles, ..) pour convaincre le lecteur de leur importance.

De façon plus anecdotique, rappelons que l'on produit des fusibles recyclables en utilisant des grains de carbone. Pour cela, on place des grains de carbone sur la surface des cristaux d'un polymère cristallisé. A courant faible, les grains de carbone font passer le courant. Si le courant dépasse une certaine valeur, par effet Joule, le polymère cesse d'être à l'état cristallin, disperse les grains de carbone et le contact électrique ne se fait plus. Dès que le matériau a retrouvé sa température normale, la structure cristalline se refait et le courant passe.

Un autre exemple amusant est celui de la piezo électricité. Certains polymères produisent un faible courant si ils sont déformés. D'où l'idée de détecter ce courant pour mesurer de petites déformations. On utilise cette méthode pour les sonars qui détectent les variations de pression (Thomson-Sintra).

Les polymères s'appliquent aussi à la pyro électricité. Certains produisent un courant sous l'effet de la chaleur. On s'en sert pour détecter de très faibles variations de température. Par exemple, on fabrique des caméras à infrarouge basées sur un polymère qui détecte ce rayonnement.

On a déjà souligné l'importance de la présence de polymères pour diminuer la viscosité et éviter que le siphon ne se désamorçe. De même, par l'adjonction de petites quantités de polymère dans l'eau qu'utilisent les pompiers, on permet à une lance d'envoyer l'eau au douzième étage au lieu du huitième. Ce phénomène est aussi utilisé pour augmenter jusqu'à 30 % le rendement des pompes qu'on installe dans les régions désertiques.

Enfin, les silicones vulcanisables à froid permettent aux dentistes, à température ambiante, de prendre une empreinte dentaire.

Remarquons que les possibilités qu'apportent les matériaux non newtoniens, même connues, ne sont pas toutes exploitées. Ainsi Saint-Gobain sait faire des verres deux fois moins lourds et aussi résistants pour les bouteilles de Champagne, mais le consommateur n'aurait pas la même impression de qualité si la bouteille était aussi légère que celle d'un mousseux, ce qui explique que cela ne soit pas développé.

### 1.1.4 Quelques lois de comportement

Il existe un nombre important d'équations constitutives dont nous ne présenterons que les principales. Nous donnerons également quelques justifications de ces modèles. On retrouvera dans [18] un étude plus complète.

On peut classer les modèles de la manière suivante :

- modèles de réseaux (Rouse ou Green Tobolsky, Johnson Segalman, Lodge ou Maxwell, Phan-Thien Tanner, ...)
- modèles de reptation (Doi Edwards, Larson)

- modèles thermodynamiques (K-BKZ, Leonov, ...)

Par la suite, seuls Johnson Segalman, Maxwell et Phan-Thien Tanner nous intéresseront. Avant d'expliquer quelles sont les principales lois, nous allons définir quelques termes qui nous seront utiles. Nous soulignerons, dans toute la suite, d'une barre les vecteurs, et de deux barres les matrices.

### Quelques notations

On note  $\underline{\chi}(\underline{X}, s; t)$  la fonction qui, étant donné le champ des vitesses  $\underline{u}$ , transforme le point qui était en  $\underline{X}$  dans le domaine  $\Omega_s$  à l'instant  $s$ , en le point correspondant à l'instant  $t$  (cf Figure 1.8). Cette fonction a un gradient  $\underline{\underline{\nabla\chi}}$ , qui permet de définir le

tenseur de Finger :  $\underline{\underline{C}}_t^{-1}(t') = \left(\underline{\underline{\nabla\chi}}\right)^{-1} \left(\underline{\underline{\nabla\chi}}\right)^{-T}$ .

Nous aurons également besoin de  $\underline{\underline{D}}[\underline{u}]$ , la partie symétrique du tenseur des taux de déformations  $\underline{\underline{\nabla u}}$ .

De plus, la contrainte interne du matériau, que l'on veut modéliser, est représentable par un tenseur (d'ordre 2) symétrique. Nous le noterons  $\underline{\underline{\sigma}}$ . La contrainte qui s'applique sur un élément de volume infinitésimal ne dépend que de la normale  $\underline{n}$  à sa surface infinitésimale  $dS$  et vaut donc  $\underline{\underline{\sigma}}\underline{n}$ . Ce tenseur se décompose en un terme de pression  $-p\underline{\underline{I}}$ , un terme de viscosité  $2\eta_{sol}\underline{\underline{D}}[\underline{u}]$  où  $\eta_{sol}$  est la viscosité du solvant, et un terme dit d'extracontrainte noté  $\underline{\underline{\tau}}$  sur lequel portera plus particulièrement la loi constitutive.

Une nécessité théorique qui s'exerce sur les lois constitutives est l'objectivité. Celle-ci impose que les grandeurs mesurées soient les mêmes dans tous les repères. C'est un genre de principe de relativité qui fait que la contrainte mesurée ne doit pas dépendre du repère dans lequel on se place.

Avec cette nécessité, la dérivée particulière d'un champ de matrices n'est pas objective, ce qui limiterait singulièrement les lois, si on ne pouvait montrer qu'une famille de dérivées plus compliquées (les dérivées dites de Gordon Showalter [20]) respecte cette objectivité. Ces dérivées, que l'on rencontrera partout se définissent comme suit :

$$\frac{\mathcal{D}_a \underline{\underline{\tau}}}{\mathcal{D}t} = \frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{\underline{\tau}} - \frac{(a-1)}{2} (\underline{\underline{\tau}} \underline{\underline{\nabla u}} + \underline{\underline{\nabla u}}^T \underline{\underline{\tau}}) - \frac{(a+1)}{2} (\underline{\underline{\tau}} \underline{\underline{\nabla u}}^T + \underline{\underline{\nabla u}} \underline{\underline{\tau}}). \quad (1.1)$$

On trouvera dans [5] la justification tant mathématique que physique de cette expression (annexe FI, FII).

En notant  $\underline{\underline{\Omega}}$  la partie antisymétrique du tenseur des taux de déformations, trois cas particuliers importants sont :

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{D}_1 \underline{\underline{\tau}}}{\mathcal{D}t} &= \frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{\underline{\tau}} - (\underline{\underline{\tau}} \underline{\underline{\nabla}} u^T + \underline{\underline{\nabla}} u \underline{\underline{\tau}}) && \text{Upper Convected Maxwell} \\ \frac{\mathcal{D}_0 \underline{\underline{\tau}}}{\mathcal{D}t} &= \frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{\underline{\tau}} + \underline{\underline{\tau}} \underline{\underline{\Omega}} - \underline{\underline{\Omega}} \underline{\underline{\tau}} && \text{Dérivée corotationnelle de Jauman} \\ \frac{\mathcal{D}_{-1} \underline{\underline{\tau}}}{\mathcal{D}t} &= \frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{\underline{\tau}} + (\underline{\underline{\tau}} \underline{\underline{\nabla}} u + \underline{\underline{\nabla}} u^T \underline{\underline{\tau}}) && \text{Lower Convected Maxwell} \end{aligned}$$

### Les principaux modèles

Nous présentons principalement les modèles de réseaux sur lesquels nous avons travaillé. On trouvera une bonne introduction à plusieurs autres modèles dans [18]. Ces modèles de réseaux introduisent la notion de points de jonction ou noeuds. Les segments de chaînes sont des portions de chaînes macromoléculaires reliant deux noeuds. Green et Tobolsky en 1946 [17] ont proposé une théorie dans laquelle les jonctions entre les chaînes sont temporaires. Ils font les hypothèses suivantes :

- Les segments de chaînes suivent une statistique gaussienne
- Les segments de chaînes se déforment de manière affine jusqu'à rupture des noeuds
- La probabilité de rupture des noeuds est constante et indépendante de la déformation du réseau
- Le nombre total de noeuds reste constant
- Les segments se reforment dans une configuration d'équilibre.

Après différents calculs, ils arrivent à l'équation sous forme intégrale :

$$\underline{\underline{\tau}} = G \int_{-\infty}^t \frac{1}{\lambda} e^{-(t-t')/\lambda} \underline{\underline{C}}_t^{-1}(t') dt'$$

où  $\lambda$  est la durée de vie moyenne des noeuds ou temps de relaxation,  $G$  une constante,  $\underline{\underline{C}}_t^{-1}(t')$  le tenseur de Finger et  $\underline{\underline{\tau}}$  le tenseur symétrique des extracontraintes, qui traduit l'interaction moléculaire. Ils obtiennent également une forme différentielle équivalente :

$$\underline{\underline{\tau}} + \lambda \frac{\mathcal{D}_1 \underline{\underline{\tau}}}{\mathcal{D}t} = 2G\lambda \underline{\underline{D}}[u],$$

où  $\lambda$  garde la même signification ainsi que  $G$ , et où  $\underline{\underline{D}}[u]$  est la partie symétrique du tenseur des taux de déformation.

Hélas, ce modèle ne décrit pas la pseudo plasticité des polymères fondus, c'est à dire la chute de la viscosité quand les vitesses de cisaillement deviennent importantes, dont on a parlé ci-dessus.

Johnson et Segalman [19] reprennent les hypothèses de Green et Tobolsky en supposant que les chaînes ne se déforment plus de manière affine. Un paramètre ajustable  $\xi$  caractérise cette perte d'affinité. Ils obtiennent l'équation :

$$\underline{\underline{\tau}} + \lambda \frac{\mathcal{D}_a \underline{\underline{\tau}}}{\mathcal{D}t} = 2G\lambda \underline{\underline{D}}[\underline{u}], \quad (1.2)$$

où  $a = 1 - \xi$  est ajustable entre -1 et 1 et  $\frac{\mathcal{D}_a \cdot}{\mathcal{D}t}$  est la dérivée interpolée de Gordon Schowalter (1.1) [20]. On retrouve le modèle de Green Tobolsky comme cas particulier. Cette fois, la pseudo-plasticité, ainsi que le fait que la deuxième différence des contraintes normales  $N_2$  soit non nulle, peuvent être décrits par ce modèle puisque la viscosité en cisaillement simple et la deuxième différence des contraintes normales valent :

$$\eta(\dot{\gamma}) = \frac{G\lambda}{1 + \lambda^2(1 - a^2)\dot{\gamma}^2}$$

$$N_2(\dot{\gamma}) = \frac{-(1 - a)G\lambda^2}{1 + \lambda^2(1 - a^2)\dot{\gamma}^2},$$

en fonction de la vitesse de déformation  $\dot{\gamma}$  (vitesse du plateau supérieur / distance entre les deux plateaux).

Phan-Thien et Tanner [43] introduisent une fonction  $g$  qui mesure une probabilité de création ou de destruction des noeuds et dépend de la déformation du réseau. Ils arrivent à :

$$g_{e'}(\underline{\underline{\tau}})\underline{\underline{\tau}} + \lambda \frac{\mathcal{D}_a \underline{\underline{\tau}}}{\mathcal{D}t} = 2\eta_{pol} \underline{\underline{D}}[\underline{u}],$$

avec  $g_{e'}(\underline{\underline{\tau}}) = 1 + \frac{\epsilon'}{G} \text{tr} \underline{\underline{\tau}}$  ou  $g_{e'}(\underline{\underline{\tau}}) = \exp \frac{\epsilon'}{G} \text{tr} \underline{\underline{\tau}}$ .

Concluons en soulignant que, dans la réalité, nous souhaitons modéliser des polymères en solution. Il y a donc un solvant dont l'effet n'est pas pris en compte pour l'obtention des équations ci-dessus. L'hypothèse couramment faite à ce niveau consiste à supposer que les effets du polymère et du solvant se superposent, sans interagir. La contrainte globale est alors la somme de la contrainte newtonienne et de la contrainte polymérique, quelle que soit les lois que celles-ci vérifient. En général, on représente la viscosité du solvant par la loi newtonienne, ce que nous ferons également.

## 1.2 Non dimensionnement des équations

Nous partirons des équations de Johnson Segalman que l'on vient de voir. Celles-ci essaient de traduire l'évolution d'un fluide tel que ceux décrits ci-dessus, soumis éventuellement à des forces d'interface, à des forces de pesanteur et à l'interaction des molécules qui le composent (par le biais de l'équation constitutive du solvant et du polymère).

Nous noterons  $\underline{u}$  la vitesse de l'écoulement,  $\rho$  la masse volumique,  $g$  l'attraction universelle ( $= 9.81 Nkg^{-1}$ ),  $\underline{\underline{\sigma}}_{sol}$  l'extracontrainte du solvant,  $t$  le temps et la pression  $p$ . De

plus, nous noterons  $\eta_{sol k}$  la viscosité du solvant  $k$  qui sera supposé newtonien,  $\eta_{pol k}$  la viscosité du polymère  $k$ ,  $\eta_{tot k}$  la somme des viscosités du polymère et du solvant,  $\underline{F}$  la force massique,  $\underline{D}[\underline{u}_k]$  la partie symétrique du gradient des vitesses dans le domaine  $k$ ,  $\lambda_k$  le temps de retard de l'équation constitutive dans le domaine  $k$  et  $\underline{g}$  la fonction tensorielle qui contient des termes non linéaires, mais au plus quadratiques, qui permettent à l'équation constitutive d'être objective (les grandeurs mesurées sont indépendantes du repère). Enfin, nous noterons  $\underline{x}$  un point courant du domaine  $\Omega_t$ . Les valeurs de ces grandeurs, pour différents fluides sont donnés en annexe B.

On veut trouver les équations non dimensionnées pour deux fluides s'écoulant avec une interface commune. Quand le contexte le permet, nous n'écrirons pas l'indice  $k$  du domaine sur les grandeurs  $\underline{u}, p, \underline{\sigma}, \rho, \varepsilon, a$ . Les équations dimensionnées sont les suivantes dans chaque domaine  $\Omega_k$  pour  $k = 1, 2$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \left( \frac{\partial \underline{u}_k}{\partial t} + \underline{u}_k \cdot \nabla \underline{u}_k \right) + \nabla p_k = \rho_k \underline{F} + \operatorname{div} \left( \underline{\sigma}_{sol k} + \underline{\sigma}_{pol k} \right), \quad (1.3) \\ \operatorname{div} \underline{u}_k = 0, \quad \text{dans } \Omega_k \quad (1.4) \\ \underline{\sigma}_{sol k} = 2\eta_{sol k} \underline{D}[\underline{u}_k] \quad \text{dans } \Omega_k \quad (1.5) \\ \underline{\sigma}_{pol k} + \lambda_k \left( \frac{\partial \underline{\sigma}_{pol k}}{\partial t} + \underline{u}_k \cdot \nabla \underline{\sigma}_{pol k} - \underline{g}(\nabla \underline{u}_k, \underline{\sigma}_{pol k}) \right) = 2\eta_{pol k} \underline{D}[\underline{u}_k] \\ \text{avec } D[\underline{u}_k] = (\underline{\nabla} \underline{u}_k + \underline{\nabla} \underline{u}_k^T) / 2 \quad \text{et } \underline{\nabla} \underline{u}_k = \left( \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_j} \right) \\ \text{et } \underline{g}(\underline{\nabla} \underline{v}, \underline{\sigma}) = \left( \frac{a-1}{2} (\underline{\nabla} \underline{v}^T \underline{\sigma} + \underline{\sigma} \underline{\nabla} \underline{v}) + \frac{a+1}{2} (\underline{\sigma} \underline{\nabla} \underline{v}^T + \underline{\nabla} \underline{v} \underline{\sigma}) \right). \end{array} \right. \quad (1.6)$$

Il faut adjoindre les conditions d'interface qui traduisent l'interaction de ces deux fluides. La première est mathématique et se déduit aisément (cf [55]) en imposant aux formulations variationnelles de l'incompressibilité dans  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  d'être également formulation variationnelles de l'incompressibilité dans  $\Omega_1 \cup \Omega_2$ . On trouve alors :

$$\llbracket \rho(\underline{u} - \underline{u}_{\text{interface}}) \cdot \underline{n} \rrbracket = 0,$$

en notant  $\llbracket \cdot \rrbracket$  la différence de la grandeurs entre les domaines 1 et 2  $(\cdot)_1 - (\cdot)_2$ . La deuxième condition est également mathématique et traduit la même condition de formulation variationnelle globale pour la conservation des moments. Son expression, si  $\underline{u}$  est continue, est :

$$\llbracket \underline{\sigma} \cdot \underline{n} \rrbracket = -2HT\underline{n}.$$

D'un point de vue plus physique, pour deux fluides non miscibles, la vitesse normale  $\underline{u}_1 \cdot \underline{n}$  est égale à la vitesse normale de l'interface. La vitesse normale est donc *a fortiori* continue ; ( $\underline{u}_1 \cdot \underline{n} = \underline{u}_{\text{interface}} \cdot \underline{n} = \underline{u}_2 \cdot \underline{n}$ ), ce qui nous donne des conditions "physiques" d'interface qui rendent la première relation mathématique automatiquement vérifiée. De plus, si la viscosité du solvant est non nulle, nous pouvons supposer que la vitesse



tangentielle sera elle aussi continue. Cette hypothèse est très rarement soulignée (on la trouve dans [48]). En résumé, nous prenons les conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \llbracket \underline{u} \rrbracket = 0 \\ \llbracket \left( -p_k \underline{I} + 2\eta_{sol\ k} \underline{D}[\underline{u}_k] + \underline{\sigma}_{pol\ k} \right) \rrbracket \underline{n} = -2HT\underline{n}, \end{array} \right. \quad (1.7)$$

où  $2H$  est la somme des courbures principales et  $T$  la constante de tension superficielle. Les conditions de bord sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{u}_1 |_{\Gamma_1} = 0 \\ \underline{u}_2 |_{\Gamma_2} = 0. \end{array} \right. \quad (1.9)$$

Par exemple, si la géométrie est plane et est celle d'un écoulement de Poiseuille :

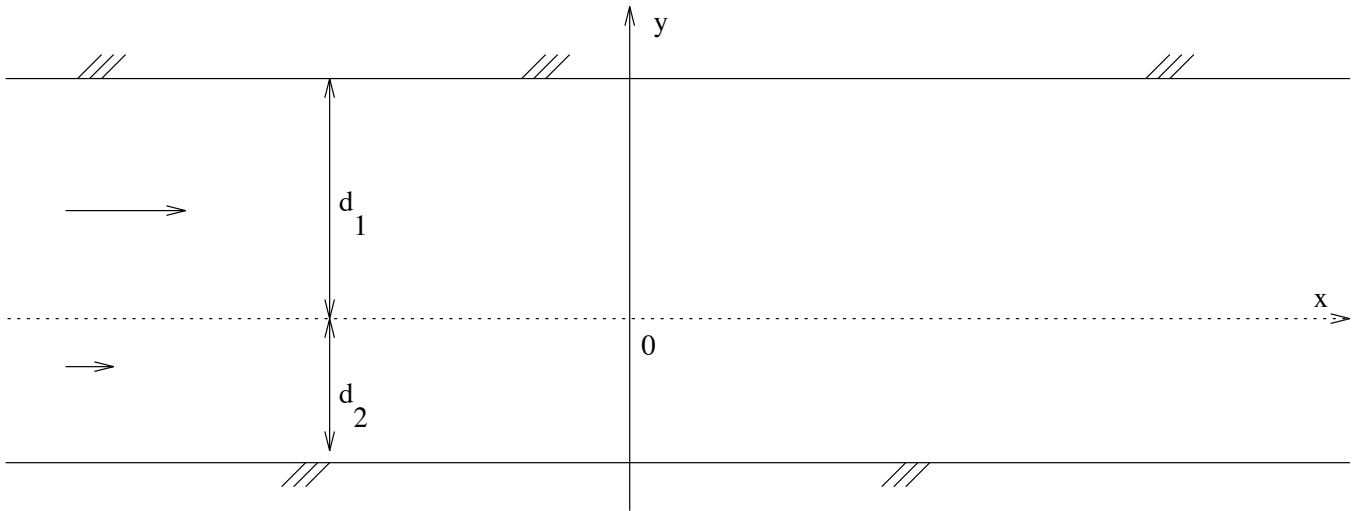


Figure 1.7: Exemple de géométrie simple

Si l'on se donne une vitesse caractéristique  $U_0$  (la vitesse stationnaire de l'interface dans le cas d'un écoulement de Poiseuille de deux fluides par exemple), et une distance, elle aussi caractéristique de l'écoulement (la largeur d'une tranche de fluide pour plusieurs fluides), on va essayer de non dimensionner.

A cette fin, nous allons utiliser des constantes physiques d'un domaine que l'on privilégie. Les relations de continuité resteront des relations de continuité, ce qui nous donne plus de chance de faire converger les algorithmes numériques. Ce non-dimensionnement est, de toute façon, plus conforme à la littérature.

Dans le cas de deux fluides les équations dans chaque domaine diffèrent des équations trouvées pour un seul fluide car le non dimensionnement se fait globalement. Les constantes dépendent donc de la grandeur globale de non dimensionnement choisie, ce qui explique la différence.

Nous posons :

$$\begin{aligned} \underline{u}_k &= U_0 \underline{u}_k^*, \quad p_k = \frac{\eta_{tot1} U_0}{d_1} p^*, \quad \underline{\underline{\sigma}}_{sol k} = \frac{\eta_{tot1} U_0}{d_1} \underline{\underline{\sigma}}_{sol k}^*, \quad 2H = \frac{1}{d_1} 2H^*, \quad \underline{x} = d_1 \underline{x}^* \\ t &= \frac{d_1}{U_0} t^*, \quad \underline{\underline{\sigma}}_{pol k} = \frac{\eta_{tot1} U_0}{d_1} \underline{\underline{\sigma}}_{pol k}^*. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Nous notons

$$\begin{aligned} \text{Re} &= \frac{\rho_1 d_1 U_0}{\eta_{tot1}}, \quad \text{We}_k = \frac{\lambda_k U_0}{d_1}, \quad r_k = \frac{\rho_k}{\rho_1}, \quad m_k = \frac{\eta_{tot k}}{\eta_{tot1}}, \\ \alpha_k &= \frac{\eta_{pol k}}{\eta_{tot k}}, \quad \varepsilon = \frac{d_2}{d_1}, \quad S = \frac{T}{\eta_{tot1} U_0}, \quad F = \frac{U_0}{\sqrt{g d_1}} \end{aligned} \quad (1.11)$$

les constantes de non-dimensionnement et notons  $\underline{k}^*$  un vecteur unitaire aligné et selon le sens de la force extérieure (le plus souvent verticale).

Si l'on reprend (1.3) avec ces nouvelles notations, on a :

$$\begin{aligned} \rho_k \frac{U_0}{d_1} \left( \frac{\partial \underline{u}^*}{\partial t^*} + \underline{u}^* \cdot \nabla^* \underline{u}^* \right) + \frac{U_0 \eta_{tot1}}{d_1^2} \nabla^* p^* &= \rho_k \|\underline{F}\| \underline{k}^* + \frac{U_0 \eta_{tot1}}{d_1^2} \text{div}^* \left( \underline{\underline{\sigma}}_{sol}^* + \underline{\underline{\sigma}}_{pol}^* \right) \\ \Leftrightarrow \frac{\rho_k}{\rho_1} \left( \frac{\rho_1 d_1 U_0}{\eta_{tot1}} \right) \left( \frac{D \underline{u}^*}{D t^*} \right) + \nabla^* p_k^* &= r_k \text{Re} F^{-2} \underline{k}^* + \text{div}^* \left( \underline{\underline{\sigma}}_{sol k}^* + \underline{\underline{\sigma}}_{pol k}^* \right) \end{aligned}$$

en divisant par  $\frac{U_0 \eta_{tot1}}{d_1^2}$ . On oublie à partir de maintenant les \* et on écrit donc l'équation de conservation des moments non-dimensionnée :

$$r_k \text{Re} \frac{D \underline{u}_k}{D t} + \nabla p_k = r_k \text{Re} F^{-2} \underline{k} + \text{div} \left( \underline{\underline{\sigma}}_{sol k} + \underline{\underline{\sigma}}_{pol k} \right) \quad \text{dans } \Omega_k \quad (1.12)$$

L'équation (1.4) se transforme sans problème en :

$$\text{div} \underline{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega_k. \quad (1.13)$$

Quant à (1.5), on utilise les définitions (1.10) et (1.11) pour la réécrire sous la forme (on laisse tomber les \*) :

$$\underline{\underline{\sigma}}_{sol k} = 2(1 - \alpha_k) m_k \underline{\underline{D}}[\underline{u}]. \quad (1.14)$$

L'équation constitutive n'est pas beaucoup plus compliquée (on laisse encore tomber les \*) :

$$\underline{\underline{\sigma}}_{pol k} + \text{We}_k \left( \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}_{pol k}}{\partial t} + \underline{u}_k \cdot \nabla \underline{\underline{\sigma}}_{pol k} - \underline{\underline{g}}(\nabla \underline{u}_k, \underline{\underline{\sigma}}_{pol k}) \right) = 2\alpha_k m_k \underline{\underline{D}}[\underline{u}_k]. \quad (1.15)$$

Enfin, les équations d'interface s'écrivent (cf (1.7), (1.8)) :

$$\begin{cases} \llbracket \underline{u} \rrbracket = 0 \\ \llbracket \left( -p \underline{I} + 2(1 - \alpha_k) m_k \underline{\underline{D}}[\underline{u}_k] + \underline{\underline{\sigma}}_{pol k} \right) \rrbracket \underline{n} = -2H S \underline{n}, \end{cases} \quad (1.16)$$

et les équations de bord :

$$\begin{cases} \underline{u}_1(\Gamma_1) = 0 \\ \underline{u}_2(\Gamma_2) = 0. \end{cases} \quad (1.17)$$

Pour un seul domaine, les équations sont ( $m_k = 1, r_k = 1$ ) :

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u}\right) - (1 - \varepsilon)\Delta \underline{u} + \nabla p & = \operatorname{div} \underline{\underline{\tau}} \\ \operatorname{div} \underline{\underline{\tau}} & = 0 \\ \underline{\underline{\tau}} + \operatorname{We}\left(\frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{\underline{\tau}} + \underline{\underline{\tau}} \underline{\underline{\Omega}} - \underline{\underline{\Omega}} \underline{\underline{\tau}} - a(\underline{\underline{D}} \underline{\underline{\tau}} + \underline{\underline{\tau}} \underline{\underline{D}})\right) & = 2\varepsilon \underline{\underline{D}}. \end{cases} \quad (1.18)$$

Nous noterons dans la suite :

$$\frac{\mathcal{D}_a \underline{\underline{\tau}}}{\mathcal{D}t} = \frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{\underline{\tau}} + \underline{\underline{\tau}} \underline{\underline{\Omega}} - \underline{\underline{\Omega}} \underline{\underline{\tau}} - a(\underline{\underline{D}} \underline{\underline{\tau}} + \underline{\underline{\tau}} \underline{\underline{D}}) \quad (1.19)$$

la dérivée dite d'Oldroyd interpolée.

### 1.3 Dérivation de diverses formes équivalentes

Nous allons utiliser principalement deux outils. Nous ne donnerons qu'une référence [23] pour le premier qui est signalé dans tout livre sur les fluides viscoélastiques. Le deuxième est peut-être moins bien connu. On pourra consulter par exemple [22].

Partons donc de l'équation constitutive typique d'Oldroyd telle qu'elle est apparue lors du non-dimensionnement précédent dans le cas d'un seul fluide (1.18) :

$$\underline{\underline{\tau}} + \operatorname{We} \frac{\mathcal{D}_a \underline{\underline{\tau}}}{\mathcal{D}t} = 2\varepsilon \underline{\underline{D}}[\underline{u}]. \quad (1.20)$$

Si l'on remarque, comme le font [23] que  $\frac{\mathcal{D}_a \underline{\underline{I}}}{\mathcal{D}t} = -2a \underline{\underline{D}}$ , où  $\underline{\underline{I}}$  est la matrice unité, on pense à poser :

$$\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{\tau}}' - \frac{\varepsilon}{\operatorname{We}a} \underline{\underline{I}},$$

et l'on a l'équation équivalente à condition que  $a \neq 0$  :

$$\underline{\underline{\tau}}' + \operatorname{We} \frac{\mathcal{D}_a \underline{\underline{\tau}}'}{\mathcal{D}t} = \frac{\varepsilon}{\operatorname{We}a} \underline{\underline{I}}. \quad (1.21)$$

D'un premier point de vue mathématique, cette équation est pratique car son second membre est simple, mais d'un autre point de vue, malaisée à manipuler car  $\underline{\underline{I}}$  n'appartient à aucun espace classique de type  $L^2$  pour un domaine non borné.

Le deuxième truc que nous allons utiliser consiste à transformer la dérivée interpolée  $\frac{\mathcal{D}_a}{\mathcal{D}t}$  en une dérivée particulière ( $\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla$ ), via un changement de base des formes quadratiques associées aux matrices symétriques. Nous nous contenterons d'une

présentation mathématique, en évoquant la signification physique là où cela semble nécessaire (cf [5] pour l'interprétation tant mathématique que physique). Commençons par remarquer que :

$$\frac{\mathcal{D}_a \underline{\tau}}{\mathcal{D}t} = \frac{D\underline{\tau}}{Dt} + \underline{\tau}(\underline{\Omega} - a\underline{D}) + (-\underline{\Omega} - a\underline{D})\underline{\tau}.$$

On pose  $\underline{m}_a(\underline{x}, t) = \underline{\Omega}(\underline{x}, t) - a\underline{D}(\underline{x}, t)$ , et on introduit  $\tilde{\underline{R}}_a(\underline{X}, s; t)$ , qui est un flot, à  $\underline{u}$  donnée :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{\underline{R}}_a(\underline{X}, s; t)}{\partial t} &= \tilde{\underline{R}}_a(\underline{X}, s; t) \underline{m}_a^T(\chi(\underline{X}, s; t), t) \\ \tilde{\underline{R}}_a(\underline{X}, t; t) &= \underline{I}, \end{cases} \quad (1.22)$$

où  $\chi$  est l'application qui au point qui est en  $\underline{X}$  à l'instant "initial"  $s$  fait correspondre sa position  $\underline{x}$ , à l'instant  $t$ , dans  $\Omega_t$  (cf Figure 1.8).

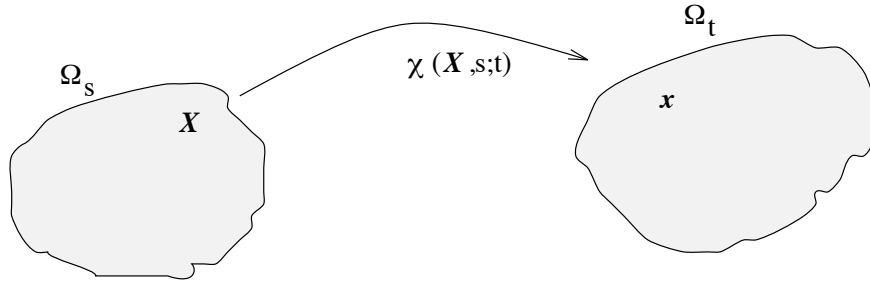


Figure 1.8: Définition de  $\chi$

Enfin, on pose  $\underline{R}_a(\underline{x}, t; s) = \tilde{\underline{R}}_a(\chi(\underline{x}, t; s), s; t)$ , alors ;

$$\begin{aligned} \frac{D\underline{R}_a}{Dt}(\underline{x}, t; s) &= \left( \frac{\partial \tilde{\underline{R}}_a}{\partial t}(\chi(\underline{x}, t; s), s; t) + \frac{\partial \chi_k}{\partial t}(\underline{x}, t; s) \frac{\partial \tilde{\underline{R}}_a}{\partial X_k}(\chi(\underline{x}, t; s), s; t) \right) + \\ &\quad + u_i \frac{\partial \tilde{\underline{R}}_a}{\partial X_k} \frac{\partial \chi_k}{\partial x_i}(\underline{x}, t; s) \\ &= \tilde{\underline{R}}_a(\chi(\underline{x}, t; s), s; t) \underline{m}_a^T(\underline{x}, t) + \\ &\quad + \frac{\partial \tilde{\underline{R}}_a}{\partial X_k}(\chi(\underline{x}, t; s), s; t) \left( \frac{\partial \chi_k}{\partial t}(\underline{x}, t; s) + u_i \frac{\partial \chi_k}{\partial x_i}(\underline{x}, t; s) \right) \\ &= \underline{R}_a(\underline{x}, t; s) \underline{m}_a^T(\underline{x}, t) \end{aligned} \quad (1.23)$$

on a ainsi une fonction de  $\underline{x}, t, s$  où  $s$  correspond à une condition initiale. C'est un genre de flot. Avec cette notation, la dérivée d'Oldroyd s'exprime plus simplement:

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{R}}_a \frac{\mathcal{D}_a \underline{\underline{\tau}}}{\mathcal{D}t} \underline{\underline{R}}_a^T &= \underline{\underline{R}}_a \frac{D \underline{\underline{\tau}}}{Dt} \underline{\underline{R}}_a^T + \underline{\underline{R}}_a \underline{\underline{\tau}} \underline{\underline{m}}_a \underline{\underline{R}}_a^T + \underline{\underline{R}}_a \underline{\underline{m}}_a^T \underline{\underline{\tau}} \underline{\underline{R}}_a^T \\
&= \underline{\underline{R}}_a \frac{D \underline{\underline{\tau}}}{Dt} \underline{\underline{R}}_a^T + \underline{\underline{R}}_a \underline{\underline{\tau}} \frac{D \underline{\underline{R}}_a^T}{Dt} + \frac{D \underline{\underline{R}}_a}{Dt} \underline{\underline{\tau}} \underline{\underline{R}}_a^T \\
&= \frac{D(\underline{\underline{R}}_a \underline{\underline{\tau}} \underline{\underline{R}}_a^T)}{Dt}.
\end{aligned}$$

On remarque ici que l'on a besoin du paramètre  $s$ , car intervertir  $\lim_{s \rightarrow t}$  et  $\frac{D}{Dt}$  donnerait une absurdité. Par conséquent, si l'on multiplie l'équation constitutive sous sa forme (1.20) ou (1.21) par  $\underline{\underline{R}}_a$  à gauche, et par  $\underline{\underline{R}}_a^T$  à droite, on a, en posant  $\underline{\underline{W}}_a(\underline{x}, t; s) = \underline{\underline{R}}_a(\underline{x}, t; s) \underline{\underline{\tau}} \underline{\underline{R}}_a^T(\underline{x}, t; s)$  et  $\underline{\underline{W}}_a'(\underline{x}, t; s) = \underline{\underline{R}}_a(\underline{x}, t; s) \underline{\underline{\tau}}' \underline{\underline{R}}_a^T(\underline{x}, t; s)$  ;

$$\underline{\underline{W}}_a + We \frac{D \underline{\underline{W}}_a}{Dt} = 2\varepsilon \underline{\underline{R}}_a \underline{\underline{D}}[u] \underline{\underline{R}}_a^T(\underline{x}, t; s) \quad (1.24)$$

$$\underline{\underline{W}}_a' + We \frac{D \underline{\underline{W}}_a'}{Dt} = \frac{\varepsilon}{We a} \underline{\underline{R}}_a \underline{\underline{R}}_a^T(\underline{x}, t; s). \quad (1.25)$$

On remarquera que  $\underline{\underline{R}}_a \underline{\underline{R}}_a^T$  vérifie :

$$\begin{cases} \frac{D \underline{\underline{R}}_a \underline{\underline{R}}_a^T}{Dt} = -2a \underline{\underline{R}}_a(\underline{x}, t; s) \underline{\underline{D}}[u](\underline{x}, t) \underline{\underline{R}}_a^T(\underline{x}, t; s) \\ \underline{\underline{R}}_a \underline{\underline{R}}_a^T(\underline{x}, t; t) = \underline{\underline{I}} \end{cases}$$

Quant à  $\underline{\underline{R}}_a^T \underline{\underline{R}}_a$ , il vérifie :

$$\begin{cases} \frac{D \underline{\underline{R}}_a^T \underline{\underline{R}}_a}{Dt} = \underline{\underline{m}}_a \underline{\underline{R}}_a^T \underline{\underline{R}}_a + \underline{\underline{R}}_a^T \underline{\underline{R}}_a \underline{\underline{m}}_a^T \\ \underline{\underline{R}}_a^T \underline{\underline{R}}_a(\underline{x}, t; t) = \underline{\underline{I}}. \end{cases}$$

On a ainsi obtenu des équations équivalentes, plutôt plus maniables dans certains cas que les équations initiales. A notre connaissance, elles n'ont quasiment pas été utilisées mathématiquement et très rarement numériquement [22].

## 1.4 Les équations constitutives en coordonnées cylindriques

Nous partirons de l'équation d'Oldroyd (1.20). On note  $M_\theta$  la matrice qui transforme la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  dans la base des vecteurs  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ ,  $(\sigma_{i,j})$  la matrice des extracontraintes dans la base cartésienne, et  $(\tau_{i,j})$  la matrice des extracontraintes dans la base cylindrique. Alors ;

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } (\tau_{i,j}) = M_{-\theta} (\sigma_{i,j}) M_\theta. \quad (1.26)$$

Partons donc de (1.20) que l'on multiplie par  $M_{-\theta}$  à gauche et par  $M_\theta$  à droite,  $M_\theta$  ne dépendant que de  $\theta$  ;

$$\begin{aligned} & (\tau_{i,j}) + \text{We} \left[ \frac{\partial (\tau_{i,j})}{\partial t} + M_{-\theta} \underline{u} \cdot \underline{\nabla} (\sigma_{i,j}) M_\theta - \right. \\ & \left. \frac{(a-1)}{2} \left[ (M_{-\theta} (\sigma_{i,j}) M_\theta) (M_{-\theta} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) M_\theta) + (M_{-\theta} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) M_\theta) (M_{-\theta} (\sigma_{i,j}) M_\theta) \right] - \right. \\ & \left. \frac{(a+1)}{2} \left[ (M_{-\theta} (\sigma_{i,j}) M_\theta) (M_{-\theta} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) M_\theta) + (M_{-\theta} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) M_\theta) (M_{-\theta} (\sigma_{i,j}) M_\theta) \right] \right] \\ & = 2\varepsilon M_{-\theta} \underline{\underline{D}}[\underline{u}] M_\theta. \end{aligned}$$

Si l'on pose maintenant  $DU = M_{-\theta} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) M_\theta = M_{-\theta} \underline{\underline{D}}\underline{u} M_\theta$ , on a :

$$\begin{aligned} & (\tau_{i,j}) + \text{We} \left[ \frac{\partial (\tau_{i,j})}{\partial t} + M_{-\theta} \underline{u} \cdot \underline{\nabla} (\sigma_{i,j}) M_\theta - \frac{(a-1)}{2} [(\tau_{i,j}) DU + DU^T (\tau_{i,j})] - \right. \\ & \left. \frac{(a+1)}{2} [(\tau_{i,j}) DU^T + DU (\tau_{i,j})] \right] = \varepsilon(DU + DU^T). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Il nous faut donc estimer  $M_{-\theta}(\underline{u} \cdot \underline{\nabla} (\sigma_{i,j}))M_\theta$  en fonction de  $\underline{u} \cdot \underline{\nabla} (\tau_{i,j})$ . Pour cela, on va développer et utiliser (1.26) :

$$\begin{aligned} & \underline{u} \cdot \underline{\nabla} (M_{-\theta} (\sigma_{i,j}) M_\theta) = \\ & = (\underline{u} \cdot \underline{\nabla} M_{-\theta}) (\sigma_{i,j}) M_\theta + M_{-\theta} (\underline{u} \cdot \underline{\nabla} (\sigma_{i,j})) M_\theta + M_{-\theta} (\sigma_{i,j}) (\underline{u} \cdot \underline{\nabla} M_\theta) \\ & = (\underline{u} \cdot \underline{\nabla} M_{-\theta}) M_\theta (\tau_{i,j}) + M_{-\theta} (\underline{u} \cdot \underline{\nabla} (\sigma_{i,j})) M_\theta + (\tau_{i,j}) M_{-\theta} (\underline{u} \cdot \underline{\nabla} M_\theta). \end{aligned}$$

Il nous reste à évaluer  $(\underline{u} \cdot \underline{\nabla} M_{-\theta}) M_\theta$  et sa transposée :  $M_{-\theta} (\underline{u} \cdot \underline{\nabla} M_\theta)$ . Pour cela, nous utilisons le fait que, si  $\underline{u} = u\vec{e}_r + v\vec{e}_\theta + w\vec{e}_z$  ;

$$\begin{aligned} \forall \phi \quad \underline{u} \cdot \underline{\nabla} \phi &= u \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + w \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ (\underline{u} \cdot \underline{\nabla} M_{-\theta}) M_\theta &= \frac{v}{r} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M_{-\theta} (\underline{u} \cdot \underline{\nabla} M_\theta) = \frac{v}{r} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Grâce à ces deux expressions, on peut extraire le terme que l'on cherchait, de (1.28), et on a :

$$M_{-\theta} (\underline{u} \cdot \underline{\nabla} (\sigma_{i,j})) M_\theta = \underline{u} \cdot \underline{\nabla} (\tau_{i,j}) - \frac{v}{r} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\tau_{i,j}) - \frac{v}{r} (\tau_{i,j}) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Avant d'écrire l'équation constitutive, il nous reste à calculer  $DU = M_{-\theta} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) M_\theta$ . En écrivant  $u_1(x, y, z) = u(r(x, y), \theta(x, y), z) \cos \theta(x, y) - v(r(x, y), \theta(x, y), z) \sin \theta(x, y)$  et de même pour les autres composantes dans la base cartésienne, on a, par les propriétés élémentaires du calcul différentiel :

$$DU = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} - v \right) & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right) & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (1.28)$$

Avec cette formule, l'équation constitutive s'écrit :

$$\begin{aligned} & (\tau_{i,j}) + \text{We} \left[ \frac{\partial (\tau_{i,j})}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} (\tau_{i,j}) - \frac{(a-1)}{2} [(\tau_{i,j}) DU + DU^T (\tau_{i,j})] - \right. \\ & \left. \frac{(a+1)}{2} [(\tau_{i,j}) DU^T + DU (\tau_{i,j})] - \frac{v}{r} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\tau_{i,j}) - \frac{v}{r} (\tau_{i,j}) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \\ & = \varepsilon(DU + DU^T). \end{aligned} \quad (1.29)$$

où  $(\tau_{i,j}) = \begin{pmatrix} \tau_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{zz} \\ \tau_{\theta r} & \tau_{\theta\theta} & \tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} & \tau_{z\theta} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$ . Nous devons également écrire l'équation de conservation des moments (cf [24]) avec, de nouveau, le  $\underline{\tau}$  qui contient la partie solvant et la partie polymère. La formule ci-après est valable également pour  $\underline{\tau}$  non symétrique.

$$\begin{aligned} & \text{Re} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] \\ & = -\frac{\partial p}{\partial r} + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial (r\tau_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \right] + f_{1\text{ext}} \\ & \text{Re} \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right] \\ & = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \tau_{\theta r})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{\tau_{\theta r} - \tau_{r\theta}}{r} \right] + f_{2\text{ext}} \\ & \text{Re} \left[ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] \\ & = -\frac{\partial p}{\partial z} + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial (r\tau_{zr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right] + f_{3\text{ext}}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Il nous faut remarquer que cette formule diffère de celle de [24] pour deux raisons.

D'abord, les notations pour le gradient des américains sont  $\underline{\underline{\nabla}} u = \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)_i$  lignes et  $j$  colonnes d'autre part, [24] donne les formules pour un  $\underline{\tau}$  symétrique. Notre formule est valable pour tout  $\underline{\tau}$ .

Comme nous aurons également besoin de la condition d'interface en géométrie cylindrique, nous écrivons la condition en coordonnées cartésiennes :

$$\llbracket -p\underline{I} + 2\eta_{sol}\underline{D}[\underline{u}] + (\sigma_{ij}) \rrbracket (\underline{n})_{cartésien} = -2HS(\underline{n})_{cartésien}.$$

Puisque  $M_{-\theta} = M_{\theta}^T$  est une grandeur géométrique et  $M_{\theta}(\underline{n})_{cylindrique} = (\underline{n})_{cartésien}$ , en multipliant à gauche par  $M_{-\theta}$  l'équation précédente ;

$$\llbracket -p\underline{I} + 2\eta_{sol}DU + (\tau_{ij}) \rrbracket (\underline{n})_{cylindrique} = -2HS(\underline{n})_{cylindrique}, \quad (1.31)$$

où  $DU$  est donné par (1.28).

## 1.5 Les équations constitutives en coordonnées sphériques

De même que dans le cas cylindrique, nous définissons les matrices :

$$M_{\theta,\phi} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.32)$$

$$(\tau_{i,j}) = \begin{pmatrix} \tau_{rr} & \tau_{r,\theta} & \tau_{r,\phi} \\ \tau_{\theta,r} & \tau_{\theta,\theta} & \tau_{\theta,\phi} \\ \tau_{\phi,r} & \tau_{\phi,\theta} & \tau_{\phi,\phi} \end{pmatrix} = M_{\theta,\phi}^T (\sigma_{i,j}) M_{\theta,\phi},$$

où  $\theta \in ]0, \pi[$  désigne l'angle de l'axe  $(Oz)$  avec le rayon vecteur, et  $\phi \in [0, 2\pi[$  l'angle de la projection du vecteur rayon dans le plan  $(Oxy)$  avec  $(Ox)$ . Cette matrice  $M_{\theta,\phi}$  (ou  $M$ ) permet donc de passer de la base sphérique  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$  à la base cartésienne  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  comme on le voit sur le Figure 1.9. C'est également ce que traduit la première relation de (1.32) dans laquelle  $(\tau_{ij})$  est la matrice de l'extracontrainte dans la base sphérique, dont nous cherchons quelle loi de comportement elle suit.

De même que dans le cas cylindrique, nous multiplions (1.21) par  $M^T$  à gauche et par  $M$  à droite. Il nous reste alors à évaluer  $(\underline{u} \cdot \underline{\nabla} M_{\theta,\phi}^T) M_{\theta,\phi}$  et sa transposée :  $M_{\theta,\phi}^T (\underline{u} \cdot \underline{\nabla} M_{\theta,\phi})$ . Les calculs se font de la même façon que dans le cas cylindrique. Il suffit de montrer  $(\underline{u} = u\vec{e}_r + v\vec{e}_\theta + w\vec{e}_\phi)$  :

$$\underline{u} \cdot \underline{\nabla} = u \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{w}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (1.33)$$

On a alors :

$$(\underline{u} \cdot \underline{\nabla} M_{\theta,\phi}^T) M_{\theta,\phi} = \frac{v}{r \cos \phi} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin \theta \\ 0 & 0 & \cos \theta \\ -\sin \theta & -\cos \theta & 0 \end{pmatrix} + \frac{v}{r} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.34)$$



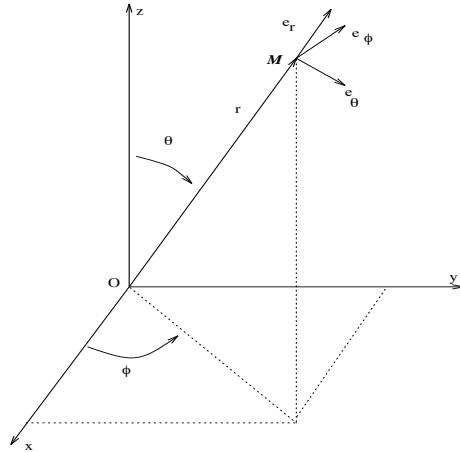


Figure 1.9: Coordonnées sphériques

Il nous reste alors, par les mêmes méthodes que dans le cas cylindrique, à calculer (grâce à MAPLE) :

$$DU = M_{\theta,\phi}^T \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) M_{\theta,\phi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial u}{\partial \theta} - v & \frac{\partial u}{\partial \phi} - w \sin \theta \\ \frac{\partial v}{\partial r} & u + \frac{\partial v}{\partial \theta} & \frac{\partial v}{\partial \phi} - w \cos \theta \\ \frac{\partial w}{\partial r} & \frac{\partial w}{r \partial \theta} & u \sin \theta + \frac{\partial w}{\partial \phi} + v \cos \theta \end{pmatrix} \frac{1}{r \sin \theta}. \quad (1.35)$$

Avec cette notation-formule, l'équation constitutive s'écrit :

$$\begin{aligned} (\tau_{i,j}) + \text{We} \left[ \frac{\partial (\tau_{i,j})}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla (\tau_{i,j}) - \frac{(a-1)}{2} [(\tau_{i,j}) DU + DU^T (\tau_{i,j})] - \right. \\ \left. \frac{(a+1)}{2} [(\tau_{i,j}) DU^T + DU (\tau_{i,j})] - \begin{pmatrix} 0 & \frac{v}{r} & \frac{w}{r} \\ \frac{-v}{r} & 0 & \frac{w \cos \theta}{r \sin \theta} \\ \frac{-w}{r} & \frac{-w \cos \theta}{r \sin \theta} & 0 \end{pmatrix} (\tau_{i,j}) - \right. \\ \left. (\tau_{i,j}) \begin{pmatrix} 0 & \frac{-v}{r} & \frac{-w}{r} \\ \frac{v}{r} & 0 & \frac{-w \cos \theta}{r \sin \theta} \\ \frac{w}{r} & \frac{w \cos \theta}{r \sin \theta} & 0 \end{pmatrix} \right] = \varepsilon(DU + DU^T). \end{aligned} \quad (1.36)$$

Nous retrouvons alors les formules de [24] pour la partie symétrique du gradient des taux de déformations. Cependant, il nous faut faire la même restriction que pour le cas cylindrique. Notre notation du gradient est transposée de celle des américains, et

en particulier de [24]. Si l'on utilise ses formules et les notres, il faut transposer les gradients, et les formules de divergence.

## 1.6 Une résolution exacte de l'équation constitutive lagrangienne

Quand on passe en coordonnées lagrangiennes, il est bien connu que les nouvelles fonctions ne vérifient plus la même équation. En particulier, le terme  $\underline{u} \cdot \nabla_{\underline{\tau}}$  disparaît dans (1.20). Si l'on connaît  $\nabla \underline{u}(\underline{x}, t)$ , on peut utiliser la fonction  $\chi(\underline{x}, t; s) = \underline{X}$  qui nous donne le point  $\underline{X}$  où était la particule à l'instant  $s$ , qui est en  $\underline{x}$  à  $t$ . On indicera par *lag* les grandeurs qui sont définies sur  $\Omega_0 \times (0, T)$ . Typiquement ;

$$\underline{D}_{lag}(\underline{X}, t) = \underline{D}_{Euler}[u](\chi(\underline{X}, 0; t), t).$$

On obtient alors une autre formulation de l'équation constitutive justifiée en p 20 et suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{\underline{R}}_a(\underline{X}, s; t)}{\partial t} = \tilde{\underline{R}}_a(\underline{X}, s; t) \underline{m}_a \\ \underline{m}_{a\,lag}(\underline{X}, t) = \underline{\Omega}_{lag} - a \underline{D}_{lag}(\underline{X}, t) \\ \tilde{\underline{R}}_a(\underline{X}, t; t) = \underline{I}. \end{array} \right. \\ \underline{W}_{a\,lag} = \tilde{\underline{R}}_a \underline{\tau}_{lag} \tilde{\underline{R}}_a^T \\ \underline{W}_{a\,lag} + \text{We} \frac{\underline{W}_{a\,lag}}{Dt} t = 2\varepsilon \tilde{\underline{R}}_a(\underline{X}, 0; t) \underline{D}_{lag} \tilde{\underline{R}}_a(\underline{X}, 0; t) \\ \underline{\tau}_{lag}(0) = \underline{\tau}_0(\underline{X}), \end{array} \right. \quad (1.37)$$

où  $\underline{\Omega}_{lag}$  est la partie antisymétrique du gradient des vitesses et  $\underline{D}_{lag}$  la partie symétrique du même tenseur. Afin de résoudre (1.37) explicitement, nous allons montrer que  $\det \tilde{\underline{R}}_a(\underline{x}, t; s) = 1$ . Une simple dérivation par rapport au temps du déterminant nous donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \det \tilde{\underline{R}}_a}{\partial t} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial \tilde{R}_{11}}{\partial t} & \tilde{R}_{12} \\ \frac{\partial \tilde{R}_{21}}{\partial t} & \tilde{R}_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \tilde{R}_{11} & \frac{\partial \tilde{R}_{12}}{\partial t} \\ \tilde{R}_{21} & \frac{\partial \tilde{R}_{22}}{\partial t} \end{vmatrix} \\ &= \text{tr}(\underline{\Omega}_{lag} - a \underline{D}_{lag}(\underline{x}, t)) \det \tilde{\underline{R}}_a \\ &= 0, \end{aligned}$$

car on suppose l'incompressibilité. On a donc bien  $\det \tilde{\underline{R}}_a(\underline{x}, t; s) = 1$  et nous pouvons exprimer  $\tilde{\underline{R}}_a$  en dimension 2, si  $\underline{u}_{lag} \in L^2(0, T; H^{2+r}(\Omega_0))$  où  $r$  est strictement positif. En effet, la structure d'algèbre de  $H^{1+r}$  en 2D permet d'écrire

$$\underline{\underline{\tilde{R}}}_a(\underline{X}, s; t) = e \int_s^t \underline{\underline{A}}(\underline{\nabla} \underline{u}_{lag})(\underline{x}, t') dt' \underline{\underline{I}} \quad (1.38)$$

où  $\underline{\underline{A}}$  est le tenseur d'ordre 3 traduisant l'application linéaire  $\underline{\underline{R}}_a \mapsto \underline{\underline{R}}_a(\underline{x}, t; s) \underline{\underline{m}}_a$  de (1.37). Si la vitesse est telle que  $\underline{u}_{lag} \in H^0(0, T; H^{2+r}(\Omega))$ , alors, pour  $s$  fixé, l'intégrale  $\int_s^t \underline{\underline{A}}(\underline{\nabla} \underline{u}_{lag})(\underline{x}, t') dt' \in H^1(0, T; H^{1+r}(\Omega))$  qui est une algèbre. L'exponentielle de (1.38) a donc bien un sens. De plus  $\underline{\underline{\tilde{R}}}_a \in H^1(0, T; H^{1+r}(\Omega))$ .

Nous pouvons alors, connaissant  $\underline{\underline{\tilde{R}}}_a$  résoudre (1.37) comme une simple équation différentielle ordinaire :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\tau}}_{lag}(\underline{X}, t) = & \underline{\underline{\tilde{R}}}_a^{-1}(\underline{X}, 0; t) \underline{\underline{\tau}}_0(\underline{X}) \underline{\underline{\tilde{R}}}_a^{-T} e^{-\frac{t}{\text{We}}} + \\ & + \frac{2\varepsilon}{\text{We}} \int_0^t \underline{\underline{\tilde{R}}}_a^{-1}(\underline{X}, 0; t) \underline{\underline{\tilde{R}}}_a(\underline{X}, 0; t') \underline{\underline{D}}_{lag} \underline{\underline{\tilde{R}}}_a^T(\underline{X}, 0; t') \underline{\underline{\tilde{R}}}_a^{-T}(\underline{X}, 0; t) e^{\frac{t'-t}{\text{We}}} dt'. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Remarquons que le  $\underline{\underline{\tau}}$ , solution que l'on vient d'exhiber, est dans  $H^1(0, T; H^{1+r}(\Omega_0))$  si  $\underline{u}_{lag} \in L^2(0, T; H^{2+r}(\Omega_0))$ . Donc le  $\text{div } \underline{\underline{\tau}}$  de l'équation de conservation des moments sera dans  $H^1(0, T; H^r(\Omega))$  et sera donc plus régulier en temps que le  $\Delta \underline{u} \in L^2(0, T; H^r)$ . Cela découle de l'équation constitutive qui est fondamentalement une équation de transport. On utilisera abondamment cette remarque en chapitre 3 sur les frontières libres.

# Chapter 2

## L'écoulement de Poiseuille de plusieurs Fluides Viscoélastiques

### 2.1 Introduction

Notre but est de démontrer l'existence, l'unicité et d'étudier la réponse à une classe de perturbations de l'écoulement de Poiseuille de plusieurs Fluides Visco-Elastiques obéissant à des lois de type Jeffrey. Ceux-ci occuperont des tranches dans lesquelles nous supposerons qu'ils vérifient les équations volumiques suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re}\left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u}\right) - (1 - \varepsilon)\Delta \underline{u} + \nabla p = \underline{f} + \operatorname{div} \underline{\tau} \quad (2.1) \\ \operatorname{div} \underline{u} = 0 \quad (2.2) \\ \underline{\tau} + \operatorname{We}\left(\frac{\partial \underline{\tau}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{\tau} + \underline{\tau} \underline{\Omega} - \underline{\Omega} \underline{\tau} - a(\underline{D} \underline{\tau} + \underline{\tau} \underline{D})\right) = 2\varepsilon \underline{D}, \quad (2.3) \end{array} \right.$$

où  $\underline{u}$  est la vitesse du fluide,  $1 - \varepsilon$  sa viscosité non-dimensionnée et  $\underline{\tau}$  est le tenseur des extracontraintes traduisant les effets visco-élastiques. Tous les termes des équations (2.1) seront indicés par  $i$  dans la  $i^{\text{ème}}$  tranche de fluide, y compris  $\underline{f}$  dont la valeur dimensionnée est constante dans tout le domaine, mais que le non-dimensionnement peut rendre différente dans chaque sous-domaine. On suppose donc avoir fait l'adimensionnement de façon locale, dans la  $i^{\text{ème}}$  tranche au contraire de ce qui a été fait dans l'introduction. Quand il n'y a pas d'ambiguïté, nous n'écrirons pas les indices  $i$ . Au moment d'écrire les relations de continuité, qui sont justifiées à partir des variables dimensionnées, nous devons en tenir compte. L'équation constitutive suivie par le fluide est celle d'un fluide de type Oldroyd (cf. (2.3) ou [25]). Comme précédemment, nous notons  $D[\underline{u}] = (\underline{\nabla} \underline{u} + \underline{\nabla} \underline{u}^T)/2$  et  $\underline{\Omega} = (\underline{\nabla} \underline{u} - \underline{\nabla} \underline{u}^T)/2$ .  $\underline{D}$  est donc la partie symétrique du tenseur des taux de déformations ou gradient des vitesses. Nous utilisons la notation commune à la plupart des mathématiciens pour le gradient  $(\underline{\nabla} \underline{u})_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ . Avec ces

notations, le tenseur  $\underline{\underline{\nabla}}u$  se décompose en  $\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{\Omega}}$ . De plus, nous réutiliserons la notation :

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{D}_a \underline{\underline{\tau}}}{\mathcal{D}t} &= \frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\tau}} + \underline{\underline{\tau}} \underline{\underline{\Omega}} - \underline{\underline{\Omega}} \underline{\underline{\tau}} - a(\underline{\underline{D}} \underline{\underline{\tau}} + \underline{\underline{\tau}} \underline{\underline{D}}) \\ &= \frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\tau}} - \frac{a-1}{2}(\underline{\underline{\tau}} \underline{\underline{\nabla}} \underline{u} + \underline{\underline{\nabla}} \underline{u}^T \underline{\underline{\tau}}) - \frac{1+a}{2}(\underline{\underline{\tau}} \underline{\underline{\nabla}} \underline{u}^T + \underline{\underline{\nabla}} \underline{u} \underline{\underline{\tau}}). \end{aligned}$$

On reconnaîtra dans la dérivée temporelle objective, dont la définition vient d'être rappelée, l'interpolée (avec le paramètre  $a \in [-1,1]$ ) entre les dérivées sous-convectées ( $a=-1$ ; Lower Convected Maxwell) et sur-convectées ( $a=1$ ; Upper-Convected-Maxwell).

En première partie, nous étudierons l'existence stationnaire dans une géométrie plane pour laquelle nous reprenons l'esprit de l'article de Guillopé-Saut [21]. Nous montrerons que les équations non-linéaires d'un écoulement de Poiseuille/Couette perturbé de façon monodimensionnelle n'explorent pas. Rappelons que [21] avait déjà obtenu la stabilité 1D non linéaire inconditionnelle  $L^2$ , pour tout  $\varepsilon$ , d'un écoulement de Couette. Nous trouverons, avec une première méthode un résultat assez faible ( $\varepsilon < \frac{1-a^2}{2(1+|a|)}$ ). Une deuxième méthode, qui repose sur la formulation de [22] [25], réexpliquée en introduction (cf page 20) nous donnera très simplement le caractère borné  $L^2$  de perturbations monodimensionnelles pour tout  $\varepsilon$  (si  $a \neq 0$ ).

En deuxième partie, nous faisons la même étude d'existence-unicité pour une géométrie cylindrique. L'existence globale démontrée sera toujours à interface (plane ou cylindrique) fixée. Nous ne perturberons l'écoulement que dans la direction de propagation et obtiendrons le même caractère borné des solutions axisymétriques.

Puis nous regarderons le problème de l'existence et de l'unicité des solutions du problème d'un écoulement de Poiseuille/Couette de plusieurs Fluides Visco-Elastiques obéissant aux lois de PTT, PTTm. Nous exposerons alors quelques arguments principalement numériques pour améliorer ces lois. Enfin, nous livrons le schéma de démonstration de la stabilité linéaire de l'écoulement de Couette d'un fluide de type PTT ou PTTm soumis à des perturbations 1D. Cette démonstration, trop longue pour être reproduite ici, repose sur une étude du spectre d'un opérateur.

## 2.2 L'écoulement de Poiseuille/Couette en géométrie plane

### 2.2.1 Géométrie, modélisation, hypothèses

#### Poiseuille

D'un point de vue physique, un écoulement de Poiseuille est un écoulement dans un tuyau très long, vu dans la partie éloignée des bords. La cause du mouvement est, d'une part, un piston qui pousse à l'entrée et, d'autre part, la pression en sortie qui

est moins forte qu'en entrée (par définition de la sortie !). La différence entre ces deux pressions donne ce que les physiciens appellent la perte de charge.

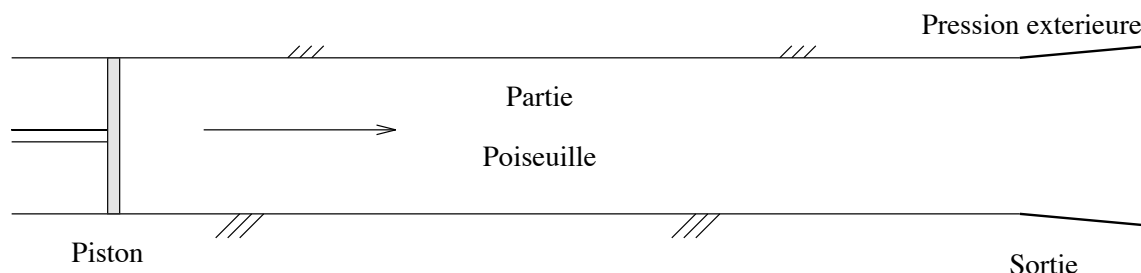


Figure 2.1: L'expérience physique

Cette force de surface se traduit, d'un point de vue mathématique, en une force volumique ( $\nabla p$ ) dont la propagation est instantanée à cause de l'incompressibilité, et qui s'ajoute aux autres forces. Celles-ci se réduisent à la force de pesanteur que l'on peut à peu près toujours négliger, ce que l'on fera. En effet, si  $\rho \simeq 10^3 \text{kgm}^{-3}$ ,  $g \simeq 10 \text{S.I.}$ ,  $\eta \simeq 10^2 \text{S.I.}$ ,  $V \simeq 1 \text{ms}^{-1}$ , alors, on cherche l'ordre de grandeur de  $\frac{\rho g}{\eta L^2}$ . Dans le cas de

l'écoulement de Poiseuille,  $L \simeq 10^{-2}$  (ou moins), le rapport est de l'ordre de  $10^{-2}$ . On négligera donc la pesanteur. En revanche, pour du filage où les longueurs sont de l'ordre du mètre, le même rapport est de l'ordre de 100.

Le problème de la modélisation de cet écoulement vient de ce qu'on ne peut pas traduire de façon satisfaisante les conditions aux limites physiques qui sont mathématiquement incompatibles. Le piston impose en effet une vitesse en entrée uniforme et non nulle. Mais la vitesse du fluide à la paroi est classiquement nulle ! Des théorèmes de mécanique nous permettent néanmoins de dire que les effets sur la vitesse de ce genre d'effets de bord restent localisés à l'entrée. Ce n'est hélas pas le cas pour la pression !

Cependant, pour notre modélisation mathématique, nous négligerons les effets de bord comme tout le monde le fait dans la littérature. On supposera l'écoulement venant de l'infini et allant à l'infini entre deux plaques. L'écoulement est donc bidimensionnel (cf Figure 2.2).

L'écoulement étant invariant par translation selon Ox, la vitesse ne peut dépendre que de y. Supposons donc que la vitesse ait pour composantes  $(u(y), v(y))$ . La condition de divergence nulle nous donne  $v_y = 0$ . Donc,  $v$  est constante et la seule constante acceptable étant nulle, on cherchera le champ des vitesses sous la forme  $\underline{u} = (u(y), 0)$ . La condition d'incompressibilité (2.2) est alors vérifiée.

Pour ce qui est de  $\underline{\tau}$ , on supposera qu'il s'écrit sous la forme :

$$\underline{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{pmatrix}.$$

Les fonctions  $\tau_{ij}$  qui interviennent ci-dessus sont, par suite de l'invariance, indépendantes de  $x$  et ne dépendent que de  $y$ .

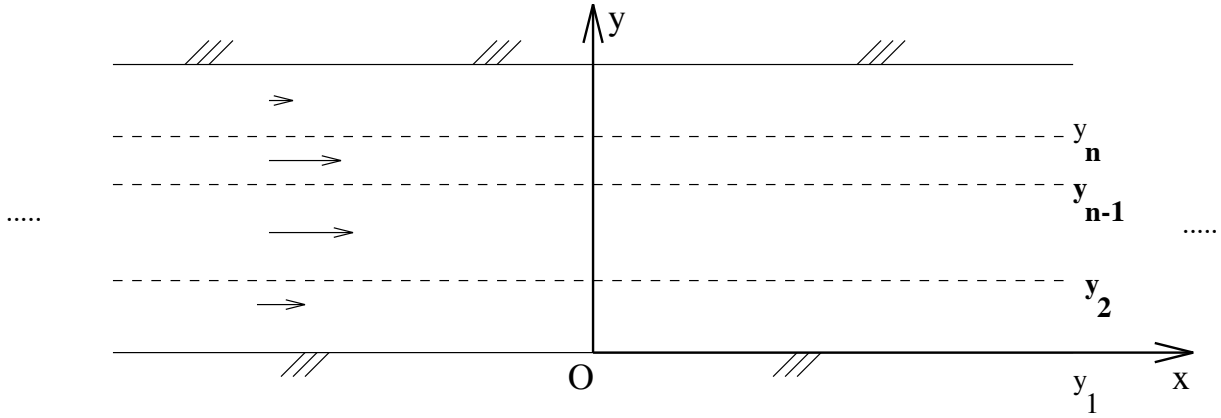


Figure 2.2: La géométrie du domaine mathématique

Quant à la force  $\underline{f}$ , seule force extérieure volumique, elle traduit l'effet de la pesanteur que l'on a convenu de négliger . Un terme du genre de  $\underline{f}$ , venant de  $\frac{\partial p}{\partial x}$  reviendra plus loin. Il traduit la perte de charge qui s'applique au fluide, force extérieure surfacique d'un point de vue physique (ou d'un point de vue formulation variationnelle), et volumique d'un point de vue mathématique en formulation classique.

Avec toutes ces hypothèses, (2.2) étant vérifiée, les équations (2.1) et (2.3) s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} -(1 - \varepsilon)u''(y) + \frac{\partial p}{\partial x} = \tau_{12,y} \end{array} \right. \quad (2.4)$$

$$0 + \frac{\partial p}{\partial y} = \tau_{22,y} \quad (2.5)$$

$$\underline{\underline{\tau}} - We/2[(a - 1)(\underline{\underline{\tau}}\underline{\underline{\nabla}}\underline{\underline{u}} + \underline{\underline{\nabla}}\underline{\underline{u}}^T \underline{\underline{\tau}}) + (a + 1)(\underline{\underline{\tau}}\underline{\underline{\nabla}}\underline{\underline{u}}^T + \underline{\underline{\nabla}}\underline{\underline{u}}\underline{\underline{\tau}})] = \varepsilon(\underline{\underline{\nabla}}\underline{\underline{u}} + \underline{\underline{\nabla}}\underline{\underline{u}}^T) \quad (2.6)$$

Nous aurons à considérer des fluides dont, en cas d'ambiguïté, nous indiquerons par  $i$  les grandeurs  $\underline{u}, \underline{\tau}, p, \varepsilon, a, \cdot$ . Ceux-ci s'écoulent entre les plans  $y = y_1$  et  $y = y_{n+1}$ . L'interface entre le fluide d'indice  $i$  et celui d'indice  $i + 1$  est située en  $y = y_{i+1}$ . Les conditions en  $y_i$  dépendront alors de si  $y = y_i$  est la paroi (vitesse nulle) ou si c'est l'interface avec un autre fluide auquel cas, nous imposerons la continuité de la vitesse et celle de la contrainte normale.

### Couette

Un écoulement de Couette plan est un écoulement de cisaillement entre deux plans infiniment longs dont la vitesse du plan supérieur est imposée. La principale différence avec l'écoulement de Poiseuille vient de ce que le mouvement n'est pas causé par un piston qui induit une force volumique en  $\underline{\nabla}p$ , mais des conditions aux limites non homogènes en vitesse (en  $y = y_{n+1}$  pour l'écoulement de plusieurs fluides). On a donc encore  $\underline{f} = 0$ , et  $\underline{\nabla}p = 0$  (pas de perte de charge).

Nous tenons à remercier A. Poitou pour de fructueuses discussions sur la compréhension de la modélisation de ces écoulements.

## 2.2.2 Existence

Nous voulons montrer l'existence de l'écoulement de plusieurs fluides avec interface droite. Pour cela, comme on l'a dit en introduction de chapitre, nous rendons les équations sans dimension localement à chaque domaine où les constantes  $\varepsilon^i, \text{Re}^i, \cdot$  ont la même forme. Nous n'écrivons donc pas les indices  $i$  du domaine. Après la résolution volumique, nous étudions les conditions d'interface. Nous allons extraire de (2.6), qui est donc l'équation constitutive sans dimension, l'extracontrainte en fonction de  $\underline{u}$ . Pour cela, projetons la relation (2.6), en tenant compte de la symétrie de  $\underline{\underline{\tau}}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{11}(y) = \text{We}(a+1)u'\tau_{12} \\ \tau_{12}(y) = \frac{\text{We}}{2}((a-1)u'\tau_{11} + (a+1)u'\tau_{22}) + \varepsilon u'(y) \\ \tau_{22}(y) = \text{We}(a-1)u'\tau_{12}. \end{array} \right.$$

On peut exprimer toutes les composantes de  $\underline{\underline{\tau}}$  en fonction de  $u$  et des paramètres. Après réduction ;

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{11} = \frac{(1+a)\varepsilon \text{We} u'^2(y)}{1 + \text{We}^2(1-a^2)u'^2(y)} \\ \tau_{12} = \frac{\varepsilon u'(y)}{1 + \text{We}^2(1-a^2)u'^2(y)} \\ \tau_{22} = \frac{(a-1)\varepsilon \text{We} u'^2(y)}{1 + \text{We}^2(1-a^2)u'^2(y)}. \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Suivant les notations de [21], nous appellerons  $k^2 = \text{We}^2(1-a^2) \geq 0$ . Revenons à (2.4,2.5). Il résulte de (2.5) que la pression du fluide s'écrit :

$$p(x, y) = \tau_{22}(y) + \phi(x),$$

où  $\phi$  est une fonction de même régularité que  $p$ . En la dérivant, au besoin au sens des distributions, on trouve, en la reportant dans (2.4) que sa dérivée est constante. Nous appellerons  $-f$  cette constante, qui dépend, *a priori* du domaine  $i$  où on la considère. Donc ;

$$p(x, y) = \tau_{22}(y) - fx + P_0 \quad (2.8)$$

Ayant calculé la pression, nous retiendrons que  $\frac{\partial p}{\partial x}$  est constant. Ce terme, si il est non nul, traduit la pression motrice qui vainc l'inertie que l'on a négligée pour imposer un mouvement au fluide. La première composante de la force ainsi produite est donc  $f$ . Elle n'a rien à voir avec la force volumique du début, qui est nulle. Dans le cas de



Couette, cette perte de charge est nulle. On peut alors prendre une intégrale première de (2.4) comme le font Guillopé-Saut [21] :

$$-(1 - \varepsilon)u'(y) = f y - \alpha + \varepsilon u'(y)/(1 + k^2 u'^2(y)),$$

où  $\alpha$  est une constante d'intégration. Après réduction, et en notant  $Z_\alpha(y) = f y - \alpha$  encore noté  $Z$  par abus de notation, on a l'équation :

$$k^2(1 - \varepsilon)u'^3(y) + k^2 Z(y)u'^2(y) + u'(y) + Z(y) = 0. \quad (2.9)$$

A ce niveau, nous devons distinguer plusieurs cas. Si  $k^2 = 0$  ( $a = \pm 1$  ou  $We=0$ ), alors, l'équation précédente est du premier degré et on a l'existence et l'unicité de solution dans chaque domaine, en fonction de deux paramètres. Nous reviendrons brièvement sur ce cas lors de la discussion de l'existence du Poiseuille à plusieurs fluides. Si  $k^2 \neq 0$  ( $a \in ]-1, 1[$ ), l'équation (2.9) est alors ( $\varepsilon \neq 1$ ) du troisième degré. Par la méthode de Cardan, on peut avoir des formules explicites des solutions. En effet, si on pose  $X = u' + \frac{Z}{3(1 - \varepsilon)}$ , on a :

$$k^2(1 - \varepsilon)X^3 + X\left(\frac{-k^2 Z^2}{3(1 - \varepsilon)} + 1\right) + \left(\frac{2Z^3 k^2}{27(1 - \varepsilon)^2} - \frac{Z(3\varepsilon - 2)}{3(1 - \varepsilon)}\right) = 0.$$

Mise sous cette forme  $X^3 + pX + q = 0$ , l'équation ainsi réduite admet un discriminant :

$$\delta = 4p^3 + 27q^2 = \frac{1}{k^6(1 - \varepsilon)^3} \left[ 4 + \frac{k^2 Z^2(y)(27\varepsilon^2 - 36\varepsilon + 8)}{1 - \varepsilon} + \frac{4k^4 Z^4}{1 - \varepsilon} \right].$$

L'étude de l'annulation du discriminant ci-dessus fait apparaître une équation bicarrée en  $Z$  dont le discriminant est :

$$\Delta = \frac{\varepsilon(9\varepsilon - 8)^3}{(1 - \varepsilon)^2}.$$

La méthode suivie est quasiment la même que celle de Guillopé-Saut [21]. De plus, il est montré dans [21] que si  $\varepsilon \in ]\frac{8}{9}, 1[$ , on a multiplicité de solutions (si  $f$  est quelconque), cas que l'on n'étudiera pas ici (si  $\varepsilon \in ]\frac{8}{9}, 1[$ , un  $f$  suffisamment petit permet d'avoir existence et unicité). Donc, si l'on se restreint à  $\varepsilon \in [0, \frac{8}{9}[$ ,  $\Delta$  est négatif pour tous les choix de perte de charge  $f$  et donc  $\delta$  est positif, et donc (2.9) n'admet qu'une et une seule solution  $\Phi$  :

$$u'(y) = \Phi(Z_\alpha(y))$$

Il résulte facilement de (2.9) que  $\Phi$  est impaire, et on sait que la solution d'une équation polynômiale est une fonction continue de ses coefficients. Donc  $\Phi$  est continue et  $u$  est  $C^1$ , bien que l'on ne lui imposait que d'être dérivable presque partout. On a donc trouvé de façon nécessaire dans chaque tranche  $i$  et pour tout  $y \in [y_i, y_{i+1}]$  :

$$u^i(y) = u^i(y_i) + \int_{y_i}^y \Phi(Z_{\alpha^i}(y')) dy' \quad \forall y \in [y_i, y_{i+1}] \quad (2.10)$$

Grâce à la formule (2.10), nous pouvons dire que l'on a la vitesse dans la  $i^{\text{ème}}$  tranche de fluide en fonction de deux constantes :  $u^i(y_i)$  et  $\alpha^i$ . Nous avons donc résolu le problème à l'intérieur de chaque sous-domaine. De plus, on a un résultat de régularité qui, lui, ne dépend pas de l'unicité :  $u^i(y) \in \mathcal{C}^0([y_i, y_{i+1}])$ .

Pour  $i = 1$ , c'est à dire pour la première tranche de fluide, on a  $u^1(y_1) = 0$  car on suppose l'adhésion à la paroi. Cette hypothèse sera valide, qu'on étudie l'écoulement de Poiseuille ou celui de Couette. Nous avons ainsi amorcé la "récurrence".

Nous allons maintenant garder le paramètre  $\alpha^1$  et montrer qu'on pourra, en fonction de ce  $\alpha^1$  déterminer des  $\alpha^i, u^i(y_i)$ , dans les tranches de fluide successives grâce aux relations d'interface. Dans le dernier sous-domaine, nous utiliserons un lemme qui prouve que si  $\varepsilon^i \in [0, \frac{8}{9}[$ , imposer  $u^n(y_{n+1})$  (en particulier l'imposer nul dans le cas Poiseuille) peut se faire par un unique choix de  $\alpha^1$  qui est le seul paramètre libre (cf 2.3).

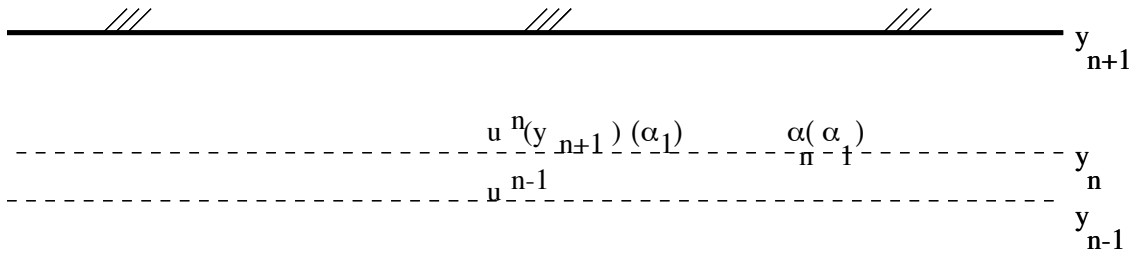


Figure 2.3: Détermination de  $\alpha^1$  à partir de la condition d'adhésion à la paroi

Nous disposons donc des  $u^i$  :

$$\forall y \in [y_i, y_{i+1}] \quad u^i(y) = u^i(y_i) + \int_{y_i}^y \Phi^i(Z_{\alpha^i}(y')) dy',$$

ainsi que des expressions (2.7) de  $\underline{\underline{\tau}}$  et (2.8) de  $p$ .

On rappelle (cf introduction p. 17) que l'hypothèse "physique" de non miscibilité rend la condition de continuité du débit automatiquement vérifiée. De plus, si la viscosité du solvant est non nulle, on peut supposer que la vitesse tangentielle sera elle aussi continue. Comme c'est souligné dans [48], ceci ne constitue qu'une hypothèse. Les conditions que nous imposerons aux grandeurs physiques sont :

$$\begin{aligned} \llbracket \underline{\underline{u}} \rrbracket &= 0 \\ \llbracket \left( -p_k \underline{\underline{I}} + 2\eta_{sol k} \underline{\underline{D}}[\underline{\underline{u}}_k] + \underline{\underline{\sigma}}_{pol k} \right) \rrbracket_n &= -2HT\underline{\underline{n}}. \end{aligned}$$

Dans le cas plan, et à interface non perturbée,  $2H = 0$ . Nous allons donc imposer la continuité de la vitesse physique à l'interface ainsi que l'égalité des forces réelles exercées par chacun des fluides sur l'autre. Le choix du non dimensionnement basé sur les grandeurs locales à chaque domaine nous interdit de n'écrire ces continuités que sur les grandeurs  $\underline{\underline{u}}, p, \underline{\underline{\tau}}$ . Nous les écrivons donc sur  $U_{dim}u, \mathcal{T}_{dim}p, \mathcal{T}_{dim}\underline{\underline{\tau}}$ . La première relation physique de continuité des vitesses nous donne :

$$U_{dim}^{i+1} u^{i+1}(y_{i+1}) = U_{dim}^i \left( u^i(y_i) + \int_{y_i}^{y_{i+1}} \Phi^i(Z_{\alpha^i}(y')) dy' \right), \quad (2.11)$$

et la deuxième :

$$[[\underline{\underline{\sigma}}^i]].\underline{n} = 0, \quad (2.12)$$

où  $[[.]]$  désigne le saut du domaine  $i$  au domaine  $i+1$ ,  $\underline{n}$  est la normale choisie du domaine  $i$  au domaine  $i+1$ , et  $\underline{\underline{\sigma}}^i = \mathcal{T}_{dim}^i (-p^i \underline{I} + (1 - \varepsilon^i) \underline{D}^i + \underline{\underline{\tau}}^i)$  est le tenseur des contraintes globales.

Par conséquent, en remplaçant la pression grâce à (2.8), et l'extracontrainte grâce à (2.7), nous trouvons pour (2.12) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{T}_{dim}^i \left( 0 + (1 - \varepsilon^i) u'^i(y_{i+1}) + \tau_{12}^i(y_{i+1}) \right) = \mathcal{T}_{dim}^{i+1} \left( 0 + (1 - \varepsilon^{i+1}) u'^{i+1}(y_{i+1}) + \tau_{12}^{i+1}(y_{i+1}) \right) \\ \mathcal{T}_{dim}^i \left( -p^i(x, y_{i+1}) + 0 + \tau_{22}^i(y_{i+1}) \right) = \mathcal{T}_{dim}^{i+1} \left( -p^{i+1}(x, y_{i+1}) + 0 + \tau_{22}^{i+1}(y_{i+1}) \right) \end{array} \right.$$

$\Leftrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{T}_{dim}^i F^i(u^i(y_{i+1})) = \mathcal{T}_{dim}^{i+1} F^{i+1}(u^{i+1}(y_{i+1})) \quad \forall x \\ \mathcal{T}_{dim}^i (f^i x + P_0^i) = \mathcal{T}_{dim}^{i+1} (f^{i+1} x + P_0^{i+1}) \quad \forall x, \end{array} \right. \quad (2.13)$$

où  $F^j(X) = X \frac{(1 - (1 - \varepsilon^j) k^j X^2)}{1 + k^j X^2}$ . Après remplacement de  $\tau_{12}$ , la deuxième équation de (2.13) nous donne immédiatement :

$$f^{i+1} = \frac{\mathcal{T}_{dim}^i}{\mathcal{T}_{dim}^{i+1}} f^i \text{ et } P_0^{i+1} = \frac{\mathcal{T}_{dim}^i P_0^i}{\mathcal{T}_{dim}^{i+1}}. \quad (2.14)$$

La pression dimensionnée sera donc uniforme, de la forme  $\alpha x + P_0 + \text{fct}(y)$ . Revenons à (2.13). Grâce à (2.9), on voit que  $F^j(\Phi^j(y)) = -Z_{\alpha^j}(y)$ . Donc la première équation de (2.13) se simplifie (aussi grâce à (2.14)) en :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{dim}^i Z_{\alpha^i}(y_{i+1}) &= \mathcal{T}_{dim}^{i+1} Z_{\alpha^{i+1}}(y_{i+1}) \\ \Leftrightarrow \mathcal{T}_{dim}^i (-\alpha^i) &= \mathcal{T}_{dim}^{i+1} (-\alpha^{i+1}) \\ \Leftrightarrow \alpha^{i+1} &= \frac{\mathcal{T}_{dim}^i}{\mathcal{T}_{dim}^{i+1}} \alpha^i. \end{aligned} \quad (2.15)$$

En particulier, on remarquera que  $\alpha^{i+1}$  dépend de façon croissante et simple de  $\alpha^i$ , donc de  $\alpha^1$ .

Nous avons donc démontré qu'à  $\alpha^1$  donné, on détermine les  $u^i(y_i)$  et  $\alpha^i$  de toutes les tranches de fluide, jusqu'à la dernière, à laquelle on a une condition de plus à faire vérifier à cause de l'adhésion à la paroi.

Dans cette  $n^{\text{ème}}$  tranche, on a  $u^n(y) = u^n(y_n) + \int_{y_n}^y \Phi^n(Z_{\alpha^n}(y')) dy'$ . Or on a remarqué ci-dessus que  $\alpha^n$  était une fonction strictement croissante de  $\alpha^1$ . Il va nous suffire de démontrer que  $u^n(y_{n+1})$  dépend de façon croissante en  $\alpha^1$ . Pour cela, nous allons démontrer le lemme suivant :

**Lemme 2.1**

$\forall \varepsilon \in ]0, \frac{8}{9}[$ ,  $\forall (y, z) \in \mathbb{R}^2 / y < z$  et  $\forall f \in \mathbb{R}^+$ , si  $\Phi(x)$  est l'unique  $(0 \leq \varepsilon < \frac{8}{9})$  solution de :

$$k^2(1 - \varepsilon)\Phi^3(x) + k^2x\Phi^2(x) + \Phi(x) + x = 0 \quad (2.16)$$

alors,  $\Psi : \alpha \mapsto \int_y^z \Phi(fy' - \alpha) dy'$  est une bijection strictement croissante de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Démonstration du Lemme 2.1:

Si  $f \neq 0$  (Poiseuille), par un changement de variable immédiat, on a une autre expression de  $\Psi$ :  $\Psi(\alpha) = \frac{1}{f} \int_{fy-\alpha}^{fz-\alpha} \Phi(x) dx$ . Sa dérivée vaut alors :  $\Psi'(\alpha) = \Phi(fy - \alpha) - \Phi(fz - \alpha)$ .

On se convainc aisément à partir de l'équation (2.16) vérifiée par  $\Phi$ , que  $\Phi$  est non seulement continue, mais dérivable. Puis on utilise le théorème des accroissements finis, pour ramener le problème de croissance de  $\Psi$  au signe de  $\Phi'$ .

Si  $f = 0$  (Couette), on doit regarder la monotonie de  $\Phi$ . Les deux cas se ramènent en fin de compte à l'étude du signe de  $\Phi'$  :

$$\Phi'(x) = -\frac{1 + k^2\Phi^2(x)}{1 + 2k^2x\Phi(x) + 3k^2(1 - \varepsilon)\Phi^2(x)}.$$

En réextrayant  $x$  de l'équation (2.16), que l'on réinjecte dans  $\Phi'(x)$  telle qu'écrite ci-dessus, on a :

$$\Phi'(x) = \frac{-(1 + k^2\Phi^2(x))^2}{1 + k^2\Phi^2 - 2k^2\Phi^2(k^2(1 - \varepsilon)\Phi^2 + 1) + 3k^2(1 - \varepsilon)\Phi^2(1 + k^2\Phi^2)}.$$

On a après réduction, un dénominateur en polynôme bicarré en  $k\Phi$ , dont le discriminant est  $\delta = 9\varepsilon(\varepsilon - 8/9) < 0$ . Donc,  $\Phi$  est strictement décroissante, et  $\Psi$  est strictement croissante. Il reste à préciser dans quel intervalle  $\Psi$  envoie  $\mathbb{R}$ .

Puisque  $\Phi$  est strictement décroissante et que  $x = -\Phi(x) \frac{1+k^2(1-\varepsilon)\Phi^2}{1+k^2\Phi^2}$ ,  $\Phi(x) \rightarrow -\infty$  quand  $x \rightarrow +\infty$  et même  $\Phi \sim -x/(1 - \varepsilon)$ . Donc, pour  $x$  assez grand,  $\Phi'(x)$  sera supérieur à  $-1/(2(1 - \varepsilon))$ . La fonction  $\Phi$  étant impaire, et, puisque  $\Psi'(\alpha) = f(y - z)\Phi'(-\alpha + f\theta(y - z))$ , pour  $-\alpha$  assez grand,  $\Psi'(\alpha) \leq \frac{-f(y-z)}{2(1-\varepsilon)}$  ( $y < z$ ). On en déduit donc que  $\Psi$  tend vers  $-\infty$  en  $-\infty$ . On raisonne symétriquement en  $+\infty$  pour avoir le résultat annoncé.

□

**Remarque 2**

On pourrait aussi obtenir les renseignements sur  $\Phi$  en utilisant la relation  $x = \frac{\Phi(1+k^2(1-\varepsilon)\Phi^2)}{1+k^2\Phi^2}$  comme le font Guillopé-Saut [21].

Revenons à notre objet.  $u^1(y_2)(= \frac{U_{dim}^2}{U_{dim}^1}u^2(y_2))$  est une fonction croissante de  $\alpha^1$  par le lemme. De plus,  $\alpha^2$  l'est également en fonction de  $\alpha^1$ . Par récurrence et par lemme 1, on voit que  $u^{n-1}(y_n) = \frac{U_{dim}^n}{U_{dim}^{n-1}}u^n(y_n)$  et  $\alpha^n$  sont aussi des fonctions strictement croissantes de  $\alpha^1$ . De même, le terme

$$u^n(y_{n+1}) = u^n(y_n) + \int_{y_n}^{y_{n+1}} \Phi(Z_{\alpha^n}(y'))d y'$$

en tant que fonction de  $\alpha^1$  est une bijection strictement croissante de  $\alpha^1 \in \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Il n'existe donc qu'un seul  $\alpha^1$  réel tel que  $u^n(y_{n+1})$  prenne une valeur donnée (0 dans le cas de Poiseuille). On a donc montré le résultat d'existence et d'unicité de l'écoulement de Poiseuille/Couette de  $n$  fluides d'Oldroyd avec viscosité si  $a \in ] - 1, 1[$ .

Si  $a = \pm 1$ , les relations d'interface sont (2.14), (2.15) et

$$U_{dim}^{i+1}u^{i+1}(y_{i+1}) = U_{dim}^i \left( u^i(y_i) + \int_{y_i}^{y_{i+1}} Z_{\alpha^i}(y')d y' \right).$$

On a donc par des calculs simples le même résultat.

**Théorème 2.2**

Les équations (2.4,2.5,2.6) avec  $a_i = \pm 1$  ou  $a_i \in ] - 1, 1[$  et  $\varepsilon_i \in [0, \frac{8}{9}[$ , des nombres non-dimensionnés  $We_i$  et des forces motrices de perte de charge  $f_i \geq 0$  admettent une unique solution. Les grandeurs non-dimensionnées vérifient dans chaque tranche  $y \in [y_i, y_{i+1}]$  :

$$\begin{cases} p(x, y) &= \tau_{22}^i(y) + f^i x + P_0^i \\ u(y) &= u^i(y_i) + \int_{y_i}^y \Phi^i(Z_{\alpha^i}(y'))d y' \\ \tau_{11}^i, \tau_{12}^i, \text{ et } \tau_{22}^i &\text{vérifient (2.7)} \end{cases} \quad (2.17)$$

La relation (2.14) détermine  $P_0^i$  à un  $P_0$  près (la pression extérieure), et  $f^i$  à un terme près qui est, lui, donné par la perte de charge globale. Les  $\alpha^i$  sont tous (sauf  $\alpha^1$ ) déterminés par la relation (2.15), et les  $(u^i(y_i))_{i=2,n}$  le sont par (2.11) en fonction de  $u^1(y_1) = 0$  et  $\alpha^1$ . Celui-ci est la solution (unique) de  $u^n(y_{n+1}) = u^{\text{donnée}}$ .

**Remarque 3**

Il peut sembler plus simple de non-dimensionner avec des paramètres globaux. Hélas, nous n'aurions pas, alors, abouti à des paramètres  $(1 - \varepsilon)$ ,  $Re$ ,  $We$  qui nous ont permis de faire une résolution identique dans tout sous-domaine. En particulier, on n'aurait plus un  $(1 - \varepsilon^i)$  devant  $\Delta u^i$  et  $\varepsilon^i$  devant  $\underline{\underline{D}}[u^i]$  mais  $\frac{\eta_{tot}^i}{\eta_{tot}}(1 - \varepsilon^i)\Delta u^i$  et  $\frac{\eta_{tot}^i}{\eta_{tot}}\varepsilon^i \underline{\underline{D}}[u^i]$ . Même si les relations de continuité sont plus simples à écrire, et sont de simples relations de continuité, on peut penser que les calculs dans chaque domaine s'en seraient trouvé fortement alourdis.

**Remarque 4**

A titre d'information, nous donnons la formule explicite qui permet de calculer la vitesse. Celle-ci s'obtient à partir de (2.9) par les formules de Cardan. Ces formules n'ont d'intérêt que pour  $a \neq \pm 1$ , car on a des formules explicites bien plus simples, que nous ne rappellerons pas, dans le cas  $a = \pm 1$ .

$$u'(y) = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}} \quad (2.18)$$

$$4p^3 + 27q^2 = \frac{1}{k^6(1 - \varepsilon)^3} \left[ 4 + \frac{k^2 Z^2(y)(27\varepsilon^2 - 36\varepsilon + 8)}{1 - \varepsilon} + \frac{4k^4 Z^4}{1 - \varepsilon} \right] \quad (2.19)$$

$$q = \frac{\left( \frac{2Z^3 k^2}{27(1 - \varepsilon)^2} - \frac{Z(3\varepsilon - 2)}{3(1 - \varepsilon)} \right)}{(k^2(1 - \varepsilon))} \quad (2.20)$$

### 2.2.3 Perturbations 1D bornées pour l'écoulement de Poiseuille/ Couette 1

Commençons par restreindre la portée de cette sous-section. Nous n'étudierons pas ici la stabilité de l'interface. Cette étude est reportée au dernier chapitre. Nous allons montrer que la vitesse de l'écoulement d'un seul fluide viscoélastique, soumis à des perturbations monodimensionnelles reste bornée dans  $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(0, 1)) \cap L^2(0, T; H^1)$ . Notons que ce résultat est sensiblement le même que le théorème 3.2 de [21], mais qu'il est obtenu par deux méthodes très différentes. De plus, les écoulements proches semblent pouvoir entrer dans ce nouveau cadre. Ce résultat diffère de la stabilité linéaire monodimensionnelle d'un écoulement de Couette (cf. [21]) et diffère aussi de la stabilité au sens de Lyapunov inconditionnelle dans  $L^2$  et conditionnelle dans  $H^2$  du même écoulement (cf [21]).

Parce que notre résultat est monodimensionnel et n'est pas une vraie stabilité, il est moins intéressant, mais il s'applique aux équations évolutives non linéaires, à l'écoulement de

Poiseuille ainsi, probablement, qu'à des écoulements proches. Dans cette section nous manipulons les équations tensorielles, et nous utilisons la formulation de [22], ou [25] rappelée en p. 20. Le résultat de cette partie ne s'applique pas à  $a = 0$ . Une deuxième méthode sera utilisée en sous section suivante, qui inclut le cas  $a = 0$  (cf p. 41). Le théorème de "non explosion" de l'écoulement de Poiseuille/Couette d'un fluide que nous démontrons s'énonce :

**Théorème 2.3**

Soit  $\varepsilon \in [0, 1[$ ,  $a \neq 0$  et  $(\underline{u}_s = (u_s(y), 0), \underline{\tau}_s, p_s)$  une solution stationnaire du système d'équations (2.1-2.3) complété par les conditions aux limites  $u(0) = 0$  et  $u(1) = u_{\text{donnée}}$ . Toute perturbation  $(\underline{u}, \underline{\tau}, p)$  où  $\underline{u} = (u(y, t), 0)$ , est telle que  $\underline{u} \in$  borné de  $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(0, 1))$ ,  $\underline{\tau} \in$  borné de  $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^\infty(0, 1))$  et  $\underline{u}$  appartient à un borné de  $L^2(0, T; H^1(0, 1)) \forall T \in \mathbb{R}^+$ .

Démonstration du Théorème 2.3:

Nous démontrons le théorème précédent par une méthode d'estimations *a priori* qui montre en même temps l'existence sur  $t \in \mathbb{R}^+$ . En effet, les estimations sur  $\underline{\tau}$  obtenues, on est ramené à un problème de Stokes.

Nous connaissons  $\underline{R}_a^T \underline{R}_a$  d'après (2.38). Nous en déduisons son caractère  $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^\infty(0, 1))$ . Puisque nous avons exclu le cas  $a = 0$ , nous pouvons utiliser la formule (1.25) de l'équation constitutive, déjà vue en introduction. Nous devons donc regarder le comportement de  $(\underline{u} = (u(y, t), 0), \underline{\tau}, p)$  solution perturbative de la solution stationnaire  $(\underline{u}_s, \underline{\tau}_s, p_s)$ , qui vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Re} \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} - (1 - \varepsilon) \Delta \underline{u} + \nabla p = \text{div} \underline{\tau} \quad (2.21) \\ \underline{m}_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 - a \\ -1 - a & 0 \end{pmatrix} \quad (2.22) \\ \underline{W}'_a + \text{We} \frac{D \underline{W}'_a}{Dt} = \frac{\varepsilon}{\text{We} a} (\underline{R}_{as} + \underline{R}_a) (\underline{R}_{as} + \underline{R}_a)^T - \frac{\varepsilon}{\text{We} a} \underline{R}_{as} \underline{R}_{as}^T \quad (2.23) \\ \underline{W}'_a = (\underline{R}_{as} + \underline{R}_a) \left( \frac{\varepsilon}{\text{We} a} \underline{I} + \underline{\tau}_s(\underline{x}) + \underline{\tau}(\underline{x}, t) \right) (\underline{R}_{as} + \underline{R}_a)^T - \underline{R}_{as} \left( \frac{\varepsilon}{\text{We} a} \underline{I} + \underline{\tau}_s(\underline{x}) \right) \underline{R}_{as}^T \quad (2.24) \\ u(0) = 0 = u(1). \quad (2.25) \end{array} \right.$$

On sait déjà que  $\underline{R}_a^T \underline{R}_a$  ne dépend que de  $y$ , du temps  $t$  et de  $s$ . Afin d'obtenir des estimations ponctuelles, nous faisons remarquer que, si on a une vision lagrangienne de l'équation constitutive,  $\underline{W}'_a$ , à  $y$  fixé, satisfait une équation différentielle qui est la même si  $t - s$  est le même, pour tout  $x$ . L'information remonte des caractéristiques qui sont sur les droites  $y = Cste$ .  $\underline{W}'_a$  ne dépend donc que de  $y$ , de  $t - s$  et pas de  $x$ . La

dérivée particulière se réduit donc à une dérivée partielle. Calculons le produit scalaire euclidien dans  $\mathbb{R}^4$  (noté  $(\cdot, \cdot)$ , de norme  $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^4}$ ) :

$$\begin{aligned} \forall y, t, s \quad \|\underline{W}'_a\|^2(y, t; s) + \frac{\text{We}}{2} \frac{\partial \|\underline{W}'_a\|^2}{\partial t}(y, t; s) &= \frac{\varepsilon}{\text{We} a} (\underline{R}^T \underline{R}_a : \underline{W}'_a) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\text{We} |a|} \|\underline{R}^T \underline{R}_a\| \|\underline{W}'_a\|(y, t; s). \end{aligned}$$

Il est alors aisé de conclure (en choisissant par exemple  $s = 0$ ) que :

$$\forall y, t \quad \|\underline{W}'_a\|^2(y, t; 0) \leq \|\underline{\tau}_0(y) + \frac{\varepsilon}{\text{We} a} \underline{I}\|^2 e^{\frac{-t}{\text{We}}} + \frac{\varepsilon^2}{a^2 \text{We}^2} \|\underline{R}_a \underline{R}_a^T\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)}^2 (y) (1 - e^{\frac{-t}{\text{We}}}) \quad (2.26)$$

On a donc bien, comme [21] (Th. 3.2) une estimation  $\underline{W}'_a \in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^\infty(0, 1))$ , ponctuelle sur les contraintes .

On peut également ne pas utiliser l'hypothèse  $\underline{u} \cdot \nabla \underline{W}'_a = 0$  pour n'avoir qu'une estimation dans  $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(0, 1))$ . La méthode est habituelle et ressemble à celle qui vient d'être employée dans  $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^\infty(0, 1))$ . Elle conduit en fait au même résultat que si on intègrait (2.26) en espace :

$$\|\underline{W}'_a\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \|\underline{\tau}_0(y) + \frac{\varepsilon}{\text{We} a} \underline{I}\|_{L^2(0,1)}^2 e^{\frac{-t}{\text{We}}} + \frac{\varepsilon^2}{a^2 \text{We}^2} \|\underline{R}_a \underline{R}_a^T\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(0,1))}^2 (1 - e^{\frac{-t}{\text{We}}}). \quad (2.27)$$

D'où le caractère  $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(0, 1))$  de  $\underline{\tau}$  d'après (2.24). Etudions maintenant  $\underline{u} = (u(y, t), 0)$ . En partant de l'équation du mouvement (2.21), on a :

$$\frac{\text{Re} d}{2} \frac{|\underline{u}|^2}{dt} + (1 - \varepsilon) |\underline{\nabla} u|^2 \leq \|\underline{\tau}\| |\underline{\nabla} u|$$

Grâce à Young, Poincaré et Grönwald, on conclut que :

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(0, 1)) \\ \underline{\nabla} u &\in L^2(0, T; L^2(0, 1)) \quad \forall T < \infty. \end{aligned}$$

De plus, ces estimations montrent l'existence sur tout temps de la solution  $(\underline{u}, p, \underline{\tau})$  □

Après avoir démontré le caractère borné  $L^2$  des perturbations non linéaires monodimensionnelles pour  $a \neq 0$  et tout  $\varepsilon$ , nous allons montrer, de façon plus pédestre, celui pour  $0 \leq \varepsilon < \frac{1 - a^2}{2(1 + |a|)}$  dans la section suivante, sans exclure le cas  $a = 0$ .

## 2.2.4 Perturbations 1D bornées pour l'écoulement de Poiseuille/ Couette 2

Notre résultat de "non explosion" de l'écoulement de Poiseuille Couette d'un fluide viscoélastique s'énonce :



**Théorème 2.4**

Soit  $\varepsilon \in [0, \frac{1-a^2}{2(1+|a|)}]$ , et  $(\underline{u}_s, \underline{\tau}_s, p_s)$  la solution stationnaire du système d'équations (2.1-2.3) complété par les conditions aux limites  $u(0) = 0$  et  $u(1) = u_{donnée}$ . Toute perturbation  $(\underline{u}, \underline{\tau}, p)$  où  $\underline{u} = (u(y, t), 0)$  est telle que  $\underline{u} \in$  borné de  $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(0, 1))$ ,  $\underline{\tau} \in$  borné de  $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^\infty(0, 1))$  et  $\underline{u} \in$  borné de  $L^2(0, T; H^1(0, 1)) \quad \forall T \in \mathbb{R}^+$ .

Démonstration du Théorème 2.4:

Nous utilisons les équations (1.37) justifiées précédemment en des termes de mécanique des milieux continus (cf [22] et p 20) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{m}_a(\underline{x}, t) = \underline{\Omega}[\underline{u}] - a\underline{D}[\underline{u}] = \frac{1}{2}((1-a)\nabla\underline{u} - (1+a)\nabla\underline{u}^T) \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{D\underline{R}_a}{Dt}(\underline{x}, t; s) = \underline{R}_a(\underline{x}, t; s) \underline{m}_a^T(\underline{x}, t) \\ \underline{R}_a(\underline{x}, t; t) = \underline{I} \\ \underline{W}_a(\underline{x}, t; s) = \underline{R}_a(\underline{x}, t; s) \underline{\tau}(\underline{x}, t) \underline{R}_a^T(\underline{x}, t; s) \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (2.28)$$

Nous savons alors (cf [22] et précédemment) que l'équation constitutive s'écrit ;

$$\underline{W}_a + \text{We} \frac{D\underline{W}_a}{Dt} = 2\varepsilon \underline{R}_a(\underline{x}, t; s) \underline{D}[\underline{u}] \underline{R}_a^T(\underline{x}, t; s).$$

Nous indiquerons par un  $s$  les grandeurs stationnaires. Seules, la vitesse  $\underline{u}_s$ , la pression  $p_s$ , et l'exotracontrainte  $\underline{\tau}_s$  ne dépendront pas du temps. Le tenseur  $\underline{R}_{a_s}$  dépendra, lui, du temps, de même que  $\underline{W}_{a_s}$ , comme il est habituel en formulation lagrangienne. Nous allons appliquer une méthode d'estimations aux équations stationnaires d'un écoulement de Poiseuille/Couette :

$$\left\{ \begin{array}{l} -(1-\varepsilon)\Delta\underline{u}_s + \nabla p_s = \underline{f} + \text{div} \underline{\tau}_s(\underline{x}) \\ \underline{m}_a(\underline{u}_s) = \underline{\Omega}[\underline{u}_s] - a\underline{D}[\underline{u}_s] = \frac{u_{s,y}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1-a \\ -1-a & 0 \end{pmatrix} \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{D\underline{R}_{a_s}}{Dt} = \underline{R}_{a_s} \underline{m}_a^T(\underline{u}_s) \\ \underline{R}_{a_s}(\underline{x}, t; t) = \underline{I} \\ \underline{W}_{a_s} = \underline{R}_{a_s} \underline{\tau}_s(\underline{x}) \underline{R}_{a_s}^T \\ \underline{W}_{a_s} + \text{We} \frac{D\underline{W}_{a_s}}{Dt} = 2\varepsilon \underline{R}_{a_s} \underline{D}[\underline{u}_s] \underline{R}_{a_s}^T \\ \underline{u}_s(0) = 0 \text{ et } \underline{u}_s(1) = \underline{u}_{donnée} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

qui montrera également l'existence sur  $t \in \mathbb{R}^+$ . On notera  $\underline{m}_a = \begin{pmatrix} 0 & 1-a \\ -1-a & 0 \end{pmatrix}$  à l'avenir. On a donc  $\underline{m}_a(\underline{u}_s) = \underline{m}_a \times u_{s,y}/2$ . En lemme, nous allons résoudre l'équation qui détermine  $\underline{R}_a$ , une fois donnée  $\underline{u} = (u(y, t), 0)$ . Nous en déduirons aisément  $\underline{R}_{a_s}$ .

**Lemme 2.5**

Soit  $\underline{u} = (u(y, t), 0)$ . Si  $\frac{\partial u}{\partial y}(y, t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ , la solution de (2.28) existe, appartient à  $L^\infty(\mathbb{R}^+, L^\infty(0, 1))$  et vaut :

$$\begin{cases} \underline{R}_a(\underline{x}, t; s) = \underline{I} \cos \omega(y, t; s) + \underline{m}_a^T \frac{\sin \omega(y, t; s)}{\sqrt{1-a^2}} \\ \omega(y, t; s) = \frac{\sqrt{1-a^2}}{2} \int_s^t \frac{\partial u}{\partial y}(t') dt'. \end{cases} \quad (2.29)$$

De plus  $\|\underline{R}_a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(0,1))} \leq \sqrt{\frac{2(1+a^2)}{1-a^2}}$

Démonstration du Lemme 2.5:

Vu la représentation de  $\underline{u} = (u(y, t), 0)$ , et vu l'équation (2.28) vérifiée par  $\underline{R}_a$ , celui-ci ne dépend pas de  $x$  et donc, la dérivée particulaire se réduit à une simple dérivée partielle. On est ramené à résoudre une équation différentielle ordinaire :

$$\frac{\partial \underline{R}_a}{\partial t} = \underline{R}_a \underline{m}_a^T \frac{\partial u}{\partial y}(y, t).$$

On vérifie aisément que (2.29) satisfait aux conditions de l'équation différentielle ordinaire qui vient d'être écrite. Puisque  $\frac{\partial u}{\partial y}(y, t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ , le théorème de Cauchy-Lipschitz nous permet alors de reconnaître en (2.29) la solution de (2.28).

Un calcul rapide permet de trouver les deux valeurs propres de  $\underline{R}_a$  :  $\exp(i\omega(y, t; s))$  et sa conjuguée  $\exp(-i\omega(y, t; s))$ . Si l'on considère  $\underline{R}_a$  comme un vecteur de  $L^\infty(\mathbb{R}^+, (L^2(0, 1))^4)$  muni de sa norme, on calcule aisément sa norme qui est bien inférieure à  $\sqrt{\frac{2(1+a^2)}{1-a^2}}$ .

□

**Remarque 5**

Le fait que  $\underline{R}_a$  appartient à  $L^\infty(\mathbb{R}^+, L^\infty(0, 1))$  repose sur le fait que l'opération  $\underline{R}_a \mapsto \underline{R}_a \underline{m}_a^T$  est traduite, dans  $\mathbb{R}^4$  par une matrice n'admettant que des imaginaires purs comme valeurs propres à  $y$  fixé ( $\pm i\sqrt{1-a^2} \frac{\partial u}{\partial y}$ ). On pourrait espérer étendre ce résultat à des écoulements suffisamment proches d'un Poiseuille ou Couette.

Etudions maintenant les solutions  $(\underline{u}_s + \underline{u} = (u_s + u, 0), p_s + p, \underline{\tau}_s + \underline{\tau}, \underline{W}_{a_s} + \underline{W}_a, \underline{R}_{a_s} + \underline{R}_a)$  de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re} \left( \frac{\partial(\underline{u}_s + \underline{u})}{\partial t} + (\underline{u}_s + \underline{u}) \cdot \nabla(\underline{u}_s + \underline{u}) \right) - (1 - \varepsilon)\Delta(\underline{u}_s + \underline{u}) + \nabla p_s + p = \operatorname{div}(\underline{\tau}_s + \underline{\tau}) \\ \underline{m}_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 - a \\ -1 - a & 0 \end{pmatrix} \\ \underline{m}_a(\underline{u}_s + \underline{u}) = \frac{(\underline{u}_s + \underline{u}) \cdot \underline{y}}{2} \underline{m}_a \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{D(\underline{R}_{a_s} + \underline{R}_a)}{Dt} = (\underline{R}_{a_s} + \underline{R}_a) \underline{m}_a^T (\underline{u}_s + \underline{u}) \\ (\underline{R}_{a_s} + \underline{R}_a)(x, t; t) = \underline{I} \end{array} \right. \\ \underline{W}_{a_s} + \underline{W}_a = (\underline{R}_{a_s} + \underline{R}_a) (\underline{\tau}_s(x) + \underline{\tau}(x)) (\underline{R}_{a_s} + \underline{R}_a)^T \\ \underline{W}_{a_s} + \underline{W}_a + \operatorname{We} \frac{D(\underline{W}_{a_s} + \underline{W}_a)}{Dt} = 2\varepsilon(\underline{R}_{a_s} + \underline{R}_a) \underline{D}[\underline{u}_s + \underline{u}] (\underline{R}_{a_s} + \underline{R}_a)^T \end{array} \right.$$

Les grandeurs “perturbatives”  $(\underline{u}, p, \underline{\tau}, \underline{W}_a, \underline{R}_a)$  du système précédent vérifient donc, si on suppose que l'on ne perturbe la vitesse que dans le sens de propagation ( $\underline{u} = (u(y, t), 0)$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re} \frac{\partial u}{\partial t} - (1 - \varepsilon)\Delta u + \nabla p = \operatorname{div} \underline{\tau} \quad (2.30) \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{D(\underline{R}_{a_s} + \underline{R}_a)}{Dt} = (\underline{R}_{a_s} + \underline{R}_a) \underline{m}_a^T (\underline{u}_s + \underline{u}) \\ (\underline{R}_{a_s} + \underline{R}_a)(x, t; t) = \underline{I} \end{array} \right. \quad (2.31) \\ \underline{W}_a + \operatorname{We} \frac{D\underline{W}_a}{Dt} = 2\varepsilon(\underline{R}_{a_s} + \underline{R}_a) (\underline{D}[\underline{u}_s + \underline{u}]) (\underline{R}_{a_s} + \underline{R}_a)^T - \underline{R}_{a_s} \underline{D}[\underline{u}_s] \underline{R}_{a_s}^T \quad (2.32) \\ \underline{W}_a = (\underline{R}_{a_s} + \underline{R}_a) (\underline{\tau}_s(x) + \underline{\tau}(x, t)) (\underline{R}_{a_s} + \underline{R}_a)^T - \underline{R}_{a_s} \underline{\tau}_s(x) \underline{R}_{a_s}^T \quad (2.33) \\ u(0) = 0 = u(1). \quad (2.34) \end{array} \right.$$

En utilisant le Lemme 2.5 on peut résoudre (2.31) explicitement en :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\underline{R}_{a_s} + \underline{R}_a)(x, t; s) = \underline{I} \cos \omega(y, t; s) + \underline{m}_a^T \frac{\sin \omega(y, t; s)}{\sqrt{1 - a^2}} \\ \omega(y, t; s) = \frac{\sqrt{1 - a^2}}{2} \int_s^t \frac{\partial(u_s + u)}{\partial y}(y, t') dt' . \end{array} \right. \quad (2.35)$$

On a donc, aussi en application du lemme 2.5  $\underline{R}_{a_s} + \underline{R}_a \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^\infty(0, 1))$  et même :

$$\|\underline{R}_{a_s}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L^\infty(0, 1))} \leq \sqrt{\frac{2(1 + a^2)}{1 - a^2}} \quad \text{et} \quad \|\underline{R}_{a_s} + \underline{R}_a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L^\infty(0, 1))} \leq \sqrt{\frac{2(1 + a^2)}{1 - a^2}}. \quad (2.36)$$

Afin de traiter (2.32), on voit que nous avons besoin de résultats intermédiaires liant  $|\underline{R}_{a_s} \underline{D}[\underline{u}_s] \underline{R}_{a_s}^T|_{L^2}$  et  $|\underline{D}[\underline{u}_s]|_{L^2}$ . La constante de continuité qui interviendra nous servira également à relier le  $|\underline{\tau}|$  qui apparaîtra dans l'estimation  $(2.30 \cdot \underline{u})_{L^2}$ , à  $|\underline{W}_a|$ .

On se pose donc le problème de savoir quelle est la constante optimale  $C$ , si elle existe, telle que :

$$| \underline{R}_a \underline{\tau} \underline{R}_a^T |^2 \leq C^2 | \underline{\tau} |^2 .$$

Ce problème est résolu par le lemme suivant :

**Lemme 2.6**

Si  $\underline{R}_a(\underline{x}, t; s) = \underline{I} \cos \omega(y, t; s) + \underline{m}_a^T \frac{\sin \omega(y, t; s)}{\sqrt{1-a^2}}$  et  $\omega(y, t; s) = \frac{\sqrt{1-a^2}}{2} \int_s^t \frac{\partial u}{\partial y}(t') dt'$ , alors,  $\forall \underline{\tau} \in (L^2(0, 1))_{sym}^4$  et pour la norme associée notée  $|\cdot|$  :

$$| \underline{R}_a \underline{\tau} \underline{R}_a^T | \leq \frac{1+|a|}{\sqrt{1-a^2}} | \underline{\tau} | .$$

Puisque  $\underline{R}_a^{-1} = \underline{R}_{-a}$ , on a de même

$$| \underline{R}_a^{-1} \underline{W}_a \underline{R}_a^{-T} | \leq \frac{1+|a|}{\sqrt{1-a^2}} | \underline{W}_a | \quad \forall \underline{W}_a \in (L^2)_{sym}^4$$

Démonstration du Lemme 2.6:

Commençons par définir la norme d'un élément de  $(L^2)_{sym}^4$ . On posera

$$| A |^2 = \int_{[0,1]} \|A\|^2 dy,$$

où  $\|A\|^2 = \sum_{i,j} a_{i,j}^2$  est la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^4$ . Une fois cette définition donnée, on va chercher la constante optimale en faisant intervenir la fonction  $\phi$  suivante;

$$\phi(\underline{\tau}) = | \underline{R}_a \underline{\tau} \underline{R}_a^T |^2 - C^2 | \underline{\tau} |^2 .$$

Puisque la norme euclidienne dérive d'un produit scalaire, en un extremum de  $\phi$ , on a nécessairement :  $\underline{R}_a^T \underline{R}_a \underline{\tau} \underline{R}_a^T \underline{R}_a = C^2 \underline{\tau}$ . Donc le  $C^2$  et le  $\underline{\tau}$  correspondent à des valeurs propres et vecteurs propres de :

$$\underline{\tau} \mapsto \underline{R}_a^T \underline{R}_a \underline{\tau} \underline{R}_a^T \underline{R}_a .$$

Puisque  $\underline{R}_a^T \underline{R}_a$  est symétrique, on peut la diagonaliser (les valeurs propres sont notées  $\lambda_1, \lambda_2$ ) dans une base orthonormale et le problème aux valeurs propres auquel on était parvenu revient à trouver un  $\underline{\tau}'$  (dépendant de  $\underline{\tau}$  via la matrice de changement de base) tel que :

$$\begin{cases} (C^2 - \lambda_1^2)\tau'_{11} = 0 \\ (C^2 - \lambda_1\lambda_2)\tau'_{12} = 0 \\ (C^2 - \lambda_2^2)\tau'_{22} = 0. \end{cases}$$

Il nous reste donc à trouver les valeurs propres de  $\underline{\underline{R}}_a^T \underline{\underline{R}}_a$  pour trouver le  $C^2$  optimal. Plutôt que de calculer  $\underline{\underline{R}}_a^T \underline{\underline{R}}_a$  à partir de la formule explicite (2.29), nous allons calculer directement  $\underline{\underline{R}}_a^T \underline{\underline{R}}_a$  par l'équation qui la caractérise :

$$\begin{cases} \frac{D(\underline{\underline{R}}_a^T \underline{\underline{R}}_a)}{Dt} = \underline{\underline{m}}_a \underline{\underline{R}}_a^T \underline{\underline{R}}_a + \underline{\underline{R}}_a^T \underline{\underline{R}}_a \underline{\underline{m}}_a^T \\ (\underline{\underline{R}}_a^T \underline{\underline{R}}_a)(\underline{x}, t; t) = \underline{\underline{I}}. \end{cases} \quad (2.37)$$

La matrice  $\underline{\underline{R}}_a^T \underline{\underline{R}}_a$  ne peut, par les mêmes arguments qu'avant, dépendre de  $x$ , mais que de  $y$ . Donc, quand on met (2.37) sous forme vectorielle, on a :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} (\underline{\underline{R}}_a^T \underline{\underline{R}}_a)_{11} \\ (\underline{\underline{R}}_a^T \underline{\underline{R}}_a)_{12} \\ (\underline{\underline{R}}_a^T \underline{\underline{R}}_a)_{21} \\ (\underline{\underline{R}}_a^T \underline{\underline{R}}_a)_{22} \end{pmatrix} = u_y \begin{pmatrix} 0 & 1-a & 1-a & 0 \\ -(1+a) & 0 & 0 & 1-a \\ -(1+a) & 0 & 0 & 1-a \\ 0 & -(1+a) & -(1+a) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\underline{\underline{R}}_a^T \underline{\underline{R}}_a)_{11} \\ (\underline{\underline{R}}_a^T \underline{\underline{R}}_a)_{12} \\ (\underline{\underline{R}}_a^T \underline{\underline{R}}_a)_{21} \\ (\underline{\underline{R}}_a^T \underline{\underline{R}}_a)_{22} \end{pmatrix}.$$

On trouve alors :

$$\begin{cases} (\underline{\underline{R}}_a^T \underline{\underline{R}}_a)(\underline{x}, t; s) = \begin{pmatrix} \frac{1+a \cos 2\omega}{1+a} & 0 \\ 0 & \frac{1-a \cos 2\omega}{1-a} \end{pmatrix} - \frac{a \sin 2\omega}{\sqrt{1-a^2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \omega(y, t; s) = \frac{\sqrt{1-a^2}}{2} \int_s^t \frac{\partial u}{\partial y}(y, t') dt'. \end{cases} \quad (2.38)$$

Nous pouvons maintenant chercher ses valeurs propres qui sont les suivantes :

$$\lambda = \frac{1-a^2 \cos \omega}{1-a^2} \pm \sqrt{\left(\frac{1-a^2 \cos \omega}{1-a^2}\right)^2 - 1}.$$

Or  $x \mapsto x + \sqrt{x^2 - 1}$  est strictement croissante sur  $]1, \frac{1+a^2}{1-a^2}[$ . Donc la plus grande valeur propre possible est  $\frac{(1+|a|)^2}{1-a^2}$ , et est atteinte pour  $\omega = -1$ . La plus petite est égale à son inverse car le déterminant de  $\underline{\underline{R}}_a^T \underline{\underline{R}}_a$  vaut 1. La constante optimale est donc  $\frac{1+|a|}{\sqrt{1-a^2}}$  ;

$$\forall \underline{\underline{\tau}} \in (L^2)_{sym}^4 \quad |\underline{\underline{R}}_a \underline{\underline{\tau}} \underline{\underline{R}}_a^T| \leq \frac{1+|a|}{\sqrt{1-a^2}} |\underline{\underline{\tau}}| \quad (2.39)$$

Nous aurons encore besoin, dans la suite de la constante optimale  $C'$  telle que  $|\underline{\underline{R}}_a^{-1} \underline{\underline{W}}_a \underline{\underline{R}}_a^{-T}| \leq C' |\underline{\underline{W}}_a|$ . Puisque  $\underline{\underline{R}}_a^{-1} = \underline{\underline{R}}_{-a}$ , qui se voit bien à partir des formules (2.29), on a  $C' = \frac{1+|a|}{\sqrt{1-a^2}}$  et :

$$\forall \underline{W}_a \in (L^2)_{sym}^4 \quad | \underline{R}_a^{-1} \underline{\tau} \underline{R}_a^{-T} | \leq \frac{1+|a|}{\sqrt{1-a^2}} | \underline{W}_a |. \quad (2.40)$$

Le lemme est donc démontré.  $\square$

Nous pouvons maintenant chercher des estimations *a priori* à partir de (2.30,2.32,2.34). L'équation de conservation des moments (2.30) nous donne alors, grâce à (2.34), et à l'hypothèse que l'on ne perturbe que dans la direction de propagation ;

$$\frac{\text{Re } d | u |^2}{2 dt} + (1 - \varepsilon) | \nabla u |^2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} | \underline{\tau} | | \nabla u |.$$

Il nous faut donc traduire la dépendance de  $\underline{\tau}$  en  $\underline{W}_a$ . Pour cela, on utilise l'équation (2.33) et le Lemme 2.6 :

$$\begin{aligned} | \underline{\tau} | (t) &\leq | \underline{\tau} + \underline{\tau}_s | + | \underline{\tau}_s | = | (\underline{R}_{a_s} + \underline{R}_a)^{-1} (\underline{W}_{a_s} + \underline{W}_a) (\underline{R}_{a_s} + \underline{R}_a)^{-T} | + | \underline{\tau}_s | \\ &\leq \frac{1+|a|}{\sqrt{1-a^2}} (| \underline{W}_{a_s} | + | \underline{W}_a |) + | \underline{\tau}_s |. \end{aligned}$$

Il nous faut maintenant une estimation sur  $| \underline{\tau}_s |_{L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(0,1))}$  (évidente) et sur  $| \underline{W}_{a_s} |_{L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(0,1))}$ . On montre aisément grâce à la relation constitutive que vérifie  $\underline{W}_{a_s}$  ;

$$\begin{aligned} \underline{W}_{a_s} + \text{We} \frac{D \underline{W}_{a_s}}{Dt} &= 2\varepsilon \underline{R}_{a_s} \underline{D}[\underline{u}_s] \underline{R}_{a_s}^T \\ \Rightarrow | \underline{W}_{a_s} |^2 + \frac{\text{We}}{2} \frac{d | \underline{W}_{a_s} |^2}{dt} &\leq \frac{1}{2} (2\varepsilon \frac{1+|a|}{\sqrt{1-a^2}} | \underline{D}[\underline{u}_s] |)^2 + \frac{1}{2} | \underline{W}_{a_s} |^2, \end{aligned}$$

que ce tenseur appartient à  $L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(0,1))$  (car  $u'_s \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(0,1))$ , comme on l'a vu en p 35 et puisque  $\underline{u}_s$  est une solution stationnaire). Par conséquent on peut combiner ces estimations ;

$$\begin{aligned} \frac{\text{Re } d | u |^2}{2 dt} + (1 - \varepsilon) | \nabla u |^2 &\leq \frac{| \underline{\tau} | | \nabla u |}{\sqrt{2}} \\ &\leq \frac{1+|a|}{\sqrt{2(1-a^2)}} | \underline{W}_a | | \nabla u | + L^\infty \times | \nabla u | \\ &\leq \frac{1+|a|}{2\sqrt{2(1-a^2)}} (\beta | \nabla u |^2 + \frac{| \underline{W}_a |^2}{\beta}) + L^\infty + \frac{\theta}{2} | \nabla u |^2 \end{aligned}$$

où on note  $L^\infty$  une fonction que l'on pourrait expliciter mais qui n'a aucun intérêt à part d'être dans  $L^\infty(\mathbb{R}^+)$  et où l'on fait intervenir des constantes  $\beta, \theta$  que nous réglerons après pour un résultat optimal. Après réduction, on a :

$$\frac{d|u|^2}{dt} + \frac{1}{\text{Re}} \left( 2(1-\varepsilon) - \frac{\beta(1+|a|)}{\sqrt{2(1-a^2)}} - \theta \right) |\underline{\nabla}u|^2 \leq L^\infty + \frac{(1+|a|)|\underline{W}_a|^2}{\sqrt{2(1-a^2)}\text{Re}\beta}. \quad (2.41)$$

Le traitement de l'équation constitutive (2.32) est un peu plus simple. On utilise deux paramètres  $\gamma, \delta$  que nous réglerons plus loin à leur valeur optimale.

$$\begin{aligned} |\underline{W}_a|^2 + \frac{\text{We}}{2} \frac{d|\underline{W}_a|^2}{dt} &\leq \sqrt{2}\varepsilon \frac{1+|a|}{\sqrt{1-a^2}} (|\underline{\nabla}(u_s+u)| |\underline{W}_a| + |\underline{\nabla}u_s| |\underline{W}_a|) \\ &\leq \frac{2\sqrt{2}\varepsilon(1+|a|)}{\sqrt{1-a^2}} |\underline{\nabla}u_s| |\underline{W}_a| + \frac{\sqrt{2}\varepsilon(1+|a|)}{\sqrt{1-a^2}} |\underline{\nabla}u| |\underline{W}_a| \\ &\leq \frac{\varepsilon(1+|a|)}{\sqrt{1-a^2}} \left( \sqrt{2} \frac{|\underline{\nabla}u_s|^2}{\delta} + \sqrt{2}\delta |\underline{W}_a|^2 + \frac{|\underline{\nabla}u|^2}{\sqrt{2}\gamma} + \frac{|\underline{W}_a|^2 \gamma}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

D'où, après réduction :

$$\frac{d|\underline{W}_a|^2}{dt} + \frac{1}{\text{We}} \left( 2 - \frac{2\sqrt{2}\varepsilon(1+|a|)\delta}{\sqrt{1-a^2}} - \frac{\sqrt{2}\varepsilon(1+|a|)\gamma}{\sqrt{1-a^2}} \right) |\underline{W}_a|^2 \leq L^\infty + \frac{\sqrt{2}\varepsilon(1+|a|)|\underline{\nabla}u|^2}{\sqrt{1-a^2}\gamma\text{We}} \quad (2.42)$$

Nous allons maintenant chercher une combinaison linéaire de (2.41) et de (2.42) à coefficients positifs, qui nous fasse obtenir une inégalité différentielle simple. Pour cela, nous faisons  $\zeta(2.41) + \eta(2.42)$  et nous notons  $X = \zeta|u|^2 + \eta|\underline{W}_a|^2$  :

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} + \left[ \frac{\zeta}{\text{Re}} \left( 2(1-\varepsilon) - \frac{\beta(1+|a|)}{\sqrt{2(1-a^2)}} - \theta \right) - \frac{\sqrt{2}\varepsilon(1+|a|)\eta}{\sqrt{1-a^2}\gamma\text{We}} \right] |\underline{\nabla}u|^2 + \\ + \left[ \frac{\eta}{\text{We}} \left( 2 - \frac{2\sqrt{2}\varepsilon(1+|a|)\delta}{\sqrt{1-a^2}} - \frac{\sqrt{2}\varepsilon(1+|a|)\gamma}{\sqrt{1-a^2}} \right) - \frac{(1+|a|)\zeta}{\sqrt{1-a^2}\beta\text{Re}\sqrt{2}} \right] |\underline{W}_a|^2 \leq L^\infty. \end{aligned}$$

On cherche donc  $\beta, \gamma, \delta, \zeta, \eta, \theta$  tous strictement positifs tels que :

$$\begin{cases} \frac{\zeta}{\text{Re}} \left( 2(1-\varepsilon) - \frac{\beta(1+|a|)}{\sqrt{2(1-a^2)}} - \theta \right) - \frac{\sqrt{2}\varepsilon(1+|a|)\eta}{\sqrt{1-a^2}\gamma\text{We}} > 0 \\ \frac{\eta}{\text{We}} \left( 2 - \frac{2\sqrt{2}\varepsilon(1+|a|)\delta}{\sqrt{1-a^2}} - \frac{\sqrt{2}\varepsilon(1+|a|)\gamma}{\sqrt{1-a^2}} \right) - \frac{(1+|a|)\zeta}{\sqrt{1-a^2}\beta\text{Re}\sqrt{2}} > 0. \end{cases} \quad (2.43)$$

on voit tout de suite apparaître deux conditions nécessaires :

$$\begin{cases} 2(1-\varepsilon) - \frac{\beta(1+|a|)}{\sqrt{2(1-a^2)}} - \theta > 0 \\ 2 - \frac{2\sqrt{2}\varepsilon(1+|a|)\delta}{\sqrt{1-a^2}} - \frac{\sqrt{2}\varepsilon(1+|a|)\gamma}{\sqrt{1-a^2}} > 0. \end{cases} \quad (2.44)$$

Ces deux conditions satisfaites, (2.43) équivaut à :

$$\begin{aligned} & \frac{\beta\sqrt{2(1-a^2)}\eta}{(1+|a|)\text{We}} \left( 2 - \frac{2\sqrt{2}\varepsilon(1+|a|)\delta}{\sqrt{1-a^2}} - \frac{\sqrt{2}\varepsilon(1+|a|)\gamma}{\sqrt{1-a^2}} \right) > \\ & > \frac{\zeta}{\text{Re}} > \frac{\sqrt{2}\varepsilon\eta(1+|a|)}{\gamma\text{We}\sqrt{1-a^2}(2(1-\varepsilon) - \frac{\beta(1+|a|)}{\sqrt{2(1-a^2)}} - \theta)}. \end{aligned}$$

Or cette double inégalité ne sera vérifiée pour un couple  $\zeta, \eta$  de réels strictement positifs que si :

$$\frac{\beta(1-a^2)}{(1+|a|)^2} \left( 2 - \frac{2\sqrt{2}\varepsilon(1+|a|)\delta}{\sqrt{1-a^2}} - \frac{\sqrt{2}\varepsilon(1+|a|)\gamma}{\sqrt{1-a^2}} \right) > \frac{\varepsilon}{\gamma(2(1-\varepsilon) - \frac{\beta(1+|a|)}{\sqrt{2(1-a^2)}} - \theta)} \quad (2.45)$$

A ce niveau, on va utiliser les deux conditions nécessaires (2.44) pour faire un changement de variables :

$$\begin{aligned} 2(1-\varepsilon) - \frac{\beta(1+|a|)}{\sqrt{2(1-a^2)}} > \theta > 0 & \Rightarrow \theta = (2(1-\varepsilon) - \frac{\beta(1+|a|)}{\sqrt{2(1-a^2)}})(1-\theta') \text{ et } \theta' \in ]0, 1[ \\ 2 - \frac{\sqrt{2}\varepsilon(1+|a|)\gamma}{\sqrt{1-a^2}} > \frac{2\sqrt{2}\varepsilon(1+|a|)\delta}{\sqrt{1-a^2}} > 0 & \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}\varepsilon(1+|a|)\delta}{\sqrt{1-a^2}} = (2 - \frac{\sqrt{2}\varepsilon(1+|a|)\gamma}{\sqrt{1-a^2}})(1-\delta') \text{ et } \delta' \in ]0, 1[ \end{aligned}$$

Avec ces notations, (2.45) se réduit à :

$$\frac{\beta\gamma(1-a^2)}{(1+|a|)^2} \left( 2 - \frac{\sqrt{2}\varepsilon(1+|a|)\gamma}{\sqrt{1-a^2}} \right) \delta' (2(1-\varepsilon) - \frac{\beta(1+|a|)}{\sqrt{2(1-a^2)}}) \theta' > \varepsilon \quad (2.46)$$

On a alors deux conditions dérivées des conditions nécessaires (2.44) :

$$\begin{aligned} 2 > \frac{\sqrt{2}\varepsilon(1+|a|)\gamma}{\sqrt{1-a^2}} > 0 & \Rightarrow \frac{\sqrt{2}\varepsilon(1+|a|)\gamma}{\sqrt{1-a^2}} = 2(1-\gamma') \text{ et } \gamma' \in ]0, 1[ \\ 2(1-\varepsilon) > \frac{\beta(1+|a|)}{\sqrt{2(1-a^2)}} > 0 & \Rightarrow \frac{\beta(1+|a|)}{\sqrt{2(1-a^2)}} = 2(1-\varepsilon)(1-\beta') \text{ et } \beta' \in ]0, 1[. \end{aligned}$$

(2.46) se réduit donc à trouver  $(\beta', \gamma', \delta', \theta') \in ]0, 1[^4$  tels que :

$$(1-\beta')\beta'(1-\gamma')\gamma'\delta'\theta' > \frac{\varepsilon^2(1+|a|)^4}{16(1-\varepsilon)^2(1-a^2)^2}.$$

Or le membre de gauche de l'inégalité précédente prendra des valeurs quelconques positives et inférieures à  $1/16$  sur  $]0, 1[^4$ . donc la condition équivalente à laquelle on est arrivé est  $\frac{(1-a^2)^2}{(1+|a|)^4} > \frac{\varepsilon^2}{(1-\varepsilon)^2} \Leftrightarrow \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} > \frac{(1+|a|)^2}{1-a^2}$ . Pour de tels  $\varepsilon$ , on peut trouver



des  $(\beta, \gamma, \delta, \theta)$  tels que (2.45) soit vérifiée. En multipliant (2.45) par  $\frac{\eta}{We}$ , on pourra alors choisir un  $\frac{\zeta}{Re}$  pour vérifier (2.43).

□

## 2.3 L'écoulement de Poiseuille en géométrie cylindrique

On se pose le problème de l'écoulement de  $n$  fluides dans une filière cylindrique. Des théorèmes d'existence stationnaire et de non explosion similaires à ceux du cas plan seront énoncés et démontrés.

### 2.3.1 Géométrie, modélisation, hypothèses

Rappelons l'essentiel de la description de l'écoulement de Poiseuille, dont les détails sont donnés p 30, à savoir le caractère invariant selon  $Oz$  des champs (sauf celui de pression qui traduit la force motrice de l'écoulement):

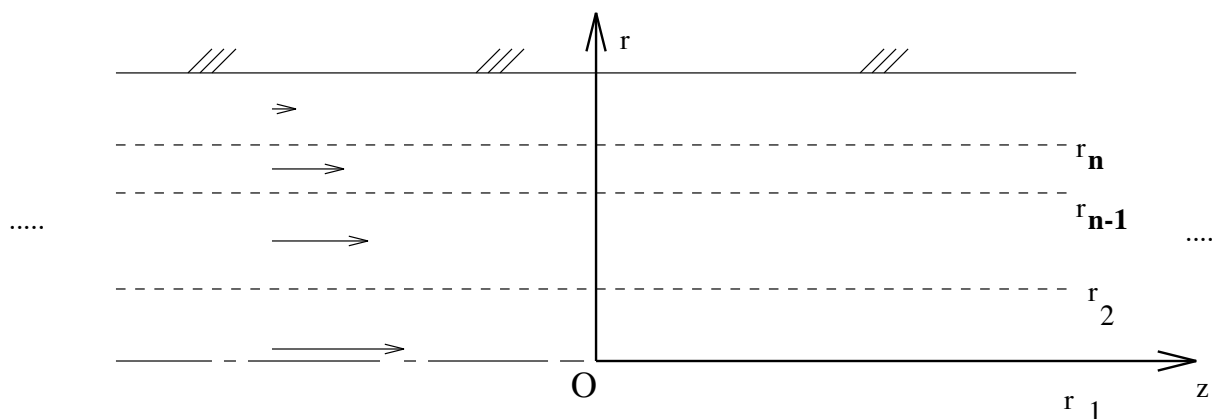


Figure 2.4: La géométrie du domaine axisymétrique mathématique

Si l'on suppose alors, comme on l'a fait dans le cas plan, que la vitesse  $\underline{u} = (u, v, w)$  en coordonnées cylindriques, est axisymétrique ( $\underline{u} = \underline{u}(r, z)$ ) et si l'on utilise l'invariance, on a  $\underline{u} = \underline{u}(r)$ . La condition d'incompressibilité nous donne que  $u$  est constante. Cette constante est forcément nulle à cause des conditions aux limites. Nous en sommes donc arrivés à une représentation :

$$\underline{u} = (0, v(r), w(r)),$$

qui respecte la condition de divergence nulle. Nous démontrerons ici que, sous l'hypothèse que la vitesse sur l'axe est non seulement intégrable, mais bornée, nécessairement,  $v = 0$ . En ce qui concerne l'extracontrainte, nous remarquerons que l'invariance en translation et en rotation de la géométrie nous donne :  $\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{\tau}}(r)$ .

Comme en p 22, nous noterons  $(\tau_{i,j})$  la matrice des extracontraintes dans la base cylindrique ( $\tau_{12} = \tau_{r\theta}$  pex),  $(\sigma_{i,j})$  la matrice des extracontraintes dans la base cartésienne et

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice de changement de base qui représente les vecteurs  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  dans la base canonique. On a alors  $(\tau_{i,j}) = M_{-\theta} (\sigma_{i,j}) M_\theta$ .

Enfin, les forces extérieures seront supposées nulles, et on tiendra compte de la tension superficielle.

### 2.3.2 Existence stationnaire

Vue la représentation de la vitesse, la condition de divergence nulle est vérifiée. L'équation de conservation des moments sera donc, non dimensionnée localement :

$$-(1 - \varepsilon)\Delta \underline{u} + \underline{\nabla} p = \text{div} \underline{\underline{\tau}} \quad (2.47)$$

et l'équation constitutive vérifiée par  $(\tau_{i,j})$  sera (cf 1.29) :

$$\begin{aligned} (\tau_{i,j}) - \text{We} \left[ \frac{(a-1)}{2} [(\tau_{i,j}) DU + DU^T (\tau_{i,j})] + \frac{(a+1)}{2} [(\tau_{i,j}) DU^T + DU (\tau_{i,j})] \right. \\ \left. + \frac{v}{r} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\tau_{i,j}) + \frac{v}{r} (\tau_{i,j}) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \varepsilon(DU + DU^T), \end{aligned} \quad (2.48)$$

où le gradient des taux de déformations cylindrique  $DU$  vaut

$$DU = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-v}{r} & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{\partial w}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En écrivant composantes par composantes (2.48), on trouve les valeurs de  $(\tau_{i,j})$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{rr} = \frac{\varepsilon \text{We}(a-1)(A^2 + B^2)}{1 + k^2(A^2 + B^2)} \\ \tau_{r\theta} = \frac{\varepsilon A}{1 + k^2(A^2 + B^2)} \\ \tau_{rz} = \frac{\varepsilon B}{1 + k^2(A^2 + B^2)} \\ \tau_{\theta\theta} = \frac{\varepsilon \text{We}(1+a)A^2}{1 + k^2(A^2 + B^2)} \\ \tau_{\theta z} = \frac{\varepsilon \text{We}(1+a)AB}{1 + k^2(A^2 + B^2)} \\ \tau_{zz} = \frac{\varepsilon \text{We}(a+1)B^2}{1 + k^2(A^2 + B^2)} \\ A = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = r \frac{\partial \frac{v}{r}}{\partial r}; \quad B = \frac{\partial w}{\partial r}. \end{array} \right. \quad (2.49)$$

Si l'on réinjecte dans l'équation de conservation des moments, en utilisant (1.30), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\text{Re} \frac{v^2}{r} + \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_{rr})}{\partial r} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \end{array} \right. \quad (2.50)$$

$$0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial((1-\varepsilon)r^2 A + r^2 \tau_{r\theta})}{\partial r} \quad (2.51)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r} + \frac{1-\varepsilon}{r} \frac{\partial(rB)}{\partial r}. \quad (2.52)$$

A partir de (2.52), on voit que  $p = -f(r)z + \xi(r, \theta)$ , puis, à partir de (2.51) et de l'invariance en translation et rotation, que  $p = -f(r)z + \xi(r)$ . Enfin, (2.50) nous apprend que  $p = -fz + \xi(r)$  où  $\xi'(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_{rr})}{\partial r} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \text{Re} \frac{v^2}{r}$ , et  $f$  est constante, ce qui détermine bien  $\xi$  à une constante près par domaine.  $f$  est la force motrice de perte de charge. De même que dans le cas plan, on prend une intégrale première de (2.52) et (2.51), où interviennent deux constantes d'intégration  $C$  et  $\alpha$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1-\varepsilon)A + \tau_{r\theta} = \frac{C}{r^2} \end{array} \right. \quad (2.53)$$

$$-Z_\alpha(r) = (1-\varepsilon)rB + r\tau_{rz} \quad (2.54)$$

avec  $Z_\alpha(r) = (fr^2/2 - \alpha)$ . Nous pouvons maintenant utiliser (2.49) pour remplacer les expressions de  $\tau_{r\theta}, \tau_{rz}$  afin de calculer  $A$  et  $B$ . On trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} A \frac{1 + k^2(1-\varepsilon)(A^2 + B^2)}{1 + k^2(A^2 + B^2)} = \frac{C}{r^2} \end{array} \right. \quad (2.55)$$

$$B \frac{1 + k^2(1-\varepsilon)(A^2 + B^2)}{1 + k^2(A^2 + B^2)} = \frac{-Z_\alpha(r)}{r}. \quad (2.56)$$

Le quotient de (2.55) et (2.56) nous permet de réinjecter  $A$  en fonction de  $B$  dans (2.56) et nous ramène à l'existence de solutions du problème d'un écoulement de Poiseuille plan (en cherchant  $B' = \sqrt{1 + \frac{C^2}{Z_\alpha^2 r^2}} B$ ). La même équation du troisième degré que (2.9) apparaît donc avec le  $Z_\alpha$  de (2.9) remplacé par  $\frac{Z_\alpha}{r} = \left( \frac{fr^2}{2} - \alpha \right) / r$ . Si l'on est dans le cas  $a = \pm 1$ , (UCM, LCM), l'équation, comme dans le cas plan n'est pas du troisième degré, mais du premier. Si  $0 \leq \varepsilon < \frac{8}{9}$ , on a donc existence et unicité de  $A$  et  $B(\varepsilon^i, We^i, a^i, \alpha^i, C^i, f^i)$  par les mêmes arguments que dans le cas plan.

Précisons les valeurs des constantes  $C$  et  $\alpha$ . Dans la première tranche contenant l'axe,  $r$  peut tendre vers 0. Or  $A \mapsto \frac{1 + k^2(1 - \varepsilon)(A^2 + B^2)}{1 + k^2(A^2 + B^2)}$  est bornée dans  $\mathbb{R}$ . Donc, si

$C^1 \neq 0$ ,  $r \frac{\partial v}{\partial r} \sim \frac{C^1}{(1 - \varepsilon)r^2}$ . Par conséquent,  $v \sim \frac{-C^1}{2(1 - \varepsilon)r}$ . Il est donc nécessaire, que

$C^1 = 0$ . De même, si  $r \rightarrow 0$  et si  $\alpha^1 \neq 0$ ,  $\frac{\partial w}{\partial r} \sim \frac{-\alpha^1}{r(1 - \varepsilon)}$ , et donc, vus les signes,

$w \sim \frac{-\alpha^1 \log r}{(1 - \varepsilon)}$ . Si l'on impose à la vitesse sur l'axe d'être bornée on a donc  $\alpha^1 = 0$ .

### Remarque 6

Bien que  $\frac{-\alpha}{1 - \varepsilon} \log r$  soit non borné quand  $r \rightarrow 0$ ,  $\frac{-\alpha r}{1 - \varepsilon} \log r \in L^2$ . On pourrait donc quand même calculer un débit. L'existence de solutions plus faibles n'est donc pas exclue, mais nous ne nous y intéresserons pas.

Ecrivons les conditions d'interface. On sait qu'elles sont de deux types : mathématiques (se déduisent des formulations variationnelles) et physiques. D'un point de vue physique, la présence d'une viscosité ( $\eta_{sol} \neq 0$ ) justifie d'imposer la continuité des vitesses tangentielles. Quant à la vitesse normale, sa continuité résulte de l'hypothèse de non miscibilité des fluides qui impose donc :  $\underline{u}^i \cdot \underline{n} = \underline{u}_{interface} \cdot \underline{n} = \underline{u}^{i+1} \cdot \underline{n}$ . D'un point de vue mathématique, la condition ( $\llbracket \rho(\underline{u} - \underline{u}_{interface}) \rrbracket \cdot \underline{n} = 0$ ) que l'on déduit de l'incompressibilité se réduit à  $0 = 0$ , et celle que l'on déduit de l'équation de conservation des moments se réduit à l'égalité de la différence des contraintes normales et de la tension superficielle. Nous gardons donc, à la  $i - 1^{ème}$  interface :

$$U_{dim}^i (v^i(r_i) \vec{e}_\theta + w^i(r_i) \vec{e}_z) = U_{dim}^{i+1} (v^{i+1}(r_i) \vec{e}_\theta + w^{i+1}(r_i) \vec{e}_z) \quad (2.57)$$

$$\llbracket \mathcal{T}_{dim} \left( -p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (1 - \varepsilon) \begin{pmatrix} 0 \\ A \\ B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{rr} \\ \tau_{\theta r} \\ \tau_{zr} \end{pmatrix} \right) \rrbracket = -\frac{T^i}{r_i} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.58)$$

où  $T^i$  est la constante de tension superficielle à la  $i^{ème}$  interface. La première équation de (2.58) donne :

$$\llbracket \mathcal{T}_{dim} f \rrbracket = 0 \quad \text{et} \quad \llbracket \mathcal{T}_{dim} \left( -P_0 + \xi(r_i) + \underline{\underline{\tau}}_{rr} \right) \rrbracket = \frac{T^i}{r_i}, \quad (2.59)$$

et permet de déterminer les  $f^i$  (forces de charge) à un près (la perte de charge globale) et les  $P_0^i$  à un près (la pression en entrée). Les deuxième et troisième équations de (2.58) se réécrivent plus simplement grâce à (2.53 et (2.54) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{T}_{dim}^i \frac{C^i}{r_i^2} = \mathcal{T}_{dim}^{i+1} \frac{C^{i+1}}{r_i^2} \\ \mathcal{T}_{dim}^i \frac{-Z_{\alpha^i}(r_i)}{r_i} = \mathcal{T}_{dim}^{i+1} \frac{-Z_{\alpha^{i+1}}(r_i)}{r_i} . \end{array} \right. \quad (2.60)$$

$$\mathcal{T}_{dim}^i \frac{-Z_{\alpha^i}(r_i)}{r_i} = \mathcal{T}_{dim}^{i+1} \frac{-Z_{\alpha^{i+1}}(r_i)}{r_i} . \quad (2.61)$$

Sachant que  $C^1 = 0$ , on déduit facilement de (2.60) que  $C^i = 0 \forall i$  et donc que

$$A = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = 0 \Rightarrow v^i = K^i r. \quad (2.62)$$

Quant à (2.61), elle se réécrit comme dans le cas plan :

$$\mathcal{T}_{dim}^i \alpha^i = \mathcal{T}_{dim}^{i+1} \alpha^{i+1}. \quad (2.63)$$

Puisque l'on sait que  $\alpha^1 = 0$ , on en déduit que tous les  $\alpha^i$  sont nuls.

Enfin, la vitesse est connue à partir de celle à la paroi, par les conditions de continuité (2.57). Pour  $v$ , l'hypothèse d'adhésion à la paroi nous donne la nullité de  $v$  dans chaque tranche  $r \in [r_i, r_{i+1}]$  à cause de (2.62). On conclut alors aisément à la nullité de  $v$ . Il n'existe donc pas de solution stationnaire ayant une vitesse de rotation autour de l'axe de propagation non nulle.

L'équation

$$k^2(1 - \varepsilon)\Phi^3 + k^2 \frac{f r}{2} \Phi^2 + \Phi + \frac{f r}{2} = 0$$

permet de calculer les  $w'(r) = \Phi(\frac{f r}{2})$  ( $\alpha^i = 0$ ). La relation (2.61) donne les pertes de charge  $f^i$  (même relation que dans le cas plan) et (2.59) détermine les  $P_0^i$  à une constante près. Nous avons ainsi démontré un théorème similaire au cas plan.

□

**Théorème 2.7**

Pour des paramètres  $a^i \in ]-1, 1[$ , et  $\varepsilon^i \in [0, \frac{8}{9}[$  ou  $a^i = \pm 1$ , des nombres sans dimension  $We_i$  et  $f^i > 0$ , il existe une unique solution  $((0, v, w), p, \underline{\tau})$  en coordonnées cylindriques au système (2.47,2.48) complété des relations d'interface (2.57-2.58). Cette solution a pour vitesse  $(0, 0, w)$ , et les grandeurs sans dimension vérifient dans chaque tranche  $i$ , ( $r \in [r_i, r_{i+1}]$ ) :

$$\begin{cases} p(r, z) &= f^i z + P_0^i + \int_{r_i}^r \frac{1}{r} \frac{\partial r \tau_{rr}}{\partial r} dr \\ v(r) &= 0 \\ w(r) &= w^i(r_i) + \int_{r_i}^r \Phi^i(Z_{\alpha^i}(r')) dr' \\ \tau_{rr}^i, \tau_{rz}^i, \text{ et } \tau_{zz}^i &\text{vérifient (2.49)(A=0).} \end{cases} \quad (2.64)$$

La relation (2.59) détermine  $P_0^i$  à un près et les  $f^i$ . Les  $w^i(r_i)$  sont déterminés par la continuité de la vitesse :

$$w^{i+1}(r_{i+1}) = w^i(r_i) + \int_{r_i}^{r_{i+1}} \Phi\left(\frac{f^i r'}{2}\right) dr'.$$

La solution donné par le théorème précédent représente un écoulement de Poiseuille cylindrique axisymétrique avec  $n$  fluides régis par des équations de type Oldroyd interpolé avec viscosité. On a aussi démontré que la composante orthoradiale de la vitesse est forcément nulle.

**Remarque 7**

De même que pour le cas plan, on donne les formules de la vitesse mais avec des valeurs explicites pour  $\alpha^i = 0$  :

$$w'(r) = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}}$$

$$4p^3 + 27q^2 = \frac{1}{k^6(1-\varepsilon)^3} \left[ 4 + \frac{k^2(fr/2)^2(y)(27\varepsilon^2 - 36\varepsilon + 8)}{1-\varepsilon} + \frac{4k^4(fr/2)^4}{1-\varepsilon} \right]$$

$$q(r) = \frac{\left( \frac{2(fr/2)^3 k^2}{27(1-\varepsilon)^2} - \frac{(fr/2)(3\varepsilon - 2)}{3(1-\varepsilon)} \right)}{k^2(1-\varepsilon)}$$

Un calcul d'intégrale permettrait de vérifier que le débit n'est pas une fonction ayant la même nature que pour un fluide newtonien.

**Remarque 8**

Le fait que les  $\alpha^i$  soient tous nuls dans le cas axisymétrique et quelconques dans le cas plan ne doit pas surprendre. Ces  $\alpha^i$  correspondent à la position d'un axe autour duquel le champ de vitesse est symétrique. Dans le cas plan, on ne dispose pas des symétries intrinsèques au problème axisymétrique. La répartition des tranches planes de fluides peut n'avoir aucune symétrie.

**2.3.3 Perturbations monodimensionnelles bornées**

Nous allons démontrer le théorème suivant (identique au cas plan) selon lequel toute perturbation monodimensionnelle des équations non linéaires d'évolution reste bornée.

**Théorème 2.8**

Soit  $\varepsilon \in [0, 1[$ ,  $a \neq 0$  et  $(\underline{u}_s, \underline{\tau}_s, p_s)$  une solution du système d'équations (2.47-2.48) complété par les conditions aux limites  $u(0) = 0$  et  $u(1) = u_{donnée}$ . Toute perturbation 1D  $(\underline{u}, \underline{\tau}, p)$  où  $\underline{u} = (0, 0, w(r))$ , est telle que  $\underline{u} \in$  borné de  $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(0, 1))$ ,  $\underline{\tau} \in$  borné de  $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^\infty(0, 1))$  et  $\underline{u} \in$  borné de  $L^2(0, T; H^1(0, 1)) \quad \forall T \in \mathbb{R}^+$ .

Démonstration du Théorème 2.8:

Les matrices seront exprimées dans la base cartésienne, bien que les calculs utilisent un genre de passage à la base cylindrique. La présence d'opérateurs différentiels interdit de faire commuter ces opérateurs et les matrices de changement de base. Nous pouvons démontrer aisément que, dans le cas axisymétrique, la solution du problème :

$$\begin{cases} \frac{D\underline{R}_a}{Dt} = \underline{R}_a \underline{m}_a^T(\underline{u}) \\ \underline{R}_a(\underline{x}, t; t) = \underline{I} \end{cases}$$

$$\underline{m}_a^T = \underline{\Omega} - a\underline{D} = \frac{\partial w}{\partial r} \begin{pmatrix} 0 & 0 & (1-a)\cos\theta \\ 0 & 0 & (1-a)\sin\theta \\ -(1+a)\cos\theta & -(1+a)\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

est la matrice suivante, qui appartient à  $L^\infty(\mathbb{R}^+, L^\infty((0, 1)))$  :

$$\underline{R}_a(r, t; s) = \begin{pmatrix} \cos\omega \cos^2\theta & \cos\omega \sin\theta \cos\theta & \frac{\sin\omega}{\sqrt{1-a^2}}(1-a)\cos\theta \\ \cos\omega \sin\theta \cos\theta & \cos\omega \sin^2\theta & \frac{\sin\omega}{\sqrt{1-a^2}}(1-a)\sin\theta \\ -\frac{(1+a)}{\sqrt{1-a^2}}\sin\omega \cos\theta & -\frac{(1+a)}{\sqrt{1-a^2}}\sin\omega \sin\theta & \cos\omega \end{pmatrix}, \quad (2.65)$$

avec  $\omega(r, t; s) = \frac{\sqrt{1-a^2}}{2} \int_s^t \frac{\partial w}{\partial r}(r, t') dt'$ . La suite de la démonstration est, grâce à la



généralité de la démonstration p. 40 identique à celle du théorème 2.3. On profite ici de l'avantage qu'a constitué le fait d'étudier les équations vectorielles et non projetées.  $\square$

## 2.4 Les modèles de PTT/MPTT interpolés

### 2.4.1 Existence/unicité(s)

Rappelons les modèles de Phan-Thien, Tanner (PTT cf [43]), et Phan-Thien, Tanner modifié (MPTT cf [44] p 109, 174), utilisant une fonction scalaire  $g_{\epsilon'}$  qui dépend d'un paramètre  $\epsilon'$  en plus par rapport aux modèles de Johnson-Segalman :

$$\begin{cases} g_{\epsilon'}(\underline{\tau})\underline{\tau} + \text{We} \frac{\mathcal{D}_a \underline{\tau}}{\mathcal{D}t} = 2\varepsilon \underline{\underline{D}}[u] \\ g_{\epsilon'}(\underline{\tau}) = \tilde{g}(\epsilon' \text{We tr} \underline{\tau}) \end{cases} \quad (2.66)$$

Pour le modèle de PTT,  $\tilde{g}(X) = \exp X$  et  $\tilde{g}(X) = 1 + X$  pour le modèle de MPTT. Les équations stationnaires d'un écoulement de Poiseuille/Couette sont projetées :

$$\begin{aligned} (a-1)\tau_{11} &= (a+1)\tau_{22}, \\ g(\underline{\tau})\tau_{11} &= \text{We}u'(a+1)\tau_{12}, \\ g(\underline{\tau})\tau_{12} &= u'(\varepsilon + \text{We} \frac{(a+1)}{2}\tau_{22} + \text{We} \frac{(a-1)}{2}\tau_{11}), \\ g(\underline{\tau})\tau_{22} &= \text{We}u'(a-1)\tau_{12}, \\ \tau_{12} &= -(1-\varepsilon)u'(y) + Z_\alpha(y). \end{aligned} \quad (2.67)$$

On note  $\alpha$  la constante d'intégration qui vient de l'intégrale première de l'équation de conservation des moments, et  $Z_\alpha(y) = fy - \alpha$  le terme qui tient compte de la perte de charge quand elle existe (cas non Couette). De même que dans le cas d'un modèle de Johnson-Segalman, nous séparons les cas  $a = \pm 1$  des cas strictement interpolés  $a \in ]-1, 1[$ .

Si  $a = 1$  alors  $\tau_{22} = 0$ . Après élimination dans (2.67)<sub>b</sub> et (2.67)<sub>e</sub> de  $u'$  grâce à (2.67)<sub>c</sub> et de  $\tau_{12}$  grâce à l'équation qui remplace (2.67)<sub>e</sub>, on est amené à résoudre en  $\epsilon' \text{We} \tau_{11}$  :

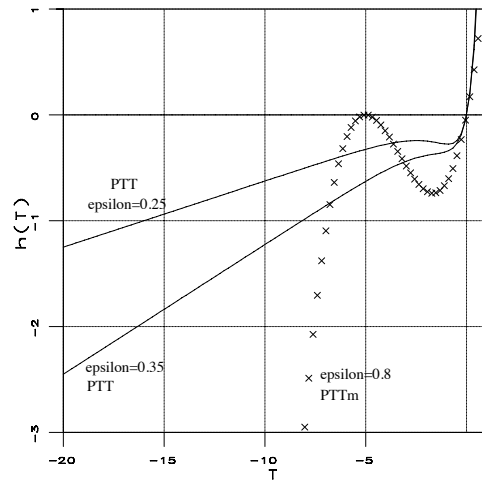
$$h(\epsilon' \text{We} \tau_{11}) = \epsilon' \text{We} \tau_{11} (\varepsilon + (1-\varepsilon)\tilde{g}(\epsilon' \text{We} \tau_{11}))^2 = 2\varepsilon \epsilon' \text{We}^2 Z_\alpha^2(y). \quad (2.68)$$

Il est clair sur cette équation que  $\tau_{11} \in \mathbb{R}^+$ . Si l'on dérive  $h$ , on trouve que, dans le cas PTT comme dans le cas MPTT,  $h$  est strictement croissante. Donc on a existence et unicité pour toute force  $f$ .

Si  $a = -1$  alors  $\tau_{11} = 0$ . On élimine  $u'$  et  $\tau_{12}$  pour n'avoir plus qu'une équation :

$$h(\epsilon' \text{We} \tau_{22}) = \epsilon' \text{We} \tau_{22} (\varepsilon + (1-\varepsilon)\tilde{g}(\epsilon' \text{We} \tau_{22}))^2 = -2\varepsilon \epsilon' \text{We}^2 Z_\alpha^2(y) \quad (2.69)$$

à résoudre par rapport à  $\tau_{22}$ . Puisque  $\lim_{X \rightarrow -\infty} h(X) = -\infty$  et  $h(0) = 0$ , il y aura, dans tous les cas, existence d'au moins une solution  $\tau_{22}$ . Cependant, pour l'unicité, le


 Figure 2.5: Allure des fonctions  $h$ 

changement radical avec le cas UCM ( $a = 1$ ) vient du second membre (la fonction  $h$  à inverser est la même) qui est négatif. Les fonctions  $h$  à inverser ont alors l'allure :

Dans le cas PTT, on trouve que si  $\varepsilon \geq \frac{2}{2 + \exp \frac{3}{2}} \simeq 0.3$ , on a unicité pour tout second membre  $\varepsilon \varepsilon' \text{We}^2 Z_\alpha^2(y)$ . Dans le cas contraire, on a multiplicité de solutions  $\tau_{22}$  pour une gamme de  $\varepsilon'$ ,  $\text{We}$ ,  $f$  ou  $\alpha$ .

Dans le cas MPTT, et comme on le voit sur la Figure 2.5, on aura toujours multiplicité. En particulier, si le second membre est suffisamment petit (par exemple pour un fluide presque Oldroyd :  $\varepsilon' \simeq 0$ ), on a multiplicité. Ce qui n'est pas le cas pour  $\varepsilon' = 0$ .

Ce caractère singulier qui fait que les modèles de PTT et de MPTT admettent plusieurs solutions aux équations d'un écoulement aussi simple que celui de Poiseuille ou Couette quand  $\varepsilon' \rightarrow 0^+$  ou  $\varepsilon \rightarrow 0$  les rend non réalistes. Signalons que M. Renardy et Y. Renardy [36] avaient déjà cité une communication privée de A. K. Akbay selon laquelle les écoulements de type LCM comportaient des instabilités, ce que l'on retrouvera dans la section consacrée à la stabilité linéaire.

Si  $a \in ]-1, 1[$ . Après différentes éliminations, on trouve que, de façon nécessaire, l'extracontrainte est bornée, comme dans le cas Johnson-Segalman, indépendamment de  $u' = \dot{\gamma}$  :

$$\frac{-\varepsilon}{(a+1)\text{We}} < \tau_{22} < 0 < \tau_{11} < \frac{\varepsilon}{(1-a)\text{We}}. \quad (2.70)$$

On élimine alors  $u'$  et  $\tau_{12}$  pour devoir résoudre en  $T = \tau_{22} \frac{\text{We}(a+1)}{\varepsilon} \in ]-1, 0]$  :

$$h(T) = \frac{T}{1+T} \left( \varepsilon(1+T) + (1-\varepsilon)\tilde{g}\left(\frac{2\varepsilon\varepsilon'aT}{a^2-1}\right) \right)^2 = \text{We}^2(a^2-1)Z_\alpha^2. \quad (2.71)$$

Il est facile de voir que cette équation admet une solution pour les deux modèles envisagés. Afin d'expliquer la suite de la démonstration, nous devons souligner que

$\text{tr}\underline{\underline{\tau}} = \frac{2a}{a-1}\tau_{22}$  et donc, selon le signe de  $a$ , le  $\tilde{g}(\underline{\underline{\tau}})$  aura un effet attendu d'amortissement des grandes valeurs de  $\text{tr}\underline{\underline{\tau}}$  si  $a \geq 0$  et un effet opposé si  $\text{tr}\underline{\underline{\tau}} < 0$  ( $a < 0$ ).

Cas MPTT. La remarque précédente explique que l'on sépare les trois cas suivants :

- \*  $a > 0$   $\epsilon' > \frac{1-a^2}{2\epsilon(1-\epsilon)|a|}(\epsilon - \frac{8}{9}) \Leftrightarrow$ unicité.
- \*  $a < 0$   $0 \leq \epsilon' < \frac{1-a^2}{2\epsilon(1-\epsilon)|a|}(\frac{8}{9} - \epsilon) \Leftrightarrow$ unicité.
- \*  $a = 0$   $\text{tr}\underline{\underline{\tau}} = 0 \Rightarrow$  mêmes conditions que [21] :  $\epsilon < \frac{8}{9}$  ou  $\epsilon \geq \frac{8}{9}$  et  $f < f_{crit}^\epsilon$ .

Remarquons que puisque  $\frac{\frac{8}{9} - \epsilon}{1 - \epsilon} < 1$ , la condition d'unicité assure en particulier que  $g_{\epsilon'}(\underline{\underline{\tau}}) \geq 0$ , ce qui apparaîtra plus loin comme une condition nécessaire pour la stabilité linéaire.

Cas PTT. Les équations n'étant pas algébriques, on ne peut donner que des conditions suffisantes :

- \*  $a > 0$   $\epsilon' > \frac{1-a^2}{2a(1-\epsilon)} \Rightarrow$  unicité
- \*  $a < 0$  Soit  $K = \frac{\epsilon\epsilon'|a|}{1-a^2} < 1$ .  $\exists K_0/0 \leq K < K_0$  et si  $\epsilon < \frac{8}{9}$ ,  $\Rightarrow$  unicité.
- \*  $a = 0$   $\text{tr}\underline{\underline{\tau}} = 0 \Rightarrow$  mêmes conditions que [21] :  $\epsilon < \frac{8}{9}$  ou  $\epsilon \geq \frac{8}{9}$  et  $f < f_{crit}^\epsilon$ .

### Remarque 9

Si  $f$  est réelle quelconque, alors  $T$  sera, qu'il soit unique ou pas, quelconque dans l'intervalle  $]-1, 0]$ . L'estimation (2.70) est donc optimale. Nous aurons besoin de cette remarque pour l'étude de stabilité en section suivante.

Il nous faut maintenant utiliser l'étude volumique qui vient d'être faite pour donner des conditions d'existence et d'unicité de solutions au problème de l'écoulement de plusieurs fluides viscoélastiques. Il est clair que si on n'a pas unicité pour un fluide, alors l'écoulement de plusieurs fluides ne sera pas unique. On va donc supposer que les conditions suffisantes pour l'unicité sont remplies. La vitesse s'écrit alors :

$$u^i(y) = u^i(y_i) + \int_{y_i}^y \frac{(-fy' + \alpha)}{(1-\epsilon) + \frac{(\epsilon + \text{We}(a+1)\tau_{22}(y', \alpha))}{\tilde{g}(\frac{2\epsilon'\text{We}a\tau_{22}(y', \alpha)}{a-1})}} dy', \quad (2.72)$$

où l'on rappelle que  $\tilde{g}(X) = \exp X$  pour PTT,  $\tilde{g}(X) = 1 + X$  pour MPTT et  $\tau_{22}(y', \alpha)$  est la seule solution de (2.67). Les conditions d'interface sont les mêmes que dans le cas Johnson-Segalman :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{T}_{dim}^i f^i = \mathcal{T}_{dim}^{i+1} f^{i+1}, \\ \mathcal{T}_{dim}^i P_0^i = \mathcal{T}_{dim}^{i+1} P_0^{i+1}, \\ \mathcal{T}_{dim}^i \alpha^i = \mathcal{T}_{dim}^{i+1} \alpha^{i+1}, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.73) \\ (2.74) \\ (2.75) \end{array}$$

où  $\mathcal{T}_{dim}^i$  est la contrainte sans dimension dans le domaine  $i$  :  $\mathcal{T}_{dim} = \frac{(\eta_{sol} + \eta_{pol})}{L_{dim}} U_{dim}$ ,  $L_{dim}$  est une longueur caractéristique,  $U_{dim}$  une vitesse caractéristique,  $\eta_{sol}$  et  $\eta_{pol}$  les viscosités du solvant et du polymère respectivement. Le lien entre  $\alpha^{i+1}$  et  $\alpha^i$  est donc strictement croissant. De plus, comme :

$$\alpha \mapsto \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{(-fy' + \alpha)dy'}{(1 - \varepsilon) + \frac{\varepsilon(1 + \frac{We(a+1)\tau_{22}(y', \alpha)}{\varepsilon})}{\tilde{g}(\frac{2\varepsilon' We a \tau_{22}(y', \alpha)}{a-1})}}$$

est strictement croissante dans les conditions d'unicité déjà mises en évidence (les calculs sont longs mais sans problème) de  $\mathbb{R}$  à valeur dans tout  $\mathbb{R}$ , une récurrence identique à celle du cas Johnson-Segalman nous donne le résultat énoncé ci-après.

**Théorème 2.9**

Le système stationnaire (2.67) des équations d'un fluide de type PTT ou MPTT dans chaque sous-domaine  $y \in [y_i, y_{i+1}]$  avec  $a^i \in [-1, 1]$ ,  $\varepsilon^i \in [0, 1]$ ,  $\varepsilon^i > 0$  et  $We^i, f^i \geq 0$  complété par des conditions aux limites :  $u^1(0) = 0, u^n(y_n) = u_{donnée}$ , des conditions de continuité de la vitesse et de la contrainte normale aux interfaces, a des solutions.

Pour un seul fluide de type MPTT :

- $a > 0$   $\varepsilon' > \frac{1-a^2}{2\varepsilon(1-\varepsilon)|a|}(\varepsilon - \frac{8}{9}) \Leftrightarrow$ unicité.
- $a < 0$   $0 \leq \varepsilon' < \frac{1-a^2}{2\varepsilon(1-\varepsilon)|a|}(\frac{8}{9} - \varepsilon) \Leftrightarrow$ unicité.
- $a = 0$   $tr \underline{\underline{\tau}} = 0 \Rightarrow$  mêmes conditions que [21] :  $\varepsilon < \frac{8}{9}$  ou  $\varepsilon \geq \frac{8}{9}$  et  $f < f_{crit}^\varepsilon$ .

Pour un seul fluide de type PTT :

- $a > 0$   $\varepsilon' > \frac{1-a^2}{2a(1-\varepsilon)} \Rightarrow$  unicité
- $a < 0$  Soit  $K = \frac{\varepsilon\varepsilon'|a|}{1-a^2}$ .  $\exists K_0/0 \leq K < K_0 < 1$  et si  $\varepsilon < \frac{8}{9}$ ,  $\Rightarrow$  unicité.
- $a = 0$   $tr \underline{\underline{\tau}} = 0 \Rightarrow$  mêmes conditions que [21] :  $\varepsilon < \frac{8}{9}$  ou  $\varepsilon \geq \frac{8}{9}$  et  $f < f_{crit}^\varepsilon$ .

De plus, si les paramètres dans chaque domaine assurent l'unicité de la vitesse et de la contrainte de ce fluide seul, alors, on a unicité de l'écoulement de ces fluides. Si  $a^i = 1$  il y a toujours unicité.

Si  $a^i = -1$ , pour un fluide de type PTT, si  $\varepsilon < \frac{2}{2 + \exp \frac{3}{2}} \simeq 0.3$ , il y a une gamme de  $\varepsilon\varepsilon' We^2 Z_\alpha^2$  pour laquelle il y a plusieurs solutions. Pour un fluide de type MPTT, si  $\varepsilon\varepsilon' We^2 Z_\alpha^2$  est suffisamment petit, il y a plusieurs solutions.

**Remarque 10**

Notons que dans les cas  $a = \pm 1$ , l'extracontrainte est non bornée par rapport à  $u' = \dot{\gamma}$ . Ce n'est plus le cas pour les modèles strictement interpolés grâce à (2.70). Cela semble un avantage de ces modèles en plus de leur deuxième différence des contraintes normales non nulle. Cette propriété reste vraie en géométrie axisymétrique.

Nous tenons également à faire remarquer que le critère d'unicité que nous avons donné pour le cas MPTT a été retrouvé numériquement. En particulier au-delà de la valeur limite, la multiplicité est retrouvée comme dans le cas Johnson-Segalman.

### Une nouvelle équation constitutive

Nous allons justifier de façon très heuristique une amélioration des modèles de PTT, MPTT. Pour cela, nous rappelons qu'une EDO du type :

$$\frac{df}{dt} + \lambda f = g$$

admettra les solutions :

$$f(t) = f_0 e^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} g(s) ds.$$

Si  $\lambda$  est strictement positif, le système est stable et une perturbation sera écrasée exponentiellement. En revanche, si  $\lambda$  est négatif, l'effet est opposé.

Appliquons ce résultat à un modèle de type PTT ou MPTT :

$$\frac{\mathcal{D}_{a\underline{\underline{\tau}}}}{\mathcal{D}t} + \frac{g_{\epsilon'}(\underline{\underline{\tau}})}{\text{We}} \underline{\underline{\tau}} = \frac{2\varepsilon}{\text{We}} \underline{\underline{D}}[u].$$

Par analogie, on voit que, si pour de grands  $\text{tr } \underline{\underline{\tau}}$  le  $\frac{g_{\epsilon'}(\underline{\underline{\tau}})}{\text{We}}$  est grand, il aura pour effet d'atténuer les valeurs de  $\underline{\underline{\tau}}$ . Cependant, si  $g_{\epsilon'}(\underline{\underline{\tau}})$  peut devenir négatif, l'effet est catastrophique pour les solutions en  $\underline{\underline{\tau}}$ . Or, dans le cas MPTT,  $1 + \epsilon' \text{We} \text{tr } \underline{\underline{\tau}}$  peut devenir négatif au moins pour un écoulement aussi simple que celui de Poiseuille ou celui de Couette (et si  $a < 0$ ). Dans le cas PTT, le  $g_{\epsilon'}(\underline{\underline{\tau}})$  devient aussi petit qu'on veut et le système tend vers une stabilité marginale. On peut tenter de régler ce problème en mettant une valeur absolue sur la trace. Cependant, un deuxième inconvénient de ces modèles est que le facteur d'atténuation que représente  $g_{\epsilon'}(\underline{\underline{\tau}})$  ne jouera son rôle que dans la cas d'un écoulement en élongation puisque  $g_{\epsilon'}(\underline{\underline{\tau}})$  ne dépend que de  $\text{tr } \underline{\underline{\tau}}$  et non des autres invariants de  $\underline{\underline{\tau}}$ . Afin de tenir également compte du cisaillement, on propose de remplacer les lois de PTT, MPTT par :

$$\tilde{g}(\epsilon' \text{We} \sqrt{\text{tr } \underline{\underline{\tau}} \underline{\underline{\tau}}^T}) \underline{\underline{\tau}} + \text{We} \frac{\mathcal{D}_{a\underline{\underline{\tau}}}}{\mathcal{D}t} = 2\varepsilon \underline{\underline{D}}[u]. \quad (2.76)$$

En plus des deux avantages exposés ci-dessus que possèdent ces nouveaux modèles, nous avons démontré assez facilement l'existence et l'unicité des écoulements de plusieurs de ces fluides en géométrie Poiseuille/Couette pour toute gamme de paramètre  $a^i \in [-1, 1]$ ,  $\varepsilon^i \in [0, 1]$ ,  $\epsilon^i \in \mathbb{R}^{+*}$  et pour toute fonction  $\tilde{g} \geq 0$  strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$ .

Finalement, on peut se demander si l'unicité de solution est un avantage d'un modèle, si elle est plus physique ou si elle traduit une pathologie des équations. On pourrait ainsi soutenir que "expérimentalement, on ne voit qu'un seul écoulement". Cependant, d'une part il n'est pas évident que certains écoulements n'oscillent pas entre deux solutions physiques, expliquant ainsi certains phénomènes (cf introduction). D'autre part, nous ne savons pas le degré d'adéquation du modèle à la réalité. C'est donc le travail du

théoricien, sur la base des équations, de tenter de prévoir des comportements qui, si ils ne se produisent pas dans la nature, montrent que le modèle n'est pas le bon.

## 2.4.2 Sur l'opérateur linéarisé de l'écoulement de Couette

Dans cette section, nous donnons des conditions pour garantir la stabilité linéaire de l'écoulement de Couette d'un fluide de type PTT ou MPTT. Nous commençons par dériver le système des équations linéarisées autour d'une solution de Couette d'un fluide PTT ou MPTT, dont on sait par la section précédente qu'une telle solution existe. On représente les champs sous la forme stationnaire + perturbé monodimensionnel :  $\underline{u} = (u_s(y) + u(y, t), 0)$ ,  $\underline{\underline{\tau}} = \begin{pmatrix} \sigma_s & \tau_s \\ \tau_s & \gamma_s \end{pmatrix} (y) + \begin{pmatrix} \sigma & \tau \\ \tau & \gamma \end{pmatrix} (y, t)$ ,  $p = p_s(x, y) + p(x, y, t)$  et on part de :

$$\begin{cases} \text{Re} \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} - (1 - \varepsilon) \Delta \underline{u} + \nabla p = \text{div} \underline{\underline{\tau}} \\ \text{div} \underline{u} = 0 \\ g_{\varepsilon'}(\underline{\underline{\tau}}) \underline{\underline{\tau}} + \text{We} \frac{\mathcal{D}_a \underline{\underline{\tau}}}{\mathcal{D}t} = 2\varepsilon \underline{\underline{D}}[\underline{u}] \\ \underline{u}(0) = 0 \text{ et } \underline{u}(1) = \underline{u}_{\text{donnée}}, \end{cases}$$

avec  $g_{\varepsilon'}(\underline{\underline{\tau}}) = \tilde{g}(\varepsilon' \text{We tr} \underline{\underline{\tau}})$  et

$$\begin{cases} \tilde{g}(X) = \exp(X) \text{ pour PTT} \\ \tilde{g}(X) = 1 + X \text{ pour MPTT.} \end{cases}$$

Après linéarisation, et en notant ' la dérivation par rapport à  $y$ , on obtient le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1 - \varepsilon}{\text{Re}} u'' - \frac{1}{\text{Re}} \tau' & = 0 \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} - (a + 1) \tau_s u' + \left( \frac{g_{\varepsilon'}(\underline{\underline{\tau}}_s) + \varepsilon' \text{We} \sigma_s \tilde{g}'(\varepsilon' \text{We tr} \underline{\underline{\tau}}_s)}{\text{We}} \right) \sigma - (a + 1) u'_s \tau + \\ \quad + \varepsilon' \sigma_s \tilde{g}'(\varepsilon' \text{We tr} \underline{\underline{\tau}}_s) \gamma & = 0 \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\varepsilon + (a + 1) \gamma_s \text{We}}{\text{We}} u' + \left( \varepsilon' \tau_s \tilde{g}'(\varepsilon' \text{We tr} \underline{\underline{\tau}}_s) - \frac{(a - 1) u'_s}{2} \right) \sigma + \frac{g_{\varepsilon'}(\underline{\underline{\tau}}_s)}{\text{We}} \tau + \\ \quad + \left( \varepsilon' \tau_s \tilde{g}'(\varepsilon' \text{We tr} \underline{\underline{\tau}}_s) - \frac{(a + 1) u'_s}{2} \right) \gamma & = 0 \\ \frac{\partial \gamma}{\partial t} - (a - 1) \tau_s u' + (\varepsilon' \gamma_s \tilde{g}'(\varepsilon' \text{We tr} \underline{\underline{\tau}}_s)) \sigma - (a - 1) u'_s \tau + \\ \quad + \left( \frac{g_{\varepsilon'}(\underline{\underline{\tau}}_s)}{\text{We}} + \varepsilon' \gamma_s \tilde{g}'(\varepsilon' \text{We tr} \underline{\underline{\tau}}_s) \right) \gamma & = 0 \\ u(0) = u(1) = 0, & \end{cases} \quad (2.77)$$

que l'on écrit de façon symbolique sous la forme :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \mathcal{L}U = 0,$$

pour  $U = (u, \sigma, \tau, \gamma)^T \in H_0^1(0, 1) \times (L^2(0, 1))^3$  et  $\mathcal{L}$  la partie spatiale de l'opérateur. Puisque l'on étudie l'écoulement de Couette, les grandeurs sont toutes constantes. Nous définissons alors le domaine de  $\mathcal{L}$  comme :

$$D(\mathcal{L}) = \left\{ U \in H_0^1(0, 1) \times (L^2(0, 1))^3 / -(1 - \varepsilon)u'' - \tau' \in L^2 \right\}.$$

Par la même méthode que pour le théorème (5.1) de [21], on démontrerait le lemme suivant qui donne des renseignements géométriques sur le spectre de  $\mathcal{L}$  (cf T. Kato [45] pour les définitions) :

**Lemme 2.10**

- |      |   |
|------|---|
| Pour | $a \in [-1, 1], \varepsilon \in [0, 1[, \epsilon' \in \mathbb{R}^{+*},$   |
| 1.   | $\mathcal{L}$ est un opérateur fermé dans $H = H_0^1(0, 1) \times (L^2(0, 1))^3$ , à domaine dense                            |
| 2.   | $\mathcal{L}$ est $m$ -sectoriel, de sommet $-\Lambda$ , pour un $\Lambda > 0$ , et de demi angle au sommet $\frac{\pi}{4}$ . |

Nous énonçons ensuite un théorème sur la répartition des valeurs propres de  $\mathcal{L}$  pour lequel nous donnons quelques définitions qui rendent les énoncés moins rébarbatifs :

$$\begin{aligned}
 A &= -\frac{\pi^2}{\text{Re}}(1 - \varepsilon) ; & B &= -\left( 2\frac{g_{\epsilon'}(\underline{\tau}_s)}{\text{We}} + \epsilon'(\sigma_s + \gamma_s)\tilde{g}'(\epsilon'\text{We tr } \underline{\tau}_s) \right) ; \\
 C &= \frac{\pi^2}{\text{Re}} \left( \frac{g_{\epsilon'}(\underline{\tau}_s)}{\text{We}} \frac{\tau_s}{u'_s} - (1 - \varepsilon)B \right) ; & D &= \left( \frac{g_{\epsilon'}(\underline{\tau}_s)}{\text{We}} \right)^2 + 4a\epsilon'u'_s\tau_s\tilde{g}'(\epsilon'\text{We tr } \underline{\tau}_s) + u_s'^2(1 - a^2) ; \\
 E &= \frac{\pi^2}{\text{Re}} \left[ \left( \frac{g_{\epsilon'}(\underline{\tau}_s)}{\text{We}} \right)^2 \frac{\tau_s}{u'_s} + \frac{g_{\epsilon'}(\underline{\tau}_s)}{\text{We}}(a + 1)\gamma_s + (1 - \varepsilon)D \right].
 \end{aligned}
 \tag{2.78}$$



**Théorème 2.11**

Pour  $a \in [-1, 1]$ ,  $\varepsilon \in [0, 1[$ ,  $\epsilon' \in \mathbb{R}^{+*}$ , et avec les notations (2.78),

1. si  $\lambda$  est racine de

$$\left( \frac{g_{\epsilon'}(\underline{\tau}_s)}{\text{We}} - \lambda \right) (\lambda^2 + B\lambda + D), \quad (2.79)$$

alors  $\lambda$  est valeur propre de multiplicité dénombrable de  $\mathcal{L}$ .

2. le spectre ne comporte que des valeurs propres. Celles-ci, à part les trois valeurs propres sus-mentionnées sont de multiplicité finie. Le spectre de  $\mathcal{L}$ ,  $\sigma(\mathcal{L})$ , privé de trois boules de centre les racines de (2.79) et de rayon suffisamment petit, est un ensemble dénombrable de  $\lambda_n$  valeur propres de multiplicité finie, solutions qui peuvent être triples, de

$$n^2 = \lambda_n \frac{\lambda_n^2 + B\lambda_n + D}{A\lambda_n^2 + C\lambda_n - E},$$

avec les conventions de (2.78). Ces  $\lambda_n$  vérifient  $\lambda_n - An^2 \rightarrow 0$  et donc :

$$\exists \eta > 0 / \forall n \in \mathbb{N}, |\lambda_{n+1} - \lambda_n| \geq \eta > 0.$$

3. Si  $\frac{g_{\epsilon'}(\underline{\tau}_s)}{\text{We}}$  ou  $D$  est nul, 0 est valeur propre de multiplicité dénombrable. Si  $E$  est nul, 0 devient de multiplicité non dénombrable.

**Démonstration du Théorème 2.11:**

Afin de rechercher le spectre, nous commençons par nous intéresser aux valeurs propres de l'opérateur  $\mathcal{L}$ . Pour cela, nous découplons les équations en, d'une part celles qui résultent de l'équation constitutive linéarisée, d'autre part l'équation de conservation des moments elle aussi linéarisée. Nous résoudrons les premières, pour réinjecter  $\tau$  dans la deuxième. Donc, nous cherchons quelle est l'extracontrainte solution de :

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) \begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \\ \gamma \end{pmatrix} = \frac{u'}{\text{We}} \frac{g_{\epsilon'}(\underline{\tau}_s)}{u'_s} \begin{pmatrix} \sigma_s \\ \tau_s \\ \gamma_s \end{pmatrix}, \quad (2.80)$$

où l'on a utilisé les propriétés (2.67) de la solution stationnaire et où  $\underline{\underline{A}}$  est la matrice 3x3 des équations résultant de la linéarisation de l'équation constitutive (cf (2.77)). Le polynôme caractéristique de  $\underline{\underline{A}}$  est :

$$\left( \frac{g_{\epsilon'}(\underline{\tau}_s)}{\text{We}} - \lambda \right) (\lambda^2 + B\lambda + D) \quad (2.81)$$

et nous étudions alors la première valeur propre de  $\underline{\underline{A}}$  afin de savoir si elle sera également valeur propre de  $\mathcal{L}$ .

Soit  $\lambda = \frac{g_{\epsilon'}(\underline{\underline{\tau}}_s)}{\text{We}}$  la première valeur propre. On montre aisément que  $(\sigma_s, \tau_s, \gamma_s) \in \text{Im}(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}})$  puis, que  $\dim \text{Ker}(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 1$  pour  $a \in [-1, 1]$  et  $\epsilon' \geq 0$ . On en conclut que  $(\sigma, \tau, \gamma)^T$  est de la forme

$$\begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \\ \gamma \end{pmatrix} = u' \left( \begin{pmatrix} \sigma^0 \\ \tau^0 \\ \gamma^0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} \sigma^1 \\ \tau^1 \\ \gamma^1 \end{pmatrix} \right) + C_2 \begin{pmatrix} \sigma^1 \\ \tau^1 \\ \gamma^1 \end{pmatrix},$$

où l'exposant 0 indique une solution particulière de (2.80), et l'exposant 1 indique un vecteur qui engendre  $\text{Ker}(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}})$ . Les constantes  $C_1, C_2$  sont *a priori* arbitraires (et indépendantes de  $y$  grâce aux propriétés de l'écoulement de Couette stationnaire). En réinjectant dans l'équation des moments, on voit que  $\lambda = \frac{g_{\epsilon'}(\underline{\underline{\tau}}_s)}{\text{We}}$  ne sera solution que si

$$\frac{((1 - \epsilon) + (\tau^0 + C_1 \tau^1))}{\text{Re}_{g_{\epsilon'}(\underline{\underline{\tau}}_s)}} \text{We} = \frac{1}{n^2 \pi^2}.$$

Donc,  $\lambda = \frac{g_{\epsilon'}(\underline{\underline{\tau}}_s)}{\text{We}}$  est valeur propre de multiplicité dénombrable de  $\mathcal{L}$  et les solutions sont  $(A_n \in \mathbb{R}, C_2 \in \mathbb{R})$ , dans la base propre :

$$\begin{pmatrix} u \\ \sigma \\ \tau \\ \gamma \end{pmatrix} = \sum_n A_n \begin{pmatrix} \sin(n\pi y) \\ n\pi \cos(n\pi y)(\sigma^0 + C_{1,n}\sigma^1) \\ n\pi \cos(n\pi y)(\tau^0 + C_{1,n}\tau^1) \\ n\pi \cos(n\pi y)(\gamma^0 + C_{1,n}\gamma^1) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma^1 \\ \tau^1 \\ \gamma^1 \end{pmatrix}.$$

Soit  $\lambda$  racine de

$$\lambda^2 + B\lambda + D. \quad (2.82)$$

Remarquons qu'il n'est pas exclu ici que  $\frac{g_{\epsilon'}(\underline{\underline{\tau}}_s)}{\text{We}}$  soit solution de (2.82), et que cela arrivera si et seulement si

$$2a\epsilon' \tilde{g}'(\epsilon' \text{We} \text{tr} \underline{\underline{\tau}}_s) u'_s \tau_s + u_s'^2 (1 - a^2) = 0.$$

De même que pour la valeur propre précédente, on démontrerait que la dimension du noyau de  $\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}$  est 1. On peut alors conclure de la même façon que précédemment au fait que  $\lambda$  est valeur propre de multiplicité dénombrable.

Soit  $\lambda$  non valeur propre de  $\underline{\underline{A}}$ . Par hypothèse, il n'existe qu'un seul  $\tau$  solution de (2.80). Pour ce  $\tau(u')$  donné, on veut savoir si il peut exister une solution au problème :

$$\begin{cases} -\frac{(1 - \epsilon)}{\text{Re}} u'' - \frac{1}{\text{Re}} \tau' = \lambda u \\ u(0) = 0 = u(1). \end{cases} \quad (2.83)$$

On a donc besoin d'expliciter la dépendance de  $\tau$  en fonction de  $u'$ , dont on sait qu'elle est linéaire. L'application des formules de Cramer donne :

$$\tau = F(\lambda, \text{We}, u'_s, \epsilon', \varepsilon, a, \sigma_s, \tau_s, \gamma_s)u', \text{ où}$$

$$F(\lambda, \text{We}, u'_s, \epsilon', \dots) = \frac{\left(-\frac{\lambda g_{\epsilon'}(\underline{\tau}_s)}{\text{We}} \frac{\tau_s}{u'_s} + \frac{\text{Re}}{\pi^2} E - (1 - \varepsilon)D\right) \left(\frac{g_{\epsilon'}(\underline{\tau}_s)}{\text{We}} - \lambda\right)}{(\lambda^2 + B\lambda + D) \left(\frac{g_{\epsilon'}(\underline{\tau}_s)}{\text{We}} - \lambda\right)}. \quad (2.84)$$

Les notations (2.78) permettent de simplifier la recherche des valeurs propres de  $\mathcal{L}$  pour lesquelles, si  $\lambda \neq 0$  ( $\Rightarrow (1 - \varepsilon) + F(\lambda, \dots) \neq 0$ ) :

$$\frac{(1 - \varepsilon) + F(\lambda, \text{We}, \dots)}{\text{Re}\lambda} = \frac{1}{n^2 \pi^2} \quad (2.85)$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 + \lambda^2(An^2 + B) + \lambda(Cn^2 + D) - n^2 E = 0.$$

On vérifie que si l'on fait  $\epsilon' = 0$  on retrouve bien l'équation (5.8) de [21] du cas Johnson-Segalman.

Grâce aux notations plus concises (2.78), nous pouvons rappeler que les  $\lambda$  qui ne sont pas valeurs propres de  $\underline{\underline{A}}$ , auxquels nous nous intéressons vérifient (cf (2.78)) :

$$\left(\frac{g_{\epsilon'}(\underline{\tau}_s)}{\text{We}} - \lambda\right) (\lambda^2 + B\lambda + D) \neq 0.$$

Ces valeurs propres sont donc telles que  $A\lambda^2 + C\lambda - E \neq 0$  et (2.85) réarrangée donne :

$$n^2 = \lambda_n \frac{\lambda_n^2 + B\lambda_n + D}{A\lambda_n^2 + C\lambda_n - E}. \quad (2.86)$$

Il est clair que si on retire à cet ensemble de  $\lambda_n$  trois boules de centres les valeurs propres de  $\underline{\underline{A}}$ , alors les autres  $\lambda_n$  sont telles que  $\lambda_n - An^2 \rightarrow 0$ , ce qui permet bien de vérifier que :

$$\exists \eta > 0 / \forall n \in \mathbb{N}, |\lambda_{n+1} - \lambda_n| \geq \eta > 0.$$

Cette fois, si  $\lambda = 0$  alors  $(1 - \varepsilon) + F(\lambda, \dots) = 0$  grâce à (2.83), (2.84) et donc  $E = 0$ . La multiplicité est non dénombrable car toute fonction  $u$  de  $H^2 \cap H_0^1$  convient, avec les  $\sigma, \tau, \gamma$  correspondants.

Montrons maintenant que le spectre ne contient que des valeurs propres. On prend  $\lambda \neq 0$  tel que  $(\mathcal{L} - \lambda \underline{\underline{I}})$  est injectif et on veut montrer qu'il est alors aussi surjectif. Nous le faisons par une méthode d'estimations *a priori* pour laquelle nous supposons dans un premier temps la régularité nécessaire aux calculs satisfaite. On prend donc  $u, \sigma, \tau, \gamma, f, g, h, j$  tels que

$$(\mathcal{L} - \lambda \underline{\underline{I}})(u, \sigma, \tau, \gamma) = (f, g, h, j).$$

Le nombre  $\lambda$  n'étant pas valeur propre de  $\mathcal{L}$  donc non plus de  $\underline{\underline{A}}$ , on peut résoudre en  $\tau$  la partie des équations correspondant à l'équation constitutive :

$$\tau = F(\lambda, \text{We}, \dots)u' + C_1g + C_2h + C_3j,$$

où  $C_1, C_2, C_3$  sont trois constantes explicitables dépendant des grandeurs stationnaires. Cette expression, une fois reportée dans l'équation de conservation des moments, on doit résoudre :

$$-\frac{(1 - \varepsilon) + F(\lambda, \text{We}, \dots)}{\text{Re}}u'' = \lambda u + f + C_1g' + C_2h' + C_3j'.$$

On obtient alors aisément :

$$|u|_1 \leq C(|f| + |g| + |h| + |j|)$$

puis

$$|\tau| \leq C(|f| + |g| + |h| + |j|).$$

L'opérateur  $(\mathcal{L} - \lambda \underline{I})^{-1}$  est donc un opérateur borné.

On a donc bien montré les deux premiers points du théorème. Pour le dernier, 0 sera valeur propre si la première valeur propre étudiée est ce 0 ( $\frac{g_{\varepsilon'}(\underline{\tau}_s)}{\text{We}} = 0$ ), 0 est racine de (2.82) (deuxième cas du dernier point du théorème), ou bien si une des valeurs propres du troisième type est 0 (i.e.  $E = 0$ ).

□

### Remarque 11

Bien que le système linéaire entier soit  $4 \times 4$ , on n'arrive qu'à un polynôme de degré 3 pour (2.85) car la valeur propre  $\lambda = \frac{g_{\varepsilon'}(\underline{\tau}_s)}{\text{We}}$  du sous-système  $\underline{A}$  (et du système entier) a son terme correspondant dans le polynôme caractéristique qui se simplifie pour arriver à l'expression de  $F$  (2.84). On peut peut-être voir là un début d'explication supplémentaire à la différence d'efficacité des algorithmes découplés et non découplés. En effet, dans un algorithme découplé, cette valeur propre est intrinsèque et change l'étape de résolution de l'équation constitutive en la stabilisant. En revanche, dans un algorithme couplé, on peut faire  $\lambda \rightarrow \frac{g_{\varepsilon'}(\underline{\tau}_s)}{\text{We}}$  et la solution  $\tau(u')$  tend vers une limite finie. Un algorithme numérique couplé ne profite donc peut-être pas de cette valeur propre stabilisatrice ( $\frac{g_{\varepsilon'}(\underline{\tau}_s)}{\text{We}} > 0$ ). Ceci ne doit être considéré que comme une supputation car rien de sérieux ne l'accrédite, même si cela pourrait expliquer plusieurs phénomènes particuliers aux fluides viscoélastiques.

### 2.4.3 Stabilité linéaire de l'écoulement de Couette

Nous allons maintenant énoncer un théorème qui donne des conditions suffisantes pour garantir la stabilité de l'écoulement de Couette d'un fluide de type PTT ou MPTT pour toute vitesse du plan supérieur. Plus concrètement, si la vitesse de ce plan est quelconque dans  $\mathbb{R}^+$ , alors la dépendance de  $u^n(y_{n+1})$  en fonction de  $\alpha^1$  étant strictement croissante de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}^+$  et surjective,  $\alpha^1$  est quelconque dans  $\mathbb{R}^+$  avec les notations du théorème 9. Donc, l'équation ((2.68) pour  $a = 1$ , (2.69) si  $a = -1$  et (2.71) si  $a \in ]-1, 1[$ ) à laquelle on a ramené la résolution du système (2.67) a un second membre quelconque dans  $\mathbb{R}^+$  si  $a = 1$ , ( $\mathbb{R}^-$  si  $a \in [-1, 1[$ ,  $\varepsilon \in ]0, 1[$ ,  $\varepsilon' \in \mathbb{R}^{+*}$ ,  $We \neq 0$ ) et donc  $\tau_{11}$  sera quelconque dans  $\mathbb{R}^+$  ( $\tau_{22}$  dans le cas  $a = -1$  sera quelconque dans  $\mathbb{R}^-$  et  $T$  sera quelconque dans  $] -1, 0[$  si  $a \neq \pm 1$  respectivement). Ainsi, la double inégalité (2.70) est optimale si  $a \in ]-1, 1[$ . C'est sur des variations dans ces domaines, qui sont optimaux, que nous tenterons de garantir que le signe de la partie réelle des valeurs propres est strictement positif.

Nous noterons  $K = \frac{\varepsilon \varepsilon' |a|}{1 - a^2}$  et  $K_-, K_+$  les deux racines en  $K$  de  $3(1 - \varepsilon)K^2 - K(4 - 5\varepsilon) + (1 - 2\varepsilon + (1 - \varepsilon)k^2)$  quand elles interviendront et donnons ci-dessous un tableau de conditions sur  $K$  à vérifier.

	Cas PTT	Cas MPPT
$a = +1$	pas de condition	pas de condition
$0 < a < 1$	$K > \frac{2\varepsilon}{3(1-\varepsilon)}$	$K > \frac{2\varepsilon}{3(1-\varepsilon)}$ ou $K < \frac{2\varepsilon}{3(1-\varepsilon)}$ et si $\varepsilon < 4/5$ : $k^2 > \frac{2\varepsilon-1}{1-\varepsilon}$ ou $k^2 < \frac{2\varepsilon-1}{1-\varepsilon} \Rightarrow \exists 0 < K_0 < \frac{2\varepsilon}{3(1-\varepsilon)} /$ $K_0 < K < \frac{2\varepsilon}{3(1-\varepsilon)}$ si $\varepsilon > 4/5$ : $k^2 > \frac{(2-\varepsilon)^2}{12(1-\varepsilon)^2}$ $k^2 < \frac{(2-\varepsilon)^2}{12(1-\varepsilon)^2} \Rightarrow \exists K_0 > 0 /$ $K_0 < K < \frac{2\varepsilon}{3(1-\varepsilon)}$
$a = 0$	$\varepsilon < 8/9$ ou $\varepsilon \geq 8/9$ et $k^2 \in ]0, \kappa_- [ \cup ] \kappa_+, +\infty [$ cf [21]	
$-1 < a < 0$	$\exists K_0 < 1 / 0 < K < K_0$ et $k^2 > \frac{2\varepsilon-1}{1-\varepsilon}$	$k^2 > 1/3$ et si $k^2 > \frac{(2-\varepsilon)^2}{12(1-\varepsilon)^2} (> 1/3)$ : $\forall K < 1/3$ si $\text{Sup}(\frac{1}{3}, \frac{2\varepsilon-1}{1-\varepsilon}) < k^2 < \frac{(2-\varepsilon)^2}{12(1-\varepsilon)^2}$ : $K \in ]0, K_- [ \cap ] 0, \frac{1}{3} [$ si $\text{Sup}(\frac{1}{3}, \frac{2\varepsilon}{3(1-\varepsilon)}) < k^2 < \frac{(2-\varepsilon)^2}{12(1-\varepsilon)^2}$ : $K \in ]K_+, 1/3 [ \cap ] 0, \frac{1}{3} [$
$a = -1$	$\varepsilon' = 0$ ou $We = 0$	

### Théorème 2.12

Sous les conditions sur  $K$  précisées dans le tableau ci-dessus, l'écoulement de Couette soumis à des perturbations monodimensionnelles est linéairement stable. Si  $g_{\varepsilon'}(\underline{\tau}_s) < 0$  (cas MPPT  $a < 0$ ), le même écoulement est instable.

### Démonstration du Théorème 2.12:

Nous ne donnerons que le schéma de la démonstration. Celle-ci se décompose en deux parties.

Dans la première, on cherche des conditions sur les différents paramètres pour que le spectre soit entièrement à partie réelle strictement positive. Il nous faut alors étudier séparément le cas où  $\lambda$  est une des trois valeurs propres de l'équation constitutive et finalement étudier les valeurs propres solutions du problème entier (2.85). Pour ces dernières valeurs propres nous utilisons le critère de Routh-Hurwitz [46] (p 490) qui nous donne trois conditions que nous étudions successivement, sur les coefficients de

l'équation polynomiale (2.85), qui équivalent à ce que la partie réelle des racines de ce polynôme soit strictement positive.

Voici ci-après un schéma de cette partie de la démonstration point par point, sans que le détail des calculs soit repris :

1. 1<sup>ère</sup> valeur propre de l'équation constitutive  $\lambda = \frac{g_{e'}(\underline{\tau}_s)}{We}$ .
2. 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> valeurs propres, racines de  $\lambda^2 + B\lambda + D$ .
  - (a)  $a \geq 0$
  - (b)  $-1 < a < 0$ 
    - i. modèle PTT
    - ii. modèle MPTT
  - (c)  $a = -1$
3. Les valeurs propres du problème entier, racines de (2.85)
  - (a) 1<sup>ère</sup> condition  $An^2 + B < 0$
  - (b) 2<sup>ème</sup> condition  $E > 0$ 
    - i.  $a = 1$ 
      - A. modèle de MPTT
      - B. modèle de PTT
    - ii.  $0 < a < 1$ 
      - A. modèle de MPTT
      - B. modèle de PTT
    - iii.  $a = 0$
    - iv.  $-1 < a < 0$ 
      - A. modèle de MPTT
      - B. modèle de PTT
    - v.  $a = -1$ 
      - A. modèle de MPTT
      - B. modèle de PTT
  - (c) 3<sup>ème</sup> condition  $-(An^2 + B) \times (Cn^2 + D) - n^2E > 0 \forall n \geq 1$ 
    - i.  $a = 1$
    - ii.  $0 < a < 1$
    - iii.  $a = 0$
    - iv.  $-1 < a < 0$ 
      - A. modèle de MPTT
      - B. modèle de PTT

v.  $a = -1$

Dans la deuxième partie, on montre grâce à un théorème de Renardy [47] que les résultats que l'on vient de donner sur le spectre donnent bien la stabilité linéaire. Ce théorème s'énonce :

**Théorème 2.13**

Soit  $H$  un espace de Hilbert, et soit  $A = A_0 + B$  le générateur infinitésimal d'un semi-groupe continu d'opérateurs dans  $H$ . Supposons que  $A_0$  soit normal et  $B$  borné. Supposons de plus qu'il existe un nombre  $M > 0$  et un entier  $n$  tel que

1. Si  $\lambda \in \sigma(A_0)$  et  $|\lambda| > M - 1$  alors  $\lambda$  est une valeur propre isolée de multiplicité finie
2. Si  $|z| > M$  alors, le nombre de valeurs propres de  $A_0$  dans le disque unité centré en  $z$  (comptées avec leur multiplicité) n'excède pas  $n$ ,

alors le principe de stabilité linéaire s'applique.

Ici, nous prendrons  $A_0 = \mathcal{L}$  et  $B = 0$ . Notre  $A_0$  est clairement normal ( $A_0 A_0^T = A_0^T A_0$ ). De plus, par le théorème 2.11 les hypothèses 1 et 2 sont satisfaites pour un  $M$  et un  $n$  bien choisis. Enfin, en utilisant des développements en série de Fourier, on montre que (2.77) définit un opérateur  $\mathcal{L}$  générateur infinitésimal d'un semi-groupe continu de  $H$  grâce aux propriétés de l'écoulement de Couette qui font que le système est à coefficients constants, en plus d'être linéaire. Donc toute la longue étude précédente qui portait sur le spectre permet de conclure sur la stabilité et achève le schéma de démonstration du théorème 2.12.

□





# Chapter 3

## Existence avec frontière libre

### 3.1 Géométrie, équations, théorème

On s'intéresse à l'écoulement d'un fluide viscoélastique incompressible de type Jeffrey (i.e. Johnson-Segalman avec une viscosité newtonienne non nulle: pour la laplacien) interpolé comportant une surface libre et un fond solide, soumis à une tension superficielle générale (cf [48]), en dimension 2. Dans la suite, on démontre l'existence en temps petit, pour toute condition initiale, d'une solution aux équations traduisant cet écoulement. Nous utilisons les résultats de G. Allain [49] qui a démontré le même résultat pour un fluide visqueux newtonien ainsi que certains résultats de J. T. Beale [52].

La géométrie est celle d'un océan infini, de fond  $S_B$  fixe, représenté par une fonction hauteur  $h_0$ , de surface libre dénotée  $S_F(t)$  à  $t$  et  $S_F$  à l'instant 0, représentée par une fonction  $h$  à  $t = 0$  ( $h \rightarrow 0$  quand  $x_1 \rightarrow \infty$ ). Ces deux surfaces ne se touchent pas (cf dessin 3.1). Notre domaine est donc non borné mais d'épaisseur finie dans une direction. Afin de se ramener à une géométrie fixée, pour traiter la surface libre, on représentera les variables en coordonnées lagrangiennes (cf [51]). Suivant G. Allain, nous noterons  $\Omega$  le domaine initial ( $h_0(x_1) < y < h(x_1)$ ) et  $\Omega(t)$  son transformé à l'instant  $t$ . De plus, nous noterons  $X$  un point courant de  $\Omega$ , variable lagrangienne d'espace et  $x$  sa variable eulérienne associée. Appelant alors  $\bar{\eta}(\cdot, t) : \Omega \mapsto \Omega(t)$  la fonction qui transforme le point  $X \in \Omega$  en son image au temps  $t$  suivant le champ des vitesses, on cherche les solutions du problème posé en variables eulériennes  $(\underline{v}, p, \underline{\tau})$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Omega(t) = \bar{\eta}(\Omega, t), & (3.1) \\ \bar{\eta}_t(X, t) = \underline{v}(\bar{\eta}(X, t), t), & (3.2) \\ \operatorname{Re} \underline{v}_t + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} - (1 - \varepsilon) \Delta \underline{v} + \nabla p = \operatorname{div} \underline{\tau} \text{ dans } (\Omega(t) \times (0, T)), & (3.3) \\ \operatorname{div} \underline{v} = 0 \text{ dans } (\Omega(t) \times (0, T)), & (3.4) \\ \underline{\tau} + \operatorname{We} \frac{\mathcal{D}_a[\underline{v}]\underline{\tau}}{\mathcal{D}t} = 2\varepsilon \underline{D}[\underline{v}] \text{ dans } (\Omega(t) \times (0, T)), & (3.5) \\ \underline{\tau} \cdot \underline{n} - p \underline{n} + 2(1 - \varepsilon) \underline{D}[\underline{v}] \cdot \underline{n} - \alpha H \underline{n} = -P_0 \underline{n} \text{ sur } S_F(t) \times (0, T), & (3.6) \\ \underline{v} = 0 \text{ sur } S_B(t) \times (0, T), & (3.7) \\ \underline{v}(x, 0) = \underline{u}_0(x) \text{ dans } \Omega, & (3.8) \\ \underline{\tau}(x, 0) = \underline{\sigma}_0(x) \text{ dans } \Omega, & (3.9) \\ \bar{\eta}(x, 0) = x \text{ dans } \Omega. & (3.10) \end{array} \right.$$

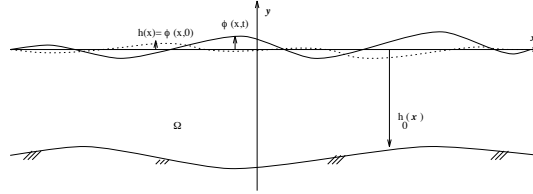


Figure 3.1: La géométrie

Nous noterons  $\frac{\mathcal{D}_a[\underline{u}](\cdot)}{\mathcal{D}t}$  la dérivée interpolée. La condition (3.6) exprime l'équilibre des forces entre la pression extérieure et la pression totale intérieure. Le terme  $-\alpha H \underline{n}$  traduit la tension superficielle, avec  $H$  la courbure de la surface  $S_F(t) = \bar{\eta}(S_F, t)$  (ou somme des courbures principales en 3D),  $\alpha$  la constante de tension superficielle et  $\underline{n}$  la normale extérieure en  $x \in S_F(t)$ .  $P_0$  est la pression extérieure supposée constante. Nous noterons  $\eta(X, t) = \bar{\eta}(X, t) - X$  le déplacement du point  $X$  jusqu'à l'instant  $t$ . Pour la modélisation de la surface libre, nous reprenons les notations de G. Allain [49] avec la fonction  $\Phi$  qui traduit l'état de la frontière libre. Celle-ci est telle que :

$$M(X_1, h(X_1)) \in S_F \mapsto \Phi(M) = \frac{h'(X_1) + \frac{\partial(\eta_2(X_1, h(X_1), t))}{\partial X_1}(X_1, t)}{1 + \frac{\partial(\eta_1(X_1, h(X_1), t))}{\partial X_1}(X_1, t)} - h'(X_1).$$

Cette fonction  $\Phi$  est donc un accroissement par rapport à  $h'$  et permet d'exprimer le

terme de tension superficielle ([49]) :

$$H\underline{n}(\bar{\eta}(X, t), t) = \frac{(1 + h'^2)^{\frac{1}{2}} \partial_\tau \left( (1 + (\Phi + h')^2)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \Phi + h' \end{pmatrix} \right)}{\sqrt{\left(1 + \frac{\partial(\eta_1(X_1, h(X_1), t))}{\partial X_1}\right)^2 + \left(h'(X_1) + \frac{\partial(\eta_2(X_1, h(X_1), t))}{\partial X_1}\right)^2}}, \quad (3.11)$$

où  $\partial_\tau$  désigne la dérivée tangentielle sur  $S_F$  (par rapport au vecteur tangent à  $S_F$ ). On utilise une expression en termes de dérivée tangentielle afin de ne pas avoir à transporter la dérivée.

Le changement de variable :  $\tilde{p}(x, t) = p(x, t) - P_0 + g_0 x_2$  fait rentrer les termes de pesanteur et de pression extérieure dans la pression interne. Nous noterons alors :

$$\begin{aligned} \underline{u}(X, t) &= \underline{v}(\bar{\eta}(X, t), t); \quad q(X, t) = \tilde{p}(\bar{\eta}(X, t), t); \quad \underline{\sigma}(X, t) = \underline{\tau}(\bar{\eta}(X, t), t); \\ \underline{N}(X, t) &= \underline{n}(\bar{\eta}(X, t), t); \quad \partial_k = \frac{\partial}{\partial X_k}; \quad (\bar{\xi}_{ij}) = (d\bar{\eta})^{-1}(X, t); \quad d\bar{\eta}_{ij} = \frac{\partial \bar{\eta}_i}{\partial X_j}(X, t); \\ \underline{\mathcal{N}} &= (N_1 - \partial_\tau \eta_2, N_2 + \partial_\tau \eta_1). \end{aligned}$$

Avec ces notations, nous pouvons écrire la version lagrangienne de (3.1-3.10) :

$$\left\{ \begin{aligned} \text{Re} u_{i,t} - (1 - \varepsilon) \bar{\xi}_{kj} \partial_k (\bar{\xi}_{lj} u_{i,l}) + \bar{\xi}_{ki} \partial_k q &= \sigma_{ij,k} \bar{\xi}_{kj} \text{ dans } (\Omega \times (0, T)), & (3.12) \\ \bar{\xi}_{kj} u_{j,k} &= 0 \text{ dans } \Omega, & (3.13) \\ \sigma_{ij} + \text{We} \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} - \frac{a-1}{2} (\bar{\xi}_{li} u_{k,l} \sigma_{kj} + \sigma_{ik} u_{k,l} \bar{\xi}_{lj}) - \frac{a+1}{2} (\sigma_{ik} \bar{\xi}_{lk} u_{j,l} + u_{i,l} \bar{\xi}_{lk} \sigma_{kj}) \right) & \\ &= \varepsilon (u_{i,k} \bar{\xi}_{kj} + u_{j,k} \bar{\xi}_{ki}), & (3.14) \\ \sigma_{ij} \underline{\mathcal{N}}_j - q \underline{\mathcal{N}}_i + (1 - \varepsilon) (\bar{\xi}_{kj} u_{i,k} + \bar{\xi}_{ki} u_{j,k}) \underline{\mathcal{N}}_j + g_0 (h(X_1) + \eta_2(X_1, t)) \underline{\mathcal{N}}_i - & \\ \alpha \partial_\tau \left( (1 + (\Phi + h')^2)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \Phi + h' \end{pmatrix} \right) &= 0 \text{ sur } S_F \times (0, T), & (3.15) \\ \Phi_t &= \frac{(\partial_\tau \underline{u}) \cdot \underline{\mathcal{N}}}{\mathcal{N}_2^2} \text{ sur } S_F \times (0, T), & (3.16) \\ \Phi(0) &= 0 \text{ sur } S_F, & (3.17) \\ \underline{u}(0) &= \underline{u}_0 \text{ dans } \Omega, & (3.18) \\ \underline{\sigma}(X, 0) &= \underline{\sigma}_0(X) \text{ dans } \Omega, & (3.19) \\ \underline{u} &= 0 \text{ sur } S_B. & (3.20) \end{aligned} \right.$$

Introduisons également le problème intermédiaire correspondant aux termes d'ordre 0 dans un développement en  $\eta, \xi_{ij} = \bar{\xi}_{ij} - \delta_{ij}$  et linéarisé en  $\Phi$  de (3.12-3.20) ( $\phi = (1 + h'^2)^{-1} \Phi$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re} \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} - (1 - \varepsilon) \Delta \underline{u} + \nabla q - \operatorname{div} \underline{\sigma} = \underline{f} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.21) \\ \operatorname{div} \underline{u} = a \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.22) \\ \underline{\sigma} + \operatorname{We} \left( \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial t} - \underline{g}(\nabla \underline{u}, \underline{\sigma}) \right) - 2\varepsilon \underline{D}[\underline{u}] = \underline{m} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.23) \\ \text{avec } \underline{g}(\nabla \underline{v}, \underline{\sigma}) = \left( \frac{a-1}{2} (\nabla \underline{v}^T \underline{\sigma} + \underline{\sigma} \nabla \underline{v}) + \frac{a+1}{2} (\underline{\sigma} \nabla \underline{v}^T + \nabla \underline{v} \underline{\sigma}) \right) \\ \underline{\sigma} \cdot \underline{N} - q \underline{N} + 2(1 - \varepsilon) \underline{D}[\underline{u}] \cdot \underline{N} - \alpha \partial_\tau (\phi \underline{N}) = g \quad \text{dans } S_F \times (0, T), \quad (3.24) \\ \phi_t - \partial_\tau \underline{u} \cdot \underline{N} = k \quad \text{dans } S_F \times (0, T), \quad (3.25) \\ \phi(0) = 0 \quad \text{sur } S_F, \quad (3.26) \\ \underline{u}(0) = \underline{u}_0(X) \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.27) \\ \underline{\sigma}(0) = \underline{\sigma}_0(X) \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.28) \\ \underline{u} = 0 \quad \text{sur } S_B \quad \forall t, \quad (3.29) \end{array} \right.$$

que nous noterons  $P_1(\underline{u}, q, \Phi, \underline{\sigma}) = (f, a, \underline{m}, g, k, \underline{u}_0, \underline{\sigma}_0)$ . L'opération qui vient d'être faite a consisté à garder les termes d'ordre 0 en  $\xi$  et à ne retenir que les termes d'ordre 1 en  $\Phi$ . G. Allain [49], partant des équations de Navier-Stokes, arrive par le même procédé, à des équations linéaires en ses variables primales. A cause de notre équation constitutive, fondamentalement non linéaire, ce n'est pas notre cas. En effet, les termes contenant des  $\nabla \underline{u}$  et  $\underline{\sigma}$  (avec conditions initiales non homogènes), ne peuvent pas être rendus assez petits pour avoir la propriété de contractance, même pour  $T$  suffisamment petit et doivent donc être inversés. Ce n'est pas le cas de  $\phi$  qui est nulle à  $t = 0$ . Jouer sur  $T$  permet donc d'avoir une contraction pour les termes en  $\phi$ , mais pas sur  $\underline{g}(\nabla \underline{u}, \underline{\sigma})$

On pourrait résoudre ce premier "problème intermédiaire"  $P_1$  (3.21-3.29), après annulation des seconds membres dans  $Y_T^r$ . Cependant, le relèvement des conditions aux limites et initiales, à cause de la non-linéarité, nous force à résoudre le problème noté  $P_2$  tel que  $P_2[\underline{u}^0, \underline{\sigma}^0](\underline{u}, q, \phi, \underline{\sigma}) := P_1(\underline{u}^0 + \underline{u}, q^0 + q, \phi^0 + \phi, \underline{\sigma}^0 + \underline{\sigma}) - P_1(\underline{u}^0, q^0, \phi^0, \underline{\sigma}^0)$  (on confond volontairement l'opérateur et le problème). L'inversion de  $P_1$  avec un second membre  $(\underline{u}^0, q^0, \phi^0, \underline{\sigma}^0)$  aux conditions initiales non nulles nous permettra de relever ces conditions initiales comme on le verra en section 3.5 et de résoudre tout  $P_1$ , après résolution de  $P_2$ . Comme celui-ci a l'avantage d'avoir un second membre à conditions initiales nulles, on pourra utiliser les théorèmes d'injection (ce qui est le but) comme nous le verrons plus loin.

Dans ce deuxième problème intermédiaire, nous avons ajouté des termes seulement linéaires en  $\nabla \underline{u}, \underline{\tau}$  à l'équation constitutive. Le problème  $P_2[\underline{u}_1, \underline{\tau}_1](\underline{u}, q, \Phi, \underline{\sigma}) = (f, a, \underline{m}, g, k, 0, 0)$  sera, pour  $\underline{u}_1, \underline{\tau}_1$  donnés, résolu lors de la résolution du premier problème  $P_1$  et résolu avec, en plus, des conditions initiales non nulles en p 97 dans une section spéciale. Le problème  $P_2$  s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re} \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} - (1 - \varepsilon) \Delta \underline{u} + \nabla q - \operatorname{div} \underline{\sigma} = \underline{f} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.30) \\ \operatorname{div} \underline{u} = a \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.31) \\ \underline{\sigma} + \operatorname{We} \left( \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial t} - \underline{g}(\nabla \underline{u}, \underline{\sigma}) - \underline{g}(\nabla \underline{u}_1, \underline{\sigma}) - \underline{g}(\nabla \underline{u}, \underline{\tau}_1) \right) - 2\varepsilon \underline{D}[\underline{u}] = \underline{m} \quad \text{dans } \Omega, \\ \text{avec } \underline{g}(\nabla \underline{v}, \underline{\sigma}) = \left( \frac{a-1}{2} (\nabla \underline{v}^T \underline{\sigma} + \underline{\sigma} \nabla \underline{v}) + \frac{a+1}{2} (\underline{\sigma} \nabla \underline{v}^T + \nabla \underline{v} \underline{\sigma}) \right) \quad (3.32) \\ \underline{\sigma} \cdot \underline{N} - q \underline{N} + 2(1 - \varepsilon) \underline{D}[\underline{u}] \cdot \underline{N} - \alpha \partial_\tau (\phi \underline{N}) = g \quad \text{dans } S_F \times (0, T), \quad (3.33) \\ \phi_t - \partial_\tau \underline{u} \cdot \underline{N} = k \quad \text{dans } S_F \times (0, T), \quad (3.34) \\ \phi(0) = 0 \quad \text{sur } S_F, \quad (3.35) \\ \underline{u}(0) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.36) \\ \underline{\sigma}(0) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.37) \\ \underline{u} = 0 \quad \text{sur } S_B \quad \forall t. \quad (3.38) \end{array} \right.$$

Dans la suite, nous aurons besoin des espaces suivants ( $r, s > 0$ ) :

$$\begin{aligned} H^{r,s}(\Omega \times (0, T)) &= H^0(0, T; H^r(\Omega)) \cap H^s(0, T; H^0(\Omega)), \\ H^{r,s}(S_F \times (0, T)) &= L^2(0, T; H^r(S_F)) \cap H^s(0, T; L^2(S_F)), \end{aligned}$$

où  $H^r$  est l'espace de Sobolev classique. De plus nous utiliserons la notation utilisée par J.T. Beale [52] :

$$K^r(\Omega \times (0, T)) = H^{r, \frac{r}{2}}(\Omega \times (0, T)).$$

Pour les propriétés de ces espaces, notamment les théorèmes de trace, on pourra consulter [53]. Nous noterons, sauf mention contraire,  $|\cdot|_r$ ,  $|\cdot|_{r,s}$  les normes dans  $K^r(\Omega)$ ,  $H^{r,s}(\Omega \times (0, T))$  respectivement.

Nous aurons besoin également des deux espaces suivants :

$$X_T^r(\Omega \times (0, T)) = \{(\underline{u}, q, \phi, \underline{\sigma}) /$$

$$\underline{u} \in H^{r+2, \frac{r}{2}+1} = K^{r+2} \text{ et } \underline{u} = 0 \text{ sur } S_B \times (0, T) \quad (3.39)$$

$$\nabla q \in H^{r, \frac{r}{2}} \text{ et } q|_{S_F} \in H^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}(0, T; L^2(S_F)) \quad (3.40)$$

$$\partial_\tau \phi \in L^2(0, T; H^{r+\frac{1}{2}}(S_F)); \phi_t \in H^{r+\frac{1}{2}, \frac{r}{2}+\frac{1}{4}}(S_F \times (0, T)); \phi(0) = 0 \quad (3.41)$$

$$\underline{\sigma} \in K^{r+1}(\Omega \times (0, T)) \quad \} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned}
Y_T^r(\Omega \times (0, T)) = & \{(\underline{f}, a, \underline{m}, g, k, \underline{u}_0, \underline{\sigma}_0) / \\
& \underline{f} \in H^{r, \frac{r}{2}}((0, T) \times \Omega) \\
& a \in L^2(0, T; H^{r+1}(\Omega)) \cap H^{\frac{r}{2}+1}(0, T, {}_0H^{-1}(\Omega)) \\
& \underline{m} \in K^{r+1}((0, T) \times \Omega) \\
& g, k \in K^{r+\frac{1}{2}}(S_F \times (0, T)) \\
& \underline{u}_0, \underline{\sigma}_0 \in H^{r+1}(\Omega)\}, \tag{3.43}
\end{aligned}$$

où  ${}_0H^{-1}$  est le dual de  ${}^0H^1 = \{p \in H^1 / p \equiv 0 \text{ sur } S_F\}$ . On doit garder un tel espace  $H^{\frac{r}{2}+1}(0, T, {}_0H^{-1}(\Omega))$  pour, en relevant la condition associée, avoir un champ  $v \in H^{\frac{r}{2}+1}(0, T, L^2(\Omega))$ .

Avec les notations précédentes, nous allons démontrer le théorème :

### Théorème 3.1

Pour  $0 < r < \frac{1}{2}$ ,  $h_0, h \in H^{r+\frac{5}{2}}(\mathbb{R})$ ,  $(\underline{\approx}_{\nu}, \underline{\sigma}_{\nu}) \in \mathbb{H}^{-+k} \times \mathbb{H}_{sym}^{+k}$  et si les conditions de compatibilité  $\text{div } \underline{u}_0 = 0$  dans  $\Omega$ ,  $\underline{u}_0 = 0$  sur  $S_B$  sont vérifiées, alors il existe  $T_0 > 0$  dépendant des données du problème ;  $r, \underline{u}_0, \underline{\sigma}_0, h, h_0, We, \varepsilon, a$  et il existe un élément  $(\underline{u}, q, \phi, \underline{\sigma}) \in X_T^r$  solution de (3.12, 3.20), version lagrangienne de (3.1, 3.10).

Remarquons que dans la contrainte  $0 < r < \frac{1}{2}$ ,  $r > 0$  est nécessaire pour que  $H^{1+r}$  soit une algèbre et donc que l'équation constitutive ait un sens. De plus,  $r < \frac{1}{2}$  est une limitation imposée par la partie Navier-Stokes. Cette contrainte est nécessaire pour ne pas avoir trop de régularité sur  $p$  qui imposerait de donner une condition initiale en pression. Il serait possible pour la partie viscoélastique d'étendre à  $r < 1$  sans trop de problème.

Dans un premier temps, nous montrerons que le premier problème intermédiaire (3.21-3.29) admet une unique solution, qui dépend continuellement des non-homogénéités. Pour cela, nous introduirons un problème annexe. Celui-ci sera résolu en découplant les équations, résolubles séparément sur  $(0, T_0)$ . Nous montrerons que la suite des solutions découplées des deux sous-problèmes est contractante. Après être passé à la limite, nous relèverons les conditions aux limites et conditions initiales. Nous montrerons la continuité de l'opérateur non linéaire solution de ce système. Dans un deuxième temps, nous résoudrons le deuxième problème intermédiaire (3.30-3.38). Puis nous évaluerons les termes qui disparaissent dans le développement qui conduit à  $P_1$  afin de montrer, que pour  $T$  assez petit, ces termes supplémentaires satisfont notamment des conditions de contractance. Enfin, nous ramènerons l'inversion de l'opérateur entier à un problème de point fixe pour une application composée d'une application continue  $P_2^{-1}$  et d'une application non linéaire (les  $E$  dépendant de  $\xi$ ) dont des estimations nous permettent d'exhiber une boule invariante d'un espace de Hilbert dans laquelle l'application est contractante.

## 3.2 Résolution du premier problème intermédiaire

Dans cette section, nous montrons le théorème suivant :

### Théorème 3.2

Soient  $0 < r < \frac{1}{2}$  et  $B > 0$  donné. Il existe un temps  $T_0$  tel que si  $T \leq T_0$ , l'opérateur défini sur la boule  $B_{Y_T^r}(0, B) : (\underline{f}, a, \underline{m}, g, k, \underline{u}_0, \underline{\sigma}_0) \mapsto (\underline{u}, p, \phi, \underline{\sigma}) \in X_T^r$  solution de (3.21-3.29) existe et est continu, si les conditions de compatibilité  $\operatorname{div} \underline{u}_0 = 0, u_0 = 0$  sur  $S_B$  sont vérifiées :

$$\begin{aligned} & | \underline{u} - \underline{u}', p - p', \phi - \phi', \underline{\sigma} - \underline{\sigma}' |_{X_T^r} \leq \\ & C | \underline{f} - \underline{f}', a - a', \underline{m} - \underline{m}', g - g', k - k', \underline{u}_0 - \underline{u}_0', \underline{\sigma}_0 - \underline{\sigma}_0' |_{Y_T^r}, \end{aligned} \quad (3.44)$$

où  $C = C(\varepsilon, We, B, T_0, Re)$  désigne une constante qui ne dépend pas de  $T \leq T_0$ .

### 3.2.1 Plan de la démonstration

On se donne  $\underline{u}_1, \underline{\tau}_1$  dans  $K^{r+2} \times K^{r+1} \cap L^\infty(0, T; H^{1+r})$ . Afin de démontrer le théorème précédent, on introduit le problème associé à l'opérateur non linéaire noté  $P_2[\underline{u}_1, \underline{\tau}_1](\underline{u}, q, \Phi, \underline{\sigma})$ , déjà présenté, et de seconds membres nuls, sauf  $\underline{f}, \underline{m}$ . On inversera l'opérateur  $P_2$  avec un autre second membre dans une section prochaine.

$$\operatorname{Re} \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} - (1 - \varepsilon) \Delta \underline{u} + \nabla q = \underline{f} + \operatorname{div} \underline{\sigma} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (3.45)$$

$$\operatorname{div} \underline{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (3.46)$$

$$\underline{\sigma} + We \left( \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial t} - \underline{g}(\nabla \underline{u}, \underline{\sigma}) - \underline{g}(\nabla \underline{u}_1, \underline{\sigma}) - \underline{g}(\nabla \underline{u}, \underline{\tau}_1) \right) - 2\varepsilon D[\underline{u}] = \underline{m} \quad (3.47)$$

$$\text{avec } \underline{g}(\nabla \underline{u}, \underline{\sigma}) = \left( \frac{a-1}{2} (\nabla \underline{u}^T \underline{\sigma} + \underline{\sigma} \nabla \underline{u}) + \frac{a+1}{2} (\underline{\sigma} \nabla \underline{u}^T + \nabla \underline{u} \underline{\sigma}) \right) - q \underline{N} + 2(1 - \varepsilon) \underline{D}[\underline{u}] \cdot \underline{N} - \alpha \partial_\tau (\phi \underline{N}) + \underline{\sigma} \cdot \underline{N} = 0 \quad \text{dans } S_F \times (0, T) \quad (3.48)$$

$$\phi_t = \partial_\tau \underline{u} \cdot \underline{N} \quad \text{dans } S_F \times (0, T) \quad (3.49)$$

$$\phi(0) = 0 \quad \text{sur } S_F \quad (3.50)$$

$$\underline{u}(0) = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (3.51)$$

$$\underline{\sigma}(0) = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (3.52)$$

$$\underline{u} = 0 \quad \text{sur } S_B \quad \forall t \quad (3.53)$$

On souhaite résoudre ce problème en utilisant une suite de fonctions, dans les espaces explicités plus haut, dont nous démontrerons que c'est une suite de Cauchy en montrant qu'elle est contractante. On connaît d'après [49] l'existence d'un opérateur borné qui donne  $(\underline{u}, q, \phi)$  connaissant  $\underline{\sigma}, \underline{f}, \underline{m}$ . Afin de réutiliser cette propriété, on va tenter de



résoudre (3.45-3.53) en découplant, comme l'ont fait Guillopé-Saut [26] la partie Navier Stokes, résolue par G. Allain, de la partie constitutive. Le schéma proposé est donc le suivant :

On se donne  $\underline{u}^0 = 0, q^0 = 0, \phi^0 = 0, \underline{\underline{\sigma}}^0 = 0$ . Connaissant  $(\underline{u}^n, q^n, \phi^n, \underline{\underline{\sigma}}^n)$  on cherche  $\underline{\underline{\sigma}}^{n+1}$  tel que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\sigma}}^{n+1} + \text{We} \left( \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}^{n+1}}{\partial t} - \underline{g}(\underline{\nabla} \underline{u}^n, \underline{\underline{\sigma}}^{n+1}) - \underline{g}(\underline{\nabla} \underline{u}_1, \underline{\underline{\sigma}}^{n+1}) - \underline{g}(\underline{\nabla} \underline{u}^n, \underline{\underline{\tau}}_1) \right) = 2\varepsilon \underline{D}[\underline{u}^n] + \underline{m} \\ \text{avec } \underline{g}(\underline{\nabla} \underline{v}, \underline{\underline{\sigma}}) = \left( \frac{a-1}{2} (\underline{\nabla} \underline{v}^T \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\sigma}} \underline{\nabla} \underline{v}) + \frac{a+1}{2} (\underline{\underline{\sigma}} \underline{\nabla} \underline{v}^T + \underline{\nabla} \underline{v} \underline{\underline{\sigma}}) \right) \\ \underline{\underline{\sigma}}^{n+1}(0) = 0. \end{array} \right. \quad (3.54)$$

Un tel  $\underline{\underline{\sigma}}^{n+1}$  existe sur tout intervalle de temps sur lequel  $\underline{\nabla} \underline{u}^n$  est défini. Il suffit en effet de regrouper les termes contenant  $\underline{\underline{\sigma}}^{n+1}$  dans la dérivée, utiliser le changement de base matriciel  $\underline{\underline{W}}_a = \underline{R}_a \underline{\underline{\sigma}} \underline{R}_a^T$  où  $\underline{R}_a$  est solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \underline{R}_a}{\partial t}(X, t; s) = \underline{R}_a(X, t; s) \underline{m}_a^T, \\ \underline{R}_a(X, t; t) = \underline{I}, \underline{m}_a = \underline{\Omega}[\underline{u}^n + \underline{u}_1] - a \underline{D}[\underline{u}^n + \underline{u}_1], \end{array} \right.$$

et l'équation (3.54) revient à une simple équation différentielle résoluble explicitement par rapport à  $\underline{\underline{W}}_a$  (cf introduction p 28). En effet, si  $\underline{m}_a \in L^2(0, T; H^{1+r})$ , alors  $\underline{R}_a$  appartient à l'algèbre  $H^1(0, T; H_{\text{loc}}^{1+r})$ .

Puis on cherche  $\underline{u}^{n+1}, q^{n+1}, \phi^{n+1}$  tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Re} \frac{\partial \underline{u}^{n+1}}{\partial t} - (1 - \varepsilon) \Delta \underline{u}^{n+1} + \underline{\nabla} q^{n+1} = \underline{f} + \text{div} \underline{\underline{\sigma}}^{n+1} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (3.55) \\ \text{div} \underline{u}^{n+1} = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (3.56) \\ -q^{n+1} \underline{N} + 2(1 - \varepsilon) \underline{D}[\underline{u}^{n+1}] \cdot \underline{N} - \alpha \partial_\tau (\phi^{n+1} \underline{N}) = \underline{\underline{\sigma}}^{n+1} \cdot \underline{N} \quad \text{dans } S_F \times (0, T) \quad (3.57) \\ \phi_t^{n+1} = (\partial_\tau \underline{u}^{n+1}) \cdot \underline{N} \quad \text{dans } S_F \times (0, T) \quad (3.58) \\ \phi^{n+1}(0) = 0 \quad \text{sur } S_F \quad (3.59) \\ \underline{u}^{n+1}(0) = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (3.60) \\ \underline{u}^{n+1} = 0 \quad \text{sur } S_B \quad \forall t \quad (3.61) \end{array} \right.$$

On sait, d'après le théorème (4.1) de [49] pour  $a = 0, g = -\underline{\underline{\sigma}}^{n+1} \cdot \underline{N}, k = 0, \underline{u}_0 = 0$ , que  $(\underline{u}^{n+1}, q^{n+1}, \phi^{n+1})$  existe et est unique dans  $X_{T_0}^r$  si  $\underline{f} + \text{div} \underline{\underline{\sigma}}^{n+1} \in K^r((0, T_0) \times \Omega)$  et  $\underline{\underline{\sigma}}^{n+1} \cdot \underline{N} \in K^{r+\frac{1}{2}}(S_F \times (0, T_0))$ . Le  $T_0$  ne dépendra donc pas de  $n$ .

On a déjà noté, en introduction (p 28), un gain de régularité de  $\underline{\underline{\sigma}}$  par rapport à  $\underline{\nabla} \underline{u}$  dans l'équation constitutive lagrangienne. Celui-ci repose sur l'absence d'opérateur de dérivée en temps sur  $\underline{\nabla} \underline{u}$  et sur l'absence de dérivée en espace sur  $\underline{\underline{\sigma}}$ . Ce gain de régularité

nous permettra, en jouant sur les normes en temps, de montrer que  $(\underline{u}^n, q^n, \phi^n, \underline{\underline{\sigma}}^n) \mapsto (\underline{u}^{n+1}, q^{n+1}, \phi^{n+1}, \underline{\underline{\sigma}}^{n+1})$  est une contraction dans  $X_T^r$ .

D'après [49], on a :

$$| \underline{u}^{n+1}, q^{n+1}, \phi^{n+1}, 0 |_{X_T^r} \leq C | \underline{f} + \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^{n+1} |_{K^r} + C | \underline{\underline{\sigma}}^{n+1} |_{K^{r+\frac{1}{2}}(S_F \times (0,T))},$$

où  $C$  désignera pour le reste de ce chapitre une constante indépendante de  $T \leq T_0$ . Le problème de Navier-Stokes étant linéaire par rapport aux variables primales (ce n'est pas le cas de l'équation constitutive), on a aussi :

$$| \underline{u}^{n+1} - \underline{u}^n, q^{n+1} - q^n, \phi^{n+1} - \phi^n, 0 |_{X_T^r} \leq C | \operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n) |_{K^r} + C | \underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n |_{K^{r+\frac{1}{2}}(S_F \times (0,T))}$$

Or, d'après les théorèmes de continuité, d'injections et de trace [53] ;

$$\begin{aligned} | \operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n) |_{L^2(0,T;H^r)} &\leq C | \underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n |_{L^2(0,T;H^{1+r})}, \\ | \operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n) |_{H^{\frac{r}{2}}(0,T;L^2)} &\leq C | \underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n |_{H^{\frac{r}{2}}(0,T;H^1)}, \\ | \underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n |_{K^{r+\frac{1}{2}}(S_F \times (0,T))} &\leq C | \underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n |_{L^2(0,T;H^{1+r}(\Omega)) \cap H^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}(0,T;H^{\frac{1}{2}})}. \end{aligned}$$

Nous devons donc prouver pour la convergence (et nous voulons  $C$  indépendant de  $T \leq T_0$ ) :

$$\begin{aligned} | \underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n |_{L^2(0,T;H^{1+r})} &\leq CT^{\epsilon'} | \underline{u}^n - \underline{u}^{n-1} |_{K^{r+2}}, \\ | \underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n |_{H^{\frac{r}{2}}(0,T;H^1)} &\leq CT^{\epsilon'} | \underline{u}^n - \underline{u}^{n-1} |_{K^{r+2}}, \\ | \underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n |_{H^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}(0,T;H^{\frac{1}{2}})} &\leq CT^{\epsilon'} | \underline{u}^n - \underline{u}^{n-1} |_{K^{r+2}}, \\ | \underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n |_{K^{r+1}} &\leq CT^{\epsilon'} | (\underline{u}^n - \underline{u}^{n-1}, q^n - q^{n-1}, \phi^n - \phi^{n-1}, \underline{\underline{\sigma}}^n - \underline{\underline{\sigma}}^{n-1}) |_{X_T^r}. \end{aligned}$$

Pour cela, dans un premier temps, nous essayons d'obtenir les différentes estimations uniformes en  $n$  et en  $T \leq T_0$  :

$$\exists T, V, S / | \underline{\underline{\sigma}}^n |_{H^{1+r}}(t) \leq S \quad \forall n, 0 < t < T \quad (3.62)$$

$$| \underline{u}^n, q^n, \phi^n, 0 |_{X_T^r} \leq V \quad \forall n. \quad (3.63)$$

Dans un deuxième temps, nous démontrerons que la suite est contractante ( $C$  indépendante de  $T \leq T_0$ ) :

$$\bullet \left| \underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n \right|_{L^2(0,T;H^{1+r})} \leq CT^{\epsilon'} \left| \underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n \right|_{L^\infty(0,T;H^{1+r})} \quad (3.64)$$

$$\leq CT^{\epsilon'} \left| \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{u}}^n - \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{u}}^{n-1} \right|_{L^2(0,T;H^{1+r})} \quad (3.65)$$

$$\leq CT^{\epsilon'} \left| \underline{\underline{u}}^n - \underline{\underline{u}}^{n-1} \right|_{K^{r+2}}, \quad (3.66)$$

$$\bullet \left| \underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n \right|_{H^{\frac{r}{2}}(0,T;H^1)} \leq CT^{\epsilon'} \left| \underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n \right|_{H^1(0,T;H^1)} \quad (3.67)$$

$$\leq CT^{\epsilon'} \left| \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{u}}^n - \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{u}}^{n-1} \right|_{L^2(0,T;H^1)} \quad (3.68)$$

$$\leq CT^{\epsilon'} \left| \underline{\underline{u}}^n - \underline{\underline{u}}^{n-1} \right|_{K^{r+2}}, \quad (3.69)$$

$$\bullet \left| \underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n \right|_{H^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}(0,T;H^{\frac{1}{2}})} \leq CT^{\epsilon'} \left| \underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n \right|_{H^1(0,T;H^{\frac{1}{2}})} \quad (3.70)$$

$$\leq CT^{\epsilon'} \left| \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{u}}^n - \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{u}}^{n-1} \right|_{L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}})} \quad (3.71)$$

$$\leq CT^{\epsilon'} \left| \underline{\underline{u}}^n - \underline{\underline{u}}^{n-1} \right|_{K^{r+2}}, \quad (3.72)$$

$$\bullet \left| \underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n \right|_{H^{\frac{1+r}{2}}(0,T;L^2)} \leq CT^{\epsilon'} \left| \underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n \right|_{H^1(0,T;L^2)}, \quad (3.73)$$

$$\leq CT^{\epsilon'} \left| \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{u}}^n - \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{u}}^{n-1} \right|_{L^2(0,T;L^2)} \quad (3.74)$$

$$\leq CT^{\epsilon'} \left| \underline{\underline{u}}^n - \underline{\underline{u}}^{n-1} \right|_{K^{r+2}}. \quad (3.75)$$

Parmi toutes ces inégalités, (3.64, 3.66, 3.69, 3.72, 3.75) sont évidentes. Les inégalités (3.67, 3.70, 3.73) résultent d'une proposition démontrée plus loin, car  $(\underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n)(0) = 0$ .

Dans un troisième temps, nous relèverons les conditions aux limites, ce qui nous donnera les valeurs de  $\underline{\underline{\tau}}_1 \in K^{1+r} \cap L^\infty(0, T; H^{1+r})$  et de  $(\underline{\underline{v}}, p, \Psi, 0) \in X_T^r$  qui sont les données de  $P_2[\underline{\underline{v}}, \underline{\underline{\tau}}_1](\underline{\underline{u}}, q, \Phi, \underline{\underline{\sigma}})$ . Le champs  $(\underline{\underline{u}} + \underline{\underline{v}}, p + q, \Psi + \Phi, \underline{\underline{\tau}}_1 + \underline{\underline{\sigma}}) \in X_T^r$  sera alors solution du problème (3.21-3.29). On aura donc trouvé une solution du premier problème.

Dans un quatrième temps, nous montrons qu'il y a unicité des solutions du problème puis que l'opérateur non linéaire qui en résulte est continu, complétant ainsi la démonstration du théorème 2.

### 3.2.2 Quelques lemmes utiles

#### Lemme 3.3

$X$  espace de Hilbert,  $\frac{1}{2} < r \leq 1$ ,  $0 \leq s \leq r$  et  $s \neq \frac{1}{2}$ . Si  $f \in H^r(0, T; X)$  et  $f(0) = 0$ , alors ;

$$\left| f \right|_{H^s(0,T;X)} \leq CT^{r-s} \left| f \right|_{H^r(0,T;X)}.$$

La constante  $C$  ne dépend pas de  $T \leq T_0$ .

Ce lemme est démontré dans [49].

**Lemme 3.4**

Soit  $X$  espace de Hilbert,  $0 \leq s \leq 2$ , tel que  $s - \frac{1}{2}$  ne soit pas entier.  
 Il existe un opérateur continu de prolongement de  $\left\{ \underline{u} \in H^s(0, T; X), \partial_t^k \underline{u}(0) = 0, 0 \leq k < s - \frac{1}{2} \right\}$   
 dans  $H^s(\mathbb{R}^+; \mathbb{X})$ . La constante de continuité de cet opérateur est indépendante de  $T \leq T_0$ .

La démonstration de ce lemme, basée sur des réflexions, est classique et peut être trouvée par exemple dans [53].

Nous aurons constamment besoin du lemme suivant d'injection des espaces  $K^r$  dans les espaces  $H^{r,s}$  :

**Lemme 3.5**

Pour  $0 \leq r \leq 4$  et  $p \leq \frac{r}{2}$ ,

(i) L'injection de  $K^r(\Omega \times (0, T))$  dans  $H^p(0, T; H^{r-2p}(\Omega))$  est continue.

(ii) Si  $r$  n'est pas un entier pair, la restriction de l'injection précédente au sous-espace :

$$\left\{ v \in K^r(\Omega \times (0, T)) / \partial_t^k v(0) = 0 \forall k \ 0 \leq k < \frac{r-1}{2} \right\}$$

est un opérateur borné indépendamment de  $T$  pourvu que  $T < T_0$ .

(i) Par définition de  $K^r$ , celui-ci s'injecte continuellement dans  $L^2(0, T; H^{1+r})$  et dans  $H^{\frac{r}{2}}(0, T; L^2)$ . Donc, l'interpolé de  $K^r$  et de  $K^r$  s'injecte continuellement dans l'interpolé :

$$[L^2(0, T; H^r), H^{\frac{r}{2}}(0, T; L^2)]_\theta = H^{\frac{\theta r}{2}}(0, T; H^{r(1-\theta)}),$$

d'après la proposition 4,2.1 de [53].

(ii) Par le lemme 4 précédent, nous avons un prolongement continu à  $t > T$  avec une constante de continuité indépendante de  $T < T_0$ . On peut donc alors appliquer le même raisonnement que ci-dessus, sur  $[0, +\infty] \times \Omega$ . Les constantes de continuité qui en résultent sont donc indépendantes de  $T < T_0$ .

Fin de preuve

### 3.2.3 Majorations uniformes

On veut montrer (3.62-3.63). Nous commençons par (3.62) en partant de (3.54) dont nous faisons le produit scalaire dans l'algèbre  $H^{1+r}$  avec  $\underline{\sigma}^{n+1}$ . On a ainsi :

$$|\underline{\underline{\sigma}}^{n+1}|_{1+r}^2 + \frac{\text{We}}{2} \frac{d|\underline{\underline{\sigma}}^{n+1}|_{1+r}^2}{dt} \leq [2\varepsilon |\underline{\underline{\nabla}}u^n|_{1+r} + |\underline{\underline{m}}|_{1+r} + C\text{We}(|\underline{\underline{\nabla}}u^n|_{1+r} |\underline{\underline{\sigma}}^{n+1}|_{1+r} + |\underline{\underline{\nabla}}u^n|_{1+r} |\underline{\underline{\tau}}_1|_{1+r} + |\underline{\underline{\sigma}}^{n+1}|_{1+r} |\underline{\underline{\nabla}}u_1|_{1+r})] |\underline{\underline{\sigma}}^{n+1}|_{1+r} \quad (3.76)$$

$$\Rightarrow (1 - C\text{We}(|\underline{\underline{\nabla}}u^n|_{1+r} + |\underline{\underline{\nabla}}u_1|_{1+r})) |\underline{\underline{\sigma}}^{n+1}|_{1+r}^2 + \frac{\text{We}}{2} \frac{d|\underline{\underline{\sigma}}^{n+1}|_{1+r}^2}{dt} \leq \left[ (\varepsilon + C\text{We}|\underline{\underline{\tau}}_1|_{1+r}) |\underline{\underline{\nabla}}u^n|_{1+r} + |\underline{\underline{m}}|_{1+r} \right] |\underline{\underline{\sigma}}^{n+1}|_{1+r}.$$

Par une inégalité de Holder avec les bons coefficients ;

$$\frac{d(e \int_0^t \frac{(0,9 - C\text{We}(|\underline{\underline{\nabla}}u^n|_{1+r} + |\underline{\underline{\nabla}}u_1|_{1+r}))}{\text{We}} ds |\underline{\underline{\sigma}}^{n+1}|_{1+r}^2(t))}{C(|\underline{\underline{\nabla}}u^n|_{1+r}^2 + |\underline{\underline{m}}|_{1+r}^2) e \int_0^t \frac{(0,9 - 2C\text{We}(|\underline{\underline{\nabla}}u^n|_{1+r} + |\underline{\underline{\nabla}}u_1|_{1+r}))}{\text{We}} ds} \leq$$

grâce au fait que  $\underline{\underline{\tau}}_1 \in L^\infty(0, T; H^{1+r})$ . D'où l'on déduit :

$$|\underline{\underline{\sigma}}^{n+1}|_{1+r}^2(t) \leq \int_0^t (e^{-\int_s^t \frac{(0,9 - C\text{We}(|\underline{\underline{\nabla}}u^n|_{1+r} + |\underline{\underline{\nabla}}u_1|_{1+r}))}{\text{We}} dt'} (C|\underline{\underline{\nabla}}u^n|_{1+r}^2 + |\underline{\underline{m}}|_{1+r}^2)) ds.$$

Il nous faut maintenant estimer le terme dans l'exponentielle sous l'intégrale. Puisque  $s \leq t$  ;

$$-\int_s^t \frac{0,9 - C\text{We}(|\underline{\underline{\nabla}}u^n|_{1+r} + |\underline{\underline{\nabla}}u_1|_{1+r})}{\text{We}} ds' \leq C \int_s^t (|\underline{\underline{\nabla}}u^n|_{1+r} + |\underline{\underline{\nabla}}u_1|_{1+r}) ds' \leq C\sqrt{T} \left( |\underline{\underline{\nabla}}u^n|_{L^2(0,T;H^{1+r})} + |\underline{\underline{\nabla}}u_1|_{L^2(0,T;H^{1+r})} \right).$$

Donc, si  $V, T_0$  vérifient

$$\begin{aligned} V \text{ tel que } \left( \int_0^T |\underline{\underline{\nabla}}u^n|_{1+r}^2 \leq \right) V < 1, \\ T_0 \text{ tel que } |\underline{\underline{\nabla}}u_1|_{L^2(0,T_0;H^{1+r})} < 1, \\ T_0 \text{ tel que } C\sqrt{T_0} \left( |\underline{\underline{\nabla}}u^n|_{L^2(0,T;H^{1+r})} + |\underline{\underline{\nabla}}u_1|_{L^2(0,T;H^{1+r})} \right) < 1, \end{aligned} \quad (3.77)$$

alors l'exponentielle est inférieure à  $e$  et on a le résultat

$$|\underline{\underline{\sigma}}^{n+1}|_{1+r}(t) \leq CT^{c'} \left( |\underline{\underline{\nabla}}u^n|_{L^2(0,T;H^{1+r})} + |\underline{\underline{\nabla}}u|_{L^2(0,T;H^{1+r})} \right), \quad (3.78)$$

qui permet d'avoir l'inégalité annoncée (3.62) :

$$\begin{aligned} |\underline{\underline{\sigma}}^{n+1}|_{L^2(0,T;H^{1+r})} &\leq CT^{\epsilon'} |\underline{\underline{\sigma}}^{n+1}|_{L^\infty(0,T;H^{1+r})} \leq CT^{\epsilon'} \int_0^T (|\underline{\underline{\nabla u}}^n|_{1+r} + |\underline{\underline{m}}|_{1+r}) \\ &\leq CT^{\epsilon'} (V + |\underline{\underline{m}}|_{L^2(0,T;H^{1+r})}) < S. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Afin d'avoir une majoration uniforme en  $n$  sur  $|\underline{u}^n|_{K^{2+r}}$ , nous aurons besoin d'une estimation dans une norme plus régulière en temps de  $\underline{\underline{\sigma}}$ , à savoir  $|\underline{\underline{\sigma}}^{n+1}|_{H^{\frac{\epsilon}{2}}(0,T;H^1)}$ .

Dans un premier temps, nous obtiendrons un renseignement sur la norme  $L^2(0,T;H^1)$ , en faisant le produit scalaire dans  $H^1$  de (3.54). On trouve ;

$$\begin{aligned} |\underline{\underline{\sigma}}^{n+1}|_1^2 + \frac{\text{We}d}{2} \frac{|\underline{\underline{\sigma}}^{n+1}|_1^2}{dt} &\leq 2\epsilon |\underline{\underline{\nabla u}}^n|_1 |\underline{\underline{\sigma}}^{n+1}|_1 + |\underline{\underline{m}}|_1 |\underline{\underline{\sigma}}^{n+1}|_1 + \\ &\quad + C\text{We} \left[ |\underline{\underline{\sigma}}^{n+1}|_{1+r} |\underline{\underline{\nabla u}}^n|_1 + |\underline{\underline{\tau}}_1|_{1+r} |\underline{\underline{\nabla u}}^n|_1 + \right. \\ &\quad \left. + |\underline{\underline{\nabla u}}_1|_{1+r} |\underline{\underline{\sigma}}^{n+1}|_1 \right] |\underline{\underline{\sigma}}^{n+1}|_1 \\ \Rightarrow (0,9 - C\text{We} |\underline{\underline{\nabla u}}_1|_{1+r}) |\underline{\underline{\sigma}}^{n+1}|_1^2 + \frac{\text{We}d}{2} \frac{|\underline{\underline{\sigma}}^{n+1}|_1^2}{dt} &\leq C(\epsilon, V, T_0, S) |\underline{\underline{\nabla u}}^n|_1^2 + |\underline{\underline{m}}|_1^2, \end{aligned}$$

grâce à (3.77, 3.78) et au fait que  $\underline{\underline{\tau}}_1 \in L^\infty(0,T;H^{1+r})$ . Sous la condition sur  $T_0$  que  $|\underline{\underline{\nabla u}}_1|_{L^2(0,T_0;H^{1+r})} < 1$  (cf (3.77)), nous démontrons :

$$|\underline{\underline{\sigma}}^{n+1}|_1(t) \leq CT^{\epsilon'} (|\underline{\underline{\nabla u}}^n|_{L^2(0,T;H^1)} + |\underline{\underline{m}}|_{L^2(0,T;H^1)}). \quad (3.80)$$

Nous voulions avoir des majorations uniformes en  $n$  sur des normes  $H^{\frac{\epsilon}{2}}$  en temps pour avoir une majoration uniforme sur  $\underline{u}^n$ . Donc, dans un deuxième temps, nous reprenons (3.54) où nous isolons le terme de dérivée temporelle, ce qui nous donne ;

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}^{n+1}}{\partial t} \right|_1(t) &\leq 2\epsilon |\underline{\underline{\nabla u}}^n|_1 + |\underline{\underline{m}}|_1 + |\underline{\underline{\sigma}}^{n+1}|_1 + \\ &\quad + C\text{We} \left( |\underline{\underline{\nabla u}}^n|_1 |\underline{\underline{\sigma}}^{n+1}|_{1+r} + |\underline{\underline{\nabla u}}|_1 |\underline{\underline{\sigma}}^{n+1}|_{1+r} + |\underline{\underline{\nabla u}}^n|_1 |\underline{\underline{\tau}}_1|_{1+r} \right) \end{aligned}$$

Et donc, en combinant avec (3.80), à condition que  $|\underline{\underline{\nabla u}}^n|_{L^2(0,T;H^{1+r})} \leq V < 1$  ;

$$|\underline{\underline{\sigma}}^{n+1}|_{H^1(0,T;H^1)} \leq C |\underline{\underline{\nabla u}}^n|_{L^2(0,T;H^1)} + C |\underline{\underline{m}}|_{L^2(0,T;H^1)}.$$

On obtient alors grâce à 3 et 5 ( $\underline{\underline{\sigma}}^{n+1}(0) = 0 \Rightarrow C$  indépendante de  $T \leq T_0$ ) le résultat :

$$\begin{aligned} |\underline{\underline{\sigma}}^{n+1}|_{H^{\frac{\epsilon}{2}}(0,T;H^1)} &\leq CT^{\epsilon'} |\underline{\underline{\sigma}}^{n+1}|_{H^1(0,T;H^1)} \\ &\leq CT^{\epsilon'} (|\underline{\underline{\nabla u}}^n|_{L^2(0,T;H^1)} + |\underline{\underline{m}}|_{L^2(0,T;H^1)}). \end{aligned} \quad (3.81)$$

Afin d'avoir les estimations sur  $\underline{u}^n$ , nous devons encore trouver un contrôle sur la norme  $H^{\frac{1+2r}{4}}(0, T; H^{\frac{1}{2}})$  de  $\underline{\sigma}^{n+1}$ . Pour cela, on démontre, comme pour (3.81), un contrôle de  $|\underline{\sigma}^{n+1}|_{H^1(0, T; H^{\frac{1}{2}})}$  par la vitesse  $\underline{\nabla u}^n$  et par  $\underline{m}$ . La proposition 3 nous permet de conclure (si  $|\underline{\nabla u}^n|_{L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}})} \leq V < 1$  et  $\underline{\sigma}^{n+1}(0) = 0$ ) :

$$\begin{aligned} |\underline{\sigma}^{n+1}|_{H^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}(0, T; H^{\frac{1}{2}})} &\leq CT^{\epsilon'} |\underline{\sigma}^{n+1}|_{H^1(0, T; H^{\frac{1}{2}})} \\ &\leq CT^{\epsilon'} (|\underline{\nabla u}^n|_{L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}})} + |\underline{m}|_{L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}})}) \end{aligned} \quad (3.82)$$

Nous pouvons maintenant obtenir des estimations *a priori* sur  $|\underline{u}^n|_{K^{2+r}}$  indépendantes de  $n$ . Pour cela, nous allons utiliser l'inégalité du théorème 4.1 de G. Allain [49], ou [50]. Pour appliquer ce théorème, on prend  $g = -\underline{\sigma}^{n+1} \cdot \underline{N}$ ,  $k = \underline{u}_0 = a = 0$ ,  $\underline{f} = \underline{f} + \operatorname{div} \underline{\sigma}^{n+1}$  et on utilise (3.79, 3.81, 3.82) et les théorèmes classiques de trace. Si  $0 < r < \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} |\underline{u}^{n+1}, q^{n+1}, \phi^{n+1}, 0|_{X_T^r} &\leq C |\underline{f} + \operatorname{div} \underline{\sigma}^{n+1}|_{K^r} + C |\underline{\sigma}^{n+1}|_{K^{r+\frac{1}{2}}(S_F)} \\ &\leq C |\underline{f}|_{K^r} + C |\underline{\sigma}^{n+1}|_{L^2(0, T; H^{1+r}) \cap H^{\frac{r}{2}}(0, T; H^1)} + C |\underline{\sigma}^{n+1}|_{L^2(0, T; H^{1+r}) \cap H^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}(0, T; H^{\frac{1}{2}})} \\ &\leq C |\underline{f}|_{K^r} + CT^{\epsilon'} (V + |\underline{m}|_{L^2(0, T; H^{1+r})}) + CT^{\epsilon'} (V + |\underline{m}|_{L^2(0, T; H^1)}) + \\ &\quad + CT^{\epsilon'} (V + |\underline{m}|_{L^2(0, T; H^{1+r})}) + CT^{\epsilon'} (V + |\underline{m}|_{L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Omega))}). \end{aligned} \quad (3.83)$$

On a déjà montré (3.79, 3.81, 3.82) et on a imposé à  $V$  que  $V < 1$  et  $S$  quelconque. Prenons un nouveau  $T_0$  suffisamment petit (Les constantes  $C$  intervenant ci-dessous dépendent de  $\varepsilon, V, S, \operatorname{We}, \operatorname{Re}, \underline{u}_1, \underline{\tau}_1, T_0$  mais pas de  $T \leq T_0$ ) ;

$$\left\{ \begin{array}{l} |\underline{\nabla u}_1|_{L^2(0, T_0; H^{1+r})} < 1 \text{ cf (3.77)}_b \\ CT^{\epsilon'} (V + |\underline{m}|_{L^2(0, T_0; H^{1+r})}) < S \text{ cf (3.77)}_c \\ C |\underline{f}|_{H^{r, \frac{r}{2}}(0, T_0)} < \frac{V}{5} \text{ cf (3.83)}, \\ CT^{\epsilon'} (V + |\underline{m}|_{L^2(0, T_0; H^{1+r})}) < \frac{V}{5} \text{ cf (3.83)}, \\ CT^{\epsilon'} (V + |\underline{m}|_{L^2(0, T_0; H^1)}) < \frac{V}{5} \text{ cf (3.83)}, \\ CT^{\epsilon'} (V + |\underline{m}|_{L^2(0, T_0; H^{\frac{1}{2}})}) < \frac{V}{5} \text{ cf (3.83)}. \end{array} \right. \quad (3.84)$$

La condition (3.77) pour obtenir des estimations *a priori* est donc vérifiée. Nous avons alors d'après (3.79, 3.83) :

$$\begin{aligned} |\underline{u}^{n+1}, q^{n+1}, \phi^{n+1}, 0|_{X_T^r} &\leq V. \\ |\underline{\sigma}^{n+1}|_{1+r}(t) &\leq S \end{aligned} \quad (3.85)$$

On a donc démontré (3.62-3.63).

### 3.2.4 Convergence de la suite

Des inégalités (3.62-3.63), nous allons utiliser uniquement le fait que :

$$\begin{aligned} |\underline{u}^n|_{K^{2+r}(\Omega \times (0,T))} &\leq V \quad \forall n, \\ |\underline{\sigma}^n|_{L^\infty(0,T;H^{1+r})} &\leq S \quad \forall n, \end{aligned}$$

bien qu'ayant montré un résultat plus précis. Afin de montrer que le point fixe converge, nous allons montrer qu'on a en fait affaire à une contraction. Vu le domaine non borné, on ne pouvait utiliser un théorème de compacité. Pour démontrer que la suite est contractante, il nous faut les estimations (3.65, 3.68, 3.71, 3.74).

### Une première inégalité

On veut démontrer (3.65). Pour cela, nous reprenons (3.54), que nous écrivons à l'itération  $n$  et à  $n+1$  en groupant certains termes :

$$\begin{aligned} &\underline{\sigma}^{n+1} - \underline{\sigma}^n + \text{We} \left( \frac{\partial(\underline{\sigma}^{n+1} - \underline{\sigma}^n)}{\partial t} - \frac{a-1}{2} (\underline{\nabla u}^{nT}(\underline{\sigma}^{n+1} - \underline{\sigma}^n) + (\underline{\nabla u}^n - \underline{\nabla u}^{n-1})^T \underline{\sigma}^n + \right. \\ &\quad \left. + (\underline{\sigma}^{n+1} - \underline{\sigma}^n) \underline{\nabla u}^n + \underline{\sigma}^n (\underline{\nabla u}^n - \underline{\nabla u}^{n-1})) - \frac{a+1}{2} ((\underline{\sigma}^{n+1} - \underline{\sigma}^n) \underline{\nabla u}^{nT} + \right. \\ &\quad \left. + \underline{\sigma}^n (\underline{\nabla u}^n - \underline{\nabla u}^{n-1})^T + \underline{\nabla u}^n (\underline{\sigma}^{n+1} - \underline{\sigma}^n) + (\underline{\nabla u}^n - \underline{\nabla u}^{n-1}) \underline{\sigma}^n) \right) = 2\varepsilon \underline{D}[u^n - u^{n-1}] \\ \text{We} \left[ \frac{a-1}{2} \left( (\underline{\nabla u}^n - \underline{\nabla u}^{n-1})^T \underline{\tau}_1 + \underline{\tau}_1 (\underline{\nabla u}^n - \underline{\nabla u}^{n-1}) \right) + \frac{a+1}{2} \left( \underline{\tau}_1 (\underline{\nabla u}^n - \underline{\nabla u}^{n-1})^T + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\underline{\nabla u}^n - \underline{\nabla u}^{n-1}) \underline{\tau}_1 \right) \right] + \text{We} \left[ \frac{a-1}{2} \left( \underline{\nabla u}_1^T (\underline{\sigma}^{n+1} - \underline{\sigma}^n) + (\underline{\sigma}^{n+1} - \underline{\sigma}^n) \underline{\nabla u}_1 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a+1}{2} \left( (\underline{\sigma}^{n+1} - \underline{\sigma}^n) \underline{\nabla u}_1^T + \underline{\nabla u}_1 (\underline{\sigma}^{n+1} - \underline{\sigma}^n) \right) \right], \end{aligned} \tag{3.86}$$

d'où, en tenant compte de (3.62-3.63) et des propriétés de  $\underline{\tau}_1, \underline{\nabla u}_1$  :

$$\begin{aligned} &|\underline{\sigma}^{n+1} - \underline{\sigma}^n|_{1+r}^2 + \frac{\text{We}}{2} \frac{d}{dt} |\underline{\sigma}^{n+1} - \underline{\sigma}^n|_{1+r}^2 \leq 2\varepsilon |\underline{\nabla u}^n - \underline{\nabla u}^{n-1}|_{1+r} |\underline{\sigma}^{n+1} - \underline{\sigma}^n|_{1+r} + \\ &+ C \text{We} \left[ |\underline{\nabla u}^n|_{1+r} |\underline{\sigma}^{n+1} - \underline{\sigma}^n|_{1+r}^2 + |\underline{\nabla u}^n - \underline{\nabla u}^{n-1}|_{1+r} |\underline{\sigma}^n|_{1+r} |\underline{\sigma}^{n+1} - \underline{\sigma}^n|_{1+r} + \right. \\ &\quad \left. |\underline{\sigma}^{n+1} - \underline{\sigma}^n|_{1+r} |\underline{\nabla u}^n - \underline{\nabla u}^{n-1}|_{1+r} |\underline{\tau}_1|_{1+r} + |\underline{\nabla u}_1|_{1+r} |\underline{\sigma}^{n+1} - \underline{\sigma}^n|_{1+r}^2 \right] \\ &\Rightarrow (0, 9 - C \text{We} (|\underline{\nabla u}^n|_{1+r} + |\underline{\nabla u}_1|_{1+r})) |\underline{\sigma}^{n+1} - \underline{\sigma}^n|_{1+r}^2 + \frac{\text{We}}{2} \frac{d}{dt} |\underline{\sigma}^{n+1} - \underline{\sigma}^n|_{1+r}^2 \leq \\ &\quad C(\varepsilon, \text{We}, V, S, \underline{\nabla u}_1, \underline{\tau}_1) |\underline{\nabla u}^n - \underline{\nabla u}^{n-1}|_{1+r}^2. \end{aligned}$$

De la même façon que l'on a démontré (3.79) à partir de l'inégalité différentielle (3.76) en faisant les hypothèses (3.77) sur  $T_0, V$ , on pourrait justifier :

$$\begin{aligned} |\underline{\sigma}^{n+1} - \underline{\sigma}^n|_{1+r}(t) &\leq C(\varepsilon, \text{We}, V, S, \underline{\nabla u}_1, \underline{\tau}_1) \int_0^T |\underline{\nabla u}^n - \underline{\nabla u}^{n-1}|_{1+r} ds \\ &\leq C(\varepsilon, \text{We}, V, S, \underline{\nabla u}_1, \underline{\tau}_1) \sqrt{T} |\underline{\nabla u}^n - \underline{\nabla u}^{n-1}|_{L^2(0,T;H^{1+r})}, \end{aligned} \tag{3.87}$$

ce qui est bien (3.65) en plus précis.



### Une deuxième inégalité

Nous souhaitons démontrer :

$$|\underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n|_{H^1(0,T;H^1)} \leq C |\underline{\underline{\nabla u}}^n - \underline{\underline{\nabla u}}^{n-1}|_{L^2(0,T;H^1)}.$$

Parce que  $H^1 \hookrightarrow H^{1+r}$ , il est déjà clair, grâce à (3.87), que :

$$|\underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n|_{L^2(0,T;H^1)} \leq CT^{\epsilon'} |\underline{\underline{\nabla u}}^n - \underline{\underline{\nabla u}}^{n-1}|_{L^2(0,T;H^{1+r})}.$$

Par un calcul identique à celui qui a conduit à (3.80), on remplace la norme  $L^2(0, T; H^{1+r})$  du gradient des vitesses, par la norme  $L^2(0, T; H^1)$ . Pour la norme d'ordre 1 en temps des extracontraintes, nous devons reprendre (3.86) en isolant, comme pour les estimations uniformes, le terme de dérivée en temps. Le fait que  $\underline{\underline{\tau}}_1 \in L^\infty(0, T; H^{1+r})$ ,  $\underline{\underline{u}}_1 \in K^{2+r}$  et les estimations uniformes nous donnent :

$$\begin{aligned} \text{We } \left| \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n}{\partial t} \right|_1 &\leq |\underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n|_1 + 2\varepsilon |\underline{\underline{\nabla u}}^n - \underline{\underline{\nabla u}}^{n-1}|_1 + C |\underline{\underline{\nabla u}}^n|_{1+r} |\underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n|_1 + \\ &+ C |\underline{\underline{\nabla u}}_1|_{1+r} |\underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n|_1 + C |\underline{\underline{\sigma}}^n|_{1+r} |\underline{\underline{\nabla u}}^n - \underline{\underline{\nabla u}}^{n-1}|_1 + \\ &+ C |\underline{\underline{\tau}}_1|_{1+r} |\underline{\underline{\nabla u}}^n - \underline{\underline{\nabla u}}^{n-1}|_1. \end{aligned}$$

Nous utilisons les estimations uniformes (3.85) et le fait que  $\underline{\underline{\tau}}_1 \in L^\infty(0, T; H^{1+r})$  pour les termes en  $|\underline{\underline{\nabla u}}^n - \underline{\underline{\nabla u}}^{n-1}|_1$ . Pour les termes en  $|\underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n|_1$  nous utilisons le fait qu'ils appartiennent à  $L^\infty(0, T)$ . Donc, en élevant au carré et en intégrant de 0 à  $T$ , on a :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n}{\partial t} \right|_{L^2(0,T;H^1)} &\leq C |\underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n|_{L^2(0,T;H^1)} + C |\underline{\underline{\nabla u}}^n - \underline{\underline{\nabla u}}^{n-1}|_{L^2(0,T;H^{1+r})} \\ &\leq C |\underline{\underline{\nabla u}}^n - \underline{\underline{\nabla u}}^{n-1}|_{L^2(0,T;H^{1+r})}. \end{aligned}$$

La méthode suivie est sensiblement la même que pour les estimations uniformes, ce qui permet d'écrire le résultat (3.68) annoncé :

$$\begin{aligned} |\underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n|_{H^{\frac{1}{2}}(0,T;H^1)} &\leq CT^{\epsilon'} |\underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n|_{H^1(0,T;H^1)} \\ &\leq CT^{\epsilon'} |\underline{\underline{\nabla u}}^n - \underline{\underline{\nabla u}}^{n-1}|_{L^2(0,T;H^{1+r})} \\ &\leq CT^{\epsilon'} |\underline{\underline{u}}^n - \underline{\underline{u}}^{n-1}|_{K^{2+r}}. \end{aligned} \tag{3.88}$$

### Une troisième inégalité

Nous souhaitons démontrer :

$$|\underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n|_{H^1(0,T;H^{\frac{1}{2}})} \leq C |\underline{\underline{\nabla u}}^n - \underline{\underline{\nabla u}}^{n-1}|_{L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}})}.$$

Ce résultat se démontre de la même façon que l'inégalité précédente, grâce à l'hypothèse (3.77), rappelée dans (3.84) et à  $(\underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n)(0) = 0$ , en remplaçant le produit scalaire de  $H^1$  par celui de  $H^{\frac{1}{2}}$ . Nous avons alors :

$$\begin{aligned} |\underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n|_{H^{\frac{r}{2} + \frac{1}{4}}(0, T; H^{\frac{1}{2}})} &\leq CT^{\epsilon'} |\underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n|_{H^1(0, T; H^{\frac{1}{2}})} \\ &\leq CT^{\epsilon'} |\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{u}}^n - \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{u}}^{n-1}|_{L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}})} \\ &\leq CT^{\epsilon'} |\underline{\underline{u}}^n - \underline{\underline{u}}^{n-1}|_{K^{2+r}}. \end{aligned} \tag{3.89}$$

### Une quatrième inégalité

Nous aurons besoin du lemme suivant, pour démontrer (3.74) :

#### Lemme 3.6

Pour  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$  possédant la propriété du cône, (cf [54]), si  $u \in H^1(\Omega), v \in H^r(\Omega), w \in L^2(\Omega)$  où  $0 < r < 1$ , alors  $uvw \in L^2$  et :

$$|uvw|_{L^2} \leq C |u|_{H^1} |v|_{H^r} |w|_{L^2}$$

Ce lemme est une conséquence directe des injections suivantes (cf [54]) :

$$\begin{aligned} u \in H^1(\Omega) &\hookrightarrow L^{q_1} \quad 2 \leq q_1 < \infty \\ v \in H^r(\Omega) &\hookrightarrow L^{q_2} \quad q_2 = \frac{2}{1-r} \\ w \in L^2 &, \end{aligned}$$

et de ce que l'on peut trouver  $q_1$  tel que  $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{2} = 1$ .

fin de preuve

Nous pouvons maintenant faire le produit scalaire  $L^2$  de (3.86) avec  $\underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n$  et utiliser le lemme précédent. Après réduction, utilisant le fait que  $\underline{\underline{\tau}}_1, \underline{\underline{u}}_1$  sont données sur  $(0, T_0)$  et (3.62-3.63), on a :

$$\begin{aligned} (1 - CWe(|\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{u}}^n|_{1+r} + |\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{u}}_1|_{1+r})) |\underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n|^2 + \frac{We}{2} \frac{d}{dt} |\underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n|^2 &\leq \\ C(\varepsilon, We, V, S, \underline{\underline{\tau}}_1, T_0) |\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{u}}^n - \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{u}}^{n-1}|^2. \end{aligned} \tag{3.90}$$

Il est alors aisé de démontrer, comme précédemment, vues les hypothèses sur  $T, V$  (cf (3.84)), que

$$|\underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n|^2(t) \leq CT^{\epsilon'} |\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{u}}^n - \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{u}}^{n-1}|_{L^2(0, T; L^2)}^2 \quad \forall 0 < t < T. \tag{3.91}$$

Afin de montrer notre inégalité sur  $|\underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n|_{H^1(0, T; H^0(\Omega))}$ , nous devons revenir à la norme  $L^2$  de (3.86) en isolant la dérivée en temps de  $\underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n$ . On a ainsi :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n}{\partial t} \right| (t) &\leq C \left| \underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n \right| + \left| \underline{\underline{\nabla}} u^n \right|_{1+r} \left| \underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n \right| + \\ &+ C \left| \underline{\underline{\sigma}}^n \right|_{1+r} \left| \underline{\underline{\nabla}} u^n - \underline{\underline{\nabla}} u^{n-1} \right| + 2\varepsilon \left| \underline{\underline{\nabla}} u^n - \underline{\underline{\nabla}} u^{n-1} \right| + \\ &+ C \left| \underline{\underline{\tau}}_1 \right|_{1+r} \left| \underline{\underline{\nabla}} u^n - \underline{\underline{\nabla}} u^{n-1} \right| + C \left| \underline{\underline{\nabla}} u_1 \right|_{1+r} \left| \underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n \right|. \end{aligned}$$

Grâce à (3.91) et au fait que  $\underline{\underline{\tau}}_1 \in L^\infty(0, T; H^{1+r})$ , on déduit :

$$\left| \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n}{\partial t} \right|_{L^2(0, T; L^2)} \leq C \left| \underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n \right|_{L^2(0, T; L^2)} + C \left| \underline{\underline{\nabla}} u^n - \underline{\underline{\nabla}} u^{n-1} \right|_{L^2(0, T; L^2)},$$

ce qui, couplé à (3.91) donne bien

$$\left| \underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n \right|_{H^1(0, T; H^0(\Omega))} \leq C \left| \underline{\underline{\nabla}} u^n - \underline{\underline{\nabla}} u^{n-1} \right|_{L^2(0, T; L^2)}.$$

On a donc complété la preuve du résultat cherché (3.74) grâce au lemme 5 et au fait que  $(\underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n)(0) = 0$  :

$$\left| \underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n \right|_{H^{\frac{1+r}{2}}(0, T; L^2)} \leq CT^{\varepsilon'} \left| \underline{\underline{\sigma}}^{n+1} - \underline{\underline{\sigma}}^n \right|_{H^1(0, T; L^2)} \leq CT^{\varepsilon'} \left| \underline{\underline{\nabla}} u^n - \underline{\underline{\nabla}} u^{n-1} \right|_{L^2(0, T; L^2)}. \quad (3.92)$$

Les suites étant de Cauchy,  $\underline{\underline{u}}^n, q^n, \phi^n, \underline{\underline{\sigma}}^n$  convergent dans  $X_T^r$  vers des fonctions  $(\underline{\underline{u}}, q, \phi, \underline{\underline{\sigma}})$ . On peut alors passer à la limite dans  $L^2((0, T) \times \Omega)$  car les termes sont soit linéaires, soit de la forme  $\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{u}}^n \underline{\underline{\sigma}}^n$ . Or  $\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{u}}^n$  converge dans  $L^2(0, T; H^{1+r})$  et  $\underline{\underline{\sigma}}^n$  dans  $H^{\frac{1+r}{2}}(0, T; L^2)$ . Donc  $\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{u}}^n \underline{\underline{\sigma}}^n$  tend vers  $\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{u}} \underline{\underline{\sigma}}$  dans  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ . Les équations volumiques (3.30-3.34) du problème  $P_2$  sont donc vérifiées après passage à la limite, par les fonctions limites.

De plus, pour les conditions initiales,  $\underline{\underline{u}}^n$  converge vers  $\underline{\underline{u}}$  dans  $H^{\frac{1}{2} + \frac{\theta}{2}}(0, T; H^{1+r-\theta})$  avec  $0 < \theta < r$ . Donc, on peut montrer que  $\underline{\underline{u}}(0) = 0$  dans  $H^{1+r-\theta}$  et donc dans  $H^{1+r}$ .

De même l'extracontrainte  $\underline{\underline{\sigma}}^n$  tend vers  $\underline{\underline{\sigma}}$  dans  $H^{\frac{1}{2} + \frac{\theta}{2}}(0, T; H^{r-\theta})$ . Donc  $\underline{\underline{\sigma}}(0) = 0$  dans  $H^{r-\theta}$  et donc dans  $H^r$ .

### 3.2.5 Relèvement des conditions aux limites

Afin de résoudre le problème linéarisé autour d'un déplacement nul, avec des conditions non homogènes, nous avons introduit le problème (3.45-3.53). Soit donc le vecteur  $(\underline{\underline{f}}, a, \underline{\underline{m}}, g, k, \underline{\underline{u}}_0, \underline{\underline{\sigma}}_0)$  dans une boule fermée, de rayon  $B$ , de  $Y_T^r$ . Commençons par relever la condition initiale de l'extracontrainte. Soit  $\underline{\underline{\tau}}_1$  tel que :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\tau}}_1 + \text{We} \frac{\partial \underline{\underline{\tau}}_1}{\partial t} = 0 \\ \underline{\underline{\tau}}_1(0, X) = \underline{\underline{\sigma}}_0(X) \quad \forall X. \end{cases} \quad (3.93)$$

On vérifie bien que  $\underline{\underline{\tau}}_1 \in L^\infty(0, T; H^{1+r})$ .

Puis, soit  $(\underline{\underline{u}}_1, p, \Psi, 0) \in X_T^r /$

$$\left\{ \begin{array}{l} -p\underline{N} + 2(1-\varepsilon)\underline{D}[\underline{u}_1] \cdot \underline{N} - \alpha\partial(\Psi\underline{N}) = -\underline{\tau}_1 \cdot \underline{N} + g \text{ sur } S_F \times (0, T) \\ \Psi_t - \partial_\tau \underline{u}_1 \cdot \underline{N} = k \text{ sur } S_F \times (0, T) \\ \underline{u}_1 = 0 \text{ sur } S_B \times (0, T) \\ \underline{u}_1(0) = \underline{u}_0(X) \text{ dans } \Omega \\ \operatorname{div} \underline{u}_1 = a \text{ dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (3.94)$$

Bien que G. Allain [49] ait démontré l'existence de ces fonctions  $\underline{u}_1, p, \Psi$  dans le cas de la géométrie d'une bande infinie, droite, on peut calquer sa démonstration dans notre cas d'une géométrie quelconque. Avec ces fonctions, nous identifions les  $\underline{u}_1, \underline{\tau}_1$  que l'on vient d'exhiber aux fonctions  $\underline{u}_1, \underline{\tau}_1$  introduites dans le problème (3.45-3.53). On a donc  $\underline{u} + \underline{u}_1, p + q, \phi + \Psi, \underline{\sigma} + \underline{\tau}_1 \in X_T^r$  tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re}(\underline{u} + \underline{u}_1)_t - (1-\varepsilon)\Delta(\underline{u} + \underline{u}_1) + \nabla(p+q) = \underline{f} + (\underline{u}_1)_t - (1-\varepsilon)\Delta\underline{u}_1 + \nabla q - \operatorname{div} \underline{\tau}_1 + \operatorname{div}(\underline{\sigma} + \underline{\tau}_1) \\ \operatorname{div}(\underline{u} + \underline{u}_1) = a \\ (\underline{\sigma} + \underline{\tau}_1) + \operatorname{We} \frac{\mathcal{D}_a[\underline{u} + \underline{u}_1](\underline{\sigma} + \underline{\tau}_1)}{\mathcal{D}t} = 2\varepsilon \underline{D}[\underline{u} + \underline{u}_1] + \underline{m} - 2\varepsilon \underline{D}[\underline{u}_1] - \\ \operatorname{We} \left[ \frac{a-1}{2} (\nabla \underline{u}_1^T \underline{\tau}_1 + \underline{\tau}_1 \nabla \underline{u}_1) + \frac{a+1}{2} (\underline{\tau}_1 \nabla \underline{u}_1^T + \nabla \underline{u}_1 \underline{\tau}_1) \right] \\ (\underline{\sigma} + \underline{\tau}_1) \cdot \underline{N} - (p+q)\underline{N} + 2(1-\varepsilon)\underline{D}[\underline{u} + \underline{u}_1] \cdot \underline{N} - \alpha\partial_\tau((\phi + \Psi)\underline{N}) = g \text{ sur } S_F \times (0, T) \\ (\phi + \Psi)_t - \partial_\tau(\underline{u} + \underline{u}_1) \cdot \underline{N} = k \text{ sur } S_F \times (0, T) \\ (\phi + \Psi)(0) = 0 \text{ dans } \Omega \\ \underline{u} + \underline{u}_1(0) = \underline{u}_0(X) \text{ à } t = 0, \text{ dans } \Omega \\ \underline{u} + \underline{u}_1 = 0 \text{ sur } S_B \times (0, T) \\ (\underline{\sigma} + \underline{\tau}_1)(0) = \underline{\sigma}_0(X) \text{ dans } \Omega \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3.95) \\ (3.96) \\ (3.97) \\ (3.98) \\ (3.99) \\ (3.100) \\ (3.101) \\ (3.102) \\ (3.103) \end{array}$$

Il suffit alors de changer de notations sur  $\underline{f}, \underline{m}$  pour avoir résolu (3.21-3.29).

### Remarque 12

La méthode utilisée repose sur le fait que la dérivée interpolée ne fait pas intervenir de produit d'ordre supérieur à deux.

### 3.2.6 Unicité, continuité

On veut montrer l'existence et la continuité d'un opérateur non linéaire qui au vecteur  $(\underline{f}, a, \underline{m}, g, k, \underline{u}_0, \underline{\sigma}_0)$  d'une boule fermée, de rayon  $B$  de  $Y_T^r$  associe  $(\underline{u}, p, \phi, \underline{\sigma}) \in X_T^r$ . Ecrivons donc les équations vérifiées par la différence de deux solutions de (3.21-3.29)



$$|\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}'|_{L^2(0,T;H^{1+r})} \leq CT^{\epsilon'} (|\underline{\underline{\sigma}}_0 - \underline{\underline{\sigma}}'_0|_{1+r} + |\underline{\underline{\nabla u}} - \underline{\underline{\nabla u}}'|_{L^2(0,T;H^{1+r})} + |\underline{\underline{m}} - \underline{\underline{m}}'|_{L^2(0,T;H^{1+r})}). \quad (3.114)$$

Pour évaluer  $|\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}'|_{H^{\frac{r}{2}}(0,T;H^1)}$ , nous ne pouvons pas faire comme pour (3.88) car  $\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}'(0) \neq 0$ . Afin de contourner la difficulté, nous relevons ces conditions initiales et appliquons la méthode de (3.88) à ces nouvelles fonctions. Soit  $\underline{\underline{\tau}}$  tel que

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\tau}} + \text{We} \frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial t} &= 0, \\ \underline{\underline{\tau}}(0) &= -\underline{\underline{\sigma}}_0, \end{aligned}$$

et de même pour  $\underline{\underline{\tau}}'(t, X) = e^{-\frac{t}{\text{We}}} \underline{\underline{\sigma}}_0(X)$ . A la place de (3.106), en notant  $\underline{\underline{\sigma}} := \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\tau}}$  et  $\underline{\underline{\sigma}}' := \underline{\underline{\sigma}}' + \underline{\underline{\tau}}'$ , on a :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}' + \text{We} \left( \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}'}{\partial t} - \underline{\underline{g}}(\underline{\underline{\nabla u}} - \underline{\underline{\nabla u}}', \underline{\underline{\sigma}}) - \underline{\underline{g}}(\underline{\underline{\nabla u}}', \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}') \right) &= 2\varepsilon \underline{\underline{D}}[u - u'] + \\ \underline{\underline{m}} - \underline{\underline{m}}' - \text{Weg}(\underline{\underline{\nabla u}} - \underline{\underline{\nabla u}}', \underline{\underline{\tau}}) - \text{Weg}(\underline{\underline{\nabla u}}', \underline{\underline{\tau}} - \underline{\underline{\tau}}') &\text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.115) \\ \text{avec } \underline{\underline{g}}(\underline{\underline{\nabla u}}, \underline{\underline{\sigma}}) &= \frac{a-1}{2} (\underline{\underline{\nabla u}}^T \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{\nabla u}}) + \frac{a+1}{2} (\underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{\nabla u}}^T + \underline{\underline{\nabla u}} \underline{\underline{\sigma}}), \end{aligned}$$

et surtout  $(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}')(0) = 0$ . En prenant la norme  $H^1$  de (3.115), on a

$$\begin{aligned} |\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}'|_1 + \text{We} \frac{d}{dt} |\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}'|_1 &\leq 2\varepsilon |\underline{\underline{\nabla u}} - \underline{\underline{\nabla u}}'|_1 + |\underline{\underline{m}} - \underline{\underline{m}}'|_1 + \\ + C \text{We} (|\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}'|_1 |\underline{\underline{\nabla u}}'|_{1+r} &+ |\underline{\underline{\nabla u}}'|_{1+r} |\underline{\underline{\tau}} - \underline{\underline{\tau}}'|_{1+r} + \\ |\underline{\underline{\nabla u}} - \underline{\underline{\nabla u}}'|_1 (|\underline{\underline{\sigma}}|_{1+r} &+ |\underline{\underline{\tau}}|_{1+r})). \end{aligned}$$

Vue l'hypothèse (3.77), rappelée dans (3.84), nous avons, cette fois de la même façon que pour (3.88) ( $C = C(\varepsilon, B, \text{We}, S, V, \text{Re})$ ) :

$$|\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}'|_1(t) \leq CT^{\epsilon'} \left( |\underline{\underline{\nabla u}} - \underline{\underline{\nabla u}}'|_{L^2(0,T;H^{1+r})} + |\underline{\underline{m}} - \underline{\underline{m}}'|_{L^2(0,T;H^{1+r})} + |\underline{\underline{\sigma}}_0 - \underline{\underline{\sigma}}'_0|_{1+r} \right),$$

puis, de même que pour (3.88) ( $\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}'(0) = 0$ ) ;

$$\begin{aligned} |\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}'|_{H^{\frac{r}{2}}(0,T;H^1)} &\leq CT^{\epsilon'} |\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}'|_{H^1(0,T;H^{1+r})} \leq CT^{\epsilon'} (|\underline{\underline{\nabla u}} - \underline{\underline{\nabla u}}'|_{L^2(0,T;H^{1+r})} + \\ &+ |\underline{\underline{m}} - \underline{\underline{m}}'|_{L^2(0,T;H^{1+r})} + |\underline{\underline{\sigma}}_0 - \underline{\underline{\sigma}}'_0|_{1+r}). \end{aligned}$$

Et donc pour les  $\underline{\underline{\sigma}}$  et  $\underline{\underline{\sigma}}'$  initiaux, parce que  $|e^{-\frac{t}{\text{We}}}|_{H^{\frac{r}{2}}(0,T)} \leq CT^{\epsilon'}$  ;

$$|\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}'|_{H^{\frac{r}{2}}(0,T;H^1)} \leq CT^{\epsilon'} \left( |\underline{\underline{\nabla u}} - \underline{\underline{\nabla u}}'|_{L^2(0,T;H^{1+r})} + |\underline{\underline{m}} - \underline{\underline{m}}'|_{L^2(0,T;H^{1+r})} + C |\underline{\underline{\sigma}}_0 - \underline{\underline{\sigma}}'_0|_{1+r} \right) \quad (3.116)$$

Pour l'estimation de  $|\underline{\sigma} - \underline{\sigma}'|_{K^{r+\frac{1}{2}}(S_F \times (0,T))}$ , nous utilisons un théorème classique de trace [53] qui nous ramène à des estimations dans l'ouvert  $\Omega$  sur  $|\underline{\sigma} - \underline{\sigma}'|_{L^2(0,T;H^{1+r})}$  (déjà faite) et sur  $|\underline{\sigma} - \underline{\sigma}'|_{H^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}(0,T;H^{\frac{1}{2}})}$ . Cette dernière estimation s'obtient par les mêmes méthodes que précédemment en relevant les conditions initiales et en remplaçant le produit scalaire  $H^1$  par le produit scalaire  $H^{\frac{1}{2}}$ . On peut utiliser les lemmes .4 , .2.5 car les conditions initiales sont homogènes et on a fait l'hypothèse (3.77) :

$$\begin{aligned} |\underline{\sigma} - \underline{\sigma}'|_{H^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}(0,T;L^2(S_F))} &\leq CT^{\epsilon'} \left( |\underline{\nabla}u - \underline{\nabla}u'|_{L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}})} + |\underline{m} - \underline{m}'|_{L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}})} \right) + \\ &+ CT^{\epsilon'} |\underline{\sigma}_0 - \underline{\sigma}'_0|_{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.117)$$

Reportons ces résultats dans (3.113) :

$$\begin{aligned} |\underline{u} - \underline{u}', p - p', \phi - \phi', 0|_{X_T^r} &\leq C |\underline{f} - \underline{f}', a - a', 0, g - g', k - k', \underline{u}_0 - \underline{u}'_0, 0|_{Y_T^r} + \\ &C |\underline{\sigma}_0 - \underline{\sigma}'_0|_{1+r} + CT^{\epsilon'} (|\underline{u} - \underline{u}'|_{K^{2+r}} + |\underline{m} - \underline{m}'|_{L^2(0,T;H^{1+r})}). \end{aligned} \quad (3.118)$$

Pour évaluer  $|\underline{\sigma} - \underline{\sigma}'|_{H^{\frac{1+r}{2}}(0,T;L^2)}$ , nous relevons les conditions initialement non nulles, puis nous faisons comme pour (3.92). Si l'on suppose  $|\underline{\nabla}u_1|_{L^2(0,T;H^{1+r})} < 1$  (cf (3.84)), puis  $T_0$  suffisamment petit, on a ( $r < \frac{1}{2} < 1$ ) :

$$|\underline{\sigma} - \underline{\sigma}'|_{H^{\frac{1+r}{2}}(0,T;L^2)} \leq CT^{\epsilon'} \left( |\underline{\nabla}u - \underline{\nabla}u'|_{L^2(0,T;L^2)} + |\underline{m} - \underline{m}'|_{L^2(0,T;L^2)} + |\underline{\sigma}_0 - \underline{\sigma}'_0| \right) \quad (3.119)$$

Les estimations (3.114), (3.119) sur  $\underline{\sigma} - \underline{\sigma}'$  se résument en :

$$|\underline{\sigma} - \underline{\sigma}'|_{K^{1+r}} \leq CT^{\epsilon'} (|\underline{\nabla}u - \underline{\nabla}u'|_{K^{2+r}} + |\underline{m} - \underline{m}'|_{L^2(0,T;H^{1+r})}) + C |\underline{\sigma}_0 - \underline{\sigma}'_0|_{1+r}. \quad (3.120)$$

En choisissant  $T$  suffisamment petit, on a l'unicité des solutions et la continuité de l'opérateur (3.44).

### 3.3 Résolution du deuxième problème intermédiaire

On souhaite résoudre (3.30-3.38) avec  $\underline{u}_1, \underline{\tau}_1$  donnés. On note  $P_2[\underline{u}_1, \underline{\tau}_1](\underline{u}, q, \Phi, \underline{\sigma}) = (\underline{f}, a, \underline{m}, g, k, 0, 0)$  ce système d'équations. On cherche donc  $(\underline{u}, q, \Phi, \underline{\sigma}) \in \bar{X}_T^* = \{(\underline{u}, q, \Phi, \underline{\sigma}) \in \bar{X}_T^r / \underline{u}(0) = 0, \underline{\sigma}(0) = 0\}$ . Comme la résolution du premier problème intermédiaire nous a donné la solution de (3.45-3.53), c'est à dire le même problème avec des seconds membres nuls, nous allons essayer de relever les conditions (3.31), (3.33), (3.34) afin de résoudre (3.30-3.38).

On sait d'après G. Allain [49] ou [50] que si  $(0, a, 0, g, k, 0, 0) \in Y_T^r$ , il existe  $(\underline{u}, p, \Psi, 0) \in X_T^r$  avec dépendance continue, tel que :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{w} &= a \text{ dans } \Omega \times (0, T), \Psi_t - (\partial_\tau \underline{w}) \cdot \underline{N} = k \text{ sur } S_F \\ 2(1 - \varepsilon) \underline{D}[\underline{w}] \cdot \underline{N} - p \underline{N} - \partial_\tau(\Psi \underline{N}) &= g \text{ sur } S_F \\ \underline{w}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Si l'on résoud (3.45-3.53) pour  $\underline{\tau}_1$  inchangé et  $\underline{v} := \underline{w} + \underline{v}$ , les  $(\underline{u}, q, \phi, \underline{\sigma}) \in X_T^r$  que l'on trouve vérifient :

$$\left\{ \begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{\partial(\underline{u} + \underline{w})}{\partial t} - (1 - \varepsilon) \Delta(\underline{u} + \underline{w}) + \nabla(p + q) - \operatorname{div}(\underline{\sigma}) &= \underline{f} + (\operatorname{Re} \underline{w}_t - (1 - \varepsilon) \Delta \underline{w} + \nabla p) & (3.121) \\ \operatorname{div}(\underline{u} + \underline{w}) &= a & (3.122) \\ \underline{\sigma} + \operatorname{We} \left( \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial t} - \underline{g}(\nabla \underline{u} + \nabla \underline{w}, \underline{\sigma}) - \underline{g}(\nabla \underline{u}_1, \underline{\sigma}) - \underline{g}(\nabla \underline{u} + \nabla \underline{w}, \underline{\tau}_1) \right) - 2\varepsilon \underline{D}[\underline{u} + \underline{w}] &= \\ & \underline{m} - 2\varepsilon \underline{D}[\underline{w}] - \operatorname{We} \underline{g}(\nabla \underline{w}, \underline{\tau}_1) \\ \text{avec } \underline{g}(\nabla \underline{u}_1, \underline{\sigma}) &= \left( \frac{a-1}{2} (\nabla \underline{u}_1^T \underline{\sigma} + \underline{\sigma} \nabla \underline{u}_1) + \frac{a+1}{2} (\underline{\sigma} \nabla \underline{u}_1^T + \nabla \underline{u}_1 \underline{\sigma}) \right) & (3.123) \\ \underline{\sigma} \cdot \underline{N} - (p+q) \underline{N} + 2(1-\varepsilon) \underline{D}[\underline{u} + \underline{w}] \cdot \underline{N} - \alpha \partial_\tau((\phi + \Psi) \underline{N}) &= g \text{ sur } S_F \times (0, T) & (3.124) \\ (\phi + \Psi)_t - \partial_\tau(\underline{u} + \underline{w}) \cdot \underline{N} &= k \text{ sur } S_F \times (0, T) & (3.125) \\ (\phi + \Psi)(0) &= 0 \text{ dans } \Omega & (3.126) \\ \underline{u} + \underline{w}(0) &= 0 \text{ à } t = 0, \text{ dans } \Omega & (3.127) \\ (\underline{\sigma} + \underline{\tau}_1)(0) &= 0 \text{ dans } \Omega, & (3.128) \\ \underline{u} + \underline{w} &= 0 \text{ sur } S_B \times (0, T) & (3.129) \end{aligned} \right.$$

Et donc  $(\underline{u} + \underline{w}, p + q, \Phi + \Psi, \underline{\sigma}) \in X_T^* = \{(\underline{u}, q, \Phi, \underline{\sigma}) / \underline{u}(0) = 0, \underline{\sigma}(0) = 0\}$  est bien solution de (3.30-3.38) en changeant la définition de  $\underline{f}, \underline{m}$  par un simple ajout de terme ne dépendant que de  $\underline{w}$  et  $p$ . L'unicité et la continuité de cet opérateur se démontrent de la même façon que celle de  $P_1[\underline{u}_1, \underline{\tau}_1]$ .

### 3.4 Estimations des termes complémentaires

On a développé l'opérateur initial  $P$  par rapport à la grandeur  $\xi \equiv 0$ . On n'a gardé alors que les termes d'ordre 0 en  $\xi$ . Cet opérateur  $P$  a aussi été développé par rapport à  $\phi$ . On n'a gardé que les termes d'ordre 1, les termes d'ordre 0 étant inclus dans les termes d'ordre 0 de  $P$ . On obtient alors l'opérateur  $P_1$ . Symboliquement, on peut donc écrire le problème entier à résoudre sous la forme :

$$\begin{aligned} P(\xi, \underline{u}, q, \phi, \underline{\sigma}) &= P(0, 0, 0, 0, 0) + P_1(\underline{u}, q, \phi, \underline{\sigma}) + E(\xi, \underline{u}, q, \phi, \underline{\sigma}) \\ &= (0, 0, 0, 0, 0, \underline{u}_0, \underline{\sigma}_0), \end{aligned} \quad (3.130)$$



où les termes en  $E$ , sont écrits ci-dessous, en notant  $\partial_\tau$  la dérivée partielle tangentielle, avec les conventions de sommation et de notation des dérivées habituelles et  $\bar{\xi}_{ij} = \delta_{ij} + \xi_{ij}$  :

$$\begin{aligned}
E_i^1(\xi, \underline{u}, q, \phi, \underline{\sigma}) &= -(1 - \varepsilon)\xi_{kj}\partial_k[\bar{\xi}_{lj}u_{i,l}] - (1 - \varepsilon)\partial_j(\xi_{lj}u_{i,l}) + \xi_{ki}\partial_k q - \sigma_{ij,k}\xi_{kj} \\
E^2(\xi, \underline{u}, q, \phi, \underline{\sigma}) &= \xi_{kj}u_{j,k} \\
E_{ij}^3(\xi, \underline{u}, q, \phi, \underline{\sigma}) &= -We \left[ \frac{(a-1)}{2} (\xi_{li}u_{k,l}\sigma_{kj} + \sigma_{ik}u_{k,l}\xi_{lj}) + \frac{(a+1)}{2} (\sigma_{ik}\xi_{lk}u_{j,l} + \right. \\
&\quad \left. u_{i,l}\xi_{lk}\sigma_{kj}) \right] - \varepsilon(u_{i,k}\xi_{kj} + u_{j,k}\xi_{ki}) \\
E_i^4(\xi, \underline{u}, q, \phi, \underline{\sigma}) &= -q(\mathcal{N}_i - N_i) + (1 - \varepsilon) [\xi_{kj}u_{i,k} + \xi_{ki}u_{j,k}] N_j + \\
&\quad + (1 - \varepsilon) [\bar{\xi}_{kj}u_{i,k} + \bar{\xi}_{ki}u_{j,k}] (N_j - N_j) + \\
&\quad + gh(X_1)(\mathcal{N}_i - N_i) + g\eta_2\mathcal{N}_i - \alpha\partial_\tau Q_i + \sigma_{ij}(N_j - N_j) \\
\text{où } Q_1 &= (1 + h'^2)^{\frac{-1}{2}} \left[ \left( 1 + \frac{2h'\phi + \phi^2}{1 + h'^2} \right)^{\frac{-1}{2}} - 1 + \frac{h'\phi}{1 + h'^2} \right] \\
\text{et } Q_2 &= -h'\phi^2(1 + h'^2)^{\frac{-3}{2}} + (\phi + h')Q_1 \\
E^5(\xi, \underline{u}, q, \phi, \underline{\sigma}) &= -\partial_\tau(\underline{u}) \cdot \underline{N} [(N_2 + \partial_\tau\eta_1)^{-2} - N_2^{-2}] - \\
&\quad (N_2 + \partial_\tau\eta_1)^{-2} (\partial_\tau u_2 \partial_\tau \eta_1 - \partial_\tau u_1 \partial_\tau \eta_2) \\
E^6(\xi, \underline{u}, q, \phi, \underline{\sigma}) &= 0 = E^7(\xi, \underline{u}, q, \phi, \underline{\sigma}).
\end{aligned} \tag{3.131}$$

Pour la résolution du point fixe final, nous utiliserons un élément  $(\underline{u}^0, q^0, \phi^0, \underline{\sigma}^0)$  de  $X_{T_0}^r$  qui relèvera les conditions initiales et un nouvel espace  $X_T^* = \{(\underline{u}, q, \phi, \underline{\sigma}) \in X_T^r / \underline{u}(0) = 0, \underline{\sigma}(0) = 0\}$ . Le point fixe se fera sur  $(\underline{u}, q, \phi, \underline{\sigma})$  dans la boule de centre 0 et de rayon  $R$  de  $X_T^*$ , où  $R$  est un réel positif donné.

**Théorème 3.7**

Si  $0 < r < \frac{1}{2}$  et  $(\underline{u}, q, \phi, \underline{\sigma}) \in B_{X_T^*}(0, R)$ , il existe  $\epsilon' > 0$  et  $T'_0$  tel que  $0 < T'_0 \leq T_0$  dépendant de  $(\underline{u}^0, q^0, \phi^0, \underline{\sigma}^0) \in X_{T_0}^r$  et  $R$ , tels que, si  $T < T'_0$  alors  $E(\underline{u}^0 + \underline{u}, q^0 + q, \phi^0 + \phi, \underline{\sigma}^0 + \underline{\sigma})$  appartient à l'espace  $Y_T^r(\Omega)$  et on a les estimations suivantes

$$\begin{aligned} | E^i(\underline{u}^0 + \underline{u}, q^0 + q, \phi^0 + \phi, \underline{\sigma}^0 + \underline{\sigma}) |_{(Y_T^r)_i} &\leq CT^{\epsilon'} \quad i \neq 2 \\ | E^2(\underline{u}^0 + \underline{u}, q^0 + q, \phi^0 + \phi, \underline{\sigma}^0 + \underline{\sigma}) - \\ &E^2(\underline{u}^0, q^0, \phi^0, \underline{\sigma}^0) |_{(Y_T^r)_2} \leq CT^{\epsilon'}. \end{aligned} \quad (3.132)$$

Si  $(\underline{u}', q', \phi', \underline{\sigma}') \in X_T^*$  aussi, on a :

$$\begin{aligned} | E(\underline{u}^0 + \underline{u}, q^0 + q, \phi^0 + \phi, \underline{\sigma}^0 + \underline{\sigma}) - \\ E(\underline{u}^0 + \underline{u}', q^0 + q', \phi^0 + \phi', \underline{\sigma}^0 + \underline{\sigma}') |_{Y_T^r} \leq \\ CT^{\epsilon'} | \underline{u} - \underline{u}', q - q', \phi - \phi', \underline{\sigma} - \underline{\sigma}' |_{X_T^r} \end{aligned} \quad (3.133)$$

avec les constantes intervenant dans les inégalités dépendant de  $\varepsilon, a, We, r, R, (\underline{u}^0, q^0, \phi^0, \underline{\sigma}^0)$ , mais ne dépendant pas de  $T$  pourvu que  $T \leq T'_0$ .

Nous donnerons une démonstration complète des estimations concernant le premier terme et le troisième terme. Pour le quatrième terme d'erreur ( $E^4$ ), nous n'étudierons que le monome en plus par rapport au cas Navier-Stokes. Pour les termes 2,4,5, nous renvoyons le lecteur à [50], ainsi que pour les démonstrations de plusieurs lemmes énoncés ci-après.

**3.4.1 Lemmes divers**

Nous donnons ici les énoncés et quelques démonstrations, des lemmes utiles pour la démonstration des estimations sur les termes d'erreurs en  $\xi$  (cf théorème .7).

**Lemme 3.8**

Soient  $0 < T \leq T_0, 0 \leq s < \frac{1}{2}, 0 \leq \epsilon' < 1$  et  $X$  un espace de Hilbert. L'application qui à  $v \in H^s(0, T; X)$  associe  $V(t) = \int_0^t v(s) ds \in H^{s+1}(0, T; X)$  est continue de  $H^s$  dans  $H^{s+1}$  et de  $H^s$  dans  $H^{s+1-\epsilon'}$ , avec, en plus ;

$$| V |_{s+1-\epsilon'} \leq CT^{\epsilon'} | v |_s,$$

avec  $C$  constante indépendante de  $0 < T \leq T_0$ .

ICI IMPLEMENTATION DE PLEMMME ???

La démonstration se fait par interpolation. Pour  $s = 0$ ,

$$|V|(t) \leq t^{\frac{1}{2}} |v|_0 \Rightarrow |V|_0 \leq CT |v|_0,$$

d'où  $|V|_1 \leq (C+T) |v|_0$ . Par l'inégalité d'interpolation ( $1-\epsilon' \geq 0$ ) ;

$$|V|_{1-\epsilon'} \leq |V|_1^{1-\epsilon'} |V|_0^{\epsilon'} \leq CT^{\epsilon'} |v|_0.$$

Le résultat est prouvé pour  $s=0$ . De même, si  $v \in H^1(0, T)$

$$|V|_1^2 = |v|^2 + |V|^2 \leq C |v|^2 \quad \text{si } T \leq T_0.$$

Dans  $H^2$  :  $|V|_2 \leq C |v|_1$ . De plus, si  $v(0) = 0$ , alors  $|v|^2 \leq C^2 T^2 |v'|^2$ . Une nouvelle application de l'inégalité de convexité des normes d'interpolées donne :

$$|V|_{2-\epsilon'} \leq C |V|_1^{\epsilon'} |V|_2^{1-\epsilon'} \leq CT^{\epsilon'} |v|_1^{\epsilon'} |v|_1^{1-\epsilon'} \leq CT^{\epsilon'} |v|_1.$$

Par interpolation, on obtient le résultat annoncé.

fin de preuve

On rappelle pour le prochain lemme la définition de  ${}_0H^{-1}(\Omega)$  comme le dual de  ${}^0H^1(\Omega) = \{p \in H^1(\Omega), p=0 \text{ sur } S_F\}$ . Cet espace est utile pour traiter l'erreur sur la condition d'incompressibilité.

### Lemme 3.9

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^k$ .

(i) Si  $r > 1, r \geq s \geq 0, v \in H^r(\Omega)$  et  $w \in H^s(\Omega)$ , alors  $vw \in H^s(\Omega)$  et

$$|vw|_s \leq C |v|_r |w|_s$$

(ii) Si  $v \in H^r(\Omega)$  avec  $r > 1$ , et  $w \in {}_0H^{-1}(\Omega)$ , alors  $vw \in {}_0H^{-1}(\Omega)$  et :

$$|vw|_{-1} \leq C |v|_r |w|_{-1}$$

(iii) Si  $v, w \in H^1(\Omega)$ , alors,  $vw \in L^2(\Omega)$  et

$$|vw|_0 \leq C |v|_1 |w|_1$$

(iv) Si  $v \in H^1(\Omega)$  et  $w \in L^2(\Omega)$ , alors  $vw \in {}_0H^{-1}(\Omega)$  et

$$|vw|_{-1} \leq C |v|_1 |w|_0$$

Ce lemme est démontré en dimension 3 par J. T. Beale [52]. La démonstration en dimension 2 ne pose aucun problème.

**Lemme 3.10**

Soient  $X, Y, Z$  trois espaces de Hilbert et une "multiplication"  $M : X \times Y \rightarrow Z$ , bornée (application bilinéaire). On définit la multiplication de  $u$  et  $v$  par  $M(u, v)$ .

- (i) Si  $u \in H^s(0, T; X)$  et  $v \in H^s(0, T; Y)$  avec  $s > \frac{1}{2}$ , alors  $uv$  tel que défini plus haut est dans  $H^s(0, T; Z)$  et  $|uv|_s \leq C |u|_s |v|_s$ .
- (ii) Si  $s \leq 2$  et  $u, v$  satisfont en plus à la condition  $\partial_t^k u(0) = 0 = \partial_t^k v(0)$  pour  $0 \leq k < s - 1/2$  et si  $s - 1/2$  n'est pas entier, alors la constante  $C$  de (i) est indépendante de  $T < T_0$ .

Ce lemme est démontré p 366 de [52] pour un ouvert de  $\mathbb{R}^k$ . La démonstration est basée sur un prolongement à  $\mathbb{R}^k$ , une estimation des transformées de Fourier pour (i) et le lemme 5 pour (ii).

Nous aurons également besoin du lemme suivant qui assure le caractère borné indépendamment de  $T < T_0$  de grandeurs particulières qui ne sont pas nulles initialement.

**Lemme 3.11**

Pour  $(\underline{u}^0, q^0, \phi^0, \underline{\sigma}^0) \in X_{T_0}^r$  ( $r < \frac{1}{2}$ ) et  $(\underline{u}, q, \phi, \underline{\sigma})$  dans une boule de rayon  $R$  de  $X_T^r$  avec  $\underline{u}(0) = 0, \underline{\sigma}(0) = 0$  (donc dans  $X_T^*$ ), on a les majorations suivantes avec des constantes  $C$  pouvant dépendre de  $R, \underline{u}^0, q^0, \phi^0, \underline{\sigma}^0, r, \Omega$ , mais indépendantes de  $T < T_0$ :

$$|\partial_k \partial_j (\underline{u}^0 + \underline{u})|_{K^r(0, T)} \leq C \tag{3.134}$$

$$|\partial_k (\underline{u}^0 + \underline{u})|_{K^{r+1}(0, T)} \leq C \tag{3.135}$$

$$|\nabla (q^0 + q)|_{K^r(0, T)} \leq C \tag{3.136}$$

$$|(\underline{\sigma}^0 + \underline{\sigma})_{ij, k}|_{K^r(0, T)} \leq C \tag{3.137}$$

ICI PLEMME ??

La démonstration repose, d'une part sur le fait que  $(\underline{u}^0, q^0, \phi^0, \underline{\sigma}^0)$  n'a pas besoin d'être prolongée, et d'autre part que  $(\underline{u}, q, \phi, \underline{\sigma})$  vérifie, soit des conditions initiales nulles, soit que le  $r$  définissant la régularité est entre 0 et  $\frac{1}{2}$ . Ainsi, d'après .5 ;

$$\begin{aligned} |\partial_k \partial_j (\underline{u}^0 + \underline{u})|_{K^r(0, T)} &\leq |\partial_k \partial_j \underline{u}^0|_{K^r(0, T)} + |\partial_k \partial_j \underline{u}|_{K^r(0, T)} \leq \\ &\leq |\underline{u}^0|_{K^{r+2}(0, T_0)} + C |\underline{u}|_{K^{r+2}(0, T_0)}. \end{aligned}$$

On démontre de même 3.135. Pour la pression, puisque  $r < \frac{1}{2}$ , on n'a pas besoin d'imposer la condition non physique de nullité initiale de la pression pour avoir l'injection (ii) de .5 qui assure le résultat annoncé. Le cas de l'extracontrainte doit, comme pour la pression, être écrit ;

$$|(\underline{\sigma}^0 + \underline{\sigma})_{,k}|_{K^r} \leq |\underline{\sigma}_{,j}^0|_{K^r(0,T_0)} + |\underline{\sigma}_{,j}|_{K^r(0,T)} \leq C(T_0) |\underline{\sigma}^0|_{K^{r+1}(0,T_0)} + C |\underline{\sigma}|_{K^{r+1}} \leq C$$

fin de preuve

**Lemme 3.12**

Pour  $r$  tel que  $0 < r < \frac{1}{2}$ , on note  $\mathcal{A}$  l'algèbre

$$\mathcal{A} = H^{\frac{1+r}{2}}(0, T; H^{1+r}(\Omega)).$$

Pour toutes fonctions  $(\underline{u}^0, q^0, \phi^0, \underline{\sigma}^0) \in X_{T_0}^r$ ,  $(\underline{u}, q, \phi, \underline{\sigma}) \in X_T^*$  comme pour les mêmes fonctions avec un prime, il existe un  $\epsilon' > 0$  et des constantes  $C$  tels que, si  $T < T_0$  ;

$$|\xi(\underline{u}^0 + \underline{u})|_{\mathcal{A}} \leq CT^{\epsilon'} \quad (3.138)$$

$$|\xi(\underline{u}^0 + \underline{u}) - \xi(\underline{u}^0 + \underline{u}')|_{\mathcal{A}} \leq CT^{\epsilon'} |\underline{u} - \underline{u}'|_{K^{r+2}}, \quad (3.139)$$

avec les  $C$ , constantes dépendant de  $\underline{u}^0, q^0, \phi^0, \underline{\sigma}^0, r, T_0, \dots$  mais pas de  $T$  pourvu que  $T < T_0$ .

PLEMME ICI

Nous noterons  $\xi$  le  $\xi(\underline{u}^0 + \underline{u})$ ,  $\xi'$  le  $\xi(\underline{u}^0 + \underline{u}')$  et  $\eta, \eta'$  les grandeurs associées respectivement. Nous voulons utiliser le fait que  $\mathcal{A}$  est une algèbre. Cependant, la constante de continuité du produit dans  $\mathcal{A}$  dépend du temps, comme on peut le voir en écrivant la continuité de la multiplication de fonctions indépendantes du temps :

$$|1|_{H^{\frac{1+r}{2}}(0,T)} \leq C(\mathcal{A}) |1|_{H^{\frac{1+r}{2}}(0,T)} |1|_{H^{\frac{1+r}{2}}(0,T)} \Rightarrow C(\mathcal{A}) = C(T).$$

Ici, nous nous ramènerons à des multiplications entre fonctions initialement nulles. On note  $\mathcal{P}$  l'opérateur de prolongement, et  $\mathcal{R}$  l'opérateur de restriction à  $(0, T)$ . On sait d'après le lemme 4 que  $\mathcal{P}$  est de norme indépendante de  $T < T_0$ . On a alors :

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}\mathcal{P}d\eta\mathcal{R}\mathcal{P}d\eta'|_{H^{\frac{1+r}{2}}(0,T;H^{1+r})} &\leq C |\mathcal{P}d\eta\mathcal{P}d\eta'|_{H^{\frac{1+r}{2}}(\mathbb{R};\mathbb{H}^{\mu+\nu})} \\ &\leq C |\mathcal{P}d\eta|_{H^{\frac{1+r}{2}}(\mathbb{R};\mathbb{H}^{\mu+\nu})} |\mathcal{P}d\eta'|_{H^{\frac{1+r}{2}}(\mathbb{R};\mathbb{H}^{\mu+\nu})} \\ &\leq C |d\eta|_{\mathcal{A}} |d\eta'|_{\mathcal{A}}. \end{aligned}$$

Donc, il existe  $\alpha_1$  tel que si  $|d\eta|_{\mathcal{A}} < \alpha_1$ , alors,  $\xi = (I + d\eta)^{-1} - I$  appartient à  $\mathcal{A}$  et peut se développer en série avec en plus ( $C$  indépendante de  $T \leq T_0$ ) :

$$|\xi|_{\mathcal{A}} \leq C |d\eta|_{\mathcal{A}}. \quad (3.140)$$

De plus, la propriété d'algèbre de  $\mathcal{A}$  nous permet d'écrire, si  $|d\eta| < \frac{1}{2}$  et de même pour  $d\eta'$  ;

$$\xi - \xi' = (I + \xi)d(\eta - \eta')(I + \xi') = d(\eta - \eta') + \xi d(\eta - \eta') + d(\eta - \eta')\xi' + \xi d(\eta - \eta')\xi'.$$

Les fonctions qui interviennent sont toutes nulles à  $t = 0$ , ce qui nous permet d'écrire, de même que pour (3.140) ;

$$|\xi - \xi'|_{\mathcal{A}} \leq C |d(\eta - \eta')|_{\mathcal{A}}. \quad (3.141)$$

Sachant que  $d\eta(X, t) = \int_0^t \underline{\nabla}(\underline{u}^0 + \underline{u})$ ,  $\underline{u}^0 \in K^{r+2}(0, T_0)$  et que  $\underline{u}$  n'est que dans  $K^{r+2}(0, T)$ , mais avec condition initiale nulle, les lemmes .11 et .8 nous donnent le résultat annoncé (3.138) :

$$|d\eta|_{\mathcal{A}} \leq CT^{\epsilon'} |\underline{\nabla}(\underline{u}^0 + \underline{u})|_{L^2(0, T; H^{1+r})} \leq CT^{\epsilon'}.$$

On démontre de même (3.139).  
fin de preuve

### 3.4.2 Estimations de l'opérateur $E^1$

D'après la formule rappelée dans (3.131), en notant  $C$  une constante indépendante de  $T \leq T_0$  et grâce à .12 ;

$$\begin{aligned} |E_i^1(\xi, \underline{u}, q, \phi, \underline{\sigma})| &\leq CT^{\epsilon'} |\partial_k(\bar{\xi}_{lj}(\underline{u}^0 + \underline{u})(\underline{u}^0 + \underline{u})_{i,l})|_{K^r} + \\ &+ C |\partial_j(\xi_{lj}(\underline{u}^0 + \underline{u})(\underline{u}^0 + \underline{u})_{i,l})|_{K^r} + \\ &+ CT^{\epsilon'} |\underline{\nabla}(q^0 + q)|_{K^r} + CT^{\epsilon'} |(\underline{\sigma}^0 + \underline{\sigma})_{ij,k}|_{K^r}. \end{aligned}$$

On ne peut pas utiliser la continuité de l'opérateur de dérivation, de  $K^{r+1}$  dans  $K^r$ , qui est vraie, car la norme de cet opérateur dépend de  $T \leq T_0$ . Ici, nous allons contourner cette difficulté en utilisant le fait que  $\underline{u}^0 \in X_{T_0}^r$  d'une part et le fait que  $\underline{u}(0) = 0$  d'autre part. Ainsi, par le lemme .11, on a :

$$\begin{aligned} |\partial_k((\delta_{lj} + \xi_{lj}(\underline{u}^0 + \underline{u}))(\underline{u}^0 + \underline{u})_{i,l})|_{K^r} &\leq |(\underline{u}^0 + \underline{u})_{i,lk}|_{K^r} + |\partial_k(\xi_{lj}(\underline{u}^0 + \underline{u})(\underline{u}^0 + \underline{u})_{i,l})|_{K^r} \\ &\leq C + |\xi_{lj}(\underline{u}^0 + \underline{u})(\underline{u}^0 + \underline{u})_{i,l}|_{K^{r+1}} \leq C \end{aligned}$$

Puisque  $\xi_{lj}(0) = 0$  :

$$\begin{aligned} |\partial_j(\xi_{lj}(\underline{u}^0 + \underline{u})(\underline{u}^0 + \underline{u})_{i,l})|_{K^r} &\leq C |\xi_{lj}(\underline{u}^0 + \underline{u})(\underline{u}^0 + \underline{u})_{i,l}|_{K^{r+1}} \\ &\leq CT^{\epsilon'} |(\underline{u}^0 + \underline{u})_{i,l}|_{K^{r+1}} \\ &\leq CT^{\epsilon'}, \end{aligned}$$

grâce au lemme .11 et à .12 .

Les troisième et quatrième termes utilisent .11. Finalement ;

$$|E_i^1(\xi(\underline{u}^0 + \underline{u}), \underline{u}^0 + \underline{u}, q^0 + q, \phi^0 + \phi, \underline{\sigma}^0 + \underline{\sigma})|_{K^r} \leq CT^{\epsilon'}. \quad (3.142)$$

Pour montrer que  $E^1$  est contractant, on forme la différence :

$$\begin{aligned}
& | E_i^1(\xi(\underline{u}^0 + \underline{u}), \underline{u}^0 + \underline{u}, q^0 + q, \phi^0 + \phi, \underline{\sigma}^0 + \underline{\sigma}) - \\
& \quad E_i^1(\xi(\underline{u}^0 + \underline{u}'), \underline{u}^0 + \underline{u}', q^0 + q', \phi^0 + \phi', \underline{\sigma}^0 + \underline{\sigma}') |_{K^r} + \\
\leq & C | (\xi_{kj}(\underline{u}^0 + \underline{u}) - \xi_{kj}(\underline{u}^0 + \underline{u}')) \partial_k (\bar{\xi}_{lj}(\underline{u}^0 + \underline{u})(\underline{u}^0 + \underline{u})_{i,l}) |_{K^r} + \\
& + | \xi_{kj}(\underline{u}^0 + \underline{u}') \partial_k ((\bar{\xi}_{lj}(\underline{u}^0 + \underline{u}) - \bar{\xi}_{lj}(\underline{u}^0 + \underline{u}'))(\underline{u}^0 + \underline{u})_{i,l}) |_{K^r} + \\
& + | \xi_{kj}(\underline{u}^0 + \underline{u}') \partial_k (\bar{\xi}_{lj}(\underline{u}^0 + \underline{u}')(\underline{u} - \underline{u}')_{i,l}) |_{K^r} + \\
& + (1 - \varepsilon) | \partial_j ((\xi_{lj}(\underline{u}^0 + \underline{u}) - \xi_{lj}(\underline{u}^0 + \underline{u}'))(\underline{u}^0 + \underline{u})_{i,l}) |_{K^r} + \\
& + (1 - \varepsilon) | \partial_j (\xi_{lj}(\underline{u}^0 + \underline{u})(\underline{u} - \underline{u}')_{i,l}) |_{K^r} + \\
& + | (\xi_{ki}(\underline{u}^0 + \underline{u}) - \xi_{ki}(\underline{u}^0 + \underline{u}')) \partial_k (q^0 + q) |_{K^r} + \\
& + | \xi_{ki}(\underline{u}^0 + \underline{u}') \partial_k (q - q') |_{K^r} + \\
& + | (\xi_{kj}(\underline{u}^0 + \underline{u}) - \xi_{kj}(\underline{u}^0 + \underline{u}')) (\underline{\sigma}^0 + \underline{\sigma})_{ij,k} |_{K^r} + \\
& + | \xi_{kj}(\underline{u}^0 + \underline{u}') (\underline{\sigma} - \underline{\sigma}')_{ij,k} |_{K^r} .
\end{aligned}$$

Les termes se traitent alors de la même façon que pour l'estimation (3.142) et on a le résultat 3.133 pour le premier opérateur  $E^1$ .

### 3.4.3 Estimations de l'opérateur $E^3$

Nous traitons maintenant les termes d'erreur de l'équation constitutive dans  $K^{r+1}(\Omega \times (0, T))$  :

$$\begin{aligned}
& | E_{ij}^3(\xi(\underline{u}^0 + \underline{u}), \underline{u}^0 + \underline{u}, q^0 + q, \phi^0 + \phi, \underline{\sigma}^0 + \underline{\sigma}) |_{K^{r+1}} \leq \\
C & | \xi_{ij}(\underline{u}^0 + \underline{u})(\underline{u}^0 + \underline{u})_{k,l} (\underline{\sigma}^0 + \underline{\sigma})_{kj} |_{K^{r+1}} + C | (\underline{u}^0 + \underline{u})_{i,k} \xi_{kj}(\underline{u}^0 + \underline{u}) |_{K^{r+1}} .
\end{aligned}$$

Commençons par regarder le premier terme, dont nous allons majorer dans  $L^2(0, T; H^{1+r})$ , la norme par  $CT^{\epsilon'}$ . Par les lemmes .12 et .11, on a :

$$\begin{aligned}
& | \xi_{li}(\underline{u}^0 + \underline{u})(\underline{u}^0 + \underline{u})_{k,l} (\underline{\sigma}^0 + \underline{\sigma})_{kj} |_{L^2(0, T; H^{1+r})} \leq \\
& | \xi_{li}(\underline{u}^0 + \underline{u}) |_{\mathcal{A}} | (\underline{u}^0 + \underline{u})_{k,l} |_{L^2(0, T; H^{1+r})} | (\underline{\sigma}^0 + \underline{\sigma})_{kj} |_{L^2(0, T; H^{1+r})} \\
& \leq CT^{\epsilon'} .
\end{aligned}$$

Continuons en majorant le premier terme dans  $H^{\frac{1+r}{2}}(0, T; L^2)$ . Grâce à .12,

$$\begin{aligned}
& | \xi_{li}(\underline{u}^0 + \underline{u})(\underline{u}^0 + \underline{u})_{k,l} (\underline{\sigma}^0 + \underline{\sigma})_{kj} |_{H^{\frac{1+r}{2}}(0, T; L^2)} \leq | \xi_{li}(\underline{u}^0 + \underline{u}) |_{\mathcal{A}} \times \\
& \times ( | \underline{u}_{k,l}^0 |_{H^{\frac{1+r}{2}}(0, T_0; L^2)} + | \underline{u}_{k,l} |_{H^{\frac{1+r}{2}}(0, T; L^2)} ) ( | \underline{\sigma}^0 + \underline{\sigma} |_{H^{\frac{1+r}{2}}(0, T; L^2)} ) \\
& \leq CT^{\epsilon'} ( | \underline{u}^0, q^0, \phi^0, \underline{\sigma}^0 |_{X_{T_0}^r} + CR )^2 \leq CT^{\epsilon'} ,
\end{aligned}$$

avec  $C$  dépendant de  $We, a, \underline{u}^0, q^0, \phi^0, \underline{\sigma}^0, T_0$ , mais pas de  $T \leq T_0$ . On a donc démontré :

$$| \xi_{li}(\underline{u}^0 + \underline{u})(\underline{u}^0 + \underline{u})_{k,l} (\underline{\sigma}^0 + \underline{\sigma})_{kj} |_{K^{r+1}} \leq CT^{\epsilon'} .$$

Continuons avec le second terme. Les propriétés d'algèbre de  $\mathcal{A} = H^{\frac{1+r}{2}}(0, T; H^{1+r})$  nous donnent :

$$|(\underline{u}^0 + \underline{u})_{i,k} \xi_{kj}(\underline{u}^0 + \underline{u})|_{K^{r+1}} \leq CT^{\epsilon'} | \underline{u}^0 + \underline{u} |_{K^{r+1}} \leq CT^{\epsilon'},$$

d'après .11.

Pour la contractance, nous écrivons le terme différence :

$$\begin{aligned} & | E_{ij}^3(\xi(\underline{u}^0 + \underline{u}), \underline{u}^0 + \underline{u}, q^0 + q, \phi^0 + \phi, \underline{\sigma}^0 + \underline{\sigma}) - \\ & E_{ij}^3(\xi(\underline{u}^0 + \underline{u}'), \underline{u}^0 + \underline{u}', q^0 + q', \phi^0 + \phi', \underline{\sigma}^0 + \underline{\sigma}') |_{K^{r+1}} \leq \\ & 4C | (\xi_{li}(\underline{u}^0 + \underline{u}) - \xi_{li}(\underline{u}^0 + \underline{u}'))(\underline{u}^0 + \underline{u})_{k,l}(\underline{\sigma}^0 + \underline{\sigma})_{kj} |_{K^{r+1}} + \\ & \quad + 4C | \xi_{li}(\underline{u}^0 + \underline{u})(\underline{u} - \underline{u}')_{k,l}(\underline{\sigma}^0 + \underline{\sigma})_{kj} |_{K^{r+1}} + \\ & \quad + 4C | \xi_{li}(\underline{u}^0 + \underline{u})(\underline{u}^0 + \underline{u}')_{k,l}(\underline{\sigma} - \underline{\sigma}')_{kj} |_{K^{r+1}} + \\ & \quad + 2C | (\underline{u} - \underline{u}')_{i,k} \xi_{kj}(\underline{u}^0 + \underline{u}) |_{K^{r+1}} + \\ & \quad + 2C | (\underline{u}^0 + \underline{u}')_{i,k} (\xi_{kj}(\underline{u}^0 + \underline{u}) - \xi_{kj}(\underline{u}^0 + \underline{u}')) |_{K^{r+1}} . \end{aligned}$$

Les termes intervenant ici se traitent de la même façon que ceux étudiés dans cette même section, plus haut, en utilisant (3.139) et non (3.138) du lemme .12 .

### 3.4.4 Estimations de l'opérateur $E^4$

A peu près tous les termes de cet opérateur sont ceux du problème de Navier-Stokes de G. Allain [49]. Il ne nous reste plus alors que le terme en  $(\underline{\sigma}^0 + \underline{\sigma})_{ij}(\mathcal{N}_j - N_j)$  à estimer, dans  $K^{r+\frac{1}{2}}(S_F \times (0, T))$ , sachant que :

$$\underline{\mathcal{N}} - \underline{N} = \int_0^t (-\partial_\tau(\underline{u}_2^0 + \underline{u}_2)(s), \partial_\tau(\underline{u}_1^0 + \underline{u}_1)(s)) ds.$$

Tout d'abord, comme pour le lemme .11, on a :

$$\begin{aligned} | \underline{\sigma}^0 + \underline{\sigma} |_{K^{r+\frac{1}{2}}}(S_F \times (0, T)) & \leq | \underline{\sigma}^0 |_{K^{r+\frac{1}{2}}}(S_F \times (0, T)) + | \underline{\sigma} |_{K^{r+\frac{1}{2}}}(S_F \times (0, T)) \\ & \leq | \underline{\sigma}^0 |_{K^{r+\frac{1}{2}}}(S_F \times (0, T_0)) + | \underline{\sigma} |_{K^{r+\frac{1}{2}}}(S_F \times (0, T)) \\ & \leq | \underline{u}^0, q^0, \phi^0, \underline{\sigma}^0 |_{X_{T_0}^r} + C | \underline{u}, q, \phi, \underline{\sigma} |_{X_T^r} \\ & \leq | \underline{u}^0, q^0, \phi^0, \underline{\sigma}^0 |_{X_{T_0}^r} + CR, \end{aligned}$$

grâce à .5 (ii),  $\underline{\sigma}^0 + \underline{\sigma}$  est donc bien borné par une constante indépendante de  $T < T_0$  dans  $K^{r+\frac{1}{2}}(S_F \times (0, T))$ .

Pour l'évaluation de  $\mathcal{N}_j - N_j$ , nous la faisons dans l'algèbre :  $H^{\frac{1}{2}+\frac{r}{8}}(0, T; H^{\frac{1}{2}+r}(S_F))$ , ce qui nous permettra de conclure. Puisque  $\partial_\tau(\underline{u}^0 + \underline{u}) \in L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}+r}(S_F))$ , le lemme .8 s'applique et donne, grâce à .11 et aux théorèmes de [53] ;

$$\begin{aligned} & | \int_0^t (-\partial_\tau(\underline{u}_2^0 + \underline{u}_2)(s), \partial_\tau(\underline{u}_1^0 + \underline{u}_1)(s)) ds |_{H^{\frac{1}{2}+\frac{r}{8}}(0, T; H^{\frac{1}{2}+r}(S_F))} \leq \\ & \leq CT^{\epsilon'} | (-\partial_\tau(\underline{u}_2^0 + \underline{u}_2), \partial_\tau(\underline{u}_1^0 + \underline{u}_1)) |_{L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}+r}(S_F))} \leq \\ & \leq CT^{\epsilon'} | \underline{\nabla}(\underline{u}^0 + \underline{u}) |_{L^2(0, T; H^{1+r})} \leq \\ & \leq CT^{\epsilon'}. \end{aligned}$$



Par conséquent, le terme étudié vérifie  $(\frac{1}{2} + \frac{r}{2} > \frac{1}{2} > \frac{1}{4} + \frac{r}{2})$  ;

$$|(\underline{\sigma}^0 + \underline{\sigma})_{ij}(\mathcal{N}_j - N_j)|_{K^{r+\frac{1}{2}}(S_F) \times (0,T)} \leq CT^{\epsilon'} | \underline{\sigma}^0 + \underline{\sigma} |_{K^{r+\frac{1}{2}}(S_F)} \leq CT^{\epsilon'}.$$

On démontre de la même façon la contractance de ce terme.

### 3.5 Point fixe

On veut résoudre le système non linéaire lagrangien entier (3.12-3.20) noté  $P$ . On rappelle le développement effectué en première section, qui nous a amené à résoudre le premier problème intermédiaire (3.21-3.29), noté  $P_1 : P_1(\underline{u}, q, \phi, \underline{\sigma}) = (\underline{f}, a, \underline{m}, g, k, \underline{u}_0, \underline{\sigma}_0)$  :

$$\begin{aligned} P(\xi, \underline{u}, q, \phi, \underline{\sigma}) &= P(0, 0, 0, 0, 0) + P_1(\underline{u}, q, \phi, \underline{\sigma}) + E(\xi, \underline{u}, q, \phi, \underline{\sigma}) \\ &= (0, 0, 0, 0, 0, \underline{u}_0, \underline{\sigma}_0) \end{aligned} \quad (3.143)$$

où  $P(0, 0, 0, 0, 0) = (0, 0, 0, g_0 h(X_1) N_i - \alpha \partial_\tau(\underline{\tau}), 0, 0, 0)$  est l'ensemble des termes d'ordre 0 (pesanteur et tension superficielle initiales).

Commençons par relever les conditions initiales et le terme d'ordre 0. Nous utiliserons pour cela le fait que l'opérateur  $P_1$  est inversible de  $X_T^r$  dans  $Y_T^r$ . Soit donc  $(\underline{u}^0, q^0, \phi^0, \underline{\sigma}^0)$  tel que

$$P_1(\underline{u}^0, q^0, \phi^0, \underline{\sigma}^0) = (0, 0, 0, 0, 0, \underline{u}_0, \underline{\sigma}_0) - P(0, 0, 0, 0, 0),$$

qui existe bien, car les deux membres de droite sont dans  $Y_T^r$  ( $h \in H^{\frac{5}{2}+r} \Rightarrow \partial_\tau(\underline{\tau}) \in H^{r+\frac{1}{2}}$ ). On est donc ramené à trouver  $(\underline{u}, q, \phi, \underline{\sigma}) \in X_T^* = \{(\underline{u}, q, \phi, \underline{\sigma}) \in X_T^r / \underline{u}(0) = 0, \underline{\sigma}(0) = 0\}$  tel que :

$$\begin{aligned} P_1(\underline{u}^0 + \underline{u}, q^0 + q, \phi^0 + \phi, \underline{\sigma}^0 + \underline{\sigma}) + E(\xi(\underline{u}^0 + \underline{u}), \underline{u}^0 + \underline{u}, q^0 + q, \phi^0 + \phi, \underline{\sigma}^0 + \underline{\sigma}) &= \\ &= P_1(\underline{u}^0, q^0, \phi^0, \underline{\sigma}^0) \\ \Leftrightarrow P_2[\underline{u}^0, \underline{\sigma}^0](\underline{u}, q, \phi, \underline{\sigma}) &= -E(\xi(\underline{u}^0 + \underline{u}), \underline{u}^0 + \underline{u}, q^0 + q, \phi^0 + \phi, \underline{\sigma}^0 + \underline{\sigma}), \end{aligned}$$

où  $P_2$  est l'opérateur du second problème intermédiaire introduit plus haut p 78. Il associe à  $(\underline{u}, q, \phi, \underline{\sigma}) \in X_T^*$  :

$$\begin{aligned} &\left( \operatorname{Re} \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} - (1 - \varepsilon) \Delta \underline{u} + \nabla q - \operatorname{div} \underline{\sigma}, \right. \\ &\underline{\sigma} + \operatorname{We} \left( \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial t} - \underline{g}(\nabla \underline{u}, \underline{\sigma}) - \underline{g}(\nabla \underline{u}^0, \underline{\sigma}) - \underline{g}(\nabla \underline{u}, \underline{\tau}^0) \right) - 2\varepsilon \underline{D}[\underline{u}], \\ &\underline{\sigma} \cdot \underline{N} - q \underline{N} + 2(1 - \varepsilon) \underline{D}[\underline{u}] \cdot \underline{N} - \alpha \partial_\tau(\phi \underline{N}) \\ &\left. \phi_t - \partial_\tau \underline{u} \cdot \underline{N}, \underline{u}(0), \underline{\sigma}(0) \right) \in Y_T^r. \end{aligned}$$

On veut donc résoudre :

$$\begin{aligned} (\underline{u}, q, \phi, \underline{\sigma}) &= P_2^{-1}[\underline{u}^0, \underline{\sigma}^0](-E(\xi(\underline{u}^0 + \underline{u}), \underline{u}^0 + \underline{u}, q^0 + q, \phi^0 + \phi, \underline{\sigma}^0 + \underline{\sigma})) \\ &= F(\underline{u}, q, \phi, \underline{\sigma}). \end{aligned}$$

Or, si  $(\underline{u}^1, q^1, \phi^1, \underline{\sigma}^1) = P_2^{-1}[\underline{u}^0, \underline{\sigma}^0](- (0, E^2(\underline{u}^0), 0, 0, 0, 0))$ , et pour  $R > 0$  donné, nous pouvons dire, par la continuité de  $P_2$  que ;

$$\begin{aligned} \text{si } | \underline{u} - \underline{u}^1, q - q^1, \phi - \phi^1, \underline{\sigma} - \underline{\sigma}^1 |_{X_T^*} \leq R, \text{ alors} \\ | P_2^{-1}[\underline{u}^0, \underline{\sigma}^0](-E(\xi(\underline{u}^0 + \underline{u}), \underline{u}^0 + \underline{u}, q^0 + q, \phi^0 + \phi, \underline{\sigma}^0 + \underline{\sigma})) - \\ P_2^{-1}[\underline{u}^0, \underline{\sigma}^0](- (0, E^2(\underline{u}^0), 0, 0, 0, 0)) |_{X_T^*} \leq \\ \leq C | -E(\xi(\underline{u}^0 + \underline{u}), \underline{u}^0 + \underline{u}, q^0 + q, \phi^0 + \phi, \underline{\sigma}^0 + \underline{\sigma}) + (0, E^2(\underline{u}^0), 0, 0, 0, 0) |_{Y_T^*} \\ \leq CT^{\epsilon'}, \end{aligned}$$

où  $C$  dépend de  $R, T_0, r, \underline{u}^0, q^0, \phi^0, \underline{u}^1$ , mais pas de  $T \leq T_0$ . Par conséquent, pour  $T$  suffisamment petit,  $F$  envoie la boule de centre  $(\underline{u}^1, q^1, \phi^1, \underline{\sigma}^1)$  et de rayon  $R$  dans elle-même. D'autre part, grâce au théorème .12 :

$$| F(\underline{u}, q, \phi, \underline{\sigma}) - F(\underline{u}', q', \phi', \underline{\sigma}') |_{X_T^*} \leq CT^{\epsilon'} | \underline{u} - \underline{u}', q - q', \phi - \phi', \underline{\sigma} - \underline{\sigma}' |_{X_T^*}.$$

Il s'ensuit que, pour  $T$  assez petit,  $F$  envoie la boule fermée  $B_{X_T^*}((\underline{u}^1, q^1, \phi^1, \underline{\sigma}^1), R)$  dans elle-même et que  $F$  est contractante dans cette même boule.

On a donc résolu le problème lagrangien (3.12-3.20). Vue la régularité de  $\underline{u}$  solution du problème lagrangien, on a aussi résolu le problème eulérien (3.1-3.10) par un simple changement de variables.



# Chapter 4

## Stabilité linéaire

Si l'on peut penser que les équations non linéaires sont plus aptes à traduire la complexité des phénomènes physiques, la volonté de linéariser ces équations pour en simplifier la résolution et en comprendre certains ressorts est toute aussi importante. Il en est ainsi de l'équation de Navier-Stokes qui traduit bien le comportement de nombreux fluides et dont le linéarisé a été beaucoup étudié, par exemple pour la stabilité des équations non linéaires (cf [56]), ou tout simplement pour résoudre Navier-Stokes comme une perturbation des équations linéarisées (cf [48] ou [52]). Heureusement, on sait pour une équation comme Navier-Stokes en domaine borné, que la stabilité non linéaire équivaut à la stabilité linéaire, laquelle équivaut à un spectre inclus dans  $\Re(z) < 0$ . En revanche, on ignore totalement si la stabilité non linéaire équivaut, pour les équations des fluides viscoélastiques, à la stabilité linéaire. Pas plus ne sait-on si la stabilité linéaire équivaut à un spectre complètement du bon côté de l'axe imaginaire pur. Cette dernière équivalence est parfois appelée principe de stabilité linéaire. On ne dispose que depuis très récemment d'un théorème de Renardy [58] qui nous dit que pour l'écoulement de Couette, périodique dans les deux dimensions infinies, pour la plupart des modèles de fluides viscoélastiques, à condition qu'ils admettent des solutions stationnaires suffisamment régulières, la stabilité linéaire est donnée par un spectre à partie réelle majorée par un  $\alpha < 0$ . Cependant, la méthode utilise  $U'_s(z) > 0$ , ce qui interdit de l'appliquer à Poiseuille.

Malgré toutes ces restrictions, nous allons nous intéresser dans ce chapitre à l'étude du spectre de l'opérateur linéarisé autour de l'écoulement de Poiseuille de deux fluides viscoélastiques.

Dans un premier temps, nous chercherons la solution stationnaire pour l'écoulement de deux fluides, autour de laquelle nous linéariserons les équations des fluides viscoélastiques. Nous proposerons alors un cadre mathématique propre pour l'obtention des équations d'Orr-Sommerfeld. La recherche du spectre de l'opérateur différentiel initial se ramènera à la résolution d'un problème aux valeurs propres généralisées que nous expliciterons et dont nous donnerons une première méthode numérique de résolution ainsi que des résultats dans l'écoulement d'un seul fluide viscoélastique.

Ensuite, pour l'étude asymptotique ( $q \rightarrow 0$ ) des équations d'Orr-Sommerfeld, nous

commencerons par démontrer un théorème qui justifie une hypothèse faite dans toute la littérature. Nous chercherons ensuite un système d'équations différentielles ordinaires, dans la limite  $q \rightarrow 0$ , qui permet de trouver explicitement la valeur de la grandeur qui caractérise la stabilité en fonction des paramètres dans les différents cas. Nous étudierons numériquement la solution dans le cas le plus fréquent d'écoulement. Enfin, nous ferons une étude non asymptotique de stabilité en utilisant un programme élaboré par P. Laure dont nous expliquerons l'algorithme. Nous expliquerons quelques trucs numériques qui rendent l'algorithme plus performant, puis nous exposerons des résultats.

## 4.1 Equations

Dans tout ce chapitre, nous noterons  $[\underline{u}]$  ou  $[\underline{u}_k]$  la différence  $\underline{u}_1(0) - \underline{u}_2(0)$  (saut à l'interface), et nous indexerons par  $k$  les grandeurs du domaine  $k$ . Cependant, quand il n'y a pas d'ambiguïté, nous n'écrirons pas ces indices.

### 4.1.1 Solutions stationnaires

Cherchons les solutions stationnaires du problème avec pesanteur (1.12-1.15) :

$$\left\{ \begin{array}{l} r_k \text{Re} \frac{D\underline{u}_k}{Dt} + \nabla p_k = -r_k \text{Re} F^{-2} \underline{j} + \text{div} \left( \underline{\underline{\sigma}}_{sol k} + \underline{\underline{\sigma}}_{pol k} \right) \quad \text{dans } \Omega_k \\ \text{div} \underline{u}_k = 0 \quad \text{dans } \Omega_k \\ \underline{\underline{\sigma}}_{sol k} = 2(1 - \alpha_k) m_k \underline{\underline{D}}[\underline{u}_k] \quad \text{dans } \Omega_k \\ \underline{\underline{\sigma}}_{pol k} + \text{We}_k \left( \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}_{pol k}}{\partial t} + \underline{u}_k \cdot \nabla \underline{\underline{\sigma}}_{pol k} - \underline{\underline{g}}(\nabla \underline{u}_k, \underline{\underline{\sigma}}_{pol k}) \right) = 2\alpha_k m_k \underline{\underline{D}}[\underline{u}_k], \\ \text{avec } \underline{\underline{g}}(\nabla \underline{v}, \underline{\underline{\sigma}}) = (\underline{\underline{\sigma}} \nabla \underline{v}^T + \nabla \underline{v} \underline{\underline{\sigma}}) \end{array} \right. \quad (4.1)$$

couplé aux équations d'interface (1.16), auxquelles il faut ajouter les conditions de bord (1.17). Nous rappelons qu'elles ont été non-dimensionnées en introduction p. 19

La géométrie est celle de deux fluides d'interface plane en  $y = 0$  et compris dans  $]-\varepsilon, 0[$  et  $]0, 1[$  respectivement, comme on peut le voir sur la Figure 4.1. Nous noterons dans ce chapitre  $\varepsilon$  la profondeur sans dimension du domaine du fluide 2 et  $\alpha$  la viscosité polymérique sans dimension d'un fluide (avec l'indice indiquant de quel fluide on parle). La représentation de la vitesse cherchée se fait sous la forme :  $\underline{u}_k = (u_k(y), 0)$  comme d'habitude pour un écoulement de type Poiseuille/Couette. On cherche les solutions pour une dérivée surconvectée ( $a = 1$ ).

Commençons par chercher  $\underline{\underline{\sigma}}_{pol k} = \begin{pmatrix} \sigma_k & \tau_k \\ \tau_k & \gamma_k \end{pmatrix}$ . L'équation constitutive s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}}_{pol k} + \text{We}_k \left( - \begin{pmatrix} \sigma_k & \tau_k \\ \tau_k & \gamma_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u'_k(y) & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & u'_k(y) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_k & \tau_k \\ \tau_k & \gamma_k \end{pmatrix} \right) = \alpha_k m_k \begin{pmatrix} 0 & u'_k(y) \\ u'_k(y) & 0 \end{pmatrix}$$

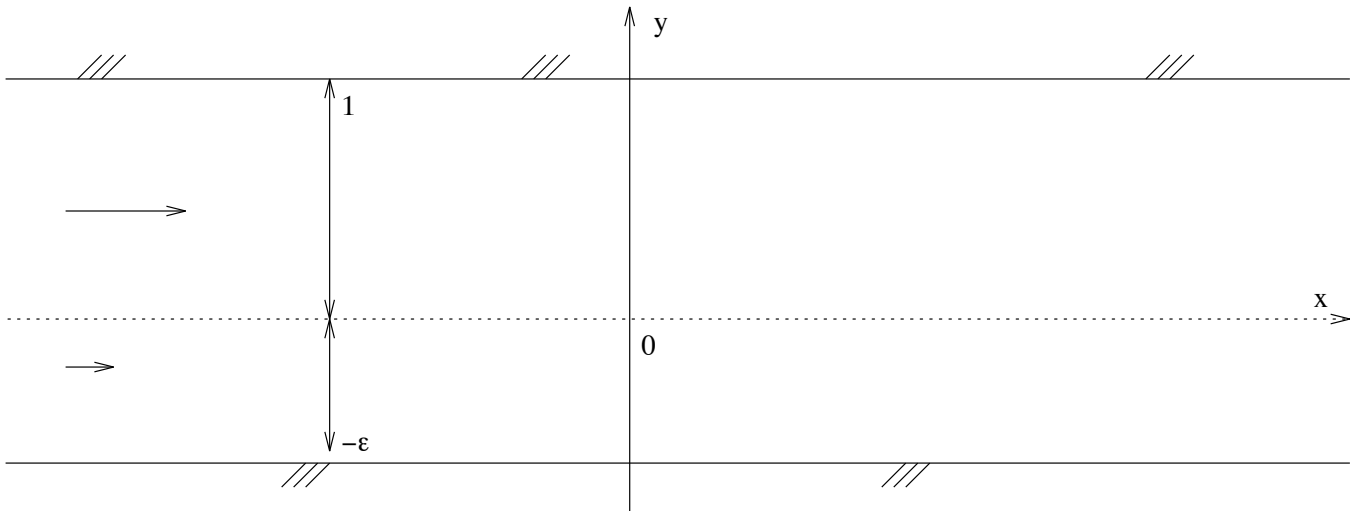


Figure 4.1: Géométrie

et admet la solution (extracontrainte polymérique) :

$$\begin{cases} \sigma_k = 2\text{We}_k \alpha_k m_k (u'_k(y))^2 \\ \tau_k = \alpha_k m_k u'_k \\ \gamma_k = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

De plus l'extracontrainte du solvant (supposé newtonien) est

$$\underline{\underline{\sigma}}_{sol k} = (1 - \alpha_k) m_k \begin{pmatrix} 0 & u'_k \\ u'_k & 0 \end{pmatrix}.$$

La condition d'incompressibilité (1.13) est automatiquement vérifiée avec la représentation de la vitesse, classique pour un écoulement de Poiseuille. Il nous reste à chercher la forme de  $\underline{u}_k$  et  $p_k$ . Pour cela, nous revenons à l'équation de conservation des moments qui nous donne :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial p_k}{\partial x} \\ \frac{\partial p_k}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 + (1 - \alpha_k) m_k u''_k + 0 + \alpha_k m_k u''_k \\ 0 + 0 + 0 + 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 \\ r_k \text{Re} F^{-2} \end{vmatrix}$$

d'où  $\begin{cases} p_k(x, y) = a_k x + p_{0k} = -r_k \text{Re} F^{-2} y \\ u_k(y) = \frac{a_k}{2m_k} y^2 + b_k y + c_k. \end{cases}$

Pour déterminer  $a_k, b_k, c_k, p_{0k}$ , nous utilisons les conditions d'interface (1.16), conditions aux limites (1.17) et le non dimensionnement choisi. On a ainsi ;  $[[u_k]] = 0 \Leftrightarrow c_1 = c_2$ . Or l'adimensionnement nous dit que la vitesse vaut 1 à l'interface (cette vitesse a bien un sens, car cette grandeur est continue). Donc  $c_1 = 1 = c_2$ . L'équation de bord (1.17) nous donne deux relations supplémentaires :

$$\begin{cases} \frac{a_1}{2} + b_1 + 1 = 0 \\ \frac{a_2}{2m_2}\varepsilon^2 - b_2\varepsilon + 1 = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

L'équation de continuité des contraintes normales donne :

$$\begin{cases} \forall x \llbracket p_k(x, 0) \rrbracket = 0 \\ \llbracket m_k u'_{0k}(0) \rrbracket = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} p_{01} = p_{02} \\ a_1 = a_2 \\ b_2 = \frac{b_1}{m_2} \end{cases}$$

Par conséquent, (4.3) donne un système en  $a_1, b_1$  aisément inversible qui nous conduit à la solution stationnaire :

$$\begin{cases} u_k(y) = -\frac{(\varepsilon + m_2)}{m_k \varepsilon (1 + \varepsilon)} y^2 + \frac{m_2 - \varepsilon^2}{m_k \varepsilon (1 + \varepsilon)} y + 1, \\ p_k = \frac{2(\varepsilon + m_2)}{\varepsilon (1 + \varepsilon)} x + p_0 - r_k \text{Re} F^{-2} y, \\ \underline{\underline{\sigma}}_{sol k} = (1 - \alpha_k) m_k \begin{pmatrix} 0 & u'_k \\ u'_k & 0 \end{pmatrix}, \\ \underline{\underline{\sigma}}_{pol k} = \begin{pmatrix} 2\text{We}_k \alpha_k m_k (u'_k)^2 & \alpha_k m_k u'_k \\ \alpha_k m_k u'_k & 0 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (4.4)$$

### 4.1.2 Equations linéarisées

Dans cette sous-section, nous linéarisons des équations plus générales que celles que nous venons de manipuler. En particulier, nous supposons que la viscosité dépend de  $\dot{\gamma}$  sous la forme  $f(2\|\underline{\underline{D}}[\underline{u}]\|_{\mathbb{R}^4}^2)$ , qui se réduit à  $f(u'_0)$  dans le cas de l'écoulement de base. Comme déjà souligné, nous n'étudions que le cas où le paramètre d'interpolation  $a$  vaut 1 (cas de la dérivée surconvectée) et nous donnons la même présentation "abrégée" de linéarisation que la littérature. Les équations volumiques à linéariser sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} r_k \text{Re} \frac{D\underline{u}_k}{Dt} + \nabla p_k = -r_k \text{Re} F^{-2} \underline{j} + \text{div} (\underline{\underline{\sigma}}_{sol k} + \underline{\underline{\sigma}}_{pol k}) \\ \text{div} \underline{u}_k = 0 \\ \underline{\underline{\sigma}}_{sol k} = 2(1 - \alpha_k) m_k f(2\|\underline{\underline{D}}[\underline{u}_k]\|_{\mathbb{R}^4}^2) \underline{\underline{D}}[\underline{u}_k] \\ \underline{\underline{\sigma}}_{pol k} + \text{We}_k l(2\|\underline{\underline{D}}[\underline{u}_k]\|_{\mathbb{R}^4}^2) \left( \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}_{pol k}}{\partial t} + \underline{u}_k \cdot \nabla \underline{\underline{\sigma}}_{pol k} - \underline{g}(\nabla \underline{u}_k, \underline{\underline{\sigma}}_{pol k}) \right) = \\ \quad 2\alpha_k m_k f(2\|\underline{\underline{D}}[\underline{u}_k]\|_{\mathbb{R}^4}^2) \underline{\underline{D}}[\underline{u}_k], \end{array} \right. \quad (4.5)$$

dans chaque domaine  $\Omega_{kt}$  (cf Figure 4.2). Les matrices  $\underline{\underline{\sigma}}$  ont pour composantes  $\begin{pmatrix} \sigma & \tau \\ \tau & \gamma \end{pmatrix}$ . Les conditions aux limites et à l'interface (1.16) et (1.17).

On suppose qu'on a les données stationnaires ( $\underline{u}_0 = (u_0, 0), p_0, \sigma_0, \tau_0, \gamma_0 = 0$ ) avec l'interface en  $y = 0$ . On perturbe ce système autour de la solution stationnaire avec ( $\underline{u}_0 + \underline{u}, p_0 + p, \sigma_0 + \sigma, \tau_0 + \tau, \gamma_0 + \gamma$ ), et une interface perturbée localisée en  $y = 0 + h(x, t)$ . Afin de vérifier la condition d'incompressibilité, nous cherchons  $\underline{u}$  sous la forme  $(\Psi_y, -\Psi_x)$ . Les variables auxquelles nous nous intéresserons sont donc :  $(\Psi, p, \sigma, \tau, \gamma, h)$  et les termes d'ordre supérieur à 1 seront impitoyablement éliminés.

### La conservation des moments et l'incompressibilité

Commençons par linéariser l'équation de conservation des moments autour de la solution stationnaire. On obtient de façon immédiate :

$$r_k \text{Re} \left( \frac{\partial \underline{u}_k}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \underline{u}_k}{\partial x} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u}_0 \right) + \nabla p = \text{div} \left( \underline{\underline{\sigma}}_{sol k} + \underline{\underline{\sigma}}_{pol k} \right) \text{ dans } \Omega_k. \quad (4.6)$$

De même pour l'équation d'incompressibilité :

$$\text{div } \underline{u}_k = 0 \text{ dans } \Omega_k. \quad (4.7)$$

Celle-ci sera automatiquement vérifiée car on représente dans la suite la vitesse avec la fonction de courant :  $\underline{u} = (\Psi_y, -\Psi_x)$ .

### Contrainte du solvant

Nous aurons besoin à plusieurs reprises dans la suite du lemme suivant :

#### Lemme 4.1

L'application  $\underline{u} \mapsto f(2\|\underline{\underline{D}}[\underline{u}]\|_{\mathbb{R}^4}^2)$  admet pour opérateur tangent en  $\underline{u}_0 = (u_0(y), 0)$  :

$$\underline{u} \mapsto 2f'(u_0'^2)u_0'(\Psi_{yy} - \Psi_{xx}),$$

où  $\Psi$  est la fonction de courant associée au champ des vitesses  $\underline{u} = (\Psi_y, -\Psi_x)$ .

#### Démonstration du Lemme 4.1:

Un simple développement limité nous donne :

$$f(2\|\underline{\underline{D}}[\underline{u}]\|_{\mathbb{R}^4}^2) = f(u_0'^2) + 4\underline{\underline{D}}[\underline{u}_0] : \underline{\underline{D}}[\underline{u}]f'(u_0'^2) + O(u^2),$$

avec  $\underline{\underline{D}}[\underline{u}_0] = \frac{u_0'}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\nabla[\underline{u}] = \begin{pmatrix} \Psi_{yx} & \Psi_{yy} \\ -\Psi_{xx} & -\Psi_{xy} \end{pmatrix}$  et  $\underline{\underline{D}}[\underline{u}]$  sa partie symétrique. On retrouve bien l'opérateur annoncé. □

Grâce au lemme 4.1 , l'équation définissant la contrainte du solvant supposé newtonien généralisé s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}}_{sol k} = 2(1 - \alpha_k)m_k f(u_0'^2)\underline{\underline{D}}[\underline{u}] + 4(1 - \alpha_k)m_k f'(u_0'^2)u_0'(\Psi_{yy} - \Psi_{xx})\underline{\underline{D}}[\underline{u}_0] \quad (4.8)$$



### L'équation constitutive

Grâce au lemme 4.1 , on a :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}_{pol k} + We_k l(u_0'^2) \left( \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}_{pol k}}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}_{pol k}}{\partial x} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{\underline{\sigma}}_{pol k 0} - \underline{g}(\underline{\nabla} \underline{u}, \underline{\underline{\sigma}}_{pol k 0}) - \underline{g}(\underline{\nabla} \underline{u}_0, \underline{\underline{\sigma}}_{pol k}) \right) \\ + 2l'(u_0'^2) u_0' (\Psi_{yy} - \Psi_{xx}) We_k \frac{\mathcal{D}_a[\underline{u}_0](\underline{\underline{\sigma}}_0)}{\mathcal{D}t} = 2\alpha_k m_k f(u_0'^2) \underline{\underline{D}}[\underline{u}] + \\ + 2\alpha_k m_k \times 2f'(u_0'^2) u_0' (\Psi_{yy} - \Psi_{xx}) \underline{\underline{D}}[\underline{u}_0]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Sachant maintenant que  $\nabla[\underline{u}] = \begin{pmatrix} \Psi_{yx} & \Psi_{yy} \\ -\Psi_{xx} & -\Psi_{xy} \end{pmatrix}$ , on a, de façon intermédiaire :

$$\begin{aligned} \underline{g}(\underline{\nabla} \underline{u}, \underline{\underline{\sigma}}_{pol k 0}) &= \begin{pmatrix} 2\sigma_{pol 0} \Psi_{yx} + 2\tau_{pol 0} \Psi_{yy} & -\sigma_{pol 0} \Psi_{xx} \\ -\sigma_{pol 0} \Psi_{xx} & -2\tau_{pol 0} \Psi_{xx} \end{pmatrix} \text{ et} \\ \underline{g}(\underline{\nabla} \underline{u}_0, \underline{\underline{\sigma}}_{pol k}) &= u_0' \begin{pmatrix} 2\tau_{pol k} & \gamma_{pol k} \\ \gamma_{pol k} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'après la forme de la solution stationnaire  $(\underline{u}_0, \underline{\underline{\sigma}}_{pol k 0})$  on peut réécrire (4.9) :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}_{pol k} + We_k l(u_0'^2) \left( \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}_{pol k}}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}_{pol k}}{\partial x} - \Psi_x \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}_{pol k 0}}{\partial y} - \begin{pmatrix} 2\sigma_0 \Psi_{yx} + 2\tau_0 \Psi_{yy} & -\sigma_0 \Psi_{xx} \\ -\sigma_0 \Psi_{xx} & -2\tau_0 \Psi_{xx} \end{pmatrix} \right. \\ \left. - u_0' \begin{pmatrix} 2\tau_{pol k} & \gamma_{pol k} \\ \gamma_{pol k} & 0 \end{pmatrix} \right) - 4We_k l'(u_0'^2) u_0'^2 (\Psi_{yy} - \Psi_{xx}) \tau_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ 2\alpha_k m_k f(u_0'^2) \underline{\underline{D}}[\underline{u}] + 4\alpha_k m_k f'(u_0'^2) u_0' (\Psi_{yy} - \Psi_{xx}) \underline{\underline{D}}[\underline{u}_0] \end{aligned} \quad (4.10)$$

### Les équations d'interface

Passons à la linéarisation des équations d'interface. Dans (1.16), la première équation est linéaire par rapport à  $\underline{u}$ . Cependant, la position de l'interface variant, il faut développer cette équation au voisinage de l'interface non perturbée  $y = 0$  (cf Fig. 4.2). Certains auteurs présentent cette opération comme un transport sur l'interface non perturbée.

$$\llbracket (\underline{u}_0 + \underline{u})(0 + h(x)) \rrbracket = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \llbracket \underline{u}_0(0) \rrbracket = 0 \text{ déjà vérifié : Ordre 0} \\ \llbracket \begin{pmatrix} u_0'(0)h(x) & \Psi_y(0) \\ 0 & -\Psi_x(0) \end{pmatrix} \rrbracket = 0. \text{ Ordre 1} \end{cases}$$

D'où les conditions linéarisées :

$$\llbracket \Psi_x \rrbracket = 0 \text{ et } \llbracket u_0'(0) \rrbracket h + \llbracket \Psi_y \rrbracket = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4.11)$$

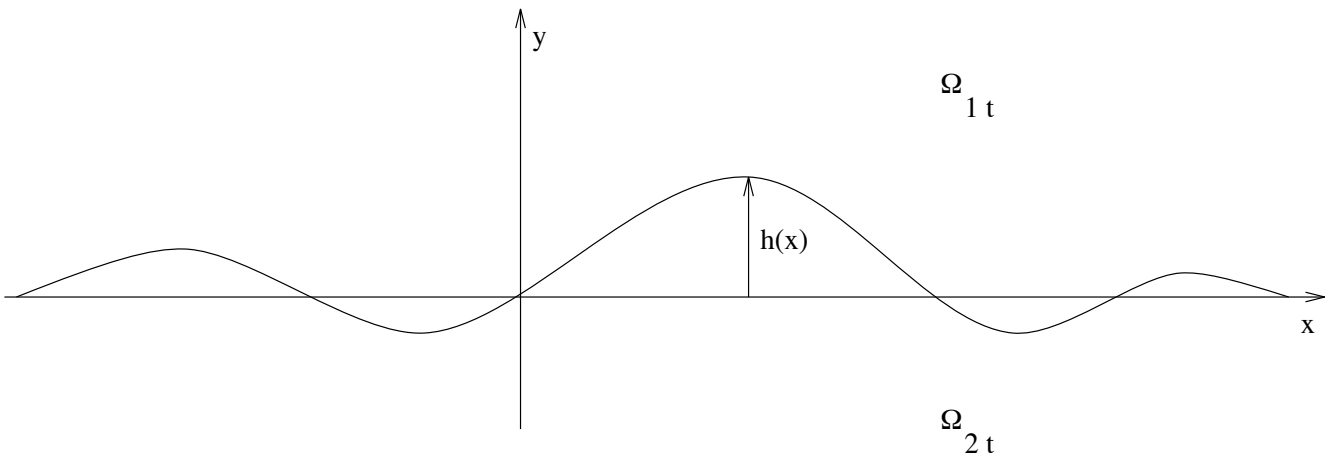


Figure 4.2: L'interface perturbée

Afin d'exprimer tous les termes intervenant dans la deuxième équation de (1.16) (différence des contraintes normales compensée par la tension superficielle), nous devons calculer la somme des courbures principales à l'ordre 2 près. On trouve :

$$\underline{t} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2}} \left| \frac{\partial h}{\partial x} \right.$$

$$\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2}} \left| \begin{array}{l} -\frac{\partial h}{\partial x} \\ 1 \end{array} \right.$$

$$2H = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + O(h^2).$$

La courbure à l'ordre 0 étant nulle, seul l'ordre 0 de  $\underline{n}$  importera dans le second membre de l'équation dynamique d'interface.

Il nous faut maintenant établir le même genre de résultat que 4.1 pour les équations d'interface. Un calcul immédiat donne :

$$f(2\|\underline{D}[\underline{u}_0 + \underline{u}](0+h)\|^2) = f(u_0'^2) + 2f'(u_0'^2)u_0'(u_0''h + \Psi_{yy} - \Psi_{xx}) + O(h^2, \underline{u}^2). \quad (4.12)$$

L'équation entière s'écrit, avant tout développement et linéarisation :

$$\begin{aligned} & [-(p_0 + p)\underline{I} + 2(1 - \alpha_k)m_k f(2\|\underline{D}[\underline{u}_0 + \underline{u}](0+h)\|^2)\underline{D}[\underline{u}_0 + \underline{u}](0+h) + \\ & \left( \underline{\sigma}_{pol0} + \underline{\sigma}_{pol} \right) (0+h)] \underline{n}(0+h) = -2HS\underline{n}(0+h). \end{aligned}$$

Les équations à l'ordre 0 seront supposées satisfaites. Il ne nous reste alors plus que les équations à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial h}{\partial x} \left[ \left[ \begin{array}{c} \sigma_{pol0} \\ 0 \end{array} \right] \right] + \left[ \left( r_k \text{Re} F^{-2} h - p \right) \middle| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right. + (1 - \alpha_k) m_k f(u_0'^2) \left( \left[ \begin{array}{c} u_0'' h + \Psi_{yy} - \Psi_{xx} \\ -2\Psi_{yx} \end{array} \right] \right) + \\
& + 2(1 - \alpha_k) m_k f'(u_0'^2) u_0' \left( u_0'' h + \Psi_{yy} - \Psi_{xx} \right) \middle| \begin{array}{c} u_0' \\ 0 \end{array} + \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial \tau_{pol0}}{\partial y} h \\ 0 \end{array} + \left[ \begin{array}{c} \tau_{pol} \\ \gamma_{pol} \end{array} \right] \right] = -\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} S \middle| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} .
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Les équations linéarisées sont donc (4.6), (4.7), (4.8) et (4.10) couplées aux conditions d'interface (4.11) et (4.13) ainsi qu'aux conditions de bord (1.17) qui n'ont pas changé. Enfin, l'interface suit la relation :

$$-\Psi_x = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} \times u_0(0) + O(h^2, u^2) \tag{4.14}$$

### 4.1.3 La méthode d'Orr-Sommerfeld mathématique

Nous voulons, dans cette section, donner un cadre mathématique à l'obtention des équations d'Orr-Sommerfeld. Nous utiliserons plus loin ce cadre précis afin de démontrer un théorème qui valide une hypothèse de la littérature. Nous partons donc du système des équations linéarisées précédemment pour lequel nous prenons le cas particulier des viscosités ( $f$ ) et temps de relaxation ( $l$ ) indépendants de  $\underline{D}[\underline{u}]$ , et dans lequel nous représentons la vitesse par une fonction de courant  $\Psi$  :

$$\begin{aligned}
& r_k \text{Re} \left( \left[ \begin{array}{c} \Psi_{yt} \\ -\Psi_{xt} \end{array} + u_0 \middle| \begin{array}{c} \Psi_{yx} \\ -\Psi_{xx} \end{array} - \Psi_x \middle| \begin{array}{c} u_0' \\ 0 \end{array} \right) + \left[ \begin{array}{c} p_x \\ p_y \end{array} \right] = (1 - \alpha_k) m_k \left[ \begin{array}{c} \Psi_{yyy} + \Psi_{xxy} \\ -\Psi_{xxx} - \Psi_{xyy} \end{array} + \right. \\
& \quad \left. + \text{div} \frac{\underline{\sigma}_{pol k}}{\underline{\sigma}_{sol k}} \text{ dans } \Omega_k \right. \\
& \frac{\underline{\sigma}_{sol k}}{\underline{\sigma}_{pol k}} = (1 - \alpha_k) m_k \left( \begin{array}{cc} 2\Psi_{xy} & \Psi_{yy} - \Psi_{xx} \\ \Psi_{yy} - \Psi_{xx} & -2\Psi_{yx} \end{array} \right) \text{ dans } \Omega_k \\
& \frac{\underline{\sigma}_{pol k}}{\underline{\sigma}_{pol k}} + \text{We}_k \left( \frac{\partial \underline{\sigma}_{pol k}}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \underline{\sigma}_{pol k}}{\partial x} - \Psi_x \frac{\partial \underline{\sigma}_{pol k0}}{\partial y} - \left( \begin{array}{cc} 2\sigma_{pol0} \Psi_{yx} + 2\tau_{pol0} \Psi_{yy} & -\sigma_{pol0} \Psi_{xx} \\ -\sigma_{pol0} \Psi_{xx} & -2\tau_0 \Psi_{xx} \end{array} \right) \right. \\
& \quad \left. - u_0' \left( \begin{array}{cc} 2\tau_{pol k} & \gamma_{pol k} \\ \gamma_{pol k} & 0 \end{array} \right) \right) = \alpha_k m_k \left( \begin{array}{cc} 2\Psi_{xy} & \Psi_{yy} - \Psi_{xx} \\ \Psi_{yy} - \Psi_{xx} & -2\Psi_{yx} \end{array} \right) \text{ dans } \Omega_k \\
& [\Psi_x] = 0 \text{ et } [u_0'(0)]h + [\Psi_y] = 0 \\
& \left[ \left[ \left( r_k \text{Re} F^{-2} h - p \right) \middle| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right. + (1 - \alpha_k) m_k \left( \left[ \begin{array}{c} u_0'' h + \Psi_{yy} - \Psi_{xx} \\ -2\Psi_{yx} \end{array} \right] \right) + \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial \tau_0}{\partial y} h \\ 0 \end{array} + \left[ \begin{array}{c} \tau_{pol} \\ \gamma_{pol} \end{array} \right] \right] \right] \\
& \quad - \frac{\partial h}{\partial x} \left[ \left[ \begin{array}{c} \sigma_{pol0} \\ 0 \end{array} \right] \right] = -\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} S \middle| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \\
& -\Psi_x = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} \times u_0(0) = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} \text{ en } y = 0 \\
& \Psi_{1,y}(1) = 0 \quad \Psi_{2,y}(-\varepsilon) = 0 \quad -\Psi_{1,x}(1) = 0 \quad -\Psi_{2,x}(-\varepsilon) = 0.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Nous notons, comme avant, avec un 0 les composantes de l'extracontrainte polymérique stationnaire.

Prenons symboliquement le problème linéaire que nous venons d'écrire sous la forme :

$$P(\partial_x, \partial_y)U = Q(\partial_x, \partial_y)\partial_t U, \quad (4.16)$$

avec  $U = (\Psi, \sigma, \tau, \gamma, p, h)^T$ . La modélisation du problème que l'on veut résoudre est telle que l'on suppose l'écoulement de deux fluides viscoélastiques initialement solution stationnaire des équations ;  $U(t = 0) = 0$ . Nous nous intéressons à l'apparition de solutions autres que 0. Puisque les solutions sont initialement nulles, on peut sans problème faire une transformée de Laplace en temps. De plus, on rappelle que si l'intégrale  $L(f) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$  qui définit la transformée de Laplace converge pour une abscisse de convergence  $\sigma_c < \infty$  (plus petit réel  $\beta$  tel que  $e^{-\beta t} f(t) \in L^1$  cf [59]), alors la limite suivante existe :

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega} L(f)(p) \frac{e^{pt}}{p} dt = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \int_0^t f(u) du & \text{si } t > 0, \end{cases} ,$$

où  $\gamma > 0$ . Cette formule permet d'inverser la transformée de Laplace, ce que nous ne ferons pas, puisque nous ne nous intéressons qu'à l'existence de solutions non nulles. Dans toute la suite, nous supposons qu'il existe un  $\sigma_c \in \mathbb{R}$  tel que l'intégrale définissant la transformée de Laplace des différentes fonctions soit absolument convergente pour  $\Re(s) > \sigma_c$ .

On dira qu'il y a stabilité si l'abscisse de convergence est strictement négative (la solution correspondante se comporte comme  $e^{\sigma_c t}$  en  $+\infty$ ) et instabilité si elle est strictement positive.

Prenant (4.16), nous faisons donc une transformée de Fourier en  $x$  (les domaines  $\Omega_k$  auxquels nous nous sommes ramenés sont droits) et Laplace en  $t$  :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}} P(\partial_x, \partial_y)U(x, y, t)e^{-iqx} e^{-st} dx dt &= \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}} Q(\partial_x, \partial_y)\partial_t U(x, y, t)e^{-iqx} e^{-st} dx dt \\ \Leftrightarrow P(iq, \partial_y)\hat{U}(q, y, s) &= sQ(iq, \partial_y)\hat{U}(q, y, s) \quad \forall s / \Re(s) > 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

La perturbation étant supposée à valeur réelle,  $\hat{U}$  sera donc telle que :

$$\overline{\hat{U}}(q, y, s) = \hat{U}(-q, y, \bar{s}) \quad \forall s / \Re(s) > 0. \quad (4.18)$$

Le système (4.17) est celui des équations d'Orr-Sommerfeld. A partir de maintenant, nous n'écrivons plus le  $\hat{\cdot}$  sur les fonctions. De toute façon, seule l'existence des fonctions transformées non nulles nous intéresse sans avoir besoin de refaire les transformations inverses. Si on note avec  $D$  ou également un prime ' la dérivée par rapport à  $y$ , ces équations s'écrivent, pour deux fluides :

$$\left\{ \begin{array}{l}
r_k \text{Re} [(s + iqu_0)(\Psi'' - q^2\Psi) - iq\Psi u_0''] - (1 - \alpha_k)m_k(D^2 - q^2)^2\Psi = \\
\quad iq\sigma'_{pol} + (D^2 + q^2)\tau_{pol} - iq\gamma'_{pol} \\
\sigma_{pol k} + \text{We}_k [\sigma_{pol k}(s + iqu_0) - iq\Psi\sigma_0' - 2(\sigma_0 iq\Psi' + \tau_0\Psi'') - 2\tau_{pol k}u_0'] = 2iq\alpha_k m_k \Psi' \\
\tau_{pol k} + \text{We}_k [\tau_{pol k}(s + iqu_0(y)) - iq\Psi\tau_0' - \sigma_0 q^2\Psi - u_0'\gamma_{pol k}] = \alpha_k m_k (\Psi'' + q^2\Psi) \\
\gamma_{pol k} + \text{We}_k [\gamma_{pol k}(s + iqu_0(y)) - 2q^2\tau_0\Psi] = -2\alpha_k m_k iq\Psi' \\
[[\Psi]] = 0 \text{ et } [[u_0']]h + [[\Psi']] = 0 \\
-iqh[[\sigma_{pol 0}]] + [(1 - \alpha_k)m_k(u_0''h + \Psi'' + q^2\Psi)] + [[\tau'_{pol 0}h + \tau_{pol k}]] = 0 \\
[[ -iq\sigma_{pol k} - \tau'_{pol} + iqr_k \text{Re}(\Psi'u_0 - \Psi u_0') + sr_k \text{Re}\Psi' + iq\gamma_{pol k}]] + \\
\quad + [[ -(1 - \alpha_k)m_k(\Psi''' - 3q^2\Psi')]] = iq(-[[r_k]]\text{Re}F^{-2} + q^2S)h \\
-iq\Psi = (s + iq)h \\
\Psi_1(1) = D\Psi_1(1) = 0 = \Psi_2(-\varepsilon) = D\Psi_2(-\varepsilon),
\end{array} \right. \quad (4.19)$$

après élimination de la pression que l'on peut recalculer par :

$$iqp = iq\sigma_{pol} + \tau'_{pol} - r_k \text{Re}(\Psi'(s + iqu_0) - iq\Psi u_0') + (1 - \alpha_k)m_k(\Psi''' - 3q^2\Psi'). \quad (4.20)$$

Remarquons que, si  $[[r_k]] < 0$ , (le fluide le plus léger est au-dessus), on voit bien, à partir du membre de droite de la dernière condition d'interface de (4.19), que la pesanteur aura le même rôle stabilisateur que la tension superficielle dont on sait qu'elle stabilise. Si  $\text{We}_k = 0$ , on retrouve bien dans chaque domaine  $\Omega_k$  les équations d'Orr-Sommerfeld (cf [63]).

Si on reprend le problème, avant élimination de la pression et de la vitesse par l'introduction de  $\Psi$ , il a la forme :

$$\left( \begin{array}{cccccc}
X & X & 0 & X + D & X & 0 \\
0 & X & X & D & X & 0 \\
0 & 0 & X & X & X & 0 \\
X & D & 0 & X + D^2 & X & X \\
0 & X & D & 0 & X + D^2 & -D \\
0 & 0 & 0 & X & D & 0
\end{array} \right) \left| \begin{array}{l}
\sigma_{pol} \\
\tau_{pol} \\
\gamma_{pol} \\
u \\
v \\
p
\end{array} \right. = s \left( \begin{array}{cccccc}
X & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & X & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & X & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & X & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array} \right) \left| \begin{array}{l}
\sigma_{pol} \\
\tau_{pol} \\
\gamma_{pol} \\
u \\
v \\
p
\end{array} \right. ,$$

où  $X$  est un nombre complexe que nous n'explicitons pas ici et  $D$  est l'opérateur de dérivation par rapport à  $y$ .

L'opérateur de droite est singulier à cause de la dernière ligne qui traduit la condition de divergence nulle. On pourrait avoir l'idée de retirer cette condition en représentant la vitesse avec la fonction de courant  $\Psi$ . Cependant, les expressions de  $u$  et  $v$  seraient alors remplacées par des opérateurs différentiels appliqués à  $\Psi$  et la nouvelle matrice d'opérateurs serait encore singulière. Le problème est donc incontournable : on en est arrivé à un problème aux valeurs propres généralisées :

$$\underline{\underline{A}}X = s\underline{\underline{B}}X,$$

avec  $\underline{\underline{B}}$  une matrice singulière.

Nous voulons, pour finir cette présentation mathématique, détailler sur une équation volumique l'obtention des équations d'Orr-Sommerfeld.

Pour ce faire, faisons l'intégrale de la première coordonnée de l'équation de conservation des moments :

$$\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}} r_k \operatorname{Re} (\Psi_{yt} + u_0(y) \Psi_{xy} - \Psi_x u_0'(y)) - (1 - \alpha_k) m_k (\Psi_{yyy} - \Psi_{xxy}) e^{iqx} e^{-st} dx dt = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}} (-p_x + \sigma_{pol x} - \tau_{pol y}) e^{iqx} e^{st} dx dt.$$

Puisque les conditions initiales sont nulles, l'intégration par parties en  $t$  ne pose pas de problème. Pour  $x$ , on se place au besoin dans les distributions et on obtient l'équation ( $D = \partial_t ='$ ) :

$$r_k \operatorname{Re} ((s + iqu_0(y)) \Psi' - iqu_0'(y) \Psi) + iqp - (1 - \alpha_k) m_k (D^3 - q^2 D) \Psi = iq\sigma_{pol k} + \tau_{pol k}'.$$

Après une élimination purement algébrique de la pression, on retrouve bien les équations recherchées.

La présentation qui vient d'être donnée n'est pas celle plus "physique" donnée par les articles que nous avons lus, dans lesquels on suppose que les fonctions s'écrivent :

$$\begin{aligned} p(x, y, t) &= p(y) e^{iqx+st} \\ \Psi(x, y, t) &= \Psi(y) e^{iqx+st} \\ \sigma(x, y, t) &= \sigma(y) e^{iqx+st} \\ \tau(x, y, t) &= \tau(y) e^{iqx+st} \\ \gamma(x, y, t) &= \gamma(y) e^{iqx+st} \\ h(x, y, t) &= h(y) e^{iqx+st}, \end{aligned}$$

pour arriver au même système que nous. Notons que ce cadre mathématique précis sera nécessaire pour savoir les conditions à imposer sur la solution  $U$  (anciennement  $\hat{U}$ ) que l'on cherche. En particulier, les études asymptotiques dans la littérature ne remarquent jamais qu'il faut imposer (4.18) à la solution que l'on cherche.

#### 4.1.4 Le problème matriciel et une première méthode numérique

Pour l'instant, on en est arrivé à devoir résoudre un problème d'équation différentielle ordinaire (4.19) avec  $(q, y, s) \in \mathbb{R} \times ]-\varepsilon, 1[ \times \mathbb{C}$ . Ce problème dont les matrices sont des opérateurs en  $y$  n'est pas programmable directement. Principalement deux types de méthodes ont été proposées pour résoudre numériquement les équations d'Orr-Sommerfeld de fluides newtoniens.

Le premier rassemble les méthodes spectrales (cf [64] pp. 193-200), que ce soit du pseudo-spectral collocation Chebyshev (e.g. [60]), du spectral tau-chebyshev (e.g. [56]) ou du spectral Galerkin (e.g. [57]). Ces méthodes ont été également comparées dans [61], [62], [56].

Le deuxième, bien moins représenté est celui des méthodes d'éléments finis (e.g. [63]).

Nous avons suivi [56] qui a de bons résultats pour un fluide, sans savoir si la présence d'un deuxième fluide dégraderait la méthode. On suppose donc que la fonction  $U(q, y, s)$  (anciennement  $\hat{U}$ ), en tant que fonction de  $y \in [-\varepsilon, 1]$  est indéfiniment régulière pour être développable en série de polynômes d' $y$ . Si l'on néglige les termes d'ordre supérieur à  $N$  (la fréquence de coupure),  $\partial_y$  appliqué à une fonction  $U(y)$  se traduit par une matrice  $(N + 1) \times (N + 1)$  appliquée au vecteur de  $\mathbb{R}^{N+1}$  constitué des  $N + 1$  premiers coefficients de  $U$ . Le problème se réécrit :

$$P(iq, \underline{\underline{A}}^N)U_N(q, s) = sQ(iq, \underline{\underline{A}}^N)U_N(q, s),$$

avec  $U_N(q, s)$  un vecteur de  $\mathbb{R}^{(N+1) \times (\text{nombre de fonctions})}$  car on développe au même ordre toutes les fonctions de  $U$ , et  $\underline{\underline{A}}^N$  la matrice  $(N + 1) \times (N + 1)$  de dérivée première (cf [64]). Insistons sur le fait que nous n'avons aucune garantie de la régularité de  $\Psi$ , en particulier à l'interface, et donc que l'hypothèse de développabilité nous semble très forte. Cette hypothèse est couramment faite dans la littérature, même si les conditions d'interface nous apprennent que  $\Psi$  est continue en  $y = 0$ , mais pas dérivable.

Grâce au développement de  $U$ , les matrices d'opérateurs ont été ramenées à des matrices simples. Comme il a déjà été souligné, nous devons résoudre un problème aux valeurs propres généralisées :

$$\underline{\underline{A}}X = s\underline{\underline{B}}X,$$

avec  $\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}$  deux matrices à coefficients complexes et non plus différentiels.

La première méthode de résolution d'un tel problème, dite  $QZ$ , utilisée par P. Laure dans son programme de résolution est fondée sur le théorème suivant ([65]) :

**Théorème 4.2**

Si  $\underline{\underline{A}}$  et  $\underline{\underline{B}}$  sont deux matrices à coefficients complexes, alors il existe deux matrices unitaires  $\underline{\underline{Q}}$  et  $\underline{\underline{Z}}$  telles que

$$\begin{aligned}\underline{\underline{Q}}^* \underline{\underline{A}} \underline{\underline{Z}} &= \underline{\underline{T}} \\ \underline{\underline{Q}}^* \underline{\underline{B}} \underline{\underline{Z}} &= \underline{\underline{S}},\end{aligned}$$

où  $\underline{\underline{S}}$  et  $\underline{\underline{T}}$  sont deux matrices triangulaires supérieures.

Si pour un  $k$ ,  $t_{kk} = 0 = s_{kk}$  alors l'ensemble solution est  $\mathcal{C}$ . Dans le cas contraire ;

$$\det(\underline{\underline{A}} - s\underline{\underline{B}}) = 0 \Leftrightarrow s = \frac{t_{kk}}{s_{kk}} \text{ si } s_{kk} \neq 0$$

Ce théorème est utilisé numériquement dans la routine *F02GJE* de la librairie NAG, qui fait la décomposition  $QZ$  de deux matrices données. La mise en oeuvre informatique de cette méthode, avec de multiples variantes, est très bien décrite dans [65] pp 395-406.

P. Laure a programmé la résolution de ce problème en utilisant cette routine F02GJE. Nous avons utilisé ce programme pour des résultats sur l'écoulement d'un fluide en vue du problème à deux fluides.

Afin de valider ce programme, nous avons souhaité retrouver la valeur du Reynolds critique à partir de laquelle on a instabilité de l'écoulement de Poiseuille plan d'un fluide newtonien. Celle-ci a été trouvée numériquement comme valant 5772,22 par Orszag [56]. Expérimentalement, Kao et Park ont tenté de la retrouver [66] en utilisant une géométrie 8:1 qui permet de trouver un  $Re_c$  d'environ 1100 ! D'autre part, Nishioda et al. [68] ont trouvé un nettement meilleur accord avec la théorie linéaire ( $Re_c \simeq 6000$ ) pour une géométrie 27,4:1. Afin de déterminer la fréquence de coupure optimale pour la suite, nous avons tracé en Figure 4.3 la plus grande partie réelle de valeur propre (généralisée) en fonction de la fréquence de coupure notée *ilf*.

On voit bien sur ce graphique qu'il faut une fréquence de coupure d'au moins 30 pour avoir une bonne précision. En fait, pour trouver la valeur du Re critique avec deux décimales, cette fréquence est insuffisante. Entre *ilf* = 35 et *ilf* = 45, on a ainsi pu constater des variations qui font qu'il nous a semblé nécessaire de prendre *ilf* = 45. Notons que M. Renardy et Y. Renardy [36], pour l'écoulement de Couette d'un seul fluide viscoélastique (Maxwell), utilisent jusqu'à 80 modes.

En grossissant au voisinage de  $q = 1,01$  on vérifie un changement de signe de la plus grande partie réelle de valeur propre (généralisée) quand Re passe de 5772,2 à 5772,3. Celui-ci se voit sur le tableau suivant pour lequel  $\alpha = 0,99999$ ,  $We=0,000001$  :



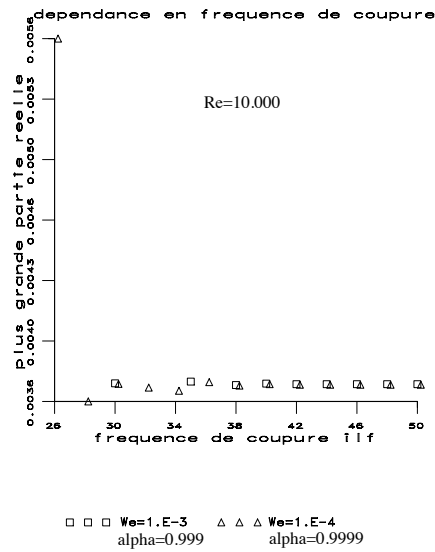


Figure 4.3: Influence de la fréquence de coupure

$q$	Re=5772,2	Re=5772,3
1,000	-0,7782E-4	-0.7763E-4
1,004	-0,5061E-4	-0.5043E-4
1,008	-0,2919E-4	-0.2901E-4
1,012	-0,1360E-4	-0.1342E-4
1,016	-0,3879E-5	-0.3708E-5
1,020	-0,8455E-7	+0.8413E-7
1,024	-0,2258E-5	-0.2093E-5
1,028	-0,1045E-4	-0.1028E-4
1,032	-0,2469E-4	-0.2453E-4
1,036	-0,4504E-4	-0.4489E-4

On déduit donc un  $Re$  critique de  $5772,25 \pm 0,05$  et, en particulier, on retrouve le cas newtonien avec une précision qui semble satisfaisante.

Comme, de toute façon, le but était l'écoulement de deux fluides viscoélastiques, nous n'avons pas poussé la comparaison plus loin. Cependant, s'il était besoin, on trouverait dans [69], [36] et [70] quelques résultats pour des comparaisons. La littérature viscoélastique est plutôt plus fournie sur les instabilités d'interface que pour les écoulements d'un fluide à cause des intérêts industriels.

Un inconvénient notable de cette méthode est qu'elle génère des valeurs propres parasites qui n'ont pas de signification physique. Par exemple, si une valeur propre disparaît quand on augmente la fréquence de coupure de un (à partir d'une fréquence minimale), on peut dire que cette valeur propre n'est pas physique, mais qu'elle est "parasite".

Il y a, de plus, une difficulté particulière à notre problème car l'opérateur différentiel admet un spectre continu qui ne peut pas être approché fidèlement. Ainsi, une valeur

propre peut bouger sensiblement entre  $N$  et  $N + 1$ , mais tendre quand même vers la partie continue du spectre. Ce phénomène interagit avec celui des valeurs propres parasites.

En jouant sur des fréquences de coupure différentes pour chaque fonction, [62] arrive à éliminer les “spurious eigenvalues” dans le cas du mouvement de convection naturelle et de l’écoulement de Poiseuille newtonien.

Enfin, bien que les racines d’un polynôme dépendent continuellement des coefficients, J.H. Wilkinson a exhibé un polynôme  $p(z) = \prod_{k=1}^{20} (z-k) - 2^{-23} z^{19}$  dont les racines contiennent cinq paires de complexes conjugués de parties imaginaires allant de  $\pm 0,64$  à  $\pm 2,81$  alors que si l’on retire le terme avec le  $2^{-23}$ , les racines sont entières !! On peut donc penser que la recherche des valeurs propres qui sont racines du polynôme caractéristique, peut dépendre sensiblement des erreurs d’arrondis, de la fréquence de coupure.

## 4.2 Etude asymptotique

Nous allons nous intéresser, dans cette section, au comportement des solutions quand les ondes sont infiniment longues ( $q \rightarrow 0$ ), et dans le cas particulier où la pesanteur est négligée. Soit qu le champ de pesanteur soit trop petit, soit que la différence des densités soit trop petite. Cependant, nous donnerons une formule asymptotique donnée par P. Laure, qui tient compte de cet effet. Comme partout dans la littérature, nous faisons l’hypothèse que l’on peut développer les grandeurs  $\underline{\underline{A}}$ ,  $\underline{\underline{B}}$ ,  $\underline{\underline{X}}$  en fonction de  $q$  sous la forme :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{A}}(q) &= \underline{\underline{A}}^0 + \underline{\underline{A}}^1 q + \underline{\underline{A}}^2 q^2 + \dots \\ \underline{\underline{B}}(q) &= \underline{\underline{B}}^0 + \underline{\underline{B}}^1 q + \underline{\underline{B}}^2 q^2 + \dots \\ \underline{\underline{X}}(q) &= \underline{\underline{X}}^0 + \underline{\underline{X}}^1 q + \underline{\underline{X}}^2 q^2 + \dots \\ s(q) &= s^0 + s^1 q + s^2 q^2 + \dots\end{aligned}$$

Faire une étude asymptotique consiste alors à chercher le premier terme  $s^k$  de partie réelle non nulle qui admet un vecteur propre (donc non nul). Cette partie réelle détermine la stabilité asymptotique (et linéaire).

Nous allons montrer ci-dessous que  $s^0 = 0$  n’est pas évident, et même qu’il existe des configurations d’écoulements pour lesquels il existe une solution  $\underline{\underline{X}}^0$  non nulle et un  $s^0$  associé non nul. La question de savoir s’il existe des  $s^0$  à partie réelle strictement positive reste irrésolue mais un critère est donné ici, et sera étudié plus complètement ultérieurement.

Pour suivre la littérature, nous ferons ensuite l’hypothèse  $s^0 = 0$  et donnerons un compte-rendu de l’étude asymptotique complète qui nous fournira des formules que nous étudierons.

### 4.2.1 Sur la validité de l'hypothèse $s^0 = 0$

On sait qu'une onde  $e^{i(\underline{k}\cdot\underline{x}-\omega t)}$  admet une relation de dispersion reliant  $\omega$  et  $\underline{k}$ . En général, on fait l'hypothèse d'une vitesse de l'onde constante, ce qui permet de représenter l'onde monodimensionnelle par  $e^{iq(x-ct)}$ . Cette hypothèse revient, dans le cadre mathématique que l'on a présenté ci-dessus, à supposer que  $s(q)$  est nulle et dérivable en  $q = 0$ . Cette hypothèse est sans conséquence pour les cas physiques où  $q \neq 0$ . Dans notre cas, elle nécessite d'être justifiée.

Ecrivons les équations vérifiées à l'ordre 0 en formulation  $(u, v, p)$ , c'est à dire sans élimination de la pression ni de la condition de divergence nulle dans le cas de dérivée surconvectée ( $a = 1$ ). L'effet de la pesanteur disparaît très vite.

$$\left\{ \begin{array}{l} r_k \operatorname{Re} \left( s^0 \left| \begin{array}{l} u^0 \\ v^0 \end{array} \right. + \underline{0} + \left| \begin{array}{l} u'_0 v^0 \\ 0 \end{array} \right. \right) + \left| \begin{array}{l} 0 \\ p^{0'} \end{array} \right. = (1 - \alpha_k) m_k \left| \begin{array}{l} u^{0''} \\ v^{0''} \end{array} \right. + \left| \begin{array}{l} \tau^{0'} \\ \gamma^{0'} \end{array} \right. \\ v^{0'} = 0 \\ \sigma^0 + \operatorname{We}_k (s^0 \sigma^0 + \sigma'_0 v^0 - 2u'_0 \tau^0 - 2\tau_0 u^{0'}) = 0 \\ \tau^0 + \operatorname{We}_k (s^0 \tau^0 + \tau'_0 v^0 - u'_0 \gamma^0) = \alpha_k m_k u^{0'} \\ \gamma^0 + \operatorname{We}_k (s^0 \gamma^0) = 2\alpha_k m_k v^{0'} (= 0) \\ v^0(0) = s^0 h^0 \\ u_k^0(\varepsilon_k) = 0 = v_k^0(\varepsilon_k) \\ \llbracket u'_0 \rrbracket h^0 + \llbracket u^0 \rrbracket = 0 \\ \llbracket v^0 \rrbracket = 0 \\ \llbracket (1 - \alpha_k) m_k (u^{0'} + u''_0 h^0) + \alpha_k m_k u''_0 h^0 + \tau^0 \rrbracket = 0 \\ \llbracket -p^0 + 2(1 - \alpha_k) m_k v^{0'} + \gamma^0 \rrbracket = -\llbracket r_k \rrbracket \operatorname{Re} F^{-2} h^0. \end{array} \right. \quad (4.21)$$

Rappelons qu'il faut adjoindre la relation (4.18) de "complexification" telle qu'elle résulte de la présentation mathématique ci-dessus.

Pour toute la démonstration du théorème énoncé à la fin, nous prenons les notations telles que  $k$  et  $k'$  sont deux éléments de  $\{1, 2\}$  et  $\varepsilon_1 = 1$ ,  $\varepsilon_2 = -\varepsilon$ . De plus, nous supposons que  $s^0 \neq 0$ .

Puisque  $v^{0'}(y) = 0$ ,  $\llbracket v^0 \rrbracket = 0$  et  $v^0(1) = 0$ , on a la nullité de  $v^0(y)$  et il n'y a plus de dépendance en pesanteur. Le système se réécrit alors plus simplement :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 + \text{We}_k s^0) \sigma^0 = 2\text{We}_k (u'_0 \tau^0 + \alpha_k m_k u'_0 u^{0'}) \quad (4.22) \\ (1 + \text{We}_k s^0) \tau^0 = \alpha_k m_k u^{0'} + \text{We}_k u'_0 \gamma^0 \quad (4.23) \\ (1 + \text{We}_k s^0) \gamma^0 = 0 \quad (4.24) \\ 0 = s^0 h^0 \quad (4.25) \\ r_k \text{Re } s^0 \begin{vmatrix} u^0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ p^{0'} \end{vmatrix} = (1 - \alpha_k) m_k \begin{vmatrix} u^{0''} \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \tau^{0'} \\ \gamma^{0'} \end{vmatrix} \quad (4.26) \\ u_k^0(\varepsilon_k) = 0 \quad (4.27) \\ \llbracket u^0 \rrbracket = 0 \quad (4.28) \\ \llbracket (1 - \alpha_k) m_k u^{0'} + \tau^0 \rrbracket = 0 \quad (4.29) \\ \llbracket -p^0 + \gamma^0 \rrbracket = 0. \quad (4.30) \end{array} \right.$$

Si  $s^0 \neq 0$ , l'interface n'est pas perturbée :  $h^0 = 0$ . On voit alors qu'il faut distinguer plusieurs cas en  $s^0$  afin de résoudre l'équation constitutive (4.22-4.24) en fonction de  $u^{0'}$ .

Premier cas  $\text{We}_1 = \text{We}_2$  et  $s^0 = \frac{-1}{\text{We}_1} = \frac{-1}{\text{We}_2}$

On voit bien, uniquement à partir de (4.22) qu'il existe un vecteur propre  $(u^0, v^0, p^0, \sigma^0, \tau^0, \gamma^0, h^0)$  puisque  $\sigma^0$  quelconque convient. Nous avons tout de même conduit les calculs, qui seront réutilisés à l'identique plus loin, afin de trouver des conditions pour avoir un vecteur propre tel que, non seulement  $\sigma^0 \neq 0$ , mais encore  $u^0 \neq 0$ . De (4.23) nous déduisons  $\gamma^0$  et de (4.22),  $\tau^0 = -\alpha_k m_k u^{0'}$ . En reportant dans l'équation de conservation des moments, nous avons :

$$r_k \text{Re } s^0 u_k^0 = (1 - 2\alpha_k) m_k u_k^{0''}.$$

Si  $(1 - 2\alpha_k) = 0$  alors  $u^0 = 0 = \tau^0 = \gamma^0$ ,  $p^0$  sera constant et seul  $\sigma^0$  sera non nul (quelconque).

Si  $(1 - 2\alpha_k) \neq 0$  alors on pose, en choisissant la détermination pour la racine complexe telle que la partie réelle de la racine soit positive :  $\omega_k = \sqrt{\frac{r_k \text{Re } s^0}{(1 - 2\alpha_k) m_k}} \in \mathbb{R}$  ou  $i\mathbb{R}$ . Le

système vérifié par  $u^0$  est alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_k^{0''}(y) = \omega_k^2 u_k^0(y) \\ \llbracket u^0 \rrbracket = 0 \\ \llbracket (1 - 2\alpha_k) m_k u_k^{0'} \rrbracket = 0 \\ u_1^0(1) = 0 = u_2^0(-\varepsilon). \end{array} \right. \quad (4.31)$$

Pour le résoudre, nous cherchons  $u^0$  sous la forme  $\beta_k e^{\omega_k y} + \gamma_k e^{-\omega_k y}$  avec  $\beta_k, \gamma_k \in \mathbb{C}$  *a priori*. Si l'on transcrit ce que doivent satisfaire les quatre constantes complexes  $\beta_1, \gamma_1, \beta_2, \gamma_2$ , on a le système homogène suivant :

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} \beta_1 & +\gamma_1 & -\beta_2 & -\gamma_2 & = 0 \\ (1-2\alpha_1)\omega_1\beta_1 & -(1-2\alpha_1)\omega_1\gamma_1 & -(1-2\alpha_2)m_2\omega_2\beta_2 & +(1-2\alpha_2)m_2\omega_2\gamma_2 & = 0 \\ e^{\omega_1}\beta_1 & +e^{-\omega_1}\gamma_1 & & & = 0 \\ & & e^{-\omega_2\varepsilon}\beta_2 & +e^{\omega_2\varepsilon}\gamma_2 & = 0. \end{array} \right. \quad (4.32)$$

Or, après réduction, le déterminant de ce système sera nul si et seulement si :

$$\frac{\text{th}(\omega_k\varepsilon_k)}{\text{th}(\omega_{k'}\varepsilon_{k'})} = -\frac{(1-2\alpha_k)m_k\omega_k}{(1-2\alpha_{k'})m_{k'}\omega_{k'}} \quad \text{pour } k \neq k' \in \{1, 2\}, \quad (4.33)$$

où la fonction tangente hyperbolique  $\text{th}$  est *a priori* définie avec les exponentielles complexes.

Nous avons obtenu l'existence d'une solution  $u_k^0(y) = \beta_k e^{\omega_k y} + \gamma_k e^{-\omega_k y}$  avec des  $\beta_k, \gamma_k$  complexes trouvés par le système (4.32) à condition que (4.33) soit satisfaite. Il nous faut encore vérifier qu'après imposition de la relation (4.18), la solution n'est pas nulle. Vu que  $s^0 \in \mathbb{R}$  et  $q = 0$ , cette condition (4.18) s'écrit selon la composante  $u^0$  et dans le domaine  $\Omega_k$  :

$$\overline{\beta_k} e^{\overline{\omega_k} y} + \overline{\gamma_k} e^{-\overline{\omega_k} y} = \beta_k e^{\omega_k y} + \gamma_k e^{-\omega_k y}. \quad (4.34)$$

Il faut maintenant discuter selon  $\alpha_k$ .

- Si  $\alpha_k < 1/2$  et  $\alpha_{k'} < 1/2$ , (4.34) donne, pour tout  $k'' \in \{1, 2\}$  ;  $\overline{\beta_{k''}} = \gamma_{k''}$ . On a donc une condition de plus qui pourrait éventuellement rendre les solutions  $\beta_k, \gamma_k$  nulles. Ce n'est pas le cas, car le conjugué du système homogène (4.32) est le même système à la condition d'échanger  $\beta_k$  et  $\gamma_k$ ,  $\beta_{k'}$  et  $\gamma_{k'}$ .
- Si  $\alpha_k < 1/2$  et  $\alpha_{k'} > 1/2$ , (4.34) donne cette fois  $\overline{\beta_k} = \gamma_k$  et  $\beta_{k'}, \gamma_{k'} \in \mathbb{R}$ . Cette fois encore, avec ces conditions supplémentaires, le système (4.32) est stable par conjugaison complexe et n'est donc pas contradictoire avec la condition (4.18).
- Si  $\alpha_k > 1/2$  et  $\alpha_{k'} > 1/2$ , de même que précédemment, (4.34) donne  $\beta_k, \gamma_k \in \mathbb{R}$  pour  $k = 1, 2$  et le système (4.32) est stable par conjugaison.

Concernant la pression, (4.26) et (4.30) nous apprennent que

$$-p_k^0 - \frac{\alpha_k m_k u_k^{0'}}{\text{We}_k u_{0k}'(y)} = \text{Cste} \quad \forall k \in \{1, 2\}.$$

Donc, si  $u^0$  est non nulle (et donc non constante vue sa forme), la pression sera aussi non constante. Imposer (4.18) à la pression donne que la constante Cste doit être réelle.

Deuxième cas  $s^0 \neq \frac{-1}{\text{We}_k} \quad \forall k \in \{1, 2\}$

Le système (4.22-4.30) se réécrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma^0 = \frac{2\text{We}_k u'_0 \alpha_k m_k (2 + \text{We}_k s^0)}{(1 + \text{We}_k s^0)^2} u^{0'} \\ \tau^0 = \frac{\alpha_k m_k}{1 + \text{We}_k s^0} u^{0'} \\ \gamma^0 = 0 \\ h^0 = 0 \\ u^0 = \frac{1 + (1 - \alpha_k) \text{We}_k s^0}{r_k \text{Re} s^0 (1 + \text{We}_k s^0)} m_k u^{0''} \\ p^0 = \gamma^{0'} \\ \llbracket u^0 \rrbracket = 0 \\ \llbracket \left( \frac{1 + (1 - \alpha_k) \text{We}_k s^0}{1 + \text{We}_k s^0} \right) m_k u^{0'} \rrbracket = 0 \\ \llbracket -p^0 + \gamma^0 \rrbracket = 0. \end{array} \right. \quad (4.35)$$

Isolons les équations sur la vitesse. Deux sous-cas se présentent :

- Si  $1 + (1 - \alpha_k) \text{We}_k s^0 = 0$  (onde stable) donc  $u^0 = 0$  et  $\sigma^0 = \tau^0 = \gamma^0 = h^0 = 0 = p^0$ . Ce n'est donc pas une valeur propre.
- Si  $1 + (1 - \alpha_k) \text{We}_k s^0 \neq 0$  on note  $\omega_k = \sqrt{\frac{r_k \text{Re} s^0 (1 + \text{We}_k s^0)}{m_k (1 + (1 - \alpha_k) \text{We}_k s^0)}} \in \mathcal{C}$  avec la détermination de la racine complexe telle que sa partie réelle soit positive. Les équations sur la vitesse de (4.35) forment le même système (avec un nouveau  $\omega_k$ ) que (4.31). Avec cette nouvelle notation pour  $\omega_k$ , si

$$\frac{\text{th}(\omega_k \varepsilon_k)}{\text{th}(\omega_{k'} \varepsilon_{k'})} = -\frac{(1 - 2\alpha_k) m_k \omega_k}{(1 - 2\alpha_{k'}) m_{k'} \omega_{k'}} \quad \text{pour } k \neq k' \in \{1, 2\},$$

on aura une solution non nulle.

Troisième cas  $s^0 = -\frac{1}{\text{We}_k} \neq -\frac{1}{\text{We}_{k'}}$

On reprend alors les raisonnements faits dans les deux cas précédents, pour chaque domaine, et on arrive à la même condition (4.33) avec, pour  $\omega_k$  la définition du premier cas, et pour  $\omega_{k'}$  la définition du deuxième.

□

Pour énoncer le théorème, nous définissons :

**Définition 4.2.1**

Pour  $k = 1, 2$ , si  $s^0 = \frac{-1}{\text{We}_k}$  et  $2\alpha_k \neq 1$  ;

$$\omega_k := \sqrt{\frac{r_k \text{Re } s^0}{(1 - 2\alpha_k)m_k}} \quad k = 1, 2.$$

Si  $s^0 \neq \frac{-1}{\text{We}_k}$  et  $s^0 \neq \frac{-1}{(1 - \alpha_k)m_k \text{We}_k}$  ;

$$\omega_k := \sqrt{\frac{r_k \text{Re } s^0 (1 + \text{We}_k s^0)}{m_k (1 + (1 - \alpha_k) \text{We}_k s^0)}}$$

Les cas non envisagés par cette définition correspondent à des vecteurs nuls et donc non propres.

Nous énonçons le théorème suivant, qui ne dit pas encore s'il existe des solutions telles que  $\Re(s^0) > 0$ , mais qui donne un critère pour répondre ultérieurement à la question.

**Théorème 4.3**

Avec la définition 4.2.1 pour  $\omega_k, \omega_{k'}$ , il existe des solutions non nulles au système (4.21) pour lesquelles  $\Re(s^0) \neq 0$  dans plusieurs cas.

- Si  $s^0 = \frac{-1}{\text{We}_k}$  pour un  $k$  (stable), alors il existe toujours un vecteur propre tel que  $\sigma_k^0$  est quelconque. De plus,  $u^0$  sera nulle à moins que (4.33) soit satisfait pour  $2\alpha_k = 1$ .
- Si  $s^0 \neq \frac{-1}{\text{We}_k} \forall k$ , alors il existe un vecteur propre si et seulement si (4.33) est vérifié et  $s^0 \neq \frac{-1}{(1 - \alpha_k) \text{We}_k}$

**4.2.2 La recherche des formules asymptotiques**

Malgré les réticences sur l'hypothèse  $s^0 = 0$  exposées ci-dessus, nous l'adopterons tout de même, notamment pour pouvoir comparer nos résultats avec la littérature, et parce que l'on veut bien croire qu'elle soit justifiée. Nous poserons donc  $s = -iqc$ .

La formulation en fonction de courant et élimination de la pression introduit deux valeurs propres supplémentaires (cf [73] ou [36]) par rapport à une résolution en  $u, v, p$ . Comme

les variables primales sont  $u, v, p$ , nous les avons adoptées pour l'analyse asymptotique. Le système écrit, il était clair que l'ordre 0 de  $v$  et  $\gamma_{pol}$  étaient nuls. Nous avons donc posé  $v = iqw$ ,  $\gamma_{pol} = iq\delta_{pol}$ . *A posteriori*, cela a compliqué les calculs car ce changement d'échelle fait apparaître (c'est son but) des fonctions non nulles. Or ce qui nous intéresse n'est pas d'avoir toutes les fonctions non nulles, mais le premier terme dans le développement de  $c$  qui donne un critère de stabilité et soit associé à au moins une fonction  $u, v, \dots$  non nulle. Dans le nouveau système, écrit ci-après, les  $\sigma, \tau, \delta$  représentent l'extracontrainte qui ne contient que la contribution polymérique, indicée par 0 ou pas. Nous négligerons l'effet de stratification de densité dans ce chapitre, mais donnerons les formules asymptotiques de P. Laure qui en tiennent compte :

$$\left\{ \begin{array}{l} r_k \operatorname{Re} \left( (-c + u_0(y)) \left| \begin{array}{c} iqu \\ -q^2w \end{array} \right. + \left| \begin{array}{c} iqu'_0w \\ 0 \end{array} \right. \right) + \left| \begin{array}{c} iqp \\ p' \end{array} \right. = (1 - \alpha_k)m_k \left| \begin{array}{c} u'' - q^2u \\ iq(w'' - q^2w) \end{array} \right. + \\ \quad + \left| \begin{array}{c} iq\sigma + \tau' \\ iq\tau + iq\delta' \end{array} \right. \\ u + w' = 0 \\ \sigma + \operatorname{We}_k (iq(-c + u_0)\sigma + iqw\sigma'_0 - 2u'_0\tau - 2iq\sigma_0u - 2\tau_0u') = 2iq\alpha_k m_k u \\ \tau + \operatorname{We}_k iq ((-c + u_0)\tau + \tau'_0w - u'_0\delta - iq\sigma_0w) = \alpha_k m_k (u' - q^2w) \\ \delta + \operatorname{We}_k ((-c + u_0)iq\delta - 2iq\tau_0w) = 2\alpha_k m_k w' \\ w = (-c + u_0)h \quad \text{en } y = 0 \\ u_k(\varepsilon_k) = 0 = w_k(\varepsilon_k) \quad \text{avec } \varepsilon_1 = 1 \quad \varepsilon_2 = -\varepsilon \\ \llbracket u'_0 \rrbracket h + \llbracket u \rrbracket = 0 \quad \text{et } \llbracket w \rrbracket = 0 \\ \llbracket (1 - \alpha_k)m_k(u' - q^2w) - iq\sigma_0h + \tau \rrbracket = 0 \\ \llbracket -p + 2iq(1 - \alpha_k)m_k w' + iq\delta \rrbracket = q^2 Sh. \end{array} \right. \quad (4.36)$$

Nous développons les grandeurs :

$$\begin{array}{ll} u = u^0 + iqu^1 - q^2u^2 + \dots & w = w^0 + iqw^1 - q^2w^2 + \dots \\ \sigma = \sigma^0 + iq\sigma^1 - q^2\sigma^2 + \dots & \tau = \tau^0 + iq\tau^1 - q^2\tau^2 + \dots \\ \delta = \delta^0 + iq\delta^1 - q^2\delta^2 + \dots & h = h^0 + iqh^1 - q^2h^2 + \dots \\ p = p^0 + iqp^1 - q^2p^2 + \dots & c = c^0 + iqc^1 - q^2c^2 + \dots \end{array}$$

et obtenons un système où on ne garde que les termes d'ordre 0, et dont la résolution dépend de deux cas que nous distinguons.

$\llbracket u'_0 \rrbracket = 0$  On trouve aisément que  $u^0 = w^0 = \sigma^0 = \tau^0 = \delta^0 = 0$  et  $p^0$  est une constante dans tout le domaine. Pour calculer  $c^0$ , deux sous-cas sont à envisager :

$h^0 \neq 0$  ( $\Leftrightarrow c^0 = 1 = u_0(0)$ ). La grandeur  $h^0$  n'est donc pas calculable par le système à l'ordre 0. On l'écrit donc à l'ordre 1 en tenant compte de la nullité des termes à l'ordre 0 :



$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} p^0 \\ p^{1'} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} (1 - \alpha_k)m_k u^{1''} + \tau^{1'} \\ 0 \end{array} \right. \\ u^1 + w^{1'} = 0 \\ \sigma^1 = 4We_k \alpha_k m_k u'_0 u^{1'} \\ \tau^1 = \alpha_k m_k u^{1'} \\ \delta^1 = 2\alpha_k m_k w^{1'} \\ w^1(0) = -c^1 h^0 \\ u_k^1(\varepsilon_k) = 0 = w_k^1(\varepsilon_k) \\ \llbracket u^1 \rrbracket = 0 \\ \llbracket m_k u^{1'} \rrbracket = \llbracket \sigma_0 \rrbracket h \\ \llbracket -p^1 \rrbracket = 0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{en } y = 0 \\ \text{avec } \varepsilon_1 = 1 \quad \varepsilon_2 = -\varepsilon \\ \text{et } \llbracket w^1 \rrbracket = 0 \end{array} \quad (4.37)$$

La vitesse  $u_k^1$  est décomposée dans la base  $(y - \varepsilon_k)^i$  qui simplifie la recherche de ses coefficients. Là encore, deux cas sont à envisager.

$\llbracket \sigma_0 \rrbracket = 0$  Les solutions à l'ordre 1  $u^1, w^1, \sigma^1, \tau^1, \gamma^1, c^1$  sont nulles, et  $p^1$  est une constante dans tout le domaine. La stabilité est donc gérée par le système à l'ordre 2 qui donne lui aussi  $u^2, w^2, \sigma^2, \tau^2, \gamma^2, c^2$  nuls, mais avec  $p_k^2 = a_k$ . Ces deux constantes  $a_k$  sont telles que  $\llbracket p^2 \rrbracket = Sh^0$ . Remarquons que nous n'avons toujours pas pu calculer  $h^0$ , mais que l'écriture du système à l'ordre 3 va nous le donner. Ce système est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} p^2 \\ p^{3'} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} (1 - \alpha_k)m_k u^{3''} + \tau^{3'} = m_k u^{3''} \\ 0 \end{array} \right. \\ u^3 + w^{3'} = 0 \\ \sigma^3 = 4We_k \alpha_k m_k u'_0 u^{3'} \\ \tau^3 = \alpha_k m_k u^{3'} \\ \delta^3 = 2\alpha_k m_k w^{3'} \\ w^3(0) = -c^3 h^0 \\ u_k^3(\varepsilon_k) = 0 = w_k^3(\varepsilon_k) \\ \llbracket u^3 \rrbracket = 0 \\ \llbracket m_k u^{3'} \rrbracket = 0 \\ \llbracket -p^3 \rrbracket = -Sh^1. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{en } y = 0 \\ \text{avec } \varepsilon_1 = 1 \quad \varepsilon_2 = -\varepsilon \\ \text{et } \llbracket w^3 \rrbracket = 0 \end{array} \quad (4.38)$$

Connaissant  $p^2$ , l'écriture des trois conditions d'interface sur la vitesse nous permet d'exprimer  $h^0$  en fonction d'un coefficient  $a_2$  arbitraire :

$$h^0 = a_2 \frac{m_2^2 + 4m_2\varepsilon + 6m_2\varepsilon^2 + 4m_2\varepsilon^3 + \varepsilon^4}{Sm_2(m_2 + 3\varepsilon^2 + 4\varepsilon)}.$$

Si ce coefficient  $a_2$  est non nul, il se simplifie pour donner (on rappelle  $c^0 = 1, c^1 = 0 = c^2$ ) :

$$c^3 = -S \frac{\varepsilon^3(2m_2 + 3\varepsilon^3 + 5\varepsilon)}{3(m_2^2 + 4m_2\varepsilon + 6m_2\varepsilon^2 + 4m_2\varepsilon^3 + \varepsilon^4)}.$$

Donc l'écoulement sera stable si et seulement si  $\Re(iq(-iq^3c^3)) = \Re(q^4c^3) < 0$ , ce qui est toujours vrai.

Remarquons qu'il faudrait, à proprement parler, distinguer les cas où le coefficient arbitraire  $a_2$  est nul ou pas. C'est ce que nous avons fait en faisant une récurrence sur le type du système. Nous avons ainsi démontré que, si on cherche une solution non nulle, il y a forcément un ordre où le problème est celui que l'on vient de résoudre, ce qui clôt ce sous-sous-cas.

$\llbracket \sigma_0 \rrbracket \neq 0$  On revient à la résolution du système (4.37). La décomposition de la vitesse  $u_k^1, w_k^1$  dans la base  $(y - \varepsilon_k)^i$  donne un système de deux équations d'interface permettant de calculer les coefficients. Puis, avec ces formules, on calcule :

$$h^0 = -a \frac{m_2^2 + 4m_2\varepsilon + 6m_2\varepsilon^2 + 4m_2\varepsilon^3 + \varepsilon^4}{6m_2\varepsilon(1 + \varepsilon)\llbracket \sigma_0 \rrbracket}.$$

Ayant  $h^0$  dépendant d'un paramètre arbitraire  $a$ , on en déduit, si ce paramètre est non nul ;

$$c^1 = -\frac{\varepsilon^2\llbracket \sigma_0 \rrbracket(m_2 - \varepsilon^2)}{2(m_2^2 + 4m_2\varepsilon + 6m_2\varepsilon^2 + 4m_2\varepsilon^3 + \varepsilon^4)}.$$

De même, une récurrence montrerait que si  $a = 0$  et si on cherche une solution non nulle, on retombera sur le même problème.

La stabilité équivaut alors à

$$\llbracket \sigma_0 \rrbracket(m_2 - \varepsilon^2) > 0 \Leftrightarrow (m_2 - \varepsilon^2)\llbracket \frac{\alpha_k \text{We}_k}{m_k} \rrbracket > 0. \quad (4.39)$$

Comme  $\llbracket u'_0 \rrbracket = \frac{(m_2 - \varepsilon^2)(m_2 - 1)}{\varepsilon(1 + \varepsilon)m_2} = 0$ , on aura une instabilité purement élastique, dans le cas où les deux viscosités sont les mêmes.

$h^0 = 0$  ( $\Leftrightarrow c^0 \neq 1$ ) On ne peut connaître  $c^0$  avec le système à l'ordre 0 et on doit donc l'écrire à l'ordre 1, en sachant que  $p^0$  est constant dans tout le domaine. On trouve alors que  $u^1, w^1, \sigma^1, \tau^1, \delta^1, p^0, h^1$  sont nuls. Nous avons encore fait une récurrence sur le type du système pour montrer qu'à tout ordre, ce système était le même et donc qu'il n'admettait que des solutions nulles.

$\llbracket u'_0 \rrbracket \neq 0$  On trouve aisément que les grandeurs  $u^0, w^0, \sigma^0, \tau^0, \delta^0, h^0$  sont nulles et  $c^0$  indéterminé. De plus,  $p^0$  est une constante dans tout le domaine. Le système à l'ordre 1 se résout en :

$$\begin{aligned}
m_k u_k^1(y) &= \frac{a_0}{2}(y - \varepsilon_k)^2 + b_k(y - \varepsilon_k) \\
-m_k w_k^1(y) &= \frac{a_0}{6}(y - \varepsilon_k)^3 + \frac{b_k}{2}(y - \varepsilon_k)^2 \\
b_1 &= \frac{a_0}{3} \frac{m_2 - 3\varepsilon^2 - 2\varepsilon^3}{m_2 - \varepsilon^2} \\
b_2 &= \frac{a_0}{3} \frac{\varepsilon^3 - 2m_2 - 3m_2\varepsilon}{m_2 - \varepsilon^2} \\
h^1 &= -a^0 \frac{(m_2^2 + 4m_2\varepsilon + 6m_2\varepsilon^2 + 4m_2\varepsilon^3 + \varepsilon^4)}{6m_2(m_2 - \varepsilon^2)[[u_0']]} \\
c^0 &= 1 + \frac{2\varepsilon^2(1 + \varepsilon)m_2[[u_0']]}{(m_2^2 + 4m_2\varepsilon + 6m_2\varepsilon^2 + 4m_2\varepsilon^3 + \varepsilon^4)} \in \mathbb{R},
\end{aligned} \tag{4.40}$$

avec  $a_0$  une constante arbitraire que nous supposerons non nulle, et  $p^1$  une autre constante indépendante de  $k$ , *a priori* arbitraire, que nous noterons  $a^1$ . Ecrivons le système à l'ordre 2 :

$$\left\{ \begin{array}{l}
r_k \operatorname{Re} \left( (-c^0 + u_0) \begin{vmatrix} u^1 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_0' w^1 \\ 0 \end{vmatrix} \right) + \begin{vmatrix} p^1 \\ p^{2'} \end{vmatrix} = (1 - \alpha_k) m_k \begin{vmatrix} u^{2''} \\ w^{1''} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma^1 + \tau^{2'} \\ \tau^1 + \delta^{1'} \end{vmatrix} \\
u^2 + w^{2'} = 0 \\
\sigma^2 + \operatorname{We}_k ((-c^0 + u_0(y))\sigma^1 + \sigma_0' w^1 - 2u_0' \tau^2 - 2\sigma_0 u^1 - 2\tau_0 u^{2'}) = 2\alpha_k m_k u^1 \\
\tau^2 + \operatorname{We}_k ((-c^0 + u_0)\tau^1 + \tau_0' w^1 - u_0' \delta^1) = \alpha_k m_k u^{2'} \\
\delta^2 + \operatorname{We}_k ((-c^0 + u_0)\delta^1 - 2\tau_0 w^1) = 2\alpha_k m_k w^{2'} \\
w^2(0) = (-c^0 + u_0(0))h^2 + (-c^1)h^1 \\
u_k^2(\varepsilon_k) = 0 = w_k^2(\varepsilon_k) \\
[[u_0']]h^2 + [[u^2]] = 0 \quad \text{et} \quad [[w^2]] = 0 \\
[[ (1 - \alpha_k) m_k u^{2'} - \sigma_0 h^1 + \tau^2 ]] = 0 \\
[[ -p^2 + 2(1 - \alpha_k) m_k w^{1'} + \delta^1 ]] = -Sh^0 = 0.
\end{array} \right. \tag{4.41}$$

La première composante de la relation de conservation des moments nous donne une expression en fonction des deux constantes  $a^0$  et  $a^1$  :

$$\begin{aligned}
m_k u^{2''} &= a^1 + r_k \operatorname{Re} \left[ \frac{(-c^0 + u_0(y))}{m_k} \left( \frac{a^0}{2}(y - \varepsilon_k)^2 + b_k(y - \varepsilon_k) \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{u_0'(y)}{m_k} \left( \frac{a^0}{6}(y - \varepsilon_k)^3 + \frac{b_k}{2}(y - \varepsilon_k)^2 \right) \right] + \\
&\quad + \alpha_k \operatorname{We}_k [(-c^0 + u_0(y))a^0 - u_0'(y)(a^0(y - \varepsilon_k) + b_k) + \\
&\quad + u_0'' \left( \frac{a^0}{2}(y - \varepsilon_k)^2 + b_k(y - \varepsilon_k) \right)].
\end{aligned}$$

Nous avons décomposé la vitesse stationnaire dans la base  $(y - \varepsilon_k)^i$  afin de faciliter l'intégration de  $u^{2''}$  et de  $w^{2''}$ . Le résultat auquel on arrive est le suivant :

$$\begin{aligned}
-m_k w_k^2(y) &= \frac{a^1}{6}(y - \varepsilon_k)^3 + \frac{r_k \text{Re}}{m_k} \left[ \frac{\beta_k a^0 (y - \varepsilon_k)^7}{7 * 6 * 6 * 5} + \frac{\zeta_k a^0 (y - \varepsilon_k)^6}{3 * 4 * 5 * 6} + \right. \\
&\quad \left. + (-c^0 a^0 + \zeta_k b_k) \frac{(y - \varepsilon_k)^5}{5 * 4 * 3 * 2} - c^0 b_k \frac{(y - \varepsilon_k)^4}{2 * 3 * 4} \right] \\
&\quad - \alpha_k \text{We}_k (c^0 a^0 + \zeta_k b_k) \frac{(y - \varepsilon_k)^3}{6} + \frac{a_k^2}{2} (y - \varepsilon_k)^2,
\end{aligned} \tag{4.42}$$

avec  $\beta_k = -\frac{\varepsilon + m_2}{m_k \varepsilon (1 + \varepsilon)}$  et  $\zeta_k = -\frac{m_k \varepsilon (1 + \varepsilon) + (m_2 + \varepsilon) \varepsilon_k^2}{m_k \varepsilon_k \varepsilon (1 + \varepsilon)}$  deux coefficients de  $u_0(y)$  dans la base  $(y - \varepsilon_k)^i$ ,  $a^0$  et  $a^1$  deux constantes *a priori* arbitraires et  $b_k$  deux termes calculés à l'ordre 1 et qui dépendent linéairement en  $a^0$  (4.40). Le système à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} w^2(0) = (-c^0 + u_0(0))h^2 + (-c^1)h^1 \\ h^2 = \frac{[[w^{2'}]]}{[[u_0']] \\ [[w^2]] = 0 \\ [[(1 - \alpha_k)m_k u^{2'} + \tau^2]] = [[\sigma_0]]h^1. \end{cases} \tag{4.43}$$

La présence de deux constantes  $a^0$  et  $a^1$  aurait pu nous poser des problèmes. En effet, si l'on imagine d'exprimer  $a_1^2$  et  $a_2^2$  en fonction de  $a^0$  et  $a^1$  à partir de (4.43)<sub>c</sub> et (4.43)<sub>a</sub>, reporter dans (4.43)<sub>b</sub>, on aura un  $c^1$  qui, serait de la forme affine en  $\frac{a^1}{a^0}$  et donc donnerait autant la stabilité que l'instabilité. Un calcul précis, que nous ne reproduisons pas, montre qu'en fait le coefficient devant  $a^1$  est nul. Nous ne tiendrons donc plus compte de ce  $a^1$ . Le système obtenu se prête alors très bien à une résolution symbolique. Nous avons utilisé Maple et un programme donné en Annexe A. Nous donnons en Annexe A le résultat  $c^1$  (4.44) donné par P. Laure, qui, en plus tient compte de la stratification en densité. Nous l'étudierons numériquement en sous-section suivante.

Notons que notre résolution peut paraître longue et inutile, mais nous ne croyons pas qu'on puisse avoir des résultats rigoureux sans elle. En particulier, si  $[[u_0']] = 0$  et  $[[\sigma_0]] \neq 0$ , on a une instabilité dont nous n'avons pas trouvé trace dans la littérature. Cette instabilité est typiquement élastique et se produit dans le cas d'absence de stratification de viscosité.

### 4.2.3 Les résultats

Nous n'étudierons pas les formules de stabilité dans le cas  $[[u_0']] = 0$ ,  $c^0 = 1$ ,  $[[\sigma_0]] = 0$  car elles assurent la stabilité. De même, si  $[[u_0']] = 0$ ,  $c^0 = 1$  et  $[[\sigma_0]] \neq 0$ , car elles sont suffisamment simples (cf (4.39)).

En revanche, dans le cas  $[[u'_0]] \neq 0$ , les formules prennent plus d'une page, ce qui interdit d'en avoir une connaissance *a priori* entière à leur seule lecture (cf Annexe A.a). Les dépendances dans les 9 paramètres ( $m_2, \varepsilon, \alpha_1, \alpha_2, We_1, We_2, r, F, Re$ ) sont trop compliquées pour en tirer une loi simple. Nous avons programmé cette fonction  $c^1$  :

$$c^1 = \frac{iRe}{(1 + \varepsilon)^2} \frac{n_4(m_2, \varepsilon, r)}{d_1(m_2, \varepsilon)} + i\alpha_1 We_1 t_3(m_2, \varepsilon) + i\alpha_2 We_2 t_4(m_2, \varepsilon) + i \frac{Re(r - 1)}{F^2} t_1(m_2, \varepsilon). \quad (4.44)$$

Cette fonction nous a donné les mêmes résultats que celle fournie par P. Laure qui l'a obtenue par une étude asymptotique en fonction de courant et élimination de la pression. De plus, pour continuer de valider nos résultats asymptotiques, nous avons comparé, dans le cas viscoélastique avec la seule référence comparable [39] qui donne quelques valeurs pour la valeur propre asymptotique dans sa table I. Nous les avons retrouvées, ce qui semble valider nos résultats et ceux de P. Laure, qui coïncident.

Tout d'abord, nous avons dessiné les critères de stabilité du cas newtonien  $\alpha_1 We_1 = 0 = \alpha_2 We_2$  dans le plan  $m_2, \varepsilon$  sur la Figure 4.4. Les zones de stabilité sont signalées par un S et celles d'instabilité par un U. Dans le cas où les valeurs changent brutalement, nous avons doublé ces lettres.

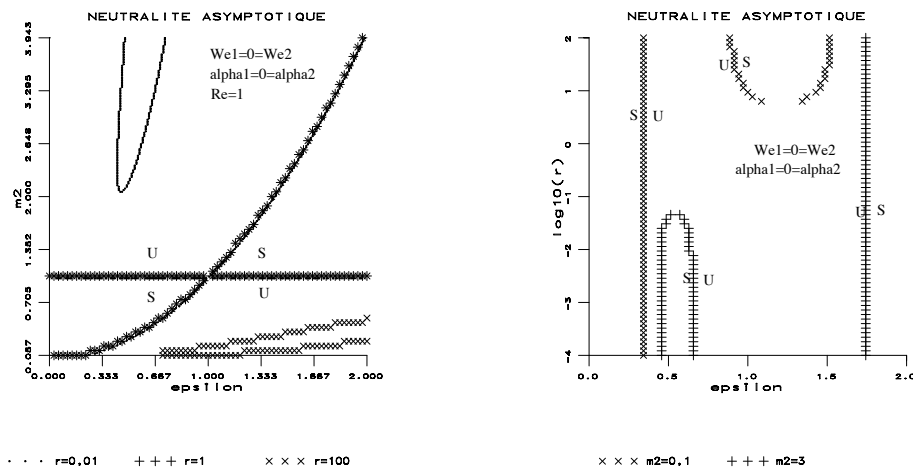


Figure 4.4: Stabilité asymptotique newtonienne

Sur le premier dessin, dans le plan  $m_2, \varepsilon$ , pour  $r = 1$ , on voit qu'il y a une parabole  $m_2 = \varepsilon^2$  et une droite  $m_2 = 1$  qui sont les courbes de neutralité. Ces deux lignes restent si on augmente  $r$  ou si on le diminue. Si  $r$  augmente beaucoup ( $r = 100$ ), une zone de stabilité apparaît. Celle-ci correspond à un arrangement de deux fluides pour lesquels le plus lourd et le moins visqueux est en dessous de l'autre. Symétriquement, si le fluide en-dessous prend moins de place mais est plus visqueux, diminuer son poids stabilise. Re-

marquons qu'un  $r$  de 100 ne correspond à aucun ordre de grandeur physique puisque, par exemple, le mercure n'a une densité que de 13,6. Dans le cas newtonien, ajouter de la masse au fluide qui est le moins visqueux ou en retirer à celui qui en prend le moins et qui est le plus visqueux, stabilise.

Nous avons également fait une coupe dans le plan  $r, \varepsilon$  des courbes de neutralité qui confirme la présence des poches de stabilité, si  $r$  est très différent de 1.

Retenons que, dans les conditions newtoniennes normales  $r = 1$ , si le fluide le plus visqueux prend moins de place, alors, l'écoulement est instable.

Vue la forme du coefficient  $c^1$ , nous avons pu nous intéresser au Re critique de franchissement de stabilité. Comme on le voit sur (4.44), cette expression est compliquée en  $m_2, \varepsilon$ , mais simple en  $\alpha_1 We_1$  ou  $\alpha_2 We_2$ . Nous avons donc tracé ce Re critique en fonction de la stratification en élasticité :  $MI := \frac{\alpha_2 We_2}{\alpha_1 We_1}$  pour différents rapports de viscosité  $m_2$ . Comme semble le montrer la Figure 4.5, si le fluide dans la tranche la plus fine est moins visqueux, la pente de ce Re critique en fonction de la stratification d'élasticité est positive. Ceci signifierait que l'augmentation de l'élasticité de ce fluide rendra plus stable. En revanche, si il est moins visqueux, on a intérêt à la diminuer.

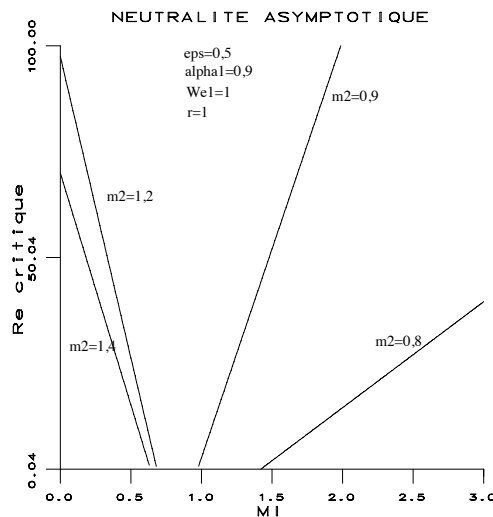
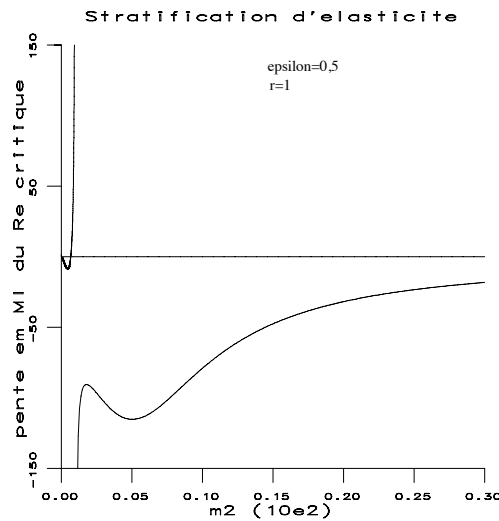


Figure 4.5: Dépendance du Re critique en fonction de  $\frac{\alpha_2 We_2}{\alpha_1 We_1} = MI$

Pensant avoir trouvé une loi simple, et qui compléterait l'effet de lubrification, nous avons voulu vérifier si le signe de la pente du Re critique ne dépendait que du signe de  $m_2 - 1$ . Comme on le voit sur la Figure 4.6, ce n'est en fait pas vrai. La règle s'applique si  $m_2 > 1$ , car le signe de la pente est bien négatif, mais pas pour  $m_2 < 1$ .

Nous avons donc regardé plus précisément pour  $m_2 < 1$  en haut à gauche de la Figure 4.7 la dépendance en le rapport de viscosité. Comme on le voit, si  $\varepsilon$  augmente, l'écoulement a plutôt tendance à se stabiliser sans que l'effet soit manifeste ni linéaire. En particulier, si  $r$  augmente ( $r = 10$  sur le dessin de droite), une double singularité apparaît pour les

Figure 4.6: Signe de la pente en  $MI$  du  $Re$  critique

assez petits  $m_2$ , qui fait que le signe ne peut être garanti. Une infime variation en  $m_2$  peut changer complètement l'état du système. Bien qu'on ne puisse pas jouer beaucoup sur  $r$ , l'augmenter rend globalement moins instable. Signalons que,  $F$  étant pris infini,  $r$  ne mesure que la stratification d'inertie.

L'effet de la pesanteur se voit sur le graphique du bas de la même Figure 4.7 et met bien en évidence son effet stabilisateur puisqu'on n'a plus de singularité aux  $m_2$  petits. Les résultats étant de plus en plus difficiles à comprendre physiquement, nous sommes revenus à la valeur du  $Re$  critique en fonction de  $m_2$  pour différents rapports de viscosité. On voit assez bien sur la Figure 4.8 que, dans les conditions des graphiques, augmenter l'élasticité du fluide le moins visqueux stabilise. On a déjà vu que cette règle n'est pas universelle. On voit également, qu'une loi de lubrification qui s'énonce comme "moins un fluide dans une couche fine est visqueux ou élastique, plus l'écoulement est stable". Cependant, cette règle s'applique, d'ordinaire, plus à des écoulements coaxiaux.

Nous avons également étudié l'influence de l'élasticité quand  $Re=0$ . Nous avons fixé les paramètres du fluide 1 ( $\alpha_1, We_1$ ) et avons dessiné les courbes de neutralité dans le plan  $\varepsilon, m_2$  pour différents  $MI = \frac{\alpha_2 We_2}{\alpha_1 We_1}$ . Comme on le voit sur la Figure 4.9, on retrouve la parabole  $m_2 = \varepsilon^2$  comme courbe de neutralité, avec en plus deux branches, l'une au-dessus, l'autre en-dessous de la parabole, qui se voient dès  $MI = 0$ . Quand il y a franchissement brutal de la zone de neutralité, nous avons mis des SS et UU correspondant sur le graphique. Typiquement, les valeurs passaient de  $10^{10}$  à  $-10^{10}$  ! Nous ne savons pas si cela est utilisable expérimentalement. Quand  $MI$  augmente de 0 à 1, les "pétales" s'écartent, ce qui augmente autant la zone d'instabilité (en gros la région au-dessus de la parabole et de  $m_2 = 1$ ) que celle de stabilité. Finalement, pour de grands  $MI$ , la courbe de neutralité se ramène presque à la parabole, avec le domaine de stabilité en-dessous et celui d'instabilité au-dessus.

De plus, nous avons dessiné dans la Figure 4.9 les courbes de neutralité pour différentes

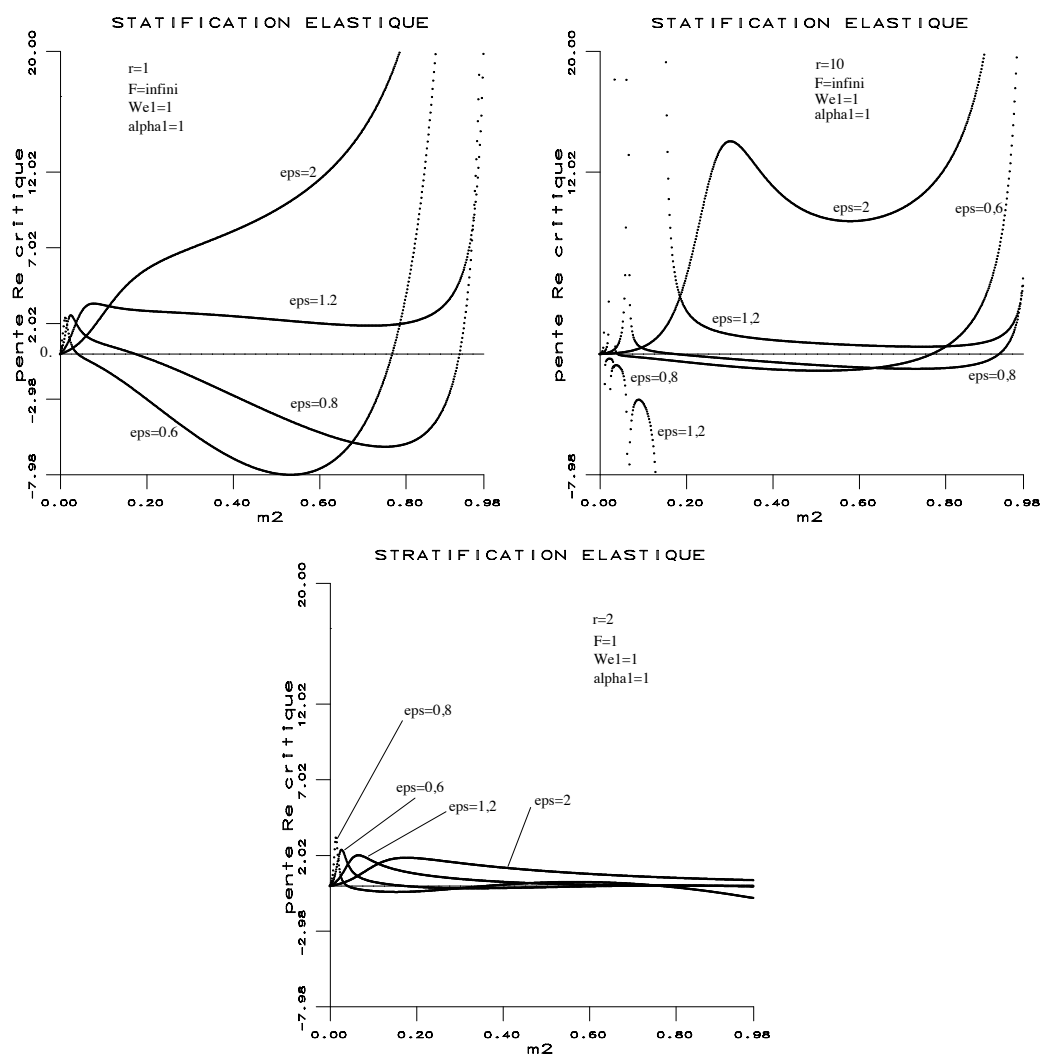


Figure 4.7: Pente du Re critique pour différents  $\epsilon$ -Effets de l'inertie et de la pesanteur



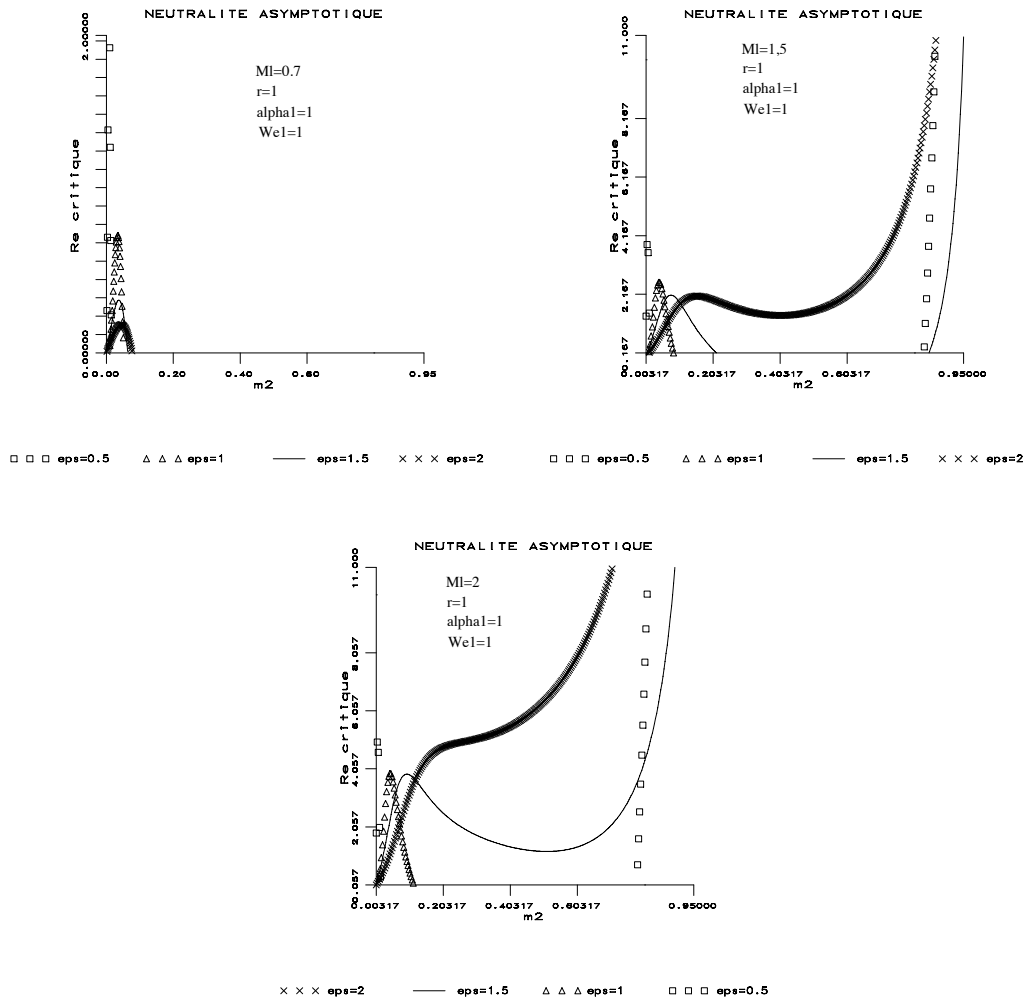


Figure 4.8: Re critique pour différents  $\varepsilon$ .

valeurs de  $\varepsilon$  dans le plan  $m_2, Ml$ , toujours à  $Re=0$ . Là encore, il faut bien reconnaître qu'il est difficile de donner une loi simple. On peut cependant dire que, si on a un écoulement dans les conditions du graphique, on peut avoir intérêt à augmenter  $m_2$  et  $Ml$  pour rendre plus stable.

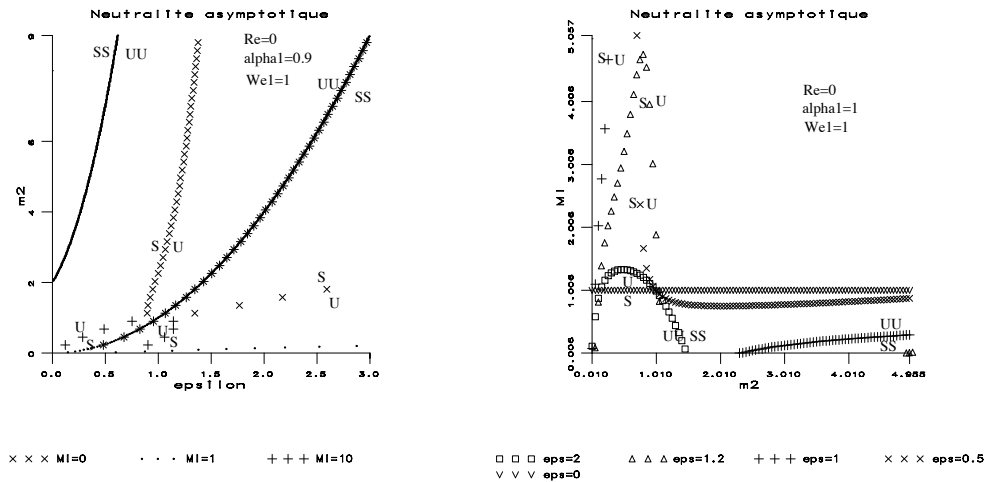


Figure 4.9: Influence de la stratification d'élasticité sur la neutralité

Enfin, nous avons souhaité retrouver les graphiques asymptotiques 3(a) et 3(b) de [39]. Le premier cas  $Re=0,1$ , reproduit en Figure 4.10 gauche est bien le même. Cependant, le deuxième ( $Re=0,5$ ) n'est pas le même, la langue de stabilité s'arrêtant plus bas pour Su Khomami que pour nous (les formules de P. Laure et les nôtres, donnent les mêmes résultats). Nous n'avons pu conclure sur cette différence qu'en section suivante.

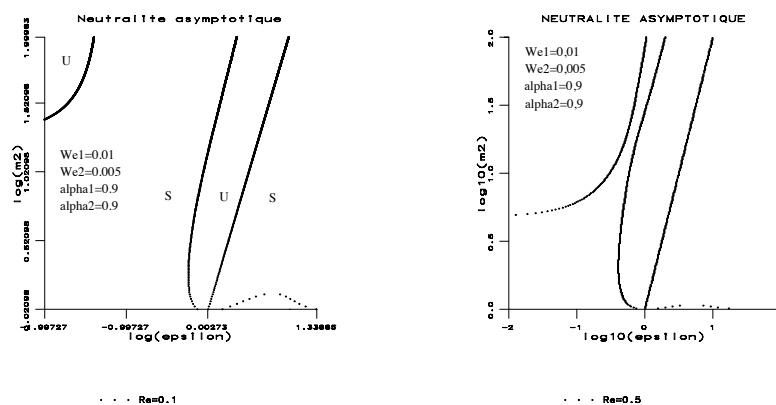


Figure 4.10: Influence de l'inertie sur la neutralité

Pour conclure, nous devons reconnaître que l'étude de la fonction  $c^1$  des 9 paramètres ne donne pas de loi simple. La lecture de la littérature ne nous a pas donné plus de certitude. Nous voudrions voir cette étude asymptotique comme un pas vers un programme qui donne les régions de stabilité autour des conditions d'un écoulement donné expérimentalement, c'est à dire plus comme un outil. Il n'y a que dans le cas newtonien qu'une règle se dessine, mais elle n'est pas nouvelle.

### 4.3 Etude non asymptotique

On vient de voir la difficulté d'étudier une fonction de 9 variables. Nous ajoutons maintenant l'étude d'un paramètre de plus, la longueur d'onde avec l'étude du système (4.19) par une méthode numérique programmée par P. Laure, S. Scotto et Y. Demay [74]. Cette méthode est décrite en sous-section suivante et utilisée ensuite.

#### 4.3.1 Une deuxième méthode numérique

Nous avons déjà exposé une méthode dite  $QZ$  de résolution du problème de valeurs propres généralisées. Pour le problème d'un fluide, les résultats qu'elle donne sont bons. P. Laure a réécrit l'assemblage des matrices pour deux fluides et testé la résistance du programme. Hélas, cette première méthode ne permettait d'atteindre des fréquences de coupure que de 13. On peut peut-être expliquer cette limitation en rappelant que tout développement spectral a une convergence limitée par la régularité maximale. Or, ici, les fonctions ne sont pas  $C^1$ . A cause également du problème des valeurs propres parasites, il a fallu développer un autre algorithme. Celui-ci ne recherche plus tout le spectre du problème aux valeurs propres généralisées :

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{X}} = s \underline{\underline{B}} \underline{\underline{X}}.$$

L'algorithme retenu et programmé par P. Laure, S. Scotto et Y. Demay est celui dit d'Arnoldi (cf [74]). Il repose sur quatre ingrédients :

- $\underline{\underline{A}}$  est inversible, donc le problème revient à chercher  $s, \underline{\underline{X}}$  tels que  $\underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{X}} = \frac{1}{s} \underline{\underline{X}}$
- Les espaces de Krylov de  $\underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{B}} : K_m(\underline{\underline{X}}) = \langle \underline{\underline{X}}, \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{X}}, \dots, (\underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{B}})^m \underline{\underline{X}} \rangle$
- L'orthonormalisation de Gramm-Schmidt
- Le décalage :  $\underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{B}} := \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{B}} - \omega \underline{\underline{I}}$

Si l'on prend une valeur de  $m$  pas trop grande (10 par exemple), et que l'on choisit un vecteur  $\underline{\underline{X}}$  quelconque non nul, on peut orthonormaliser la famille des  $m$  premiers itérés de  $\underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{B}}$  sur  $v$ . A partir de maintenant, nous oublions les barres sous les matrices et les vecteurs, laissant au contexte le soin de préciser. Matriciellement, on calcule

les  $m$  premiers itérés de  $(A^{-1}B - \omega I)$  sur ce vecteur  $v$ . Ces vecteurs, notés  $(v_i)$  sont orthonormalisés par Gramm-Schmidt :

$$h_{j+1,j}v_{j+1} := (A^{-1}B - \omega I)v_j - \sum_1^j h_{i,j}v_i,$$

où les  $h_{i,j}$  sont tels que  $v_{j+1} \perp v_i \forall i = 1, j$  et  $\|v_{j+1}\| = 1$ . On construit en même temps une matrice  $H_m = (h_{i,j})$  et une matrice  $V_m \in \mathcal{M}_{m,n}$  des vecteurs orthonormalisés. L'orthonormalisation de Gramm-Schmidt se traduit, matriciellement, par ;

$$(A^{-1}B - \omega I)V_m = V_m H_m + h_{m+1,m}v_{m+1}e_m^T,$$

où  $e_m$  est le vecteur de  $\mathbb{R}^m : (0, \dots, 0, 1)^T$  et  $H_m$  est la matrice des  $h_{i,j}$  déjà définie. Elle est de Hessenberg supérieure. Cette relation montre que, si  $u$  est vecteur propre de  $H_m$ , alors  $V_m u$  vérifie :

$$(A^{-1}B - \omega I)(V_m u) = \lambda(V_m u) + h_{m+1,m}(v_{m+1} e_m^T u).$$

Donc,  $V_m u$  sera une approximation d'un vecteur propre de  $(A^{-1}B - \omega I)$ , avec, en plus, un contrôle sur l'erreur. Tout le problème est alors de calculer les vecteurs propres de  $H_m$  qui étant petite et de Hessenberg supérieure (cf [75]) est aisément réduite.

Numériquement, P. Laure utilise les fonctions du BLAS qui, sur CRAY ont les meilleurs résultats. En plus, celles-ci étant parallélisés par leurs concepteurs, l'exécution sur 1,7 processeur sur 4 est courante. C'est un bon résultat même comparé aux codes moyennement parallélisés.

De plus, les inversions sont faite grâce à la routine CGETRS qui utilise la préparation à l'inversion faite par CGETRF. Les produits matrice vecteur sont aussi faits par une routine du BLAS (CGEMV). Donc, les inversions, assez nombreuses, sont en fait peu coûteuses. Le programme qui nous a été fourni par P. Laure calcule, pour des grandeurs données, la valeur propre de plus grande partie réelle sur un ensemble de  $m(=10)$  valeurs. Une telle exécution ne prend que de l'ordre de 6s sur un CRAY monoprocésseur pour des fréquences de coupure de 30. Nous avons alors étendu ce programme pour balayer des gammes de paramètres et chercher des valeurs critiques du Re.

### 4.3.2 Les résultats

Dans cette sous-section, nous donnons les résultats de l'utilisation du programme de recherche de stabilité basé sur le programme de P. Laure. Comme nous l'avons déjà souligné, nous ne pourrons pas dégager une règle simple qui permette d'améliorer les procédés industriels de mise en forme, mais nous essaierons de simplifier notre discours. Tout d'abord, nos résultats asymptotiques différant de ceux de [39], nous avons souhaité tester le graphique correspondant avec notre programme de recherche de stabilité. Le résultat est montré en Figure 4.11 pour un nombre d'onde de 0,03.

Comme on le voit, notre étude asymptotique est validée, et les résultats de Su et Khomami en asymptotique semblent discutables. En fait la différence vient peut-être

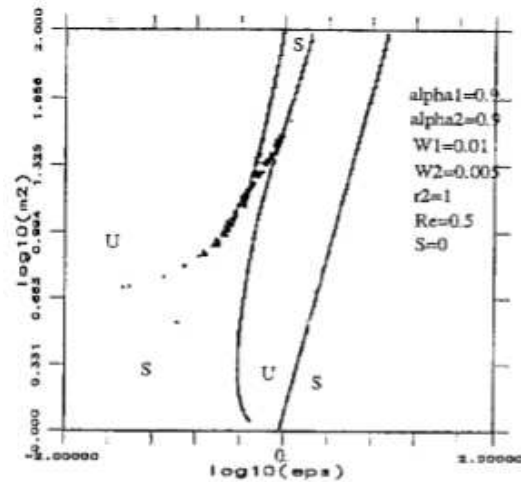


Figure 4.11: Neutralité quasi asymptotique

du choix du nombre de points pour le graphique 3(b) de [39] et de l'existence d'une zone ambiguë où la valeur propre semble petite. Notons que nous n'avons pas balayé tout le domaine avec la même précision. Nous avons fait une routine qui raffine là où cela semble intéressant. Même comme cela, le dessin 4.11 a demandé environ 55 heures de CRAY.

Nous avons alors étudié la valeur du  $Re$  critique pour différentes combinaisons des autres paramètres en fonction de notre nouvelle variable  $q$ . Par symétrie, on peut supposer que l'épaisseur du fluide en dessous est inférieure à celle du fluide au-dessus (nous avons choisi  $\varepsilon = 0,5$ ). Nous sommes intéressé par des rapports d'élasticités supérieurs ou inférieurs à 1, et, d'autre part par des rapports de viscosité eux aussi soit assez inférieurs, soit assez supérieurs à 1. Nous avons choisi les valeurs suivantes :

	$m_2 = 0,1 < 1$	$m_2 = 3 > 1$
$\frac{We_2}{We_1} = 10 > 1$	Figure 4.12	Figure 4.13
$\frac{We_2}{We_1} = 0,1 < 1$	Figure 4.12	Figure 4.13

On voit bien sur ces graphiques, que les renseignements asymptotiques ne doivent pas être pris pour argent comptant. En effet le  $Re$  critique diminue considérablement avec  $q$  dans presque toutes les configurations. Par exemple dans le cas  $m_2 = 0,1$  et  $\frac{We_2}{We_1} = 0,1 < 1$  (4.12) qui semble assez proche de l'effet de lubrification (la couche la plus fine est la moins visqueuse et la moins élastique, pour encaisser les gradients de vitesse et de contrainte) où l'instabilité se produit pour des  $Re$  aussi petits que l'on veut puisque, aux ondes très courtes ( $q$  grand), le  $Re$  est très petit. Physiquement, on peut quand même espérer dans la valeur de la tension superficielle pour stabiliser et permettre un  $Re$  acceptable.

Le phénomène est très similaire pour le cas  $\frac{We_2}{We_1} = 10, m_2 = 0,1 < 1$  (cf 4.12). Le nombre de Reynolds plateau que l'on croit voir ne dépend en fait que du pas de discrétisation

du plan  $q, Re$  que nous avons choisi et, encore une fois, l'écoulement sera instable pour tout  $Re$  si on néglige les forces de tension superficielle.

De même, si  $\frac{We_2}{We_1} = 10 > 1$ ,  $m_2 = 3 > 1$ , on voit le nombre de Reynolds diminuer avec la fréquence d'excitation et atteindre la limite de résolution de notre discrétisation du plan  $q, Re$ . On en déduit donc que le  $Re$  limite est nul.

En revanche, il est plus intéressant de voir sur 4.13 dans le cas  $\frac{We_2}{We_1} = 0, 1 < 1$ ,  $m_2 = 3 > 1$  que dans cette configuration, le  $Re$  critique ne tend plus vers 0 quand  $q$  tend vers l'infini. En fait, cette fois, c'est l'étude asymptotique qui donnera les conditions limites alors qu'elle était loin d'être, jusqu'à présent, le facteur limitant.

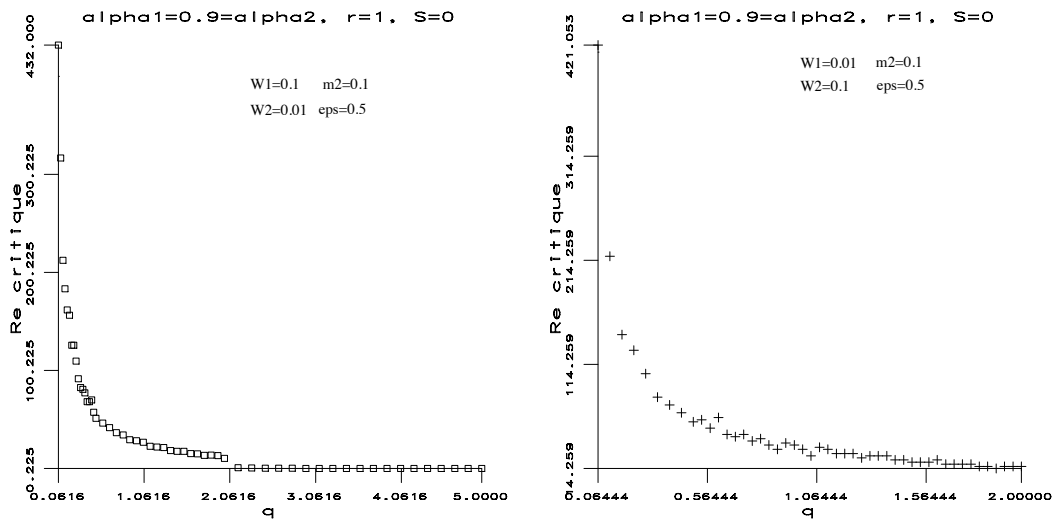


Figure 4.12: Dépendance en la longueur d'onde

Enfin, puisque la stabilité est définie par l'absence de toute instabilité, nous avons voulu trouver la valeur la plus grande du  $Re$ , pour laquelle, quel que soit  $q$ , on a stabilité. Nous donnons en Figure 4.14 le graphe de cette fonction de  $We_2$ , à  $We_1$  donné. Nous avons pris une gamme de  $q \in [0, 01; 5]$  et un incrément d'environ 0,15 sur  $q$ . On constate que l'augmentation de l'élasticité destabilise l'écoulement. Ce résultat avait déjà été constaté pour des écoulements de Poiseuille plan. Nous espérons qu'il ne reste pas pour des écoulements axisymétriques dont on a dit en introduction qu'ils étaient beaucoup stabilisés par un tout petit peu d'élasticité.

Finalement, on retiendra qu'un écoulement pour lequel le fluide dans la couche la plus fine est plus visqueux et moins élastique, est plus stable aux ondes courtes qu'aux ondes longues. Le phénomène s'inverse pour toutes les autres combinaisons dans lesquelles les ondes longues sont assez stables et les ondes courtes instables, à  $Re$  donné. Donc, avec l'influence fortement stabilisatrice, aux ondes courtes, de la tension superficielle  $S$ , ce dernier type d'écoulement, de Poiseuille plan, sera stable pour une valeur non nulle de  $Re$ . Donc, en fonction du type d'instabilité, du rapport de viscosité, et de l'épaisseur

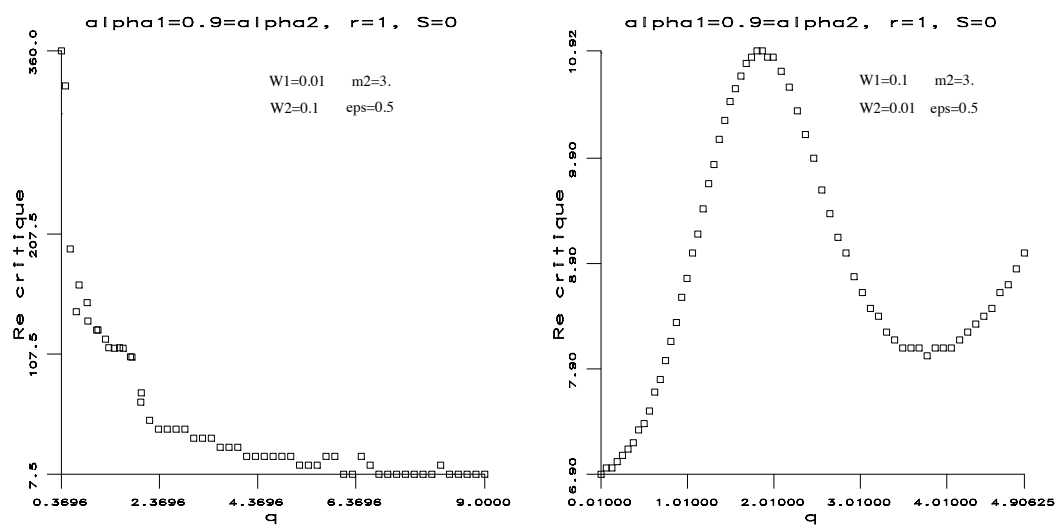
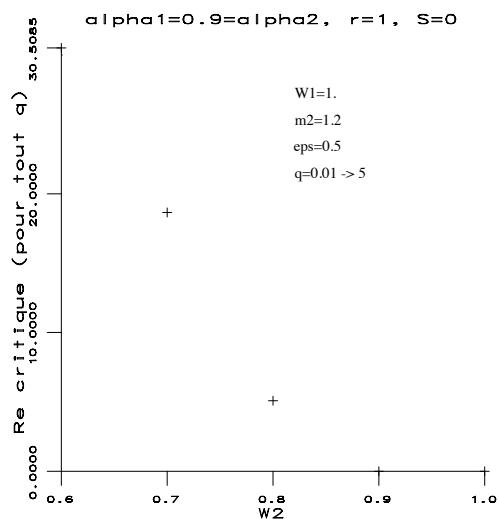


Figure 4.13: Dépendance en la longueur d'onde

Figure 4.14: Maximum sur  $q$  des Re critiques en fonction de  $W_2$

de la couche du bas, nous proposons soit d'augmenter l'élasticité de cette dernière pour revenir à un écoulement du type de la Figure 4.12, soit de se ramener à un écoulement du type de la deuxième courbe de la Figure 4.13.

En conclusion à cette étude non asymptotique, nous souhaiterions reconnaître la difficulté de tirer un enseignement clair de nos calculs. Même si nous proposons une solution qui dépend du type d'instabilité (longue ou courte), nous n'avons pas étudié toute la gamme des paramètres et nous ne pouvons pas garantir que cette solution convienne pour tout type d'écoulement. En fait, n'étant même pas sûrs de l'adéquation des équations avec la réalité, nous nous garderons bien d'être trop péremptoire.

Cependant, nous pensons pouvoir inscrire cette étude dans le cadre de l'écriture d'un programme, à vocation de recherche dans un premier temps et éventuellement industriel, permettant, pour des écoulements simples, de prédire la stabilité. C'est ici qu'une forte interaction avec les expérimentateurs sera nécessaire, pour déterminer les valeurs des paramètres de fluides viscoélastiques et tester si les modèles choisis sont les bons. Nous avons déjà pu voir, lors de plusieurs réunions du GdR 901 "Rhéologie et transformation des polymères fondus" que la demande existait, en informations sur la stabilité. C'est donc maintenant à nous de répondre à cette demande.





# Chapter 5

## Conclusions

Dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes intéressés à différents aspects des écoulements de fluides viscoélastiques avec interface ou frontière libre. Nous avons commencé par étudier les écoulements simples, monodimensionnels, de plusieurs fluides obéissant aux lois de Johnson-Segalman, PTT et MPTT dont nous avons montré qu'ils ont toujours au moins une solution. Nous avons donné des critères simples d'unicité. En plus de résultats sur la non-explosion de l'écoulement de Poiseuille/Couette, nous avons étudié la stabilité de l'écoulement de Couette d'un fluide de type PTT ou MPTT. Ces résultats sur PTT et MPTT nous ont amenés à proposer une modification de ces lois constitutives tenant compte des avantages et des inconvénients de ces deux modèles. Nous avons également démontré l'existence en temps petit, pour toute donnée initiale de l'écoulement d'un fluide viscoélastique avec une frontière libre et un domaine non borné.

Enfin, nous nous sommes intéressé à la stabilité de l'écoulement de Poiseuille de plusieurs fluides sous perturbations bidimensionnelles. Grâce à un formalisme propre, nous avons mis en évidence une hypothèse de la littérature, dont nous avons donné un critère mathématique équivalent, que nous tenterons de démontrer. Puis, nous avons fait l'analyse asymptotique complète de cet écoulement, complétée par une étude numérique de tout le spectre dans le cas d'une géométrie plane.



# Chapter A

## Formules asymptotiques

Nous avons utilisé le programme MAPLE suivant pour résoudre le problème (4.43) :  
annexes/pgmMAPLE

Nous donnons ci-après la formule de  $c^1$ . Comme les résultats que l'on trouve si  $[[u'_0]] \neq 0$  sont numériquement les mêmes que ceux de P. Laure, nous donnons les siens, qui tiennent compte de la pesanteur, avec la convention :

$$c^1 = \frac{i\text{Re}}{(1 + \varepsilon)^2 d_1} n_4(m_2, \varepsilon, r) + i\alpha_1 \text{We}_1 t_3(m_2, \varepsilon) + i\alpha_2 \text{We}_2 t_4(m_2, \varepsilon) + i \frac{\text{Re}(r - 1)}{F^2} t_1(m_2, \varepsilon).$$

---

$$\begin{aligned} n_4 = & m_2^9 - 126 m_2^8 \varepsilon^3 - 32 m_2^3 \varepsilon^{14} r - 224 m_2^6 \varepsilon^3 r + 672 \varepsilon^{10} m_2^2 - 944 \varepsilon^8 m_2^3 + 16 \varepsilon^4 m_2^5 \\ & - 32 m_2^6 \varepsilon^2 + 512 m_2^7 \varepsilon^6 - 88 m_2^8 \varepsilon^4 + 224 m_2^7 \varepsilon^7 + 6 m_2^9 \varepsilon + 1486 \varepsilon^{11} m_2^2 \\ & - 10 \varepsilon^2 m_2^8 + 2 m_2^7 \varepsilon - 8 m_2^8 \varepsilon - 122 \varepsilon^3 m_2^6 + 42 \varepsilon^2 m_2^7 + 1088 \varepsilon^8 r m_2^3 + 512 \varepsilon^{10} r m_2^2 \\ & - 126 \varepsilon^{13} r m_2 - 392 \varepsilon^4 r m_2^5 - 10 \varepsilon^{14} r m_2 - 224 \varepsilon^5 r m_2^4 - 88 \varepsilon^{12} r m_2 + 2 \varepsilon^{15} r m_2^2 \\ & + 224 \varepsilon^9 r m_2^2 + 60 \varepsilon^{11} r m_2^2 - 8 \varepsilon^{15} r m_2 + 6 \varepsilon^{15} r - \varepsilon^{16} r m_2 - m_2^8 + \varepsilon^{16} r \\ & + 672 \varepsilon^6 r m_2^7 + 1306 \varepsilon^{10} m_2^3 + 376 \varepsilon^5 r m_2^6 \\ & + 1486 \varepsilon^5 r m_2^7 - 651 \varepsilon^4 r m_2^6 - 1638 \varepsilon^5 r m_2^5 - 406 \varepsilon^7 r m_2^6 + 288 \varepsilon^{10} r m_2^5 - 858 \varepsilon^6 r m_2^5 \\ & + 16 \varepsilon^{12} r m_2^4 + 564 \varepsilon^{11} r m_2^4 - 1156 \varepsilon^{10} r m_2^4 - 1431 \varepsilon^8 r m_2^5 + 224 \varepsilon^3 r m_2^7 + 1306 \varepsilon^6 r m_2^6 \\ & - 122 \varepsilon^{13} r m_2^3 - 624 \varepsilon^{11} r m_2^3 + 197 \varepsilon^{12} r m_2^3 + 664 \varepsilon^7 r m_2^5 - 880 \varepsilon^9 r m_2^4 + 1287 \varepsilon^8 r m_2^4 \\ & + 1043 \varepsilon^4 r m_2^7 - 944 \varepsilon^8 r m_2^6 - 125 \varepsilon^{12} m_2^2 r - 406 \varepsilon^9 m_2^3 + 2180 \varepsilon^9 m_2^3 r - 258 \varepsilon^7 m_2^4 r \\ & - 1120 \varepsilon^6 m_2^4 r + 248 \varepsilon^3 m_2^7 + 42 \varepsilon^{14} m_2^2 r + 248 \varepsilon^{13} m_2^2 r + 356 \varepsilon^{10} m_2^3 r + 1287 \varepsilon^8 m_2^5 \\ & - 125 \varepsilon^4 m_2^7 + 356 \varepsilon^6 m_2^6 - 858 \varepsilon^{10} m_2^4 + 2180 \varepsilon^7 m_2^6 - 224 \varepsilon^{11} m_2^5 - 1120 \varepsilon^{10} m_2^5 \\ & + 60 \varepsilon^5 m_2^7 + 1088 \varepsilon^8 m_2^6 - 258 \varepsilon^9 m_2^5 + 1043 \varepsilon^{12} m_2^2 + 376 \varepsilon^{11} m_2^3 + 224 \varepsilon^{13} m_2^2 \\ & - 392 \varepsilon^{12} m_2^4 - 224 \varepsilon^{13} m_2^3 - 1524 \varepsilon^7 m_2^4 + 564 \varepsilon^5 m_2^5 + 288 \varepsilon^6 m_2^4 + 197 \varepsilon^4 m_2^6 \\ & - 880 \varepsilon^7 m_2^5 - 1638 \varepsilon^{11} m_2^4 - 1156 \varepsilon^6 m_2^5 + 664 \varepsilon^9 m_2^4 - 1524 \varepsilon^9 r m_2^5 - 651 \varepsilon^{12} m_2^3 \\ & - 624 \varepsilon^5 m_2^6 - 1431 \varepsilon^8 m_2^4 \end{aligned}$$

---


$$\begin{aligned}
d_1 = & 420m_2^2(12m_2^5\varepsilon^3 + 18m_2^5\varepsilon^2 + 48m_2^2\varepsilon^{10} + 144m_2^2\varepsilon^9 + 12m_2\varepsilon^{11} + 48m_2^4\varepsilon^6 + 48m_2^2\varepsilon^6 \\
& + 64m_2^3\varepsilon^9 + 64m_2^3\varepsilon^3 + 207m_2^4\varepsilon^4 + 48m_2^4\varepsilon^2 + 12m_2\varepsilon^9 + 828m_2^3\varepsilon^6 + 207m_2^2\varepsilon^8 + m_2^6 \\
& + 144m_2^2\varepsilon^7 + 12m_2^5\varepsilon + 144m_2^4\varepsilon^3 + \varepsilon^{12} + 144m_2^4\varepsilon^5 + 288m_2^3\varepsilon^4 + 648m_2^3\varepsilon^5 + 288m_2^3\varepsilon^8 \\
& + 18m_2\varepsilon^{10} + 648m_2^3\varepsilon^7)
\end{aligned}$$


---

$$\begin{aligned}
t_3 = & -\frac{1}{3}(m_2 - \varepsilon^2)(60\varepsilon^6m_2 - 16m_2^5\varepsilon^3 + 123m_2^4\varepsilon^4 + 8m_2\varepsilon^{11} - 32m_2^4\varepsilon^6 - 216m_2^3\varepsilon^7 + 11m_2^5\varepsilon^2 \\
& - 26m_2^2\varepsilon^6 - 16m_2^3\varepsilon^9 - 8m_2^5\varepsilon^4 + 176m_2^4\varepsilon^3 + 79m_2^4\varepsilon^2 + 2m_2^6\varepsilon - 32m_2^2\varepsilon^{10} + 242m_2\varepsilon^9 \\
& - 188m_2^3\varepsilon^5 + 184\varepsilon^7m_2 - 66m_2^3\varepsilon^4 + 16\varepsilon^5m_2^2 + 12\varepsilon m_2^4 - 4\varepsilon^4m_2^2 - 12\varepsilon^2m_2^3 - 142m_2^2\varepsilon^8 \\
& + 287\varepsilon^8m_2 - 94m_2^2\varepsilon^9 + 99m_2\varepsilon^{10} - 88m_2^3\varepsilon^8 + 10m_2^5\varepsilon - 96m_2^2\varepsilon^7 - 16m_2^4\varepsilon^7 - 40m_2^3\varepsilon^3 \\
& - 254m_2^3\varepsilon^6 + 3m_2^5 + 3\varepsilon^{12} + 16\varepsilon^{11} - 12\varepsilon^8 + 11\varepsilon^{10} - 12\varepsilon^9 + 28m_2^4\varepsilon^5) / ((\varepsilon + 1)^2 \\
& (4m_2\varepsilon^3 + \varepsilon^4 + 6m_2\varepsilon^2 + m_2^2 + 4\varepsilon m_2)^3)
\end{aligned}$$


---

$$\begin{aligned}
t_4 = & -\frac{1}{3}(m_2 - \varepsilon^2)(-242m_2^5\varepsilon^3 + 142m_2^4\varepsilon^4 - 10m_2\varepsilon^{11} + 12m_2^3\varepsilon^{10} + 26m_2^4\varepsilon^6 + 188m_2^3\varepsilon^7 \\
& - 99m_2^5\varepsilon^2 - 184m_2^5\varepsilon^5 + 32m_2^2\varepsilon^6 + 40m_2^3\varepsilon^9 - 287m_2^5\varepsilon^4 + 94m_2^4\varepsilon^3 + 32m_2^4\varepsilon^2 - 16m_2^6\varepsilon \\
& - 79m_2^2\varepsilon^{10} + 16m_2\varepsilon^9 - 3m_2\varepsilon^{12} + 12\varepsilon^4m_2^6 + 216m_2^3\varepsilon^5 - 11m_2^6\varepsilon^2 - 60\varepsilon^6m_2^5 + 88m_2^3\varepsilon^4 \\
& + 16\varepsilon^5m_2^2 - 123m_2^2\varepsilon^8 + 8\varepsilon^8m_2 - 176m_2^2\varepsilon^9 - 11m_2\varepsilon^{10} + 66m_2^3\varepsilon^8 - 8m_2^5\varepsilon - 28m_2^2\varepsilon^7 \\
& - 16m_2^4\varepsilon^7 - 12m_2^2\varepsilon^{11} + 16m_2^3\varepsilon^3 + 254m_2^3\varepsilon^6 - 3m_2^6 + 4m_2^4\varepsilon^8 - 2\varepsilon^{11} + 12\varepsilon^3m_2^6 + 96m_2^4\varepsilon^5) / \\
& (m_2(\varepsilon + 1)^2(4m_2\varepsilon^3 + \varepsilon^4 + 6m_2\varepsilon^2 + m_2^2 + 4\varepsilon m_2)^3)
\end{aligned}$$


---

$$t_1 := \frac{1}{3} \frac{(\varepsilon + m_2) \varepsilon^3}{(4m_2\varepsilon^3 + \varepsilon^4 + 6m_2\varepsilon^2 + m_2^2 + 4\varepsilon m_2)}$$

# Chapter B

## Ordres de grandeurs

Nous donnons ci-après un tableau des valeurs des paramètres de différents fluides. Ce tableau permet de voir dans quelle mesure un fluide est visqueux, élastique ou habituel.

Nature du fluide	Température ( $K$ )	temps de relaxation $\lambda$ ( $s$ )	viscosité sans cisaillement ( $Pa s$ )	densité
eau	293	$\simeq 10^{-12}$	0,001	1
poly-methylsiloxane	303	$10^{-6}$	0,3	1,1
poly-methylsiloxane	398	$1,7 \cdot 10^{-4}$	100	1,1
polyéthylène BD	388	10	$2 \cdot 10^5$	$\simeq 0,9$
polyéthylène BD	513	0,1	3000	$\simeq 0,9$
polyéthylène HD	453	0,07	2000	$\simeq 0,9$
polyéthylène HD	493	0,05	1000	$\simeq 0,9$
2% Hydroxyéthylène en solution d'huile				
Primol	300	100	1000	$\simeq 1,2$
verre	300	$> 10^5$	$> 10^{18}$	



# Bibliography

- [1] L. Navier Mem. Acad. Sci 7(1827) 375-394
- [2] S.D. Poisson J. Ecole Polytechn. 13(1831) 1-174
- [3] S<sup>t</sup> Venant Acad. Sci Paris 17(1843)
- [4] G.G. Stokes Trans. Camb. Phil. Soc. 8 (1845) 287
- [5] J.-F. Agassant, P. Avenas, J.-Ph. Sergent *La mise en forme des matières plastiques* Editions technique et documentation (1989) 2nde édition
- [6] R.E. Nickell, R.I. Tanner et B. Caswell ‘The solution of viscous incompressible jet and free surface flows using finite element method’ J. Fluid Mech. 65 (1974) 189
- [7] M.J. Crochet et R. Keunings J. Non-Newtonian Fluid Mech., 7 (1980) 199
- [8] S.A. Trogdon et D.D. Joseph Rheol. Acta 20 (1989) 1
- [9] J. Batchelor et F. Horsfall ‘Die swell in elastic and viscous fluids’ Rubber and Plastics Research Assoc. of Great Britain Rapport 189
- [10] D.D. Joseph, J.E. Mattad et K. Chen ‘Delayed die swell’ J. Non-Newtonian Fluid Mech., 24 (1987) 31-65
- [11] D.D. Joseph, M. Renardy et J.C. Saut ‘Hyperbolicity and change of type in the flow of visco elastic fluids’ Arch. Ration. Mech. Anal. 87 (1985) 213
- [12] V. Delvaux et M.J. Crochet ‘Numerical simulation of delayed die swell’ Rheol. Acta, 19 (1990) 1-10
- [13] J.M. Piau, N. El Kissi et B. Tremblay ‘Influence of upstream instabilities and wall slip on melt fracture and sharkskin phenomena during silicones extrusion through orifice dies’ J. Non-Newtonian Fluid Mech., 34 (1990) 145-180
- [14] N. El Kissi et al. ‘The different capillary flow regimes of entangled PDMS : polymer slip at the wall, hysteresis and cork flow’ J. Non-Newtonian Fluid Mech., 37 (1990) 55-94



- [15] R.H. Moynihan, D.G. Baird et R. Ramanathan 'Additional observation on the surface melt fracture behavior of linear LPDE'  
J. Non-Newtonian Fluid Mech., 36 (1990) 255-263
- [16] J.P. Tordella 'An instability in the flow of molten polymers'  
Rheol. Acta 1 (1958) 216
- [17] M.S. Green et A.V. Tobolsky J. Chem. Phys. 14 (1946) 80
- [18] J.J. Pesce *Incidence de l'orientation moléculaire d'un polymère fondu en écoulement sur l'anisotropie induite des propriétés à l'état solide* Thèse de l'université Louis Pasteur Strasbourg (1993)
- [19] M.W. Johnson Jr et D. Segalman J. Non-Newtonian Fluid Mech., 2(1977) 225
- [20] R.J. Gordon Schowalter Trans. Soc. Rheol. 16 (1972) 79
- [21] C. Guillopé et J.C. Saut ; Global existence and one-dimensional nonlinear stability of shearing motions of viscoelastic fluids of Oldroyd type  
*M<sup>2</sup>AN Vol. 24 n° 3, (1990) 369-401*
- [22] M. Fortin et D. Esselaoui ; A finite procedure for viscoelastic flows  
*Int. J for Num. M. in fluids vol. 7 (1987) 1035-1052*
- [23] M. J. Crochet 'Numerical simulation of viscoelastic flow : a review'  
Rubber Chemistry and Technology **62**, 3 July-August (1989)
- [24] C. Tucker III *Computer modelling for polymer processing*  
Carl Hanser-Publishers
- [25] D.D. Joseph *Fluid dynamics of Visco Elastic liquids* Applied Mathematical Sciences 84 Springer Verlag
- [26] C. Guillopé et J.C. Saut 'Existence results for the flow of visco elastic fluids with a differential constitutive law'  
Nonlinear Analysis Theory, Methods & Applications Vol 15 No 9 (1990) 849-869
- [27] K. Chen 'Elastic instability of the interface in Couette flow of viscoelastic liquids'  
J. Non-Newtonian Fluid Mech., 40 (1991) 261-267
- [28] N.D. Waters et A.M. Keeley 'The stability of two stratified non-newtonian liquids in Couette flow'  
J. Non-Newtonian Fluid Mech., 24 (1987) 161-181

- [29] C.H Li ‘Stability of Two Superposed Elastoviscous Liquids in Plane Couette Flow’  
Phys. Fluids **12** 3 (1969) 531-538
- [30] A.S. Gupta ‘Stability of a viscoelastic liquid film flowing down an inclined plane’  
J. Fluid Mech. **28** 1 (1967) 17-28
- [31] A.P.Hooper et W.G. Boyd ‘Shear-flow instability at the interface between two vis-  
cous fluids’  
J. Fluid Mech. *128* (1983) 507-528
- [32] C.S. Yih ‘Instability due to viscosity stratification’  
J. Fluid Mech. *272* (1967) 337-352
- [33] L.A. Dávalos-Orozco ‘Capillary instability due to a shear stress on the free surface  
of a viscoelastic fluid layer’  
J. Non-Newtonian Fluid Mech., 45 (1992) 171-186
- [34] J.W Miles ‘The hydrodynamics of a thin film of liquid in uniform shearing motion’  
J. Fluid Mech. *8* (1960) 593-610
- [35] Y. Renardy ‘Stability of the interface in two-layer Couette flow of upper convected  
Maxwell liquids’  
J. Non-Newtonian Fluid Mech., 28 (1988) 99-115
- [36] M. Renardy et Y. Renardy ‘Linear stability of plane Couette flow of an Upper  
Convected Maxwell fluid’  
J. Non-Newtonian Fluid Mech., 22 (1986) 23-33
- [37] K. Chen et D.D. Joseph ‘Elastic short wave instability in extrusion flows of vis-  
coelastic liquids’  
J. Non-Newtonian Fluid Mech., 42 (1992) 189-211
- [38] K. Chen ‘Interfacial instability due to elastic stratification in concentric coextrusion  
of two viscoelastic fluids’  
J. Non-Newtonian Fluid Mech., 40(1991) 155-175
- [39] Y.Y Su et B. Khomami ‘Interfacial stability of multilayer viscoelastic fluids in slit  
and converging channel die geometries’  
J. Rheol., 36(2)(1992) 357-387
- [40] G.M Wilson et B. Khomami ‘An experimental investigation of interfacial insta-  
bilities in multilayer flow of viscoelastic fluids. II Elastic and nonlinear effects in  
incompatible polymer systems’  
J. Rheol., 37(2) (1993) 315-339

- [41] G.M Wilson et B. Khomami ‘An experimental investigation of interfacial instabilities in multilayer flow of viscoelastic fluids. I . Incompatible polymer systems’  
J. Non-Newtonian Fluid Mech., 45(1992) 355-384
- [42] M. Renardy ‘Short wave instabilities resulting from memory slip’  
J. Non-Newtonian Fluid Mech., 35 (1990) 73-76
- [43] N. Phan-Thien et R.I. Tanner ‘A new constitutive equation derived from network theory’  
J. Non-Newtonian Fluid Mech., 2(1977) 353-365
- [44] R. I. Tanner et al. *Viscoélasticité non linéaire : Rhéologie et modélisation numérique*  
Ecoles CEA-EDF-INRIA 27-30/01/1992
- [45] T. Kato *Perturbation Theory for Linear Operator*,  
Springer, Berlin-Heidelberg-New-York, 1966
- [46] P. Henrici *Applied and Computational Complex Analysis* vol I, John Wiley, New-York, 1974
- [47] M. Renardy ‘On the type of certain  $C_0$  Semigroups’ Comm. Part. Diff. Eq., à paraître
- [48] G. Allain *Un problème de Navier-Stokes avec surface libre* Université Paris VI (1983)
- [49] G. Allain ‘Un problème de Navier-Stokes avec surface libre et tension superficielle’  
Annales Fac. des Sciences Toulouse vol VII (1985)29-56
- [50] G. Allain ‘Small-Time Existence for the Navier-Stokes Equations with a Free Surface’  
Appl. Math. Optim. 16 (1987)37-50
- [51] P. Germain *Cours de Mécanique des Milieux Continus* T. 1 Masson Paris 1973
- [52] J.T. Beale ‘The Initial Value Problem for the Navier-Stokes Equations with a Free Surface’  
Comm. Pure and Applied Math. 34 (1981) 359-392
- [53] J. L. Lions et E. Magenes *Problèmes aux limites non homogènes et applications*  
Dunod Paris (1968)
- [54] R. A. Adams *Sobolev Spaces* Academic Press, 1975
- [55] R. Temam *Navier-Stokes equations* North-Holland Amsterdam 1984

- [56] S.A. Orszag ‘Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation’  
J. Fluid Mech. 50 (1971) 689-703
- [57] S.A. Orszag ‘Galerkin approximations to flows within slabs, spheres and cylinders’  
*Phys. Rev. Lett.* 26 (1971)1100-1103
- [58] M. Renardy ‘On the linear stability of shear flows of viscoelastic fluids of Jeffrey type’ soumis à publication.
- [59] V. Ditkine et A. Proudnikov ‘Transformations intégrales et calcul opérationnel’  
Editions Mir Moscou
- [60] L. Preziosi, K. Chen et D.D. Joseph ‘Lubricated pipelining : stability of core annular flow’ J. Fluid Mech. 201 (1989) 323-356
- [61] Y.Y. Su et B. Khomami ‘Numerical solution of eigenvalue problems using spectral techniques’ J. Comp. Physics 100 (1992)297-305
- [62] B. Brenier, B. Roux et P. Bontoux ‘Comparaison des méthodes Tau-Chebyshev et Galerkin dans l’étude de stabilité des mouvements de convection naturelle. Problème des valeurs propres parasites’ Journal de mécanique théorique et appliquée vol 5, n° 1(1986) 95-119
- [63] S. Yiantsios et B.G. Higgins ‘Analysis of superposed fluids by the finite element method : linear stability and flow developement’  
Int. J. Numer. Methods Fluids 7 (1987) 247-261
- [64] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni et T.A. Zhang *Spectral methods in fluids dynamics* Springer Berlin (1988)
- [65] G.H. Golub et C.F. Van Loan *Matrix computation* 2nde édition (1990) The John Hopkins University
- [66] T.W. Kao et C. Park ‘Experimental investigations of the stability of channel flow. Part 1. Flow of a single liquid in a rectangular channel’ J. Fluid Mech. 43,1 (1970) 145-164
- [67] T.W. Kao C. Park ‘Experimental investigations of the stability of channel flow. Part 2. Two layered co-current flow in a rectangular channel’  
J. Fluid Mech. 52(1972) 401-423
- [68] M. Nishioda, S. Iida et Y. Ichikawa ‘An experimental investigation of the stability of plane Poiseuille Flow’  
J. Fluid Mech. 72(1975) 731-751
- [69] M.R. Khorrami et M.R. Malik ‘Efficient computation of spatial eigenvalues for hydrodynamic stability analysis’  
Journal of computational physics 104,1 (1993)267-272

- [70] G.V. Kirejko et A.L. Kornev 'Stabilité linéaire d'un écoulement plan de Poiseuille d'un fluide d'Oldroyd' (En russe)  
Izvestija Akademii Nauk SSSR. Mehanika Zidkosti i Gaza 1(1988)5-10
- [71] R.F. Ganev, B. YU Malykh et L.E. Ukrainskij 'Stabilité linéaire de l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible dans un tuyau circulaire visco-élastique' (En russe)  
Izvestija Akademii Nauk SSSR. Mehanika Zidkosti i Gaza 6 (1986) 126-134
- [72] R. Pierce 'The Ginzburg-Landau equation for interfacial instabilities'  
Physics of fluids A. Fluid dynamics vol. 4 N° 11 (1992)2486-2494
- [73] P. Laure *Communication privée*
- [74] Y. Demay, P. Laure et S. Scotto *Calcul numérique des modes critiques de l'équation d'Orr-Sommerfeld viscoélastique*  
Rapport de DEA I.N.L.N et université de Nice Sophia Antipolis (1994)
- [75] Y. Saad 'Variations on Arnoldi's Method for Computing Eigenlements of Large Unsymmetric Matrices' Linear Algebra and its applications 34(1980) 269-295

Numéro d'impression : 1608  
Dernier trimestre 1994