

PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES D'ORSAY

Séminaire de

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**Bloom - Mazet - Moulis - Ramis - Ruget**

année universitaire 1968-1969

Mathématiques (425)  
(Service des Publications - Bibliothèque)  
Faculté des Sciences  
91 - ORSAY (France)

PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES D'ORSAY

Séminaire de

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Bloom - Mazet - Moulis - Ramis - Ruget

16032



année universitaire 1968-1969

Mathématiques (425)  
(Service des Publications - Bibliothèque)  
Faculté des Sciences  
91 - ORSAY (France)

TABLE DES MATIERES



n° de l'exposé :

RAMIS	- Bestiaire.	1
MAZET	- Quelques techniques pour la géométrie analytique banachique.	10
MAZET	- Le nullstellensatz pour les germes analytiques banachiques.	11
RUGET	- Opérateurs à indice.	2
RUGET	- La codimension topologique.	12
RUGET	- Intersections.	16bis
RUGET	- Un théorème d'image directe (situation analytique épidermique).	16
RUGET	- Image directe d'un espace analytique de dimension finie dans une variété de dimension infinie.	9
RUGET	- Description de l'anneau de cohomologie de l'ensemble des opérateurs à indice d'un espace de Hilbert complexe.	20
MOULIS	- Variétés hilbertiennes de dimension infinie.	8
BLOOM	- Singularités des hypersurfaces I .	6
BLOOM	- Singularités des hypersurfaces II .	7
RUGET	- Un théorème de dualité I .	18
RUGET	- Un théorème de dualité II . Le complexe dualisant.	19

## INTRODUCTION

L'essentiel de ce séminaire est une contribution à l'étude des variétés de dimension infinie, variétés analytiques banachiques complexes surtout, mais on trouvera aussi un exposé (n°8) tout à fait actuel de N. Moulis sur la classification des variétés différentiables hilbertiennes. Mis à part un bestiaire en guise d'introduction, les exposés de J.P. Ramis sur les fondements de la géométrie analytique banachique n'ont pas été rédigés : on en retrouvera la matière dans un livre en préparation pour la collection E de Springer, et en attendant, dans des exposés au Séminaire Pierre Lelong 1967-1968 (Lecture Notes - Springer 1968), ou dans un exposé de Henri Cartan au Séminaire Bourbaki (février 1969). On trouvera par contre deux contributions que P. Mazet a apportées pendant ce séminaire à la théorie, dont l'une essentielle : le nullstellensatz ; la démonstration (simplifiée par H. Cartan) qui en est donnée ici est élémentaire ; J.P. Serre a suggéré une autre démonstration du lemme algébrique fondamental (cf. note du juin 1969 aux C.R.A.S. Paris). Sont étudiés ensuite la classe fondamentale des ensembles analytiques, une théorie naïve des multiplicités, deux théorèmes d'image directe, et, en guise d'exemple, la cohomologie de l'espace des opérateurs à indice.

Le séminaire prend fin sur des exposés relatifs à la dimension finie, brochant tous deux autour de la notion de résidu : un rapport de T. Bloom sur les travaux actuels de Brieskorn sur les singularités isolées des hypersurfaces, et un développement d'idées de Grothendieck sur un théorème de dualité pour la cohomologie d'un espace analytique à valeur dans un faisceau cohérent. La contribution de J.P. Ramis à ce dernier travail (le recollement des fibres)

sera davantage développée dans un article à paraître.

Indiquons que n'ont pas été rédigés des exposés de Y. Colombé sur l'intégration sur un ensemble analytique (d'après Lelong et De Rham), de Lê Dung Trang sur les singularités isolées des hypersurfaces (d'après Milnor) et de J. Hubbard sur les cycles analytiques (d'après Atiyah et Hirzebruch), et signalons enfin, comme retombée du séminaire, un article à paraître de Y. Colombé sur les fibres des applications analytiques.

Nous ne terminerons pas sans remercier notre fidèle auditoire, et en premier lieu Monsieur Henri Cartan, ainsi que Madame J. Maynard qui s'est chargée, avec compétence et gentillesse, de la frappe des manuscrits, et la Faculté des Sciences d'Orsay qui nous a accordé gîte et couvert.

G.R.

SEMINAIRE

Ramis - Ruget



Exposé n° 1 : BESTIAIRE

par Jean-Pierre RAMIS

Commençons par quelques définitions :

Définition 1 : Etant donnés deux espaces de Banach complexes  $E$  et  $F$  et un ouvert  $U$  de  $E$  ; une application  $f : U \rightarrow F$  est dite analytique, si elle est développable en série entière au voisinage de chaque point de  $U$  (cf. [1] ou [3]).

Remarquons que  $f$  est analytique si et seulement si elle est différentiable (complexe) en tout point.

On a la notion de variété analytique banachique complexe (cf. [1] ou [3]).

Définition 2 : Un sous-ensemble  $X$  d'une variété analytique banachique complexe  $U$  est dit analytique, s'il est localement (dans  $U$ ) l'ensemble des zéros d'une fonction analytique à valeurs banachiques.

Un sous-ensemble  $X$  de  $U$  est dit analytique de définition finie s'il est localement (dans  $U$ ) l'ensemble des zéros communs à un nombre fini de fonctions analytiques scalaires.

Exemples : l'ensemble des pôles et l'ensemble des points d'indétermination d'une fonction méromorphe sur une variété analytique banachique  $U$  sont des sous-ensembles analytiques de définition finie de  $U$  :

Le premier est localement définissable par une équation scalaire non identiquement vérifiée par un ouvert de  $U$  (il est donc

principal) et le second est localement définissable par deux équations scalaires (\*).

La famille de sous-ensembles analytiques exhibée ci-dessous (en  $A$ ) est formée d'êtres particulièrement "pathologiques". Ces ensembles sont essentiellement destinés à fournir des contre-exemples à tous les théorèmes (ou presque ...) qu'un optimisme naïf conduirait à "extrapoler" des résultats classiques. L'exemple donné en  $B$  est un monstre du même genre mais construit "à la main".

#### A - Exemples tératologiques.

Soit  $A$  une algèbre de Banach complexe (unifère). Soit  $X = \text{Hom}(A, \mathbb{C})$  son spectre (il s'agit des homomorphismes continus d'algèbres unifères) ; il peut être considéré comme sous-ensemble du dual fort  $A^*$  que l'on munit de sa structure naturelle d'espace de Banach.

Proposition 1 : Avec les notations ci-dessus,  $X$  est un sous-ensemble analytique de  $A^*$ .

Démonstration : Notons  $B$  l'espace de Banach des applications bilinéaires continues de  $A \times A$  dans  $\mathbb{C}$ . On définit une application :

$$f : A^* \rightarrow B \oplus \mathbb{C} \text{ par}$$

$$f : \chi \mapsto [((a,b) \mapsto \chi(ab) - \chi(a) \cdot \chi(b)), \chi(1) - 1] .$$

Il est fort simple de voir que  $f$  est analytique (et même polynomiale de degré 2) ; il en résulte que  $X = f^{-1}(0)$  est bien un sous-ensemble analytique (et même algébrique!) de  $A^*$ .

En prenant diverses algèbres de Banach, la proposition 1 permet de construire de nombreux exemples. Celui donné ci-dessous est dû à Douady (cf. [4]) :

Proposition 2 : Tout compact métrisable est homéomorphe à un sous-ensemble analytique (muni de la topologie induite) d'un espace de Banach convenable.

(\*) On le voit en utilisant les résultats de [7] et des raisonnements classiques en dimension finie (cf. [5]).

Démonstration : Soit  $K$  le compact (on note  $d$  la distance). Soit  $A$  l'algèbre de Banach des fonctions Lipschitziennes de  $K$  dans  $\mathbb{C}$  munie de la norme :

$$\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)| + \sup_{\substack{x \in K \\ y \in K \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)}$$

Notons  $A^*$  le dual fort de  $A$ , on a une application :

$$\begin{aligned} \delta : K &\rightarrow A^* \text{ définie par} \\ \delta : x &\mapsto (f \mapsto f(x)) \end{aligned}$$

L'algèbre  $A$  est une sous-algèbre involutive, pleine<sup>(\*)</sup> de l'algèbre  $\mathcal{C}(K)$  des fonctions continues (à valeurs complexes) sur  $K$  ; il en résulte<sup>(\*\*)</sup> que  $\delta$  est une surjection de  $K$  sur le spectre  $X$  de  $A$ . On a par ailleurs les inégalités :

$$\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \leq \|\delta(x) - \delta(y)\| \leq d(x,y) ;$$

quels que soient  $x$  et  $y$  dans  $K$  (l'inégalité de droite est triviale, celle de gauche nécessitera un léger travail du lecteur qui pourra utiliser la fonction  $z \mapsto \inf(d(x,z), d(x,y))$ ).

On constate ainsi que  $\delta$  réalise un homéomorphisme de  $K$  sur  $X$  et il suffit d'appliquer la proposition 1 pour voir que  $X$  est un sous-ensemble analytique de  $A^*$ .

Définition : Etant donné une variété analytique banachique  $U$  et un sous-ensemble analytique  $X$  de  $U$  ; on dira qu'un point  $x$  de  $X$  est régulier si  $x$  est au voisinage de  $X$  une sous-variété analytique directe<sup>(\*\*\*)</sup> de  $U$ .

Un point qui n'est pas régulier est dit singulier.

Proposition 3 : Si  $A$  est l'algèbre des fonctions lipschitziennes sur le compact métrisable  $K$ , son spectre  $X$  est un sous-ensemble analytique de  $A^*$  qui n'a que des points singuliers.

(\*) i.e. : si  $f$  est inversible dans  $\mathcal{C}(K)$ , il est inversible dans  $A$

(\*\*) cf. [2] § 7.1 Proposition 1.

(\*\*\*) i.e.  $T_x(X)$  est un sous-espace vectoriel fermé direct de  $T_x(U)$  (cf. [3] ou [6]).

Démonstration : Supposons que  $a \in X$  soit régulier, il existe un voisinage ouvert convexe  $V$  de  $a$  dans  $U$  tel que  $V \cap X$  soit une sous-variété directe de  $U$ . Soit  $\delta : K \rightarrow X$  l'application de Gelfand (voir plus haut) ;  $\delta^{-1}(V \cap X)$  est un voisinage ouvert de  $x = \delta^{-1}(a)$  dans  $K$ , on peut trouver une fonction  $g \in A$  dont le support est contenu dans le voisinage et qui atteint son maximum en  $x$  ;  $g$  définit alors une fonction analytique, non constante, sur  $V \cap X$ , ce qui est en contradiction avec le principe du maximum (pour les variétés analytiques banachiques).

B - Exemple de sous-ensemble analytique compact non trivial d'un espace de Hilbert séparable.

Les exemples de la partie A nous ont montré que, contrairement à ce qui se passe en dimension finie, il existe des espaces de Banach admettant des sous-ensembles analytiques compacts non réduits à un nombre fini de points. Ces espaces de Banach sont cependant "assez gros" et on peut se demander s'il en est de même pour un espace de Banach séparable voire un espace de Hilbert.

Soit  $E = \ell_{\mathbb{C}}^2$  (espace des suites complexes de carré sommable). Soit  $\{x_n^0\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite donnée de  $\ell_{\mathbb{C}}^2$  possédant les propriétés suivantes (\*) :

$$(i) \quad x_n^0 \neq 0 \quad \text{pour tout entier } n ;$$

$$(ii) \quad |x_N^0|^2 > \sum_{n > N} |x_n^0|^2, \quad \text{pour tout entier } N .$$

On considère l'application

$$f : \ell_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \ell_{\mathbb{C}}^2 \quad \text{définie par}$$

$$f : \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \{x_n^2 - x_n^0 x_n\}_{n \in \mathbb{N}} ;$$

on vérifie immédiatement que  $f$  est bien définie et polynomiale de degré 2, donc analytique. Posons  $X = f^{-1}(0)$  ;  $X$  est un sous-ensemble

---

(\*)  $x_n^0 = \frac{1}{2^n}$  convient.

analytique de  $E$ , il est formé de toutes les suites  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  telles que  $x_n = 0$  ou  $x_n^0$ . Des considérations élémentaires conduisent aux résultats suivants :

(a)  $X$  muni de la topologie induite par  $E$  est homéomorphe à l'ensemble de Cantor (donc compact).

(b)  $X$  n'a que des points singuliers ; de plus si  $U$  est un ouvert de  $E$  et  $Y$  un sous-ensemble analytique de  $U$  contenu dans  $U \cap Y$ , les seuls points réguliers de  $Y$  sont les points isolés.

(c) Pour tout entier  $m$ , on peut trouver une décomposition :  $\underline{X} = \underline{X}_1 \cup \underline{X}_2 \cup \dots \cup \underline{X}_m$  ; aucun des  $\underline{X}_i$  n'étant contenu dans l'un des autres (on désigne par  $\underline{Y}$  le germe à l'origine d'un sous-ensemble analytique d'un voisinage de  $0$  dans  $E$ ).

Définition 3 : Soit  $X$  un sous-ensemble analytique d'un ouvert  $U$  d'un espace de Banach  $E$ . Soit  $x \in X$ . On note

$\mathcal{M}_x = \{F/F \text{ sous-espace vectoriel de dimension finie de } E \text{ tel que } x \text{ soit isolé dans l'intersection } (x+F) \cap X\}$ . On appelle codimension en  $x$  de  $X$  dans  $U$  :

$$\text{codim}_x X = \sup_{F \in \mathcal{M}_x} \dim F \in (N \cup \{+\infty\}).$$

Remarque : cette définition coïncide avec celle (classique) de la codimension en dimension finie, ainsi qu'avec celle d'un sous-espace vectoriel direct.

Lemme : Soit  $X$  un sous-ensemble analytique compact d'un ouvert  $U$  d'un espace de Banach  $E$ . Tout sous-espace affine de dimension finie de  $E$  coupe  $X$  suivant un ensemble fini.

Démonstration : Si  $F$  est un sous-espace affine de  $E$ , de dimension finie,  $X \cap F$  est compact et analytique dans  $F$ , donc formé d'un nombre fini de points.

Proposition 4 : Si  $X$  est un sous-ensemble analytique compact d'un ouvert  $U$  d'un espace de Banach, <sup>(\*)</sup> il est de codimension infinie en tout point.

---

(\*) de dimension infinie.

Démonstration : La proposition résulte trivialement du lemme et de la définition 3.

C - Sous-ensembles analytiques d'un espace de Banach possédant des points de toutes les codimensions au voisinage de l'origine.

Soit  $E = \ell_{\mathbb{C}}^1$  (espace des suites sommables). Soit

$f : \ell_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow \ell_{\mathbb{C}}^1$ , définie par

$f : \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \{z_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ , avec

$z_m = x_1 \cdot x_3 \cdots x_{2m+1} x_{2m+2}$ . L'application  $f$  est analytique et  $X = f^{-1}(0)$  est un sous-ensemble analytique de  $E$ .

Pour tout entier  $m$ , on pose alors :

$X_m = \{x_2=0; \dots; x_{2p}=0; \dots; x_{2m}=0; x_{2m+1}=0\}$  et

$Y = \{x_2=0; \dots; x_{2p}=0; \dots\}$ ; il est clair que  $X_m$  est un sous espace vectoriel de codimension  $m+1$  de  $E$  et que  $Y$  est un sous-espace vectoriel direct de  $E$ , de codimension infinie.

On vérifie que :  $X = (\bigcup_{m \in \mathbb{N}} X_m) \cup Y$ . Désignons par  $X^*$  l'ensemble des points réguliers de  $X$ ;  $X_m \cap X^*$  est dense dans  $X_m$ ,  $(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} X_m)$  étant dense dans  $X$ , on en déduit :

(a)  $X^*$  est dense dans  $X$  et dans tout voisinage de  $0$ , il y a (pour tout  $n \geq 1$  ou infini) des points réguliers de  $X$  où  $X$  est de codimension  $n$ ;

(b) si  $x$  est un point de  $Y$  tel que  $x_{2p+1} \neq 0$  pour tout  $p \geq 0$ ;  $x$  n'appartient pas à la réunion  $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} X_m$ , mais tout voisinage de  $x$  rencontre cette réunion et, par suite, contient des points réguliers de codimension finie de  $X$ ;

(c) si  $x$  est un point de  $Y$  vérifiant la condition de (b); pour tout voisinage ouvert  $V$  de  $x$  dans  $E$ , on peut trouver une

fonction analytique sur  $V$ , ne s'annulant pas identiquement sur  $X \cap V$  et s'annulant identiquement sur le germe  $\underline{X}_x$  de  $X$  en  $x$ .

Soit  $h : \ell_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow \mathbb{C}$  définie par

$h : \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \mapsto x_2 + x_4 + \dots + x_{2n} + \dots$ ; cette application est linéaire continue (donc analytique), désignons par  $Z$  l'ensemble de ses zéros et posons  $S = X \cup Z$ .

Il est clair que, quel que soit  $m$ ,  $X_m \not\subset Z$  et qu'il y a des points de  $X_m \cap X^*$  qui n'appartiennent pas à  $Z$ . Par ailleurs

$S = (\bigcup_{m \in \mathbb{N}} X_m) \cup Z$  (puisque  $Y \subset Z$ ); on constate alors que  $S$  est un sous-ensemble analytique (puisque réunion de deux sous-ensembles analytiques) de  $E$ , dont la codimension est finie en tout point, qui possède des points de toutes les codimensions (finies) dans tout voisinage de l'origine. On peut montrer que  $S$  n'est pas de définition finie.

Pour terminer, signalons à l'attention du lecteur "découragé" par les exemples précédents que les sous-ensembles analytiques ont tout de même quelques propriétés dont on parlera dans la suite du Séminaire (cf. en attendant [8] et [9]).

---

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. BOURBAKI : Variétés - Fascicule de résultats I. (Hermann. Paris)
- [2] N. BOURBAKI : Théories spectrales 1. (Hermann. Paris).
- [3] A. DOUADY : Le problème des modules ... (Annales Institut Fourier. Grenoble).

- [4] A. DOUADY : A remark on Banach Analytic Spaces (papier secret : Stanford University - February 1968).
- [5] R. GUNNING and H. ROSSI : Analytic functions of several complex variables (Prentice Hall U.S.A.).
- [6] S. LANG : Introduction to differentiable manifold (Interscience Publishers).
- [7] J.P. RAMIS : Factorialité des anneaux de séries formelles et de séries convergentes sur les espaces vectoriels normés. C.R.A.S. Paris, t.262, Série A- p.904-906.
- [8] J.P. RAMIS : Sous-ensembles analytiques d'une variété analytique banachique complexe. Deux notes aux C.R.A.S. Paris t.267, Série A (novembre-décembre 1968).
- [9] J.P. RAMIS et G. RUGET : Un théorème sur les images directes analytiques banachiques. C.R.A.S. Paris, t.267, Série A (novembre-décembre 1968).

Exposé n° 10 : QUELQUES TECHNIQUES POUR LA GEOMETRIE ANALYTIQUE  
BANACHIQUE.

par Pierre MAZET.

Le but de cet exposé est de présenter un certain nombre de méthodes et d'outils utiles en géométrie analytique banachique. A titre d'exemple, nous y amorcerons l'étude des relations entre hauteur et codimension.

Nous suivrons de très près les exposés que Ramis a faits sur ce sujet dans d'autres séminaires. Nous supposerons connus les premiers résultats de Ramis sur le théorème de préparation et la factorialité de  $\mathcal{O}(E)$ .

I - Définitions et notations.

Les espaces de Banach considérés sont toujours construits sur le corps  $\mathbb{C}$ .

Soit  $E$  un espace de Banach,  $X$  une partie de  $E$ , nous noterons  $\underline{X}$  le germe en  $0$  de  $X$ . De même, si  $f$  est une application d'un voisinage de  $0$  de  $E$  dans un ensemble, nous noterons  $\underline{f}$  son germe en  $0$ . Nous nous intéressons plus particulièrement au cas où  $f$  est une application analytique dans un espace de Banach  $F$ . Dans ce cas l'ensemble  $f^{-1}(0)$  est noté  $V(f)$  et les germes du type  $\underline{V}(f)$  sont dits analytiques; si en outre  $F$  est de dimension finie,  $\underline{V}(f)$  est dit de définition finie.

fonctions holomorphes de  $E$  dans  $\mathbb{C}$ .

Rappelons que cet anneau est un anneau local et factoriel.

Si  $\underline{X}$  est un germe analytique (en 0), nous noterons  $I(\underline{X})$  l'ensemble des éléments de  $\mathcal{O}(E)$  nuls sur  $\underline{X}$ ; c'est un idéal de  $\mathcal{O}(E)$ .

Un germe  $\underline{X}$  est dit irréductible si on ne peut pas trouver de décomposition du type :

$$\underline{X} = \underline{X}_1 \cup \underline{X}_2$$

où  $\underline{X}_1$  et  $\underline{X}_2$  sont des germes analytiques distincts de  $\underline{X}$ .

II - L'application  $\underline{X} \rightsquigarrow I(\underline{X})$

Proposition 1 : L'application  $\underline{X} \rightsquigarrow I(\underline{X})$  jouit des propriétés suivantes :

- i)  $\underline{X}_1 \subset \underline{X}_2$  équivaut à  $I(\underline{X}_1) \supset I(\underline{X}_2)$
- ii) L'application  $\underline{X} \rightsquigarrow I(\underline{X})$  est injective
- iii) Tout idéal du type  $I(\underline{X})$  est égal à sa racine
- iv)  $I(\underline{X}_1 \cup \underline{X}_2) = I(\underline{X}_1) \cap I(\underline{X}_2)$
- v) Un germe  $\underline{X}$  est irréductible si et seulement si  $I(\underline{X})$  est premier.

- Les assertions iii) et iv) sont évidentes.

- L'assertion ii) résulte immédiatement de i)

- Dans i) il est clair que :  $\underline{X}_1 \subset \underline{X}_2 \implies I(\underline{X}_1) \supset I(\underline{X}_2)$

Démontrons donc que :

$$(\underline{X}_1) \neq (\underline{X}_2) \implies I(\underline{X}_1) \neq I(\underline{X}_2)$$

Considérons deux germes  $\underline{X}_1$  et  $\underline{X}_2$ , on peut toujours trouver un voisinage  $\Omega$  de 0 dans  $E$ , un espace de Banach  $F$  et deux applications analytiques  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ , de  $\Omega$  dans  $F$  telles que :

$$\underline{X}_1 = \underline{V}(\alpha_1) \quad \underline{X}_2 = \underline{V}(\alpha_2)$$

Alors la condition  $\underline{X}_1 \not\subset \underline{X}_2$  se traduit par l'existence d'une suite  $x_n$  d'éléments de  $\Omega$  telle que :

$$x_n \rightarrow 0$$

- $(\forall n) \quad \alpha_1(x_n) = 0 \quad (x_n \in V(\alpha_1))$
- $(\forall n) \quad \alpha_2(x_n) \neq 0 \quad (x_n \notin V(\alpha_2))$

Nous allons, alors, montrer l'existence d'une application analytique  $f$  de  $\Omega$  dans  $\mathbb{C}$  telle que :

- $f$  est nulle sur  $V(\alpha_2)$
- $(\forall n) \quad f(x_n) \neq 0$

ce qui entraînera :  $\underline{f} \in I(\underline{X}_2) \quad \underline{f} \notin I(\underline{X}_1)$  et donc :

$$I(\underline{X}_2) \not\subset I(\underline{X}_1)$$

Pour cela, il suffit de trouver une forme linéaire  $\phi$  sur  $F$  telle que :  $(\forall n) \quad \phi(\alpha_2(x_n)) \neq 0$ , l'application  $\phi \circ \alpha_2$  ayant alors les propriétés de  $f$ . L'existence d'une telle forme est assurée par le lemme suivant :

Lemme 1 : Soit  $F$  un espace de Banach,  $y_n$  une suite d'éléments non nuls de  $F$ , alors, il existe une forme linéaire  $\phi$  sur  $F$  telle que :

$$(\forall n) \quad \phi(y_n) \neq 0$$

Soit  $F_n$  l'ensemble des formes linéaires sur  $F$ , nulles sur  $y_n$ ; le théorème de Hahn-Banach assure que  $F_n$  est un hyperplan fermé du dual fort  $F^*$ . Le théorème de Baire montre alors que :

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$  est d'intérieur vide, donc différent de  $F^*$ .

Tout élément de  $F^*$  qui n'appartient pas à  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$  possède la propriété désirée.

- Démontrons l'assertion v)

Si  $I(\underline{X})$  est premier, soit  $\underline{X} = \underline{X}_1 \cup \underline{X}_2$  une décomposition de  $\underline{X}$ . On a, d'après iv)

$$I(\underline{X}) = I(\underline{X}_1) \cap I(\underline{X}_2)$$

$I(\underline{X})$  étant premier, ceci implique :

$$I(\underline{X}) = I(\underline{X}_1) \quad \text{ou} \quad I(\underline{X}) = I(\underline{X}_2)$$

En appliquant l'assertion ii) on obtient

$$\underline{X} = \underline{X}_1 \quad \text{ou} \quad \underline{X} = \underline{X}_2$$

$\underline{X}$  est donc irréductible.

- Si  $(\underline{X})$  est irréductible, soit  $\underline{fg}$  un élément de  $I(\underline{X})$  alors

$$V(\underline{f}) \cup V(\underline{g}) = V(\underline{fg}) \supset X$$

d'où

$$\underline{X} = [\underline{X} \cap V(\underline{f})] \cup [\underline{X} \cap V(\underline{g})]$$

L'irréductibilité de  $X$  assure donc :

$$\underline{X} = \underline{X} \cap V(\underline{f}) \quad \text{d'où : } \underline{X} \subset V(\underline{f}) \quad \text{d'où : } \underline{f} \in I(\underline{X})$$

ou

$$\underline{X} = \underline{X} \cap V(\underline{g}) \quad \text{d'où : } \underline{X} \subset V(\underline{g}) \quad \text{d'où : } \underline{g} \in I(\underline{X})$$

$I(\underline{X})$  est donc premier.

Remarque : Si  $\underline{X}$  est de définition finie, on peut reprendre cette démonstration en remplaçant la notion d'irréductibilité par la suivante :  $\underline{X}$  ne peut être décomposé en  $\underline{X}_1 \cup \underline{X}_2$  où  $\underline{X}_1$  et  $\underline{X}_2$  sont des germes de définition finie distincts de  $\underline{X}$ .

On en conclut que cette nouvelle notion d'irréductibilité, pour les germes de définition finie, coïncide avec l'ancienne.

### III - Les idéaux géométriques.

Si à tout germe  $\underline{X}$  on sait associer un idéal  $I(\underline{X})$ , nous ne savons pas, réciproquement, à tout idéal de  $\mathcal{O}(E)$  associer un germe.

En particulier, nous ne savons pas quels sont les idéaux du type  $I(\underline{X})$ . L'assertion iii) de la proposition 1 assuré en tout cas, que ce ne sont pas tous les idéaux. Signalons, toutefois, que la réciproque de cette assertion est exacte pour une certaine classe d'idéaux, dits géométriques, et fausse en général (cf : Exposé 11. Complément).

On peut alors poser le problème suivant :

Soit  $I$  un idéal de  $\mathcal{O}(E)$ , existe-t-il un plus gros germe  $\underline{X}$  tel que  $I \subset I(\underline{X})$  ?

Nous ne connaissons pas d'exemple où la réponse est négative. Nous allons, cependant étudier des cas très importants où elle est positive.

- Si  $I$  est de type fini.

Soient  $\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n$  un système de générateurs de  $I$ , on peut trouver  $f_1, \dots, f_n$  fonctions analytiques définies sur un même voisinage  $\Omega$  de  $0$  représentant ces germes. Si  $f$  est l'application  $(f_1, \dots, f_n)$  de  $\Omega$  dans  $\mathbb{C}^n$ , le germe  $\underline{V}(f)$  possède la propriété désirée. On le note  $\underline{V}(I)$ .

- Si on peut trouver un idéal  $J$  de type fini tel que

$$J \subset I \subset I(\underline{V}(J))$$

alors le germe  $\underline{V}[J]$  possède la propriété, il est indépendant de  $J$ , on le note  $\underline{V}(I)$ . Un tel idéal  $I$  est dit géométrique.

Proposition 2 : Les idéaux géométriques possèdent les propriétés suivantes :

i)  $I$  géométrique  $\iff$   $\text{Rad } I$  géométrique et

$$\underline{V}(I) = \underline{V}(\text{Rad } I)$$

ii)  $I_1$  géométrique,  $I_2$  géométrique  $\implies$   $I_1 + I_2$  géométrique et

$$\underline{V}(I_1 + I_2) = \underline{V}(I_1) \cap \underline{V}(I_2)$$

iii)  $I_1$  géométrique,  $I_2$  géométrique  $\implies$   $I_1 I_2$  et  $I_1 \cap I_2$  géométriques et

$$\underline{V}(I_1 I_2) = \underline{V}(I_1 \cap I_2) = \underline{V}(I_1) \cup \underline{V}(I_2)$$

La démonstration de ces propriétés est très simple.

Remarque : Nous ne savons pas si  $I_1$  et  $I_2$  étant de type fini,  $I_1 \cap I_2$  est encore de type fini. Ceci équivaudrait à la cohérence de l'anneau  $\mathcal{O}(E)$  .

#### IV - Décomposition de $\mathcal{O}(E)$ .

Dans un espace de Banach  $E$  , soit  $E_p$  un sous-espace fermé. La surjection canonique  $E \xrightarrow{s} E/E_p$  induit une application  $\mathcal{O}(E/E_p) \rightarrow \mathcal{O}(E)$  . Cette application est injective car  $s$  est ouverte. Son image est formée par les germes d'applications  $\nu$  indépendantes de  $E_p$  , c'est-à-dire dont la forme dérivée s'annule sur  $E_p$  au voisinage de  $0$  . Cette image sera notée  $\mathcal{A}(E, E_p)$  .

Si  $E_p$  admet un supplémentaire topologique  $E'_p$  , on a des isomorphismes canoniques entre les anneaux  $\mathcal{O}(E'_p)$  ,  $\mathcal{O}(E/E_p)$  et  $\mathcal{A}(E, E_p)$  .

Ces isomorphismes nous permettront d'identifier ces trois anneaux.

De même, l'injection de  $E_p$  dans  $E$  induit une application  $\mathcal{O}(E) \rightarrow \mathcal{O}(E_p)$  qui est la restriction. Si  $E_p$  admet un supplémentaire topologique, cette application est surjective.

Nous nous intéresserons tout particulièrement au cas où  $E_p$  est de dimension finie  $p$  (il est alors automatiquement fermé, et admet toujours un supplémentaire topologique). Nous utiliserons alors des systèmes de coordonnées sur  $E_p$  , c'est-à-dire des familles  $Z_1, \dots, Z_p$  de formes linéaires sur  $E$  dont les restrictions à  $E_p$  forment une base de  $E_p^*$  . A un tel système de coordonnées nous pourrions attacher une base duale de  $E_p$  et un supplémentaire de  $E_p$  défini par

$$E'_p = \bigcap_{1 \leq i \leq p} \text{Ker } Z_i .$$

Réciproquement, la donnée de la base duale et de  $E'_p$  permet de retrouver le système de coordonnées. On a alors une injection canonique de  $\mathcal{O}(E)$  dans  $\mathcal{A}(E, E_p) [[Z_1, \dots, Z_p]]$  qui nous permettra parfois d'identifier  $\mathcal{O}(E)$  à son image.

Définition 1 : On appelle système de décompositions emboîtées de  $E$  la donnée de deux suites (finies ou non)  $E_1, \dots, E_n, \dots$   $Z_1, \dots, Z_n, \dots$  ayant le même ensemble d'indices et où :

- la suite  $E_n$  est une suite croissante de sous-espaces de  $E$  ;
- pour tout  $n$ ,  $Z_1, \dots, Z_n$  est un système de coordonnées sur  $E_n$  et  $i > n \implies Z_i$  nulle sur  $E_n$ .

Remarques : - ces conditions impliquent :  $\dim E_n = n$   
 - la connaissance de  $E_n$  et de  $Z_1, \dots, Z_n$  implique celle de  $E_1, \dots, E_{n-1}$  car :

$$\text{si } i < n \quad E_i = E_n \cap \left[ \bigcap_{i < j < n} \text{Ker } Z_j \right]$$

- pour un tel système on peut définir  $E'_i = \bigcap_{j < i} \text{Ker } Z_j$ ,  $E'_i$  est un supplémentaire de  $E_i$ .  
 - en restreignant les deux suites d'un système de décompositions emboîtées aux indices inférieurs à un certain entier, on obtient un nouveau système de décompositions emboîtées.

- si  $E_1, \dots, E_n$   $Z_1, \dots, Z_n$  est un système de décompositions emboîtées,  $E_n$  s'appelle l'aboutissement de ce système. Un tel système peut être prolongé en prenant pour  $E_{n+1}$  n'importe quel sous-espace de dimension  $n+1$  contenant  $E_n$  et pour  $Z_n$  n'importe quelle forme nulle sur  $E_n$  et non nulle sur  $E_{n+1}$ . On peut, pour cela, prendre un vecteur  $e$

de  $E$  tel que  $e \notin E_n$ , poser

$$E_{n+1} = E_n \oplus \mathbb{C} e$$

et on peut alors trouver  $Z_{n+1}$  telle que  $Z_{n+1}(e) = 1$ .

Soit  $E$  un espace de Banach,  $E_p$  un sous-espace de dimension finie  $p$ ,  $J$  un idéal de  $\mathcal{O}(E)$ ; on peut alors définir  $J_p$  qui est l'image directe de  $J$  dans  $\mathcal{O}(E_p)$  par la surjection canonique.  $E_p$  étant de dimension finie on peut alors définir  $\underline{V}(J_p)$  (car  $\mathcal{O}(E_p)$  est noethérien).

Remarquons que si  $J$  est géométrique

$$\underline{V}(J_p) = \underline{V}(J) \cap E_p$$

de même si  $J = I(\underline{X})$

$$\underline{V}(J_p) = \underline{X} \cap E_p$$

Un des buts de cet exposé est d'étudier la condition  $\underline{V}(J_p) = \underline{0}$ . En particulier nous allons voir qu'elle est équivalente à :

le morphisme  $\mathcal{A}(E, E_p) \rightarrow \mathcal{O}(E)/J$  est fini (c.à.d. qu'il fait de  $\mathcal{O}(E)/J$  un  $\mathcal{A}(E, E_p)$ -module de type fini).

C'est cette dernière condition que nous allons étudier tout d'abord.

Pour cela nous avons besoin de la notion, très importante, de suite de Weierstrass.

#### V - Suites de Weierstrass.

Rappelons que si  $A$  est un anneau local d'idéal maximal  $\mathfrak{M}$ ,

on appelle polynôme de Weierstrass de  $A[T]$  tout polynôme du type :

$$T^n + a_1 T^{n-1} + \dots + a_n$$

où  $n \geq 1$  et  $a_i \in \mathcal{A}$

Définition 2 : On appelle suite de Weierstrass de  $\sigma(E)$  la donnée :

i) d'un système de décompositions emboîtées de  $E$

$$(E_1, \dots, E_j, \dots \quad Z_1, \dots, Z_j, \dots)$$

ii) d'une suite  $\underline{q}_j$  d'éléments de  $\sigma(E)$  telle que, pour tout  $j$ ,  $\underline{q}_j$  soit un polynôme de Weierstrass de  $\mathcal{A}(E, E_j)[\underline{Z}_j]$ .

Remarque : On identifie ici  $\sigma(E)$  à un sous-anneau de

$$\mathcal{A}(E, E_j)[[\underline{Z}_1, \dots, \underline{Z}_j]]$$

- Sous ces hypothèses  $\underline{q}_j \in \mathcal{A}(E, E_{j-1})$

- On définit l'aboutissement d'une suite de Weierstrass comme étant l'aboutissement du système de décompositions emboîtées.

- On définit de même des suites de Weierstrass tronquées à partir d'une suite donnée.

- Si  $J$  est un idéal de  $\sigma(E)$  et si, pour tout  $j$ ,

$$\underline{q}_j \in J,$$

On dira que la suite est contenue dans  $J$ .

Ces notions étant présentées, nous pouvons passer à l'étude proprement dite.

Soit  $J$  un idéal propre de  $\sigma(E)$ ,  $E_p$  un sous-espace de dimension finie de  $E$  tel que  $\mathcal{A}(E, E_p) \rightarrow \sigma(E)/J$  soit fini. Si  $\underline{f}$  est un élément de  $\sigma(E)$ , sa classe dans  $\sigma(E)/J$  admet un polynôme minimal  $P_{\underline{f}}$  à coefficients dans le corps des fractions  $k$  de  $\mathcal{A}(E, E_p)$ . Mais  $\mathcal{A}(E, E_p)$  étant isomorphe à  $\sigma(E/E_p)$  est intégralement clos donc  $P_{\underline{f}}$  est un polynôme unitaire de  $\mathcal{A}(E, E_p)[T]$ .

Lemme 2 : Sous les hypothèses précédentes, si  $u$  est une forme linéaire sur  $E$  non identiquement nulle sur  $E_p$ ,  $P_u$  est un polynôme de Weierstrass.

$u$  n'étant pas nulle sur  $E_p$  peut intervenir dans un système de coordonnées de  $E_p$ . Soit  $Z_1, \dots, Z_p$  ce système, avec  $u = Z_1$ ;  $e_1, \dots, e_p$  la base duale et  $E_p'$  le supplémentaire canonique de  $E_p$ . En identifiant  $\sigma(E_p')$  et  $\mathcal{A}(E, E_p)$ ,  $P_{\underline{Z}_1}(\underline{Z}_1) \in J$  donc  $P_{\underline{Z}_1}(\underline{Z}_1)$  appartient à l'idéal maximal de  $\sigma[E_p' \oplus \mathbb{C} e_1]$ ; sa restriction à  $\mathbb{C} e_1$  n'est pas identiquement nulle, on peut donc lui appliquer le théorème de préparation. Nous obtenons donc un polynôme de Weierstrass  $\underline{Q}[\underline{Z}_1]$  et un germe inversible  $\underline{H}$  tel que :

$$P_{\underline{Z}_1}[\underline{Z}_1] = \underline{H} \underline{Q}[\underline{Z}_1]$$

La minimalité de  $P_{\underline{Z}_1}$  implique alors  $d^\circ P_{\underline{Z}_1} = d^\circ \underline{Q}$  et donc  $P_{\underline{Z}_1} = \underline{Q}$ .

Lemme 3 : Soit  $E$  un espace de Banach,  $E_p$  un sous-espace de dimension finie,  $J$  et  $J'$  deux idéaux de  $\sigma(E)$  tels que  $J \subset J'$  et  $\mathcal{A}(E, E_p) \rightarrow \sigma(E)/J$  soit fini, alors

$$\mathcal{A}(E, E_p) \rightarrow \sigma(E)/J' \text{ est fini.}$$

C'est évident.

Théorème 1 : Soit  $J$  un idéal propre de  $\sigma(E)$ ,  $E_p$  un sous-espace de dimension finie  $p$  de  $E$ . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) le morphisme  $\mathcal{A}(E, E_p) \rightarrow \sigma(E)/J$  est fini  
 ii)  $J$  contient une suite de Weierstrass aboutissant en  $E_p$ .

- i)  $\implies$  ii) Si  $Z_1, \dots, Z_p$  est un système de coordonnées de  $E_p$ , il permet de définir  $E_1, \dots, E_{p-1}$  et en posant  $\underline{q}_i = P_{\underline{Z}_i}$  il est facile de voir que

$$E_1, \dots, E_p \quad Z_1, \dots, Z_p \quad \underline{q}_1, \dots, \underline{q}_p$$

est une suite de Weierstrass contenue dans  $J$ .

- ii)  $\implies$  i) Raisonnons par récurrence sur  $p$ .  
 Si  $p=1$  cet énoncé est celui du théorème de division.

Supposons l'implication établie pour  $p-1$ , en identifiant les anneaux  $\sigma(E'_i)$ ,  $\sigma(E/E_i)$  et  $\mathcal{A}(E, E_i)$  on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & \sigma(E) \\
 & & & \nearrow & \downarrow \\
 & & \sigma(E'_1) & \xrightarrow{\alpha} & \sigma(E)/(\underline{q}_1) \\
 & \nearrow & \downarrow & & \downarrow s \\
 \sigma(E'_p) & \xrightarrow{\beta} & \sigma(E'_1)/(\underline{q}_2, \dots, \underline{q}_p) & \xrightarrow{\gamma} & \sigma(E)/(\underline{q}_1, \dots, \underline{q}_p)
 \end{array}$$

où  $\alpha$  est fini, d'après le théorème de division  
 $\gamma$  est fini, car  $s$  est surjective  
 $\beta$  est fini, d'après l'hypothèse de récurrence.  
 Donc  $\gamma \circ \beta$  est fini, et d'après le lemme 3

$$\sigma(E'_p) \longrightarrow \sigma(E)/J \text{ est fini.}$$

Proposition 3 : Etant donnés  $J$  idéal propre de  $\sigma(E)$  et  $E_p$  sous-espace de  $E$  de dimension finie, si le morphisme  $\mathcal{A}(E, E_p) \rightarrow \sigma(E)/J$  est fini,  $V[J_p]$  est réduit à  $0$ .

Par restriction, des générateurs du  $\mathcal{A}(E, E_p)$ -module  $\sigma(E)/J$  donnent des générateurs du  $\mathbb{C}$  espace vectoriel  $\sigma(E_p)/J_p$  qui est donc de dimension finie. Il suffit alors d'appliquer le :

Lemme 4 : Si  $I$  est un idéal propre de  $\sigma[\mathbb{C}^p]$  et si  $\sigma[\mathbb{C}^p]/I$  est un  $\mathbb{C}$  espace vectoriel de dimension finie,  $V(I)$  est réduit à  $0$ .

Ce résultat est classique.

Proposition 4 : Si  $J$  est un idéal géométrique de  $\sigma(E)$ , et  $E_1$  un sous-espace de dimension 1 de  $E$ , si  $V[J] \cap E_1 = \{0\}$ , l'homomorphisme  $\mathcal{A}(E, E_1) \rightarrow \sigma(E)/J$  est fini.

$V[J] \cap E_1 = 0$  implique que l'un au moins des éléments de  $J$  ne s'annule pas identiquement sur  $E_1$ , en lui appliquant le théorème de préparation, on obtient une suite de Weierstrass aboutissant en  $E_1$ . Le théorème 1 permet de conclure.

Théorème 2 : Soit  $J$  un idéal géométrique de  $\sigma(E)$ ,  $E_p$  un sous-espace de  $E$  de dimension finie  $p$ ,  $E'_p$  un supplémentaire topologique de  $E_p$  tels que  $\sigma(E'_p) \rightarrow \sigma(E)/J$  soit fini. Alors.

- i)  $J' = J \cap \sigma(E'_p)$  est géométrique
- ii) Si  $\underline{X} = V[J]$ ,  $\underline{X}' = V[J']$ , il existe un polydisque  $\Delta = \delta' \times \delta''$  associé à  $(E'_p, E_p)$ , un représentant  $X$  de  $\underline{X}$  dans  $\Delta$  et un représentant  $X'$  de  $\underline{X}'$  dans  $\delta'$  tel que

$X' = \tau[X]$  (où  $\tau$  est la projection canonique de  $\Delta$  sur  $\delta'$ ).

Faisons tout d'abord les hypothèses supplémentaires  $p=1$ ,  $J$  est de type fini,  $J$  propre.

D'après la proposition 3,  $V[J] \cap E_1 = \emptyset$ , il existe donc un élément  $\underline{f}_1$  de  $J$  non identiquement nul sur  $E_1$ . Complétons  $\underline{f}_1$  en un système de générateurs de  $J$  :  $\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n$ . Choisissons une coordonnée  $Z_1$  sur  $E_1$  (telle que  $E_1' = \text{Ker } Z_1$ ) et appliquons le théorème de préparation à  $\underline{f}_1$ , on obtient un polynôme de Weierstrass  $\underline{q}_1$  dans  $\mathcal{O}(E_1')[Z_1]$ , divisons  $\underline{f}_2, \dots, \underline{f}_n$  par  $\underline{q}_1$  on obtient des restes  $\underline{r}_2, \dots, \underline{r}_n$ .  $\underline{q}_1, \underline{r}_2, \dots, \underline{r}_n$  engendrent encore  $J$ . On peut alors trouver un polydisque  $\Delta = \delta' \times \delta''$  ( $\delta''$  de rayon  $r''$ ) et des représentants  $q_1, r_2, \dots, r_n$  de  $\underline{q}_1, \underline{r}_2, \dots, \underline{r}_n$  dans  $\mathcal{H}(\Delta)$  de façon que :

$$q_1[x', x''] = 0 \implies |x''| < r''.$$

Appliquons alors la théorie de l'élimination (cf. [1]).

On obtient un nombre fini de fonctions,  $D_1, \dots, D_m$  appartenant à  $\mathcal{H}(\delta')$  telles que :

a) Pour que  $q_1[x', T], r_2[x', T], \dots, r_n[x', T]$  aient une racine commune, IFIS que  $D_1[x'] = \dots = D_m[x'] = 0$

b)  $D_1, \dots, D_m$  appartiennent à l'idéal de  $\mathcal{H}[\delta'][Z_1]$  engendré par  $q_1[x'_1 Z_1], \dots, r_n[x', Z_1]$ .

Posons  $X = V[q_1, r_2, \dots, r_n]$

$$I' = (\underline{D}_1, \dots, \underline{D}_m)$$

$$X' = V(D_1, \dots, D_m)$$

alors a) implique qu'un point  $x'$  de  $\delta'$  appartient à  $\tau[X]$  si et seulement si  $D_1[x'] = \dots = D_m[x'] = 0$  d'où  $\tau[X] = X'$

b) implique  $I' \subset J'$ .

En outre un germe de  $J'$  s'annule identiquement sur  $X$  donc sur  $X'$  d'où  $J' \subset I[\underline{V}(I')]$ .  $J'$  est donc géométrique et  $\underline{X}' = \underline{V}[J']$ . C.Q.F.D.

• Remplaçons l'hypothèse de type fini par géométrique.

Soit  $I$  de type fini tel que

$$I \subset J \subset I[\underline{V}(I)]$$

alors

$$\underline{V}(I) \cap E_1 = \underline{V}[J] \cap (E_1) = \{\underline{0}\}$$

d'après la proposition 3.

La proposition 4 montre alors que  $\sigma(E'_1) \rightarrow \sigma(E)/I$  est fini. Donc  $I' = I \cap \sigma(E'_1)$  est géométrique. Il existe donc  $I'_0$  de type fini tel que :

$$I'_0 \subset I' \quad \text{et} \quad \underline{V}(I') = \underline{V}(I'_0)$$

Si  $\underline{X} = \underline{V}[J] = \underline{V}(I)$        $\underline{X}' = \underline{V}(I'_0) = \underline{V}(I')$ .

Tout germe de  $J$  s'annule identiquement sur  $\underline{X}$  donc tout germe de  $J'$  s'annule identiquement sur la projection de  $\underline{X} = \underline{V}(I)$  qui est  $\underline{X}'_0 = \underline{V}(I')$  d'après la première partie. On a donc  $I'_0 \subset J' \subset I[\underline{V}(I'_0)]$ .

$J'$  est donc géométrique et  $\underline{X}' = \underline{V}[J'] = \underline{X}'_0$ .

• On ne fait plus que l'hypothèse supplémentaire  $J$  propre.

Soit  $Z_1, \dots, Z_p$  un système de coordonnées sur  $E_p$  s'annulant sur  $E'_p$ ;  $E_1, \dots, E_{p-1}$   $E'_1, \dots, E'_{p-1}$  les espaces associés à ce système.

$\sigma(E'_p) \rightarrow \sigma(E)/J$  étant fini, le théorème 1 affirme que  $J$

contient une suite de Weierstrass  $\underline{q}_1, \dots, \underline{q}_p$  aboutissant en  $E_p$ . Alors si  $J'_j = J \cap \sigma(E'_j)$ ,  $J'_j$  contient la suite de Weierstrass :  $\underline{q}_{j+1}, \dots, \underline{q}_p$  donc

$$\sigma(E'_p) \rightarrow \sigma(E'_j)/J'_j \text{ est fini.}$$

Le théorème se démontre alors par récurrence sur  $p$ .

Le cas  $J = \sigma(E)$  est trivial.

Nous allons déduire de ce théorème l'équivalence annoncée précédemment.

Soit  $E$  un espace de Banach,  $E_p$  un sous-espace de  $E$  de dimension finie  $p$ ,  $J$  un idéal propre de  $\sigma(E)$ ;  $J_p$  l'image de  $J$  dans  $\sigma(E_p)$ . On a alors le

Théorème 3 : Les propositions suivantes sont équivalentes :

- i)  $\mathcal{A}(E, E_p) \rightarrow \sigma(E_p)/J$  est fini
- ii)  $\underline{v}[J_p] = \underline{0}$
- iii)  $J$  contient une suite de Weierstrass aboutissant en  $E_p$ .

L'équivalence i)  $\implies$  iii) est prouvée par le théorème 1.

L'implication i)  $\implies$  ii) est prouvée par la proposition 3.

Démontrons ii)  $\implies$  i).

$J_p$  admet un nombre fini de générateurs  $\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n$  que l'on peut relever dans  $\sigma(E)$  en  $\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_n$ . Les  $\underline{g}_i$  engendrent un idéal de type fini  $I$  et l'on a :

$$I_p = J_p \text{ donc } \underline{v}[I_p] = \underline{0}$$

$I \subset J$ . Si donc le théorème est vrai pour  $I$  il le sera pour  $J$  d'après le lemme 3.

Il suffit donc de démontrer ce théorème quand  $J$  est de type fini ou, a fortiori, géométrique.

Nous faisons donc l'hypothèse supplémentaire :  $J$  est géométrique.

Raisonnons par récurrence sur  $p$ . Si  $p=1$  on retrouve la proposition 4. Pour  $p$  quelconque, soit  $Z_1, \dots, Z_p$  un système de coordonnées sur  $E_p$ ,  $e_1, \dots, e_p$  la base duale et  $E'_1, \dots, E'_p$  les supplémentaires canoniques.

Notons  $J'_1$  l'idéal  $J \cap \sigma(E'_1)$ . Appliquons le théorème 2 :

la partie i) montre que  $J'_1$  est géométrique

la partie ii) montre que  $\underline{V}(J'_1) \cap (\mathbb{C}e_2 \oplus \dots \oplus \mathbb{C}e_p) = \underline{0}$ .

L'hypothèse de récurrence montre alors que :

$$\sigma(E'_p) \rightarrow \sigma(E'_1)/_{J'_1} \text{ est fini.}$$

Or  $\sigma(E'_1) \rightarrow \sigma(E)/_J$  est fini car  $V[J] \cap E_1 = 0$ .

On en conclut donc :

$$\sigma(E'_p) \rightarrow \sigma(E)/_J \text{ est fini}$$

C.Q.F.D.

De ce théorème on tire immédiatement le :

Corollaire : Si  $X$  est un germe analytique (resp.  $J$  un idéal géométrique), pour que le morphisme

$$\mathcal{A}(E, E_p) \rightarrow \sigma(E)/_{I(\underline{X})} \text{ (resp. } \sigma(E)/_J \text{) soit fini}$$

il faut et il suffit que :

$$E_p \cap \underline{X} = \underline{0} \text{ (resp. } E_p \cap \underline{V}(J) = \underline{0} \text{)}$$

## VI - Décompositions maximales.

Si  $I$  est un idéal de  $\sigma(E)$  nous avons ainsi caractérisé les sous-espaces  $E_p$  tels que le morphisme  $\mathcal{A}(E, E_p) \rightarrow \sigma(E)/_J$

soit fini. Nous allons nous intéresser à l'existence de sous-espaces maximaux (pour l'inclusion) possédant cette propriété.

Définition 3 : Si  $J$  est un idéal de  $\mathcal{O}(E)$ , une suite de Weierstrass contenue dans  $J$  est dite maximale pour  $J$  si elle ne peut pas se prolonger en une suite strictement plus longue contenue dans  $J$ .

Proposition 5 : Soit  $J$  un idéal propre de  $\mathcal{O}(E)$ ,  $E_p$  un sous-espace de  $E$  de dimension finie  $p$  tel que  $\mathcal{A}(E, E_p) \rightarrow \mathcal{O}(E)/J$  soit fini. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i)  $\mathcal{A}(E, E_p) \cap J = 0$  :
- ii)  $\mathcal{A}(E, E_p) \rightarrow \mathcal{O}(E)/J$  est injectif.
- iii)  $E_p$  est maximal pour  $J$ .
- iv) il existe une suite de Weierstrass maximale pour  $J$  et aboutissant en  $E_p$ .
- v) toute suite de Weierstrass contenue dans  $J$  et aboutissant en  $E_p$  est maximale.

Il est clair que i)  $\iff$  ii)

Montrons iv)  $\implies$  i). Soit  $E_1, \dots, E_p, Z_1, \dots, Z_p, \underline{q}_1, \dots, \underline{q}_p$  une suite maximale.

Supposons  $(\exists \underline{f} \in \mathcal{A}(E, E_p) \cap J) (\underline{f} \neq \underline{0})$  alors il existe  $e_{p+1} \in E'_p$  avec  $\underline{f}$  non nul sur  $\mathbb{C}e_{p+1}$ . Choisisant un supplémentaire topologique  $E'_{p+1}$  de  $\mathbb{C}e_{p+1}$  dans  $E'_p$ , on peut appliquer le théorème de préparation à  $\underline{f}$  et on obtient un polynôme de Weierstrass  $\underline{q}_{p+1}$ . Alors la suite de Weierstrass  $\underline{q}_1, \dots, \underline{q}_p, \underline{q}_{p+1}$  est contenue dans  $J$  ce qui contredit la maximalité de  $\underline{q}_1, \dots, \underline{q}_p$  i) est donc vérifiée.

On a alors évidemment i)  $\implies$  v)  $\implies$  iii)  $\implies$  iv)

Définition 4 : On dit qu'un idéal  $J$  de  $\sigma(E)$  satisfait au lemme de normalisation pour un sous-espace  $E_p$  de dimension finie, si

$$\mathcal{A}(E, E_p) \rightarrow \sigma(E)/J \text{ est fini et injectif.}$$

On dit qu'il satisfait au lemme de normalisation s'il y satisfait pour un sous-espace au moins.

Nous allons démontrer que, en particulier, les idéaux géométriques satisfont au lemme de normalisation.

Lemme 5 : Supposons  $\dim E = \infty$ . Si  $J$  est un idéal non nul de  $\sigma(E)$ , deux cas sont possibles :

- i)  $J$  satisfait au lemme de normalisation
- ii)  $J$  contient une suite de Weierstrass infinie.

Remarque : Bien que ce soit vrai, il n'est pas évident que ces deux cas s'excluent.

$J$  étant non nul, soit  $f$  un élément non nul de  $J$  et  $E_1$  un sous-espace de dimension 1 de  $E$  sur lequel  $f$  n'est pas identiquement nul. Choisissons une coordonnée  $Z_1$  sur  $E_1$  et donc un supplémentaire  $E_1'$ .

Appliquons le théorème de préparation, on obtient un polynôme de Weierstrass  $q_1$ . Si  $J_1' = \sigma(E_2') \cap J$  est nul,  $J$  satisfait au lemme de normalisation pour  $E_1$ . Sinon continuons ce procédé pour  $J_1'$  et  $E_1'$ , et ainsi de suite. Ou bien ceci s'arrête au bout de  $p$  opérations et alors  $J$  satisfait au lemme de normalisation pour  $E_p$  et l'on est dans le cas i), ou bien le procédé ne s'arrête pas et on est dans le cas ii).

Lemme 6 : Si  $J$  est un idéal de  $\sigma(E)$ ,  $X$  un germe analytique, non vide, défini par  $n$  germes scalaires,  $E_p$  un

sous-espace de E de dimension finie p et si  
 $\mathcal{A}(E, E_p) \rightarrow \sigma(E)/_J$  est fini, alors :

$$J \subset I(\underline{X}) \implies p \leq n$$

Soient  $\underline{f}_1, \underline{f}_2, \dots, \underline{f}_n$  des germes définissant  $X$ ,  
 $\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_n$  leur restriction à  $E_p$ , posons  $\underline{X}_p = \underline{V}[\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_n]$  on  
 a alors :

$$J \subset I(\underline{X}) \implies J_p \subset I(\underline{X}_p)$$

(où  $J_p$  est l'image de  $J$  dans  $\sigma(E_p)$ ). D'où  $\underline{X}_p \subset \underline{V}(J_p)$ .

Appliquons le théorème 3, il vient  $\underline{X}_p = \underline{0}$ . Mais dans  $\mathbb{C}^p$   $n$   
 fonctions ne peuvent définir le germe  $\underline{0}$  que si  $n \geq p$ .

Théorème 4 : Soit I un idéal contenu dans un idéal propre  
géométrique J de  $\sigma(E)$ ,  $E_p$  un sous-espace de E de dimension  
finie p tel que

$$\mathcal{A}(E, E_p) \rightarrow \sigma(E)/_I \text{ soit fini}$$

alors il existe  $E_q$  tel que  $E_p \subset E_q$  et I satisfassent au  
lemme de normalisation pour  $E_q$ .

I étant contenu dans J, géométrique, est contenu dans un  
 $I(\underline{X})$  où  $\underline{X}$  est non vide et peut être défini par un nombre fini  
 $n$  d'équations scalaires.

Soit alors  $E_q$  un sous-espace de dimension  $q$  de  $E$  tel  
 que  $\mathcal{A}(E, E_q) \rightarrow \sigma(E)/_I$  soit fini, le lemme 6 assure  $q \leq n$ .

Tout tel sous-espace est donc contenu dans un sous-espace  
 maximal, en particulier  $E_p$ .

Corollaire : Tout idéal propre géométrique satisfait au  
lemme de normalisation.

Une étude plus approfondie montre que si  $J$  satisfait au lemme de normalisation pour  $E_p$ , le nombre  $p$  ne dépend que de  $J$ . Ce nombre  $p$  est lié à la hauteur de l'idéal et éventuellement à la codimension de  $\underline{V}(J)$ .

---

Référence bibliographique

- [1] VAN DER WAERDEN - Modern Algebra, chap.11.
-

Exposé n° 11 : LE NULLSTELLENSATZ POUR LES GERMES ANALYTIQUES  
BANACHIQUES

par Pierre MAZET.

Le nullstellensatz que nous nous proposons de démontrer s'énonce ainsi :

Théorème 1 : Si  $E$  est un espace de Banach complexe,  $O(E)$  l'anneau des germes de fonctions holomorphes en  $0$ ,  $I$  un idéal géométrique de  $O(E)$  alors  $I$  définit un germe  $V$  d'ensemble analytique et l'idéal  $I[V]$  des germes qui s'annulent sur  $V$  est la racine de  $I$ .

---

En fait nous allons démontrer un théorème plus précis sur la structure des germes de définition finie :

Théorème 2 : Sous les hypothèses du théorème 1 si  $J$  est un idéal de type fini tel que  $J \subset I \subset I[V(J)]$  et si  $J$  est engendré par  $n$  éléments alors :

- i) Les idéaux premiers minimaux pour  $I$  (ou isolés pour  $I$ ) sont de hauteur  $\leq n$ ,
- ii) les idéaux sont en nombre fini et définissent des germes  $V_\alpha$  tels que  $V = \bigcup V_\alpha$  (les  $V_\alpha$  sont alors irréductibles).
- iii) La décomposition ci-dessus de  $V$  est la seule décomposition en germes irréductibles telle qu'il n'y ait aucune relation d'inclusion entre les  $V_\alpha$ .

Remarques : Si i) est démontré les résultats de Ramis entraînent que ii) est vérifié, mais nous obtiendrons ii)

par des méthodes différentes.

i) et ii) étant démontrés iii) en découle immédiatement car les  $V_\alpha$  étant définis par des idéaux premiers minimaux  $\mathfrak{P}_\alpha$  il n'y a aucune relation d'inclusion entre les  $\mathfrak{P}_\alpha$  donc entre les  $V_\alpha$ .

Réciproquement si  $\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha = \bigcup_{\beta \in B} V_\beta$  où les  $V_\beta$  sont irréductibles, pour tout  $\beta \in B$  on a  $V_\beta \supset \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$  donc ( $V_\beta$  étant irréductible)  $V_\beta$  contient l'un des  $V_\alpha$ ; de même  $\forall \alpha \in A, \exists \beta \in B$  t.q.  $V_\alpha \supset V_\beta$ . Comme il n'y a aucune relation d'inclusion entre les  $V_\alpha$  ou entre les  $V_\beta$  ceci établit une bijection  $\phi$  entre  $A$  et  $B$  telle que

$$V_\alpha = V_{\phi(\alpha)}$$

ce qui démontre l'unicité de la décomposition.

Montrons enfin comment le théorème 2 entraîne le Nullstellensatz.

Si  $I$  est géométrique, il existe  $J$  de type fini tel que  $J \subset I \subset I(V(J))$  et  $V(J) = V(I) = V$ .

D'après ii)  $V = \bigcup V_\alpha$  où les  $V_\alpha$  sont définis par les idéaux premiers  $\mathfrak{P}_\alpha$  minimaux pour  $I$ .

On a donc  $I[V] = \bigcap I[V_\alpha]$  or le Nullstellensatz est connu pour les idéaux premiers géométriques, donc  $I[V_\alpha] = \mathfrak{P}_\alpha$  et  $I[V] = \bigcap \mathfrak{P}_\alpha$  est la racine de  $J$ .

Remarquons en outre que si  $\mathfrak{P}$  est un idéal premier contenant  $J$  il contiendra la racine de  $J$ , c'est-à-dire  $I(V[J])$  si le théorème 2 a été établi pour les idéaux de type fini, donc il contiendra  $I$  et les idéaux premiers contenant  $I$  et  $J$  seront les mêmes, comme  $I$  et  $J$  définissent la même variété, le théorème 2 sera démontré si on le démontre pour  $I$  de type fini et  $I = J$ .

Cette démonstration va se faire par récurrence sur  $n$ .

Pour  $n=0$  le théorème est évident ( $I=J=0$ ).

Pour  $n=1$   $I$  est principal engendré par  $x \neq 0$  et  $O(E)$  étant factoriel, les idéaux premiers minimaux pour  $I$  sont les idéaux engendrés par les facteurs premiers de  $x$ , ils sont donc de hauteur 1 et en nombre fini.

Supposons donc le théorème démontré jusqu'à  $n-1$  et démontrons le pour  $n$ .

Soient  $x_1, \dots, x_n$  des générateurs de  $I$  et  $\mathfrak{P}$  un idéal premier minimal pour  $I$ . Si  $I'$  est l'idéal engendré par  $x_1, \dots, x_{n-1}$ , il existe  $\mathfrak{q}$  minimal pour  $I'$  avec  $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{P}$ . D'après l'hypothèse de récurrence  $\mathfrak{q}$  ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs et est de hauteur  $\leq n-1$ . Par ailleurs  $\mathfrak{P}$  est minimal parmi ceux qui contiennent  $x_n$  et  $\mathfrak{P}$ .

On est donc amené à démontrer :

Si  $\mathfrak{q}$  est un idéal premier de  $O(E)$  de hauteur  $q$  et  $x \in O(E)$  les idéaux premiers de  $O(E)$  minimaux parmi ceux contenant  $\mathfrak{q}$  et  $x$  sont en nombre fini et de hauteur  $\leq q+1$ .

Or les idéaux contenant  $\mathfrak{q}$  correspondent bijectivement (avec inclusions conservées) aux idéaux de  $O(E)/\mathfrak{q}$ , les idéaux premiers se correspondant.

Par ailleurs on sait que,  $\mathfrak{q}$  étant de hauteur  $q$ , il existe  $F$  sous-espace de  $E$  de codimension  $q$  tel que l'application  $O(F) \rightarrow O(E)/\mathfrak{q}$  soit injective et fasse de  $O(E)/\mathfrak{q}$  un  $O(F)$  module de type fini. Si  $x'$  est l'image de  $x$  dans  $O(E)/\mathfrak{q}$ , les idéaux qui nous intéressent correspondent aux idéaux premiers de  $O(E)/\mathfrak{q}$  minimaux pour  $x'$ . Nous devons montrer qu'ils sont en nombre finis, et pour montrer qu'ils correspondent à des idéaux de hauteur  $\leq q+1$  il suffira de montrer qu'ils rencontrent  $O(F)$  suivant un idéal de hauteur  $\leq 1$ .  $O(F)$  étant factoriel, "de hauteur  $\leq 1$ "  $\iff$  "principal".

Nous aurons donc démontré le théorème 2 si nous démontrons le théorème suivant qui est purement algébrique.

Théorème 3 : Si un anneau intègre  $B$  contient un anneau factoriel  $A$  de telle façon que  $B$  soit un  $A$ -module de type fini, et si  $x \in B$  alors

- i) Les idéaux premiers de  $B$  minimaux pour  $x$  sont en nombre fini,
- ii) les idéaux rencontrent  $A$  suivant un idéal principal.

Remarquons que si  $B$  est un  $A$ -module de type fini,  $B$  est entier sur  $A$ , aussi allons-nous, au préalable, démontrer le

Théorème 4 : Si  $B$  est un anneau intègre contenant un anneau factoriel  $A$ , si  $B$  est entier sur  $A$ , si  $x \in B$  et si  $\mathfrak{P}$  est un idéal premier de  $B$  minimal pour  $x$ , alors  $\mathfrak{q} = \mathfrak{P} \cap A$  est un idéal principal de  $A$ .

Remarque : ces théorèmes peuvent recevoir des généralisations intéressantes en remplaçant  $A$  factoriel par  $A$  de Krull ; mais, ici, nous nous sommes attachés à utiliser le moins possible les notions élaborées d'algèbre commutative ; nous avons en particulier éliminé toute référence aux théorèmes de Cohen Seidenberg sur le relèvement des idéaux premiers.

Nous croyons qu'il s'agit de démontrer qu'un idéal premier dans un anneau factoriel est principal, pour cela nous utiliserons le :

Lemme 1 : Si  $A$  est un anneau factoriel et  $\mathfrak{q}$  un idéal premier de  $A$  tel que  $\mathfrak{q}$  ne contienne qu'un nombre fini (aux équivalences par les inversibles près) de facteurs premiers alors  $\mathfrak{q}$  est principal.

Soit  $x \in \mathfrak{q}$ ,  $x \neq 0$  ;  $x$  peut s'écrire  $x_1 \cdot \dots \cdot x_p$  avec  $x_i$  premier donc  $\exists i$  tel que  $x_i \in \mathfrak{q}$ . Réciproquement si  $x$  a un facteur premier dans  $\mathfrak{q}$ ,  $x \in \mathfrak{q}$ .

Donc, si  $n$  est le nombre de facteurs premiers de  $\mathfrak{q}$

$n = 0 \implies \mathfrak{q} = 0$

$n = 1 \implies \mathfrak{q}$  est engendré par ce facteur premier.

Montrons que  $n \geq 2$  est impossible.

Soit  $x_1, \dots, x_n$  ces facteurs premiers, formons  $x = x_1 \cdot \dots \cdot x_{n-1} + x_n$ ,  $x \in \mathfrak{q}$  donc il existe  $y$  facteur premier de  $x$  avec  $y \in \mathfrak{q}$ , mais  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$   $x_i$  ne divise pas  $x$ .

On aboutit donc à une contradiction, ce qui démontre le lemme.

Les deux lemmes suivants sont la clé de la démonstration du théorème. Ils s'énoncent dans la situation suivante :  $A$  est un anneau factoriel,  $k$  son corps des fractions,  $K$  une extension de  $k$ .

Lemme 2 : Si  $z \in K$  est entier sur  $A$ ,  $\alpha, \beta$  deux éléments non nuls de  $A$  premiers entre eux tels que  $\frac{\alpha z}{\beta}$  soit entier sur  $A$ ; alors  $\frac{z}{\beta}$  est entier sur  $A$ .

Dans  $k(z)$  la multiplication par  $z$  a pour polynôme caractéristique (sur  $k$ ) :  $X^r + a_1 X^{r-1} + \dots + a_r$  où  $a_i \in A$  car  $z$  est entier sur  $A$  et  $A$  intégralement clos. Alors le polynôme caractéristique de  $\frac{\alpha z}{\beta}$  est :

$$X^r + \frac{\alpha a_1}{\beta} X^{r-1} + \dots + \frac{\alpha^r a_r}{\beta^r}$$

qui est encore à coefficients dans  $A$ , donc  $\beta^i$  divise  $\alpha^i a_i$  dans  $A$ . Comme  $\alpha$  et  $\beta$  sont premiers entre eux  $\beta^i$  divise  $a_i$  donc le polynôme caractéristique de  $\frac{z}{\beta}$ , qui est

$$X^r + \frac{a_1}{\beta} X^{r-1} + \dots + \frac{a_r}{\beta^r}$$

est à coefficients dans  $A$  et  $z/\beta$  est entier sur  $A$

C.Q.F.D.

Avant d'énoncer le lemme 3, précisons la notation suivante : si  $z \in K$  est entier sur  $A$ , son polynôme minimal  $T$  est à coefficient dans  $A$ ; alors le terme constant de  $T$  s'appelle la norme de  $z$  et se note  $N(z)$ .

Remarquons que  $z \neq 0 \implies N(z) \neq 0$  et que  $T = SX + N(z)$  donc  $N(z) = -z S(z)$ , c'est-à-dire que  $\frac{N(z)}{z}$  est entier sur  $A$ .

Lemme 3 : Si  $z \in K$  est non nul entier sur  $A$ , si  $\lambda \in K$  est entier sur  $A$  et si  $\alpha \in A$  est premier avec  $N(z)$  alors  $\frac{\lambda z}{\alpha}$  entier sur  $A \implies \frac{\lambda}{\alpha}$  entier sur  $A$ .

En effet  $\frac{\lambda N(z)}{\alpha} = \frac{\lambda z}{\alpha} \cdot \frac{N(z)}{z}$  est entier sur  $A$ , il ne reste plus qu'à appliquer le lemme 2.

Démonstration du Théorème 4 : Si  $y \in \mathfrak{q}$  est irréductible, nous allons montrer que  $y$  divise  $N(x)$  et le lemme 1 permettra de conclure car  $N(x)$  a un nombre fini de diviseurs premiers. Considérons donc un tel  $y$ , le caractère minimal de  $\mathfrak{P}$  montre que  $A = \mathfrak{P}$  et  $y$  engendrent une partie multiplicative qui rencontre  $B \cdot x$ , d'où une formule du type :

$$\sigma y^n = \lambda x$$

où  $\sigma \notin \mathfrak{P}$ ,  $\lambda \in B$ , alors  $x$  est entier sur  $A$  donc, dans le corps des fractions de  $B$ ,  $\frac{\lambda x}{y^n}$  est entier sur  $A$  et on peut appliquer le lemme 3; si  $y$  ne divise pas  $N(x)$   $\frac{\lambda}{y^n} = \frac{\sigma}{x}$  est entier sur  $A$ .

Ecrivons une relation de dépendance intégrale pour  $\sigma/x$  :

$$\sigma^n + a_1 x \sigma^{n-1} + \dots + a_n x^n = 0$$

donc  $\sigma^n \in B \cdot x \subset \mathfrak{P}$  ce qui est contraire à  $\sigma \notin \mathfrak{P}$  et termine la démonstration.

Remarquons alors que les idéaux  $\mathfrak{q}$  étudiés, étant principaux, sont du type  $(y)$  où  $y$  est un facteur irréductible de  $N(x)$ .

Le théorème 4 démontre alors le point ii) du théorème 3, mais la remarque précédente permet de démontrer le point i). En effet les idéaux minimaux considérés sont des relèvements d'un nombre fini d'idéaux, il suffit donc de montrer que chaque idéal premier  $\mathfrak{q}$  de  $A$  admet un nombre fini de relèvements dans  $B$ .

Ceci vient du fait que  $B$  est un  $A$ -module de type fini. (cf. Bourbaki Alg. Commut. ch.5)

On peut en donner la démonstration suivante.

Si  $S = A - \mathfrak{q}$ ,  $S$  est une partie multiplicative de  $A$  et pour tout relèvement  $\mathfrak{P}$  de  $\mathfrak{q}$   $S \cap \mathfrak{P} = \emptyset$ ; donc les relèvements correspondent aux idéaux premiers de  $S^{-1}B$  qui relèvent l'idéal maximal  $\mathfrak{M}$  de  $S^{-1}A = A_{\mathfrak{P}}$ . Si  $\mathfrak{N}$  est l'idéal de  $S^{-1}B$  engendré par  $\mathfrak{N}$  ces idéaux correspondent aux idéaux premiers de  $B' = S^{-1}B/\mathfrak{N}$ .

Or  $B$  est un  $A$ -module de type fini donc  $S^{-1}B$  est un  $S^{-1}A$ -module de type fini

$B'$  est un  $A'$ -module de type fini où  $A' = S^{-1}A/\mathfrak{M}$  mais alors  $A'$  est un corps.

On a alors la propriété suivante :

- tout idéal premier de  $B'$  est maximal

en effet le quotient de  $B'$  par un idéal premier est une  $A'$ -algèbre intègre de dimension finie. Comme  $A'$  est un corps, le quotient est un corps.

Il est alors aisé de démontrer que les idéaux de  $B'$  sont en nombre fini car si  $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_n, \dots$  était une suite infinie d'idéaux premiers de  $B'$  deux à deux distincts on aurait

$\mathfrak{P}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{P}_n$  est une suite de  $A'$ -espaces vectoriels dans un espace de dimension finie, il existe donc  $n$  tel que

$$\mathfrak{P}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{P}_n = \mathfrak{P}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{P}_{n-1}$$

donc

$$\mathfrak{P}_n \supset \mathfrak{P}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{P}_{n-1}$$

comme  $\mathfrak{P}_n$  est premier  $\mathfrak{P}_n$  contient un  $\mathfrak{P}_i$  pour  $i < n$  ce qui est contraire à  $\mathfrak{P}_i \neq \mathfrak{P}_n$  et  $\mathfrak{P}_i$  maximal.

### COMPLEMENT

Les idéaux du type  $I(X)$  :

Nous savons que les idéaux du type  $I(X)$  sont égaux à leur racine. Le nullstellensatz montre que la réciproque est vraie si l'idéal est géométrique, car alors :

$$I[V(I)] = \text{Rad } I = I .$$

Nous allons montrer que cette réciproque est fautive en général. Plus précisément, nous allons construire un contre-exemple valable pour tout espace de Banach de dimension infinie.

Soit  $E$  un espace de Banach et  $J$  l'ensemble des éléments  $f$  de  $O(E)$  tels que :

$f$  est nul sur un sous-espace fermé de codimension finie. Il est facile de voir que  $J$  est un idéal. D'autre part, comme les  $O(E')$  sont intègres pour tout sous-espace fermé  $E'$   $J$  est premier. Il est donc égal à sa racine.

Soit  $X$  un germe non vide tel que  $J \subset I(X)$ , si  $X \neq 0$  il existe une suite  $x_n$  d'éléments non nuls de  $E$  tels que  $\{x_n\} \subset X$ . Et donc, si  $f \in I(X)$ ,  $f(x_n) = 0$  à partir d'un certain indice. Or,  $E^*$  étant un espace de Baire, il existe

$\phi \in E^*$  tel que  $\phi(x_n)$  est non nul pour tout  $n$ . Le germe  $\phi$  est donc un élément de  $J$  qui n'appartient pas à  $I(X)$ . On a donc nécessairement  $X = 0$ . En particulier, si  $J = I(X)$  on a  $X = 0$  et donc  $J = \mathfrak{M}_0$  (idéal maximal de  $O(E)$ ).

Supposons alors  $E$  de dimension infinie.  $E^*$  est de dimension infinie, et si  $\phi_n$  sont des éléments de  $E^*$ , linéairement indépendants et de norme 1, on peut définir l'application  $f$  de la boule unité ouverte dans  $\mathbb{C}$  par :

$$f(x) = \sum_1^{\infty} [\phi_n(x)]^n .$$

La fonction  $f$  est alors analytique.

Soit  $E'$  un sous-espace de  $E$  tel que  $f$  soit nul sur  $E'$ . On peut trouver alors une boule de  $E'$  dont les points  $x$  vérifient :

$$(\forall t \in \mathbb{C}) \quad (|t| \leq 1 \rightarrow f(tx) = 0)$$

Si donc  $x$  appartient à cette boule, la série  $\sum_1^{\infty} [\phi_n(x)]^n t^n$  définit le germe nul. On a donc  $(\forall n \geq 1) (\phi_n(x) = 0)$ . D'où  $H' \subset \bigcap \text{Ker } \phi_n$  qui est un sous-espace de codimension infinie.

En conclusion  $f \notin J$  et pourtant  $f \in \mathfrak{M}_0$ .  $J$  ne peut donc pas être du type  $I(X)$ .

Exposé n° 2 : OPERATEURS A INDICE

par Gabriel RUGET.

Le corps de base sera  $\mathbb{C}$ , ou aussi bien  $\mathbb{R}$ .

I - Opérateurs compacts.

Si  $E$  et  $F$  sont deux espaces de Banach, nous notons  $L(E, F)$  l'ensemble des applications linéaires continues de  $E$  dans  $F$ , muni de la topologie de la norme ;  $K(E, F)$  désignera l'ensemble des applications linéaires compactes de  $E$  dans  $F$  - i.e. telles que l'image de la boule unité de  $E$  soit relativement compacte dans  $F$  - : c'est <sup>[15]</sup> un sous espace vectoriel fermé de  $L(E, F)$ , et le composé (à droite ou à gauche) d'un opérateur continu et d'un opérateur compact est un opérateur compact ; en particulier,  $K(E) = K(E, E)$  est un idéal bilatère fermé de l'algèbre de Banach  $L(E) = L(E, E)$ . On peut faire les mêmes remarques à propos de  $k(E, F)$ , adhérence dans  $L(E, F)$  de l'ensemble des opérateurs de rang fini ;  $k(E, F)$  est inclus dans  $K(E, F)$ , mais on ne sait pas s'il peut arriver qu'ils soient distincts ; on peut affirmer qu'ils coïncident pour  $F = \ell^2, \ell^1, c_0$  par exemple <sup>[4]</sup>.

Il existe des couples d'espaces  $E, F$  de dimension infinie tels que  $K(E, F) = L(E, F)$  : par exemple  $E = c_0, F = \ell^2$ . Soit en effet  $u$  une application linéaire continue de  $c_0$  dans  $\ell^2$ . Sa transposée  ${}^t u$  est une application de  $\ell^2$  dans  $\ell^1$ , continue aussi bien pour les topologies faibles qu'initiales ;  ${}^t u$  transforme donc la boule unité de  $\ell^2$ , qui est un compact faible, en un compact faible de  $\ell^1$ , lequel est automatiquement un compact fort. Ainsi  ${}^t u$ , donc  $u$ , sont des applications compactes.

## II - Opérateurs à indice.

Nous noterons  $\Omega(E, F)$  le sous-ensemble de  $L(E, F)$  formé des opérateurs dont le noyau est de dimension finie et l'image de codimension (algébrique) finie. Nous dirons d'un opérateur  $u \in \Omega(E, F)$  qu'il est "à indice" ; nous appellerons profondeur de  $u$  l'entier positif  $\dim \text{Ker } u$ , et indice de  $u$  l'entier  $\dim \text{Ker } u - \dim \text{Coker } u$ .

Proposition 1 : Tout opérateur à indice est d'image fermée ;  $\Omega$  est ouvert dans  $L$  ; la profondeur est une fonction s.c.s. sur  $\Omega$ , et l'indice une fonction continue. Plus précisément, si un sous-espace de  $F$  est transverse à l'image d'un opérateur à indice, il reste transverse à l'image des opérateurs voisins.

### Démonstration :

Soit  $u \in \Omega(E, F)$ ,  $T$  un supplémentaire algébrique de  $\text{Im } u$ ,  $S$  un supplémentaire fermé de  $\text{Ker } u$ . Pour un autre  $v \in \Omega(E, F)$ , considérons

$$\begin{aligned} \tilde{v} : S \oplus T &\longrightarrow F \\ (x, y) &\longmapsto v(x) + y ; \end{aligned}$$

$\tilde{u}$  est bijective et continue, donc est un isomorphisme, donc  $\tilde{v}$  reste un isomorphisme pour  $v$  voisin de  $u$  ...

Proposition 2 <sup>[15]</sup> : Le composé d'un opérateur d'indice  $p$  et d'un opérateur d'indice  $q$  est un opérateur d'indice  $p+q$ .

Proposition 3 <sup>[15]</sup> : Si un opérateur possède un inverse à gauche et un inverse à droite modulo les opérateurs compacts, il est à indice ; il possède alors un inverse (à droite et à gauche) modulo les opérateurs de rang fini.

Corollaire 4 : Si l'on rajoute un opérateur compact à un opérateur à indice, on obtient un opérateur de même indice.

### Démonstration :

Si  $u \in \Omega(E, F)$ , et  $h \in K(E, F)$ ,  $u+th$  est un chemin joignant  $u$  à  $u+h$ , situé dans  $\Omega(E, F)$  d'après Prop.3.

Remarques: Si  $E$  et  $F$  sont des espaces isomorphes à leurs hyperplans (donc à leurs sous-espaces de codimension finie), il est équivalent de dire qu'il existe un opérateur à indice de  $E$  dans  $F$ , ou qu'il existe des opérateurs de n'importe quel indice de  $E$  dans  $F$ , ou que  $E$  et  $F$  sont isomorphes.

Cas de  $\Omega(E) = \Omega(E, E)$ : Considérons les trois algèbres de Banach ci-dessous et les projections canoniques

$$L(E) \xrightarrow{\mu} L'(E) = L(E)/k(E) \xrightarrow{\nu} L''(E) = L(E)/K(E)$$

La Proposition 3 et son corollaire montrent que, si  $GL'(E)$  et  $GL''(E)$  désignent le groupe des éléments inversibles de  $L'(E)$  et  $L''(E)$ ,

$$\nu^{-1}(GL''(E)) = GL'(E), \quad \mu^{-1}(GL'(E)) = \Omega(E);$$

l'indice peut être considéré comme un homomorphisme de  $GL''(E)$  dans  $\mathbb{Z}$ , surjectif au moins si  $E$  est isomorphe à ses hyperplans.

Désignons par  $\Omega_i$ ,  $GL_i^!$ , ... l'ensemble des opérateurs d'indice  $i$ .

Lemme 5: Tout élément de  $\Omega_0$  peut être déformé, à projection  $\mu$  constante, en un élément de  $GL(E)$ . En particulier,  $\mu(GL(E)) = GL_0^!(E)$ ; si  $GL(E)$  est connexe,  $\Omega_0(E)$  l'est aussi.

Lemme 6: Si  $\Omega_1(E)$  n'est pas vide, tous les  $\Omega_i(E)$  ont le même type d'homotopie.

Démonstration:

On choisit  $f \in \Omega_i(E)$ ,  $g \in \Omega_{-i}(E)$  un presque inverse de  $f$ . On définit  $F: \Omega_0 \rightarrow \Omega_i$  et  $G: \Omega_i \rightarrow \Omega_0$  par  $F(u) = u \circ f$  et  $G(v) = v \circ g$ . On peut joindre  $F \circ G$  et  $G \circ F$  à l'identité par des homotopies "affines".

En particulier, si  $GL(E)$  est connexe, les  $\Omega_i(E)$  sont les composantes connexes de  $\Omega(E)$ . Exemple:  $E$  est un espace de Hilbert

(Soit  $A \in GL(E)$ , on écrit  $A = U \sqrt{A^*A}$ , où  $U$  est unitaire et  $\sqrt{A^*A}$  autoadjoint positif inversible ; on joint  $\sqrt{A^*A}$  à  $I$ , donc  $A$  à  $U$  par linéarité, puis  $U$  à  $I$  par le chemin  $e^{itB}$ , où  $B = \frac{1}{i} \text{Log } U$  - cf. le calcul fonctionnel pour les opérateurs normaux [18],  $\frac{1}{i} \text{Log}$  pouvant être considéré comme une fonction borélienne bornée de  $\text{Spec } U$  dans  $[0, 2\pi[ -)$ .

Remarque : En vertu d'un théorème de Michaël (tout épimorphisme d'espaces de Banach admet une section continue [13]),  $\Omega_i(E)$ ,  $GL_i^!(E)$ , et  $GL_i''(E)$ , qui sont fibrés les uns sur les autres à fibres vectorielles, ont le même type d'homotopie (cf. aussi [2] page 164, pour voir qu'ils ont le même type d'homotopie faible, donc le même type d'homotopie (préliminaires 2 du § IV)).

III - Un espace de Banach dont ni le groupe linéaire, ni le  $\Omega_0$  ne sont connexes (Douady).

D'après le Lemme 5, il suffit de montrer que  $GL''(E)$  n'est pas connexe. Prenons  $E = c_0 \oplus \ell^2$ . Tout élément de  $L(E)$  est représenté par une matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ; il est de rang fini si et seulement si  $a, b, c, d$  le sont. Puisque  $k(c_0, \ell^2) = L(c_0, \ell^2)$ , tout élément de  $L''(E)$  est représenté par une matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ ; il est inversible si et seulement si  $a \in GL''(c_0)$  et  $d \in GL''(\ell^2)$ , et l'on a  $\text{ind} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \text{ind } a + \text{ind } d$ . Considérons alors la fonction continue  $j$  de  $GL''(c_0 \oplus \ell^2)$  dans  $\mathbb{Z}$  définie par  $j \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \text{ind } a = - \text{ind } d$ . Elle est surjective car il y a dans  $c_0$  et dans  $\ell^2$  des opérateurs de tous les indices ;  $GL''(c_0 \oplus \ell^2)$  ne peut donc être connexe.

Dans [5], Douady étudie le type d'homotopie de  $GL(c_0 \oplus \ell^2)$ . Nous allons faire ci-après un travail analogue, et préliminaire.

IV - Type d'homotopie de  $\Omega(E)$  lorsque  $GL(E)$  est contractile (Jänich).

Kuiper a démontré [11] [6] la contractibilité du groupe linéaire de tout espace de Hilbert. Arlt [1] a fait le même travail pour  $c_0$ ,

et Neubauer<sup>[14]</sup> pour les espaces  $\ell^p$ ,  $1 \leq p < \infty$ .

Rappel 1 : Si  $X$  est un espace compact, désignons par  $K(X)$  le groupe symétrisé du monoïde des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels de rang fini sur  $X$ , l'addition étant la somme directe interne des fibrés. Pour que deux fibrés  $\xi$  et  $\zeta$  aient même image dans  $K(X)$ , il faut et il suffit qu'il existe un fibré  $\mu$  tel que  $\mu \oplus \xi \approx \mu \oplus \zeta$ . En fait, on peut supposer  $\mu$  trivial car, à tout fibré, on peut ajouter un autre fibré de sorte que la somme soit triviale<sup>[3]</sup>.

La théorie des classifiants<sup>[3]</sup> montre qu'il existe une bijection fonctorielle entre  $K(X)$  et l'ensemble des classes d'homotopie de  $X$  dans un certain espace topologique  $BU \times \mathbb{Z}$  ( $\mathbb{Z}$  permet de repérer le rang des "fibrés" sur  $X$ ).

Rappel 2 : Nous allons montrer que  $\Omega(E)$  a le type d'homotopie de  $BU \times \mathbb{Z}$ . Or  $\Omega(E)$ , qui est un ouvert d'un espace de Banach, a, d'après un lemme de Milnor<sup>[6]</sup>, le type d'homotopie d'un complexe simplicial. D'après un théorème de Whitehead<sup>[17]</sup>, il nous suffit donc de montrer que  $\Omega(E)$  et  $BU \times \mathbb{Z}$  ont le même type d'homotopie faible, c'est-à-dire, d'après le rappel 1, qu'il existe un isomorphisme fonctoriel

$$[X, \Omega(E)] \xrightarrow{\cong} K(X),$$

où  $X$  décrit la catégorie des espaces compacts et classes d'homotopie d'applications continues. Nous allons construire  $i$  sans hypothèse sur  $E$ . Ce sera un homomorphisme pour une structure de groupe que nous allons préciser sur  $[X, \Omega(E)]$ . Nous verrons enfin que  $i$  est un isomorphisme dès que  $GL(E)$  est contractile, et  $E$  isomorphe à ses hyperplans.

1) Construction de  $i$  : A toute application  $f$  de  $X$  dans  $\Omega(E)$ , nous associerons un endomorphisme  $\tilde{f}$  du fibré trivial de base  $X$  et de fibre  $E$ . Nous aurions envie d'écrire

$i([f]) = \text{Ker } \tilde{f} - \text{Coker } \tilde{f}$  ; malheureusement ni  $\text{Ker } \tilde{f}$ , ni  $\text{Coker } \tilde{f}$  n'ont de raison d'être des fibrés sur  $X$ , sauf si  $X$  est un point ! Mais nous remarquons qu'il existe un sous-espace  $V$  de  $E$ , de dimension finie, transverse à toutes les  $\text{Im } f(x)$  pour  $x \in X$  (c'est vrai localement d'après Prop. 1, donc globalement puisque  $X$  est compact). Alors  $\tilde{f}^{-1}(V \times X)$  est un fibré sur  $X$ , et nous posons  $i([f]) = \tilde{f}^{-1}(V \times X) - V \times X$ . Cette définition ne dépend pas de  $V$  : il suffit de considérer le cas  $V \subset W$  ; alors, on vérifie que  $\tilde{f}^{-1}(W \times X) / \tilde{f}^{-1}(V \times X)$  est un fibré trivial de rang  $\dim W/V$ . La définition de  $i$  ne dépend que de la classe d'homotopie de  $f$  : soit en effet  $h$  une homotopie entre deux applications  $f$  et  $g$  ; pour calculer  $i(f)$  et  $i(g)$ , nous prendrons un espace  $V \subset E$  transverse à toutes les  $\text{Im } h(x,t)$ , pour  $(x,t) \in X \times I$  ; alors  $\tilde{f}^{-1}(V \times X)$  et  $\tilde{g}^{-1}(V \times X)$  sont les restrictions à  $X \times 0$  et à  $X \times 1$  du fibré  $\tilde{h}^{-1}(V \times X \times I)$  de base  $X \times I$  ; ils sont donc isomorphes.

Lemme 7 : Si  $i([f])$  est nul,  $f$  est homotope à une application  $g$  se factorisant par  $GL(E)$ .

Démonstration :

Prenons  $V \subset E$  transverse à  $f$ . D'après le rappel 1,  $\tilde{f}^{-1}(V)$  est un fibré stablement trivial ; il sera donc trivial pourvu que nous prenions  $V$  assez grand. Choisissons alors <sup>[12]</sup> un supplémentaire  $S$  de  $\tilde{f}^{-1}(V)$  dans  $E \times X$  ;  $\tilde{f}$  réalise un isomorphisme de  $S$  sur  $\tilde{f}(S)$ , qui est un fibré supplémentaire de  $V \times X$  dans  $E \times X$ . Nous pouvons choisir pour  $\tilde{g}$  un automorphisme de  $E \times X$  de la forme  $\tilde{f}|_S \oplus$  un isomorphisme de  $\tilde{f}^{-1}(V)$  sur  $V \times X$ , et pour homotopie joignant  $f$  et  $g$  une homotopie "affine".

Remarque : Si  $X$  est un point,  $K(X) = \mathbb{Z}$ ,  $i$  n'est autre que l'indice, et le lemme 7 se réduit au Lemme 5.

2) Loi de groupe sur  $[X, \Omega(E)]$  : Considérons la loi (a priori non commutative)  $[f] \cdot [g] = [f \circ g]$ . On vérifie facilement que cette définition est consistante, que la loi est associative et possède un

élément neutre  $[Id]$ . Pour construire un inverse de  $[f]$ , reprenons les notations de la démonstration ci-dessus (tout ce que nous savons maintenant sur  $\tilde{f}^{-1}(V)$  est que c'est un fibré); considérons le composé  $\tilde{g}$  de la projection sur  $\tilde{f}(S)$  parallèlement à  $V \times X$  et de  $\tilde{f}|_S$ ; alors,  $f \circ g$  et  $g \circ f$  sont des applications de  $X$  à valeurs dans  $Id + k(E)$ : elles sont donc homotopes à des constantes.

On montre facilement (c'est une généralisation de la Prop.2) que  $i$  est un homomorphisme de  $[X, \Omega(E)]$  dans  $K(X)$ .

3) Cas où  $GL(E)$  est contractile: Le lemme 7, joint à l'additivité de  $i$ , démontre l'injectivité de  $i$ . D'autre part, tout élément de  $K(X)$  peut être écrit  $\xi - \zeta$ , où  $\zeta$  est trivial. Puisque  $E$  est isomorphe à ses hyperplans, il existe un isomorphisme  $\alpha$  de  $E \times X \oplus \zeta$  sur  $E \times X$ . Quant au fibré  $E \times X \oplus \xi$ , il a pour fibre type  $E$  et pour groupe structural  $GL(E)$ ; ce dernier étant contractile, il est lui aussi trivial; soit  $\beta$  une trivialisat. Il est clair que  $\xi - \zeta = i([h])$ , où  $h$  est le composé ci-dessous:

$$E \times X \xrightarrow{\beta^{-1}} E \times X \oplus \xi \xrightarrow{Id \oplus 0} E \times X \oplus \xi \xrightarrow{\alpha} E \times X .$$

Remarque 1: L'isomorphisme de Jänich (c'est-à-dire  $i$  lorsque  $E$  est un espace de Hilbert) peut être généralisé de façon à interpréter les groupes  $K^{p,q}(X)$  [10].

Remarque 2: Pour les applications à l'analyse, il est intéressant de considérer la généralisation de  $[X, \Omega(E)]$  constituée par les complexes bornés quasi-acycliques directs de fibrés banachiques sur  $X$  [7], et surtout les complexes... de familles continues d'espaces de Banach [8].

Remarque 3:  $\Omega_0(\mathbb{R}^2)$  ayant le type d'homotopie de  $BU$ , son anneau de cohomologie entière est un anneau de polynômes à une infinité de variables. On trouvera dans [16] une interprétation de toutes les classes de cohomologie de  $\Omega_0(\mathbb{R}^2)$  par des sous-ensembles analytiques de codimension finie (en particulier une interprétation des

classes et du caractère de Chern), ainsi que le comportement du cup-produit dans cette interprétation.

---

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ARLT : Zusammenziehbarkeit der allgemeinen linearen Gruppe des Raumes  $e_0$  der Nullfolgen, *Inventiones Mathematicae*, vol.1, 1966, p.36.
- [2] ATIYAH : K - Theory, Notes by Anderson, Fall 1964, Harvard University.
- [3] CARTAN - SCHWARTZ : Séminaire 1963-64.
- [4] DIEUDONNE : Foundations of modern analysis, Academic Press, 1960, p.315.
- [5] DOUADY : Un espace de Banach dont le groupe linéaire n'est pas connexe, *Indagationes Mathematicae*, t.27, 1965, p.787.
- [6] ILLUSIE : Contractibilité du groupe linéaire des espaces de Hilbert de dimension infinie, Séminaire Bourbaki 1964-65, n°284.
- [7] ILLUSIE : Complexes de fibrés et définitions du foncteur K, Séminaire Shih, IHES 1964-65.
- [8] ILLUSIE : Complexes quasi-acycliques directs de fibrés banachiques, Note aux C.R.A.S. Paris, t.260, p.6499.
- [9] JANICH : Vektorraumbündel und der Raum der Fredholm-Operatoren, Dissertation Bonn, 1964.
- [10] KAROUBI : Algèbres de Clifford et opérateurs de Fredholm, Note aux C.R.A.S. Paris, t.267, p.305.
- [11] KUIPER : The Homotopy type of the unitary group of Hilbert space, *Topology* (Mars 1965).
- [12] LANG : Introduction to differentiable manifolds, Inters. Pub., 1962.
- [13] MICHAEL : Continuous selections, I, *Annals of Math*, t.63, 1956, p.361.

- [14] NEUBAUER : Der Homotopietyp der Automorphismengruppe in den Räumen  $\ell_p$  und  $c_0$ , Mathematische Annalen, Band 174, 1967, p.33.
- [15] PALAIS : Seminar on the Atiyah-Singer index theorem, I.A.S., 1963-64.
- [16] RUGET : Opérateurs à indice et classes de Chern, Opérateurs à indice et caractère de Chern, Notes aux C.R.A.S. Paris, t.266, p.820 et 1191.
- [17] WHITEHEAD : Combinatorial Homotopy I, Bull. Am. Math. Soc. 55, 1949, p.213.
- [18] DUNFORD-SCHWARTZ : Linear Operators II, New York, Interscience, 1958, p.898.

Exposé n° 12 : LA CODIMENSION TOPOLOGIQUE  
(chapitre I)

Nous introduisons cette notion comme substitut de la notion de dimension pour l'étude de certains sous-ensembles fermés de variétés banachiques. Elle nous sera un ingrédient technique agréable dans les chapitres II et III.

Soit  $\Delta_n$  l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^{n+1}$  dont les coordonnées sont positives ou nulles, de somme 1 ;  $\Delta_n$  est muni de la topologie induite par  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Nous appelons simplexe de dimension  $n$  d'un espace topologique  $E$  une application continue  $s$  de  $\Delta_n$  dans  $E$  ; nous notons  $|s|$  l'image d'une telle application, et  $\partial s$  (bord de  $s$ ) la restriction de  $s$  au bord de  $\Delta_n$ . Par "déformation d'une application continue  $f$  (d'un compact dans un espace topologique) en une autre  $g$ ", nous entendons une homotopie joignant  $f$  à  $g$ .

Définition 1 : Nous dirons qu'un fermé  $X$  d'un espace topologique  $E$  est de codimension topologique dans  $E$  au moins égale à  $n$  si, pour tout point  $x$  de  $X$  et tout voisinage de  $x$  dans  $E$ , il existe un sous-voisinage ouvert  $V$  de  $x$  possédant la propriété  $C(n, X)$  : tout simplexe de  $V$  de dimension strictement inférieure à  $n$ , dont le bord ne rencontre pas  $X$ , peut être déformé dans  $V$ , à bord fixe, en un simplexe de  $V-X$ .

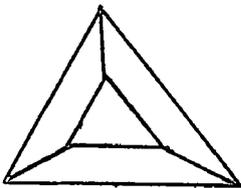
Ainsi, la notion de codimension est locale. Tout fermé est de codimension positive ou nulle ; dans un espace localement connexe par arcs, les fermés de codimension au moins égale à 1 sont les fermés sans point intérieur (penser par contre au cas de 0 dans le sous-espace de  $\mathbb{R}$  formé par la suite  $1/n$  et 0). On appellera codimension topologique de  $X$  ( $\text{cotop } X$ ) le plus grand entier  $n$  tel que  $X$  soit de codimension au moins égale à  $n$ . Lorsqu'on se restreint à un ouvert de l'espace ambiant, la codimension de la trace de  $X$  ne peut qu'augmenter, ce qui permet de définir la codimension de  $X$  en un de ses points  $x$  ( $\text{cotop}_x X$ ) comme la limite suivant le

filtre des voisinages  $V$  de  $x$  de la codimension de  $X \cap V$  dans  $V$ . On remarquera que, si en un point  $x$  la codimension de  $X$  est finie, elle est nécessairement plus grande en tous les points voisins de  $x$ ; par contre, il peut y avoir dans tout voisinage d'un point de codimension infinie des points de codimension finie (dans [7], on en donne un exemple, où  $X$  est un sous-ensemble analytique d'un espace de Banach).

Proposition 1 : Si  $X$  est un fermé de codimension au moins égale à  $n$  d'un espace topologique  $E$ , étant donné un simplexe  $s$  de dimension inférieure à  $n$  de  $E$  et une déformation  $h$  de  $\partial s$  telle que  $h(1)$  ne rencontre pas  $X$ , il existe une déformation de  $s$  en un simplexe de  $E-X$ , prolongeant  $h$ .

Démonstration :

Choisissons un homéomorphisme "naturel" de  $\Delta_n$  sur  $\Delta_n \cup_{\partial \Delta_n} \partial \Delta_n \times \Delta_1$



(voir figure). Si on le compose avec l'application formée de la juxtaposition de  $s$  et  $h$ , on obtient ce que nous appellerons le simplexe "s couronné par  $h$ " et noterons  $s^h$ .

Il est clair que, pour résoudre notre problème, il nous suffit de savoir déformer  $s^h$ , à bord fixe, en un simplexe ne rencontrant pas  $X$ . Prenons un recouvrement  $\mathcal{A}$  de  $E$  par des ouverts possédant la propriété  $C(n, X)$ , et une subdivision barycentrique de  $\Delta_n$  telle que tous les fragments de  $s^h$  soient petits d'ordre  $\mathcal{A}$ . Pour construire une solution en grim pant sur le squelette de la subdivision, nous sommes ramenés au problème de départ, mais dans un ouvert possédant la propriété  $C(n, X)$ ; on refait alors la même remarque qu'au début de cette démonstration.

On se convainc facilement qu'un ouvert  $V$  de  $E$  possède la propriété  $C(n, X)$  si et seulement si l'application  $\pi_0(V-X) \rightarrow \pi_0(V)$  est surjective et les ensembles  $\pi_p(V, V-X)$  nuls pour  $p$  inférieur ou égal à  $n-1$  (et pour tout point de base dans  $V-X$ ). D'où le

Corollaire 2 : Sous les hypothèses de la proposition 1, l'inclusion de  $E-X$  dans  $E$  induit (quel que soit le point de base) un isomorphisme des groupes d'homotopie de degrés inférieurs ou égaux à  $n-2$ .

En effet, la proposition 1 a montré que l'espace entier possède la propriété  $C(n, X)$ .

Remarque : Si  $X$  est de codimension infinie dans  $E$ , l'inclusion de  $E-X$  dans  $E$  est ainsi une équivalence d'homotopie faible. Si de plus  $E$  est une variété banachique de classe  $C^0$ , paracompacte (et donc métrisable [5] page 105),  $E$  et  $E-X$  ont chacun le type d'homotopie de complexes simpliciaux ([5] page 134); d'après un théorème de J.H.C. Whitehead, ils ont alors le même type d'homotopie. Si  $E$  est une variété hilbertienne de classe  $C^\infty$ , les travaux de N. Kuiper, J. Eells, ... [4], démontrent alors l'équivalence différentiable de  $E$  et  $E-X$ .

Proposition 3 : Pour qu'un fermé  $X$  d'un espace localement contractile  $E$  soit de codimension topologique au moins égale à  $n \geq 3$ , il faut et il suffit que, quel que soit le (petit) ouvert contractile  $V$  de  $E$ ,  $V-X$  soit (non-vide), simplement connexe et que ses groupes réduits d'homologie entière soient nuls en degrés inférieurs ou égaux à  $n-2$ . Pour  $n=1$ , seule subsiste la condition de non-vacuité de  $V-X$ , c'est-à-dire de nullité de  $H_0(V, V-X; \mathbb{Z})$ ; pour  $n=2$ , il faut rajouter la connexité de  $V-X$ , c'est-à-dire la nullité de  $\tilde{H}_0(V-X)$ .

C'est une conséquence directe du théorème de Hurewicz, lequel, superposé à la proposition 1, donne l'utile

Corollaire 4 : Si  $X$  est un fermé de codimension au moins égale à  $n \geq 1$  d'un espace localement connexe par arcs  $E$ , les groupes  $H_q(E, E-X; \mathbb{Z})$  et  $H^q(E, E-X; \mathbb{Z})$  sont nuls pour  $q < n-1$ .

Si  $E$  est homologiquement localement contractile,  $H^q(E, E-X; \mathbb{Z})$  est isomorphe à  $H_X^q(E; \mathbb{Z})$ , cohomologie de  $E$  à support dans  $X$  avec coefficients dans le faisceau constant  $\mathbb{Z}$ . On peut alors démontrer le résultat global de nullité à partir du résultat local provenant de la définition de la codimension de  $X$  sans utiliser la proposition 1, à l'aide de la suite spectrale [2] qui lie  $H_X^q(E; \mathbb{Z})$  aux  $\underline{H}_X^q(E; \mathbb{Z})$  faisceautiques.

Proposition 5 : Soient  $X$  un fermé d'un espace topologique  $E$ ,

$Y$  un sous-fermé de  $X$ . Alors, la codimension de  $Y$  est au moins égale à celle de  $X$ .

Démonstration :

Plaçons-nous une fois pour toutes dans un ouvert  $V$  de  $E$ , où la codimension de  $X$  soit  $n$ . Soit  $s$  un simplexe de  $V$ , de dimension inférieure à  $n$ , dont le bord ne rencontre pas  $Y$ , mais peut rencontrer  $X$ :  $\partial s$  étant une application d'un polyèdre de dimension  $n-1$  dans  $V-Y$ , on peut, en grim pant sur le squelette de ce polyèdre et faisant usage de la proposition 1, déformer  $\partial s$  par une homotopie  $h$  ne rencontrant pas  $Y$  en une application ne rencontrant pas  $X$ . On déforme ensuite  $s^h$ , à bord fixe, en un simplexe  $t$  ne rencontrant pas  $X$ . Le simplexe  $t^{-h}$  est alors un déformé de  $s$ , à bord fixe, ne rencontrant pas  $Y$ .

Remarque : Il n'y a pas en général transitivité de la codimension: ainsi l'origine de  $\mathbb{R}^3$  est de codimension 3 dans  $\mathbb{R}^3$  et de codimension 1 dans le cône d'équation  $x^2+y^2-z^2=0$ , lequel est de codimension 1 dans  $\mathbb{R}^3$ . L'inégalité peut avoir lieu dans l'autre sens: l'origine de  $\mathbb{R}$  est de codimension infinie dans la demi droite d'équation  $x \geq 0$ , et de codimension 1 dans  $\mathbb{R}$ . Plus généralement, le bord de toute variété à bord, à coins, ... est de codimension infinie dans la variété.

Proposition 6 : Soit  $X$  un fermé d'un espace topologique  $E$ , admettant une filtration finie par des sous-fermés  $X_p$  tels que, pour tout  $p$ ,  $X_p$  soit de codimension au moins égale à  $n$  dans  $E-X_{p+1}$ . Alors,  $X$  est de codimension dans  $E$  au moins égale à  $n$ . En particulier, toute réunion finie de fermés de codimension  $\geq n$  est de codimension  $\geq n$ . Si la topologie de  $E$  peut localement être définie par une métrique complète, le même résultat vaut pour les réunions dénombrables (pourvu qu'elles soient fermées).

La proposition 1 rend les deux premiers résultats évidents. Le dernier énoncé généralise le théorème de Baire et se démontre de façon analogue: on évite de proche en proche tous les fermés de la suite, en prenant soin de déformer de moins en moins le simplexe, de façon à assurer la convergence du processus.

Lemme 7 : Soit  $U$  un ouvert d'un E.V.T.L.C. ,  $X$  un fermé de  $U$ . Pour que la codimension de  $X$  soit au moins égale à  $n$  , il suffit que, pour toute boule  $B$  de  $U$  dessinée dans un sous-espace affine de dimension finie, on puisse trouver un sur-ensemble  $B'$  de  $B$  tel que  $X \cap B'$  soit de codimension au moins égale à  $n$  dans  $B'$  (muni de la topologie induite).

Démonstration :

Soit  $V$  un ouvert convexe de  $U$  . Prenons un simplexe  $s$  de dimension  $p < n$  de  $V$  , à bord dans  $V - X$  . A chaque subdivision barycentrique de  $\Delta_p$  , on associe un simplexe  $s'$  linéaire par morceaux, qui est un déformé de  $s$  (par linéarité,  $V$  étant convexe). Si la subdivision est assez fine,  $\partial s'$  , pas plus que  $\partial s$  , ne rencontre le fermé  $X$  . Choisissons un  $B'$  associé à une boule  $B$  contenant  $s'$  , et déformons  $s'$  dans  $B' \cap V$  , à bord fixe, en un simplexe  $s''$  ne rencontrant pas  $X$  . Alors,  $s$  peut être déformé, à bord fixe, en  $s''$  couronné par l'homotopie faisant passer de  $\partial s'$  à  $\partial s$  .

Nous retiendrons que, dans la situation du lemme 7 , il suffit pour que la conclusion soit valide que l'on sache déformer tout simplexe dont l'image est contenue dans une variété linéaire de dimension finie. Ce que nous allons appliquer à la démonstration de la

Proposition 8 : Tout fermé  $X$  localement compact d'un espace  $E$  dont la topologie est localement celle d'un E.V.T.L.C. de dimension infinie a une codimension dans  $E$  infinie.

Démonstration : Supposons que  $E$  soit un ouvert convexe d'un vectoriel  $F$  , et soit  $s$  un simplexe dont le bord ne rencontre pas  $X$  et dont l'image soit parallèle à un sous-vectoriel de dimension finie  $G$  . Appelons  $p$  la projection de  $F$  sur  $F/G$  . On peut supposer que  $X \cap E$  est relativement compact dans  $F$  ;  $p(X \cap E)$  est alors relativement compact dans  $F/G$  , et ne peut donc avoir de point intérieur. D'autre part, la compacité de  $\partial s$  entraîne l'existence d'un voisinage  $U$  de  $0$  dans  $F$  tel que les bords des simplexes translétés de  $s$  par un vecteur de  $U$  ne rencontrent pas  $X$  . Soit  $t$  un vecteur appartenant à  $U$  , mais pas à  $p^{-1}_p(X \cap E)$  . On peut déformer

$s$  en le simplexe  $s+t$  couronné par l'homotopie linéaire qui fait passer de  $s+t$  à  $s$ .

Proposition 9 : Soit  $E_n$  une variété topologique séparée de dimension  $n$ . Les fermés de  $E_n$  de codimension 1 (resp. 2) sont ceux de dimension cohomologique (sur  $\mathbb{Z}$ )  $n-1$  (resp.  $n-2$ ). De façon générale, on a :

$$\text{cotop } X + \dim_{\mathbb{Z}} X \leq n .$$

Pour pouvoir affirmer l'égalité dans le cas où la dimension de  $X$  est inférieure à  $n-2$ , il faut connaître la "locale" simple connexité du complémentaire de  $X$ .

Démonstration : Montrons que  $\text{cotop } X \geq p$  entraîne  $\dim_{\mathbb{Z}} X \leq n-p$ . L'espace  $X$  étant séparé et localement compact, il suffit ([1] page 76) de voir qu'il existe des voisinages  $V$  arbitrairement petits de points arbitraires de  $X$  tels que  $H_c^q(V, \mathbb{Z})$  soit nul pour tout  $q \geq n-p+1$ . On peut supposer que  $V$  est un fermé de  $\mathbb{R}^n$ . La famille des compacts étant paracompactifiante dans  $V$ ,  $H_c^q(V, \mathbb{Z})$  coïncide avec la cohomologie d'Alexander à supports compacts  $\bar{H}_c^q(V, \mathbb{Z})$  ([1] page 123). D'après un théorème de dualité ([9] page 342), ce dernier groupe est isomorphe à  $H_{n-q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n-V; \mathbb{Z})$ , lequel est nul pour  $n-q \leq p-1$  d'après le corollaire 4. En changeant le sens du raisonnement et appliquant la proposition 3, on voit qu'un fermé de dimension  $p < n-3$  de  $E_n$  est de codimension 2, ou bien  $n-p$ .

Note : Il est raisonnable de penser que, si la dimension de  $X$  au sens des recouvrements est au plus égale à  $n-3$ , sa codimension dans  $E_n$  est au moins égale à 3.

Exemples : Soit  $X$  un fermé d'un espace topologique  $E$ , tel que  $E$  soit localement homéomorphe à  $X \times \mathbb{R}^n$ . Alors, d'après la proposition 3,  $X$  est de codimension  $n$  dans  $E$ . Cette remarque, le théorème de Łojasiewicz sur la triangulation des ensembles semi-analytiques, et la proposition 6 entraînent que tout sous-ensemble

semi-analytique fermé de dimension  $p$  d'une variété analytique réelle de dimension  $n$  est de codimension  $n-p$  dans cette variété. Dans le cas particulier d'un sous-ensemble analytique complexe  $X$  d'une variété complexe, on utilise, au lieu du théorème de Łojasiewicz, la filtration de  $X$  donnée par ses ensembles singuliers  $SX$ ,  $S(SX)$ , ...

Nous allons nous intéresser maintenant aux sous-ensembles analytiques des variétés de dimension infinie :

Définition 2 : Un sous-ensemble analytique  $X$  d'une variété analytique banachique  $V$  sera dit "joli" si, localement dans  $V$ , il existe des cartes où  $X$  s'exprime comme un produit  $F \times Y$ , où  $F \oplus G$  est une décomposition de l'image de la carte ( $\dim G < \infty$ ) et où  $Y$  est un sous-ensemble analytique de  $G$ .

On rencontrera dans le chapitre 4 de nombreux exemples de jolis sous-ensembles analytiques (réels ou complexes), mais il faut signaler que l'ensemble de ces sous-ensembles n'est pas lui-même très joli: il n'est pas stable par image inverse, ni intersection (dans  $\ell^2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$ , l'intersection des sous-variétés  $y=0$  et  $y=x^2$  est le cône  $x^2 = 0$  de  $\ell^2(\mathbb{C})$ ; ce cône, ayant pour seul point singulier l'origine, ne peut être joli).

On définit la codimension analytique d'un joli  $X$  comme le minimum de la codimension aux points réguliers. La codimension topologique de  $X$  est égale à cette codimension analytique (dans le cas réel) ou à son double (dans le cas complexe). L'ensemble singulier de  $X$  (noté  $SX$ ) est par définition l'ensemble des points de  $X$  qui ne sont pas réguliers de codimension minimum. Dans le cas complexe,  $SX$  est un joli sous-ensemble analytique dont la codimension analytique excède d'au moins un celle de  $X$ . Dans le cas réel,  $SX$  n'est pas forcément analytique, mais c'est un fermé dont la codimension topologique est strictement supérieure à celle de  $X$ .

Envisageons maintenant le cas des sous-ensembles analytiques complexes quelconques d'une variété analytique banachique  $V$ . Rappelons quelques résultats [3] sur ces ensembles : leur codimension analytique en un point  $p$  peut être définie comme la limite inférieure des codimensions aux points réguliers voisins (ou  $+\infty$ ), ou aussi bien comme la dimension maximum des plans (pour une quelconque

carte de  $V$ ) passant par  $p$  et tels que  $p$  soit isolé dans l'intersection du plan et de l'ensemble. Les sous-ensembles irréductibles de codimension finie ont une codimension constante ; ils sont localement définissables par un nombre fini d'équations scalaires. Soit  $X$  un sous-ensemble analytique quelconque passant par un point  $p$  d'une variété  $V$  ; pour tout entier  $n$ , on peut trouver un voisinage  $U$  de  $p$  dans  $V$  et une décomposition de  $X \cap U$

$$X \cap U = \bigcup X^i \cup Y,$$

où les  $X^i$  sont irréductibles dans  $U$ , de codimension inférieure ou égale à  $n$ , et où  $Y$  est analytique de codimension strictement supérieure à  $n$  (et même enfermable dans une intersection complète de codimension  $n+1$ ). Si  $X$  est définissable dans  $U$  par  $p$  équations scalaires, les  $X^i$  ou  $Y$  de codimension strictement plus grande que  $p$  sont automatiquement vides (ceci est facile, voir chapitre 2). On voit ainsi que les ensembles de codimension localement bornée sont exactement ceux qui sont localement définissables par un nombre fini d'équations (ensembles de définition finie). L'ensemble singulier d'un tel ensemble est analytique.

Nous voulons montrer qu'un ensemble analytique de codimension analytique (globale)  $n$  est de codimension topologique  $2n$  dans la variété où il est dessiné. Mais nous aurons besoin au chapitre 3 d'un résultat plus fort, que nous énoncerons après avoir donné les définitions suivantes :

Définition 3 : Soit  $f$  une application analytique d'une variété analytique banachique  $V$  dans une autre  $W$ . Nous dirons que  $f$  est épidermique si, pour tout point  $x$  de  $V$ , sa dérivée  $f'(x)$  est un opérateur à indice (i.e. dont le noyau et le conoyau - algébriques - sont de dimension finie). Nous dirons que  $f$  est  $i$ -dermique en  $x$  si l'indice  $\text{ind } f'(x)$  - soit  $\dim \text{Ker } f'(x) - \dim \text{Coker } f'(x)$  - vaut  $i$ .

Si  $f$  est épidermique, au voisinage de tout point  $x$  de  $V$ , la contre-image de  $f(x)$  est enfermable dans une sous-variété de dimension finie de  $V$  (prendre la contre-image d'un "bout de plan" de dimension finie transverse en  $f(x)$  à l'image de  $f'(x)$ ). La

dimension analytique  $\dim_x f^{-1}f(x)$  est donc bien définie, ainsi que celle de tout sous-ensemble analytique de  $f^{-1}f(x)$ .

Définition 4 : Soient  $f$  une application analytique épidermique de  $V$  dans  $W$ , et  $X$  un sous-ensemble analytique de  $V$ . A la restriction  $g$  de  $f$  à  $X$ , nous attacherons les entiers  $\geq 0$  suivants (profondeur, corang, codimension) au point  $x$  de  $X$ , ou globales :

$$\text{prof}_x g = \dim_x g^{-1}g(x)$$

$$\text{prof } g = \inf_{x \in X} \text{prof}_x g$$

$$\text{corg}_x g = \text{prof}_x g + \text{codim}_x X - \text{ind } f'(x)$$

$$\text{codim}_x g = \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in X}} \inf \text{corg}_y g$$

$$\text{codim } g = \inf_{x \in X} \text{corg}_x g$$

Lemme 10 : La fonction profondeur est semi-continue supérieurement. D'après l'appendice 1, on peut se ramener au cas  $V = W \times \mathbb{C}^n$ ;  $f$  étant la projection parallèlement à  $\mathbb{C}^n$ . Si  $g^{-1}g(x)$  est de dimension  $p$  en  $x$ , il existe un plan  $\pi$  contenu dans  $\mathbb{C}^n$ , de dimension  $n-p$ , tel que  $x$  soit point d'intersection isolé de  $\pi$  et  $X$ . La propriété résulte alors de ce que les plans parallèles à  $\pi$  et assez voisins ne rencontrent  $X$  que suivant un ensemble discret. On peut se ramener à ce même cas particulier pour démontrer la positivité de  $\text{corg}_x g$  : il suffit alors de voir que la codimension en  $x$  de  $g^{-1}g(x)$  dans la fibre de  $f$  qui le contient est au plus égale à la codimension en  $x$  de  $X$ , ce qui est évident (voir chapitre 2). La fonction corang n'est pas en général semi-continue supérieurement (prendre  $V = \mathbb{C}^3$ ,  $W = \mathbb{C}^2$ ,  $f$  la projection parallèlement au troisième axe de coordonnées,  $X$  la réunion du plan  $y+z=0$  et de la droite d'équations  $x=0$ ,  $y-z=0$ ).

Lemme 11 : Avec les notations de la définition 4, si de plus  $X$  est irréductible, la fonction corang est semi-continue supérieurement et atteint son minimum sur un ouvert dense de  $X$ .

La première assertion provient du lemme 10, du fait que la codimension de  $X$  est constante, et du fait que,  $X$  étant connexe,

l'indice de  $f$  aux divers points de  $X$  est le même. La fonction corang atteint donc son minimum sur un ouvert, qui rencontre nécessairement la variété  $RX$  des points réguliers de  $X$ . L'application  $f$  restreinte à  $RX$  est une application épidermique de  $RX$  dans  $W$ . L'ensemble  $E$  où le noyau de  $(f/RX)'$  est de dimension minimum est donc (voir chapitre 4) le complémentaire d'un ensemble analytique, soit un ouvert dense de  $RX$ . Or, les traces dans  $E$  des fibres de  $g$  sont [6] des sous-variétés ayant toutes la même dimension, qui ne peut donc être que  $\text{codim } g$ .

Après ces remarques, démontrons le lemme technique important :

Lemme 12 : Les notations étant celles de la définition 4, supposons  $g$  propre<sup>(1)</sup>. Pour tout point  $y$  de  $W$ , toute carte de  $W$  en  $y$ , et tout entier fini  $c$  au plus égal à  $\inf_{x \in g^{-1}(y)} \text{codim}_x g$ , il existe une sous-carte de  $W$  en  $y$  telle que tout sous-espace "affine"  $B$  de dimension finie de son domaine soit enfermeable dans un sous-espace affine  $A$  de dimension finie tel que  $A \cap g(X)$  soit analytique de codimension (analytique) au moins égale à  $c$  dans  $A$ .

Démonstration : On peut supposer que  $W$  est un ouvert d'un espace de Banach,  $y$  l'origine de cet espace, et la carte l'identité. On peut aussi supposer que  $B$  passe par l'origine (sinon, on remplace  $B$  par le cône sur  $B$  de sommet  $0$ ). Soit  $x$  un point de  $X$  : il existe une carte  $U$  de  $V$  en  $x$  telle que

$$X \cap U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X^\lambda \cup Y,$$

(les ensembles  $X^\lambda$ , en nombre fini, étant irréductibles, et  $Y$  étant contenu dans une intersection complète de codimension au moins égale à  $c + \text{ind } f'(x)$ ) et telle que l'on puisse trouver des directions

(1) c'est-à-dire fermée, et telle que la contre-image de tout compact soit compacte. En fait, si  $V$  est paracompacte, donc métrisable, et si  $X$  est de définition finie, la deuxième hypothèse est inutile : cela tient à ce que l'application  $g$  ne peut être constante sur aucun ouvert de  $X$  (sur  $RX$ , elle est épidermique!).

- 1°)  $D^\lambda$  de dimension  $\text{codim } X^\lambda$ , telle que  $x$  soit isolé dans  $(x+D^\lambda) \cap X^\lambda$ ,
- 2°)  $D'$  de dimension  $c + \text{ind } f'(x)$ , telle que  $x$  soit isolé dans  $(x+D') \cap Y$ ,
- 3°)  $\Delta$ , direction de  $W$ , de dimension finie, transverse aux images de tous les opérateurs  $f'(t)$ , pour  $t$  dans  $U$ .

Nous allons rapetisser la carte de façon à ce qu'elle ait de meilleures propriétés : soit  $d$  la dimension de la direction  $f'(x) D' + \Delta$ ; cette direction étant transverse aux images des opérateurs  $f'(t)$ , la direction  $D'(t) = f'(t)^{-1} (f'(x) D' + \Delta)$  est une fonction continue de  $t$  à valeurs dans la Grassmannienne des  $(d + \text{ind } f'(x))$ -directions de  $U$ . Pour  $t=x$ , on obtient une direction contenant  $D'$ ; donc, si  $t$  reste assez voisin de  $x$ ,  $D'(t)$  contiendra une direction de même dimension que  $D'$ , voisine de  $D'$ , et dont le représentant passant par  $t$  ne rencontrera  $Y$  que suivant un ensemble discret (nous passons en fait ici sous silence deux lemmes faciles). En reprenant pour les  $D^\lambda$  (en nombre fini) les considérations faites sur  $D'$ , nous voyons que nous pouvons choisir  $U$  assez petit pour que

- 1°)  $f'(t)^{-1} (f'(x) D^\lambda + \Delta)$  contienne une direction  $D^\lambda(t)$  de dimension  $\text{codim } X^\lambda$  telle que  $t$  soit isolé dans  $(t+D^\lambda(t)) \cap X^\lambda$
- 2°) la même assertion, relative à  $D'$  et  $Y$ .

La contre-image  $g^{-1}(0)$  étant compacte, elle possède un recouvrement fini par des domaines  $U_i$  de cartes de  $V$  en  $x_i$  ayant toutes les propriétés ci-dessus énumérées (nous nous donnons, en même temps que les cartes, l'assortiment de directions  $D_i^\lambda, D_i', \Delta_i$ ). Soit  $\Omega$  le voisinage de  $g^{-1}(0)$  réunion des  $U_i$ . L'application  $g$  étant propre, on démontre facilement qu'il existe un voisinage  $w$  de  $0$  dans  $W$  tel que  $g^{-1}(w)$  soit contenu dans  $\Omega$ . Ce  $w$  est une solution de notre problème. Soit en effet  $B$  un sous-espace de dimension finie de  $w$ , et  $A$  la somme  $B + f'(x_i) D_i^\lambda + f'(x_i) D_i' + \Delta_i$ . Grâce aux précautions de transversalité,  $f^{-1}(A)$  est une sous-variété fermée  $\mathcal{A}$  de  $f^{-1}(w) \cap \Omega$ , de dimension  $k+i$ , si  $k$  est la dimension de  $A$ , et  $i$  l'indice de  $f$ , que nous pouvons supposer constant

si nous traitons séparément les composantes connexes (en nombre fini) de  $g^{-1}(0)$ . Le sous-ensemble  $X \cap \mathcal{A}$  est analytique dans  $\mathcal{A}$ , et l'on a, en tout point  $x$  de  $\mathcal{A}$

$$\text{codim}_{x, \mathcal{A}} X \cap \mathcal{A} \geq \inf(c+i, \text{codim}_x X) .$$

En effet, si  $x$  appartient à un  $Y_i$ , mais à aucun  $X_i^\lambda$ , comme l'espace tangent en  $x$  à  $\mathcal{A}$  contient une direction voisine de  $D_i^v$ ,  $X \cap \mathcal{A}$  est en  $x$  de codimension au moins  $c+i$ . Pour la même raison, si  $x$  appartient à  $X_i^\lambda$ , on a  $\text{codim}_{x, \mathcal{A}}(X_i^\lambda \cap \mathcal{A}) = \text{codim}_x X_i^\lambda$ .

Si nous appelons  $\alpha(x)$  le nombre  $\dim_x X \cap \mathcal{A} - \dim_x g^{-1} g(x)$ , nous avons  $\alpha(x) \leq k+i - \inf(c+i, \text{codim}_x X) - \text{prof}_x g \leq k - \inf(c, \text{corg}_x g)$ . Or,  $c$  est inférieur ou égal à  $\inf_{x \in g^{-1}(0)} \text{codim}_x g$ , donc, d'après la compacité de  $g^{-1}(0)$ , à  $\inf_{x \in \theta} \text{corg}_x g$ ,  $\theta$  étant un certain voisinage de  $g^{-1}(0)$ . Ainsi,  $\sup_{x \in \theta} \alpha(x) \leq k-c$ , et le théorème de Remmert classique appliqué à la fonction  $g$  restreinte à  $X \cap \mathcal{A}$  nous dit que  $g(X \cap \mathcal{A})$  est un ensemble analytique de dimension en 0 inférieure ou égale à  $k-c$ ; la dimension de  $g(X \cap \mathcal{A})$  est en tout point inférieure ou égale à  $k-c$  si nous avons pris soin de choisir les  $U_i$  inclus dans  $\theta$ ; alors,  $\text{codim}_w g(X) \cap w \geq k - (k-c) = c$ .

Le lemme 7 nous donne alors immédiatement la moitié de la

Proposition 13 : Soit  $f$  une application analytique épidermique d'une variété analytique banachique  $V$  dans une autre  $W$ . Soit  $X$  un sous-ensemble analytique de  $V$ , tel que la restriction  $g$  de  $f$  à  $X$  soit propre. Alors,  $g(X)$  est un fermé de  $W$  de codimension topologique en  $y$  égale à  $2 \inf_{x \in g^{-1}(y)} \text{codim}_x g = 2\gamma(y)$ .

Pour montrer l'égalité, choisissons un point  $a$  de  $g^{-1}(y)$  tel que  $\text{codim}_a g = \gamma(y)$  supposé fini. Il existe une suite  $a_j$  convergeant vers  $a$  telle que  $\text{corg}_{a_j} g = \gamma(y)$ . Soit  $v_j$  un germe irréductible de la décomposition de  $X$  en  $a_j$  de la plus petite codimension possible (nécessairement finie). La semi-continuité de la profondeur entraîne que le corang de  $g$  reste égal à  $\gamma(y)$  sur

un voisinage de  $a_j$  dans  $v_j$ . Nous pouvons alors trouver (cf. Lemme 11), aussi près que nous voulons de  $a_j$ , un ouvert régulier de  $X$  sur lequel l'application  $g$  est de "rang" constant, et qui a donc pour image une sous-variété de  $W$  de codimension  $\nu(y)$ . Lorsque  $j$  tend vers  $+\infty$ , les bouts de sous-variétés ainsi obtenus "tendent" vers  $y$ , ce qui, grâce à la proposition 5, entraîne  $\text{cotop}_y g(X) \leq 2\nu(y)$ .

Corollaire 14 : Soit  $X$  un sous-ensemble analytique, de codimension analytique  $n$ , d'une variété analytique banachique  $V$ . Alors,  $X$  est de codimension topologique  $2n$  dans  $V$ , et l'ensemble singulier  $SX$  de  $X$  est un fermé (non nécessairement analytique) de codimension topologique  $2n+2$  dans  $V$ .

Ceci est bien sûr beaucoup plus facile à démontrer directement que la proposition 13. Pour la seconde assertion, soit  $x$  un point singulier de  $X$  et

$$X = \bigcup X^\lambda \cup Y$$

une décomposition de  $X$  (dans les germes en  $x$ ), où les  $X^\lambda$ , en nombre fini, sont irréductibles de codimension analytique  $n$ , et où  $Y$  est analytique de codimension au moins égale à  $n+1$ . L'ensemble singulier  $SX$  est contenu dans  $S(\bigcup X^\lambda) \cup Y$ , ce qui permet de conclure puisque  $\bigcup X^\lambda$  est de définition finie.

Remarque : Il ne faudrait pas croire que l'image par une application différentiable propre d'indice  $i$  d'un fermé de codimension topologique  $n$  dans la variété source est de codimension au plus égale à  $n-i$  dans la variété but (comme cela a lieu dans le cas analytique, d'après ce qui précède). Soit en effet  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $J$  un carré de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\Gamma$  le graphe de la courbe de Peano appliquant continûment  $I$  sur  $J$ . On peut voir que  $\Gamma$  est un fermé de codimension 2 de  $I \times J$  (il est sans point intérieur, et, localement dans  $I \times J$ , son complémentaire est connexe). Or, la projection de  $I \times J$  sur le second facteur, qui a pour indice 1 et qui est propre sur  $\Gamma$ , transforme  $\Gamma$  en  $J$  tout entier.

Remarque : Si  $f$  est une application continue de  $E$  sur  $F$

(espaces topologiques), on doit trouver des relations entre la dimension de  $F$  et la codimension dans  $E$  des fibres de  $f$ . Un résultat trivial dans ce sens est le suivant : si  $f$  est une fibration de  $E$  sur une variété topologique de dimension  $n$ , ses fibres sont de codimension au plus  $n$ .

Appendice 1 : Réalisation locale d'une application épidermique comme une projection (nous traiterons le cas analytique complexe).

La question étant locale, les variétés source et but  $V$  et  $W$  seront assimilées à des voisinages de l'origine de leurs espaces tangents, en  $a$  et  $f(a)$  respectivement. On peut identifier  $V$  à la sous-variété de  $V \times W$  d'équation  $y - f(x) = 0$ , l'application  $f$  devenant la projection sur le second facteur. Soit  $q$  la codimension de l'image de  $f'(0)$ , et  $S$  un  $q$ -plan de  $W$  supplémentaire de cette image. L'équation  $y - f(x) \in S$  définit une sous-variété  $\tilde{V}$  de  $V \times W$ , telle que la projection de  $\tilde{V}$  sur  $W$  soit une submersion, à fibres de dimension  $i + q$  ( $i$  est l'indice de  $f$ ). Ainsi,  $\tilde{V}$  s'écrit localement  $\mathbb{C}^{i+q} \times W$ ,  $V$  est une sous-variété de  $\tilde{V}$ , et  $f$  est induite par la projection sur le second facteur de  $\mathbb{C}^{i+q} \times W$ .

Appendice 2 : Opérateurs à indice réels coorientés.

Soient  $E, F$  deux espaces de Banach réels. Un opérateur à indice coorienté de  $E$  dans  $F$  sera la donnée d'un opérateur à indice de  $E$  dans  $F$  et d'un couple d'orientations sur le noyau et le conoyau de cet opérateur (si on change simultanément les deux orientations, on déclare qu'on a le même opérateur coorienté ; si l'opérateur est inversible, le coorienter, c'est l'affecter d'un signe  $\pm$ ). Nous noterons  $\tilde{\Omega}(E, F)$  l'ensemble ainsi obtenu. Si  $u \in \tilde{\Omega}(E, F)$  et si  $V$  est un sous-espace de  $F$ , de dimension finie transverse à l'image de  $u$ , muni d'une orientation, on peut choisir canoniquement une orientation sur  $u^{-1}(V)$  : en effet,  $V$  et  $\text{coker } u$  étant orientés, l'isomorphisme canonique  $V/u(u^{-1}(V)) \xrightarrow{\cong} \text{coker } u$  nous permet d'orienter  $u(u^{-1}(V))$  de façon à avoir :

$$V = u(u^{-1}(V)) + \text{coker } u .$$

Utilisant ensuite l'isomorphisme canonique  $u^{-1}(V)/\ker u \xrightarrow{\cong} u^{-1}(V)$ ,

nous orientons  $u^{-1}(V)$  de façon à ce que

$$u^{-1}(V) = u(u^{-1}(V)) + \ker u .$$

Si  $W$  est un sur-espace de  $V$ ,  $u$  induit un isomorphisme de  $u^{-1}(W)/u^{-1}(V)$  sur  $W/V$ . Appelons  $Q$  cet espace. Les orientations de  $V$ ,  $W$ ,  $u^{-1}(W)$  sont liées par les relations :

$$W = Q + V \quad \text{et} \quad u^{-1}(W) = Q + u^{-1}(V)$$

Cette remarque montre que la définition suivante d'une topologie sur  $\tilde{\Omega}$  d'espace étalé sur  $\Omega$  est consistante : soit  $V$  un espace transverse à l'image d'un opérateur coorienté  $u$  ; il reste transverse aux images des opérateurs  $v$  de  $\Omega$  voisins de " $u$ ", et les contre-images  $v^{-1}(V)$  restent voisines de  $u^{-1}(V)$  - en particulier, on peut transporter sans ambiguïté une orientation de  $u^{-1}(V)$  à  $v^{-1}(V)$ . Nous déclarerons alors que " $v$ " est voisin de  $u$  dans  $\tilde{\Omega}$  s'il est muni de la coorientation qui transforme une orientation de  $V$  de la même façon que la coorientation de  $u$ .

Remarquons que nous aurions pu changer de conventions, et écrire simultanément  $V = \ker u + u(u^{-1}(V))$ ,  $u^{-1}(V) = \ker u + u(u^{-1}(V))$ ,  $W = V + Q$ ,  $u^{-1}(W) = u^{-1}(V) + Q$ . Cela n'aurait rien changé au résultat si l'indice de  $u$  est pair, et cela aurait défini une autre topologie tout aussi consistante sur les composantes de  $\tilde{\Omega}$  d'indice impair.

Remarquons que les opérateurs à indice coorientés permettent aussi de transporter par image directe les coorientations des espaces de codimension finie sur lesquels ils sont injectifs (un opérateur à indice sans coorientation transporte par image réciproque les coorientations des espaces transverses à son image, et par image directe les orientations des espaces de dimension finie sur lesquels il est injectif). Il semble qu'un bon cadre pour des théorèmes d'image directe (à coefficients entiers, et non modulo 2) en dimension infinie soit le suivant : variétés différentiables banachiques pour objet,

applications propres différentiables dont la différentielle en tout point soit un opérateur à indice muni d'une coorientation (variant continûment avec le point) pour morphismes. Un cas particulier, que nous utiliserons au chapitre 2, est celui du plongement d'une sous-variété de codimension finie coorientée dans une variété. Remarquons enfin que si  $E, F$  sont des espaces complexes, et  $E', F'$  les espaces réels sous-jacents, il y a un plongement naturel de  $\Omega(E, F)$  dans  $\tilde{\Omega}(E', F')$ .

Limitons-nous, pour une dernière indication, au cas  $E = F = \ell^2(\mathbb{R})$ . L'espace  $\tilde{\Omega}$  est alors connexe : il suffit de savoir déformer un opérateur coorienté non inversible en le même opérateur muni de l'autre coorientation ; prenons par exemple un opérateur  $u$  dont le noyau n'est pas nul. Transformons le à image fixe, en faisant tourner son noyau dans une Grassmannienne de  $E$ , en un opérateur  $v$  de même image coorientée que  $u$ , et de même noyau (avec l'autre orientation) que  $u$ . Il ne reste plus pour terminer qu'à utiliser la connexité du groupe linéaire de  $\ell^2$ . Ainsi,  $\tilde{\Omega}$  est un revêtement connexe d'ordre 2 de  $\Omega$ . Mais le groupe de Poincaré de  $\Omega$  est  $\mathbb{Z}_2$  (cf. [3] :  $[S', \Omega] \approx Kc(S') \approx \mathbb{Z}_2$ ). Donc,  $\tilde{\Omega}$  est le revêtement simplement connexe de  $\Omega$ .

---

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] BREDON : Sheaf Theory ; Mc Graw-Hill.
- [2] GROTHENDIECK : Local Cohomology, notes by Hartshorne ; Harvard University, 1961, on Springer-Verlag.
- [3] MAZET-RAMIS : Exposés 10, 11.
- [4] MOULIS : Exposé 8.
- [5] PALAIS : Lectures on the differential topology of infinite dimensional manifolds, Brandeis University, 1964-65.

- [6] PENOT : La notion d'application analytique, Séminaire Choquet, 1966-67, n°3, page 36.
- [7] RAMIS : Exposé 1.
- [8] RUGET : Exposé 2.
- [9] SPANIER : Algebraic Topology ; Mc Graw-Hill.

Exposé n° 16 bis : INTERSECTIONS

(chapitre II)

I - Coorientations :

Soit  $E$  un espace topologique métrisable, et  $\Lambda$  l'anneau  $\mathbb{Z}$  ou l'anneau  $\mathbb{Z}_2$  (pour ne pas nous placer dans des hypothèses d'une généralité ici illusoire). Si  $X$  est un fermé de  $E$ , le faisceau de cohomologie locale à support dans  $X$ , noté  $\underline{H}_X^p(\Lambda)$  est le faisceau associé au préfaisceau

$$U \longmapsto H_X^p \cap U(U; \Lambda).$$

Ces faisceaux sont liés aux groupes de cohomologie de  $E$  à support dans  $X$  par la suite spectrale ([2] page 5 : c'est la suite spectrale relative aux foncteurs dérivés d'un composé de deux foncteurs)

$$H^p(E; \underline{H}_X^q(\Lambda)) = E_2^{pq} \implies H_X^n(E; \Lambda)$$

Supposons qu'il existe un entier  $n$  tel que, pour tout point  $x$  de  $X$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x$  dans  $E$  tel que la paire  $(U, U \cap X)$  soit homéomorphe à la paire  $((U \cap X) \times \mathbb{R}^n, (U \cap X) \times \{0\})$ . Alors, le faisceau  $\underline{H}_X^n(\Lambda)$ , qui a pour support  $X$ , est localement isomorphe au faisceau constant  $\Lambda$  le long de  $X$ ; les autres faisceaux  $\underline{H}_X^p(\Lambda)$  sont nuls. Nous dirons que  $X$  est coorientable dans  $E$  si  $\underline{H}_X^n(\Lambda)|_X$  est globalement isomorphe au faisceau constant  $\Lambda$ ; choisir une coorientation sera alors choisir un tel isomorphisme (c'est toujours possible, et de façon unique, si  $\Lambda = \mathbb{Z}_2$ ). Si  $X$  est un fermé coorienté de  $E$ , de "codimension"  $n$ , la suite spectrale ci-dessus dégénère en un isomorphisme de  $H^{i-n}(X; \Lambda)$  sur  $H_X^i(E; \Lambda)$ , pour tout entier  $i$ . Supposons désormais  $E$  homologiquement localement contractile,

pour que  $H_X^i(E; \Lambda)$  soit (canoniquement) isomorphe à  $H^i(E, E-X; \Lambda)$ , et, notant  $\alpha$  l'injection coorientée de  $X$  dans  $E$ , désignons par  $\alpha_1$  l'isomorphisme

$$\alpha_1 : H^{i-n}(X; \Lambda) \xrightarrow{\cong} H^i(E, E-X; \Lambda)$$

Définition : Nous appellerons classe fondamentale de  $X$  dans  $E$  et nous noterons  $[X]_E$  l'élément  $\alpha_1$  de  $H^n(E, E-X; \Lambda)$ .

En fait, dès que nous connaissons  $[X]_E$ , c'est-à-dire dès que nous avons choisi une coorientation de  $X$  dans  $E$ , nous pouvons donner une autre construction du morphisme  $\alpha_1$ , et même le préciser : étant donné un fermé quelconque  $Y$  de  $X$ , nous allons construire un morphisme

$$\alpha_1 : H^{i-n}(X, X-Y; \Lambda) \longrightarrow H^i(E, E-Y; \Lambda)$$

qui, au signe près peut être ([1] page 150), commutera avec les restrictions et le morphisme  $\alpha_1$  précédent. C'est ce nouvel  $\alpha_1$  que nous utiliserons exclusivement. Soit  $v$  la famille, ordonnée par l'inclusion, des paires d'ouverts  $(U, V)$  de  $E$ , où  $U$  est un voisinage de  $X$  et  $V$  est un voisinage de  $X-Y$ . Nous prétendons que le morphisme naturel  $\alpha^*$  de  $\varinjlim_v \text{ind. } H^i(U, V; \Lambda)$  dans  $H^i(X, X-Y; \Lambda)$  est un isomorphisme, c'est-à-dire que la paire  $(X, X-Y)$  est terme dans  $E$  ("tout" [9] page ). En effet,  $X$  est terme dans  $E$  (pour la cohomologie d'Alexander, ou aussi bien singulière, avec nos hypothèses) comme fermé d'un paracompact, et  $X-Y$  est terme dans  $E-Y$  (donc dans  $E$ ) pour la même raison. Prenons donc une classe  $b \in H^{i-n}(U, V)$  telle que  $\alpha^* b' = b$ . La définition

$$\alpha_1 b = [X]_U \cup b'$$

(où  $[X]_U$  est aussi bien défini que  $[X]_E$ ) est consistante, car deux classes  $b'$  et  $b''$  représentant  $b$  coïncident nécessairement dans un voisinage de la paire  $(X, X-Y)$ .

Etant donnés un fermé  $Y$  de  $X$ , une classe  $a \in H^*(X, X-Y)$ , un fermé  $Z$  de  $E$ , une classe  $b \in H^*(E, E-Z)$ , nous avons

$$(1) \quad \alpha_! (a \cup \alpha^* b) = \alpha_! a \cup b \in H^*(E, E-Y \cap Z) .$$

En effet, si  $a'$  est un prolongement de  $a$  à un voisinage  $(U, U-Y')$  de  $(X, X-Y)$ , les deux membres, considérés comme éléments de  $H^*(U, U-Y \cap Z)$  sont égaux à  $[X]_U \cup a' \cup \text{restric.} b$ . On a aussi, si  $Y$  et  $Z$  sont deux fermés de  $X$  et  $a$  et  $b$  des classes de  $H^*(X, X-Y)$  et  $H^*(X, X-Z)$  respectivement,

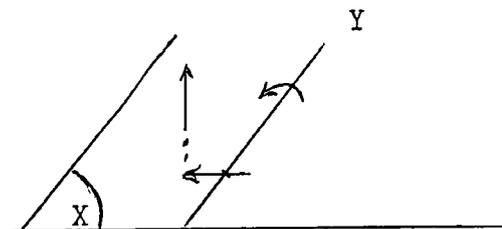
$$(2) \quad \alpha_! (a \cup b) \cup [X]_E = (-1)^n \text{ degré } b \quad \alpha_! a \cup \alpha_! b \in H^*(E, E-Y \cap Z)$$

Remarque : Si  $X$  est un rétracte de voisinage dans  $E$  (ce qui est par exemple vrai si  $X$  est une sous-variété fermée d'une quelconque variété banachique paracompacte, car  $X$  est alors un A.N.R. [5] page 105), on peut étendre les classes de  $H^*(X, X-Y)$  à un voisinage fixe de  $(X, X-Y)$ .

Si  $Y$  est un fermé de  $X$  tel que  $X$  ressemble localement à  $Y \times \mathbb{R}^p$ , et si  $\beta$  désigne l'injection de  $Y$  dans  $X$ , la coorientabilité simultanée de  $\alpha$  et  $\beta$  entraîne celle de  $\alpha\beta$ . La coorientation de  $\alpha\beta$  que nous associerons à des coorientations de  $\alpha$  et  $\beta$  sera celle qui assure l'égalité

$$(\alpha\beta)_! = \alpha_! \beta_! : H^*(Y) \longrightarrow H^*(E, E-Y) .$$

Le dessin ci-contre, où  $E$  est l'espace à 3 dimensions, et où les coorientations sont indiquées par des flèches, visualise cette convention.



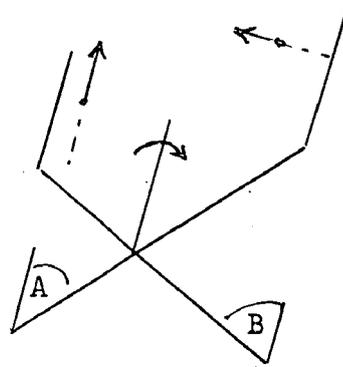
Supposons maintenant que  $E$  soit une variété banachique réelle de classe  $C^1$ , paracompacte. Si  $A$  et  $B$  sont deux sous-variétés  $\Lambda$ -coorientées de classe  $C^1$ , transverses dans  $E$ ,

on sait que l'on a :

$$[A]_E \cup [B]_E = [A \cap B]_E \in H^*(E, E - A \cap B; \Lambda) ,$$

pour la coorientation de  $A \cap B$  indiquée sur le dessin ci-contre.

Si maintenant  $X$  est une sous-variété coorientée de  $E$ , et  $A, B$  deux sous-variétés coorientées de  $X$ , transverses dans  $X$ , si nous coorientons  $A$  et  $B$  dans  $E$ ,  $A \cap B$  dans  $X$  et dans  $E$  conformément aux conventions indiquées plus haut, la formule (2) nous donne



$$(3) [A \cap B]_E \cup [X]_E = (-1)^{\text{codim}_E X \text{ codim}_X B} [A]_E \cup [B]_E \in H^*(E, E - A \cap B) .$$

Dans le cas où  $X$  admet un voisinage tubulaire dans  $E$ , (par exemple si  $X$  est une sous-variété d'une variété de classe  $C^3$  admettant des partitions de l'unité [11]), on peut démontrer cette formule en laissant  $A$  fixe dans  $X$  et en poussant  $B$  génériquement normalement à  $X$ , i.e. en rajoutant à la figure l'image  $B'$  d'une section différentiable générique du fibré normal à  $X$  dans  $E$ ; les deux membres de la formule sont alors représentées par l'intersection de  $A$  et de  $B'$ , qui sont transverses dans  $E$ .

## II - Sous-variétés entrouvertes. Jolis sous-ensembles analytiques

Définition 1 : Soit  $E$  une variété banachique réelle de classe  $C^1$ . Nous dirons qu'un fermé  $X$  de  $E$  en est une sous-variété entrouverte  $\Lambda$ -coorientée de codimension  $n$  s'il existe un sous-fermé  $A$  de  $X$  de codimension topologique dans  $E$  au moins égale à  $n+2$  tel que  $X-A$  soit une sous-variété  $\Lambda$ -coorientée de codimension  $n$  de  $E-A$ .

L'exemple que nous utiliserons le plus souvent d'une telle situation est celui où  $X$  est un sous-ensemble analytique complexe de codimension finie d'une variété analytique complexe  $E$  (on peut alors prendre  $\Lambda = \mathbb{Z}$ ).

Dans le cas général, le corollaire I.4, joint à la suite exacte de cohomologie du triple  $(E, E-A, E-X)$  nous enseigne que l'application naturelle de  $H^q(E, E-X; \mathbb{Z})$  dans  $H^q(E-A, E-X; \mathbb{Z})$  est un isomorphisme pour  $q < n$ , ainsi d'ailleurs, d'après la formule des coefficients universels, que si on remplace  $\mathbb{Z}$  par  $\mathbb{Z}_2$ . D'après le paragraphe 1, ces groupes sont nuls pour  $q < n$ , et  $H^n(E, E-X; \Lambda)$  est muni d'un isomorphisme canonique sur  $H^0(X-A; \Lambda)$ , lequel n'est pas forcément égal à  $H^0(X; \Lambda)$  (penser à un cône dans  $\mathbb{R}^3$ ). Nous noterons  $[X]_E$  et nous appellerons classe fondamentale de  $X$  dans  $E$  l'image de  $1 \in H^0(X-A; \Lambda)$  par cet isomorphisme. Cette classe ne dépend pas du fermé  $A$  susceptible d'entrer au côté de  $X$  dans la définition 1, comme on le voit en écrivant un diagramme et en utilisant le fait que, si  $A$  et  $A'$  sont de codimension au moins égale à  $n+2$  dans  $E$ , il en va de même pour  $A \cup A'$ . Il arrivera que nous considérons la classe  $[X]_E$  comme un élément de  $H^n(E; \Lambda)$ .

Proposition 1 : Soit  $X$  une sous-variété entrouverte  $\Lambda$ -coorientée de codimension  $n$  de la variété  $E$ ; Soient  $F$  une autre variété et  $f$  une application de classe  $C^1$  de  $F$  dans  $E$ . Supposons que l'on puisse choisir  $A$  (celui de la définition 1) tel que  $\text{cotop}_F f^{-1}(A) \gg n+2$  et tel que la restriction de  $f$  au complémentaire de  $f^{-1}(A)$  soit transverse à  $X-A$ . Alors,  $f^{-1}(X)$  est une sous-variété entrouverte de  $F$  de codimension  $n$  munie d'une  $\Lambda$ -coorientation canonique et  $f^*$  transforme  $[X]_E \in H^n(E, E-X)$  en  $[f^{-1}(X)]_F \in H^n(F, F-f^{-1}(X))$ .

C'est une conséquence immédiate des définitions qui précèdent.

Un joli sous-ensemble analytique réel  $Y$  de codimension  $n$  d'une variété analytique banachique réelle  $V$  n'est pas en général une sous-variété entrouverte de cette variété. Nous allons

montrer qu'on peut toutefois lui attacher de façon naturelle une classe fondamentale  $[Y]_V \in H^n(V, V-Y; \mathbb{Z}_2)$ . Si  $Y$  est un espace analytique réel de dimension finie, cela nous permettra de retrouver la classe fondamentale d'homologie de  $Y$  introduite par Borel-Haefliger [10] : il suffit en effet de construire cette classe localement, auquel cas on réalise  $Y$  comme sous-ensemble analytique d'un  $\mathbb{R}^n$ , et on prend l'image de  $[Y]_{\mathbb{R}^n}$  par la dualité de Poincaré (on obtient bien sûr une classe d'homologie à support non nécessairement compact).

Si nous appelons  $SY$  l'ensemble singulier de  $Y$ , qui est de codimension topologique au moins égale à  $n+1$ , la suite ci-dessous est exacte

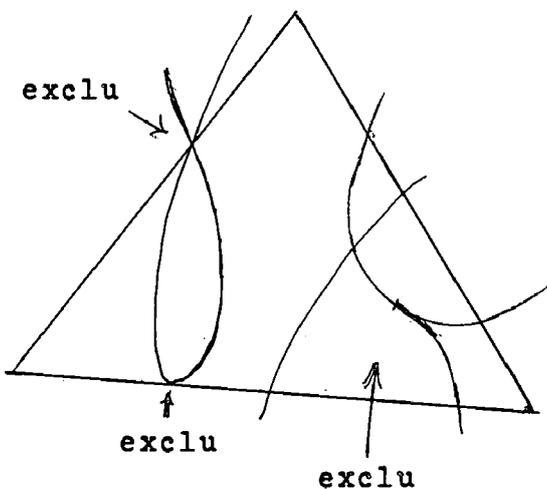
$$0 \rightarrow H^n(V, V-Y; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\rho} H^n(V-SY, V-Y; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\partial} H^{n+1}(V, V-SY; \mathbb{Z}_2)$$

Nous allons montrer que  $\partial[Y-SY]_{V-SY}$  est nul. Nous définirons alors  $[Y]_V$  comme étant l'unique contre-image par  $\rho$  de  $[Y-SY]$ . Remarquons que les groupes  $H_{n-1}(V, V-Y; \mathbb{Z})$ ,  $H_{n-1}(V-SY, V-Y; \mathbb{Z})$  et  $H_n(V, V-SY; \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$  sont tous nuls. D'après la formule des coefficients universels, la suite ci-dessous est isomorphe à la suite

$$0 \rightarrow \text{Hom}(H_n(V, V-Y; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\rho} \text{Hom}(H_n(V-SY, V-Y; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\partial} \text{Hom}(H_{n+1}(V, V-SY; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_2) .$$

Choisissons un point de base à l'extérieur de  $Y$ , et rappelons-nous que  $H_{n+1}(V, V-SY; \mathbb{Z})$  est un quotient de  $\pi_{n+1}(V, V-SY)$ . Prenons donc une boule  $B$  de dimension  $n+1$  de  $V$ , à bord dans  $V-SY$ , et montrons que l'entier modulo 2 que lui associe l'homomorphisme  $\partial[Y-SY]$  est nécessairement nul : pour calculer cet entier, nous considérons le bord  $D$  de  $B$  comme une boule de dimension  $n$  de  $V-SY$ , à bord dans le point de base, donc dans  $V-Y$ , et nous appliquons à  $D$  l'homomorphisme  $[Y-SY]_{V-SY}$ , dont il nous faut maintenant donner une interprétation géométrique :

si  $D$  est approchée, de façon quelconque, par une boule  $\tilde{D}$  différentiable par morceaux, telle que  $\tilde{D}$  ne rencontre la variété  $Y-SY$  qu'à l'intérieur des morceaux, et ceci transversalement,  $\langle [Y-SY], D \rangle$  est le nombre modulo 2 de ces intersections. Sachant que  $\tilde{D}$  est, dans  $V$ , le bord d'une boule  $\tilde{B}$ , nous devons donc montrer, utilisant l'hypothèse d'analyticité de  $Y$ , que les intersections de  $\tilde{D}$  et  $Y$  sont en nombre pair. Par fragmentation, et en nous plaçant localement dans des cartes de  $V$ , nous pouvons nous ramener au cas où  $\tilde{B}$  est dessinée dans un espace affine de dimension  $n+1$ , et rencontre  $Y$ , suivant un ensemble analytique réel  $A$  de dimension 1. D'après l'hypothèse de transversalité sur  $Y \cap \tilde{D}$ , les branches de  $A$  coupent simplement  $\tilde{D}$ . Il nous



suffit de montrer que le nombre de branches issues d'un point de  $A$  est pair. Or, ceci résulte de la description locale de  $A$  comme revêtement ramifié [12] au-dessus de  $\mathbb{R}$  pointé par l'origine (au-dessus de 0, il y a un seul point de  $A$ ; au-dessus de  $\mathbb{R}^+$  et  $\mathbb{R}^-$ , des branches dont le nombre est celui des racines, toutes simples, d'un polynôme de même degré).

### III - Sous-ensembles analytiques complexes. Multiplicités.

Nous allons désormais limiter notre étude aux variétés analytiques banachiques complexes, morphismes analytiques et sous-ensembles analytiques, ce qui nous permettra d'aller un peu au-delà des situations de transversalité, et de définir des multiplicités. Faisons d'abord deux remarques :

1° Soient  $X$  et  $Y$  deux sous-ensembles analytiques <sup>purés</sup>, de codimensions  $\vee n$  et  $p$  respectivement d'une variété  $V$ ; alors, toutes les composantes irréductibles de  $X \cap Y$  (qui sont <sup>localement</sup> en nombre fini) ont une codimension au plus égale à  $n+p$ .

2° Soit  $f$  un morphisme d'une autre variété  $W$  dans  $V$  ; alors, toutes les composantes irréductibles de  $f^{-1}(X)$  (qui sont <sup>localement</sup> en nombre fini), ont une codimension au plus égale à  $n$  dans  $W$  . Pour la seconde assertion, la considération du graphe de  $f$  permet de se ramener au cas où  $W$  est une sous-variété de  $V$  , auquel cas on utilise la caractérisation de la codimension d'un sous-ensemble analytique comme borne supérieure des dimensions des plans complexes ne rencontrant l'ensemble qu'en un point isolé (on se place en un point de la composante étudiée de  $W \cap X$  qui n'appartienne qu'à cette composante). Pour la première assertion, on procède par l'absurde, prenant la trace de la situation sur un plan de dimension plus grande que  $n+p$  qui ne rencontrerait  $X \cap Y$  qu'en un point isolé, alors que les codimensions des traces de  $X$  et  $Y$  sont inférieures ou égales à  $n$  et  $p$  respectivement, d'après ce qui précède. On est alors ramené au même problème en dimension finie, auquel cas on utilise l'astuce habituelle : on considère l'intersection de  $X \times Y$  avec la diagonale du carré cartésien de l'espace ambiant.

Nous remarquons avec regret que, si  $V$  est de dimension infinie, la diagonale de  $V \times V$  n'est pas de codimension finie dans  $V \times V$  , non plus que le graphe de  $f$  dans  $W \times V$  . Ceci empêche de considérer, comme à l'habitude, l'étude des images réciproques comme un sous-produit de l'étude des intersections. Nous allons donc renverser cet ordre.

Le sous-ensemble  $X$  étant toujours de codimension pure  $n$  dans  $V$  , soit  $P$  une composante irréductible de  $f^{-1}(X)$  de codimension égale à  $n$  (il se peut qu'il n'y en ait pas ; nous n'avons alors rien à raconter). Soit  $Q$  la réunion des autres composantes de  $f^{-1}(X)$  . L'intersection de  $P$  et  $Q$  est de codimension complexe au moins égale à  $n+1$  , donc de codimension topologique au moins égale à  $2n+2$  . La suite exacte de Mayer-Vietoris, jointe à I.4 , nous dit alors que le morphisme naturel

$$\theta : H^{2n}(W, W-P) \oplus H^{2n}(W, W-Q) \longrightarrow H^{2n}(W, W-f^{-1}(X))$$

est un isomorphisme (le groupe de coefficients, tout au long de ce paragraphe, est  $\mathbb{Z}$ ). Or, nous savons que  $H^{2n}(W, W-P)$  est canoniquement isomorphe à  $H^{2n}(W-SP, W-P)$ , donc à  $\mathbb{Z}$ , puisque  $P-SP$  est connexe (irréductibilité de  $P$ ) et canoniquement  $\mathbb{Z}$ -coorienté (grâce à la structure complexe) :  $H^{2n}(W, W-P)$  est engendré par  $[P]_W$ .

Définition 2 : Nous appellerons multiplicité le long de  $P$  de la contre-image de  $X$  par  $f$ , et nous noterons  $\mu(X, f; P)$ , la coordonnée suivant  $[P]_W$  de  $\theta^{-1} f^*[X]_V$ .

Propriété 0 : La notion de multiplicité d'une contre-image le long d'une composante irréductible propre est une notion locale :

Si nous nous restreignons à un ouvert  $U$  de  $W$ , la composante propre  $M$  de  $f^{-1}(X)$  peut se fragmenter en plusieurs (ou aucune) composantes irréductibles propres  $M_j^!$  ( $j \in J$ ) de  $f|_U^{-1}(X)$ . Nous affirmons que, pour tout  $j$ ,

$$\mu(X, f|_U; M_j^!) = \mu(X, f; M) .$$

Soit  $N$  la réunion des composantes de  $f^{-1}(X)$  autres que  $M$ , et  $N_j'$  la réunion des composantes de  $f^{-1}(X) \cap U$  autres que  $M_j^!$ . Ecrivons le diagramme ci-dessous, que les flèches verticales de gauche rendent commutatif par hypothèse

$$\begin{array}{ccc} H^{2n}(W, W-M) \oplus H^{2n}(W, W-N) & \xrightarrow{\approx \theta_W} & H^{2n}(W, W-f^{-1}(X)) \\ \rho \downarrow & \swarrow \sigma & \downarrow \\ H^{2n}(U, U-M_j^!) \oplus H^{2n}(U, U-N_j') & \xrightarrow{\approx \theta_U} & H^{2n}(U, U-f^{-1}(X)) \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow (\text{restr.})^* \\ \downarrow \end{array}$$

Notre assertion résulte immédiatement de ce que  $\sigma$  est nulle, et  $\rho$  envoie  $[M]_W$  sur  $[M_j^!]_U$ .

Propriété 1 : Si  $W$  est un produit  $F \times V$ , où  $F$  est une variété connexe, et si  $f$  est la deuxième projection, il est clair que  $f^{-1}(X)$  tout entier est une composante irréductible propre, et que  $\mu(X, f; f^{-1}(X))$  vaut 1.

Propriété 2 : Si  $W$  est une variété de dimension  $n$ , et  $f$  une immersion de  $W$  dans  $V$  telle que  $f^{-1}(X)$  soit réduit à un seul point  $x$ , si de plus  $f(x)$  est un point régulier de  $X$ , et si  $f$  et  $X$  sont transverses en  $f(x)$ , on a évidemment

$$\mu(X, f; x) = 1.$$

Propriété 3 : Dans la situation précédente, abandonnons les hypothèses de régularité et de transversalité : nous pouvons supposer (en nous plaçant dans une carte) que  $W$  est un sous-espace affine de  $V$ , rencontrant  $X$  en un point isolé  $x$ . Nous pouvons encore donner une interprétation simple de  $\mu(X, f; x)$  : si  $W'$  est un quelconque supplémentaire topologique de  $W$ , nous savons que  $X$  peut être (au voisinage de  $x$ ) décrit comme revêtement ramifié au-dessus de  $W'$  ;  $\mu(X, f; x)$  n'est autre que le degré de ce revêtement.

En effet, choisissons une boule  $B$  de  $W$  centrée en  $x$ , et un ouvert  $\Omega$  de  $W'$  tel que  $x$  appartienne à  $\Omega \times B$ , mais que  $\Omega \times \partial B$  ne rencontre pas  $X$ . Prenons la trace de  $[X]_{V, \mathbb{Z}}$  sur  $\Omega \times (W, W-B)$ , puis sur  $a \times (W, W-B)$  et sur  $b \times (W, W-B)$ , où  $a$  est tel que  $x$  appartienne à  $a \times B$ , et  $b$  tel que  $b \times B$  coupe  $X$  en des points réguliers seulement, et transversalement. D'après la propriété 2, cette dernière trace vaut  $d$  fois le générateur canonique de  $H^{2n}(b \times (W, W-B); \mathbb{Z})$ . D'où la conclusion.

Propriété 4 : Transitivité des multiplicités d'image réciproque. Soit  $T \xrightarrow{g} W \xrightarrow{f} V$  une suite de variétés et d'applications analytiques,  $X$  un sous-ensemble analytique de  $V$  de codimension pure  $n$ ,  $Y$  sa contre-image dans  $W$ , et  $Z$  la contre-image de  $Y$  dans  $T$ . Supposons que  $Z$  ait (au moins) une composante irréductible  $M$  de codimension  $n$ . Soient  $P^i$  ( $i \in I$ )

les composantes de  $Y$  telles que  $g^{-1}(P_i)$  contienne  $M$ . Alors  $I$  est fini, les  $P_i$  sont nécessairement des composantes propres de  $f^{-1}(X)$ ,  $M$  est une composante propre de chaque  $g^{-1}(P_i)$ , et l'on a

$$\mu(X, f \circ g; M) = \sum_{i \in I} \mu(X, f; P_i) \mu(P_i, g; M)$$

Si  $x \in M$ , tous les  $P_i$  passent par  $g(x)$ ; donc  $I$  est fini.

Les assertions de propreté résultent de considérations sur la codimension. Pour démontrer la dernière, on pourrait se localiser en un point qui n'appartienne à aucune autre composante de  $Z$  que  $M$ . Nous procéderons plutôt ainsi : soit  $N$  la réunion des composantes de  $Z$  autres que  $M$ , et  $Q$  la réunion des composantes de  $Y$  autres que les  $P_i$ . Remarquons d'abord que  $g^{-1}(Q)$  est contenu dans  $N$  (sinon, une composante au moins de  $g^{-1}(Q)$  serait strictement contenue dans  $M$ , ce qui est absurde pour une raison de codimension). Ceci entraîne, avec les notations du diagramme ci-dessus, la nullité de  $\pi_2 \circ g^*(\text{Ker } \pi_1)$  :

$$\begin{array}{ccccc}
 H^{2n}(T, T-M) & \xleftarrow{\pi_2 g^* \sigma_1} & \oplus & H^{2n}(W, W-P_i) & \\
 \uparrow \pi_2 & & & \sigma_1 \downarrow \quad \uparrow \pi_1 & \\
 H^{2n}(T, T-M) & & \oplus & H^{2n}(W, W-P_i) & \xleftarrow{\pi_1 f^*} \\
 \oplus & \xleftarrow{g^*} & \oplus & \oplus & H^{2n}(V, V-X) \\
 & & & & \searrow f^* \\
 H^{2n}(T, T-N) & & & H^{2n}(W, W-Q) & 
 \end{array}$$

On a alors  $\pi_2 g^* f^* = (\pi_2 g^* \sigma_1)(\pi_1 f^*)$ , ce qui est équivalent à la formule proposée.

Propriété 5 : Les multiplicités ici introduites sont des entiers strictement positifs. Elles sont les seules vérifiant les propriétés 0, 1, 3 et la propriété 4 dans le cas particulier où  $Z=M$ ,  $Y = 1^{\circ}$  un des  $P_i$ , et  $g$  est une immersion.

En effet, si nous voulons calculer une multiplicité  $\mu(X, f; M)$ , restreignons-nous (Prop. 0) à un ouvert de  $W$  sur lequel la trace de  $f^{-1}(X)$  ne soit pas plus grande que la trace de  $M$  (notons encore  $W$  cet ouvert). Factorisons  $f$  par l'injection "graphe"  $\gamma$  de  $W$  dans  $W \times V$ , et la deuxième projection de  $W \times V$ . D'après les propriétés 3 et 4 faible, nous sommes ramenés au calcul de  $\mu(W \times X, \gamma; M)$ . Soit alors  $i$  une injection dans  $W$  d'un ouvert de  $\mathbb{C}^n$ , telle que  $i^{-1}f^{-1}(X) \neq \emptyset$ . La propriété 3 nous donne  $\mu(W \times X, \gamma, i; 0)$  et  $\mu(f^{-1}(X), i; 0)$ . On conclut alors à l'aide de la propriété 4 faible.

Nous allons maintenant étudier les intersections de sous-ensembles de codimension finie. Nous dirons ensuite quelques mots de l'intersection d'un sous-ensemble de codimension finie et d'un sous-ensemble de dimension finie.

Si  $X$  et  $Y$  sont deux sous-ensembles de  $V$  de codimensions pures  $n$  et  $p$  respectivement, soit  $P$  une composante irréductible de  $X \cap Y$  de codimension  $n+p$  (composante propre) et  $Q$  la réunion des autres composantes. Le produit  $X \times Y$  est un sous-ensemble irréductible de codimension  $n+p$  de  $V \times V$ , et, si nous appelons  $\Delta$  l'injection diagonale de  $V$  dans  $V \times V$ , les  $P_i$  sont aussi bien les composantes propres de  $\Delta^{-1}(X \times Y)$ .

Définition 3 : Nous appellerons multiplicité de l'intersection de  $X$  et  $Y$  le long de  $P_i$ , et nous noterons  $\mu(X, Y; P)$ , l'entier positif  $\mu(X \times Y, \Delta; P)$ .

Considérant que  $[X \times Y]_{V \times V}$  est le cup-produit externe de  $[X]_V$  et  $[Y]_V$  (ce qui se voit en se débarrassant d'abord des singularités), nous pouvons donner la définition équivalente :

Définition 3 bis : Soit  $\theta$  le morphisme naturel

$$\theta : H^{2n+2p}(V, V-P) \otimes H^{2n+2p}(V, V-Q) \longrightarrow H^{2n+2p}(V, V-X \cap Y),$$

qui est un isomorphisme (Mayer-Vietoris et Prop. I.4). Nous

appellerons multiplicité d'intersection de  $X$  et  $Y$  le long de  $P$  la coordonnée suivant  $[P]_V$  de  $\theta^{-1}([X]_V \cup [Y]_V)$ .

Propriété 0 bis : La notion de multiplicité d'intersection est locale (cf. Prop.0 pour le sens précis de cette assertion).

Propriété 6 :  $\mu(X, Y; P) = \mu(Y, X; P)$  !

Propriété 7 : Si  $X$  et  $Y$  sont contenus dans une sous-variété  $W$  de  $V$ , et si  $M$  est une composante propre, de multiplicité  $\mu$ , de l'intersection de  $X$  et  $Y$  considérés comme sous-ensembles de  $W$ , la formule (2) donne immédiatement

$$\mu[M]_V \cup [W]_V + \gamma = [X]_V \cup [Y]_V,$$

où  $\gamma$  est une classe à support dans la réunion  $N$  des composantes de  $X \cap Y$  autres que  $M$ .

Propriété 8 : Associativité.

Soient  $X, Y, Z$  trois sous-ensembles analytiques de  $V$ , de codimensions pures  $n, p, q$  respectivement. Supposons que  $X \cap Y \cap Z$  ait (au moins) une composante irréductible  $M$  de codimension  $n+p+q$ . Alors, les composantes  $P_i$  (resp.  $R_j$ ) de  $X \cap Y$  (resp. de  $Y \cap Z$ ) qui contiennent  $M$  sont en nombre fini, et toutes sont propres dans  $X \cap Y$  (resp. dans  $Y \cap Z$ ),  $M$  est une composante propre de chaque  $P_i \cap Z$  (resp.  $X \cap R_j$ ), et on a l'égalité

$$\sum_i \mu(X, Y; P_i) \mu(P_i, Z; M) = \sum_j \mu(X, R_j; M) \mu(Y, Z; R_j)$$

Pour démontrer la formule, appelons  $Q$  la réunion des composantes de  $X \cap Y$  autres que les  $P_i$ , et  $N$  la réunion des composantes de  $X \cap Y \cap Z$  autres que  $M$ . Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
H^{2n+2p}(V, V-X \cap Y) & \xleftarrow{\approx} & \oplus H^{2n+2p}(V, V-P_i) \oplus H^{2n+2p}(V, V-Q) \\
\downarrow U[Z]_V & & \downarrow \quad \swarrow \quad \downarrow \\
H^{2n+2p+2q}(V, V-X \cap Y \cap Z) & \xleftarrow{\omega} & H^{2n+2p+2q}(V, V-M) \oplus H^{2n+2p+2q}(V, V-N) ,
\end{array}$$

que les flèches verticales de droite rendent commutatif par hypothèse. En fait, la flèche en pointillé est nulle car  $Q \cap Z$  est contenu dans  $N$  (sinon, une composante irréductible de  $Q \cap Z$  serait strictement contenue dans  $M$ ). Il en résulte que  $\sum_i \mu(X, Y; P_i) \mu(P_i, Z; M)$  est simplement la coordonnée suivant  $[M]_V$  de  $\omega^{-1}([X] \cup [Y] \cup [Z])$ , d'où l'associativité désirée.

Propriété 9 : Compatibilité des multiplicités d'intersection et d'image réciproque.

Soient  $X, Y$  de codimensions pures  $n, p$  dans  $V$ ,  $f$  un morphisme de  $W$  dans  $V$ , et  $M$  une composante de  $f^{-1}(X \cap Y)$  de codimension  $n+p$ , s'il en existe une. Appelons  $P_i$  (resp.  $Q_j$ ) les composantes de  $f^{-1}(X)$  (resp.  $f^{-1}(Y)$ ) qui contiennent  $M$ . Appelons  $R_k$  les composantes de  $X \cap Y$  dont la contre-image par  $f$  contient  $M$ . Pour ne pas lasser le lecteur, nous ne lui imposerons pas la démonstration de la formule

$$\sum_k \mu(X, Y; R_k) \mu(R_k, f; M) = \sum_{i,j} \mu(X, f; P_i) \mu(Y, f; Q_j) \mu(P_i, Q_j; M)$$

(où l'on peut s'assurer facilement que les ensembles d'indice sont finis, et tous les symboles définis).

Propriété 10 : Il y a un cas où nous aurions pu ramener une multiplicité d'image réciproque à une multiplicité d'intersection: c'est le cas où l'application  $f$  est épidermique. En effet, localement dans  $W$ , il existe alors un entier  $q$  tel que  $f$  puisse se factoriser par une injection (épidermique) de  $W$  dans

$\mathbb{C}^q \times V$  et par la deuxième projection de  $\mathbb{C}^q \times V$ . D'après la propriété 1 (et 0!), nous pouvons même nous restreindre au cas où  $f$  est l'injection  $\alpha$  dans  $V$  d'une sous-variété  $Y$  de codimension  $p$ . Soient  $X$  un sous-ensemble irréductible de  $V$  de codimension  $n$ ,  $M$  une composante propre de  $\alpha^{-1}(X) = X \cap Y$ , et  $N$  la réunion des autres composantes du même. D'après la construction de  $\alpha_!$ , le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \alpha^* \\ \nearrow \\ H^{2n}(V, V-X) \\ \searrow \\ \cup [Y]_V \end{array} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ H^{2n}(Y, Y-Y \cap X) \\ \downarrow \alpha_! \\ H^{2n+2p}(V, V-Y \cap X) \end{array} & \begin{array}{c} \xleftarrow{\approx} \\ H^{2n}(Y, Y-M) \oplus H^{2n}(Y, Y-N) \\ \downarrow \alpha_! \\ H^{2n+2p}(V, V-M) \oplus H^{2n+2p}(V, V-N) \end{array}
 \end{array}$$

Alors, l'égalité  $\alpha_! [M]_Y = [M]_V$  entraîne l'égalité des multiplicités  $\mu(X, \alpha; M)$  et  $\mu(X, Y; M)$ .

Passons maintenant à une situation dissymétrique : l'intersection d'un sous-ensemble  $X$  de codimension finie et d'un sous-ensemble  $K$  de dimension finie, c'est-à-dire d'un sous-ensemble analytique admettant localement pour modèle un sous-ensemble analytique d'un  $\mathbb{C}^q$ . Tout sous-ensemble analytique  $L$  de  $K$  est encore de dimension finie ; on peut définir sans difficulté des composantes irréductibles globales de  $K$ , qui sont des variétés  $\mathbb{Z}$ -orientables, à singularités de codimension 2 ; si une telle composante  $K'$  est de dimension  $m$ , le groupe  $H_m(K'; \mathbb{Z})$  est canoniquement isomorphe à  $\mathbb{Z}$ , le générateur étant la classe fondamentale  $\{K'\}$  définie dans [10] (il s'agit d'homologie à supports fermés quelconques).

Soit donc  $X$  un sous-ensemble irréductible de codimension  $n$  de  $V$ , et  $K$  un sous-ensemble irréductible de dimension  $p$  (au moins égale à  $n$ , sinon, nous n'avons rien à dire). Toutes les composantes irréductibles de  $X \cap K$  ont une dimension au moins égale à  $p-n$ , comme on le voit en prenant un modèle local de  $K$ . Soit  $L$  une composante irréductible de  $X \cap K$  de dimension égale à  $p-n$  (s'il y en a ; nous dirons alors que  $L$  est une composante

propre de l'intersection), et soit  $M$  la réunion des autres composantes de  $X \cap K$ . Alors,  $L \cap M$  est de dimension strictement plus petite que  $p-n$ , et la suite de Mayer-Vietoris nous dit que le morphisme naturel

$$\theta : H_{p-n}(L; \mathbb{Z}) \oplus H_{p-n}(M; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{p-n}(X \cap K; \mathbb{Z})$$

est un isomorphisme. Mais le terme de droite est égal à  $H_{p-n}^{X \cap K}(V; \mathbb{Z})$ , et contient un élément privilégié, le cap-produit  $\{K\}_V \cap [X]_V$ , où  $\{K\}_V$  est considéré comme un élément de  $H_p^K(V; \mathbb{Z})$ . D'où la

Définition 4 : Nous appellerons multiplicité d'intersection de  $X$  et  $K$  le long de  $L$ , et nous noterons  $\mu(K, X; L)$ , la coordonnée suivant  $\{L\}$  de  $\theta^{-1}(\{K\}_V \cap [X]_V)$ .

Nous ne nous appesantirons pas sur les propriétés de cette multiplicité. Nous devons toutefois vérifier une compatibilité avec les définitions précédentes; c'est-à-dire envisager le cas où  $K$  est une sous-variété de dimension finie de  $V$ , ou plus généralement est contenu dans une telle sous-variété  $W$ . Si les  $P_i$  (en nombre fini) sont alors les composantes de  $X \cap W$  contenant  $L$ , elles sont automatiquement propres, et nous avons envie de poser

$$\mu(K, X; L) = \sum_i \mu(K, P_i; L) \mu(X, \alpha; P_i),$$

où les  $\mu(K, P_i; L)$  sont des multiplicités d'intersection d'ensembles de codimension finie, et où  $\alpha$  désigne l'injection de  $W$  dans  $V$ . De façon abrégée, nous devons vérifier que le "rapport" de  $[K] \cup \alpha^*[X]$  à  $[L]$  est égal au rapport de  $\{K\} \cap [X]$  à  $\{L\}$ . On passe de l'une à l'autre situation par la dualité de Poincaré; explicitement, on a les égalités

$$\{W\} \cap [L] = \{L\}$$

$$\{W\} \cap ([K] \cup \alpha^*[X]) = (\{W\} \cap [K]) \cap \alpha^*[X] = \{K\} \cap [X].$$

Dans le cas où l'image de tout germe d'application analytique finie d'un  $\mathbb{C}^n$  dans  $V$  est contenue dans un germe de sous-variété analytique de dimension finie de  $V$  (p. ex.: si  $V$  est modelée sur un Hilbert- cf. chapitre IIIbis), on aurait pu définir toutes les multiplicités que nous étudions ici sans l'aide du cap-produit : les définitions données auraient été indépendantes de la variété de dimension finie intermédiaire,  $W$  ou  $W'$ , comme on l'aurait vu par le truchement d'une troisième variété de dimension finie contenant  $W$  et  $W'$  (il en existe toujours, dans l'hypothèse envisagée.

---

#### BIBLIOGRAPHIE

Celle du chapitre I, à laquelle il faut adjoindre :

- [10] BOREL-HAEFLIGER : La classe d'homologie fondamentale d'un espace analytique ; Bull. Soc. Math. France, t.89, 1961, p.461.
- [11] LANG : Introduction to differentiable manifolds, Intersc. Pub., 1962.
- [12] MALGRANGE : Propriétés différentiables des ensembles analytiques ; Séminaire Cartan 1962-63, exposé 13, page 3.

Exposé n° 16 : UN THEOREME D'IMAGE DIRECTE (SITUATION ANALYTIQUE  
(chapitre III) EPIDERMIQUE)

Nous reprenons la situation exposée dans la Proposition I.13: c'est-à-dire que  $f$  est une application analytique épidermique<sup>(\*\*)</sup> d'une variété analytique banachique  $V$  dans une autre  $W$ ,  $X$  est un sous-ensemble analytique de codimension finie de  $V$ , tel que la restriction  $g$  de  $f$  à  $X$  soit propre. Nous allons démontrer le théorème suivant<sup>(\*)</sup>, analogue au théorème de Remmert :

Théorème 1 : Dans la situation rappelée ci-dessus, et si de plus l'ensemble  $X$  est de définition finie,  $f(X)$  est un sous-ensemble analytique de définition finie de  $W$ , et l'on a

$$\text{codim}_y f(X) = \inf_{x \in g^{-1}(y)} \text{codim}_x g .$$

Remarquons tout de suite qu'il suffit de démontrer cet énoncé sans se préoccuper des codimensions. La proposition I.13 nous a déjà dit, en effet, que la codimension topologique en  $y$  du fermé  $f(X)$  est  $2 \inf_{x \in g^{-1}(y)} \text{codim}_x g$ . On peut également se ramener au cas où  $X$  est irréductible : en effet, puisque  $g^{-1}(y)$

---

(\*) La démonstration de ce théorème, qui a commencé d'ailleurs au chapitre I, a été faite en collaboration avec Jean-Pierre Ramis.

(\*\*) Si  $f$  est une telle application, et si le point  $x$  de  $V$  est isolé dans  $f^{-1}f(x)$ , alors  $f^*$  fait de  $\mathcal{O}_x(V)$  un  $\mathcal{O}_{f(x)}(W)$ -module de type fini. Indiquons que cette propriété n'est pas vraie pour n'importe quelle application analytique : si  $f$  est une application linéaire continue de  $E$  dans  $F$  (espaces de Banach),

est compact, il possède un voisinage  $V'$  réunion d'un nombre fini de petites boules de  $V$ , qui ne rencontre donc qu'un nombre fini de composantes irréductibles globales de  $X$ , soient  $X_i$  ( $i \in I$ ). La propriété de  $g$  entraîne l'existence d'un voisinage  $W'$  de  $y$  tel que  $g^{-1}(W')$  soit contenu dans  $V'$ . La trace de  $f(X)$  sur  $W'$  est donc la réunion des traces des  $f(X_i)$ ; or, l'application  $g|_{X_i}$  est propre, tout autant que  $g$ . Enfin, si  $X$  est irréductible, on se convainc facilement que  $f(X)$  ne peut qu'être irréductible, donc de définition finie (puisque de codimension finie).

Si, dans un espace de Banach  $E$ , tout fermé qui rencontre tout sous-espace de dimension finie de  $E$  suivant un sous-ensemble analytique était automatiquement analytique, il n'y aurait rien de plus à démontrer que le Lemme I.12. Il n'en est heureusement rien : considérons, dans (un voisinage de l'origine de)  $\ell^2(\mathbb{C})$ , l'ensemble  $Y$  des points de coordonnées  $(t, t^2, t^3, \dots, t^n, \dots)$ ,  $t$  étant réel. On voit facilement que la trace de  $Y$  sur tout plan de dimension finie est un ensemble fini. Pourtant,  $Y$  n'est pas analytique, car il n'est pas un sous-ensemble analytique de la sous-variété d'équations paramétriques  $(z, z^2, z^3, \dots, z^n, \dots)$ , où  $z$  est complexe.

ler Etage de la démonstration : Nous allons examiner le cas où la codimension de  $g$  est nulle, et démontrer qu'alors, si  $W$  est

suite de la note (\*\*), page 16.1.

il est nécessaire pour que  $f^*$  fasse de  $\sigma_0(E)$  un  $\sigma_0(F)$  module de type fini que  $f$  soit injective d'image fermée. En effet, supposons que  $f$  soit linéaire injective d'image non fermée, et que  $\phi_1 \dots \phi_n$  engendrent  $\sigma_0(E)$  sur  $\sigma_0(F)$ . Les  $\phi_n$  convergent dans une même boule de  $E$ , de rayon  $R$ . Soit  $\phi = \sum \phi_n f^*(u_n)$  un germe quelconque de  $\sigma_0(E)$ . Les  $u_n$  convergent dans une même boule de  $F$  : il existe donc  $r$  tel que, si  $u_n = \sum_p \pi_n^p$ , on ait, pour tout  $n$ ,  $\sum_p \|\pi_n^p\|_F r^p < \infty$ . Or, il existe une droite complexe  $D$  de  $E$  telle que, pour  $z \in D$ , on ait  $\|f(z)\|_F \leq \frac{r}{R} \|z\|_E$  (sinon, l'image de  $f$  serait fermée). En ce qui concerne les restrictions à  $D$ , on a  $\|f^* \pi_n^p\|_E \leq \left(\frac{r}{R}\right)^p \|\pi_n^p\|_F$ . Donc,

connexe,  $g(X)$  est égal à  $W$ .

Par hypothèse, il y a un point  $a$  de  $X$  où le corang de  $g$  est nul. Alors,  $X$  est nécessairement de codimension finie en  $a$ ; soit  $Y$  une composante irréductible globale de  $X$  passant par  $a$ , de codimension la plus petite possible. Le corang en  $a$  de  $g|_Y$  est nécessairement inférieur ou égal à  $\text{corg}_a g$ ; il est donc nul, ainsi que la codimension de  $g|_Y$ . Nous sommes ainsi ramenés au cas où  $X$  est irréductible de codimension finie (sans avoir fait au départ d'hypothèse de définition finie sur  $X$ ). Dans ce cas, l'ensemble singulier  $SX$  de  $X$  est analytique. Si la codimension de  $g|_{SX}$  est strictement positive, tout va bien. Sinon, nous ne nous intéressons plus qu'à  $g|_{SX}$  et nous recommençons le travail décrit dans ce paragraphe. Comme les codimensions des ensembles auxquels nous restreignons  $g$  vont en croissant strictement, nous arriverons nécessairement à nous ramener à la situation suivante :  $X$  irréductible de codimension finie,  $\text{codim } g = 0$ , et  $\text{codim } g|_{SX} > 0$ .

Alors,  $g(SX)$  est un fermé de  $W$  de codimension topologique au moins égale à 2, d'après la Proposition I.13. Considérons l'application  $g$  restreinte à la variété  $X' = X - g^{-1}g(SX)$ , l'espace but étant  $W' = W - g(SX)$ . Cette application est propre, analytique, épidermique. L'ensemble  $\Gamma$  de ses points critiques est un sous-ensemble analytique de  $X'$ , et, d'après le théorème de Sard,  $g(\Gamma)$  est un fermé de  $W'$  sans point intérieur (ceci est une variante du théorème de Sard-Smale [13]). Mais alors, la codimension de  $g|_\Gamma$  ne peut pas être nulle, car on aurait, d'après la Proposition I.13,  $\text{cotop } g(\Gamma) = 0$ . Elle est donc au

fin de la note (\*\*), page 16.2

$\sum \|f^* \pi_n^P\|_E R^P \ll \sum \|\pi_n^P\|_F r^P < \infty$ . La restriction à  $D$  des  $f^*(u_n)$ , et

par suite de  $\phi$ , a donc un rayon de convergence au moins égal à  $R$ ; ainsi, il existerait un  $R$  tel que, pour tout germe  $\phi \in \mathcal{O}_0(E)$ , on pourrait trouver un plan de  $E$  sur lequel la restriction de  $\phi$  aurait un rayon de convergence au moins égal à  $R$ ; ceci est absurde.

moins égale à 1, et  $\text{cotop } g(\Gamma)$  est au moins égal à 2. Il résulte alors de la Proposition I.6 que la codimension topologique de  $g(SX) \cup g(\Gamma)$  est au moins égale à 2, ce qui entraîne que  $\Gamma$  n'est pas  $X'$  tout entier, puisque l'on sait que la codimension topologique de  $g(X)$  est nulle. D'après le théorème du rang constant,  $g(X' - \Gamma)$  est alors un ouvert non vide, soit  $\Omega$ , de  $W'$ . Dans  $W$ , le fermé  $g(X)$  est la réunion de  $\Omega$  et de  $g(SX) \cup g(\Gamma)$ . Donc, le fermé  $g(X) - \Omega$  est de codimension topologique au moins égale à 2 (Prop. I.5) ; son complémentaire  $\Omega \cup \left[ g(X) \right]$  doit être connexe (Cor. I.2), ce qui entraîne la vacuité de  $\left[ g(X) \right]$ .

La démonstration comportera encore deux étages de forme semblable à celle du premier, mais utilisant un argument de prolongement que nous allons présenter maintenant. Rappelons d'abord un résultat de [3] :

Proposition 2 : Soit  $(E', E'')$  une décomposition directe d'un espace de Banach  $E$ , avec  $\dim E'' = p$ . Soit  $\Delta = \delta' \times \delta''$  un bidisque ouvert de centre 0 associé à  $(E', E'')$ . Soient  $\varepsilon$  un nombre réel strictement compris entre 0 et le rayon  $r''$  de  $\delta''$ , et  $\Delta_\varepsilon$  le produit de  $\delta'$  par la couronne  $r'' - \varepsilon < \|x''\| < r''$  de  $E''$ . Supposons que  $A$  soit un ensemble négligeable de  $\delta'$ , et  $X$  un sous-ensemble analytique non vide de  $(\delta' - A) \times \delta''$ , de codimension  $p$  en tout point, ne rencontrant pas  $\Delta_\varepsilon$ . Alors, l'adhérence de  $X$  est un sous-ensemble analytique de  $\Delta$ , de codimension  $p$  en tout point.

Donnons aussi deux conséquences immédiates du Lemme I.12.

Lemme 3 : Dans la situation de la proposition I.13, si  $y$  est un point de  $W$  et  $P$  un plan de  $W$  (pour une carte en  $y$ ) tel que  $y$  soit isolé dans  $g(X) \cap P$ , il existe un plan  $P'$  contenant  $P$ , de dimension complexe  $\text{codim } g$ , tel que  $y$  soit isolé dans  $g(X) \cap P'$ .

Lemme 4 : Toujours sous les hypothèses de I.13, si la codimension de  $g$  est strictement positive,  $g(X)$  est un sous-ensemble négligeable de  $W$ .

Démonstration : La situation étant locale, plaçons-nous dans une carte de  $W$ . Si  $\phi$  est une fonction scalaire analytique dans  $W-g(X)$  et bornée, pour la prolonger à un point  $a$  de  $g(X)$ , on considère sa restriction à un quelconque plan de  $W$ , passant par  $a$ , de dimension finie, tel que la trace de  $g(X)$  sur ce plan soit de codimension strictement positive. Le prolongement ne dépend pas du plan choisi, et on obtient ainsi une fonction  $\tilde{\phi}$  sur  $W$ , bornée, dont la restriction à tout sous-espace de dimension finie est analytique :  $\tilde{\phi}$  est analytique.

Enonçons maintenant l'argument de prolongement que nous utiliserons.

Proposition 3 : Soit  $X$  un sous-ensemble irréductible de codimension finie de  $V$ ,  $f$  une application analytique épidermique de  $V$  dans  $W$ , telle que la restriction  $g$  de  $f$  à  $X$  soit propre, de codimension  $p$ . Soit  $Y$  un sous-ensemble analytique de  $X$  tel que  $\text{codim } g|_Y > p$  et que  $f(X) - f(Y)$  soit un sous-ensemble analytique de  $W-f(Y)$  de codimension  $p$  en tout point. Alors,  $f(X)$  est un sous-ensemble analytique de  $W$  de codimension  $p$  en tout point ;  $f(X)$  est d'ailleurs l'adhérence de  $f(X)-f(Y)$  dans  $W$ .

Démonstration : La question étant locale dans  $W$ , supposons que  $W$  est un ouvert d'un espace de Banach  $E$ , et que nous étudions  $f(X)$  au voisinage de l'origine, censée appartenir à  $f(Y)$ . D'après le lemme 3, il existe un sous-espace  $E''$  de  $E$ , de dimension  $p$ , tel que  $0$  soit isolé dans  $E'' \cap f(X)$ . Il y a alors une sphère  $S$  de  $E''$ , centrée à l'origine, qui ne rencontre pas  $f(X)$  ; puisque  $f(X)$  est fermé, il existe un voisinage de  $S$  dans  $E$  qui ne rencontre pas  $f(X)$ , donc, si nous avons choisi un supplémentaire topologique  $E'$  de  $E''$ , un ensemble du type  $\Delta_c$  (cf. Prop.2) qui ne rencontre pas  $f(X)$ . Désormais, nous considérerons que  $W$  est  $\Delta$ , que  $V$  est  $f^{-1}(\Delta)$ . L'ensemble  $X$  n'est plus alors irréductible, mais, si les  $X_i$  sont ses composantes irréductibles, on a, pour tout  $i$ ,  $\text{codim } f|_{X_i} = p$  (Lemme I.11). Appelons  $\pi$  la

projection de  $\Delta$  sur  $\delta'$  parallèlement à  $\delta''$  ; les fibres de  $\pi|_{f(X_i)}$  ou de  $\pi|_{f(Y)}$  sont des sous-ensembles analytiques (Remmert classique) relativement compacts ( $f(X) \cap \Delta_\varepsilon = \emptyset$ ) d'espaces de dimension finie : elles sont donc finies. Il en résulte que la profondeur de  $\pi \circ f|_{X_i}$  est égale à celle de  $f|_{X_i}$ , et que la profondeur de  $\pi \circ f|_Y$  est au moins égale à celle de  $f|_Y$ . Ainsi, la codimension de  $\pi \circ f|_{X_i}$  est nulle, et, d'après l'étage 1,  $\pi$  est une surjection de  $f(X_i)$  sur  $\delta'$  ; la codimension de  $\pi \circ f|_Y$  est au moins égale à 1, et, d'après le lemme 4,  $\pi \circ f(Y)$  est négligeable dans  $\delta'$ . La proposition 2 nous dit alors que l'adhérence de  $f(X) - \pi^{-1} \pi f(Y)$  est un sous-ensemble analytique  $Z$  de  $\Delta$  de codimension  $p$  en tout point. Nous devons, pour conclure, montrer que  $g^{-1}(Z)$ , qui est un sous-ensemble analytique de  $f^{-1}(\Delta)$ , contient  $X$  ; ceci est vrai, puisqu'il contient  $X_i - f^{-1} \pi^{-1} \pi f(Y)$ , qui est un ouvert non vide de la composante arbitraire  $X_i$  de  $X$ .

2ème étage de la démonstration : A - Le théorème est vrai pour  $X$  lisse connexe, et  $\text{prof } g = 0$ .

Soit  $\Gamma$  l'ensemble des points de la variété  $X$  où la différentielle de  $g$  n'est pas de rang maximum : c'est un sous-ensemble analytique strict de  $X$ . Si  $x$  est un point de  $\Gamma$ , on a

$$\text{corg}_x f|_\Gamma = \text{codim}_x \Gamma + \text{prof}_x f|_\Gamma - \inf f'(x) > \text{codim}_x X - \inf f'(x) .$$

Si  $p$  est la codimension de  $g$ , la codimension de  $g|_\Gamma$  est donc strictement plus grande que  $p$ . D'autre part, le théorème du rang constant nous dit que  $f(X - f^{-1} f(\Gamma))$  est un sous-ensemble analytique de codimension  $p$  en tout point de  $W - f(\Gamma)$ . La proposition 3 donne alors l'assertion A.

B - Le théorème est vrai pour X  
irréductible, et  $\text{prof } g = 0$  .

Appelons  $S$  l'ensemble singulier de  $X$ , qui est analytique, et  $p$  la codimension de  $g$ . Comme ci-dessus, on voit que la codimension de  $g|_S$  est strictement plus grande que  $p$ . Ceci interdit que  $X$  soit contenu dans  $f^{-1}f(S)$ . Si nous restreignons  $f$  en une application  $f'$  de  $V-f^{-1}f(S)$  dans  $W-f(S)$ , la restriction de  $f'$  à la sous-variété  $X-f^{-1}f(S)$ , qui est propre, a pour codimension  $p$  (Lemme I.11). L'assertion A et la proposition 3 donnent alors l'assertion B.

3ème étage : Nous allons procéder par récurrence sur la profondeur de  $g$ , l'étage 2 constituant le démarreur de la récurrence. Supposons donc traité le cas où  $\text{prof } g$  est inférieure ou égale à  $n-1$  :

A - Le théorème est vrai pour X  
lisse connexe, et  $\text{prof } g = n$  .

Gardons à  $\Gamma$  et à  $p$  les mêmes significations qu'au 2ème A. Si la codimension de  $g|_\Gamma$  est plus grande que  $p$ , le problème a déjà été résolu. Sinon, soit  $L$  une composante irréductible de  $\Gamma$  telle que  $\text{codim } g|_L = p$ . La codimension de  $L$  étant strictement plus grande que celle de  $X$ , la profondeur de  $g|_L$  est strictement plus petite que celle de  $g$ , et l'hypothèse de récurrence affirme que  $g(L)$  est un sous-ensemble analytique de  $W$ , irréductible, de codimension  $p$ . Appelons  $Z$  la contre-image de  $g(L)$  par  $g$ , et  $i$  l'indice de  $f$ , qui est constant au voisinage de  $X$ ; nous voulons montrer que  $Z$  est  $X$  tout entier. Soit  $a$  un point quelconque de  $Z$ . Nous avons les égalités

$$\text{corg}_a f|_Z = \text{codim}_a Z + \text{prof}_a f|_Z - i$$

$$p = \text{corg } g = \text{codim } X + \text{prof } g - i$$

Puisque  $Z$  est saturé pour  $g$ ,  $\text{prof}_a f|_Z$  est égal à  $\text{prof}_a g$ , donc est au moins égal à  $\text{prof} g$ . D'autre part,  $\text{corg}_a f|_Z$  est au moins égal à  $\text{codim}_a f|_Z = \frac{1}{2} \text{cotop}_{f(a)} f(Z) = p$ . Choisissons  $a$  de façon à avoir l'égalité (prenons  $a$  tel que  $\text{corg}_a f|_Z$  soit le plus petit possible). Nous avons alors

$$\text{codim}_a Z \leq i+p - \text{prof} g = \text{codim} X .$$

Ceci entraîne l'égalité de  $Z$  et  $X$ , donc de  $g(L)$  et  $g(X)$ .

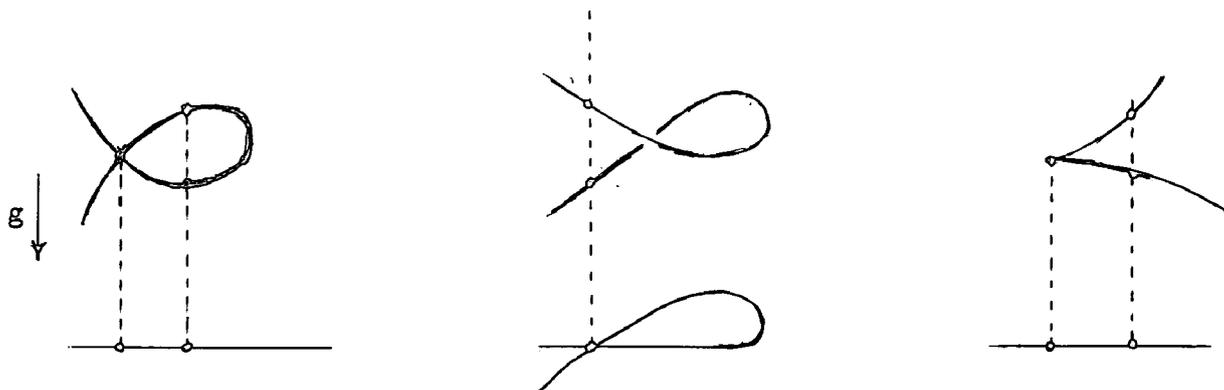
B - Le théorème est vrai pour  $X$   
irréductible, et  $\text{prof} g = n$ .

Comme au 2ème B, si la codimension de  $g|_S$  est strictement plus grande que  $p$ , le problème est résolu, à l'aide du 3ème A. Sinon, on recopie la démonstration qui précède, réutilisant ainsi l'hypothèse de récurrence.

Multiplicité d'image directe - Formule de projection.

Soit  $X$  un sous-ensemble analytique irréductible de codimension finie  $n$  d'une variété analytique banachique connexe  $V$ . Soient  $f$  une application analytique  $i$ -dermique de  $V$  dans une autre variété  $W$ , et  $g$  la restriction de  $f$  à  $X$ . Supposons que  $g$  soit propre, et que la profondeur de  $g$  soit nulle; nous allons alors définir la multiplicité de l'image directe de  $X$  par  $g$ , entier positif que nous noterons  $v(X, g)$ .

Si  $a$  est un point quelconque de  $g(X)$ , la fibre  $g^{-1}(a)$  est un sous-ensemble analytique compact d'une sous-variété analytique de dimension finie de  $V$ : elle a donc un nombre fini de composantes connexes (qui sont d'ailleurs analytiques), soit  $v(a)$ . Il ne faudrait pas croire que cette fonction soit toujours s.c.s., ou toujours s.c.i., même si les fibres de  $g$  sont discrètes, comme le montre le dessin à la page ci-contre :



Toutefois, la restriction de la fonction  $v$  à un quelconque ouvert de points irréductibles de  $g(X)$  (par exemple à la partie régulière de  $g(X)$ ) est semi-continue inférieurement : soient en effet  $K_i$  les composantes connexes de  $g^{-1}(a)$ ,  $U_i$  des voisinages ouverts disjoints des  $K_i$ ,  $w$  un voisinage de  $a$  tel que  $g^{-1}(w)$  soit contenu dans la réunion des  $U_i$ ,  $X_i$  la trace de  $X$  sur  $U_i \cap g^{-1}(w)$  ; on vérifie facilement, à l'aide du théorème 1, que  $g(X_i)$  est un sous-ensemble analytique de  $w$ , de même codimension en  $a$  que  $g(X)$  ;  $g(X_i)$  est donc égal à  $g(X)$ , et, pour tout point  $b$  de  $w \cap g(X)$ ,  $g^{-1}(b)$  contient au moins un point dans chaque  $U_i$ .

Si la profondeur de  $g$  est nulle,

Définition : nous appellerons multiplicité de l'image directe de  $X$  par  $g$  le maximum de la restriction de la fonction  $v$  à un quelconque ouvert de points irréductibles de  $g(X)$ . Sinon, nous dirons que cette multiplicité est nulle.

Si nous conservons les notations de la démonstration du théorème 1, la restriction de  $g$  à  $X - g^{-1}g(S) - g^{-1}g(\Gamma)$  est une immersion propre dans  $W - g(S) - g(\Gamma)$ , d'image analytique  $T$ . La restriction de  $g$  à  $X - g^{-1}g(S) - g^{-1}g(\Gamma) - g^{-1}(\text{Sing } T)$  est donc un revêtement de  $T - \text{Sing } T$ , qui est connexe. Le degré de ce revêtement est la multiplicité  $v(X; g)$ .

Proposition 6. Si  $W'$  est une troisième variété,  $f'$  une application analytique de  $W$  dans  $W'$ ,  $j$ -dérivée au voisinage de  $g(X)$ , et telle que la restriction  $g'$  de  $f'$  à  $g(X)$  soit propre, de profondeur nulle, on a (immédiatement)

$$v(X, g' \circ g) = v(g(X), g') v(X, g) .$$

Décrivons maintenant la situation dans laquelle nous allons démontrer une formule de projection : nous rajouterons à la figure  $(V, f, W, X)$  précédente un sous-ensemble analytique irréductible  $Y$  de  $W$ , de codimension  $p$ . Appelons  $P_i$  les composantes propres de  $f^{-1}(Y)$ ,  $Q_{ij}$  les composantes propres de  $P_i \cap X$ , et  $R_k$  les composantes propres de  $Y \cap g(X)$ . Nous voulons démontrer l'égalité

$$(1) \sum_{i,j} \mu(Y, f; P_i) \mu(P_i, X; Q_{ij}) v(Q_{ij}, f) f(Q_{ij}) = \sum_k v(X, f) \mu(Y, f(X); R_k) R_k$$

(les sommes écrites sont finies au-dessus d'ouverts assez petits de  $W$ ).

Cette égalité n'est vraisemblable que si toutes les composantes de  $f^{-1}(Y)$  sont propres (prendre pour  $V$  et  $X$  l'espace  $\mathbb{C}^2$  dans lequel on a fait éclater l'origine, pour  $f$  la projection canonique sur  $\mathbb{C}^2$ ,  $Y$  étant l'origine de  $\mathbb{C}^2$ ). On voit de même qu'il faut supposer propres toutes les composantes des  $P_i \cap X$  (gardant le triplet  $V, f, W$  précédent, prendre pour  $Y$  une droite de  $\mathbb{C}^2$  passant par  $0$ , et pour  $X$  la contre-image par  $f$  d'une autre droite passant par  $0$ ). Lorsque toutes ces hypothèses de propriété sont réalisées, les composantes propres de  $Y \cap f(X)$  sont les images par  $f$  des  $Q_{ij}$  telles que la profondeur de  $f|_{Q_{ij}}$  soit nulle ; les autres composantes de  $Y \cap f(X)$  devraient être trop grandes, mais, étant images de  $Q_{ij}$  telles que la profondeur de  $f|_{Q_{ij}}$  soit positive, elles ne peuvent qu'être trop petites. D'où le début de l'énoncé :

Proposition 7. Dans la situation  $(X \subset V, f, W \supset Y)$  décrite plus haut, si toutes les composantes de  $f^{-1}(Y) \cap X$  sont de codimension  $n+p$ , alors toutes les composantes de  $f(X) \cap Y$  sont propres, et l'égalité (1) est vérifiée.

Démonstration de (1) : La formule est évidemment locale sur  $W$ . Nous pouvons ainsi supposer qu'il y a un seul  $R_k$ , qu'il est régulier, et que les  $Q_{ij}$  en forment un revêtement trivial. Nous pouvons alors nous localiser aussi sur  $V$ , et par suite factoriser  $f$  par un plongement  $\tau$  suivi d'une projection  $\pi$  propre, et même finie, sur  $\tau(X)$  ( $\pi$  et  $\tau$  étant épidermiques). On vérifie immédiatement qu'il suffit de démontrer la formule de projection pour  $\tau$  et  $\pi$  successivement. D'où l'examen des deux cas :

1°)  $f$  est un plongement : Toutes les multiplicités d'image directe sont alors égales à 1, et nous devons simplement vérifier, dans le cas où  $Y$  coupe la sous-variété  $V$  suivant des ensembles irréductibles  $P_i$  en nombre fini, les  $P_i$  coupant  $X$  suivant le même ensemble irréductible  $Q$ , la formule

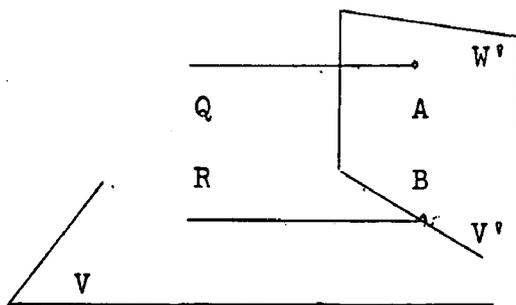
$$\sum_i \mu(Y, f; P_i) \mu(P_i, X; Q) = \mu(Y, f(X); Q)$$

C'est une généralisation de la propriété II.10, qui tient simplement à la formule II(1)

$$f_!([X]_V \cup f^*[Y]_W) = f_![X]_V \cup [Y]_W,$$

et aux égalités  $f_![X]_V = [f(X)]_W$ ,  $f_![Q]_V = [f(Q)]_W$ .

2°)  $f$  est une projection : La situation est symbolisée



par le dessin ci-contre (l'espace ambiant est  $W = V \times \mathbb{C}^q$ ,  $R \approx Q$  sont des sous-variétés). Choisissons un plan de dimension finie  $V'$  transverse à  $R$ , et soit  $W' = f^{-1}(V')$ . Appelons  $X'_\ell$  les composantes de  $X \cap W'$ , et  $Y'_m$  celles de  $Y \cap V'$ . Les appli-

cations  $f_{X'}$  étant finies (comme  $f_X$ ), et les intersections.

$f(X'_\ell) \cap Y'_m$  étant réduites au point  $B$ , toutes les composantes  $X'_\ell$  et  $Y'_m$  sont propres. Appliquons la propriété II.9 :

$$\mu(X, f^{-1}(Y); Q) = \sum_{\ell, m} \mu(X, W'; X'_\ell) \mu(Y, V'; Y'_m) \mu(X'_\ell, f^{-1}(Y'_m); A) .$$

Appelons  $x'_r$  les composantes de  $f(X) \cap V'$ , qui sont les images des  $X'_\ell$  (nous écrirons  $\ell \rightarrow r$  pour signifier que  $f(X'_\ell) = x'_r$ ). Toujours en appliquant II.9, nous avons

$$\mu(f(X), Y; R) = \sum_{r, m} \mu(f(X), V'; x'_r) \mu(Y, V'; Y'_m) \mu(x'_r, Y'_m; B) ,$$

et nous rappelons que nous voulons démontrer

$$\mu(X, f^{-1}(Y), Q) = \mu(f(X), Y; R) \nu(X, f) .$$

Il suffirait pour cela que nous disposions des formules

$$(2) \quad \sum_{\ell \rightarrow r} \mu(X, W'; X'_\ell) \nu(X'_\ell, f) = \mu(f(X), V'; f(X'_\ell)) \nu(X, f) ,$$

$$(3) \quad \mu(X'_\ell, f^{-1}(Y'_m); A) = \mu(f(X'_\ell), Y'_m; B) \nu(X'_\ell, f) .$$

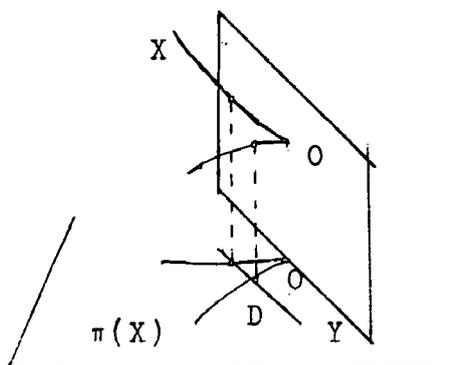
Or, les formules (2) apparaissent comme des formules de projection, où  $Y$  serait un plan de dimension finie, et les formules (3) sont des formules de projection où  $V$  est de dimension finie, et où  $f(X) \cap Y$  est réduit à un point. Dans ce dernier cas, en remplaçant la situation  $(X \subset W, f, V \supset Y)$  par la situation  $(X \times Y \subset W \times V, f \times \text{id}_V, V \times V \supset \Delta)$ , où  $\Delta$  est la diagonale de  $V \times V$ , on se ramène au cas (4) où  $Y$  est un plan ne rencontrant  $f(X)$  qu'en un point. De même, dans le cas (2), en rajoutant à la figure un plan  $Z$  contenu dans  $Y$  et "transverse" à  $f(X)$ , on se ramène, utilisant la propriété de transitivité II.4, au cas (4) que nous allons enfin traiter.

Lemme 8. Soient  $E$  un espace de Banach,  $\pi$  la projection de  $\mathbb{C}^q \times E = F$  sur  $E$ ,  $X$  un germe à l'origine de sous-ensemble

analytique irréductible de  $F$ , tel que la projection  $\pi|_X$  soit finie,  $Y$  un plan de  $E$ , passant par l'origine, de dimension égale à la codimension de  $\pi(X)$ , et tel que  $0$  soit isolé dans  $\pi(X) \cap Y$ . Alors, on a l'égalité

$$\mu(X, \pi^{-1}(Y); 0) = \mu(\pi(X), Y; 0) \nu(X, \pi).$$

Démonstration : Les multiplicités d'intersection qui interviennent dans cette formule peuvent être interprétées grâce à la propriété



II.3. On voit facilement qu'il existe une parallèle  $D$  à  $Y$  coupant  $\pi(X)$  transversalement en  $\mu(\pi(X), Y; 0)$  points, soient  $A_i$ , et telle de plus que toutes les fibres  $\pi^{-1}(A_i)$  coupent  $X$  transversalement en  $\nu(X, \pi)$  points.

Une multiplication donne alors le nombre d'intersections (qui sont transverses) de  $X$  et  $\pi^{-1}(D)$ .

Remarque. Au cours de cette démonstration, nous avons rencontré une situation de projection (2) que nous ne nous étions pas proposés d'étudier. Nous allons la décrire dans une forme plus générale, sans toutefois donner de formule, pour ne pas ennuyer le lecteur.

Soient  $V, W$  deux variétés analytiques banachiques,  $f$  une application analytique épidermique de  $V$  dans  $W$ ,  $X$  un sous-ensemble analytique irréductible de codimension  $n$  de  $V$ ,  $Y$  un sous-ensemble analytique irréductible de  $W$ , de dimension  $p \geq n$ . Alors, la contre-image  $f^{-1}(Y)$  est un sous-ensemble analytique de dimension finie de  $V$ . Si nous supposons  $f|_X$  propre,  $f(X)$  est analytique (de codimension finie) dans  $W$ , et  $f(X \cap f^{-1}(Y))$  est analytique de dimension finie dans  $W$ . On peut, avec des hypothèses sur les dimensions et des multiplicités, comparer  $f(X) \cap Y$  et  $f(X \cap f^{-1}(Y))$ .

Une autre situation intéressante est celle où  $X$  est un sous-ensemble analytique de dimension finie de  $V$ , l'application  $f$  n'étant plus nécessairement épidermique, mais étant toujours de restriction à  $X$  propre ; nous prenons dans ce cas  $Y$  de codimension finie dans  $W$ . Si l'on sait que  $f(X)$  est analytique de dimension finie dans  $W$ , on a encore envie de comparer  $f(X) \cap Y$  et  $f(X \cap f^{-1}(Y))$ . Mais l'analyticité de  $f(X)$  ne semble pas évidente en général. Le but de la deuxième partie de ce chapitre est de la démontrer dans le cas où  $W$  est une variété hilbertienne.

---

#### BIBLIOGRAPHIE

Celle du chapitre I.

- [13] ABRAHAM-ROBBIN : Transversal mappings and flows. Benjamin 1967.

Exposé n° 9 : IMAGE DIRECTE D'UN ESPACE ANALYTIQUE DE DIMENSION  
(chapitre IIIbis) FINIE DANS UNE VARIÉTÉ DE DIMENSION INFINIE

Définition : Soit  $W$  une variété analytique banachique. Nous dirons qu'un sous-ensemble analytique  $A$  de  $W$  est de dimension finie si, localement dans  $W$ ,  $A$  est un sous-ensemble analytique d'une sous-variété analytique de dimension finie de  $W$  (1).

Nous voulons démontrer le :

Théorème 1 :

assertion 1 : Soit  $f$  une application analytique propre d'une surface de Riemann  $V$  dans une variété analytique banachique  $W$ . Alors,  $f(V)$  est un sous-ensemble analytique de dimension finie de  $W$ .

assertion 2 (resp. 3) : Soit  $f$  une application analytique finie (i.e. fermée et telle que la contre-image de tout point soit finie) (resp. propre) d'un espace analytique  $V$  de dimension localement finie dans une variété analytique hilbertienne  $W$ . Alors,  $f_1(V)$  est un sous-ensemble analytique de dimension finie de  $W$ .

Les sous-ensembles analytiques de dimension finie d'une variété analytique banachique peuvent aussi bien être définis comme étant localement la contre-image d'un point par une application analytique épidermique à valeurs dans un quelconque espace de Banach ; ce qui nous renseigne sur le comportement de tels sous-ensembles par images réciproques par des applications épidermiques. L'assertion 2 donne une réponse partielle sur leur comportement par images directes.

---

(1) Cette définition paraît plus restrictive que celle donnée par Douady ([1] page 28). Elle est cependant équivalente, comme nous le montrons dans l'appendice 2.

Nous allons d'abord démontrer la proposition :

Proposition 2 : Soit  $f$  un germe d'application analytique de  $\mathbb{C}$  (resp. d'un espace analytique  $X$  de dimension finie) dans un espace de Banach  $E$  (resp. dans un espace de Hilbert  $E$ ), tel que  $0$  soit isolé dans  $f^{-1}f(0)$ . Alors, l'image de  $f$  est contenue dans un germe de sous-variété analytique de dimension finie de  $E$ .

L'hypothèse de propreté ( $0$  isolé dans  $f^{-1}f(0)$ ) est bien sûr inutile lorsque  $f$  est fonction d'une seule variable (pour  $f=0$ , la conclusion est encore vraie!). Montrons sur un exemple qu'elle est nécessaire lorsque  $f$  est une fonction de plusieurs variables : l'image du germe  $f$  d'application de  $\mathbb{C}^2$  dans  $\ell^2(\mathbb{C})$  qui, au couple  $(x,y)$ , associe la suite  $(x, xy, xy^2, \dots)$  n'est contenue dans aucune hypersurface analytique régulière de l'espace-but. En effet, toute fonction  $\phi$  analytique scalaire sur  $\ell^2(\mathbb{C})$  qui s'annule sur l'image de  $f$  a nécessairement une dérivée à l'origine nulle, ce que l'on voit en considérant les coefficients des termes en  $xy^i$  du développement en  $0$  de  $\phi \circ f$ .

Indiquons toutefois une traduction d'un résultat de Douady ([1] page 63) : si  $f$  est n'importe quel germe d'application analytique d'un espace analytique de dimension finie  $X$  dans un espace de Banach  $E$ , il existe un sous-espace vectoriel fermé  $F$  de  $E$ , de codimension finie, tel que  $f(X)$  ne coupe  $F$  qu'en  $0$ . Ce résultat permet (mais ce n'est pas nécessaire) de se ramener pour la démonstration de la proposition 2 au cas où  $X$  est lisse. En effet, on en déduit le

Lemme 3 : Soient  $X \subset \mathbb{C}^n$  un germe d'ensemble analytique,  $f$  un germe d'application analytique propre de  $X$  dans un espace de Banach de dimension infinie  $E$ . Alors, il existe un prolongement  $g$  de  $f$  en un germe d'application analytique propre de  $\mathbb{C}^n$  dans  $E$ .

Démonstration : Soit  $\phi$  un prolongement quelconque de  $f$  à  $\mathbb{C}^n$  ;

il existe un sous-espace  $F$  de  $E$  de dimension infinie tel que  $\phi(\mathbb{C}^n) \cap F = 0$ . D'autre part  $X$  peut être défini dans  $\mathbb{C}^n$  par un nombre fini d'équations scalaires, donc par une application analytique  $\psi$  de  $\mathbb{C}^n$  dans  $F$ . On peut prendre  $g = \phi + \psi$ .

La première étape de la démonstration de la proposition 2, et c'est d'elle seule que proviennent les restrictions de l'énoncé, consiste en la construction d'une suite  $\lambda_i$  de formes linéaires continues sur  $E$ , d'une suite  $e_i$  de vecteurs unitaires de  $E$ , et d'un voisinage  $K$  de  $0$  dans  $X$  tels que :

- 1°) pour tout couple  $(i, j)$ ,  $\lambda_i(e_j)$  soit égal à  $\delta_{ij}$  ;
- 2°) pour tout point  $z$  de  $K$ ,  $f(z)$  soit somme de la série  $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(f(z)) e_i$  ;
- 3°) la série  $\sum_{i=1}^{\infty} \sup_{z \in K} |\lambda_i(f(z))|$  soit convergente

Il suffit évidemment d'étudier le cas où  $X$  est lisse (d'ailleurs, l'hypothèse de propriété  $n$  n'intervient pas ici).

CAS "une variable" : Considérons la suite croissante  $E_i$  des sous-espaces de dimension finie de  $E$  engendrés par les  $j$  premiers vecteurs dérivés de  $f$  ; les espaces  $E_i$  sont indexés par leur dimension. Nous prenons pour  $e_1$  n'importe quel vecteur unitaire de  $E_1$  ; supposant que nous ayons choisi  $e_1, \dots, e_n$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ , nous allons donner un choix possible de  $e_{n+1}$  et  $\lambda_n$ . Soit  $\mu_n$  une forme linéaire sur  $E$ , de norme 1, prenant la valeur 1 sur le vecteur  $e_n$ . Appelons  $\lambda_n$  la forme linéaire de noyau  $E_{n-1} \oplus (\ker \lambda_1 \cap \dots \cap \ker \lambda_{n-1} \cap \ker \mu_n)$  prenant la valeur 1 sur  $e_n$ . Prenons pour  $e_{n+1}$  un quelconque vecteur unitaire de  $\ker \lambda_1 \cap \dots \cap \ker \lambda_n \cap E_{n+1}$ . La condition 1° est facile à vérifier. Pour vérifier 3°, il nous faut d'abord remarquer que, si  $X$  appartient à  $E_n$ ,  $\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j(X)| \leq 2^n \|X\|$ . Appliquant en effet  $\mu_p$  à l'égalité définissant  $\lambda_p(X)$ , nous trouvons

$$\mu_p(X) = \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j(X) \mu_p(e_j) + \lambda_p(X) ;$$

d'où

$$|\lambda_p(X)| \leq \|X\| + \sum_{j=1}^{p-1} |\lambda_j(X)| ;$$

d'où

$$|\lambda_p(X)| \leq 2^{p-1} \|X\| \dots,$$

et le résultat en vue. Soit maintenant  $\sum_{j=1}^{\infty} \theta_j z^j$  le développement à l'origine du germe  $f$  ; il est absolument uniformément convergent dans un disque de rayon  $R$ . D'autre part, il est certain que  $\theta_j$  appartient à  $E_j$ . Donc,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sup_{|z| \leq \rho} |\lambda_i(f(z))| \leq \sum_{i,j} |\lambda_i(\theta_j)| \rho^j \leq \sum_{j=1}^{\infty} 2^j \|\theta_j\| \rho^j$$

La condition 3° est donc vérifiée si nous prenons pour  $K$  le disque de rayon  $R/2$ . La validité de 2° provient d'une simple interversion de sommations.

CAS "plusieurs variables" : On ordonne les vecteurs dérivées de  $f$  de façon compatible avec le poids de la dérivation, et on définit les espaces  $E_i$  comme précédemment. L'espace  $E$  étant hilbertien, on prend pour  $e_i$  une base orthonormale adaptée au drapeau  $E_i$ , et pour  $\lambda_i$  la "projection" orthogonale d'image  $\mathbb{C}e_i$ . Si  $f$  est une fonction de  $n$  variables, le vecteur dérivée  $\theta_{j_1 \dots j_n}$  appartient sûrement à  $E_{|j|}$ . On a donc

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i(\theta_{j_1 \dots j_n})| \leq |j|^n \|\theta_{j_1 \dots j_n}\|$$

Le même calcul que précédemment montre que, si  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  est un point où la série de Taylor de  $f$  converge absolument, on peut prendre pour  $K$  un polydisque de rayon  $\rho$  strictement inférieur à  $\min |\alpha_i|$ .

Cette étape franchie, notons toujours  $E_i$  le sous-espace de dimension  $i$  de  $E$  engendré par  $e_1, \dots, e_i$  ; appelons  $F_i$

l'intersection des noyaux de  $\lambda_1, \dots, \lambda_i$ , qui est un supplémentaire de  $E_i$ ; soit enfin  $f_i(z)$  la fonction  $\lambda_i(f(z))$  et  $\phi_i(z)$  l'application de  $X$  dans  $E_i$  de coordonnées  $f_1(z), \dots, f_i(z)$ . A partir d'un certain rang  $I$ , le morphisme  $\phi_i$  est fini: en effet, la suite des germes  $\phi_i^{-1}(0) = f^{-1}(F_i)$  de sous-espaces de  $X$  est décroissante et a pour intersection  $0$  (bien que  $\cap F_i$  ne soit pas nécessairement réduit à  $0$ ). Le théorème de préparation [5] nous enseigne alors que  $\phi_I^*$  fait de  $\sigma_X$  (anneau des germes de fonctions analytiques sur  $X$ ) un  $\sigma_{E_I}$ -module de type fini. Pour  $j$  plus grand que  $I$ , la suite des  $\phi_j^* \sigma_{E_j}$ , qui est une suite croissante de sous- $\sigma_{E_I}$ -modules de  $\sigma_X$ , stationne donc à partir d'un certain rang, soit  $J$ . Appelons  $a_h(f_1(z), \dots, f_J(z))$ , pour  $h$  compris entre 1 et  $H$ , un système de générateurs de  $\phi_J^* \sigma_{E_J}$  sur l'anneau  $\sigma_{E_I}$ . Ce qui précède montre que, pour  $n$  plus grand que  $J$ , on peut écrire

$$f_n(z) = \sum_{h=1}^H \alpha_n^h(f_1(z), \dots, f_I(z)) a_h(f_1(z), \dots, f_J(z)),$$

où les  $\alpha_n^h(y_1, \dots, y_I)$  sont des germes de fonctions holomorphes sur  $E_I$ .

Nous voyons ainsi que, si nous savons bien choisir les coefficients  $\alpha_n^h$ , nous pourrions enfermer l'image de  $f$  dans le graphe d'une application analytique de  $E_J$  dans  $F_J$ . Renvoyons à l'appendice pour un traitement spécial du cas "une variable". Pour le cas général, faisons d'abord quelques commentaires sur la topologie "canonique" de Jurchescu [6], dans le cas particulier du corps des complexes<sup>(1)</sup>.

Sur l'algèbre  $\mathbb{C}[[X_1, \dots, X_n]]$ , Jurchescu définit la "norme"  $\|\cdot\|_\alpha$  associée au poly-réel  $\alpha \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ :

$$\|\sigma\|_\alpha = \sum_{m \in \mathbb{N}^n} |\sigma_m| \alpha_1^{m_1} \dots \alpha_n^{m_n}$$

---

(1) Je remercie M. Henri Cartan d'avoir attiré mon attention sur cet article. Ma première démonstration, plus lourde, utilisait un théorème de noethérianité de Frisch [2].

Si nous appelons  $\Lambda_\alpha$  l'ensemble des séries formelles  $\sigma$  telles que  $\|\sigma\|_\alpha$  soit fini,  $\Lambda_\alpha$ , muni de la norme  $\|\cdot\|_\alpha$ , est un espace de Banach. La limite inductive des  $\Lambda_\alpha$  (pour l'ordre naturel sur les  $\alpha$ , et vu les applications naturelles entre les  $\Lambda_\alpha$ ) dans la catégorie des EVTLC a pour espace vectoriel sous-jacent  $\mathcal{O}_n = \mathbb{C}\langle X_1, \dots, X_n \rangle$ . Une autre solution pour topologiser  $\mathcal{O}_n$  est de le considérer comme limite inductive des espaces de Banach  $B(K)$ , où  $K$  est un polydisque centré à l'origine de  $\mathbb{C}^n$ . La formule de Cauchy permet de démontrer que les deux topologies ainsi obtenues sur  $\mathcal{O}_n$  coïncident. Si maintenant nous voulons topologiser  $\mathcal{O}_X$ , où  $X$  est un germe d'espace analytique, nous plongerons  $X$  dans un  $\mathbb{C}^n$ , il s'ensuivra une surjection de  $\mathcal{O}_n$  sur  $\mathcal{O}_X$ , et nous munirons ce dernier de la topologie quotient de  $\mathcal{O}_n$  (le résultat étant indépendant du plongement choisi). Le corollaire V.B.4 de [4] montre que cette topologie sur  $\mathcal{O}_X$  est aussi la topologie limite inductive des  $B(K)$  suivant les voisinages compacts  $K$  de  $0$  dans  $X$ .

Dans la situation qui nous occupe,  $\mathcal{O}_X$  admet une topologie propre, et aussi une topologie comme  $\mathcal{O}_{E_I}$ -module de type fini, laquelle est à priori plus fine que la première. D'après le théorème du graphe fermé pour les limites inductives (non nécessairement strictes) d'espaces de Banach [8], ces deux topologies coïncident. Il s'ensuit que, sur  $\phi_J^*(\mathcal{O}_{E_J})$ , la topologie de  $\mathcal{O}_{E_I}$ -module et la topologie induite par  $\mathcal{O}_X$  coïncident. D'après le théorème 3.1 de [6], l'épimorphisme  $\alpha$  de  $(\mathcal{O}_{E_I})^H$  sur  $\phi_J^*(\mathcal{O}_{E_J})$ , résultant du choix d'un système de générateurs, admet une section  $s$ , de coordonnées  $s_h$ , continue. Les germes  $f_n$  ( $n > J$ ) étant définis sur un même voisinage compact  $K$  de  $0$  dans  $X$ , les germes  $s_h(f_n)$  seront définis sur un même polydisque  $\Delta'$  de  $E_I$ . Soit  $\Delta$  un polydisque de  $E_J$ , où les germes  $a_h$  soient définis, et dont la trace sur  $E_I$  soit contenue dans  $\Delta'$ . Considérons la fonction scalaire

$$g_n(y_1, \dots, y_J) = \sum_{h=1}^H s_h(f_n)(y_1, \dots, y_I) a_h(y_1, \dots, y_J).$$

Nous avons

$$\sup_{y \in \Delta} |g_n(y)| \leq C \sup_{x \in K} |f_n(x)| ,$$

où la constante  $C$  ne dépend pas de  $n$ . Il s'ensuit que la série

$$G(y) = \sum_{n=J+1}^{\infty} g_n(y) e_n$$

converge absolument uniformément sur  $\Delta$  (cf. condition 3° de la première étape) et définit un germe d'application analytique de  $E_J$  dans  $F_J$  dont le graphe contient l'image du germe  $f$  (cf. condition 2°).

De la proposition 2, nous allons déduire facilement les assertions 1 et 2. Pour l'assertion 1, soit  $y$  un point de  $f(V)$ . Sa contre-image est la réunion d'un nombre fini de composantes connexes compactes de  $V$  et d'un ensemble fini  $(X_i)_{i=1, \dots, q}$ . La propriété de  $f$  entraîne que les points assez voisins de  $y$ , s'ils sont dans l'image de  $f$ , ne peuvent provenir que de points voisins des  $X_i$ . Montrons par récurrence que la réunion des images de petits voisinages  $V_i$  de  $X_i$  est contenue dans une sous-variété de dimension finie de  $W$ : soit  $w$  une sous-variété contenant  $f(V_1) \cup \dots \cup f(V_p)$ . Par un automorphisme local de  $W$ , nous pouvons supposer que  $w$  est un plan; soit  $\pi$  la projection parallèle à ce plan. L'application  $\pi \circ f$  de  $V_{p+1}$  dans " $W/w$ " a son image contenue dans une sous-variété  $v$  dont la contre-image par  $\pi$  est une sous-variété de  $W$  contenant  $f(V_1) \cup \dots \cup f(V_{p+1})$ .

Un tel raisonnement n'est plus valable pour l'assertion 2, car l'application  $\pi \circ f$  pourrait alors n'être ni nulle, ni propre. Il nous faut montrer que la réunion de deux sous-variétés de dimension finie passant par l'origine d'un espace de Hilbert  $E$  est contenue (localement) dans une sous-variété de dimension finie de  $E$ . Soit  $v: \mathbb{C}^n \rightarrow E$  et  $w: \mathbb{C}^p \rightarrow E$  des cartes des deux sous-variétés. Dans  $\mathbb{C}^{n+p}$ , considérons le sous-ensemble analytique  $\Gamma = \mathbb{C}^n \times 0 \cup 0 \times \mathbb{C}^p$ . La juxtaposition de  $v$  et  $w$  donne une application

$\phi$  de  $\Gamma$  dans  $E$  ;  $\phi$  est analytique (induite par exemple par  $v(x) + w(y)$ ) et propre. D'après la proposition 2, l'image de  $\phi$  est enfermable dans une sous-variété de dimension finie (bien que ce ne soit pas forcément le cas de l'image de l'application  $v(x) + w(y)$  ).

Indiquons une autre conséquence de la proposition 2, qui répond à une question de M. Remmert :

Proposition 4 : Soit  $f$  une application analytique d'un ouvert  $V$  d'un espace de Banach dans un espace de Hilbert  $W$ , transformant l'origine en l'origine. Supposons que les fibres de  $f$  soient purement codimensionnelles de même codimension  $n$ . Alors, il existe un voisinage de l'origine dans  $V$  dont l'image par  $f$  soit analytique de dimension finie (précisément  $n$ ) dans un voisinage de l'origine de  $W$ .

Démonstration : Ramenons-nous au cas où la dimension de  $V$  est finie, qui est quasiment traité dans [7]. Soit  $S$  un plan de  $V$ , de dimension  $n$ , ne rencontrant  $f^{-1}(0)$  qu'en  $0$  (on restreint éventuellement  $V$ ). L'application  $f|_S$  étant à fibres discrètes, le germe d'ensemble  $f(S)$  est analytique de dimension finie  $n$ . Nous allons montrer que  $f^{-1}f(S)$  est le germe de  $V$  tout entier : c'est un germe analytique et, s'il n'était pas  $V$  entier, il existerait une droite  $T$  ne le rencontrant qu'à l'origine. Or, considérons l'application  $f$  restreinte à  $S \oplus T$ . Ses fibres sont à priori de codimension au plus égale à  $n$  en tout point, mais, étant donné un point  $x$  de  $S \oplus T$  assez voisin de  $0$ , le parallèle à  $S$  mené par  $x$  rencontre  $f^{-1}(0)$  suivant un ensemble fini non vide, donc toute autre fibre de  $f$  suivant un ensemble fini, et  $f^{-1}f(x)$  est de codimension en  $x$  au moins égale à  $n$ . Appliquons le résultat classique à  $f|_{S \oplus T}$  :  $f^{-1}f(S)$  contient  $S \oplus T$ , ce qui est contraire au choix de  $T$ .

On peut remarquer que l'hypothèse faite dans la proposition 4 entraîne que le rang de  $f$  est borné par  $n$ , cette borne étant atteinte. Mais une hypothèse de rang borné sur  $f$  ne suffit pas pour

conclure.

L'outil essentiel pour la démonstration de l'assertion 3 est le théorème suivant sur les revêtements :

Proposition 5 : Soit  $E' \times E''$  un bidisque d'un espace de Hilbert, où  $E'$  est de dimension finie  $n$  ; appelons  $\pi$  la projection canonique de  $E$  sur  $E'$ . Soit  $X$  un fermé de  $E$ , localement compact, tel que  $\pi|_X$  soit une application finie de  $X$  sur  $E'$ . Supposons qu'il existe un sous-ensemble négligeable  $A$  de  $E'$  tel que  $\pi$  soit un revêtement de  $X - \pi^{-1}(A)$  sur  $E' - A$ . Supposons en outre que  $X - \pi^{-1}(A)$  soit une sous-variété analytique de  $E - \pi^{-1}(A)$  et soit dense dans  $X$ . Alors,  $X$  est un sous-ensemble analytique de  $E$  de dimension finie (précisément  $n$ ).

Démonstration : D'après un théorème de Grauert et Remmert [3],  $X$  peut être muni d'une structure  $\tilde{X}$  d'espace analytique de dimension  $n$ , dont la topologie sous-jacente soit celle initialement donnée sur  $X$ , et qui prolonge la structure analytique donnée sur  $X - \pi^{-1}(A)$ . Les fonctions holomorphes sur  $\tilde{X}$  sont les fonctions continues dont la restriction à  $X - \pi^{-1}(A)$  est holomorphe. D'après un lemme de Bungart [0], l'injection canonique de  $\tilde{X}$  dans  $E$  est donc une application analytique, et son image est de dimension finie d'après l'assertion 2.

Remarque : Si  $n=1$ , et si  $A$  est "mince", la conclusion vaut si  $E$  est un bidisque d'un quelconque espace de Banach :  $A$  est nécessairement un point, l'origine par exemple. Considérons séparément les composants connexes ( $E'$  ayant été suffisamment rapetissé ; elles sont en nombre fini) de  $X - \pi^{-1}(0)$  : soit  $\Omega$  l'une d'elles, et  $k$  le degré du revêtement  $\Omega \xrightarrow{\pi} E' - 0$ . Il existe un voisinage  $U$  de  $0$  dans  $\mathbb{C}$  et une fonction continue  $f$  de  $U - 0$  dans  $X$  telle que  $\pi \circ f(z) = z^k$ . Cette fonction est nécessairement holomorphe et bornée : elle se prolonge en une fonction holomorphe sur  $U$  dont l'image est  $X''$  (u moins en tant que germe). L'assertion 1 donne alors le résultat.

Pour démontrer maintenant l'assertion 3, il suffit<sup>(1)</sup> de recopier la démonstration des pages 163-165 de [4]. Il nous faut toutefois étendre le résultat (b) : soit  $X$  un espace analytique de dimension pure  $n$ , et de dimension holomorphe  $k$ . Soient  $F$  une application propre de  $X$  dans un espace de Banach  $E$ , et  $V$  la fibre  $F^{-1}(0)$ . Nous voulons montrer qu'il existe une application linéaire  $\lambda$  de  $E$  dans  $\mathbb{C}^k$  telle que  $V$  soit égal à  $(\lambda \circ F)^{-1}(0)$  (au moins dans un certain voisinage de  $V$ ). Pour tout point  $x$  de  $V$ , il existe un voisinage  $U_x$  de  $x$  et un sous-espace  $E_x$  de codimension finie de  $E$  tels que  $V \cap U_x = F^{-1}(E_x) \cap U_x$ . La fibre  $V$  étant compacte, nous la recouvrons par un nombre fini de  $U_x$  et trouvons ainsi un voisinage  $\Omega$  de  $V$  et un sous-espace  $P$  de codimension finie de  $E$  tel que  $V \cap \Omega = F^{-1}(P) \cap \Omega$ . En considérant la composée de  $F$  et d'une application linéaire de  $E$  dans un  $\mathbb{C}^t$ , de noyau  $P$ , composée qui est propre au moins si on la restreint à un voisinage convenable de  $V$ , nous nous ramenons pour notre problème au cas traité dans [4].

Appendice 1: Majorations de la proposition 2 dans le cas d'une variable.

Lorsque  $X = \mathbb{C}$ , on peut toujours prendre (sauf si  $f$  est nul),  $I$  égal à 1. Les  $\sigma_{E_1}$ -modules  $\sigma_X$  et  $\phi_J^* \sigma_{E_J}$  sont alors libres.

Choisissons un système de générateurs  $a_h$  indépendants. Nous allons voir que les majorations désirées sont automatiquement réalisées. Par un changement de variable à la source, nous pouvons toujours supposer que  $f_1(z)$  vaut  $z^k$ . Alors,  $H$  est inférieur ou égal à  $k$ . Soit  $\rho$  une racine  $k^{\text{ième}}$  primitive de l'unité. Désignons par  $A_h(z)$  le germe  $a_h(z^k, f_2(z), \dots, f_J(z))$ , et plaçons-nous une fois pour toutes dans un disque de  $\mathbb{C}$  où toutes les fonctions  $f_n(z)$  et  $A_h(z)$  soient définies. Nous cherchons à résoudre le système d'équations

$$(1) \quad f_n(\rho^l z) = \sum_{h=1}^H \beta_h(z) A_h(\rho^l z) \quad 1 \leq l \leq k$$

---

(1) Il vaut mieux encore suivre la démarche du chapitre 7 de [7].

Ce système admet, quel que soit le paramètre  $z$ , une solution (puisque les  $A_h$  engendrent  $\phi_J^* \sigma_{E_J}$  sur  $\sigma_{E_1}$ ). Montrons que, pour

$z$  non nul, cette solution est unique. Aucun coefficient de la matrice  $[A_h(\rho^l z)]$  n'est nul pour  $z$  différent de 0 assez petit. Supposons pour fixer les idées que le déterminant formé par les  $m$  premières lignes et colonnes soit non nul au voisinage de 0, et que tous les déterminants d'ordre supérieur soient nuls. Il existerait un unique système de coefficients, fonctions méromorphes de  $z$ , tel que

$$A_{m+1}(\rho^l z) = \sum_{h=1}^m c_h(z) A_h(\rho^l z) \quad 1 \leq l \leq m$$

Les mêmes égalités, avec les mêmes coefficients, auraient nécessairement lieu pour  $m+1 \leq l \leq k$ . Les fonctions  $c_h$  seraient donc en réalité des fonctions de  $z^k$ , et, en multipliant l'une des égalités par une puissance convenable de  $z^k$ , nous aurions une relation entre les  $A_h(z)$  à coefficients dans  $\phi_1^* \sigma_{E_1}$ , ce qui est contraire à

l'hypothèse d'indépendance des  $A_h$ . Le système (1) admet donc une solution unique pour tout  $z$  non nul (assez petit). Les coefficients  $\beta_h(z)$  sont à priori les fonctions méromorphes de  $z$ , mais à posteriori des fonctions holomorphes de  $z^k$  prolongeant les germes  $\alpha_h(z^k)$  (puisque  $f_n$  est engendré comme germe par les  $A_h$ ). Les formules de Cramer nous disent que  $\beta_h(z)$  s'exprime comme quotient d'un polynôme en  $f_n(\rho^l z)$  et  $A_h(\rho^l z)$  par un polynôme en les  $A_h(\rho^l z)$  ne s'annulant (au plus) qu'à l'origine. Ceci donne une majoration de  $f_n(z)$  sur un cercle centré à l'origine, ce qui, avec le principe du maximum, permet de conclure.

Appendice 2 : Equivalence de deux définitions des sous-ensembles analytiques de dimension finie d'une variété banachique.

Soit  $E$  un espace de Banach, et  $X$  un germe à l'origine de sous-ensemble analytique de dimension finie au sens de Douady,

c'est-à-dire muni d'un modèle  $M \xrightarrow{\phi}$ , où  $M$  est un germe de sous-ensemble analytique à l'origine d'un  $\mathbb{C}^n$ . Réalisons  $M$  dans son espace tangent de Zariski : soit  $\xrightarrow{i} T$  cette réalisation. Puis, prolongeons  $\phi$  de façon arbitraire en une application analytique  $\psi$  de  $T$  dans  $E$ . Puisque  $M$  est un modèle, l'application

$$\phi^* : \mathcal{O}_E \longrightarrow \mathcal{O}_M$$

est surjective. L'application

$$\phi_* : \text{Der } \mathcal{O}_M \longrightarrow \text{Der } \mathcal{O}_E$$

est donc injective, et, l'application  $i_*$  définie de même étant bijective,

$$\psi_* : \text{Der } \mathcal{O}_T \longrightarrow \text{Der } \mathcal{O}_E$$

est encore une injection. Or,  $\psi_*$  n'est autre que  $\psi'(0)$  ;  $\psi(T)$  est donc un germe de sous-variété de dimension finie de  $E$ , qui contient  $X$ .

---

## BIBLIOGRAPHIE

- [0] BUNGART : Holomorphic functions ... ; Trans. Amer. Math. Soc. vol.111, 1964 ; page 329.
- [1] DOUADY : Le problème des modules ... ; Annales de l'Institut Fourier XVI, 1966 ; page 1.
- [2] FRISCH : Points de platitude d'un morphisme d'espaces analytiques complexes ; Inventiones mathematicae, vol. 4, 1967 ; page 118.
- [3] GRAUERT-REMMERT : Komplexe Räume ; Math. Annalen, Bd.136, 1958 ; page 298.
- [4] GUNNING-ROSSI : Analytic functions of several complex variables ; Prentice Hall.
- [5] HOUZEL : Géométrie analytique locale, II : théorie des morphismes finis ; séminaire Henri Cartan 1960-61, exposé 19, page 19.
- [6] JURCHESCU : On the canonical topology of an analytic algebra and of an analytic module ; Bull. Soc. Math. France, t.93, 1965, page 129.
- [7] NARASIMHAN : Introduction to the theory of analytic spaces ; Springer-Verlag ; page 131.
- [8] TREVES : Topological vector spaces, distributions and kernels ; Academic Press, page 549.

Exposé n° 20 : DESCRIPTION DE L'ANNEAU DE COHOMOLOGIE DE L'ENSEMBLE  
(chapitre IV) DES OPERATEURS A INDICE D'UN ESPACE DE HILBERT COMPLEXE,  
par Gabriel RUGET.

On sait [4] [7] que l'ensemble des opérateurs à indice d'un espace de Hilbert complexe de dimension infinie, muni de la topologie de la norme, est un classifiant pour le groupe unitaire infini. Nous reprenons toutefois à zéro l'étude de l'anneau de cohomologie entière de cet espace, dans le but d'en obtenir une interprétation plus concrète.

Soient  $E$  un espace de Hilbert complexe de dimension infinie, et  $\Omega_i$  l'ensemble des opérateurs d'indice  $i$  de  $E$  ( $\Omega_i$  est un ouvert connexe de  $L(E)$ ) (\*). Nous noterons  $\Omega_i^n$  (resp.  $V_i^n$ ) l'ensemble des opérateurs d'indice  $i$  dont le noyau a une dimension au plus égale à  $n$  (resp. une dimension égale à  $n$ ). Le complémentaire dans  $\Omega_i$  de  $\Omega_i^n$  (qui est ouvert) est  $\overline{V}_i^{n+1}$ . Les  $\Omega_i^n$  constituent une filtration croissante de  $\Omega_i$ , que nous allons utiliser pour déterminer la structure additive de la cohomologie entière de cet espace (nous nous limiterons en fait à l'étude de  $\Omega_0$ , puisque tous les  $\Omega_i$  ont le même type d'homotopie).

Lemme 1 :  $V_i^n$  est une sous-variété analytique complexe de  $\Omega_i$ , de codimension  $n(n-i)$ ; son adhérence  $\overline{V}_i^n$  est un joli sous-ensemble analytique de  $\Omega_i$ .

Démonstration : Soit  $f$  un élément de  $V_i^n$ . Choisissons une décomposition directe  $\text{Ker } f \oplus A$  de l'espace-source de  $f$ , et une décomposition  $B \oplus \text{Im } f$  de son espace-but, de façon

---

(\*) Nous appelons indice d'un opérateur  $f$  la dimension du noyau de  $f$  diminuée de la codimension de l'image de  $f$ .

à représenter  $f$  par une matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$ , où  $\delta$  est inversible. Les opérateurs voisins de  $f$  s'écrivent dans les mêmes décompositions  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , où  $d$  est inversible, et où  $a$  est une matrice à  $n$  colonnes et  $n-i$  lignes. Les opérateurs  $g$  appartenant à  $V_i^n$  sont ceux qui satisfont l'équation analytique

$$a - bd^{-1}c = 0,$$

dont l'équation linéaire tangente au point  $f$  est  $a=0$ . Quant aux opérateurs  $g$  voisins de  $f$  et situés dans  $\bar{V}_i^p$  (pour  $n \geq p \geq i$ ), ce sont ceux qui satisfont les équations analytiques

$$\text{rang}(a - bd^{-1}c) \leq n-p.$$

Cohomologie de la variété  $V_i^n$  : Appelons  $G_p$  la Grassmannienne des  $p$ -plans complexes de  $E$ ; c'est une variété analytique banachique, dont l'anneau de cohomologie entière est un anneau de polynômes en des variables  $c_1, \dots, c_p$  de poids respectifs  $2, \dots, 2p$ ; le rang de  $H^{2S}(G_p)$  est donc égal au nombre  $\pi_p(S)$  de partitions (non ordonnées) de  $S$  en entiers inférieurs ou égaux à  $p$  (ce qui est aussi égal au nombre de partitions non ordonnées de  $S$  en  $p$  entiers ou moins). La variété  $V_i^n$  est fibrée sur  $G_n \times G_{n-i}$  par l'application qui, à un opérateur, associe son noyau, et l'orthogonal de son image. La fibre-type de cette fibration est l'espace des automorphismes d'un espace de Hilbert : elle est contractile [6], et l'anneau de cohomologie de  $V_i^n$  est égal à celui de  $G_n \times G_{n-i}$ , c'est-à-dire, d'après le théorème de Künneth, à un anneau de polynômes en des variables  $c_1, \dots, c_n, c'_1, \dots, c'_{n-i}$  de poids respectifs  $2, \dots, 2n, 2, \dots, 2(n-i)$ . En particulier, le rang de  $H^{2S}(V_i^n)$  est

$$\sum_{0 \leq q \leq S} \pi_n(q) \pi_n(S-q).$$

Proposition 2. La cohomologie entière de  $\Omega_0$  est nulle en degrés impairs. Le groupe  $H^{2S}(\Omega_0; \mathbb{Z})$  est libre de rang  $\pi(S) = \pi_\infty(S)$ . Il en va de même pour les groupes d'homologie entière, dont les groupes de cohomologie sont exactement les duals.

La dernière assertion découle évidemment des premières et de la formule des coefficients universels. Le fermé  $V^n$  de  $\Omega$  (nous omettons désormais l'indice  $0$ ) étant de codimension topologique  $2n^2$ , le groupe  $H^p(\Omega^q)$  est constant pour  $q \gg \sqrt{p/2}$ , et égal à  $H^p(\Omega)$ . Ecrivant, dans l'ouvert  $\Omega^q$ , la suite exacte de cohomologie à supports dans  $V^q$ , utilisant l'isomorphisme "de Gysin" et le résultat qui précède sur la cohomologie de  $V^q$ , nous trouvons, par récurrence sur  $n$ , que la cohomologie de  $\Omega^n$  est nulle en degrés impairs, et que le groupe  $H^{2S}(\Omega^n)$  est libre de rang

$$\sum_{\substack{0 \leq p < n \\ 0 \leq q \leq S-p^2}} \pi_p(q) \pi_p(S-p^2-q)$$

l'égalité

$$\pi_\infty(S) = \sum_{0 \leq p, q} \pi_p(q) \pi_p(S-p^2-q)$$

Le premier membre est le nombre des fonctions d'entiers, à valeurs entières, décroissantes au sens large, dont la somme

des valeurs soit  $S$ . Nous associons à une telle fonction  $x$  la partie  $D_x$  de  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$  située "au-dessous de son graphe" (pour préciser ceci, indiquons que la zone hachurée sur le dessin correspond à la fonction de valeurs successives 7, 5, 5, 2, 2, 1, 0...), dont la surface est  $S$ . Soit  $p_x$  le côté du plus grand carré s'appuyant sur les axes de coordonnées

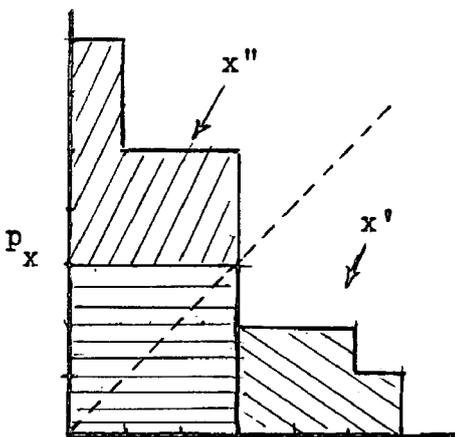


figure 1

et contenu dans  $D_x$ . Orant ce carré, on disconnecte  $D_x$  en deux régions de surface  $q$  et  $S-p_x^2-q$  qui permettent de définir deux fonctions d'entiers à valeurs entières inférieures ou égales à  $p_x$ , décroissantes au sens large, et d'intégrale  $q$  et  $S-p_x^2-q$  respectivement (pour le dessin,  $p_x=3$  et ces fonctions sont  $2, 2, 1, 0, \dots$  et  $3, 3, 1, 1, 0, \dots$ ) ; soient  $x'$  et  $x''$  ces deux fonctions. La construction que nous venons de décrire étant réversible, l'égalité est démontrée.

N.B. Rappelons que  $\pi_0(n)$  est nul pour  $n > 0$ , et que  $\pi_p(0)$  vaut 1 pour tout  $p \geq 0$ .

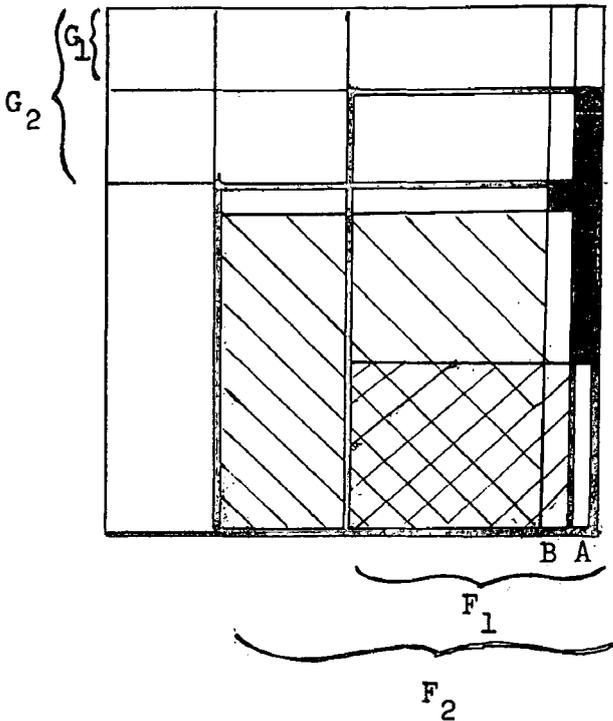
Nous appellerons désormais  $X$  l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{N}^*$  dans  $\mathbb{N}$  décroissantes (au sens large), asymptotiquement nulles. Il est muni de l'involution qui, à la fonction  $x$ , associe la fonction  $\hat{x}$  telle que les ensembles de points situés au-dessous des graphes de  $x$  et  $\hat{x}$  (dans  $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ ) soient symétriques par rapport à la diagonale. Nous désignerons une fonction de  $X$  par la suite des valeurs non nulles qu'elle prend, entre parenthèses. Ainsi,  $(n)^\wedge = (1, 1, \dots, 1)$  ( $n$  fois 1), symbole que nous écrirons sous la forme abrégée  $(\underline{n})$ . Nous noterons  $I(x)$  la somme des valeurs prises par la fonction  $x$ ,  $L(x)$  le cardinal du support de  $x$ .

Prenons une fonction  $x \in X$ , et, dans l'espace  $E$ , deux suites de sous-espaces fermés  $F_1 \subset \dots \subset F_{L(x)}$ ,  $G_1 \subset \dots \subset G_{L(x)}$ , avec  $\dim G_i = g_i$ ,  $i - x(i) \leq g_i < \infty$ ,  $\text{codim } F_i = x(i) - i + g_i$ . Soit  $K(F_i, G_i)$  le sous-ensemble de  $\Omega$  formé des opérateurs  $f$  tels que, pour tout  $i$ , on ait

$$\dim (f^{-1}(G_i) \cap F_i) \geq i$$

Proposition 3.  $K(F_i, G_i)$  est un joli sous-ensemble analytique complexe de  $\Omega$ , de codimension  $I(x)$ . La classe de cohomologie entière, de degré  $2I(x)$ , représentée par  $K(F_i, G_i)$  ne dépend que de la fonction  $x$ . Nous la noterons  $[x]$ .

Démonstration : Pour la première assertion, le seul problème est



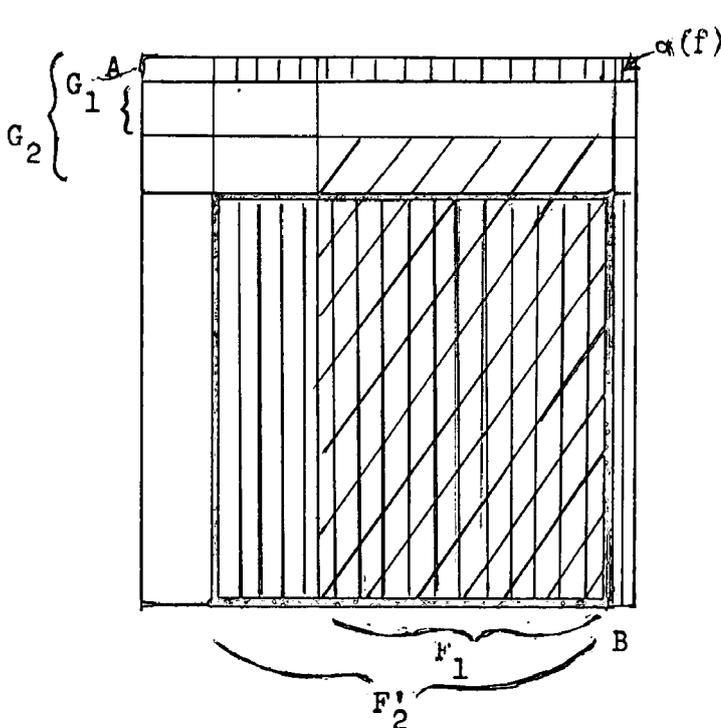
de calculer la codimension de  $K(F_i, G_i)$ , qui est une réunion localement finie de sous-variétés analytiques. Nous allons étudier, sur le dessin ci-contre, ce qui se passe (dans le cas  $L(x)=2$ ) au voisinage d'un opérateur  $f \in K(F_i, G_i)$  situé dans une nappe de codimension minimum, c'est-à-dire tel que la dimension de  $f^{-1}(G_1) \cap F_1$  soit 1 (choisissons un vecteur non nul  $A$  de cet espace) et que la dimension de  $f^{-1}(G_2) \cap F_2$  soit 2 (choisissons un vecteur  $B$  qui, joint à  $A$ , engendre cet espace ; sur le

dessin,  $B$  semble encore être contenu dans  $F_1$ , mais ceci n'intervient pas en fait dans le calcul). Représentons  $f$  par une matrice : la colonne donnant l'image de  $A$  (resp.  $B$ ) est nulle au-dessous des lignes correspondant à  $G_1$  (resp.  $G_2$ ), et les "carrés" hachurés représentent des opérateurs inversibles. Pour exprimer qu'un opérateur  $g$  voisin de  $f$  possède les propriétés  $\dim(g^{-1}(G_i) \cap F_i) = i$ , on écrit que les deux opérateurs représentés par les matrices encadrées de lignes fortes ont un noyau de dimension 1 : on procède pour cela comme dans le Lemme 1, et on obtient autant d'équations (tangentiuellement indépendantes) qu'il y a de cases noircies.

Dans la deuxième assertion de la proposition 3, il est évident que la classe  $[K(F_i, G_i)]_Q$  ne dépend que de la fonction  $x$  et de la suite  $g_i$  choisie. Si nous appelons  $Q(x)$  l'unique nombre entier vérifiant les inégalités

$$Q(x) - x(Q(x)) \leq 0, \quad Q(x)+1 - x(Q(x)+1) > 0,$$

la plus petite suite  $g_i$  convenable est  $g_1 = \dots = g_{Q(x)} = 0$ , et  $g_i = i-x(i)$  pour  $i$  plus grand que  $Q(x)$  (nous appellerons  $\sum_1(x)$  cette suite). Soit  $k$  un entier compris entre 1 et  $L(x)$ ; nous allons montrer que la classe de cohomologie associée à une fonction  $x \in X$  et à une suite  $g_i$  convenable pour  $x$  est la même que la classe associée à  $x$  et à la suite  $\{g_1, \dots, g_{k-1}, g_k+1, \dots, g_{L(x)}+1\}$ . Ceci entraînera évidemment le résultat final. Traitons, toujours à l'aide d'un dessin, le cas  $L=2, k=2$ . Soient  $F_1, F_2, G_1, G_2$ , des espaces relatifs à la suite  $\{g_1, g_2\}$ . Lorsqu'on passe à la suite  $\{g_1, g_2+1\}$ , ils sont remplacés par  $F_1, F'_2, G_1, G'_2$ , où  $G'_2 = G_2 \oplus A$ ,  $F_2 = F'_2 \oplus B$ . Si  $f$  est un opérateur d'indice nul représenté par une matrice comme ci-contre, la colonne donnant  $f(B)$  est formée d'un nombre  $\alpha(f)$  (la composante de  $f(B)$  sur  $A$ ) et d'un vecteur  $\beta(f)$ ; nous appellerons  $\gamma(f)$  l'opérateur



représenté par le reste de la matrice. Dire qu'un opérateur  $f$  appartient à  $K(F_i, G_i)$  équivaut à dire que le noyau de la matrice hachuré obliquement (resp. verticalement) a une dimension au moins égale à 1 (resp. 2). Dire qu'un opérateur  $f$  appartient à  $K(F'_i, G'_i)$  équivaut à dire que le noyau de la matrice hachuré obliquement (resp. encadré) a une dimension au moins égale à 1 (resp. 2). Considérons l'appli-

cation affine  $T$  de  $\Omega_0$  dans lui-même qui, à  $f$ , associe l'opérateur représenté par la matrice  $(\gamma(f) | \frac{1}{0})$ . On voit facilement que  $T^{-1}(K(F_i, G_i))$  est égal à  $K(F'_i, G'_i)$ , et on vérifie sans difficulté la condition de transversalité de la proposition II.1. On a par conséquent

$$[K(F'_i, G'_i)]_{\Omega} = T^*[K(F_i, G_i)]_{\Omega} \quad .$$

Mais l'application  $T$  est homotope à l'identité de  $\Omega$  (on peut prendre une homotopie "affine"). La proposition 3 est donc démontrée.

Faisons quelques commentaires sur les différents sous-ensembles analytiques de  $\Omega$  que, nous avons proposés pour représenter une même classe  $[x]$ . Quatre d'entre eux nous semblent particulièrement simples :

1° - Celui qui correspond à la suite  $\sum_1$  : reprenons la figure 1, représentant le graphe d'une fonction  $x$ . Le nombre que nous avons appelé  $p_x$  à l'occasion de la proposition 2 est égal à  $Q(x)$ . On se convainc facilement que  $K(x, \sum_1)$  est l'adhérence d'un sous-ensemble analytique  $M$  de  $V^{Q(x)}$  : les opérateurs de  $M$  sont tous ceux dont le noyau (qui appartient à  $\mathcal{G}_{Q(x)}$ ) satisfait certaines conditions correspondant à la fonction  $\hat{x}''$  et dont le conoyau (qui appartient aussi à  $\mathcal{G}_{Q(x)}$ ) satisfait d'autres conditions données par la fonction  $\hat{x}'$ . Si alors nous reprenons la démonstration de la proposition 2 en pensant à la description habituelle [1] de la cohomologie d'une Grassmannienne, nous trouvons que les classes  $[x]$  ( $x \in X$ ) engendrent librement le groupe  $H^*(\Omega; \mathbb{Z})$ . Nous remarquons aussi que la cohomologie entière de  $\Omega$  est égale à la limite projective de la cohomologie de ses sous-espaces compacts.

2° - Soit  $\sum_2$  la suite  $\{g_i = 1\}$ . L'ensemble  $K(x, \sum_2)$  peut être décrit de la façon suivante : soit  $\pi_n$  une suite de projections orthogonales de  $E$ , le noyau de  $\pi_n$  ayant pour dimension  $n$  et contenant le noyau de  $\pi_{n-1}$  ;  $K(x, \sum_2)$  est l'ensemble des opérateurs  $f \in \Omega$  tels que

$$\dim \text{Ker}(\pi_n \circ f \circ \pi_p) \geq n+p$$

pour tout couple  $(n, p)$  appartenant à la région  $D_x$  située

au-dessous du graphe de  $x$ .

3° - Soit  $\sum_3$  une suite constante  $\{g_i = g \geq L(x)\}$  : alors,  $K(x, \sum_3)$  est l'ensemble des opérateurs  $f \in \Omega$  tels que la contre-image par  $f$  d'un plan fixe de  $E$ , de dimension  $g$ , décrive le sous-ensemble analytique  $W$  de  $\mathcal{G}_g$  formé des plans  $P$  tels que

$$\dim(P \cap F_i) \geq i \quad \text{pour } i=1, \dots, g,$$

où  $F_i$  est de codimension  $x(i) - i + g$ . Nous désignerons  $W$  par le symbole  $[x]_g$  (avec les notations de  $[1]$ , ce serait le symbole  $[N-x(1), \dots, N-x(g)]$ , où  $N = \infty$ ).

4° - On pourrait enfin (ce serait une situation "duale" de la précédente) considérer les suites  $\sum_4$  du type  $\{g_i = x(i) - i + g\}$  où  $g$  est un entier fixe assez grand.

Proposition 4. Lorsque  $x$  parcourt  $X$ , les classes  $[x]$  engendrent librement le groupe  $H^*(\Omega; \mathbb{Z})$ . De plus, pour tout  $x \in X$ , on a

$$(1) \quad [\hat{x}] = (-1)^{I(x)} [x]^a,$$

où  $a$  désigne l'involution de  $H^*(\Omega)$  induite par l'adjonction (considérée comme une involution de  $\Omega$ ).

Démonstration : La deuxième assertion résulte de l'aspect 1°, et encore plus clairement de l'aspect 2°, sous lesquels viennent d'apparaître les classes  $[x]$  : prendre la contre-image par l'adjonction de  $K(x, \sum_2)$  revient à échanger les rôles de  $n$  et  $p$ , donc à remplacer la fonction  $x$  par la fonction  $\hat{x}$ . Mais il faut prendre garde que l'adjonction ne conserve pas les coorientations canoniques de notre figure : les normales aux variétés qui nous intéressent sont munies de structures complexes de dimension  $I(x)$ , et, sur chaque droite complexe, l'adjonction

renverse l'orientation. D'où le signe dans la formule (1).

Nous avons déjà suggéré une démonstration de la première assertion. En voici une autre, introduisant de nouveaux objets qui vont nous être utiles par la suite. Soient  $y$  une fonction de  $X$ , et  $g$  un entier au moins égal à  $L(y)$ . Soit  $D_1 \subset \dots \subset D_g \subset E$ , un drapeau d'espaces vectoriels complexes de dimension finie, la dimension de  $D_i$  étant égale à  $y(g-i+1)+i$ . Nous désignerons par le symbole  $\{y\}_g$  (avec les notations de [1], ce serait  $[y(g), \dots, y(1)]$ ) le cycle analytique de  $\mathcal{G}_g$  formé des plans  $P$  tels que

$$\dim(P \cap D_i) \geq i \quad \text{pour } i=1, \dots, g$$

Ce cycle a pour dimension  $2I(y)$ . Son produit externe par le générateur de  $H_0(\mathcal{G}_g)$  donne un cycle de  $V^g$ , donc de  $\Omega$ , et ce dernier cycle dépend plus de  $g$ : nous le noterons  $\{y\}$ . On peut voir  $\{y\}$  comme une famille d'opérateurs d'image fixe  $R(\text{codim } R=g)$ , dont la famille des noyaux est  $\{y\}_g$  (il y a dans cette famille un seul opérateur pour chaque noyau). Il est facile de voir, dans  $\mathcal{G}_g$  (à l'imitation de ce qui se passe dans les Grassmanniennes de dimension finie), que l'action du cocycle  $[x]_g$  sur le cycle  $\{y\}_g$  est 1 si  $x=y$ , 0 dans le cas contraire. On en conclut que, dans  $\Omega$ ,  $[x](\{y\})$  vaut 1 si  $x=y$ , 0 sinon. Les classes  $[x]$  sont donc indépendantes. Comme leur nombre est convenable (prop.2), elles engendrent le groupe  $H^*(\Omega)$ .

Proposition 5. Le cup-produit  $[x] \cup [n]$ , où  $n$  désigne la fonction de  $X$  prenant comme seule valeur non nulle  $n$ , est égal à la somme des  $[y]$  étendue aux fonctions  $y \in X$  telles que  $I(y) = I(x)+n$  et  $x \prec y \prec t(x)$ , où  $t(x)$  désigne la translatée à droite, d'un cran, de la fonction  $x$ .

Exemples :  $[2] \cup [2] = [4] + [3,1] + [2,2]$

$$[3] \cup [1] = [4] + [3,1]$$

Démonstration : C'est une adaptation d'un théorème de Chern. Nous allons démontrer que  $([x] \cup [n])(\{y\})$  vaut 1 si  $y$  vérifie les conditions de l'énoncé, 0 autrement. Choisissons un entier  $g$  au moins égal à  $L(x)$  et à  $L(y)$ , et une décomposition directe  $G \oplus R$  de l'espace-but  $E$ , avec  $\dim G = g$ . Le cocycle  $[n]$  peut-être représenté par l'ensemble des opérateurs  $f \in \Omega$  tels que  $\dim(f^{-1}(G) \cap K) \geq 1$ , où  $K$  est un sous-espace fermé de l'espace-source  $E$ , de codimension  $g+n-1$ . Il est clair que le nombre d'intersections étudié est égal au nombre d'intersections, dans  $\mathcal{G}_g$ , des cocycles et cycles  $[x]_g$ ,  $[n]_g$ , et  $\{y\}_g$ . Récrivons à notre façon le calcul de Chern : il faut d'abord choisir des plans  $F_i$ ,  $D_i$ , et  $K$  en position générale dans  $E$ .

Remarquons que si, pour un  $i$ ,  $y(i)$  est strictement plus petit que  $x(i)$ , on peut prendre des plans  $F_i$  et  $D_{g-i+1}$  ne se rencontrant qu'en 0, ce qui assure la vacuité de l'intersection de  $[x]_g$  et  $\{y\}_g$ . Nous supposons donc désormais que la fonction  $y$  est au moins égale à  $x$ . Décomposons  $E$  en  $E' \oplus E''$ , où  $E'$ , de dimension  $g$ , est muni de coordonnées  $\alpha_h$  associées à la base  $e_h$ , et où  $E''$  est muni de coordonnées hilbertiennes  $\beta_\ell$  associées à la base  $\varepsilon_\ell$ . Nous prendrons

$$F_i = \mathbb{C}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{C}e_i \oplus \{\beta_1 = \dots = \beta_{x(i)} = 0\},$$

$$D_i = \mathbb{C}e_{g-i+1} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}e_g \oplus \mathbb{C}\varepsilon_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{C}\varepsilon_{y(g-i+1)}.$$

Posons

$$M_i = F_i \cap D_{g-i+1} = \mathbb{C}e_i \oplus \mathbb{C}\varepsilon_{x(i)+1} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}\varepsilon_{y(i)}.$$

Ainsi,  $M = \sum_i M_i$  est la somme de  $E'$  et d'un certain nombre de droites  $\mathbb{C}\varepsilon_\ell$ , ce nombre étant strictement plus petit que  $n$  si, pour un  $i$  au moins,  $y(i)$  est strictement plus grand que  $x(i-1)$  (rappelons que  $I(y) = I(x) + n$ ).

Démontrons que tout plan  $P$  appartenant à l'intersection de  $[x]_g$  et  $\{y\}_g$  (ceux que nous venons de choisir) est inclus dans  $M$ . Considérons le graphe ayant pour sommets les entiers compris entre 1 et  $g$ , où on a joint les sommets  $i$  et  $i+1$  dans le seul cas où  $y(i+1)$  est strictement plus grand que  $x(i)$ . Soit  $(p, \dots, q)$  une composante connexe de ce graphe : nous affirmons que tout  $P \in [x]_g \cap \{y\}_g$  rencontre

$$\sum_p^q M_i = \mathbb{C}e_p \oplus \dots \oplus \mathbb{C}e_q \oplus \mathbb{C}e_{x(q)+1} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}e_{y(p)} = F_q \cap D_{g-p+1}$$

suivant un espace de dimension au moins égale à  $q-p+1$  ; en effet,  $\dim P = g$ ,  $\dim P \cap F_q \geq q$  et  $\dim P \cap D_{g-p+1} \geq g-p+1$ . Par ailleurs,

les différentes sommes  $\sum_p^q M_i$  ne se rencontrent deux à deux qu'en 0. La dimension de  $P \cap M$  est donc au moins égale à  $\sum (q-p+1) = g$ .

1er cas : Il existe au moins un  $i$  tel que  $y(i) > x(i-1)$ . Nous pouvons alors choisir l'espace  $K$ , de codimension  $g+n-1$  dans  $E$ , de sorte qu'il ne rencontre  $M$  qu'en 0, et l'intersection  $[x]_g \cap \{y\}_g \cap [n]_g$  est clairement vide.

2ème cas : Si  $y \leq t(x)$ , les espaces  $M_i$  sont "disjoints", et tout plan  $P \in [x]_g \cap \{y\}_g$  rencontre chacun d'eux suivant une droite  $D_i(P)$ . Choisissons

$$K = \{\alpha_1 = \dots = \alpha_g\} \oplus \{\beta_{x(i)+1} = \dots = \beta_{y(i)} = 0 \quad \forall i=1, \dots, g\}$$

L'intersection de  $K$  et  $M$  est alors réduite à la droite  $D = \{\alpha_1 = \dots = \alpha_g\}$ . Cette droite devant être une combinaison des droites  $D_i(P)$  pour tout plan  $P \in [x]_g \cap \{y\}_g \cap [n]_g$ , il est clair que la seule solution est  $D_i(P) = \mathbb{C}e_i$ , donc  $P = E'$ , et ceci avec la multiplicité 1.

### Corollaire 6.

$$[x] = \text{déterminant } [x(i)+j-i], \\ 1 \leq i, j \leq L(x)$$

le déterminant étant pris pour le cup-produit, avec la convention de faire nul ce qui n'a pas de sens. L'anneau de cohomologie entière de  $\Omega$  est donc l'anneau de polynômes  $\mathbb{Z}[[1], \dots, [n], \dots]$ .

Exemple :  $[2, 2] = [2] \cup [2] - [3] \cup [1]$

Intermède :

Etudions directement cet exemple, sans utiliser les classes d'homologie  $\{y\}$ . Choisissons deux sous-espaces  $E'$  et  $E''$  de  $E$ , de codimension 1, dont l'intersection soit de codimension 2. Posons

$$K(E', 0) = V', \quad K(E'', 0) = V'', \quad K(E' \cap E'', 0) = W.$$

Rappelons aussi que, pour tout  $p$ , la classe  $[\bar{v}^p]_\Omega$  n'est autre que  $\underbrace{[p, \dots, p]}_{p \text{ fois}}$ . Nous prétendons démontrer l'égalité

$$[v'] \cup [v''] = [\bar{v}^2] + [\bar{v}^1] \cup [w].$$

Soit  $U_1$  le complémentaire dans  $\Omega$  de  $\bar{v}^2$ , et  $U_2$  celui de  $\bar{v}^1 \cap W$ . On voit facilement que  $U_1 \cup U_2$  est égal à  $\Omega$ , à un fermé de codimension topologique 16 près, donc que  $H^4(\Omega) = H^4(U_1 \cup U_2)$ . On voit aussi que la cohomologie de  $U_1 \cap U_2$  (i.e. l'ensemble des opérateurs dont le noyau est de dimension au plus 1 et n'est pas contenu dans  $E' \cap E''$ ) s'annule en degrés impairs. L'application naturelle de  $H^4(U_1 \cup U_2)$  dans  $H^4(U_1) \oplus H^4(U_2)$  est donc une injection, et il suffit de démontrer la formule convoitée dans  $U_1$  et  $U_2$  successivement. Dans  $U_2$ , elle tient à ce que  $V'$  et  $V''$  se coupent transversalement le long de  $\bar{v}^2$ . Dans  $U_1$ ,  $V'$  et  $V''$  se coupent le long de  $V^1 \cap W$ , mais pas transversalement; toutefois, l'intersection est transverse si l'on considère  $V'$  et  $V''$  comme sous-"variétés" de  $V^1$ ; on applique alors la propriété II.7.

Proposition 7. Si  $P_n(c_1, \dots, c_n)$  est le polynôme qui exprime la somme des puissances  $n$  ièmes d'un nombre suffisant de variables en fonction de leurs polynômes symétriques élémentaires, posons  $Ch_n = P_n([1], \dots, [n])$ . On a

$$Ch_n = \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p [p+1, \underline{n-p-1}]$$

Nous rappelons que  $(p+1, \underline{n-p-1})$  désigne la fonction de  $X$  qui prend la valeur  $p+1$ , puis  $n-p-1$  fois la valeur  $1$ .

Exemples :

$$Ch_1 = [1]$$

$$Ch_2 = [1, 1] - [2] = [1] \cup [1] - 2[2]$$

Démonstration : Nous procédons par récurrence sur  $n$ . Pour calculer  $Ch_{n+1}$ , considérons les  $n+1$  racines du polynôme  $T^{n+1} - c_1 T^n + \dots + (-1)^{n+1} c_{n+1}$ . Nous trouvons

$$Ch_{n+1} = (-1)^n (n+1) [n+1] + \sum_{p=1}^n (-1)^{p+1} [p] \cup Ch_{n-p+1} \quad \circ$$

D'après l'hypothèse de récurrence

$$Ch_{n-p+1} = \sum_{i=0}^{n-p} (-1)^i [i+1, \underline{n-p-i}]$$

D'après la proposition 5,

$$\text{si } i \leq n-p-1, [i+1, \underline{n-p-i}] \cup [p] = \sum_{q=0}^{\inf(i, p)} [i+1+p-q, 1+q, \underline{n-p-i-1}]$$

$$+ \sum_{r=0}^{\inf(i, p-1)} [i+p-r, 1+r, \underline{n-p-i}] ;$$

$$\text{pour } i=n-p, [n-p+1] \cup [p] = \sum_{q=0}^{\inf(p, n-p+1)} [n-q+1, q]$$

Donc

$$\begin{aligned}
 \text{Ch}_{n+1} &= (-1)^n (n+1) [n+1] + (-1)^{n+1} \sum_{\substack{p=1, \dots, n \\ q=0, \dots, \inf(p, n-p+1)}} [n-q+1, q] \\
 &+ \sum_{\substack{p=1, \dots, n-1 \\ i=0, \dots, n-p-1 \\ q=0, \dots, \inf(p, i)}} (-1)^{p+i+1} [i+1+p-q, l+q, \underline{n-p-i-1}] \\
 &+ \sum_{\substack{p'=0, \dots, n-2 \\ i=0, \dots, n-p'-2 \\ q=0, \dots, \inf(p', i)}} (-1)^{p'+i} [i+1+p'-q, l+q, \underline{n-p'-i-1}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ch}_{n+1} &= (-1)^n (n+1) [n+1] + (-1)^n (n, 1) + \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i (i+1, \underline{n-i}) \\
 &+ (-1)^n \sum_{\substack{p=1, \dots, n-2 \\ q=1, \dots, \inf(p+1, n-p)}} [n-q+1, q] \\
 &+ (-1)^{n+1} \sum_{\substack{p=1, \dots, n \\ q=0, \dots, \inf(p, n-p+1)}} [n-q+1, q] .
 \end{aligned}$$

On vérifie facilement que la deuxième ligne de cette expression vaut

$$n(-1)^{n+1} [n+1] + 2(-1)^{n+1} [n, 1] .$$

D'où

$$\text{Ch}_{n+1} = (-1)^n [n+1] + (-1)^{n-1} [n, 1] + \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i [i+1, \underline{n-i}] .$$

Proposition 8. Soit  $S$  l'application de  $\Omega \times \Omega$  dans  $\Omega$  qui résulte, par une transmutation convenable, de l'application

qui associe à deux opérateurs  $f$  et  $g$  la matrice  $\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$ . On a

$$S^*[n] = \sum_{p=0}^n [p] \times [n-p]$$

Démonstration : Ecrivons  $E = E' \oplus E''$ , où les espaces  $E'$  et  $E''$  sont tous deux de dimension infinie, et considérons l'application  $S$  comme allant de  $\Omega(E') \times \Omega(E'')$  dans  $\Omega(E)$ . Nous voulons étudier  $S^*[n].\{y\} \times \{z\}$  (où  $y$  et  $z$  sont des fonctions quelconques de  $X$ ), ou aussi bien  $[n].S(\{y\} \times \{z\})$ .

1er cas : On a  $L(y) > 1$ , ou  $L(z) > 1$ . Puisque  $I(y) + I(z) = n$ , cela se traduit par l'inégalité  $y(1) + z(1) < n-1$ . Choisissons dans  $E'$  (resp.  $E''$ ) un plan  $G'$  (resp.  $G''$ ) de dimension  $g' \geq L(y)$  (resp.  $g'' \geq L(z)$ ) et un plan  $F'$  (resp.  $F''$ ) de codimension  $y(1)+g'$  (resp.  $z(1)+g''$ ). Le cycle  $\{y\}$  (resp.  $\{z\}$ ) de  $\Omega(E')$  (resp.  $\Omega(E'')$ ) peut être représenté par une famille d'opérateurs  $f'$  (resp.  $f''$ ) tels que  $f'^{-1}(G') \cap F' = 0$  (resp.  $f''^{-1}(G'') \cap F'' = 0$ ). Le cycle  $S(\{y\} \times \{z\})$  de  $\Omega(E)$  peut donc être représenté par une famille d'opérateurs  $f$  tels que  $f^{-1}(G' \oplus G'') \cap (F' \oplus F'') = 0$ . Or, le cocycle  $[n]$  est par exemple associé à l'ensemble des opérateurs de  $\Omega(E)$  tels que  $\dim f^{-1}(G' \oplus G'') \cap F \geq 1$ , où  $F$ , de codimension  $g'+g''+n-1 \geq g'+g''+y(1)+z(1)$  peut être choisi contenu dans  $F' \oplus F''$ .

2ème cas : Il ne nous reste plus qu'à montrer que  $[n].S(\{p\} \times \{n-p\})$  vaut 1. Choisissons dans  $E'$  (resp.  $E''$ ) une droite  $G'$  (resp.  $G''$ ) et un plan  $D'$  (resp.  $D''$ ) de dimension  $p+1$  (resp.  $n-p+1$ ). Choisissons dans  $E$  un plan  $F$  de codimension  $n+1$  rencontrant  $D' \oplus D''$  suivant une seule droite  $\Delta$ , qui ne soit située ni dans  $D'$ , ni dans  $D''$ . Le cycle  $S(\{p\} \times \{n-p\})$  peut être représenté par une famille d'opérateurs  $f$  tels que  $f^{-1}(G' \oplus G'')$  soit un 2-plan s'appuyant sur  $D'$  et  $D''$ . Et  $[n]$  est par exemple associé à l'ensemble des  $f$  tels que  $\dim f^{-1}(G' \oplus G'') \cap F \geq 1$ . Il y a alors un seul plan  $f^{-1}(G' \oplus G'')$  convenable, et ceci avec la multiplicité 1.

Remarque. L'application  $f \mapsto S(f, f^a)$  est homotope à l'application  $f \mapsto \begin{pmatrix} ff^a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  [3], donc à une constante (\*). D'où la formule

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} [n] \right) \cup \left( \sum_{n=0}^{\infty} [n]^a \right) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} [n] \right) \cup \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [n] \right) = 1,$$

que l'on peut bien sûr vérifier par le calcul.

### Classes et caractère de Chern.

Etant donné un espace connexe paracompact  $Y$ , le groupe de Grothendieck  $K(Y)$  des fibrés vectoriels de rang fini de base  $Y$  s'injecte dans le groupe  $\mathcal{K}(Y)$  fabriqué avec les complexes quasi-acycliques de fibrés hilbertiens de base  $Y$  [3], lequel s'identifie à l'ensemble des classes d'homotopie d'applications continues de  $Y$  dans  $\Omega$  (en général,  $\mathcal{K}(Y)$  est strictement plus grand que  $K(Y)$  : prendre pour  $Y$  l'espace  $\Omega_0$  ; ces deux groupes coïncident cependant lorsque  $Y$  est compact). Précisons le "signe" de notre application de  $K(Y)$  dans  $[Y, \Omega]$  : à une différence de fibrés  $\xi - \eta$ , nous associons la classe d'homotopie d'une quelconque famille d'opérateurs à indice paramétrée par  $Y$  dont la famille des noyaux "soit"  $\eta$  et dont la famille des conoyaux soit  $\xi$ .

Nous pouvons définir une notion d'amplitude pour les classes  $\alpha \in [Y, \Omega]$  : nous dirons qu'une classe  $\alpha$  est d'amplitude inférieure ou égale à  $p$  s'il existe une application  $a$  de  $Y$  dans  $\Omega$  représentant  $\alpha$  et un entier  $n$  tels que l'image de  $a$  soit contenue dans  $\Omega^{n+p} - \Omega^n$ . Par exemple, les classes de  $[Y, \Omega]$  qui appartiennent à l'image de  $K(Y)$  sont exactement les classes d'amplitude 1. Nous allons définir des classes de cohomologie entière  $\gamma_n \in H^{2n}(\Omega; \mathbb{Z})$ , qui induiront des classes  $\gamma_n(\alpha) \in H^{2n}(Y; \mathbb{Z})$  pour tout  $\alpha \in [Y, \Omega]$ . Puis, nous

---

(\*) En effet, toute famille d'opérateurs à indice autoadjoints (complexes) est homotope (dans  $\Omega$ ) à une constante. Cette même remarque montre que  $a$  est l'involution canonique de l'algèbre de Hopf  $H^*(\Omega)$ .

vérifierons que, pour les  $\alpha$  d'amplitude 1, ces classes sont les classes de Chern.

Définition. La composante dans  $\Omega_0$  de  $\gamma_n$  sera  $[n]$ . Sa composante dans un quelconque  $\Omega_i$  est définie de façon toute semblable : soient  $p, q$  deux entiers positifs ou nuls tels que  $p-q = n+i-1$ ,  $F$  un sous-espace fermé de  $E$ , de codimension  $p$ , et  $G$  un sous-espace de  $E$  de dimension  $q$ ; soit  $K_i(F, G)$  l'ensemble des opérateurs  $f \in \Omega_i$  tels que  $f^{-1}(G) \cap F$  ne soit pas réduit à 0. On vérifie, comme dans le cas  $i=0$ , que  $K_i(F, G)$  est un joli sous-ensemble analytique complexe de  $\Omega_i$ , de codimension  $n$ , et que la classe  $[K_i(F, G)]_{\Omega_i}$  ne dépend en fait que de  $n$  (et de  $i$ ) : c'est cette classe qui est, par définition, la composante de  $\gamma_n$  dans  $\Omega_i$ .

Proposition 9. Si  $\alpha$  est d'amplitude 1,  $\gamma_n(\alpha)$  est égale à la classe de Chern  $c_n(\alpha)$ .

lère démonstration : Supposons que  $\alpha$  soit l'image de la différence  $\xi - \eta$ , avec  $\text{rg } \eta - \text{rg } \xi = i$ . Soient  $P$  et  $Q$  deux espaces vectoriels de dimension finie, tels que  $\dim P - \dim Q = n+i-1$ . Si nous appelons  $\xi'$  (resp.  $\eta'$ ) le fibré  $\xi \oplus P$  (resp.  $\eta \oplus Q$ ), nous avons  $\text{rg } \xi' - \text{rg } \eta' = n-1$ . Nous savons qu'alors  $c_n(\xi' - \eta') = c_n(\xi - \eta)$  est la première obstruction à trouver un morphisme injectif de  $\eta'$  dans  $\xi'$ . Comme il suffit évidemment de démontrer la proposition dans le cas où tout est différentiable, mettons des structures différentiables sur  $Y$ ,  $\xi$  et  $\eta$ . Alors,  $c_n(\xi' - \eta')$  est représenté par la sous-variété entrouverte où un morphisme différentiable générique  $\phi$  de  $\eta'$  dans  $\xi'$  est de profondeur 1. Il ne reste plus qu'à superposer à  $\phi$  le morphisme nul de  $P$  dans  $Q$  et l'identité d'un fibré trivial à fibre hilbertienne  $H$  de dimension infinie, à trivialisier  $\eta' \oplus H$  en  $F \times Y$ ,  $\eta' \oplus H \oplus P$  en  $E \times Y$ , à trivialisier  $\xi' \oplus H \oplus Q$  en  $E \times Y$  : dans ces trivialisations,  $\phi \oplus \text{Id}_H \oplus 0$  devient  $\alpha$ , qui représente  $\alpha$ , et, si l'on veut bien se souvenir que  $\gamma_n$  peut être

représenté dans  $\Omega_i$  par  $K_i(F, Q)$ , on voit que  $c_n(\xi - \eta)$  n'est autre que  $\gamma_n(\alpha)$ .

2ème démonstration : En vertu de la proposition 8, il nous suffit de voir que, si  $\xi$  est un fibré de rang  $p$  et  $\tau_p$  le fibré trivial de même rang, on a, pour tout  $n$ ,  $c_n(\xi) = \gamma_n(\xi - \tau_p)$ ; c'est-à-dire de voir que les  $\gamma_n(\xi - \tau_p)$  vérifient les axiomes des classes de Chern. Il y en a en fait un seul que nous n'ayons pas examiné : c'est l'axiome de normalisation  $c(\eta_n) = 1 + h_n$  (avec les notations de [2], page 58). Il résulte immédiatement des définitions que

$$\gamma(\tau_1 - \eta_n^*) = \sum_{j=0}^n \gamma_j(\tau_1 - \eta_n^*) = \sum_{j=0}^n (h_n)^j,$$

ce qui est bien équivalent.

Corollaire 10. Dans l'espace universel  $\Omega_0$ , le caractère de Chern (stabilisé) est la classe

$$\sum_{\substack{p \geq 1 \\ q \geq 0}} \frac{(-1)^{p-1}}{(p+q)!} [p, q] \in H^{**}(\Omega_0; \mathbb{Z})$$

Remarque : Indépendamment de nous, Koschorke a donné dans [5] une interprétation analogue des classes de Chern. En fait, ce qu'il prend comme  $n^{\text{ième}}$  classe de Chern est plutôt notre  $(-1)^n [n]$ , ce qui est tout à fait compatible avec notre définition, la proposition 4, et le fait que son injection de  $K(Y)$  dans  $[Y, \Omega]$  est du "signe" opposé à la nôtre.

---

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] CHERN : Ann. Math, 49, 1948, p.362-372.

- [2] HIRZEBRUCH : Topological methods in algebraic geometry. Springer, Verlag 1966.
- [3] ILLUSIE : Complexes de fibrés et définition du foncteur  $K$  (Séminaire de Topologie, I.H.E.S., 1964-65).
- [4] JANICH : Vektorraumbündel und der Raum der Fredholmoperatoren, Math. Annalen 161, 1965, p. 129-142.
- [5] KOSCHORKE : Infinite dimensional  $K$ -theory and characteristic classes of Fredholm bundle maps. Dissertation. Brandeis, mai 1968.
- [6] KUIPER : The homotopy type of the unitary groups of Hilbert space, Topology 3, 1965, p.19-20.
- [7] RUGET : Exposé n°2.

Exposé n° 8 : VARIETES HILBERTIENNES DE DIMENSION INFINIE.

par Nicole MOULIS

0 - Introduction.

Dans toute cette étude  $H$  désignera un espace de Hilbert séparable de dimension infinie,  $X$  une variété différentiable de type dénombrable modelée sur  $H$ .

Définition : une  $m$ -fonction  $f$  sur une variété  $X$  munie d'une métrique Riemannienne complète, est une fonction de Morse  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , avec minimum, telle que, si  $\{x_n\}$  est une suite de points de  $X$  vérifiant les conditions (i) et (ii)

(i) la suite  $f(x_n)$  est bornée

(ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{grad } f(x_n) = 0$

il existe une suite  $\{x_{n_p}\}$  extraite de la suite  $\{x_n\}$  qui converge vers un point  $x_0$ .

Remarque : On dit dans ces conditions que la fonction  $f$  vérifie la condition  $c$  de Palais-Smale.

Nous allons démontrer les théorèmes suivants :

Théorème 1 [6] : S'il existe une  $m$ -fonction  $f$  définie sur  $X$ ,  $X$  est Palais-stable c'est-à-dire  $X$  est difféomorphe à  $X \times H$ .

Théorème 2 [6] : Si  $X_1$  et  $X_2$  sont deux variétés Palais-stables et homotopiquement équivalentes, elles sont difféomorphes.

Théorème 3 [7] : Tout ouvert  $\Omega$  d'un espace de Hilbert admet une  $m$ -fonction.

Théorème 4 [3] : Toute variété  $X$  modelée sur  $H$  est difféomorphe à un ouvert  $\Omega$  de  $H$ .

Les théorèmes 1 et 2 sont dus à N.H. Kuiper et Dan Burghelia.

Le théorème 3 est du à N. Moulis.

Le théorème 4 est du à J. Eills et K.D. Elworthy.

### 1 - Démonstration du Théorème 1.

La démonstration est basée sur le théorème suivant [1] [6] .

Théorème de Bessaga.

Soit  $x_0$  un point d'un espace de Hilbert réel  $H$ . Alors,  $H$  est analytiquement équivalent à  $H - \{x_0\}$ .

Démonstration : Supposons que  $x_0$  est l'origine de  $H$ .

Si  $H = \{x = (x_1, \dots, x_n, \dots) ; \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n^2 = |x|^2\}$ ,

posons  $H_0 = \{x = (x_1, \dots, x_n, \dots) ; \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon x_n^2}{n^{2^n}} = |x|_0^2\}$ .

$H$  et  $H_0$  sont deux espaces de Hilbert, l'identité définit un plongement de  $H$  dans  $H_0$ , l'image de  $H$  par ce plongement n'est pas fermée dans  $H_0$ .

Considérons l'application  $P[0,1] \rightarrow H_0$

$$P(t) = (t, t^2, \dots, t^n, \dots)$$

$P$  définit une courbe dans  $H_0$  :

si  $0 \leq t < 1$   $P(t) \in H$   
 $P(1) \in H_0$ .

Soit  $\alpha$  une fonction analytique définie sur  $\mathbb{R}^+$ , à valeurs dans  $]0,1]$  :

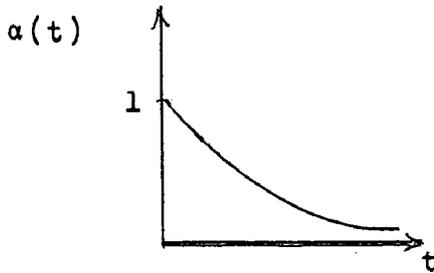


fig.1

Posons  $f_\omega(y) = y + P(\alpha(|y|_0))$ .

Si  $|y|_0 > 0$  :

$P(\alpha|y|_0) \in H$   $f_\omega(y) \in H$

si  $|y|_0 = 0$  :

$P(\alpha|y|_0) \in H_0$   $f_\omega(y) \in H_0 - H$

$f_\omega$  est une application analytique  $H \rightarrow H \cup \{P(1)\}$ .

En un point  $y \neq 0$ ,

$$D f_\omega(y) = \text{Identité} + L_\omega(y)$$

et si  $\varepsilon < \frac{1}{2}$  :  $|L_\omega(y)|_0 < \frac{1}{2}$ .

Donc  $f_\omega$  admet localement un inverse qui est une fonction analytique :

d'autre part, globalement, l'équation :  $f_\omega(y) = z$  admet une solution unique qui est l'unique point fixe de l'application  $h_z$

$$h_z : x \rightsquigarrow z - P(\alpha|x|_0)$$

Variante 1-1 : Soit B un voisinage de  $x_0$  dans H. Alors, H est difféomorphe à  $H - \{x_0\}$  par un difféomorphisme qui est l'identité en dehors de B.

Corollaire 1-2 : Soient  $X_1$  une sous-variété de codimension infinie de X, et T un voisinage tubulaire de  $X_1$  dans X. Alors, X est difféomorphe à  $X - X_1$  par un difféomorphisme qui est l'identité en dehors de T.

Corollaire 1-3 : Soient  $(X, \partial X)$  une variété Hilbertienne à bord,  $x_0$  un point du bord  $\partial X$ ,  $V$  un voisinage de  $x_0$  dans  $X$ . Alors, il existe un difféomorphisme de paires :

$$(X, \partial X) \rightarrow (X - \{x_0\}, \partial X - \{x_0\})$$

qui est l'identité en dehors de  $V$ .

Démonstration du théorème 1 :

Soit  $f$  la fonction définie sur  $X$  vérifiant la condition  $C$  ; quels que soient  $a$  et  $b$ ,  $f^{-1}[a, b]$  contient au plus un nombre fini de points critiques. Dans ces conditions, d'après [8],  $X$  admet une décomposition en anses.

Il existe des anses de trois types :

- celles correspondant à un point critique d'indice et coïndice infinis ;
- celles correspondant à un point critique d'indice infini et de coïndice fini ;
- celles correspondant à un point critique d'indice fini et de coïndice infini ;

Nous étudions successivement ces trois types d'anses.

Nous noterons :

$$f_a = \{x; x \in X \quad f(x) \leq a\}$$

$$\partial f_a = \{a; x \in X \quad f(x) = a\}$$

Lemme 1-1 : Si  $f$  admet exactement un point critique  $p$  dans  $f^{-1}[a, b]$  ( $f(p) = c$   $a < c < b$ ) et si l'indice et le coïndice de  $p$  sont infinis, le cobordisme suivant est trivial :

$$(f^{-1}[a, b], \partial f_a, \partial f_b) \simeq \partial f_a \times ([0, 1], 0, 1)$$

Il existe une m-fonction  $g$ , sans point critique dans  $g^{-1}([a, b])$  coïncidant avec  $f$  en dehors de  $f^{-1}[a, b]$ .

Soit  $\varepsilon > 0$  tel que  $a + \varepsilon < c$ .

$f_b$  est difféomorphe à  $f_{a+\varepsilon} \bigcup_{\alpha} D_1 \times D_2$  où  $D_1$  et  $D_2$  sont deux exemplaires de la boule unité de  $H$ ,  $S$  la sphère unité de  $H$ ,  $\alpha$  un plongement :

$$\alpha : S \times D_2 \rightarrow \partial f_{a+\varepsilon}$$

un point  $x$  de l'anse est déterminé par ses deux coordonnées  $(x_1, x_2)$   $x_1 \in D_1$ ,  $x_2 \in D_2$ .

Posons  $r_1 = |x_1|$ ,  $r_2 = |x_2|$ .

L'anse est représentée par l'ensemble des points  $\{r_1 \leq 1 ; r_2 \leq 1\}$ .

L'ensemble des points  $\{r_1 = 0 ; r_2 \leq 1\}$  est une sous-variété de codimension infinie.

$D_1 \times D_2$  est difféomorphe à  $(D_1 - \{0\}) \times D_2$ .

Par un difféomorphisme élémentaire (voir fig.2)

$$f_{a+\varepsilon} \bigcup_{\alpha} [(D_1 - \{0\}) \times D_2] \simeq f_{a+\varepsilon} - \alpha(S \times 0)$$

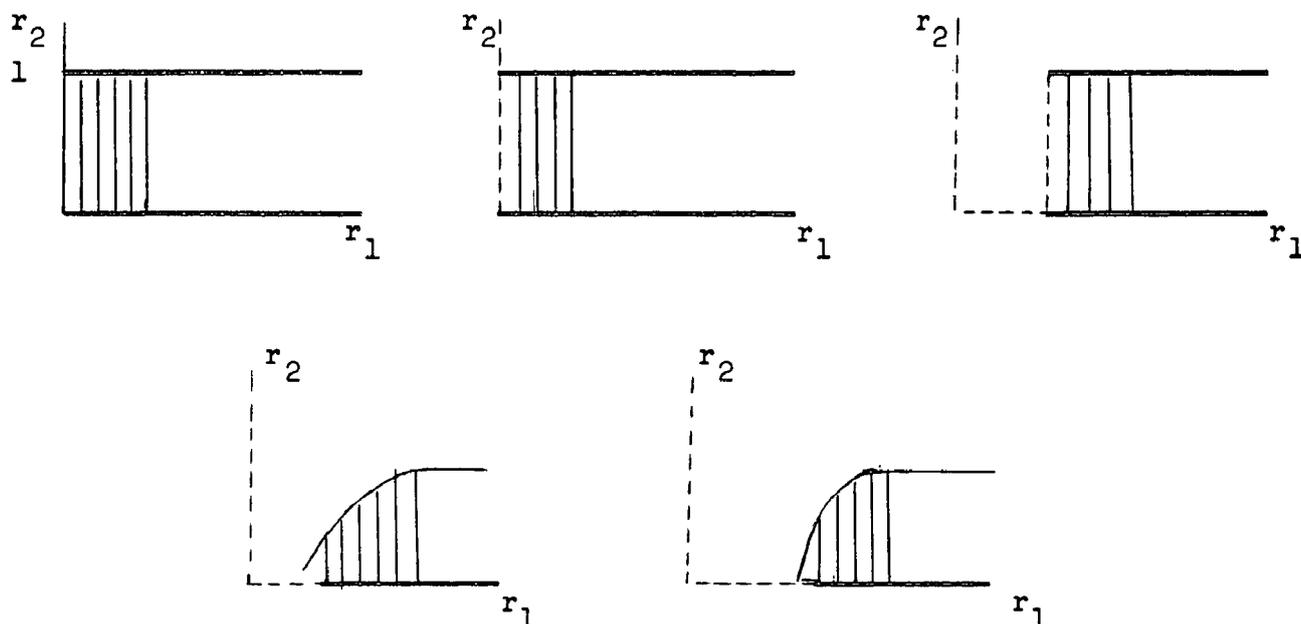


figure 2

$\alpha(S \times 0)$  est une sous-variété de codimension infinie de  $\partial f_{a+\varepsilon}$

$$(f_{a+\varepsilon}^{-1} \alpha(S \times 0), \partial f_{a+\varepsilon}^{-1} \alpha(S \times 0)) \simeq (f_{a+\varepsilon}, \partial f_{a+\varepsilon})$$

$$(f^{-1}[a, b], \partial f_a, \partial f_b) \simeq (f^{-1}[a, a+\varepsilon], \partial f_a, \partial f_{a+\varepsilon})$$

$(f^{-1}[a, a+\varepsilon], \partial f_a, \partial f_{a+\varepsilon})$  est un cobordisme trivial.

On définit facilement sur  $X$  une nouvelle métrique Riemannienne complète et une fonction  $g$  vérifiant le lemme 1-1.

Nous supposons désormais que  $f$  n'admet pas de point critique d'indice et coïndice infini.

Lemme 2 : Si  $X$  admet une métrique Riemannienne complète  $ds^2$  et une  $m$ -fonction  $f$ , elle admet aussi une métrique Riemannienne  $ds_0^2$  et une  $m$ -fonction  $g$  dont tous les points critiques ont un indice fini.

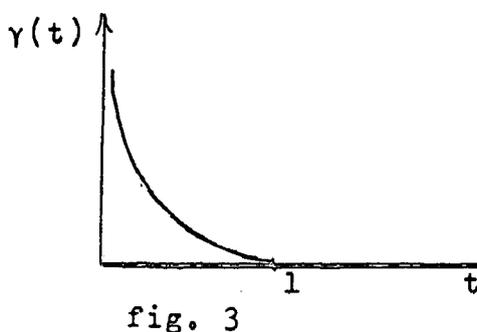
Coïndice 0.

Soient  $p$  un point critique de coïndice 0 et  $U$  un voisinage de  $p$ , tel que dans  $U$  il existe un système de coordonnées locales dans lequel  $f$  est de la forme :

$$f = f(p) - r_1^2 \quad r_1 = |x_1| \quad x_1 \in H$$

$$U = \{x; |x_1| < 1\}.$$

$X$  est difféomorphe à  $X - \{p\}$  par un difféomorphisme qui est l'identité en dehors de  $U$ .



Soit  $\gamma(t)$  une fonction de classe  $L^\infty$  dont le graphe est représenté sur la figure 3.

Posons :

$$f_1(x) = f(x) + \gamma(|x_1|)$$

$$ds_1^2 = ds^2 + (d\gamma(|x_1|))^2$$

Pour la métrique  $ds_1^2$ ,  $f_1$  est une  $m$ -fonction sur  $X - \{p\}$ .  
 Par induction, nous supposons que  $X$  n'a pas de point critique de coïndice  $m$ , avec  $m < n$ .

Coïndice  $n$  :

Soit  $p$  le point critique de coïndice  $n$ , ayant la plus basse valeur.

Soit  $W_+(p)$  la variété stable de  $p$  (ou nappe ascendante de  $p$ ).

$W_+(p)$  est de dimension  $n$ .

Si  $q$  est un autre point critique tel que  $f(q) > f(p)$   $q$  a un coïndice  $\geq n$  et  $W_-(q)$  variété instable de  $q$  (en nappe descendante de  $q$ ) a une codimension  $\geq n$ .

Soit  $a$  un niveau non critique :

$$f(p) < a < f(q)$$

Par un lemme de transversalité, il existe une isotopie de  $\partial f_a$  qui sépare :

$$W_+(p) \cap \partial f_a \quad \text{et} \quad W_-(q)$$

En étendant cette isotopie à  $f_a$  et en prolongeant la nouvelle variété le long des lignes de gradient, nous obtenons une nappe ascendante  $W'_+(p)$  de  $p$  qui ne rencontre pas  $q$ .

Par induction, nous pouvons supposer que  $W'_+(p)$  ne rencontre aucun autre point critique.

Soit  $T$  un voisinage tubulaire de  $W'_+(p)$ . Dans chaque fibre  $T$ , nous pouvons faire la construction faite précédemment dans le cas d'un point de coïndice  $0$ .

Nous appliquons ce procédé à tous les points critiques d'indice  $n$ , pour des valeurs critiques croissantes.

Soit  $0 < d < \infty$ , après avoir subi un nombre fini de modifications,

par le procédé précédemment décrit,  $f_a$  reste fixe.

Nous supposons désormais que  $f$  n'a pas de point critique d'indice fini.

Lemme 3-1 : Soit  $c$  une valeur critique unique  $a < c < b$ .  
Supposons, par induction, qu'il existe une variété Hilbertienne  
 $M_a$ , et un difféomorphisme  $\phi_a$  de  $f_a$  sur  $M_a \times H$ .

Il existe une variété  $M_b$ , un plongement  $j$  :  
 $M_a \rightarrow M_b$ , un difféomorphisme  $\phi_b$   $f_b \rightarrow M_b \times H$  tel que le  
diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 f_a & \xrightarrow{\phi_a} & M_a \times H \\
 i \downarrow & & \downarrow j \times \text{id} \\
 f_b & \xrightarrow{\phi_b} & M_b \times H
 \end{array}$$

Démonstration : Soit  $n$  l'indice du point critique  $p$ .

Posons  $f(p) = c$ .

$f_b$  se déduit de  $f_a$  en attachant une anse à  $\partial f_a$ .

Soient  $D^n$  la boule unité de  $R^n$

$S^{n-1}$  la sphère unité de  $R^n$

$D$  la boule unité de  $H$

L'application d'attachement de l'anse est :

$$(\alpha, \alpha_0) : (S^{n-1} \times D, S^{n-1} \times 0) \rightarrow (\partial f_a, \partial f_a)$$

$$\partial f_a \simeq \partial(M_a \times H) \simeq \partial M_a \times H$$

En appliquant une suite d'isotopies, nous pouvons supposer que  $(\alpha, \alpha_0)$  a la propriété :

$$(\alpha, \alpha_0) : (S^{n-1} \times D, S^{n-1} \times 0) \rightarrow (\partial M_a \times H, \partial M_a \times 0)$$

Nous utilisons des coordonnées :

$$x_1 \in \mathbb{R}^n, \quad x_2 \in H', \quad x_3 \in H$$

où  $H'$  est un deuxième exemplaire de  $H$ .

$$\text{Posons } r_i = |x_i| \quad (i=1, 2, 3).$$

Nous utilisons le modèle :  $W = \{(x_1, x_2) ; |r_1| \geq 1\}$  pour un voisinage avec bord  $W$  de  $\alpha_0(S^{n-1})$  dans  $M_a \times 0$ , tel que

$$\alpha_0(S^{n-1}) = \{(x_1, x_2) ; (x_1, x_2) \in W \quad r_1 = 1 \quad r_2 = 0\}.$$

Nous avons  $W \times H = \{(x_1, x_2, x_3) ; r_1 \geq 1\}$ .

$$W \times H \subset M_a \times H.$$

Nous pouvons supposer que l'anse est attachée le long de l'ensemble  $(r_1 = 1, r_2 \leq 1, r_3 \leq 1)$  l'anse étant l'ensemble  $(r_1 \leq 1, r_2 \leq 1, r_3 \leq 1)$ . La sous-variété du bord de  $M_a \times H \cup D^n \times D$  définie par  $\{r_1 = 1, r_2 = 0\}$  est une sous-variété de codimension infinie. Nous pouvons donc la retirer.

Après avoir appliqué des difféomorphismes en dimension finie, nous trouvons (figure 4)

$$f_b \simeq (M_a \cup_{\beta} D^n \times D) \times H$$

où  $\beta$  est l'application d'attachement :

$$\beta : (S^{n-1} \times D, S^{n-1} \times 0) \rightarrow (\partial M_a \times \partial M_a).$$

Posons  $M_b = M_a \cup_{\beta} D^n \times D$ .

Après avoir lissé tous les coins que nous avons introduits, nous trouvons que  $M_b$  est la variété cherchée.

La suite de variétés  $M_a$  se stabilise.  
 Donc il existe une variété  $M = \varinjlim M_a$ , telle que  $X$  soit  
 difféomorphe à  $M \times H$ .

$H$  est difféomorphe à  $H \times H$  et le théorème 1 est démontré.

Corollaire 1-1 : Si  $X$  admet une  $m$ -fonction  $X$  est difféomorphe à un ouvert d'un espace de Hilbert.

Il existe un plongement fermé de  $X$  dans  $H$  de codimension infinie [9].

Soit  $T$  un voisinage tubulaire ouvert de ce plongement :  
 $T$  est difféomorphe à  $X \times H$  et d'après le théorème 1  $X \times H$  est  
 difféomorphe à  $X$ .

## 2 - Démonstration du Théorème 2.

La démonstration est calquée sur celle faite en dimension finie par Mazur, pour des variétés stablement équivalentes.

Lemme 2-1 : Soient  $X$  et  $Y$  deux variétés Hilbertiennes Palais-stables, toute application  $f : X \rightarrow Y$  est homotope à un plongement fermé.

En composant  $f$  avec un difféomorphisme de  $Y$  sur  $Y \times H$ , nous obtenons :

$$h_0 : X \rightarrow Y \times H \quad h_0(x) = (p(x), q(x))$$

Soit  $\tau$  un plongement fermé et borné  $X \rightarrow D \subset H$ .

Posons  $h_1(x) = (p(x), \tau(x))$

$h_1$  est un plongement fermé de  $X$  dans  $Y \times H$ ,  $H$  étant contractile,  $h_1$  et  $h_0$  sont homotopes.

Démonstration du théorème 2.

Soient  $f$  et  $g$  deux plongements fermés

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X$$

Supposons  $g \circ f$  homotope à l'identité de  $X$ .

$f \circ g$  homotope à l'identité de  $Y$ .

Il existe une isotopie  $\phi_t$  de  $X \times D$  :

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \text{identité} \\ \phi_1(g \circ f(x, 0)) &= (x, 0) \quad \text{dans } X \times D. \end{aligned}$$

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\phi_1 g} X \times D$$

Soit  $D(j) = \{z; z \in H \mid |z| \leq j\}$ .

Nous étendons  $\phi_1 g$  en un plongement de voisinages tubulaires de  $Y \times D(1)$  dans  $X \times D(2)$ .

Par prolongement de  $f$  nous obtenons :

$$X \times D(1) \xrightarrow{F_1} Y \times D(1) \xrightarrow{G_1} X \times D(2)$$

$$G_1 \circ F_1 = \text{identité} \quad X \times D(1) \longrightarrow X \times D(2)$$

Nous pouvons répéter la même opération, nous obtenons une suite de plongements fermés :

$$\dots \longrightarrow X \times D(j) \xrightarrow{F_j} Y \times D(j) \xrightarrow{G_j} X \times D(j+1) \xrightarrow{F_{j+1}} Y \times D(j+1) \longrightarrow \dots$$

$$G_j \circ F_j = \text{Id} \quad F_{j+1} \circ G_j = \text{Id}.$$

A la limite nous trouvons des plongements surjectifs  $F_\infty$  et  $G_\infty$ .

$$X \times H \xrightarrow{F_\infty} Y \times H \xrightarrow{G_\infty} X \times H$$

$$G_\infty \circ F_\infty = \text{Identité.}$$

3 - Démonstration du théorème 3.

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $H$ .

Nous considérons un recouvrement de  $\Omega$  par des boules  $U_n(a_n, \rho_n)$  de centre  $a_n$  et de rayon  $\rho_n$  telles que les points  $a_n$  soient linéairement indépendants.

Notons :  $U_{i,j}^c = \{x; x \in \Omega, d(x, a_j) > \rho_j(1 - \frac{1}{i})\}$

$$V_n = U_n \cap U_{n,n-1}^c \cap \dots \cap U_{n,1}^c$$

("scalopping process").

Nous considérons les fonctions :

$$r_{n,n}(|x-a_n|^2) r_{n,p}(|x-a_p|^2) \text{ dont le graphe est}$$

représenté sur la figure 5.

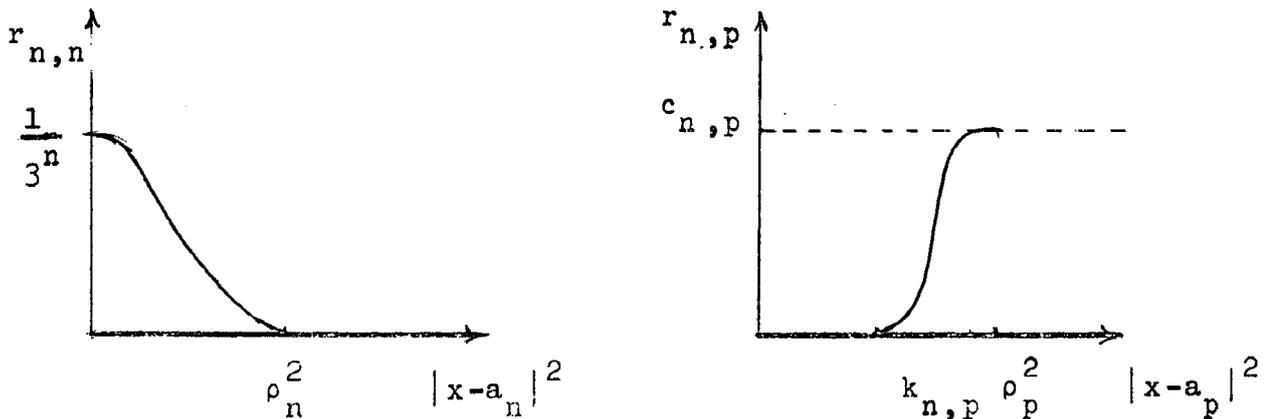


Fig.5

Avec  $k_{n,p} = \rho_p^2(1 - \frac{1}{n})^2$   $c_{n,p} < 1$

Posons  $f_n(x) = r_{n,n}(|x-a_n|^2) \times r_{n,n-1}(|x-a_{n-1}|^2) \times \dots \times r_{n,1}(|x-a_1|^2)$

$f_n$  est strictement positive sur  $V_n$ , (et 0 en dehors de  $V_n$ ).

Le recouvrement par les ouverts  $V_n$  étant localement fini ; nous pouvons considérer la fonction :

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) .$$

Lemme 3-1 : L'ensemble critique de  $f$  est localement compact.

Soit  $x_0$  un point de  $\Omega$ ,  $W(x_0)$  un voisinage de  $x_0$  dans  $\Omega$  qui ne rencontre qu'un nombre fini d'ouverts  $V_n : V_{i_1} \dots V_{i_n}$ .

$$\text{Dans } W(x_0) , f(x) = \sum_{1 \leq i \leq n} f_{i_p}(x)$$

$$\text{grad } f(x) = \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_{i_p}(x)(x - a_{i_p})$$

L'ensemble critique dans  $W(x_0)$  est contenu dans l'espace de dimension finie  $M_0$ , engendré par les points  $a_{i_p}$  ( $1 \leq i \leq n$ ).

Lemme 3-2 : Il existe des fonctions  $r_{n,p}$  et  $r_{n,p}$  telles que, en tout point critique le noyau de  $D^2 f$  soit de dimension finie.

Soit  $x_0$  un point critique.  $x_0 \in M_0$  ( $M_0$  défini au lemme).

Soit  $N_0$  le supplémentaire orthogonal de  $M_0$  (avec  $x_0$  comme origine).

Soient  $x$  un point dans  $W(x_0)$

$z$  projection orthogonale de  $x$  sur  $N_0$

$y$  projection orthogonale de  $x$  sur  $M_0$  ;

$$x = y + z .$$

Il existe une fonction de classe  $C^\infty \tilde{f} : M_0 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que, dans  $W(x_0)$

$$f(x) = \tilde{f}(y, |z|^2)$$

$$Df(x) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x) + 2z \frac{\partial \tilde{f}}{\partial U_2}(x)$$

( $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial U_2}$  est la dérivée partielle de  $f$  par rapport à la deuxième variable).

$x_0$  étant un point critique  $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x_0) = 0$

$$D^2 f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y^2}(x_0) & 0 \\ 0 & \frac{2\partial \tilde{f}}{\partial U_2} \end{pmatrix}$$

$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial U_2}$  est un nombre réel. Il est possible de choisir les fonctions  $r_{n,n}$  et  $r_{n,p}$  de sorte que  $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial U_2} < 0$ .

(on a même  $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial U_2} < -\epsilon < 0$  sur tout ouvert pour lequel il existe  $\alpha > 0 : f > \alpha > 0$ ).

Lemme 3-3 : La fonction  $\psi = \frac{1}{f}$  vérifie la condition C pour la métrique Riemannienne  $ds_H^2$  induite sur  $\Omega$  par la métrique usuelle de  $H$  (cette métrique n'est pas complète sur  $\Omega$ ).

Soit  $\Omega_p = \{x; x \in \Omega \quad f(x) > 3^{-p}\}$ .

$\Omega_p$  rencontre seulement un nombre fini d'ouverts  $V_n$  (D'après la majoration de  $r_{n,n}$  et  $r_{n,p}$ ).

Considérons une suite de points  $\{x_n\}$  telle que :

- i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{grad } \psi(x_n) = 0$
- ii) la suite  $\psi(x_n)$  est bornée.

Il existe  $n_0$  tel que  $\forall n \quad x_n \in \Omega_{n_0}$ .

Il existe  $n'_0$  tel que sur  $\Omega_{n_0}$   $f(x) = \sum_{p \leq n'_0} f_p(x)$ .

Soit  $M_{n_0}$  l'espace engendré par les points  $a_p$  ( $1 \leq p \leq n'_0$ ).

Soit  $y_n$  la projection orthogonale de  $x_n$  sur  $M_{n_0}$ .

Posons  $z_n = x_n - y_n$ .

Sur  $\Omega_{n_0}$   $f(x)$  est borné,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{grad } f(x_n) = 0$ .

On déduit du lemme 3-2 que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 0$ .

Il existe une suite  $\{y_n\}$  extraite de la suite  $y_n$  qui converge vers un point  $y_0$  ( $y_0 \in \bar{\Omega}_{n_0} \cap M_{n_0}$ ).

La suite  $\{x_{n,p}\}$  converge aussi vers  $y_0$ .

Lemme 3-4 : Il existe une approximation de  $f$  par une fonction  $g$  possédant les propriétés suivantes :

- Tous les points critiques de  $g$  sont non dégénérés.
- La fonction  $X = \frac{1}{g}$  remplit la condition C (pour la métrique  $ds_H^2$ ).

Considérons les ouverts  $\Omega_p$  définis au lemme 3-3

$$\Omega_p \subset \bar{\Omega}_p \subset \Omega_{p+1}$$

$$\text{Sur } \Omega_p, f(x) = \sum_{n \leq p} f_n(x)$$

Par induction, nous construisons la fonction  $g$ . Nous définissons une suite de fonctions  $\{g_n\}$  possédant les propriétés suivantes :

- (i)  $g_n$  est une fonction de Morse sur  $\Omega_n$
- (ii)  $\frac{1}{z^{n-1}} < g_n(x) < \frac{1}{z^{n+1}}$  si  $x \in \Omega_n - \Omega_{n-1}$
- (iii)  $g_n(x) = g_{n-1}(x)$  si  $x \in \Omega_{n-1}$ .

$g_{n+1}$  se déduit de  $g_n$  en ajoutant une fonction définie sur  $M_{n+1}$  qui est nulle sur  $\Omega_n \cap M_{n+1}$  et en dehors de  $\Omega_{n+2} \cap M_{n+1}$ .

( $M_{n+1}$  est l'espace de dimension finie engendré par les  $a_q$   $q \leq (n+1)$  tels que sur  $\Omega_{n+1}$   $f = \sum_{q \leq (n+1)} f_q$ ).

La fonction  $g = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$  est la fonction cherchée.

Lemme 3-5 : Il existe sur  $\Omega$  une métrique Riemannienne complète  $ds^2$  pour laquelle la fonction  $X = \frac{1}{g}$  vérifie la condition C .

Soit  $i$  le plongement fermé de  $\Omega$  dans  $H \times \mathbb{R}$

$$i(x) = (x, X(x))$$

Soit  $ds^2 = ds_H^2 + dX^2$  la métrique induite sur  $i(\Omega)$  par la métrique de  $H \times \mathbb{R}$  ;  $ds^2$  est la métrique cherchée.

#### 4 - Démonstration du théorème 4.

La démonstration est basée sur les propriétés des variétés Hilbertiennes munies d'une structure étalée (layer structure) [4] et [5].

Définition 4-1 : Soient  $X$  et  $Y$  deux variétés modelées sur  $H$  ; une application  $F$  de  $X$  dans  $Y$  est une  $\phi_0$ -application, si  $\forall x \in X$ ,  $DF(x)$  (différentielle de  $F$  au point  $x$ ) est un opérateur Fredholm d'indice 0 .

Lemme 4-1 : Il existe une  $\phi_0$ -application  $F$  de  $X$  dans  $H$  .

Soit  $\tau$  une trivialisation du fibré tangent à  $X$ ,  $TX$

$$TX \xrightarrow{\tau} X \times H$$

Soit  $\tau_x$  la réduction de  $\tau$  à la fibre  $T_x X$

$$\tau_x : T_x X \rightarrow H .$$

Tout point  $x$  admet un voisinage  $U_x$  sur lequel l'application exponentielle est définie.

$$\text{Soit } U_x \xrightarrow{\exp_x^{-1}} T_x X \xrightarrow{\tau_x} H$$

Soit  $\varepsilon_x$  l'application  $\varepsilon_x = \tau_x \circ \exp_x^{-1}$

$$D\varepsilon_x(x) = \text{identité.}$$

Donc dans un voisinage de  $x \in U'_x$ ,  $D\varepsilon_x$  est un opérateur inversible.

Soit  $\{U'_{p_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$  ce recouvrement dénombrable localement fini de  $X$  par des ouverts du type précédent.

Soit  $\{u_i\}$  une partition de l'unité subordonnée à un recouvrement :

Posons 
$$F(y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} u_i(y) \varepsilon_{p_i}(y)$$

$$DF(y) = \sum u_i(y) D\varepsilon_{p_i}(y) + \sum Du_i(y) \varepsilon_{p_i}(y)$$

Par des méthodes de scalopping, on peut définir les fonctions  $u_i$  de sorte que :

Image  $Du_i(y) =$  sous-espace de dimension finie.

L'espace des opérateurs Fredholm d'indice 0 est localement convexe,

donc, si le recouvrement a été choisi assez fin,  $DF(y)$  est un opérateur Fredholm d'indice 0.

Définition 4-2 : Soit  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une base orthonormale de  $E$ .

Soit  $E_n$  l'espace engendré par les vecteurs  $e_i$   $1 \leq i \leq n$ .

Soit  $E^n$  l'espace engendré par les vecteurs  $e_i$   $i > n$

un atlas fortement étalé associé à une  $\phi_0$ -application  $F$   $\{\phi_i, W_i\}$  sur  $X$  est un atlas dénombrable de  $X$  possédant les propriétés suivantes :

1°) le recouvrement de  $X$  par les ouverts  $W_i$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) est finiment étoilé.

2°)  $\forall i, \exists n(i)$  entier tel que  $\forall j$  ( $W_i \cap W_j \neq \emptyset$ )

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1}(x) = x + \alpha_{ij}(x) \quad \text{Image } \alpha_{ij} \subset E_{n(i)}$$

3°)  $F \circ \phi_i^{-1}(x) = x + \beta_i(x)$  Image  $\beta_i \subset E_{n(i)}$

4°)  $\forall n > n(i) \quad \phi_i^{-1}(z + E_n) = W_i \cap F^{-1}(z + E_n)$

5°)  $F/\bar{W}_i$  est propre.

Lemme 4-2 : Il existe un atlas fortement étalé pour toute  $\phi_0$ -application transversale à chaque  $E_n$ .

Quel que soit le point  $x$ , il existe un voisinage  $U_x$  de  $x$  et un entier  $n(U_x)$  tel que :

$$\forall n > n(U_x) \quad \forall y \in U_x \quad D_y F \text{ soit transversale à } E_n.$$

Posons  $m = n(x)$

Soit  $\pi^m$  la projection sur  $E^m$

$$D(\pi^m \circ F)(x) \text{ est surjective.}$$

Donc il existe une carte  $\theta_x$  :

$$\theta_x : U_x \longrightarrow E_m \times E^m$$

$\pi^m \circ F \circ \theta_x^{-1} = \pi^m$  dans domaine de définition.

Si  $U_x$  et  $U_y$  sont deux voisinages de  $x$  et  $y$  assez petits tels que  $U_x \cap U_y \neq \emptyset$

$$\theta_x \circ \theta_y^{-1} \text{ vérifie la condition 2.}$$

Les conditions 3, 4, 5 sont immédiatement vérifiées (pour 5, on remarque que  $F$  est localement propre).

Les hypothèses du lemme 4-2 étant vérifiées, posons  $X_n = F^{-1}(E_n)$ .

Lemme 4-3 : Pour tout atlas fortement étalé  $(\phi_i, W_i)$ , il existe une application exponentielle, pour laquelle chaque  $X_n$  est une sous-variété totalement géodésique. Dans chaque carte l'application exponentielle est de la forme :

$$\exp D_i \rightarrow \phi_i(W_i) \times \phi_i(W_i)$$

$(D_i$  est un ouvert de  $\phi_i(W_i) \times H$ )

$$\exp(x, v) = (x, x+v+\gamma_i(x, v))$$

$$\text{Image } \gamma_i(x, v) \subset E_{n(i)}$$

L'application exponentielle est définie comme solution d'une équation différentielle associée à un "spray"  $S$ .

Dans chaque carte  $(\phi_i, W_i)$  soit  $S_i$  le "spray trivial".

Soit  $u_i$  une partition de l'unité associée au recouvrement par les  $W_i$  :

Posons  $S = \sum_{j \in \mathbb{N}} u_j S_j$ , calculons dans la carte  $(\phi_i, W_i)$  la partie principale  $\rho$  de  $S$ .

Supposons  $W_i \cap W_j \neq \emptyset$ .

Soit  $\rho_{ij}(x, v) = (v, f_{ij}(x, v))$ , l'expression dans la carte  $(\phi_i, W_i)$  de la partie principale du "spray" trivial  $S_j$

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1} = \text{Id} + \alpha_{ij}$$

Le calcul explicite montre :

$$f_{ij}(x, v) = D^2 \alpha_{ij}(x)(v, v).$$

Dans la carte  $(\phi_i, W_i)$  :

$$\rho(x, v) = (v, f_i(x, v))$$

$$f_i(x, v) = \sum_{j \in \mathbb{N}} u_j D^2 \alpha_{ij}(x)(v, v)$$

Dans cette carte, l'application  $\exp$  est définie par :

$$\exp(x, v) = \sigma(1)$$

où  $\sigma(t)$  est solution de l'équation différentielle

$$(I) \begin{cases} \sigma''(t) = f_i(\sigma(t), \sigma'(t)) \\ \sigma(0) = x \\ \sigma'(0) = v \end{cases}$$

Image  $f_i \subset E_n(i)$ ,  $E_n(i)$  est de dimension finie, l'équation différentielle (I) se décompose en la somme directe de deux équations différentielles :

- . la première est définie sur un espace de dimension finie,
- . la deuxième est triviale.

Par intégration on démontre le lemme 4-3.

$X$  étant une variété modélée sur  $H$ , d'après le lemme 4-1, il existe une  $\phi_0$ -application  $F: X \rightarrow H$ . D'après un théorème de Smale [ ], il est possible de modifier les plongements des sous-espaces  $E_n$  dans  $E$ , de sorte que  $F$  soit transversale à tous les  $E_n$ .

Dans la suite, nous supposerons cette hypothèse vérifiée.

Posons :  $X_n = F^{-1}(E_n)$ .

On supposera dans toute la suite  $X$  munie de l'atlas étalé et de l'application exponentielle définis aux lemmes 4-2, et 4-3.

Proposition 4-1 : Il existe deux familles de voisinages tubulaires de  $(X_n)$ ,  $(Z'_n)$  et  $(Z_n)$  tels que :

$$(i) \quad Z'_{n-1} \subset Z'_n \subset \overline{Z'_n} \subset Z_n \subset Z_{n+1}$$

$$(ii) \quad X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z'_n$$

Nous allons construire les voisinages tubulaires  $Z'_n$  et  $Z_n$  à l'aide de l'application exponentielle définie précédemment.

$$\text{Soit } Y_n = \cup \{W_j; V_j \cap X_n\} \neq \emptyset$$

$$Y_n \subset Y_{n+1} \subset \dots$$

Il existe une application fibrée  $\sum$

$$\sum : Y \times E \rightarrow T(X)$$

telle que si  $\sum_n = \sum / Y_n \times E^n$

- (i)  $\sum_n$  est une injection fibrée
- (ii)  $\sum_n / Y_n \times E^{n+1} = \sum_{n+1} / Y_n \times E^{n+1}$
- (iii) Si  $W_j \subset Y_n$  :

$$T\phi_j \circ \sum_n W_j \times E^n \rightarrow \phi_j(W_j) \times E$$

est de la forme :  $(x, v) \rightsquigarrow (\phi_j(x), v + \beta_j(x) \cdot v)$

où Image  $\beta_j(x) \subset E_n(j)$

( $T\phi_j$  désigne l'application dérivée de  $\phi_j$ )

$$T\phi_j : T(W_j) \rightarrow \phi_j(W_j) \times E$$

L'application  $\sum$  est construite en recollant, grâce à une partition de l'unité les applications :  $\sum^j$  définies par :

$$\sum^j(x, v) = (x, (D\phi_j(x))^{-1}(v))$$

Lemme 4-4 : Il existe une fonction continue  $r : X \rightarrow \mathbb{R} (>0)$  et un recouvrement finiment étoilé  $(V_i)$  de  $X$  tel que :

a) exp est définie sur  $\sum (X \times rE)$  et est un difféomorphisme local.

b)  $\forall i, \exists j, (i)$  tel que :

$$\exp_x [\sum (x \times \rho E)] \subset W_{j'}(i) \quad \forall x \in V_i$$

L'application exponentielle définit un difféomorphisme local ; on définit d'abord la fonction  $r$ , constante strictement positive sur chaque  $W_j$  et on recolle les fonctions ainsi obtenues grâce à une partition de l'unité.

Nous définissons  $T_n : Y_n \times E^n \rightarrow X$   
par  $T_n(x, v) = \exp \circ \sum_n(x, v)$

un voisinage tubulaire de  $X_n$  dans  $X$  est un voisinage ouvert  $D_n \subset X_n \times E^n$  de la section nulle appliqué par  $T_n$  difféomorphiquement sur un voisinage ouvert de  $X_n$  dans  $X$ .

Il sera appelé de rayon  $\lambda$  si  $D_n = X_n \times \lambda E_n$  où  $\lambda$  est une fonction continue  $X \rightarrow \mathbb{R}(>0)$ .

Lemme 4-5 : Il existe une fonction continue  $\lambda : X \rightarrow \mathbb{R}(>0)$   
telle que chaque  $X_n$  a un voisinage tubulaire de rayon  $\lambda/X_n$ .

Soit  $x_0$  un point de  $V_i$ , dans la carte  $(\phi_{j'}(i), W_{j'}(i))$   
pour  $n \geq n(j'(i))$ , l'application  $T_n$

$$(T_n/V_i \times \lambda E^n \rightarrow X)$$

est d'après l'expression de l'application exponentielle trouvée au lemme 4-3, de la forme :

$$(x, v) \rightsquigarrow (x, x+v+\alpha_i(x, v))$$

où  $\text{Im } \alpha_i \subset E_{n_0}$  ( $n_0 = n(j'(i))$ ).

Soit  $D_1 \alpha_i$  la dérivée de  $\alpha_i$  par rapport à  $x$ .

$$D_1 \alpha_i(x_0, 0) = 0$$

Donc  $\exists d(x_0) > 0$  et  $U_{x_0}$  tel que :

$T_n / (U_{x_0} \cap X_n) \times d(x_0) E^n$  est injective.

(par indépendance linéaire, les espaces  $E^n$  et  $E_{n_0}$  étant en somme directe).

Les  $U_x$  ainsi construits forment un recouvrement de  $X$  en raffinant ce recouvrement il est possible de globaliser la propriété démontrée localement.

Soit  $U_m$  le voisinage tubulaire de  $X_m$  de rayon  $\frac{\lambda}{2}$ .  
Posons  $\tilde{Z}_n = \bigcap \{U_m ; m \geq n\}$ .

Lemme 4-6 :  $\tilde{Z}_n \subset \tilde{Z}_{n+1}$  et  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{Z}_n$ .

La démonstration se fait par l'absurde en construisant une suite de points  $\{x_n\}$  convergeant vers un point  $x$  et tels que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(x_n) = 0 = \lambda(x)$ .

Posons  $Z_n = \text{Int } \tilde{Z}_n$   $Z'_n = \text{Int } \tilde{Z}'_n$ , où  $\tilde{Z}'_n$  est construit de la même manière que  $\tilde{Z}_n$  en considérant des voisinages tubulaires de rayon  $\frac{\lambda}{4}$ .

On vérifie que les deux parallèles  $(Z_n)$  et  $(Z'_n)$  sont les familles cherchées.

Fin de la démonstration du théorème 4.

Nous supposons que la  $\phi_0$ -application  $F$  précédemment définie est propre et bornée.

Donc les  $X_n$  sont des sous-variétés compactes de  $X$ .

Comme il a été défini précédemment, soit :

$$D_n = T_n^{-1}(Z_n) \quad D'_n = T_n^{-1}(Z'_n)$$

$D_n$  est un voisinage de la section nulle de  $X_n \times \frac{\lambda}{2} E^n$ . Il existe un plongement ouvert  $\ell_n : D_n \rightarrow D_{n+1}$ , de la forme :

$\ell_n(x, v) = (\lambda_n(x, v), \pi^{n+1}(v))$  tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 X_n & \xrightarrow{S_n} & D_n & \xrightarrow{T_n} & Z_n \\
 \cap & & \downarrow \ell_n & & \cap \\
 X_{n+1} & \xrightarrow{S_{n+1}} & D_{n+1} & \xrightarrow{T_{n+1}} & Z_{n+1}
 \end{array}$$

Posons  $j_n(x, v) = (\lambda_n(x, T_{n+1}(v)), \pi^{n+1}(v))$

$j_n$  est un plongement ouvert  $D_n \rightarrow X_{n+1} \times E^{n+1}$ . Il existe une isotopie  $J_{n+1}$  de domaine propre, de  $X_{n+1} \times E^{n+1}$  qui transforme  $j_n$  en  $\ell_n$ .

Par induction, nous définissons le plongement ouvert  $y$  de  $X$  dans  $H$ .

Supposons que, pour l'entier  $n$ , il existe  $\bar{n}$  et un plongement ouvert :

$$g_n : X_n \times E^n \rightarrow E_{\bar{n}} \times E^{\bar{n}}$$

de la forme  $g_n(x, v) = (\bar{g}_n(x, v), \pi^{\bar{n}}(v))$ .

Soit  $V$  un ouvert de  $X_{n+1}$  tel que :

$$\pi_{n+1} \circ j_n(D'_n) \subset V \subset \pi_{n+1} \circ j_n(D_n)$$

$g_n$  est définie sur  $V$ .

Par application d'un théorème connu en dimension finie, il est possible d'étendre  $\bar{g}_n$  (donc  $g$ ) en un plongement :

$$h : X_{n+1} \rightarrow E$$

$$h/\pi_{n+1} \circ j_n(D'_n) = g_n \circ j_n^{-1}/\pi_{n+1} \circ j_n(D'_n).$$

L'application  $j_n$  diffère du plongement identique par une application dont l'image est située dans un sous-espace de dimension finie.

Par une construction en dimension finie, il existe un plongement ouvert  $\tilde{g} : X_{n+1} \times E_{n+1} \rightarrow E$  qui prolonge  $g_n \circ j_n^{-1}/j_n(D'_n)$ .

En appliquant l'isotopie  $J_{n+1}$  à  $X_{n+1} \times E_{n+1}$  nous obtenons l'application  $g_{n+1}$  cherchée.

Posons  $g = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$ ,  
la suite  $g_n$  se stabilise, et on vérifie que  $g$  est un plongement ouvert de  $X$  dans  $H$ .

---

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. BESSAGA : Every infinite dimensional Hilbert space is diffeomorphic with its unit sphere.  
Bull. Acad. Polon. Sci. XIV, 1 (1966) 27-31.
- [2] J. EELLS et J. Mac ALPIN : An approximate Morse-Sard theorem.  
Journal of Mathematics and Mecanics 17 (1968)  
p. 1055-1064.
- [3] J. EELLS et K.D. ELWORTHY : Open embrodding on certain Banach Manifolds.  
A Paraître.
- [4] K.D. ELWORTHY : Thesis..  
A paraître.
- [5] K.D. ELWORTHY :
- [6] N.H. KUIPER et DAN BURGHELEA : Hilbert manifolds.  
A paraître aux Annals of Mathematics.

- [7] N. MOULIS : Sur les variétés Hilbertiennes et les fonctions non dégénérées.  
Indagationes Mathematicae, vol.30, n°5 (1968)  
p.497-511.
- [8] R.S. PALAIS : Morse theory on Hilbert manifolds..  
Topology 2 (1963) p.299-340.
- [9] N.H. KUIPER et B. TERPSTRA : Differentiable closed embeddings of Banach manifolds.  
A paraître.
-

Exposé n° 6 : SINGULARITES DES HYPERSURFACES I  
(d'après Brieskorn et Milnor)

par Thomas BLOOM

Nous allons étudier la topologie d'une hypersurface au voisinage d'un point singulier isolé. Le premier exposé sera consacré à une discussion générale des problèmes et résultats. Le deuxième exposé sera consacré à l'étude de la topologie de certaines singularités spéciales - les singularités de Brieskorn.

I. Problèmes et Résultats.

1. Soit  $X$  un sous-ensemble analytique complexe d'un ouvert  $U \subset \mathbb{C}^n$ . Désignons par  $r(X)$  l'ensemble des points réguliers de  $X$ , c'est-à-dire les points où  $X$  est localement une sous-variété complexe. Désignons par  $s(X)$  l'ensemble des points singuliers de  $X$  ( $s(X) = X - r(X)$ ).

Soit  $p$  un point de  $X$  et  $S_t$  la sphère centrée en  $p$  de rayon  $t$ . Soit  $\Sigma_t = X \cap S_t$ .

Théorème 1.1 : Si  $t$  est assez petit et si  $s(X) = \{p\}$  alors  $\Sigma_t$  est une variété (différentiable).

Démonstration : C'est une conséquence immédiate du théorème de Whitney [13] qui dit

$$\lim_{q \rightarrow p} \left\{ \max_{v_q} (\cos(v_q, \vec{p}_q)) \right\} = 1$$

où  $q$  parcourt  $r(X)$ , et où  $v_q$  est un vecteur  $\neq 0$  dans l'espace tangent à  $X$  en  $q$ .

D'après ce théorème, l'intersection de  $X$  et  $S_t$  est transversale pour  $t$  assez petit.

Remarque : Le théorème de Whitney est valable sans la restriction que  $s(X)$  soit un point isolé.

Remarque : Le théorème 1.1 est, bien sûr, vrai mais sans intérêt si  $s(X)$  est vide.

Soit maintenant  $T$  la sphère de  $\mathbb{C}^n$  centrée en  $0$  et de rayon  $1$ . Posons  $\Sigma(t, X) = \{z \in T \mid t(z-p) \in \Sigma_t\}$  et considérons le type d'isotopie  $(T, \Sigma(t, X))$

Théorème 1.2 [1] : Si  $t_1$  et  $t_2$  sont assez petits,  $(T, \Sigma(t_1, X))$  et  $(T, \Sigma(t_2, X))$  ont le même type d'isotopie, dont nous dirons que c'est le type d'isotopie attaché au germe en  $p$  du sous-ensemble  $X$ .

Théorème 1.3 [1] : Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux germes de sous-ensembles analytiques complexes holomorphiquement équivalents. Alors les types d'isotopies qui leur sont attachés sont égaux.

Soit  $B_t$  la boule ouverte centrée en  $p$  de rayon  $t$ ,  $B_t = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z-p\| < t\}$  et soit  $W_t$  le cône complexe de base

$$\Sigma_t ; W_t = \{z \in B_t \mid \frac{t(z-p)}{\|z-p\|} \in \Sigma_t\} .$$

Théorème 1.4 [7] :  $(B_t, W_t)$  est homéomorphe à  $(B_t, X)$  par un homéomorphisme qui est un difféomorphisme en dehors de  $p$ .

En résumé, soit  $X$  un ensemble analytique complexe d'un ouvert  $U \subset \mathbb{C}^n$  avec  $s(X) = \{p\}$ . Soit  $S$  une sphère centrée en  $p$  de rayon assez petit et  $\Sigma = X \cap S$ . Alors

(a)  $\Sigma$  est une variété différentiable

(b) Le type d'isotopie  $(S, \mathcal{J})$  est indépendant du rayon de  $S$  et le choix de coordonnées au voisinage de  $p$ .

(c) Le type d'isotopie  $(S, \mathcal{J})$  détermine complètement la topologie de  $X$  au voisinage de  $p$ . En effet, un voisinage convenable de  $p$  dans  $X$  est homéomorphe au cône complexe de base  $\mathcal{J}$ . En particulier, si  $\mathcal{J}$  est une sphère (topologique),  $X$  sera une variété topologique au voisinage de  $p$ .

2. Nous allons aborder la question suivante : quand  $X$  est-il une variété ?

Notons d'abord que  $X$  n'est jamais une sous-variété de classe  $C^1$  (nous supposons toujours que  $s(X) = \{p\}$ ) d'après ce raisonnement de Gilmartin [3].

Proposition 2.1 : Soit  $Y$  un sous-ensemble analytique complexe d'un ouvert de  $\mathbb{C}^n$ . Si  $Y$  est une sous-variété de classe  $C^1$  il est une sous-variété analytique complexe.

Démonstration : Soit  $T_y$  l'espace tangent à  $Y$  (comme variété de classe  $C^1$ ) en  $y \in Y$ . Soit  $r'(Y) = \{y \in Y \mid T_y \text{ est un sous-espace complexe de } \mathbb{C}^n\}$ .  $r'(Y) \supset r(Y)$  donc, est dense dans  $Y$ . Mais la Grassmannienne complexe étant fermée dans la Grassmannienne réelle,  $r'(Y)$  est fermé dans  $Y$ . Donc  $r'(Y) = Y$  et  $Y$  est une variété analytique complexe (on peut la décrire comme graphe d'une fonction qui est analytique d'après le théorème classique de prolongement).

Le cas des ensembles analytiques réels est plus compliqué. Considérons l'exemple  $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 - y^4 = 0\}$ .  $V$  peut être considéré comme le lieu des zéros de la fonction  $x - y^{4/3}$ , et donc est une sous-variété de classe  $C^1$ . Mais  $V$  n'est pas une sous-variété analytique réelle.

On a néanmoins

Proposition 2.2 : Soit  $V$  un sous-ensemble analytique réel d'un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  qui est une sous-variété de classe  $C^\infty$ . Alors  $V$  est une sous-variété analytique réelle.

Démonstration : La proposition découle d'un théorème de Malgrange [6] qui dit :

Soit  $V$  un sous-ensemble analytique réel d'un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $p \in V$ . Etant donné un entier  $k$  et une fonction  $g$  de classe  $C^\infty$  qui s'annule sur  $V$ , il existe une fonction analytique réelle  $f$  s'annulant sur un voisinage de  $p$  dans  $V$  et telle que

$$\frac{\partial^I f}{\partial x^I}(p) = \frac{\partial^I g}{\partial x^I}(p) \quad \text{pour } |I| \leq k$$

On démontré la proposition 2.2 en appliquant le théorème ci-dessous dans le cas  $k=1$ .

3. Nous sommes amenés à étudier si  $X$  est une variété topologique. On sait que

(a) Si  $\dim X = 1$ ,  $\sum$  est une réunion de sphères en nombre égal au nombre de composantes irréductibles de  $X$  en  $p$ . Si  $X$  est irréductible elle est une variété topologique et  $\sum$  est une sphère. Cependant,  $X$  n'est jamais normal. (Nous supposons toujours que  $s(X) = \{p\}$ ).

Donc pour  $\dim X \geq 2$  on est amené à ne considérer que des singularités normales.

(b) Si  $\dim X = 2$  et  $X$  est normal alors, un résultat de Mumford [8] montre que  $X$  n'est jamais une variété et  $\sum$  n'est jamais une sphère.

(c) Si  $\dim X \geq 3$  on n'a pas des résultats complets.

D'abord, notons que  $\dim_{\mathbb{R}}(\sum) \geq 5$  donc, d'après le théorème "de Poincaré" pour les variétés différentiables, [12].  $\sum$  sera une sphère si ses groupes d'homologie à coefficients entiers sont ceux d'une sphère (de la même dimension) et si  $\sum$  est simplement connexe. On voit aussi que les conditions  $X$  est une variété en  $p$  et  $\sum$  est une sphère (topologique) sont équivalentes.

Bornons-nous au cas où  $X$  est une hypersurface.

Introduisons la notation suivante :

$$X = \{z \in U \subset \mathbb{C}^{n+1} \mid f(z) = 0\} .$$

$B$  (resp.  $\bar{B}$ ) désigne la boule ouverte (resp. fermée) du même rayon que  $S$  . .

Pour  $t \in \mathbb{C}$  ;  $X^t = \{z \in B \mid f(z) = t\} .$

$$\bar{X}^t = \{z \in \bar{B} \mid f(z) = t\}$$

$$\Sigma^t = \bar{X}^t \cap S .$$

Pour  $\eta$  positif

$$Y_\eta = \{t \in \mathbb{C} \mid 0 < |t| < \eta\}$$

$$E_\eta = \{z \in B \mid f(z) \in Y_\eta\}$$

$$= \bigcup_{t \in Y_\eta} X^t$$

Théorème 3.1 : Pour  $\eta$  assez petit et  $t \in Y_\eta$  on a :

- (a)  $E \rightarrow Y$  est un fibré différentiable (localement trivial).
- (b)  $X^t$  est parallélisable.
- (c)  $\Sigma^t$  est  $(n-2)$  connexe.
- (d)  $(S, \Sigma)$  et  $(S, \Sigma^t)$  ont le même type d'isotopie.
- (e)  $H_i(X^t, \mathbb{Z}) = 0$  sauf si  $i=0$  ou  $i=n$  . Pour  $i=n$  ,  $H_i(X^t, \mathbb{Z})$  est libre.

Remarque : Le théorème est vrai pour une hypersurface de  $n$ 'importe quelle dimension.

Corollaire 1 : Par (b) et (d),  $\Sigma$  est le bord d'une variété parallélisable.

Corollaire 2 : Dans le cas où  $\dim X \geq 3$  en appliquant (c), la dualité de Poincaré et la "conjecture" de Poincaré, on déduit que  $\Sigma$  est une sphère si  $H_{n-1}(\Sigma) = 0$ .

Nous allons citer un théorème de Brieskorn qui a été conjecturé par Milnor.  
Soit  $X_a = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n z_i^{a_i} = 0 \quad (n \geq 3)\}$ , où les  $a_i$  sont des entiers  $\geq 2$ . Alors  $s(X_a) = \{0\}$  et  $X_a$  est normal. Le théorème donne des conditions nécessaire et suffisante sur  $a = (a_0, \dots, a_n)$  pour que  $X_a$  soit une variété. D'abord nous introduisons le graphe  $\Gamma(a)$  de  $a$ . On considère  $n+1$  points  $p_0, \dots, p_n$  et on joint  $p_i, p_j$  si le plus grand diviseur en commun de  $a_i$  et  $a_j$  est  $\geq 2$ .

Théorème 3.2 [1,2] :  $X_a$  est une variété si une des deux conditions suivantes est satisfaite

- a)  $\Gamma(a)$  a deux points isolés.
- b)  $\Gamma(a)$  a un point isolé et une composante connexe ayant un nombre impair des points tels que  $(a_i, a_j) = 2$ .

La démonstration de ce théorème sera le but de l'exposé II

D'après le corollaire 3 du théorème 3.1 il suffit de démontrer que  $H_{n-1}(\Sigma(a)) = 0$ , où  $\Sigma(a) = X_a \cap S$ .

Quand  $\Sigma(a)$  est une sphère, la question de sa structure différentiable se pose. On sait

Théorème 3.3 [2] : Chaque sphère différentiable qui est le bord d'une variété parallélisable peut être réalisée comme un  $\Sigma(a)$  pour un choix de  $a$  convenable (le choix de  $a$  n'est pas unique). (voir aussi l'exposé de Hirzebruch, Séminaire Bourbaki 1966-67, Exp.314).

Remarque : Si  $\Sigma(a)$  est une sphère, elle sera toujours nouée dans  $S$ .

Il est intéressant de rappeler un résultat de Nash [9] :

Théorème 3.4 : Soit  $M$  une variété différentiable, connexe et compacte. Alors, il existe une application polynomiale  $\phi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  et une composante connexe  $K$  de  $\phi^{-1}(0)$  telle que  $\dim(K) = \dim \phi^{-1}(0)$ , et que  $M$  soit difféomorphe à  $K$ .

Donc, les singularités de Brieskorn donnent une expression explicite d'un tel  $\phi$  dans le cas des sphères différentiables qui sont les bords de variétés parallélisables.

---

Exposé n° 7 : SINGULARITES DES HYPERSURFACES II

par Thomas BLOOM

Cet exposé est consacré à une étude détaillée de la topologie d'une hypersurface. En particulier nous donnerons des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une singularité de Brieskorn soit une variété topologique. Cette question repose sur le calcul d'un groupe d'homologie [ ]. Dans le cas des singularités de Brieskorn, ce groupe d'homologie a été calculé par Pham [11] (voir aussi Milnor [7], par des méthodes topologiques qui utilisent la forme très simple des équations donnant les singularités. Par contre nous utiliserons la théorie des résidus : la méthode des résidus est utilisée en géométrie algébrique pour des problèmes analogues et, dans le cas de la géométrie analytique, peut éventuellement donner des résultats pour n'importe quelle hypersurface. Suivant la thèse de Brieskorn nous développerons les méthodes dans la plus grande généralité possible à notre connaissance et, à titre d'exemple, nous les appliquerons aux singularités de Brieskorn .

— 1. La Monodromie.

1.1. Soit  $D$  une hypersurface d'un ouvert  $U \subset \mathbb{C}^{n+1}$  et  $p \in D$  un point singulier isolé.

Lemme 1 : Supposons que  $f$  soit une fonction holomorphe qui engendre l'idéal de  $D$  dans  $U$ . Posons  $\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial z_i}$ .

Soit  $Z = \{z \in U \mid \partial_i f = 0 \quad i=0, \dots, n\}$ . Alors  $p$  est un point isolé de  $Z$ .

Démonstration : Soit  $Z'$  une composante irréductible de  $Z$ ,  $f$  est constante sur  $Z'$  et donc, si  $p \in Z'$ ,  $Z' \subset D$ . Mais, parce que  $f$  engendre l'idéal de  $D$ ,  $Z \cap D = \{p\}$ , et la démonstration est achevée.

1.2. Maintenant, soit  $S$  une sphère centrée en  $p$  de rayon assez petit et  $B$  la boule ouverte correspondante. Soit  $\Sigma = S \cap D$ . Nous posons  $X_t = \{z \in B \mid f(z) = t\}$ ,

$$E = \bigcup_{0 < |t| < r} X_t \quad \text{et} \quad X = E \cup (D \cap B)$$

où  $r$  est assez petit (I, 3.1)

D'après le lemme 1, ci-dessus, les fibres  $X_t$  sont des variétés. En fait, d'après Milnor [7] (aussi I.3.1) en désignant  $T = \{t \in \mathbb{C} \mid 0 < |t| < r\}$

(a)  $\pi : E \rightarrow T$  est un fibré (différentiablement localement trivial).

(b)  $H_n(X_t, \mathbb{Z})$  est libre de rang  $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}}{(\partial_i f)}$  où  $(\partial_i f)$  est l'idéal de  $\mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}$  engendré par les fonctions  $\partial_i f$ . Notons que  $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}}{(\partial_i f)}$  est fini par le Nullstellensatz et le lemme ci-dessus.

(c) Pour  $s$  un nombre réel  $0 < s < r$  on pose  $Y_s = \{t \in T \mid |t| = s\}$  et  $E_s = \pi^{-1}(Y_s)$ . Alors  $E_s$  est difféomorphe au complémentaire d'un voisinage fermé  $N$  de  $\Sigma$  dans  $S$  tel que  $\Sigma$  soit un rétracte de  $N$ . Alors par dualité d'Alexander et Poincaré :

$$H_{n-1}(\Sigma) \cong H^n(\Sigma) \cong H_n(S - \Sigma) \cong H_n(E_s) \cong H_n(E)$$

Les termes de la suite spectrale donnant l'homologie du fibré  $E$  sont

$$E_{p,q}^{\infty} = E_{p,q}^2 \quad E_{0,0}^2 = \mathbb{Z} \quad E_{1,0}^2 = \mathbb{Z}$$

$$E_{0,n}^2 = \text{coker}(h-1) \quad E_{1,n}^2 = \text{ker}(h-1)$$

$$E_{p,q}^2 = 0 \quad \text{autrement,}$$

où  $h : H_n(X_t, \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(X_t, \mathbb{Z})$  est l'action induite par un générateur du groupe fondamental de  $Y$ .  $h$  est appelé la monodromie. Donc  $H_{n-1}(\Sigma) = 0$  si et seulement si  $(h-1)$  est un isomorphisme.

1.3. Définition 1 : Le polynôme caractéristique  $\Delta(\lambda)$  est défini comme  $\det(h-1\lambda)$ .  $(h-1)$  est un isomorphisme  $\iff \Delta(1) = \pm 1$ .

Comme les groupes  $H_n(X_t, \mathbb{Z})$  sont libres, il suffit d'étudier l'action du groupe fondamental de la base sur les groupes de cohomologie  $H^n(X_t, \mathbb{C})$ . Les fibres  $X_t$  et la base  $Y$  sont des variétés de Stein ce qui nous permettra de calculer cette action par des moyens "analytiques".

- 2. L'équation différentielle associée à la monodromie.

2.1. Pour un espace topologique  $T$  nous désignerons par  $\mathbb{C}_T$  le faisceau constant sur  $T$  de fibre  $\mathbb{C}$ .

Le système de coefficients locaux  $R^n \pi_* (\mathbb{C}_E)$  provenant du fibré  $\pi : E \rightarrow Y$  n'est pas trivial. Le faisceau  $G^n = R^\lambda \pi_* (\mathbb{C}_E) \otimes_{\mathbb{C}_r} \mathcal{O}_r$  est un faisceau holomorphe, libre.

Définition 2 : Soit  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}_V$ -module sur une variété complexe  $V$ . Soit  $\Omega_V^1$  le  $\mathcal{O}_V$ -module de 1-formes holomorphes sur  $V$  : Une connexion,  $\rho$ , est une application  $\mathbb{C}_V$ -linéaire

$\mathcal{F} \xrightarrow{\rho} \Omega_V^1 \otimes_{\mathcal{O}_V} \mathcal{F}$  telle que,

pour  $f \in \mathcal{O}_V$ ,  $e \in \mathcal{F}$ ,  $\rho(fe) = f\rho(e) + df \otimes e$ , où

$d : \mathcal{O}_V \rightarrow \Omega_V^1$  est la déviation extérieure.

Définition 3 : Une section  $s$  de  $\mathcal{F}$  est appelée horizontale si  $\rho(s) = 0$

2.2. Maintenant, on constate qu'il existe sur  $G^n$  une connexion canonique  $\overline{\Delta}$ , la connexion de Gauss-Manin [4] dont les sections horizontales sont précisément  $R^n \pi_*(\mathcal{O}_E)$ .

Cette connexion peut être décrite facilement en coordonnées locales. Une section de  $G^n$  est représentée par une forme différentielle fermée  $\omega(z, t)dz$  qui est analytique en  $t$ .

$\overline{\Delta} : G^n \rightarrow \Omega_V^1 \otimes G^n$  est donnée par

$$\overline{\Delta}(\omega(z, t)dx) = \frac{\partial \omega(z, t)}{\partial t} dz \otimes dt$$

En composant avec l'application  $\Omega^1 \otimes G^n \rightarrow \mathcal{O}_Y \otimes G^n \simeq G^n$  donnée par  $f(t) dt \otimes 1 \mapsto f(t) \otimes 1$  nous obtenons une dérivation  $\nabla : G^n \rightarrow G^n$

2.3. Nous allons esquisser la méthode pour obtenir la monodromie connaissant l'action de  $\nabla$  sur une famille des sections qui engendrent  $G^n$ . Donc, supposons que  $\{\omega_i\}_{i=1, \dots, k}$  engendre  $G^n$  comme  $\mathcal{O}_Y$ -module et que

$$\nabla \omega_i = - \sum_j a_{ij}(t) \omega_j.$$

Alors pour une section  $\omega = \sum_i \phi_i \omega_i$  de  $G^n$ ,

$$\overline{\Delta}(\omega) = 0 \iff \sum_i \frac{d\phi_i}{dt} \omega_i - \sum_{i,j} \phi_i a_{ij} \omega_j = 0.$$

Donc, nous obtenons une équation différentielle

$$\frac{d\phi}{dt} = A\phi \quad \text{où } \phi = (\phi_1, \dots, \phi_k)$$

et où  $A = (a_{ij}(t))$  est une matrice holomorphe dans  $Y$ .

Si la solution de cette équation est de la forme  $S(t)t^M$ , où  $S(t)$  est une matrice holomorphe dans  $Y$  et  $M$  une matrice constante, alors  $e^{2\pi i M}$  est une matrice qui correspond à la monodromie parce que les sections horizontales de  $\overline{A}$  sont  $R^n \pi_*(\mathbb{C}_E)$ .

**2.4. Définition 4 :** Une famille de classes d'homologie  $\gamma_t \in H_n(X_t, \mathbb{C})$  pour  $t$  dans un ouvert  $U$  de  $Y$  est dite horizontale si, pour toute section horizontale  $\omega$  de  $G^n$  au-dessus de  $U$ , on a  $\frac{d\omega(\gamma_t)}{dt} = 0$ .

**Remarque 1 :** Si  $\pi^{-1}(U)$  est difféomorphe à un produit  $U \times X_t$  et si  $\gamma_t$  est une famille horizontale au-dessus de  $U$ , alors l'isomorphisme  $H_n(X_t, \mathbb{C}) \cong H_n(X_{t_0}, \mathbb{C})$  donnée par la structure de produit applique  $\gamma_t$  sur  $\gamma_{t_0}$ .

**Remarque 2 :** Si  $\omega$  est une section quelconque de  $G^n$  et  $\gamma_t$  une famille horizontale de classes d'homologie, alors,  $\nabla \omega(\gamma_t) = \frac{d\omega(\gamma_t)}{dt}$ .

### - 3. Le théorème des Résidus.

Nous allons rappeler le théorème des résidus et donner la méthode pour l'appliquer à notre problème.

3.1. Soit  $W$  une sous-variété complexe de codimension  $k$  d'une variété complexe  $V$ . La suite de cohomologie à supports

compacts donne :

$$H_c^p(V) \rightarrow H_c^p(W) \xrightarrow{\partial} H_c^{p+1}(V-W) \rightarrow H_c^{p+1}(V) \rightarrow \dots$$

Par dualité de Poincaré, on obtient :

$$H_{q+1}(V) \rightarrow H_{q-k+1}(W) \xrightarrow{\delta} H_q(V-W) \rightarrow H_q(V) \rightarrow \dots$$

D'où

$$H^q(V) \rightarrow H^q(V-W) \xrightarrow{r} H^{q-k+1}(W) \rightarrow H^{q+1}(V) \rightarrow \dots$$

Pour une variété complexe  $N$ , nous désignerons par  $\Omega_N^q$  le faisceau des  $q$ -formes holomorphes, et nous poserons  $\mathcal{H}^q(N) = \Gamma(N, \Omega_N^q)$ ,  $\mathcal{Z}^q(N) = \{\omega \in \mathcal{H}^q(N) \mid d\omega = 0\}$ .

Introduisons  $\mathcal{H}_0^q(V, W) = \{\omega \in \mathcal{H}^q(V-W) \mid \omega \text{ à un pôle d'ordre 1 le long de } W\}$ .

$$\mathcal{Z}_0^q(V-W) = \{\omega \in \mathcal{H}_0^q(V-W) \mid d\omega = 0\}.$$

Lorsque la codimension de  $W$  est 1, on définit l'application  $\text{res} : \mathcal{Z}_0^{q+1}(V, W) \rightarrow \mathcal{Z}^q(W)$  comme suit. Pour chaque point  $p \in W$ , il existe un voisinage  $U$  de  $p$  dans  $V$  et une fonction  $\alpha$  holomorphe dans  $U$  telle que  $\alpha$  engendre l'Idéal de  $W$  dans  $U$ . Alors, pour  $\omega \in \mathcal{Z}_0^{q+1}(V, W)$   $\omega|_U$  s'écrit sous la forme  $\omega|_U = \frac{d\alpha}{\alpha} \wedge \phi + \psi$  où  $\phi \in \mathcal{Z}_0^q(U)$  est indépendante du choix de  $\alpha$ . On définit

$$\text{res } \omega|_{U \cap W} = \phi|_W.$$

**3.2. Théorème 1 (Leray-Norguet [5,10]) :** Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_0^{q+1}(V, W) & \xrightarrow{2\pi i \text{ res}} & \mathbb{Z}^q(W) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^{q+1}(V, W) & \xrightarrow{r} & H^q(W, \mathbb{C}) \end{array}$$

(les flèches verticales proviennent du théorème de De Rham).

La formulation du théorème en termes d'homologie est :

pour  $\omega \in \mathbb{Z}_0^{q+1}(V, W)$ ,  $\gamma \in H_q(W)$ , on a

$$\int_{\delta\gamma} \omega = 2\pi i \int_{\gamma} \text{res } \omega$$

Remarque 3 : Si  $V$  est le plan complexe, et  $W$  un point, c'est la formule de Cauchy.

3.3. Reprenant maintenant les notations de la section 1, pour chaque  $t \in Y$ , soit  $\text{res}_t$  et  $r_t$  les applications définies ci-dessus pour la paire  $X, X_t$ . Soit  $\omega \in \mathcal{K}^{n+1}(X)$  et considérons  $\left[ \text{res}_t \frac{\omega}{f-t} \right]$  (le crochet désigne la classe de cohomologie représentée par la forme fermée).  $\left[ \text{res}_t \frac{\omega}{f-t} \right]$  est une section de  $G^n$  et on a

$$\text{Lemme 2 : } \forall \left[ \text{res}_t \frac{\omega}{f-t} \right] = \frac{1}{2\pi i} r_t \left[ \frac{\omega}{(f-t)^2} \right].$$

Démonstration : D'après la remarque 2(2.4), il suffit de démontrer que

$$\frac{d}{dt} \int_{\gamma_t} \text{res}_t \frac{\omega}{f-t} = \frac{r_t}{2\pi i} \left[ \frac{\omega}{(f-t)^2} \right] (\gamma_t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta\gamma_t} \frac{\omega}{(f-t)^2},$$

où  $\{\gamma_t\}$  est une famille horizontale des classes d'homologie.

Mais, d'après le théorème 1

$$\frac{d}{dt} \int_{\gamma_t} \text{res}_t \left( \frac{\omega}{f-t} \right) = \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dt} \int_{\delta\gamma_t} \frac{\omega}{(f-t)}$$

Pour tout  $t$  dans un voisinage assez petit de  $t_0$ ,  $\delta\gamma_t$  sera représenté par un cycle fixe dans  $X - X_t$  et donc en échangeant intégration et différentiation on a

$$\frac{d}{dt} \int_{\delta\gamma_t} \frac{\omega}{f-t} = \int_{\delta\gamma_t} \frac{\omega}{(f-t)^2}$$

3.4. Toute forme  $\frac{\omega}{(f-t)^2}$  est cohomologue dans  $X - X_t$  à une forme ayant un pôle d'ordre 1 le long de  $X_t$ , c'est-à-dire, un élément de  $\mathcal{H}_0^{n+1}(X, X_t)$ . Nous allons expliciter une telle forme.

Soit  $\mathfrak{J}$  l'idéal de  $\mathcal{O}_x$  engendré par  $\partial_i f$  ( $i=0, \dots, n$ ). L'application  $\mathcal{O}_x^{n+1} \rightarrow \mathfrak{J}$  donnée par  $(s_0, \dots, s_n) \mapsto \sum_{i=0}^n s_i \partial_i f$  est surjective. Par le Nullstellensatz il existe un entier  $k$  tel que  $f^k \in \Gamma(X, \mathfrak{J})$  et  $X$  étant une variété de Stein, donc l'application  $\Gamma(x, \mathcal{O}_x^{n+1}) \rightarrow \Gamma(X, \mathfrak{J})$  étant surjective, il existe des fonctions holomorphes  $h_0, \dots, h_n$  sur  $X$  telles que  $\sum_{i=0}^n h_i \partial_i f = f^k$ .

Lemme 3 : Soit  $g$  holomorphe sur  $X$ . Les formes suivantes sont cohomologues dans  $X - X_t$  :

$$\frac{g}{(f-t)^2} dz \sim \frac{1}{f-t} \left( -kt^{-1} g + t^{-k} \sum_{i=0}^n \frac{\partial(h_i g)}{\partial z_i} \right) dz \quad \text{où } dz = dz_0 \wedge \dots \wedge dz_n$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} 0 &\sim d \left( \frac{1}{(f-t)^2} \sum_{i=0}^n (-1)^i h_i g dz_0 \wedge \dots \wedge \widehat{dz}_i \wedge \dots \wedge dz_n \right) \\ &= \frac{g f^k}{(f-t)^2} dz_0 \wedge \dots \wedge dz_n - \frac{1}{(f-t)} \sum_{i=0}^n \frac{\partial(h_i g)}{\partial z_i} dz_0 \wedge \dots \wedge dz_n. \end{aligned}$$

Mais 
$$\frac{g f^k}{(f-t)^2} = \frac{g f^k}{(f-t)^2} + \frac{g(f^k - t^k)}{(f-t)^2} = \frac{g t^k}{(f-t)^2} + \frac{g(f^{k-1} + \dots + t^{k-1})}{f-t}$$

et 
$$\frac{g(f^{k-1} + \dots + t^{k-1})}{(f-t)} dz \sim \frac{kt^{k-1} g}{f-t} dz.$$

- 4. Les singularités de Brieskorn.

4.1. A titre d'exemple, considérons  $f(z) = z_0^{a_0} + \dots + z_n^{a_n}$  ( $a_i \geq 2$ )

Lemme 4 (démontré dans section 5) : Soit  $i$  un multi-indice  $i = (i_0, \dots, i_n)$  avec  $0 \leq i_k \leq a_k - 2$ . Soit  $\omega_i$  la section de  $G^n$  définie par

$$\omega_i = \left[ \text{res}_t \left( \frac{z^i dz}{f-t} \right) \right]. \text{ Alors les } \omega_i \text{ engendrent } G^n.$$

Remarques : Notons que d'après le résultat de Milnor [1,2(b)]  $\dim G^n = \dim H_n(X_t, \mathbb{C}) = \prod_{i=0}^n (a_i - 1)$  et donc les  $\omega_i$  sont indépendants.

On a  $f = \sum_{i=0}^n \frac{z_i}{a_i} \partial_i f$ . C'est-à-dire qu'on peut prendre  $h_i = \frac{z_i}{a_i}$  (3.4).

Donc, appliquant lemme 2(3.3) et lemme 3(3.4) nous obtenons

$\nabla \omega_i = \left( -1 + \frac{i_{k+1}}{a_k} \right) t^{-1} \omega_i$ . Utilisant le procédé de (2.3) on

obtient l'équation différentielle  $\frac{d\phi_i}{dt} = \left( 1 - \sum_k \frac{i_{k+1}}{a_k} \right) t^{-1} \phi_i$  qui

a pour solution :  $\phi(t) = t \left( \left( 1 - \sum_k \frac{i_{k+1}}{a_k} \right) \delta_{ij} \right)$ . Donc une matrice

qui donne la monodromie est  $e^{2\pi i \left( 1 - \sum_k \frac{i_{k+1}}{a_k} \right) \delta_{ij}}$  et le polynôme

caractéristique est  $\Delta_a(\lambda) = \prod_{0 < j < a} \left( \lambda - e^{2\pi i \sum_k \frac{j_k}{a_k}} \right)$

4.2.  $(h-1)$  est un isomorphisme si et seulement si  $\Delta_a(1) = \pm 1$  par 1.3.

Nous considérons un graphe  $\Gamma(a)$  construit avec  $(n+1)$  points  $p_0, \dots, p_n$ . On joint  $p_i$  et  $p_j$  si  $(a_i, a_j) \geq 2$

Pour une composante connexe  $K$  de  $\Gamma(a)$  on introduit la condition suivante.

(B) Le cardinal de  $K$  est impair et pour  $p_i, p_j \in K$  ( $i \neq j$ ) alors  $(a_i, a_j) = 2$  (En particulier si  $K$  satisfait à (B) et possède un point dont le  $a_i$  est impair, alors  $K$  est réduit à ce point. Le théorème sera une conséquence du

Théorème 2 :  $\Delta_a(1) = \pm 1$  précisément quand  $\Gamma(a)$  possède au moins deux composantes connexes ayant la propriété (B) (c'est la condition de I théorème 3.2).

Démonstration :  $\Delta_a(\lambda)$  est un polynôme à coefficients entiers ayant pour racines des racines d'unité. Alors

$$\Delta_a(\lambda) = \prod_v \theta_{d_v}(\lambda) \quad \text{où les } \theta_{d_v}(\lambda) \text{ sont des}$$

polynômes cyclotomiques.

Donc  $\theta_1(1) = 0$ ,  $\theta_m(1) = q$  si  $q$  est premier et

$\theta_d(1) = 1$  autrement.

Pour chaque composante connexe  $K$  de  $G_a$  on introduit le nombre  $v(K)$  des  $j = (j_k)$  tels que si  $p_k \in K$ , on ait

$$0 < j_k < a_k \quad \text{et} \quad e^{2\pi i \sum_k \frac{j_k}{a_k}} = 1.$$

Donc si un  $d_v$  vaut 1, tout  $v(K)$  est strictement positif. Si un  $d_v$  est une puissance d'un nombre premier, alors au plus un  $v(K)$  est nul.

Le théorème est maintenant une conséquence immédiate du lemme ci-dessous.

Lemme 5 :  $v(K) = 0$  si et seulement si  $K$  satisfait la condition (B).

Démonstration : Si  $K$  satisfait (B) alors évidemment  $v(K) = 0$  .  
Il faut démontrer que si  $K$  ne satisfait pas (B), alors  $v(K) > 0$  .

On suppose que  $K = \{p_0, \dots, p_r\}$   $r \geq 1$  . Soit  
 $[a_0, \dots, a_r] = q_1^{n_1} \dots q_s^{n_s}$  la décomposition en entiers premiers du  
 P.P.C.M. des  $a_k$  . Soit  $\alpha_k = \frac{[a_0, \dots, a_r]}{a_k}$  .

Nous considérons la congruence

$$\sum_{k=0}^r \alpha_k x_{ik} \equiv 0 \pmod{q_i^{n_i}}$$

Dans le cas où  $\alpha_k \not\equiv 0 \pmod{q_i^{n_i}}$  pour plus d'un  $\alpha_k$  , alors, pour  
 $q_i \neq 2$  il existe une solution  $(x_{i0}, \dots, x_{ir})$  telle que  
 $\alpha_k x_{ik} \not\equiv 0 \pmod{q_i^{n_i}}$  . Cela vaut aussi pour  $q_i = 2$  sauf dans le cas  
 suivant :  $\alpha_k \not\equiv 0 \pmod{2^{n_i}}$  pour un nombre impair des  $\alpha_k$  et pour tous  
 sauf un  $\alpha_k \equiv 0 \pmod{2^{n_i-1}}$  . Dans ce cas, par la propriété (B) , il

existe un  $k_0$  tel que  $\alpha_{k_0} x_{jk_0} \not\equiv 0 \pmod{q_j^{n_j}}$  pour un  $q_j \neq 2$  .

Alors on choisit  $x_{ik_0} \equiv 0 \pmod{2^i}$  et  $\alpha_k x_{ik} \not\equiv 0 \pmod{2^i}$  pour les autres

Maintenant, soit  $x_k = \sum_{i=1}^s x_{ik} q_1^{n_1}, \dots, q_i^{\hat{n}_i}, \dots, q_s^{n_s}$  . Alors

$(x_0, \dots, x_1)$  est une solution de la congruence ci-dessus pour  
 $i=1, \dots, s$  et par construction, pour chaque  $k$  il existe au

moins un  $i$  avec  $\alpha_k x_k \not\equiv 0 \pmod{q_i^{n_i}}$  et donc  $x_k \not\equiv 0 \pmod{a_k}$  .

Si  $x_k \equiv j_k \pmod{a_k}$  alors  $0 < j_k < a_k$  et

$$e^{2\pi i \sum_{k=0}^r j_k / a_k} = 1 \text{ . C'est-à-dire, } v(K) > 0 \text{ .}$$

- 5. Les générateurs de  $G^n$ .

5.1. Soit  $V$  une variété de Stein de dimension  $n+1$  et  $W$  une sous-variété de codimension 1. Soit  $h$  une fonction holomorphe sur  $V$  qui engendre l'idéal de  $W$ .

Lemme 6 : Si  $H^{n+1}(V, \mathbb{C}) = 0$ , alors

$$H^n(W, \mathbb{C}) \simeq \mathcal{K}^{n+1}(V) / \{h \mathcal{K}^{n+1}(V) + dh \wedge d \mathcal{K}^{n-1}(V)\}$$

Démonstration : Pour  $q$  un entier  $> 0$ , nous posons

$$\bar{\Omega}_W^q = \Omega_V^q \otimes_{\mathcal{O}_V} \mathcal{O}_W \quad \text{et} \quad \bar{\mathcal{K}}^q = r(W, \bar{\Omega}_W^q)$$

Donc  $\bar{\Omega}_W^1 = \Omega_W^1 \oplus \mathcal{N}_W$  où  $\mathcal{N}_W$  est le faisceau conormal à  $W$  dans  $V$ .  $h$  définit un isomorphisme  $\mathcal{N}_W \simeq \mathcal{O}_W$ .

Alors  $\bar{\Omega}_W^q = \Omega_W^q \oplus \Omega_W^{q-1} \wedge \mathcal{N}_W$ . L'application  $\bar{\Omega}_W^n \xrightarrow{\wedge dh} \bar{\Omega}_W^{n+1}$

(produit extérieur par  $dh$ ) est surjective, et son noyau est  $\Omega_W^{n-1} \wedge \mathcal{N}_W$ . Donc on a un isomorphisme de faisceaux cohérents sur  $W$ ;  $\Omega_W^n \simeq \bar{\Omega}_W^{n+1}$ , et on désigne par  $\tau : \bar{\mathcal{K}}^{n+1}(W) \rightarrow \mathcal{K}^n(W)$

l'isomorphisme correspondant. Soit  $\mu : \mathcal{K}_0^q(V, W) \rightarrow \mathcal{K}^q(V)$

l'isomorphisme multiplication par  $h$  et  $\rho$  la restriction

$\mathcal{K}^q(V) \rightarrow \bar{\mathcal{K}}^q(W)$ , qui est surjective. L'application

$\text{res} : \mathcal{K}_0^{n+1}(V, W) \rightarrow \mathcal{K}^n(W)$  est  $\tau \circ \rho^{n+1} \circ \mu^{n+1}$ .

Tenant compte des dimensions, on voit que dans le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}_0^{n+1}(V, W) & \xrightarrow{2\pi i \text{ res}} & \mathcal{K}^n(W) \\ \downarrow i & & \downarrow j \\ H^{n+1}(V-W, \mathbb{C}) & \xrightarrow{r} & H^n(W, \mathbb{C}) \end{array}$$

$r$  est un isomorphisme, et  $i$  et  $j$  sont surjectifs.

Nous allons calculer  $\ker i = \text{res}^{-1}(\ker j)$  en considérant le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{H}_0^{n+1}(V, W) & \xrightarrow{h} & \mathcal{H}^{n+1}(V) & \xrightarrow{\rho} & \bar{\mathcal{H}}^{n+1}(W) \\
 \uparrow \sigma & & \uparrow \wedge dh & & \downarrow \wedge dh \\
 & & \mathcal{H}^n(V) & \xrightarrow{\rho} & \bar{\mathcal{H}}^n(W) & \xrightarrow{j} & \mathcal{H}^n(W) \\
 & & \uparrow d & & & & \uparrow d \\
 \mathcal{H}_0^{n-1}(V, W) & \longrightarrow & \mathcal{H}^{n-1}(V) & \longrightarrow & \mathcal{H}^{n-1}(W)
 \end{array}$$

L'application  $\mathcal{H}^{n-1}(V) \rightarrow \mathcal{H}^{n-1}(W)$  est surjective parce que  $V$  est une variété de Stein. La flèche à gauche,  $\sigma$ , est donnée par  $\omega \mapsto d\omega \wedge dh$ .

$$\begin{aligned}
 \text{Maintenant } \ker(j) &= d(\mathcal{H}^{n-1}(W)) \implies \\
 \text{res}^{-1}(\ker j) &= \ker(\text{res}) + dh \wedge d\mathcal{H}_0^{n-1}(V, W) \\
 &= \mathcal{H}^{n+1}(V) + dh \wedge d\mathcal{H}_0^{n-1}(V, W)
 \end{aligned}$$

Puisque  $H^{n+1}(V, \mathbb{C}) = 0$ , on a  $\mathcal{H}^{n+1}(V) = d\mathcal{H}^n(V) \subset d\mathcal{H}_0^n(V, W)$  et donc  $\ker i \subset d\mathcal{H}_0^n(V, W)$ . Mais  $\ker i \supset d\mathcal{H}_0^n(V, W) \cap \mathcal{H}_0^{n+1}(V, W)$  et donc  $\ker i = d\mathcal{H}_0^n(V, W) \cap \mathcal{H}_0^{n+1}(V, W)$  qui est donc égal à  $\mathcal{H}^{n+1}(V) + dh \wedge d\mathcal{H}_0^{n-1}(V, W)$ .

$$\begin{aligned}
 \text{Maintenant, } H^n(W, \mathbb{C}) &\simeq H^{n+1}(V-W, \mathbb{C}) \\
 &\simeq \frac{\mathcal{H}_0^{n+1}(V, W)}{\ker i} = \frac{\mathcal{H}_0^{n+1}(V, W)}{\mathcal{H}^{n+1}(V) + dh \wedge d\mathcal{H}_0^{n-1}(V, W)}
 \end{aligned}$$

A l'aide de l'isomorphisme "Multiplication par  $h$ ", nous obtenons enfin

$$\frac{H^n(W, \mathbb{C}) \simeq \mathcal{H}^n(V)}{h \mathcal{H}^{n+1}(V) + dh \cap d\mathcal{H}^{n-1}(V)}$$



$\mathcal{H}^{n+1}(X)$  est équivalent à un élément de la forme

$$\left( \sum_{0 \leq i_k \leq q_k} c_i z^i \right) dz .$$

Donc les  $\omega_i$  du lemme 4(4.1) engendrent  $G^n$ .

---

#### REFERENCES

- [1] E. BRIESKORN - Habilitation, Bonn, 1968.
- [2] E. BRIESKORN - Beispiele zur Differentialtopologie von Singularitäten. Inv. Math. 2, 1-14 (1966).
- [3] M. GILMARTIN - Nondifferentiability of Retractions of  $C^n$  to Subvarieties. Proc. Am. Math. Soc. 16, p.1028 (1965).
- [4] N. KATZ and T. ODA - On the Differentiation of De Rham Cohomology Classes with Respect to Parameters. J. of Math. Kyoto U. 8, 199-213 (1968).
- [5] J. LERAY - Le Calcul Différentiel et Intégral sur une Variété Analytique Complexe. Bull. Soc. Math. France. 87, 81-180 (1959).
- [6] B. MALGRANGE - Sur les Fonctions Différentiables et les Ensembles Analytiques. Bull. Soc. Math. France. 91, 113-127 (1963).
- [7] J. MILNOR - The Topology of a Complex Hypersurface. Princeton University Press (à paraître).
- [8] D. MUMFORD - The Topology of Normal Singularities of an Algebraic Surface and a Criterion for Simplicity Publ. Inst. des Hautes Etudes Sci. n°9.
- [9] J. NASH - Real Algebraic Manifolds. Ann. of Math. 56, 405-421 (1952).

- [10] F. NORGUET - Sur la Théorie des Résidus. C.R. Acad. Sc. Paris, 248 p.2057 (1959).
- [11] F. PHAM - Formules de Picard-Lefschetz généralisées et Ramification des Intégrales. Bull. Soc. Math. de France 93, 333-367 (1965).
- [12] S. SMALE - Generalized Poincaré's Conjecture in Dimensions greater than Four. Ann. of Math. 74, 391-406 (1961).
- [13] H. WHITNEY - Tangents to an Analytic Variety. Ann. of Math. 81, 496-549 (1965).
-

Exposé n° 18 : UN THEOREME DE DUALITE POUR LA COHOMOLOGIE D'UN  
ESPACE ANALYTIQUE A VALEUR DANS UN FAISCEAU COHERENT.

I. Introduction

par Gabriel RUGET.

A. Le théorème de dualité de SERRE.

Soit  $X$  une variété analytique complexe de dimension  $n$ ,  
dénombrable à l'infini ; appelons  $\mathcal{O}$  le faisceau des germes  
de fonctions holomorphes sur  $X$ , et  $\Omega$  le faisceau des  
germes de formes différentielles holomorphes de degré  $n$   
sur  $X$ . Dans [3], SERRE explicite, pour tout entier  $p$ , et  
tout  $\mathcal{O}$ -module localement libre  $F$ , une topologie (de quo-  
tient de Fréchet) sur le groupe  $H^p(X, F)$ , et un accouplement

$$H^p(X, F) \times H_c^{n-p}(X, \underline{\text{Hom}}(F, \Omega)) \longrightarrow \mathbb{C}$$

(où l'indice  $c$  désigne la famille des compacts de  $X$ ) qui,  
lorsque les groupes  $H^p(X, F)$  et  $H^{p+1}(X, F)$  sont séparés,  
fait de  $H_c^{n-p}(X, \underline{\text{Hom}}(F, \Omega))$  le dual topologique de  $H^p(X, F)$ .  
La démonstration de SERRE s'étend [4] au cas où  $F$  est un  
quelconque  $\mathcal{O}$ -module cohérent (à condition de remplacer  
 $H_c^{n-p}(X, \underline{\text{Hom}}(F, \Omega))$  par  $\text{Ext}_c^{n-p}(X; F, \Omega)$ ), mais en utilisant des  
théorèmes difficiles (avec les notations de SCHWARTZ,  $\mathcal{E}$  est  
un  $\mathcal{O}$ -module plat,  $\mathcal{D}'_X$  est un  $\mathcal{O}_X$ -module injectif), puisque  
provenant de la division des distributions. Nous allons  
montrer, en suivant des idées de GROTHENDIECK transmises par  
MALGRANGE, que le théorème de dualité pour les faisceaux

cohérents sur les variétés analytiques est formellement beaucoup plus simple que cela (pour cette partie, voir aussi [5]), et qu'il peut même être généralisé aux espaces analytiques, à condition de remplacer  $\Omega$  par un complexe "dualisant" convenable, et les Ext par des Hyperext.

Démontrons d'abord l'élément de théorème de SERRE que nous utiliserons.

Lemme 1 : Si  $X$  est une variété de Stein,  $H_c^i(X, \Omega)$  est nul pour  $i \neq n$  ;  $\mathcal{O}(X)$  est un espace de Fréchet-Montel dont le dual est  $H_c^n(X, \Omega)$ .

Démonstration : Les complexes

$$0 \rightarrow \mathcal{E}^{0,0} \xrightarrow{d''} \dots \xrightarrow{d''} \mathcal{E}^{0,n} \rightarrow 0$$

et

$$0 \rightarrow \mathcal{D}^{n,0} \xrightarrow{d''} \dots \xrightarrow{d''} \mathcal{D}^{n,n} \rightarrow 0,$$

où  $\mathcal{E}^{i,j}$  (resp.  $\mathcal{D}^{i,j}$ ) désigne le faisceau des germes de formes différentielles de type  $i,j$  à coefficients  $C^\infty$  (resp. distributions), sont des résolutions fines de  $\mathcal{O}$  et  $\Omega$  respectivement. Le groupe  $H^p(X, \mathcal{O})$  (resp.  $H_c^{n-p}(X, \Omega)$ ) est donc le  $p+1$ <sup>ième</sup> groupe d'homologie (en partant de la gauche) du complexe

$$0 \rightarrow \mathcal{E}^{0,0}(X) \xrightarrow{D^1} \dots \xrightarrow{D^n} \mathcal{E}^{0,n}(X) \rightarrow 0$$

$$(\text{resp. } 0 \leftarrow \mathcal{E}^{n,n}(X) \xleftarrow{B^1} \dots \xleftarrow{B^n} \mathcal{E}^{n,0}(X) \leftarrow 0).$$

Il y a sur chaque  $\mathcal{E}^{i,j}(X)$  une topologie naturelle d'espace de Fréchet-Montel ; pour ces topologies, les applications  $D^p$  sont continues, et le second complexe n'est autre que le dual topologique du premier. Les séparés associés aux

groupes d'homologie des deux complexes (le second muni de la topologie forte) sont

$$\hat{H}^p(X, \mathcal{O}) = \ker D^{p+1} / \overline{\text{im } D^p} \quad , \quad \hat{H}_c^{n-p}(X, \Omega) = \ker B^p / \overline{\text{im } B^{p+1}} \quad .$$

On vérifie facilement qu'il existe une application linéaire surjective naturelle du second sur le dual topologique du premier ; on voit aussi que cette application est injective (si l'image de  $D^{p+1}$  n'est pas fermée, on utilise la semi-réflexivité de  $\mathcal{C}^{0,p}(X)$ ). Si  $X$  est de Stein, les  $H^i(X, \mathcal{O})$ ,  $1 \leq i \leq n$ , sont nuls ; donc, l'image de  $D^i$  est un Fréchet, et  $D^i$  est un homomorphisme sur son image ; alors, l'image de  $B^i$  est fermée et le lemme s'ensuit.

Nous aurions aussi bien pu obtenir une bijection de  $\mathcal{O}(X)$  sur le dual de  $H_c^n(X, \Omega)$  : appelons trace l'image de la fonction 1 (l'application trace de  $H_c^n(X, \Omega)$  dans  $\mathbb{C}$  correspond à une intégration). Soit  $F$  un  $\mathcal{O}$ -module. Le produit de composition pour les Ext

$$\text{Ext}^p(X, \mathcal{O}, F) \times \text{Ext}_c^{n-p}(X, F, \Omega) \longrightarrow \text{Ext}_c^n(X; \mathcal{O}, \Omega) = H_c^n(X, \Omega) \quad ,$$

suiivi de la trace, nous donne un accouplement canonique

$$(1) \quad H^p(X, F) \times \text{Ext}_c^{n-p}(X; F, \Omega) \longrightarrow \mathbb{C} \quad .$$

Lemme 2 : Si  $X$  est une variété de Stein, et si le  $\mathcal{O}$ -module  $F$  admet une résolution libre finie, les groupes  $\text{Ext}_c^i(X; F, \Omega)$  sont nuls pour  $i \neq n$ , et l'accouplement (1) induit un isomorphisme de  $\text{Ext}_c^n(X; F, \Omega)$  sur le dual topologique de  $H^0(X, F)$ .

Ceci résulte du lemme 1, par récurrence sur le minimum des longueurs des résolutions libres de  $F$ .

B. Un peu de vocabulaire d'algèbre homologique.

Les rappels qui vont suivre (§.1) étant vraiment squelettiques, nous conseillons au lecteur non averti du formalisme des catégories dérivées de consulter les premières pages de [2] par exemple.

1. Soit  $A$  une catégorie abélienne, et  $C(A)$  la catégorie des complexes bornés à gauche d'objets de  $A$  (différentielles de degré  $+1$ , morphismes de degré  $0$ ). Nous appellerons  $T$  l'automorphisme de  $C(A)$  consistant en la translation d'un cran à gauche des complexes, accompagnée du changement de signe de toutes les différentielles.

Un objet de  $C(A)$  sera dit acyclique si tous ses objets de cohomologie sont nuls. Soit  $u : X^\circ \rightarrow Y^\circ$  un morphisme de  $C(A)$ ; on dira que c'est un quasi-isomorphisme s'il induit un isomorphisme des objets de cohomologie de  $X^\circ$  sur ceux de  $Y^\circ$ ; dans ce cas, on dira encore que  $\xrightarrow{u} Y^\circ$  est une résolution de  $X^\circ$ . Le cylindre du morphisme  $u$  est le complexe

$T(X^\circ) + Y^\circ$ , muni de la différentielle  $\begin{pmatrix} T(d_X) & 0 \\ T(u) & d_Y \end{pmatrix}$ . Il est équivalent d'affirmer que  $u$  est un quasi-isomorphisme, ou que son cylindre est acyclique.

Si tout objet de  $A$  peut être plongé dans un objet injectif (on dit alors que  $A$  possède assez d'injectifs), tout objet de  $C(A)$  admet une résolution par un complexe borné à gauche d'objets injectifs (on remarque qu'une telle résolution est inversible à homotopie près).

Soient  $A$  et  $B$  deux catégories abéliennes ( $A$  possédant assez d'injectifs), et  $F$  un foncteur additif de  $A$  dans  $B$ . On peut alors caractériser axiomatiquement et construire une suite de foncteurs  $R^i F : C(A) \rightarrow B$  appelés dérivés à droite de  $F$  (les objets  $R^i F(X^\circ)$  "sont" les objets de cohomologie

de  $F(I^\circ)$ , où  $I^\circ$  est une quelconque résolution injective de  $X^\circ$ ). Deux morphismes homotopes de  $C(A)$  ont même image par  $R^i F$ , et de plus, ces foncteurs transforment les quasi-isomorphismes en isomorphismes. Un objet  $Z$  de  $A$  sera dit  $F$ -acyclique si, tous les  $R^i F(Z^\circ)$  sont nuls, où  $Z^\circ$  est le complexe dont la seule composante non nulle est la  $0^{\text{ième}}$ , égale à  $Z$ . Si  $X^\circ$  est un complexe acyclique d'objets  $F$ -acycliques,  $F(X^\circ)$  est acyclique; de même, si  $u$  est un quasi-isomorphisme entre deux complexes d'objets  $F$ -acycliques,  $F(u)$  est un quasi-isomorphisme. On peut calculer les  $R^i F(X^\circ)$  à l'aide d'une quelconque résolution de  $X^\circ$  par un complexe d'objets  $F$ -acycliques.

2. Soient maintenant  $M^\circ$  et  $N^\circ$  deux complexes d'espaces de Fréchet (à différentielles linéaires continues), et  $u$  un morphisme (linéaire continu de degré 0) de  $M^\circ$  dans  $N^\circ$ . On peut encore définir le cylindre de  $u$ , et il est équivalent que ce cylindre soit acyclique, ou que  $u$  soit un quasi-isomorphisme (au sens purement algébrique).

Lemme 3 : Si  $u$  est un quasi-isomorphisme algébrique, il est un quasi-isomorphisme topologique, c'est-à-dire qu'il induit des isomorphismes entre les espaces de cohomologie de  $M^\circ$  et  $N^\circ$ , munis de leurs topologies naturelles (qui ne sont pas nécessairement séparées).

Démonstration : Si  $H^i$  et  $K^i$  sont les espaces de cohomologie de  $M^\circ$  et  $N^\circ$  respectivement, il suffit de montrer que  $u$  transforme l'adhérence de 0 dans  $H^i$  en l'adhérence de 0 dans  $K^i$ . Soient  $Z^i$  et  $T^i$  les espaces de cycles de degré  $i$  de  $M^\circ$  et  $N^\circ$  respectivement; ce sont des espaces de Fréchet.

$$\begin{array}{ccc} Z^i & \xrightarrow{u} & T^i \\ b \uparrow & & \uparrow d \\ M^{i-1} & \xrightarrow{u} & N^{i-1} \end{array}$$

Prenons  $c \in \bar{d}(N^{i-1})$ ; nous voulons le relever, modulo un bord, en  $a \in \bar{b}(M^{i-1})$ . Soit  $c_n$  une suite dans  $N^{i-1}$  telle que  $c = \lim d(c_n)$ . L'application  $(u, d) : Z^i \oplus N^{i-1} \rightarrow T^i$  étant surjective,

la suite convergente  $d(c_n)$  se relève en une suite

convergente, soit  $d(c_n) = u(a_n) + d(c'_n)$ , avec  $a_n \rightarrow a$ , et  $c'_n \rightarrow c'$ . Puisque  $u(a_n)$  est un bord,  $a_n$  en est aussi un. Nous avons donc

$$a \in \bar{b}(M^{i-1}), \text{ et } c = u(a) + d(c').$$

Nous n'avons en fait utilisé de l'hypothèse "Fréchet" que le théorème du graphe fermé. Le lemme est donc vrai pour les complexes de duals de Fréchet-Schwartz.

Lemme 4 : Soit  $u$  un quasi-isomorphisme d'un complexe d'espaces de Fréchet dans un autre. Alors, le morphisme transposé est un quasi-isomorphisme.

En effet, le cylindre  $C^\circ$  de  $u$  est acyclique, les différentielles de  $C^\circ$  sont des homomorphismes, et le dual  $C^{*\circ}$  de  $C^\circ$  est acyclique.

#### C. Complexe dualisant d'un espace analytique.

Etant donné un espace analytique  $X$  dénombrable à l'infini, de dimension bornée, nous voulons construire un complexe  $K_X^\circ$  de  $\mathcal{O}_X$ -modules tel que, pour tout  $\mathcal{O}_X$ -module cohérent  $F$ , et pour tout entier  $p$ , nous puissions définir une topologie canonique sur  $H^p(X, F)$  et sur  $\text{Ext}_c^{-p}(X; F, K_X^\circ)$  et un accouplement entre ces espaces qui induise une bijection <sup>(1)</sup> du séparé de l'un sur le dual topologique du séparé de l'autre, le tout devant redonner, si  $X$  est lisse, les résultats rappelés au §.A (modulo la substitution, si  $X$  est de dimension  $n$ , de  $\text{Ext}_c^{-p}(X; F, \tilde{\Omega})$  à  $\text{Ext}_c^{n-p}(X; F, \Omega)$ , où  $\tilde{\Omega}$  est le complexe  $T^n \Omega$ ).

Une solution à ce problème est de construire

1°) Pour toute variété  $V$ , une résolution  $K_V^\circ$  de  $\Omega_V$  telle que, pour tout entier  $p$  et tout point  $x$  de  $V$ ,  $K_{V,x}^p$  soit

---

(1) en fait un isomorphisme.

un  $\mathcal{O}_{V,x}$ -module injectif.

2°) Pour tout plongement  $f$  d'une variété  $V$  dans une autre  $W$ , un isomorphisme canonique de complexes de  $\mathcal{O}_V$ -modules

$$\bar{f} : K_V^\circ \approx \underline{\text{Hom}}(W; f_* \mathcal{O}_V, K_W^\circ)$$

Nous décrirons dans l'exposé suivant une façon de faire.

Nous allons maintenant, supposant que nous disposons des  $K_V^\circ$  et des  $\bar{f}$ , construire  $K_X^\circ$ .

Soit  $U$  un ouvert de  $X$ , réalisé comme sous-ensemble analytique d'une variété  $V$ . Le complexe  $K_U^\circ = \underline{\text{Hom}}(V; \bar{\sigma}_U, K_V^\circ)$  (où  $\bar{\sigma}_U$  désigne l'image directe de  $\mathcal{O}_U$  par la réalisation), considéré comme  $\mathcal{O}_U$ -module, ne dépend pas de la réalisation de  $U$ , d'après la functorialité des  $\bar{f}$ . En recouvrant  $X$  par des ouverts "réalisables", nous obtenons donc, par recollement, un complexe de  $\mathcal{O}_X$ -modules que nous notons  $K_X^\circ$ .

Lemme 5 : Soient en  $U$  un ouvert de  $X$ , et  $F$  un  $\mathcal{O}_U$ -module. Supposons que  $U$  soit réalisable comme sous-ensemble analytique d'une variété de Stein  $V$ , et que, dans une telle réalisation, le faisceau  $\bar{F}$  admette une résolution libre finie. Alors, les groupes  $\text{Ext}_c^i(U; F, K_U^\circ)$  sont nuls pour  $i \neq 0$ , et  $\text{Ext}_c^0(U; F, K_U^\circ)$  est canoniquement isomorphe au dual topologique de  $H^0(U, F)$ .

Démonstration :  $H^0(U, F)$  est "égal" à  $H^0(V, \bar{F})$ , dont le dual topologique est, d'après le lemme 2,  $\text{Ext}_c^0(V; \bar{F}, \tilde{\Omega}_V)$ . Il reste à trouver, pour tout  $i$ , un isomorphisme canonique de  $\text{Ext}_c^i(V; \bar{F}, \tilde{\Omega}_V)$  sur  $\text{Ext}_c^i(U; F, K_U^\circ)$ . Soit  $I^\circ$  une résolution de  $K_V^\circ$  (ou aussi bien de  $\tilde{\Omega}_V$ ) fine à fibres injectives (par exemple la résolution "canonique"). On vérifie facilement que le complexe de  $\mathcal{O}_U$ -modules  $\underline{\text{Hom}}(V; \bar{\sigma}_U, I^\circ)$  est alors fin à fibres injectives. Pour démontrer que ce complexe est une résolution de  $\underline{\text{Hom}}(V; \bar{\sigma}_U, K_V^\circ) = K_U^\circ$ , il

suffit de voir que tous les faisceaux  $K_V^i$  et  $I^i$  sont  $\underline{\text{Hom}}(V; \bar{\mathcal{O}}_U, \cdot)$ -acycliques : propriété qui tient à la cohérence de  $\bar{\mathcal{O}}_U$  et à l'injectivité des fibres de ces faisceaux ( $\underline{\text{Ext}}(V; \bar{\mathcal{O}}_U, \cdot)$  commute avec le passage aux fibres). Montrons maintenant que les  $I^P$  sont  $\text{Hom}_c(V; \bar{F}, \cdot)$ -acycliques : nous venons d'expliquer pourquoi ils sont  $\underline{\text{Hom}}(V; \bar{F}, \cdot)$ -acycliques ; de plus, le faisceau  $\underline{\text{Hom}}(V; \bar{F}, I^P)$  est fin, donc  $\Gamma_c$ -acyclique. Il résulte alors de la suite spectrale donnant les dérivés d'un composé de deux foncteurs que  $I^P$  est  $\Gamma_c \underline{\text{Hom}}(V; \bar{F}, \cdot)$ -acyclique. De même, les  $\underline{\text{Hom}}(V; \bar{\mathcal{O}}_U, I^P)$  sont  $\text{Hom}_c(U; F, \cdot)$ -acycliques. Ainsi, les  $\text{Ext}_c^i(V; \bar{F}, \tilde{\Omega}_V)$  sont les groupes d'homologie du complexe

$$\text{Hom}_c(V; \bar{F}, I^\circ)$$

tandis que les  $\text{Ext}_c^i(U; F, K_U^\circ)$  sont les groupes d'homologie du complexe

$$\text{Hom}_c(U; F, \underline{\text{Hom}}(V; \bar{\mathcal{O}}_U, I^\circ)) .$$

Or, ces deux complexes sont évidemment isomorphes.

#### D. Démonstration du théorème de dualité.

Soit  $X$  un espace analytique dénombrable à l'infini de dimension bornée, et  $F$  un faisceau cohérent de  $\mathcal{O}_X$ -modules. On peut trouver des recouvrements dénombrables localement finis arbitrairement fins de  $X$  par des ouverts vérifiant chacun, relativement au faisceau  $F$ , les hypothèses du lemme 5. Soit  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  un tel recouvrement. Les  $U_i$  étant de Stein, le théorème de Leray, joint au théorème B, nous dit que les groupes  $H^i(X, F)$  sont les groupes de cohomologie du complexe

$$(2) \quad C^\circ(\mathcal{U}, H^0(\mathcal{U}, F)) ,$$

qui est un complexe d'espaces de Fréchet-Schwartz. Nous avons ainsi muni les  $H^i(X, F)$  de topologies, indépendantes du recouvrement  $\mathcal{U}$  choisi, d'après le lemme 3. Le dual topologique du complexe de cochaînes (2) est, d'après le lemme 5, canoniquement isomorphe au complexe de chaînes finies

$$(3) \quad C_0(\mathcal{U}, \text{Ext}_c^0(\mathcal{U}, F, K_X^\circ)) ,$$

où les  $\text{Ext}_c$  sont reliés par les flèches d'agrandissement évidentes (prolongement par zéro). Pour interpréter l'homologie de ce complexe, considérons une résolution injective  $L^\circ$  de  $K_X^\circ$ , et le double complexe

$$(4) \quad C_i(\mathcal{U}, \text{Hom}_c(\mathcal{U}, F, L^j)) .$$

Si nous calculons l'hyperhomologie de (4) en dérivant d'abord par rapport à  $j$ , nous trouvons l'homologie de (3) (la suite spectrale est dégénérée, d'après le lemme 5). Dérivons d'abord par rapport à  $i$ :  $L^j$  étant injectif, le faisceau  $\underline{\text{Hom}}(X; F, L^j)$  est flasque, donc  $c$ -mou, la deuxième suite spectrale de (4) est aussi dégénérée [1], et son hyperhomologie se réduit à l'homologie de  $\text{Hom}_c(X; F, L^j)$ , c'est-à-dire aux  $\text{Ext}_c^j(X; F, K_X^\circ)$ . D'après les lemmes 3 et 4, nous avons ainsi obtenu des topologies canoniques sur les  $\text{Ext}_c^p(X; F, K_X^\circ)$  et des accouplements des mêmes avec les  $H^{-p}(X, F)$  (le signe provient de ce que le complexe simple associé à (4) est gradué par  $j-i$ ), accouplements qui mettent en dualité les séparés associés.

---

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BREDON - Sheaf Theory. McGraw Hill. 1967. p.176.
  - [2] HARTSHORNE - Residues and Duality. Lecture Notes. Springer. 1966.
  - [3] MALGRANGE - Systèmes différentiels à coefficients constants. Séminaire Bourbaki t.15. 1962-1963, n°246.
  - [4] SERRE - Un théorème de dualité. Comm. Math. Helv.29. 1955, p.9.
  - [5] SUOMINEN - Duality for coherent sheaves on analytic manifolds Ann. Acad. Scient. Fennicae. Helsinki 1968.
-

Exposé n° 19 : UN THEOREME DE DUALITE.

II. Le complexe dualisant (1)

par Gabriel RUGET.

Dans une première partie, nous allons construire, étant donné un germe en un point  $x$  de variété analytique complexe  $V$ , ce qui sera la fibre en  $x$  du complexe  $K_V^\circ$ . A tout germe de plongement du germe  $(V,x)$  dans un autre germe  $(W,y)$ , nous associerons un isomorphisme  $\bar{f}_x$  de  $K_{V,x}^\circ$  sur  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_{W,y}}(\mathcal{O}_{V,x}, K_{W,y}^\circ)$  (lequel, en vertu de la cohérence de  $f_*\mathcal{O}_V$ , ne sera autre que la fibre en  $x$  de  $\underline{\text{Hom}}(W; f_*\mathcal{O}_V, K_W^\circ)$ ), fonctoriellement par rapport à la composition des plongements. Dans une deuxième partie, nous indiquerons quelle topologie sur  $\bigcup_{x \in V} K_{V,x}^\circ$  en fait le complexe de faisceaux  $K_V^\circ$ . Nous laissons au lecteur le soin de se convaincre qu'étant donné un plongement  $f$  de  $V$  dans  $W$ , les isomorphismes  $\bar{f}_x$  se recollent en un isomorphisme  $\bar{f}$  de  $K_V^\circ$  sur  $\underline{\text{Hom}}(W; f_*\mathcal{O}_V, K_W^\circ)$ .

Le lecteur non averti pourra consulter les paragraphes 1 et 2 du chapitre IV de [RD], qui sera presque notre unique référence.

A. La fibre du complexe dualisant.

Etant donné un germe de variété  $(V,x)$ , appelons  $A$  l'anneau  $\mathcal{O}_{V,x}$ ;  $\text{Spec } A$  désigne le spectre premier de  $A$ , et  $\tilde{A}$  le faisceau canonique sur  $\text{Spec } A$ . Si  $Z^p$  désigne

---

(1) Une première version de ce qui suit a été écrite en avril 1968 par J.P. Ramis.

l'ensemble des points de  $\text{Spec } A$  de codimension  $\geq p$ , le complexe de Cousin de  $\tilde{A}$  relatif à la filtration  $Z^p$  de  $\text{Spec } A$  est le complexe

$$0 \rightarrow \underline{H}_{Z^0/Z^1}^0(\tilde{A}) \rightarrow \underline{H}_{Z^1/Z^2}^1(\tilde{A}) \rightarrow \dots \rightarrow 0$$

L'espace topologique  $\text{Spec } A$  est noethérien ; ses fermés irréductibles ont un unique point générique ; les  $Z^p$  sont stables par spécialisation, et tout point de  $Z^p - Z^{p+1}$  est maximal dans  $Z^p$ . Il en résulte des isomorphismes fonctoriels canoniques [RD motif F page 225]

$$(1) \quad \underline{H}_{Z^p/Z^{p+1}}^q(\tilde{A}) \xrightarrow{\cong} \prod_{\alpha \in Z^p - Z^{p+1}} i_\alpha(H_\alpha^q(\tilde{A})),$$

où  $H_\alpha^q(\tilde{A})$  est la fibre en  $\alpha$  de  $\underline{H}_\alpha^q(\tilde{A})$ , et où  $i_\alpha(G)$  désigne le faisceau qui est constant et égal à  $G$  le long de  $\bar{\alpha}$ , et qui est nul ailleurs.

Les  $\underline{H}_{Z^p/Z^{p+1}}^q(\tilde{A})$  sont nuls pour  $q > p$  [RD lemme, 2.4 page 235], et aussi pour  $q < p$  (car l'anneau  $A$  est Cohen-Macaulay). L'application naturelle  $\tilde{A} \rightarrow \underline{H}_{Z^0/Z^1}^0(\tilde{A})$  fait donc [RD proposition 2.6 page 237] du complexe de Cousin une résolution flasque de  $\tilde{A}$ . Il en résulte que le complexe

$$0 \rightarrow \Gamma \underline{H}_{Z^0/Z^1}^0(\tilde{A}) \rightarrow \Gamma \underline{H}_{Z^0/Z^2}^1(\tilde{A}) \rightarrow \dots$$

est une résolution de  $\Gamma \tilde{A} = A$  (les  $H^i(\text{Spec } A, \tilde{A})$  sont nuls pour  $i > 0$ ). Appelons-le  $L_{V, X}^0$ , et vérifions que c'est un complexe de  $A$ -modules injectifs : d'après (1), et la noethérianité de  $A$ , il suffit de vérifier que les  $H_\alpha^p(\tilde{A})$ , pour  $\alpha \in Z^p - Z^{p+1}$ , sont  $A$ -injectifs. Or, on sait [LC 4.13] que  $H_\alpha^p(\tilde{A})$  est une enveloppe injective sur  $A_\alpha$  du corps résiduel  $k(\alpha)$ .

Par exemple, si  $V$  est une courbe, on obtient comme résolution de  $\mathcal{O}_x$  le complexe  $0 \rightarrow \mathcal{O}_x \rightarrow \mathcal{O}_x/\mathcal{O}_x \rightarrow 0$ , où  $\mathcal{O}_x$  est l'anneau des germes de fonctions méromorphes en  $x$ .

Nous poserons  $K_{V,x}^\circ = T^{\dim V}(L_{V,x}^\circ \otimes_A \Omega_{V,x})$ .

Lorsque  $f$  est un isomorphisme local d'un germe  $(V,x)$  sur un autre  $(W,y)$ , l'isomorphisme  $\bar{f}_x$  va de soi. Envisageons maintenant le cas où  $(V,x)$  est un germe de sous-variété de codimension 1 de  $(W,y)$ : posons  $A = \mathcal{O}_{V,x}$ ,  $B = \mathcal{O}_{W,y}$ , et choisissons une fonction régulière  $z \in B$  définissant  $V$ . La suite

$$0 \rightarrow B \xrightarrow{\mu_z} B \xrightarrow{\rho} A \rightarrow 0,$$

où  $\mu_z$  désigne la multiplication par  $z$  et  $\rho$  la restriction, est exacte;  $\rho$  induit une application  $r$  qui fait de  $\text{Spec } A$  un sous-espace de  $\text{Spec } B$ . La suite de faisceaux sur  $\text{Spec } B$

$$0 \rightarrow \tilde{B} \xrightarrow{\mu_z} \tilde{B} \xrightarrow{\rho} r_* \tilde{A} \rightarrow 0$$

est exacte. Nous appellerons  $Z^p$  (resp.  $T^p$ ) l'ensemble des points de codimension  $\geq p$  de  $\text{Spec } A$  (resp.  $\text{Spec } B$ ); la trace de  $T^p$  sur  $\text{Spec } A$  est égale à  $Z^{p-1}$ . Nous voulons interpréter  $\text{Hom}_B(A, \Gamma_{T^p/T^{p+1}}^{\text{HP}}(\tilde{B})) = \bigsqcup_{\beta \in T^p - T^{p+1}} \text{Hom}_B(A, H_\beta^p(\tilde{B}))$ .

Or,  $\text{Hom}_B(A, H_\beta^p(\tilde{B}))$  s'identifie au noyau de  $\mu_z : H_\beta^p(\tilde{B}) \rightarrow H_\beta^p(\tilde{B})$  morphisme qui s'insère dans la suite exacte

$$H_\beta^{p-1}(\tilde{B}) \rightarrow H_\beta^{p-1}(r_* \tilde{A}) \xrightarrow{\partial_z} H_\beta^p(\tilde{B}) \xrightarrow{\mu_z} H_\beta^p(\tilde{B}),$$

dont le premier groupe est nul ( $B$  est Cohen-Macaulay). Si  $\beta \notin \text{Spec } A$ ,  $\text{Spec } B - \text{Spec } A$  est un voisinage de  $\beta$ , sur lequel le faisceau  $r_* \tilde{A}$  est nul; donc,

$H_{\beta}^{p-1}(r_* \tilde{A}) = \text{Hom}_B(A, H_{\beta}^p(\tilde{B})) = 0$  . Si  $\beta \in \text{Spec } A$  ,  
 $H_{\beta}^{p-1}(\text{Spec } B; r_* \tilde{A})$  s'identifie à  $H_{\beta}^{p-1}(\text{Spec } A; \tilde{A})$  , et ainsi  

$$\frac{\text{Hom}_B(A, H_{\beta}^p(\tilde{B}))}{\beta \in \mathbb{T}^p - \mathbb{T}^{p+1}} \text{ s'identifie à } \frac{H_{\alpha}^{p-1}(\tilde{A})}{\alpha \in \mathbb{Z}^{p-1} - \mathbb{Z}^p}$$
  
 $= \Gamma_{\mathbb{Z}^{p-1}/\mathbb{Z}^p} H_{\mathbb{Z}^{p-1}/\mathbb{Z}^p}^{p-1}(\tilde{A})$  : nous avons obtenu un isomorphisme  $\Delta_z$  (dépendant du générateur choisi  $z$  de l'idéal de  $V$ )

$$\Delta_z : L_{V,x}^{p-1} \approx \text{Hom}_B(A, L_{W,y}^p) .$$

Nous allons en déduire un isomorphisme

$$\bar{f} : K_{V,x}^q \approx \text{Hom}_B(A, K_{W,y}^q) .$$

Il suffit pour cela d'indiquer qu'il y a un isomorphisme naturel

$$\omega_z : \Omega_{V,x} \otimes_A \text{Hom}_B(A, L_{W,y}^p) \approx \text{Hom}_B(A, \Omega_{W,y} \otimes_B L_{W,y}^p) ,$$

provenant du  $\rho$ -morphisme de  $\Omega_{W,y}$  dans  $\Omega_{V,x}$  qui, à la forme différentielle holomorphe  $\psi_{\wedge} dz$  , associe la forme  $\psi|_V$  ; on vérifie enfin que l'isomorphisme  $\bar{f}$  décrit ne dépend pas de  $z$  (si on remplace  $z$  par  $z'$  ,  $\Delta$  est multiplié par  $(z/z')|_V$  , et  $\omega^{-1}$  aussi (1) .

## B. Le recollement des fibres.

Etant donné un ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}^n$  , nous allons indiquer comment on recolle les complexes  $L_{U,x}^{\circ}$  aux divers points  $x \in U$  pour obtenir une résolution à fibres injectives  $L_U^{\circ}$  de  $\mathcal{O}_U$  . Etant donnée ensuite une variété  $V$  , pour obtenir  $K_V^{\circ}$  , il ne restera plus qu'à recoller des  $L_U^{\circ}$  , puis à tensoriser

---

(1) On a pu reconnaître le formalisme de la construction d'une classe-résidu.

au-dessus de  $\mathcal{O}_V$  par  $\Omega_V$ .

Si  $K$  est un polydisque de  $\mathbb{C}^n$ , d'intérieur non vide, l'anneau  $\mathcal{O}_K$  des germes de fonctions holomorphes au voisinage de  $K$  est noethérien [1]. Nous appellerons  $L_K^\circ$  le complexe des sections globales (sur  $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ ) du complexe de Cousin de  $\tilde{\mathcal{O}}_K$ . Si  $K'$  est un sous-polydisque de  $K$ , d'intérieur non vide, et si  $\rho_{KK'}$  est l'application restriction de  $\mathcal{O}_K$  dans  $\mathcal{O}_{K'}$ , il existe un  $\rho_{KK'}$ -morphisme naturel de  $L_K^\circ$  dans  $L_{K'}^\circ$ ; de même, si  $x \in K$ , il y a un  $\rho_{Kx}$ -morphisme naturel de  $L_K^\circ$  dans  $L_x^\circ$ , et nous nous bornerons en fait à construire ce dernier. Nous montrerons ensuite que le morphisme

$\varinjlim_{x \in K} L_K^\circ \rightarrow L_x^\circ$  est un isomorphisme. Il sera alors loisible de décider qu'une section au-dessus d'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}^n$  de la collection des  $L_x^\circ (x \in U)$  est continue si, localement, elle est induite par un élément d'un  $L_K^\circ$ .

### 1. Le morphisme $L_K^\circ \rightarrow L_x^\circ$ .

D'après (1), nous devons construire un  $\rho_{Kx}$ -morphisme  $\lambda$  de  $H_\alpha^p(\tilde{\mathcal{O}}_K)$  (où  $\alpha$  est un point de codimension  $p$  de  $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ ) dans  $\prod_{\beta \in Z^p - Z^{p+1}} H_\beta^p(\tilde{A})$  (les notations sont celles de la première partie). Nous n'explicitons que le cas  $p \geq 2$ ; pour  $p = 0, 1$ , la situation est semblable. Interprétons d'abord  $H_\alpha^p(\tilde{\mathcal{O}}_K)$ : c'est la limite, pour les ouverts  $U$  (on peut se limiter aux ouverts affines) contenant  $\alpha$ , de  $H_\alpha^p(U; \tilde{\mathcal{O}}_K)$ . Lorsque  $U$  est affine,  $H^i(U; \tilde{\mathcal{O}}_K)$  est nul pour  $i \geq 1$ , et  $H_\alpha^p(U; \tilde{\mathcal{O}}_K)$  s'identifie à  $H^{p-1}(U-\bar{\alpha}; \tilde{\mathcal{O}}_K)$ . Soit alors  $f_j$  un système de générateurs de l'idéal de  $\mathcal{O}_K$  correspondant à l'ouvert  $U-\bar{\alpha}$ , les  $D_{f_j}$  forment un recouvrement affine de  $U-\bar{\alpha}$ , et, d'après le théorème de Leray, un élément de

$H^{p-1}(U-\bar{\alpha}; \mathcal{O}_K)$  s'identifie à un cocycle (modulo les cobords) de ce recouvrement. Soit  $\{g_{j_1 \dots j_p}\}$  un cocycle associé à  $c \in H^p_\alpha(\tilde{\mathcal{O}}_K)$  ( $g_{j_1 \dots j_p} \in (f_{j_1} \circ f_{j_2} \circ \dots \circ f_{j_p})^{-1} \mathcal{O}_K$ ).

La restriction  $\rho_{Kx}$  induit une application continue  $R$  du  $\text{Spec } A$  dans  $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ , et la contre-image par  $R$  d'un ouvert affine est évidemment un ouvert affine. Si l'idéal  $\rho_{Kx}(\alpha)$  est  $A$ , nous posons  $\lambda|_{H^p_\alpha(\tilde{\mathcal{O}}_K)} = 0$ . Sinon, les idéaux premiers minimaux contenant  $\rho_{Kx}(\alpha)$  sont en nombre fini, et tous de la même codimension que  $\alpha$  (1); appelons-les  $\beta_1 \dots \beta_s$ . Les  $D_\rho(f_{j_i})$  forment un recouvrement affine de  $R^{-1}(U) - \bar{\beta}_1 \cup \dots \cup \bar{\beta}_s$ , et les  $\rho(g_{j_1 \dots j_p})$  déterminent un cocycle de ce recouvrement, donc un élément  $\gamma$  de  $H^{p-1}(R^{-1}(U) - \bigcup_{i=1}^s \bar{\beta}_i; \tilde{A})$ . On peut trouver un voisinage affine  $V$  de  $\beta_q$  contenu dans  $R^{-1}(U) - \bigcup_{i \neq q} \bar{\beta}_i$ . La restriction de  $\gamma$  à  $H^{p-1}(V - \bar{\beta}_q; \tilde{A})$  induit un élément de  $H^p_{\beta_q}(V; \tilde{A})$ , donc un élément  $\gamma_q$  de  $H^p_{\beta_q}(\tilde{A})$ . Nous poserons  $\lambda(c) = \sum_{q=1}^s \gamma_q$ .

2. Surjectivité de  $\varinjlim_{x \in K} L_K^\circ \rightarrow L_x^\circ$ .

Soient  $\beta \in Z^p - Z^{p+1}$ , et  $\gamma \in H^p_{\beta}(\tilde{A})$ . Il existe un polydisque  $K$  voisinage de  $x$  tel que  $\rho_{Kx} \rho_{Kx}^{-1}(\beta)$  soit égal à  $\beta$  (ce qui entraîne  $\rho_{K'x} \rho_{K'x}^{-1}(\beta) = \beta$  pour tout  $K' \subset K$  et en particulier que les idéaux premiers  $\alpha_{K'} = \rho_{K'x}^{-1}(\beta)$  ont même

---

(1) En effet, les idéaux premiers de  $\mathcal{O}_K$  correspondent aux germes irréductibles au voisinage de  $K^K$  de sous-ensembles analytiques de  $\mathbb{C}^n$ .

codimension  $p$ ). Choisissons des générateurs  $\phi_1 \dots \phi_m$  de  $\alpha_K$ , et soit  $\psi$  un élément de  $A-\beta$  ( $\psi$  détermine un voisinage affine de  $\beta$ ). Supposons toujours  $p \geq 2$  :  $\gamma$  est représenté par un cocycle  $\{\gamma_{i_1 \dots i_p}\}$  ( $\gamma_{i_1 \dots i_p} \in (\psi \rho_{KX}(\phi_{i_1}) \dots \rho_{KX}(\phi_{i_p}))^{-1}A$ ).

Choisissons un polydisque  $L \subset K$  tel que  $\psi$  se relève dans  $\sigma_L$  et tel que les  $\gamma_{i_1 \dots i_p}$  se relèvent en  $\bar{\gamma}_{i_1 \dots i_p} \in (\bar{\psi} \rho_{KL}(\phi_{i_1}) \dots \rho_{KL}(\phi_{i_p}))^{-1} \sigma_L$  formant un cocycle.

Ce cocycle induit un élément  $\bar{\gamma}$  de  $H_{\alpha_L}^p(\tilde{\sigma}_L)$  tel que  $\lambda(\bar{\gamma}) = \gamma$ .

L'injectivité du passage à la limite inductive se démontre de façon semblable.

---

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] FRISCH : Points de platitude d'un morphisme d'espaces analytiques complexes ; Inventiones Math. vol.4, 1967, page 118.
- [LC] GROTHENDIECK : Local cohomology ; Lecture Notes, Springer 1967.
- [RD] HARTSHORNE : Residues and duality ; Lecture Notes, Springer 1966.



