PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

82-02

SEMINAIRE D'ANALYSE HARMONIQUE

1980-1981

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 ORSAY France

Code matière AMS (1980) :	42B20	-	42B30
	46E35		
	42A20	-	42A24
	42A24		
	42A28	-	43A22
	43A46		
	41A21	-	42C05
	41A21	-	42C05
	42A05	-	42A75

PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

82-02

SEMINAIRE D'ANALYSE HARMONIQUE

1980-1981

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 ORSAY France

REARRANGEES DECROISSANTES DES FONCTIONS BMO.

Aline BONAMI

Notre but est de reprendre une partie de l'article de C. Bennett, R. de Vore et R. Sharpley paru aux Annals of Mathematics, 113 (1981), 601-611, en l'exposant de façon légèrement différente. L'idée de base de la rédaction suivante, qui a été suggérée par J.-P. Kahane au cours d'un exposé oral, est d'utiliser le fait bien connu pour les variables aléatoires que $E(|X-a|)$ est minimum lorsque a est médiane de la loi de X. Pour que f soit dans $BMO(\mathbf{R})$, il est suffisant qu'il existe, pour tout intervalle I, une constante a_I telle que :

$$\sup_I \frac{1}{|I|}\int_I |f - a_I|\,dx < \infty .$$

C'est aussi une condition nécessaire lorsque a_I est médiane de la loi de f sur I.

1. FONCTIONS BMO DECROISSANTES.

Soit g une fonction positive décroissante continue à droite sur $]0\,,\infty[$. Pour une telle fonction, l'appartenance à $BMO(]0,\infty[)$ se traduit de façon très simple.

LEMME 1. <u>La fonction</u> g <u>appartient à</u> $BMO(]0,\infty[)$ <u>si et seulement si</u> :

$$(*)\qquad \sup_{t>0}\left\{\frac{1}{t}\int_0^t g(s)\,ds - g(t)\right\} < \infty .$$

Montrons que (*) entraîne que g appartient à $BMO(]0,\infty[)$: si I est un intervalle de la forme $]0,t[$, le contrôle de

$$\frac{1}{|I|}\int_I |g(s) - g_I|\,ds$$

est directement donné par (*). Si $I =]t, t+h[$, on utilise le fait que la fonction $g(s) - g(t+h)$ est décroissante pour majorer sa moyenne sur I par sa moyenne sur $]0,t+h[$.

La réciproque est encore plus simple à montrer. Soit g dans $BMO(]0,\infty[)$. Comme g est décroissante, $\int_0^t |g(s) - a|\,ds$ est minimum lorsque $a = g(\frac{t}{2})$ (c'est là la propriété de la médiane ; le lecteur pourra s'en convaincre par un dessein). Donc

$$\frac{1}{t}\int_0^t |g(s) - g(\tfrac{t}{2})|\,ds \leq \frac{1}{t}\int_0^t |g(s) - g_{[0,t]}|\,ds \leq \|g\|_{BMO} ,$$

et $$\frac{1}{t}\int_0^t \{g(s) - g(t)\}\,ds \leq \frac{2}{2t}\int_0^{2t} |g(s) - g_{[0,2t]}|\,ds \leq 2\|g\|_{BMO}.$$

2. REARRANGEES DECROISSANTES DES FONCTIONS BMO.

Comme $BMO(\mathbf{R}^n)$ contient des fonctions telles que $\log|x|$ dont la réarrangée décroissante est partout infinie, il s'agit uniquement de caractériser les réarrangées décroissantes des fonctions BMO d'un cube de $\mathbf{R}^n$. Soit donc $Q =]0,1[^n$ le cube unité.

Si g est une fonction décroissante à support dans $]0,1[$ satisfaisant à la condition (*), nous avons vu que g appartient à $BMO(]0,1[)$. La fonction $f(x) = g(x_1)$, qui admet g comme réarrangée décroissante, appartient à $BMO(Q)$. La réciproque est aussi vraie :

THEOREME 1. <u>La réarrangée décroissante d'une fonction de</u> $BMO(Q)$ <u>appartient à</u> $BMO(]0,1[)$.

Soit $f \in BMO(Q)$. Puisque $|f|$ appartient à $BMO(Q)$, on peut toujours supposer f positive. Il s'agit de montrer l'existence d'une constante C telle que

$$\int_0^t \left\{f^*(s) - f^*(t)\right\} ds \leq Ct.$$

Comme le membre de gauche est majoré par $\|f\|_1 = \int_0^1 f^*(s)\, ds$, il suffit de le montrer pour $t < \frac{1}{2}$. Il suffit également de s'intéresser aux valeurs de t où f^* est strictement décroissante, c'est-à-dire aux valeurs de t pour lesquelles $]0,t[= \left\{f^* > f^*(t)\right\}$. Dans ce cas, comme f et f^* sont équimesurables,

$$\int_0^t \left\{f^*(s) - f^*(t)\right\} ds = \int_F \left\{f(x) - f^*(t)\right\} dx$$

si F désigne $\left\{x \in Q \;;\; f(x) > f^*(t)\right\}$. On sait que

$$|F| = \left|\left\{f^* > f^*(t)\right\}\right| = t.$$

Soit (Q_j) une suite de cubes dyadiques disjoints contenant F (à un ensemble de mesure nulle près). Essayons de majorer :

$$\int_{F \cap Q_j} \left\{f(x) - f^*(t)\right\} dx.$$

Si $f_{Q_j} \leq f^*(t)$, $f(x) - f^*(t) \leq f(x) - f_{Q_j}$ sur F et cette intégrale est directement majorée par $\|f\|_{BMO} |Q_j|$. Supposons donc $f_{Q_j} \geq f^*(t)$. Alors, si $f^*(t)$ est supérieur à la médiane de f sur Q_j, comme la fonction

$$a \longrightarrow \int_{Q_j} |f(x) - a|\, dx$$

est croissante après la médiane :

$$\int_{Q_j} |f(x) - f^*(t)|\, dx \leq \int_{Q_j} |f(x) - f_{Q_j}|\, dx \leq \|f\|_{BMO} |Q_j|.$$

Mais demander à $f^*(t)$ d'être supérieur à la médiane de f restreinte à Q_j, c'est exactement demander que :

$$\left|\left\{f > f^*(t)\right\} \cap Q_j\right| = |F \cap Q_j| < \frac{1}{2} |Q_j|.$$

Supposons cette inégalité satisfaite pour tous j. Alors :

$$\int_0^t \left\{f^*(s) - f^*(t)\right\} ds \leq \|f\|_{BMO} \Sigma |Q_j|.$$

La démonstration est terminée si l'on montre qu'on peut choisir les Q_j tels que $\Sigma |Q_j| \leq C |F|$. Le fait que de tels Q_j existent lorsque $|F| < \frac{1}{2}$ découle du lemme suivant.

LEMME 2. Soit $F \subset Q$, $|F| < \frac{1}{2}$. Il existe des cubes dyadiques disjoints (Q_j) tels que $|F \cap (\cup Q_j)| = |F|$, et

$$2^{-n-1} |Q_j| < |Q_j \cap F| < \frac{1}{2} |Q_j| .$$

Il suffit de prendre les cubes Q_j dyadiques maximaux qui contiennent un cube dyadique de la génération suivante, Q', pour lequel $|F \cap Q'| \geq \frac{1}{2} |Q'|$. Comme, pour presque tout $x \in F$, $\frac{|F \cap Q'|}{|Q'|}$ tend vers 1 quand Q' tend vers x, presque tout $x \in F$ est contenu dans un tel cube et donc dans $\cup Q_j$.

Remarquons que nous n'avons utilisé que des cubes dyadiques, et le même résultat vaut donc pour les fonctions de BMO dyadique. L'ensemble des réarrangées décroissantes de BMO(Q) (quelle que soit la dimension) et l'ensemble des réarrangées décroissantes de BMO dyadique sont donc identiques. En fait la démonstration ci-dessus est pratiquement une démonstration probabiliste, et l'on peut démontrer de la même manière que :

THEOREME 2. Soit $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espace de probabilité de $\mathfrak{F}_n$ une famille croissante de tribus telle que $\vee \mathfrak{F}_n = \mathfrak{F}$ qui satisfait à la propriété de régularité suivante :

$$E[f | \mathfrak{F}_n] \leq C E[f | \mathfrak{F}_{n-1}]$$

quelle que soit la fonction f positive. Alors les réarrangées décroissantes des martingales BMO appartiennent à l'espace $BMO(]0,1[)$.

Nous nous contenterons de donner dans ce cadre l'équivalent du lemme 2, le reste de la démonstration se déduisant de la démonstration précédente de façon standard.

LEMME 3. Soit $F \subset \Omega$, $P(F) < \frac{1}{2}$. Il existe un temps d'arrêt σ tel que $F \subset \{\sigma < \infty\}$ et $P(\sigma < \infty) \leq 2CP(F < \infty)$, et tel que, sur $\{\sigma < \infty\}$, $E\left[1_F \mid \mathcal{F}_\sigma\right] < \frac{1}{2}$.

Il suffit de choisir $\tau = \inf\{n \,;\, E(1_F \mid \mathcal{F}_n) \geq \frac{1}{2}\}$, puis $\sigma = \inf\{n \,;\, E\left[1_{\{\tau=n+1\}} \mid \mathcal{F}_n\right] \geq \frac{1}{C}\}$. Comme

$$1_{\{\tau=n+1\}} \leq C\, E\left[1_{\tau=n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] .$$

F, qui est contenu dans $\{\tau < \infty\}$, est bien contenu dans $\{\sigma < \infty\}$. Par définition $1_{\sigma=n} \leq C\, E\left[1_{\tau=n+1} \mid \mathcal{F}_n\right]$, donc $P(\sigma < \infty) \leq CP(\tau < \infty) \leq 2CP(F)$. Enfin $\sigma < \tau$, donc $E(1_F \mid \mathcal{F}_\sigma) < \frac{1}{2}$.

REMARQUES. 1. L'idée que la réarrangée décroissante appartient à la même classe que la fonction se trouve dans l'article original de Muckenhoupt sur les inégalités à poids (Trans. Amer. Math. Soc. 165 (1972)) : il y démontre que si la fonction W appartient à la classe (A_p), sa réarrangée W_I^* sur l'intervalle I satisfait à l'inégalité

$$\int_0^t W_I^*(s)\, ds \leq C\, s\, W_I^*(t)$$

quel que soit $t \leq \frac{|I|}{20}$. Si f appartient à $BMO(]0,1[)$, il est bien connu que $e^{\lambda f}$ appartient à la classe (A_2) pour λ assez petit, et il résulte de l'inégalité précédente et de la concavité du logarithme que :

$$\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\, ds - f^*(t) \leq C$$

lorsque $t \leq \frac{1}{20}$. Mais l'inégalité pour $t > \frac{1}{20}$ est immédiate.

2. Il serait intéressant de rapprocher ces résultats des résultats de B. Davis sur le réarrangement des fonctions de H^1 (Trans. Amer. Math. Soc. 261 (1980), cf. aussi R. L. Long, Ann. Inst. H. Poincaré, XVII, no. 1 (1981) pour le cas des martingales régulières).

FONCTIONS QUI OPERENT SUR LES ESPACES DE SOBOLEV.

Gérard BOURDAUD

1. INTRODUCTION.

Soit E un ensemble d'applications à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit classiquement que $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ opère sur E si, quelle que soit $f \in E$, on a $F \circ f \in E$. Déterminer exactement la classe des fonctions qui opèrent sur E est souvent un problème délicat (qu'on pense, par exemple, au théorème de Katznelson sur l'algèbre $A(G)$ d'un groupe localement compact) ; aussi commence-t-on par poser la question : est-ce que toutes les fonctions "raisonnables" opèrent sur E ? Nous allons tenter d'y répondre dans le cas des espaces de Sobolev et de Besov sur $\mathbb{R}^n$. S'agissant d'un travail de synthèse - et non d'une note originale - il nous paraît logique de donner des preuves succintes, y compris pour les énoncés classiques.

2. RESULTATS SIMPLIFIES SUR LES SOBOLEV CLASSIQUES.

Pour $p \in [1,+\infty]$ et $s \in \mathbb{N}$, nous notons L^p_s l'espace des $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ telles que $f^{(\alpha)} \in L^p$ pour $|\alpha| \leq s$. Sauf pour $p = +\infty$, L^p_s ne contient pas les constantes ; seules les fonctions qui s'annulent à l'origine peuvent donc opérer sur L^p_s : l'hypothèse $F(0) = 0$ sera sous-entendue dans tous les énoncés qui suivent. Afin de ne pas rentrer d'emblée dans des subtilités techniques, nous considérons comme "fonctions raisonnables" les fonctions C^∞ à support compact.

THEOREME. Les fonctions C^∞ à support compact opèrent sur L^p_s si l'entier s vérifie $s \geq \frac{n}{p}$ ou $s \leq 1 + \frac{1}{p}$; quand l'entier s appartient à l'intervalle $\left]1+\frac{1}{p}, \frac{n}{p}\right[$ les seules fonctions C^∞ qui opèrent sur L^p_s sont les fonctions $t \longrightarrow Ct$.

La première partie du théorème est plus ou moins classique ; la seconde est un résultat récent de Dahlberg [3]. Les démonstrations seront données au § 4, 5.

3. RESULTATS PRECISES SUR LES SOBOLEV INTERPOLES.

En introduisant les interpolés réels ou complexes des espaces L^p_s, nous allons donner une version du théorème valable (dans une large mesure) pour $s \in \mathbb{R}^+$; parallèlement, les hypothèses à faire sur F seront précisées.

Pour définir les "interpolés complexes", on part de la représentation $z \longrightarrow (I - \Delta)^z$ du groupe additif des complexes dans le groupe des automorphismes de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et l'on définit H^s_p comme l'image de L^p par l'automorphisme $(I-\Delta)^{-\frac{s}{2}}$; du théorème des multiplicateurs de Marcinkiewicz, il résulte que $H^s_p = L^p_s$ quand $s \in \mathbb{N}$ et $p \in \left]1,+\infty\right[$ (voir par exemple le chapitre 6 de [1]). Dans la suite du texte, nous utilisons la seule notation L^p_s, valable pour $s \in \mathbb{N}$, si $p = 1$, et pour $s \in \mathbb{R}^+$, si $p \in \left]1,+\infty\right[$.

Si $f \in L^p$, le module de continuité en norme L^p de f est défini comme suit :

$$\omega_p(f\, , t) = \sup_{|y| \leq t} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+y) - f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} ;$$

on sait que $\lim\limits_{t \to 0} \omega_p(f,t) = 0$. On définira les espaces de Besov en imposant à $\omega_p(f,t)$ une vitesse de décroissance vers 0. Pour $\sigma \in \left]0,1\right[$ et $q \in [1,+\infty]$, $\Lambda^p_{\sigma,q}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des $f \in L^p$ telles que $t \longrightarrow t^{-\sigma}\, \omega_p(f,t)$ appartienne à l'espace $L^q(\mathbb{R}^+, \frac{dt}{t})$; dans le cas $p = q = +\infty$ on retrouve l'espace de Hölder usuel, défini par la condition $|f(x+y) - f(x)| \leq C\, |y|^\sigma$. Quand s est un réel non entier on pose

$s = m + \sigma$ avec $m \in \mathbb{N}$ et $\sigma \in]0,1[$ et l'on définit $\Lambda^p_{s,q}$ comme l'espace des $f \in L^p_m$ telles que $f^{(\alpha)} \in \Lambda^p_{\sigma,q}$, pour $|\alpha| = m$.

Rappelons les relations d'inclusion entre les espaces de Sobolev et de Besov :

$\Lambda^p_{s,1} \subset \Lambda^p_{s,q} \subset \Lambda^p_{s,\infty}$ $(1 < q < \infty)$, $\Lambda^p_{s,1} \subset L^p_s \subset \Lambda^p_{s,\infty}$ $(1 < p < \infty,\ s \notin \mathbb{N})$,

$\Lambda^p_{s,\infty} \subset \Lambda^p_{t,1}$ $(s > t)$, $L^1_s \subset \Lambda^1_{t,1}$ $(s > t$, s entier).

Pour comprendre en quoi les espaces de Besov sont des "interpolés réels" à la Lions-Peetre entre les L^p_m, on se reportera au chapitre 6 de [1].

Voici maintenant les quatre énoncés qui précisent le théorème.

PROPOSITION 1. <u>Soit</u> $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ <u>telle que</u> $F' \in L^\infty(\mathbb{R})$ <u>et</u> $s \in [0,1]$; <u>alors</u> F <u>opère sur</u> L^p_s $(1 < p < \infty)$, $\Lambda^p_{s,q}$ $(p,q \in [1,+\infty],\ s \notin \mathbb{N})$, L^1 <u>et</u> L^1_1.

PROPOSITION 2. <u>Soit</u> $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ <u>telle que</u> $F'' \in L^1(\mathbb{R})$; <u>alors</u> F <u>opère sur</u> L^1_2 <u>et sur</u> $\Lambda^1_{s,q}$, <u>pour</u> $1 < s < 2$.

PROPOSITION 3. <u>Soit</u> $p \in [1,+\infty[$ <u>et</u> $s \in]1+\frac{1}{p}, \frac{n}{p}[$; <u>alors les seules fonctions</u> C^∞ <u>qui opèrent sur</u> L^p_s $(1 < p < \infty)$ <u>ou sur</u> L^1_s (s <u>entier</u>) <u>ou sur</u> $\Lambda^p_{s,q}$ $(p,q \in [1,+\infty]$, s <u>non entier</u>) <u>sont les fonctions</u> $t \longrightarrow Ct$.

PROPOSITION 4. <u>Soit</u> $p \in [1,+\infty[$ <u>et</u> $s \geq \frac{n}{p}$; <u>si</u> $F' \in L^\infty_m$, <u>où</u> m <u>est un entier assez grand, alors</u> F <u>opère sur</u> L^p_s $(1 \leq p < \infty$; $s \in \mathbb{N}$ <u>si</u> $p = 1)$ <u>et sur</u> $\Lambda^p_{s,q}$ $(q \in [1,\infty],\ s \notin \mathbb{N})$.

La proposition 4 a deux corollaires classiques.

1. Toute fonction de classe C^m, pour m assez grand, opère sur L^p_s et $\Lambda^p_{s,q}$, pour $s > \frac{n}{p}$, et sur $\Lambda^p_{\frac{n}{p},1}$. Ces espaces s'injectent en effet dans L^∞ (cf. [1]).

2. En appliquant le premier corollaire à $F(t) = t^2$, on conclut que les espaces susdits sont des algèbres.

Revenons à notre question de départ : est-ce que les fonctions C^∞ à support compact opèrent sur les espaces de Sobolev-Besov ?

La réponse est maintenant connue pour toute valeur de $s \in \mathbf{R}^+$ dans le cas $p = 1$; curieusement, nous l'ignorons dans le cas $1 < s \leq 1 + \frac{1}{p}$ et $p > 1$.

4. DEMONSTRATIONS DES RESULTATS POSITIFS.

a) Preuve de la proposition 1.

1. $\boxed{s = 0}$ L'hypothèse sur F (jointe à $F(0) = 0$) entraîne $|F(t)| \leq \|F'\|_\infty |t|$; on en tire aussitôt $|F \circ f| \leq \|F'\|_\infty |f|$ pour tout $f \in L^p$.

2. $\boxed{s = 1}$ Si $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^p$, il en est de même pour

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(F \circ f) = (F' \circ f)\frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

3. $\boxed{0<s<1}$ Le résultat est immédiat pour l'espace $\Lambda^p_{s,q}$ puisque l'on a $\omega_p(F \circ f\ , t) \leq \|F'\|_\infty \omega_p(f,t)$. Le cas L^p_s n'est pas du tout clair si on travaille avec la norme "naturelle" de L^p_s (i. e. $\|(I-\Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_p$) ; on utilise alors une norme équivalente, découverte par Strichartz [7] : pour $0 < s < 1$, une fonction $f \in L^p$ appartient à L^p_s si et seulement si la fonction

$$S_s f(x) = \left[\int_0^{+\infty} \left(\int_{|y| \leq 1} |f(x+ry) - f(x)|\, dy\right)^2 \frac{dr}{r^{1+2s}}\right]^{1/2}$$

appartient à L^p ; on constate immédiatement que $S_s(F \circ f) \leq S_s(f)\|F'\|_\infty$.

b) Preuve de la proposition 2.

Elle repose sur l'estimation suivante.

LEMME 1. Pour toute fonction $f \in L^1_2(\mathbf{R}^n)$ et toute fonction positive $G \in L^2(\mathbf{R})$ la fonction $(G \circ f)\frac{\partial f}{\partial x_j}$ appartient à L^2 et

$$\left\|(G \circ f)\frac{\partial f}{\partial x_j}\right\|_2 \leq \|G\|_2 \left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}\right\|_1^{1/2}. \tag{1}$$

A l'aide des techniques d'approximation usuelles, on se ramène à démontrer (1) pour une fonction $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, à valeurs réelles. Posons $H(t) = \int_{-\infty}^{t} G(s)^2 ds$, une intégration par partie par rapport à la variable x_j donne

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(f(x))^2 \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)^2 \, dx = -\int_{\mathbb{R}^n} H(f(x)) \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x) \, dx, \quad \text{d'où (1).}$$

1. $\boxed{s = 2}$ Soit $f \in L_2^1(\mathbb{R}^n)$ et $F'' \in L^1(\mathbb{R})$; on a

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_\ell}(F \circ f) = (F' \circ f) \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_\ell} + (F'' \circ f) \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_\ell}. \tag{2}$$

F' étant la primitive d'une fonction intégrable, on a $F' \in L^\infty$; d'où il découle que le premier terme de (2) appartient à $L^1(\mathbb{R}^n)$. Pour vérifier que le second terme appartient aussi à $L^1(\mathbb{R}^n)$, il suffit d'avoir $|F'' \circ f|^{1/2} \frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^2$: c'est une conséquence du lemme 1.

2. $\boxed{1 < s < 2}$ Nous ne connaissons pas de démonstration utilisant directement le module de continuité de $\frac{\partial}{\partial x_j}(F \circ f)$; celle que nous proposons consiste à interpoler les résultats connus pour $s = 0$ et $s = 2$.

Nous utiliserons le résultat d'interpolation non linéaire suivant, dû à Peetre [6].

LEMME 2. <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux espaces de Banach tels que</u> $E \subset F$ <u>continûment</u> ; T <u>une application de</u> F <u>dans</u> F, <u>telle que</u> $T(E) \subset E$, <u>vérifiant les estimations</u>

$$\|T(x) - T(y)\|_F \leq C\|x - y\|_F \qquad (\forall\, x, y \in F) \tag{3}$$

$$\|T(x)\|_E \leq C\|x\|_E \qquad (\forall\, x \in E)\ ; \tag{4}$$

<u>alors, pour tout</u> $0 < \theta < 1$ <u>et</u> $1 \leq q \leq +\infty$, T <u>envoie l'interpolé réel</u> $[E, F]_{\theta, q}$ <u>dans lui-même</u>.

Le lemme s'applique à $E = L_2^1$, $F = L^1$, $T(f) = F \circ f$; on a en effet $\|F \circ f - F \circ g\|_1 \leq \|F'\|_\infty \|f-g\|_1$ et, à l'aide de (1) et (2) $\|F \circ f\|_{L_2^1} \leq C\|F''\|_1 \|f\|_{L_2^1}$.

c) Preuve de la proposition 4.

1. $\boxed{s \text{ entier}}$ On fait sur F l'hypothèse $F' \in L^\infty_{s-1}$.

Soit $f \in L^p_s$; il s'agit de montrer que $(F \circ f)^{(\alpha)} \in L^p$, pour tout $0 < |\alpha| \leq s$; compte-tenu de l'hypothèse $F^{(j)} \in L^\infty$ pour $j = 1, \ldots, s$, il suffit de vérifier que $f^{(\alpha_1)} \ldots f^{(\alpha_k)} \in L^p$, pour toute suite de multi-indices $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ telle que $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = \alpha$. L'hypothèse $\frac{1}{p} - \frac{s}{n} \leq 0$ implique

(5) $$\frac{1}{p} \geq k\left(\frac{1}{p} - \frac{s}{n}\right) + \frac{|\alpha|}{n} .$$

La relation (5) permet précisément de choisir $p_1, \ldots, p_k$ dans $[1, \infty]$ tels que

(6) $$\frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_k} = \frac{1}{p} \quad , \quad \frac{1}{p} \geq \frac{1}{p_j} \geq \frac{1}{p} - \frac{s - |\alpha_j|}{n} \quad ;$$

le lemme de Sobolev donne alors $f^{(\alpha_j)} \in L^{p_j}$. CQFD

2. $\boxed{s \text{ non entier}}$ Dans le cas des espaces $\Lambda^p_{s,q}$, avec l'hypothèse $s > \frac{n}{p}$, on peut procéder par estimation directe des modules de continuité, ou par interpolation (méthode de Peetre [6]). La preuve que nous proposons, due à Yves Meyer, a l'avantage d'être valable pour $s = \frac{n}{p}$ et de s'appliquer aussi bien aux L^p_s ; toutefois, elle "consomme" plus de régularité en F qu'il n'est sans doute nécessaire : pour être précis, nous supposons que $F' \in L^\infty_m$, avec $m = [s] + 1$. Le but est d'écrire $F \circ f = L_f(f)$, où L_f est un opérateur pseudo-différentiel (linéaire !) de la classe $\mathrm{Op}\, S^0_{1,1}$.

Commençons par approcher f par des fonctions à spectres compacts f_k, définies par

$$\hat{f}_k(\xi) = \varphi(2^{-k}\xi)\hat{f}(\xi) \quad ,$$

où φ est C^∞, à support compact, positive, égale à 1 au voisinage de 0 ; définissons $\Delta_0 f = f_0$, $\Delta_k f = f_k - f_{k-1}$ $(k \geq 1)$; on a alors (au moins au sens des distributions !)

(7) $$f = \sum_{k \geq 0} \Delta_k f .$$

L'appartenance de f à L^p_s on a $\Lambda^p_{s,q}$ s'exprime aisément à l'aide de la série (7), qu'on appelle <u>série de Littlewood-Paley</u> de f (voir [1]). On a alors (en convenant $f_{-1} = 0$)

$$F \circ f = \sum_{k\geq 0} (F \circ f_k - F \circ f_{k-1})$$

$$= \sum_{k\geq 0} \left\{\int_0^1 F'_0 \quad (f_{k-1} + t\,\Delta_k f)\,dt\right\} \;\Delta_k f.$$

Posons $M_k = \int_0^1 F'_0 \quad (f_{k-1}+ t\,\Delta_k f)\,dt$, $\psi(\xi)=\varphi(\xi)-\varphi(2\xi)$, $\sigma(x,\xi) = \sum_{k\geq 0} M_k(x)\,\psi(2^{-k}\xi)$, ce qui donne

$$F \circ f = Op(\sigma)(f).$$

On va appliquer à l'O.ψ.D $Op(\sigma)$ le résultat de continuité suivant (cf. [2], [4], [5]): soit $\sigma(x,\xi)$ un symbole sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ satisfaisant les estimations $|\partial^\alpha_\xi\, \partial^\beta_x \sigma(x,\xi)| \leq C_\alpha (1+|\xi|)^{|\beta|-|\alpha|}$ pour $|\beta| \leq m$, $\alpha \in \mathbf{N}$; l'O.ψ.D ayant σ pour symbole est alors continu sur L^p_s $(1 < p < \infty)$ et sur $\Lambda^p_{s,q}$ $(s \notin \mathbf{N}$; $p,q \in [1,+\infty])$ pour tout $s \in]0,m[$.

Il s'agit de montrer que

$$\|M_k^{(\alpha)}\|_\infty \leq C\,2^{k|\alpha|} \qquad (|\alpha| \leq m). \tag{8}$$

Pour $|\alpha| = 0$, on obtient immédiatement $\|M_k\|_\infty \leq \|F'\|_\infty$; pour $|\alpha| > 0$, (8) va découler de $F' \in L^\infty_m$ et de

$$\|f_k^{(\alpha)}\|_\infty \leq C_\alpha\, 2^{k|\alpha|} \quad , \quad \|\Delta_k f^{(\alpha)}\|_\infty \leq C_\alpha 2^{k|\alpha|} \qquad (|\alpha| > 0). \tag{9}$$

Si $f \in L^p_s$ ou $\Lambda^p_{s,q}$, avec $s \geq \frac{n}{p}$, on a encore $f \in \Lambda^p_{\frac{n}{p},\infty}$, autrement dit

$$\|\Delta_j f\|_p \leq C\,2^{-j\frac{n}{p}} \quad ; \tag{10}$$

puisque le spectre de $\Delta_j f$ est contenu dans $|\xi| \leq C\,2^j$, (10) entraîne $\|\Delta_j f\|_\infty \leq C$. Le lemme de Bernstein donne alors $\|\Delta_j f^{(\alpha)}\|_\infty \leq C_\alpha 2^{k|\alpha|}$ $(\alpha \in \mathbf{N}^n)$, puis $\|f_k^{(\alpha)}\|_\infty = \|\sum_{j\leq k} \Delta_j f^{(\alpha)}\|_\infty \leq C_\alpha \sum_{j\leq k} 2^{j|\alpha|} = C'_\alpha\, 2^{k|\alpha|}$ (ceci pour $|\alpha| > 0$), d'où (9).

CQFD

5. DEMONSTRATION DU THEOREME DE DAHLBERG (PROPOSITION 3).

Dans ce paragraphe E^p_s désignera indifféremment L^p_s en $\Lambda^p_{s,q}$, avec les conditions sur s,p,q précisées au § 2.

L'idée de Dahlberg, c'est de procéder en deux temps :

1. Les seules fonctions C^∞ qui opèrent sont les polynômes ;

2. Les seuls polynômes qui opèrent sont du premier degré. Nous commencerons par le second point.

a) Le cas des polynômes.

Il est naturel de tester un polynôme sur des fonctions puissances ; à cet effet, on se convaincra aisément du

LEMME 3. Soit τ un réel non entier, supérieur à $-\frac{n}{p}$; φ une fonction C^∞ à support compact sur $\mathbb{R}^n$, telle que $\varphi(0) \neq 0$ et $h(x) = |x|^\tau \varphi(x)$. Alors $h \in \Lambda^p_{\tau+\frac{n}{p},\infty}$ mais $h \notin \Lambda^p_{\tau+\frac{n}{p},q}$ pour $q < \infty$.

Soit F un polynôme de degré $\nu > 1$; on fait l'hypothèse $s < \frac{n}{p}$ et l'on choisit τ, non entier, dans l'intervalle $\left]s-\frac{n}{p}, \frac{1}{\nu}(s-\frac{n}{p})\right[$: alors la fonction h du lemme 3 appartient à E^p_s.

Ecrivons $F(t) = t^\nu G(t)$, où G est C^∞ en dehors de 0 et $G(\pm\infty) \neq 0$.

Le fait que $\tau < 0$ entraîne l'existence de $A > 0$ tel que $|x| \leq A$ implique $|h(x)| \geq 1$; soit $\psi_1 + \psi_2 = 1$ une partition C^∞ de l'unité, où ψ_1 est portée par $|x| \leq A$ et ψ_2 par $|x| \geq \frac{A}{2}$; on a alors

$$F \circ h = (F \circ h)\,\psi_1 + (F \circ h)\,\psi_2 .$$

La fonction $(F \circ h)\,\psi_2$ est C^∞ à support compact et

$$F(h(x))\,\psi_1(x) = |x|^{\tau\nu}\,\varphi(x)^\nu G(h(x))\,\psi_1(x) \;;$$

$\varphi^\nu (G \circ h)\,\psi_1$ étant une fonction C^∞, à support compact, non nulle en 0, on peut appliquer le lemme 3 ; d'où

$$(F\circ h)\,\psi_1 \notin \Lambda^p_{\nu\tau+\frac{n}{p},1} \quad ;$$

or, par hypothèse sur τ, $\Lambda^p_{\tau\nu+\frac{n}{p},1} \supset E^p_s$; ainsi $F\circ h \notin E^p_s$. CQFD.

b) <u>La réduction au cas polynomial</u>.

LEMME 4. <u>Soit</u> $1+\frac{1}{p} < s < \frac{n}{p}$ <u>et</u> m <u>l'unique entier tel que</u> $m-1 < s \leq m$. <u>Il existe alors une fonction</u> $v \in E^p_s$ <u>telle que, pour toute</u> $F \in C^m(\mathbb{R})$, <u>vérifiant</u> $F^{(m)} \neq 0$, <u>on ait</u> $F\circ v \notin E^p_s$. <u>De plus, on peut faire en sorte que</u> v <u>soit</u> C^∞ <u>ou à support compact</u>.

Avant de démontrer le lemme 4 – qui constitue le coeur du théorème de Dahlberg – il convient d'en souligner deux particularités :

1. il existe une <u>unique</u> fonction de test qui met en défaut <u>toutes</u> les fonctions F non polynomiales ;

2. l'obstruction provient aussi bien de la mauvaise régularité locale (cas où v est à support compact) que de la trop forte croissance de v et de ses dérivées à l'infini (cas où v est C^∞).

1. <u>Construction de la fonction de test</u>.

Donnons-nous des réels positifs α et β et des points alignés $(z^j)_{j\geq 1}$ dans $\mathbb{R}^n$. Soit u une fonction C^∞ portée par la boule $|x| \leq 2$, telle que $u(x) = x_1$, pour $|x| \leq 1$. On pose $u_j(x) = j^\beta u(j^\alpha(x-z^j))$ et $v = \sum_{j\geq 1} u_j$. Un calcul aisé donne

$$(11) \qquad \left.\begin{cases} (s\in\mathbb{N}) & \|u_j\|_{L^p_s} \\ (s\notin\mathbb{N}) & \|u_j\|_{\Lambda^p_{s,1}} \end{cases}\right\} \leq C\, j^{\beta+\alpha(s-\frac{n}{p})}\,.$$

Si on souhaite que v soit C^∞, on imposera, mettons, $|z^j - z^{j+1}| \geq 10$; si, au contraire, on veut que v soit à support compact, on posera $|z^j - z^{j+1}| = j^{-\alpha}$, avec

(12) $$\alpha > 1.$$

Dans l'un et l'autre cas, les supports des fonctions u_j sont "suffisamment" disjoints :

(13) $$B(z^j, \frac{1}{2j^\alpha}) \cap B(z^k, \frac{1}{2k^\alpha}) = \emptyset \qquad (j \neq k).$$

2. <u>L'estimation de</u> $F \circ v$ (<u>cas où</u> $s = m \in \mathbf{N}$).

L'hypothèse $F^{(m)}$ continue et non nulle permet de trouver des réels a, b et $c > 0$ tels que

(14) $$\forall\, t \in [a,b] \qquad |F^{(m)}(t)| \geq c.$$

On va maintenant construire des pavés P_k, tels que, pour $x \in P_k$, on ait

(15) $$v(x) = k^{\alpha+\beta}(x_1 - z_1^k),$$

(16) $$\frac{a}{k^{\alpha+\beta}} < x_1 - z_1^k < \frac{b}{k^{\alpha+\beta}}.$$

Il suffit, pour cela, de définir P_k comme l'ensemble des $x \in \mathbf{R}^n$ qui vérifient (16) et $|x_r - z_r^k| < \frac{1}{2\sqrt{n}\,k^\alpha}$ $(r = 2, \ldots, n)$: on a alors, au moins pour $k \geq N(a,b)$, $P_k \subset B(z^k, \frac{1}{2k^\alpha})$; d'où la relation (15). Ainsi, grâce à (13) et (14),

$$\left\| \frac{\partial^m}{\partial x_1^m}(F \circ v) \right\|_p^p \geq \sum_{k \geq N} \int_{P_k} |k^{m(\alpha+\beta)} F^{(m)}(k^{\alpha+\beta}(x_1 - z_1^k))|^p \, dx$$

$$\geq c^p \sum_{k \geq N} k^{(\alpha+\beta)pm} \operatorname{vol}(P_k)$$

$$\geq C' \sum_{k \geq N} k^{\alpha(pm-n)+\beta(pm-1)} \qquad (\text{avec } C' > 0).$$

3. <u>L'estimation de</u> $F \circ v$ (<u>cas où</u> $s \notin \mathbf{N}$).

De (14) on tire l'existence de $\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que

$$\forall\, t \in [a,b], \quad \forall\, \theta \in [-\varepsilon, \varepsilon], \quad |F^{(m-1)}(t+\theta) - F^{(m-1)}(t)| \geq c\,|\theta|.$$

On va estimer $\omega_p(\frac{\partial^{m-1}}{\partial x_1^{m-1}}(F \circ v), t)$ pour $\frac{\varepsilon}{(j+1)^{\alpha+\beta}} \leq t \leq \frac{\varepsilon}{j^{\alpha+\beta}}$; pour cela on se fixe y tel que $|y| = |y_1| = t$ et l'on remarque que, pour $N \leq k \leq j$ et $x \in P_k$, on a $v(x+y) = k^{\alpha+\beta}(x_1 + y_1 - z_1^k)$; on peut donc minorer $\omega_p(\frac{\partial^{m-1}}{\partial x_1^{m-1}}(F \circ v)\ ,\ t)^p$ par

$$\sum_{k=N}^{j} \int_{P_k} k^{p(m-1)(\alpha+\beta)}\ |F^{(m-1)}(k^{\alpha+\beta}(x_1+y_1-z_1^k)) - F^{(m-1)}(k^{\alpha+\beta}(x_1-z_1^k))|^p\, dx$$

$$\geq c^p |y_1|^p \sum_{k=N}^{j} k^{(\alpha+\beta)mp}\ \mathrm{vol}(P_k).$$

Ainsi obtient-on l'existence de $C' > 0$ tel que

$$\omega_p(\frac{\partial^{m-1}}{\partial x_1^{m-1}}(F \circ v)\ ,\ t) \geq C'\ j^{-\alpha-\beta}(\sum_{k=N}^{j} k^{\beta(mp-1)+\alpha(mp-n)})^{\frac{1}{p}} \tag{17}$$

pour $t \in \left[\frac{\varepsilon}{(j+1)^{\alpha+\beta}}\ ,\ \frac{\varepsilon}{j^{\alpha+\beta}}\right]$.

4. Le choix des paramètres α et β.

Dans le cas $s = m \in \mathbb{N}$, il suffit d'obtenir $v \in L_m^p$ et $\frac{\partial^m}{\partial x_1^m}(F \circ v) \notin L^p$, autrement dit $\beta + \alpha(s - \frac{n}{p}) < -1$ et $\alpha(ps - n) + \beta(ps - 1) > -1$; compte-tenu de l'hypothèse $s < \frac{n}{p}$, cette double condition équivaut à

$$\frac{\beta + 1}{\frac{n}{p} - s} < \alpha < \frac{\frac{1}{p} + \beta(s - \frac{1}{p})}{\frac{n}{p} - s} \quad ; \tag{18}$$

(18) est réalisable si $s > 1 + \frac{1}{p}$: il suffit d'imposer alors $\beta \geqslant \frac{1 - \frac{1}{p}}{s - \frac{1}{p} - 1}$; si on souhaite vérifier (12) on impose de plus $\beta \geq \frac{n}{p} - s - 1$.

Soit maintenant $m-1 < s < m$: il suffit de réaliser $v \in \Lambda_{s,1}^p$ et $\frac{\partial^{m-1}}{\partial x_1^{m-1}}(F \circ v) \notin \Lambda_{\sigma,\infty}^p$ (où $\sigma = s - m + 1$) ; compte-tenu de (17), la deuxième condition équivaut à

$$\sup_{j \geq 1}\left\{ j^{(\alpha+\beta)(\sigma-1)}(\sum_{k=N}^{j} k^{\beta(mp-1)+\alpha(mp-n)})^{\frac{1}{p}}\right\} = +\infty \ ; \tag{19}$$

de nouveau on constate que (19) est une conséquence de (18). Ainsi s'achève la preuve du théorème de Dahlberg.

Bibliographie

[1] BERGH, J. et LÖFSTRÖM, J. Interpolation spaces. Springer 1976.

[2] BOURDAUD, G. L^p-estimates for certain non-regular pseudo-differential operators. Prépublications Orsay.

[3] DAHLBERG, B. E. J. Proc. Symp. Pure Math. XXXV, part 1, pp.183-185.

[4] MEYER, Y. Remarques sur un théorème de J.-M. Bony. Prépubl. 1980. Dept. Math., Univ. Paris-Sud, 91405 Orsay (France).

[5] MEYER, Y. Régularité des solutions des équations aux dérivées partielles non linéaires. Sém. Bourbaki, no. 560 (Juin 1980).

[6] PEETRE, J. Interpolation of Lipschitz operators and metric spaces. Mathematica (Cluj) vol. 12, pp. 325-334 (1970).

[7] STRICHARTZ, R. S. Multipliers on fractional Sobolev spaces. J. Math. Mech. vol. 16, no. 9, pp. 1031-1060 (1967).

UER de Mathématiques
Université Paris VII
2, place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05

et

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

EQUIPE DE RECHERCHE ASSOCIEE AU CNRS (296)
ANALYSE HARMONIQUE
MATHÉMATIQUE (Bât. 425)
91405 ORSAY CEDEX

QUELQUES PROBLEMES SUR LES SERIES TRIGONOMETRIQUES

Edmond BUSKO et LONG Jui-lin

Dans ce résumé, nous nous proposons de rappeler quelques résultats récents et quelques problèmes ouverts sur les séries trigonométriques.

On désigne par $S_k(x, f)$, la valeur en x de la kième somme partielle de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbf{T})$, ou plus simplement par $S_k(x)$ lorsqu'aucune confusion n'est à craindre.

Nous examinons d'abord quelques généralisations trouvées récemment d'un théorème classique de Hardy-Littlewood :

$$\frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} |S_k(0) - f(0)| \longrightarrow 0,$$

pour $m \to +\infty$ et f bornée continue en 0.

$\Lambda = \{n_j\}$ désigne un ensemble infini d'entiers ≥ 0 indexés dans l'ordre naturel. Peut-on étendre le théorème précédent en remplaçant la suite des entiers naturels par la suite Λ, c'est-à-dire, est-il vrai que, quand f est bornée et continue en 0, $\frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} |S_{n_k}(0) - f(0)| \to 0$, quand $m \to +\infty$? La réponse positive dans certains cas, peut être négative : ainsi d'après l'exemple de Féjer ([18] p. 299) :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2} \sin 2^{k^4} x \left(\sum_{m=1}^{2^{k^3}} \frac{\sin mx}{m} \right),$$

on a $S_{n_j}(0) > j \log 2 \longrightarrow +\infty$, pour $n_j = 2^{j^4}$ et $j \longrightarrow +\infty$.

On a mis en évidence deux classes disjointes de suites $\{n_j\}$:

- celles pour lesquelles

$$\frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m}\left|S_{n_j}(0)\right| \leq C\|f\|_\infty , \quad (C \text{ constante absolue})$$

- celles pour lesquelles

il existe f bornée telle que $\left|S_{n_j}(0)\right| \longrightarrow +\infty$.

THEOREME 1 ([9], [10]). <u>Si</u> $n_j \leq Cj$, <u>on a</u>

$$\frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m}\left|S_{n_j}(0)\right| \leq 2C^{1/3}\|f\|_\infty .$$

<u>En outre, si</u> f <u>est continue</u>

$$\frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m}\varepsilon_j(S_{n_j}(x) - f(x)) \longrightarrow 0, \quad \text{pour} \quad m \to +\infty,$$

<u>uniformément par rapport à</u> x <u>et aux suites</u> ε_j ; $\varepsilon_j = \pm 1$.

<u>Démonstration</u>. On a

$$(1)\quad \left|\sum_{j=0}^{m}\varepsilon_j S_{n_j}(0)\right| = \left|\int_{-\pi}^{+\pi}\left(\sum_{j=0}^{m}\varepsilon_j D_{n_j}(t)\right) f(t)\,dt\right| \leq \left|\int_{|t|<\delta}\right| + \left|\int_{\delta\leq t\leq\pi}\right|$$

$$\leq \frac{1}{\pi}\,C(m+1)^2\,\delta \sup_{|t|<\delta}|f(t)| + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m+1}{\delta}\right)^{1/2}\|f\|_\infty ,$$

le premier terme est obtenu en utilisant

$$\pi\left|D_{n_j}(t)\right| \leq n_j + \frac{1}{2} ,$$

le deuxième par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et en remarquant que

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\left|\sum_{j=0}^{m}\varepsilon_j \sin(n_j + \tfrac{1}{2})\,t\right|^2 dt = (m+1)\,\pi .$$

On en déduit l'inégalité proposée en posant $\delta = \dfrac{C^{-2/3}}{m+1}$.

Si f est continue en 0, il existe $\delta_1 > 0$ tel que $|f(t) - f(0)| \leq \varepsilon$ pour $|t| < \delta_1$. On pose $h_1(t) = \begin{cases} f(t)-f(0) & \text{pour } t < \delta_1 \\ 0 & \text{pour } \delta_1 \leq t \leq \pi \end{cases}$ et $h_2(t) = f(t) - f(0) - h_1(t)$.

On obtient $\|h_1\|_\infty \leq \varepsilon$

$\|h_2\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty$

$$h_2(t) = 0 \quad \text{pour} \quad |t| < \delta_1 .$$

De sorte qu'en appliquant l'inégalité du théorème à h_1 et l'inégalité (1) à h_2 (avec $\delta = \delta_1$) et en additionnant, on obtient

$$\frac{1}{m+1} \left| \sum_{j=0}^{m} \varepsilon_j (S_{n_j}(0) - f(0)) \right| \leq \varepsilon' \ , \quad \text{si} \quad m \quad \text{est assez grand.}$$

On obtient le résultat annoncé en utilisant l'uniforme continuité de f.

En sens contraire, on a le

THEOREME 2. <u>Si la constante</u> C <u>est assez grande</u> ($C \geq 10^{46}$ <u>suffit), il existe une suite</u> $n_j \leq Cj$ <u>et une</u> f <u>bornée telles que</u>

$$S_{n_j}(0) > 2\|f\|_\infty .$$

<u>Démonstration</u>.

Soit N un entier > 1.

En utilisant l'inégalité $\left|\frac{\sin kx}{k}\right| \leq |x|$ et la transformation d'Abel, remarque que

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left| \sum_{k=N^m}^{N^{m+1}-1} \frac{\sin kx}{k} \right|$$

est une fonction bornée $\leq C'$ (C' indépendante de N). On pose alors

$$\alpha_m = \alpha_m^{(N)} = N^{m+1} + 2 \sum_{k=1}^{m} N^k$$

$$\Lambda_m = \left[\alpha_m - N^m , \alpha_m + N^m\right[\quad , \qquad \Lambda = \bigcup_{m=1}^{\infty} \Lambda_m = \{n_j\}$$

et

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} 2 \sin \alpha_m x \left(\sum_{k=N^m}^{N^{m+1}-1} \frac{\sin kx}{k} \right).$$

Comme on a

$$\alpha_m - N^m \leq N^2 \left[\text{Card } \Lambda_1 + \text{Card } \Lambda_2 + \ldots + \text{Card } \Lambda_{m-1}\right],$$

on en déduit $n_j \leq C\, j$ pour $C = N^2$.

D'autre part, pour $n_j \in \Lambda_m$, on a

$$S_{n_j}(0) = \sum_{k=N^m}^{N^{m+1}-1} \frac{1}{k} > \log N .$$

Donc, pour réaliser $S_{n_j}(0) > 2\|f\|_\infty$, il suffit de choisir l'entier N pour que $\log N > 2C'$.

PROBLEME. Existe-t-il alors, par exemple, une f bornée telle que

$$S_{n_j}(0) > \delta\|f\|_\infty$$

pour une suite $n_j \leq 2j$ et un $\delta > 1$?

Kahane et Katznelson ([9]) ont prouvé le

THEOREME 3. <u>Si</u> $n_j = j^2$, <u>ou</u> $n_j = [j^\alpha]$ $(\alpha \geqslant 1)$, <u>ou même si</u> $[j^\alpha] \leq n_j < [(j+1)^\alpha]$, alors

$$\frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^{m} |S_{n_j}(0)| \leq C\|f\|_\infty .$$

Le théorème suivant répond (comme le théorème 2) à une question proposée oralement par J.-P. Kahane.

THEOREME 4. <u>Pour toute fonction</u> φ <u>telle que</u> $\varphi(t) \geq t$ <u>et</u> $\frac{\varphi(t)}{t} \longrightarrow +\infty$ <u>pour</u> $t \longrightarrow +\infty$, <u>il existe une suite</u> $n_j \leq \varphi(j)$ <u>et une</u> f <u>bornée telles que</u> $S_{n_j}(0) \longrightarrow +\infty$, <u>pour</u> $j \longrightarrow +\infty$.

<u>Démonstration</u>. En diminuant φ au besoin, on peut supposer que $\frac{\varphi(t)}{t} \longrightarrow +\infty$ en croissant.

On reprend les notations du théorème 2 en posant Card Λ_1 + Card Λ_2 +... .. + Card $\Lambda_{m-1} = \beta_m^{(N)}$.

On détermine par récurrence une suite $\{m_N\}$ strictement croissante d'entiers vérifiant

$$N^2 \beta_{m_N}^{(N)} \leq \varphi(\beta_{m_N}^{(N)})$$

alors
$$N^2 j \le \varphi(j) \quad \text{pour} \quad j \ge \beta^{(N)}_{m_N} .$$

On pose $\Lambda^{(N)}_m = \left[\alpha^{(N)}_m - N^m , \alpha^{(N)}_m + N^m\right[$ pour $m \in I_N = [m_N , m_{N+1}[$

$$\Lambda = \bigcup_{N>1} \Big(\bigcup_{m\in I_N} \Lambda^{(N)}_m \Big) = \{n_j\} \quad \text{(réunion disjointe)}$$

et $f(x) = \sum\limits_{N>1} \sum\limits_{m\in I_N} 2 \sin \alpha^{(N)}_m x \Big(\sum\limits_{k=N^m}^{N^{m+1}-1} \dfrac{\sin kx}{k} \Big)$.

On obtient alors

1. $n_j \le N^2 j \le \varphi(j)$ pour $n_j \in \Lambda^{(N)}_m$ $(m \in I_N)$,

2. f est bornée

3. $S_{n_j}(0) > \log N$ pour $n_j \in \Lambda^{(N)}_m$ $(m \in I_N)$ donc $S_{n_j}(0) \longrightarrow +\infty$ si $j \longrightarrow +\infty$.

On a une condition nécessaire :

THEOREME 5 ([4], [17]). Si $\dfrac{1}{m+1} \sum\limits_{j=0}^{m} |S_{n_j}(0)| \le C\|f\|_\infty$, pour toute f bornée, alors $\log n_j \le C' \sqrt{j}$.

Et dans l'autre sens :

THEOREME 6 ([10]). Si n_j est convexe et $\log n_j \le C\, j^{1/p}$ $(p \ge 2)$, alors $\left[\dfrac{1}{m+1} \sum\limits_{j=0}^{m} |S_{n_j}(0)|^p\right]^{1/p} \le C' \|f\|_\infty$.

Ce théorème améliore l'inégalité

$$\frac{1}{m+1} \left| \sum_{j=0}^{m} S_{n_j}(0) \right| \le C' \|f\|_\infty$$

déjà obtenue ([1]) dans le cas des suites $n_j = [2^{j^\varepsilon}]$ $(\varepsilon \le \frac{1}{2})$.

PROBLEME. On ne sait pas s'il existe une fonction bornée f telle que $|S_{n_j}(0)| \longrightarrow +\infty$, pour $j \longrightarrow +\infty$, lorsque $n_j = [q^{j^\varepsilon}]$ $(q > 1)$ où $\frac{1}{2} < \varepsilon < 1$.

Dans le cas des suites lacunaires, Kahane et Katznelson ont démontré les deux théorèmes suivants.

THEOREME 7 ([9]). <u>Pour toute suite</u> $\{n_j\}$ <u>lacunaire</u> $\frac{n_{j+1}}{n_j} \geq q > 1$, <u>on a</u> $\frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^{m} |S_{n_j}(0)| \leq C \frac{\log n_m}{\sqrt{m+1}} \|f\|_\infty$.

Et dans le sens contraire au théorème 7 :

THEOREME 8 ([9]). <u>Si</u> $\{n_j\}$ <u>est lacunaire</u> $\frac{n_{j+1}}{n_j} \geq q > 1$, <u>il existe une</u> f <u>bornée telle que</u> $S_{n_j}(0) \geq C\sqrt{j}$.

Démonstration dans le cas $n_j = 2^j$ (Le résultat est obtenu par une autre voie dans [13]). On pose

$$f_1(x) = \frac{2}{i} \sum_{n\geq 1} \Big[\prod_{2^n<j\leq 2^{n+1}} \Big(1 + \frac{i}{2^{n/2}} \sin 4^j x\Big) - 1\Big] \Big(\sum_{k=2^{2^{n-1}}}^{2^{2^n}-1} \frac{\sin kx}{k}\Big)$$

et

$$f_2(x) = \frac{2}{i} \sum_{n\geq 1} \Big[\prod_{2^n<j\leq 2^{n+1}} \Big(1 + \frac{i}{2^{n/2}} \sin 2.4^j x\Big) - 1\Big] \Big(\sum_{k=2^{2^{n-1}}}^{2^{2^n}-1} \frac{\sin kx}{k}\Big).$$

Comme $|1 + ia|^2 = 1 + a^2$, on voit que les produits de Riesz imaginaires qui interviennent sont bornés : $\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^{2^n} < e$; il en résulte que f_1 et f_2 sont bornées.

D'autre part, les inégalités

$$2\left[4^{2^n} + 4^{2^n-1} + \ldots + 4^{2^{n-1}} + 1\right] + 2^{2^{n-1}} < 4^{2^n+1} - 2^{2^n},$$

$$4^j + 4^{j-1} + \ldots + 4^{2^n+1} + 2^{2^n} < 2\left[4^j - 4^{j-1} - \ldots - 4^{2^n+1}\right] - 2^{2^n} \quad \text{où} \quad 2^n < j \leq 2^{n+1},$$

$$2\left[4^j + 4^{j-1} + \ldots + 4^{2^n+1}\right] + 2^{2^n} < 4^{j+1} - 4^j - \ldots - 4^{2^n+1} - 2^{2^n} \quad \text{où} \quad 2^n < j < 2^{n+1}$$

prouvent que les blocs de fréquences qui apparaissent dans les développements de f_1 et f_2 sont disjoints deux à deux : un bloc de diamètre 2.2^{2^n} (provenant d'un produit avec $\sum_{2^{2^{n-1}}}^{2^{2^n}-1} \frac{\sin kx}{k}$) étant centré sur une fréquence qui apparaît dans le développement du produit de Riesz $\prod_{2^n<j\leq 2^{n+1}} \left(1 + \frac{i}{2^{n/2}} \sin A.4^j x\right)$ (A = 1 ou 2).

De sorte que

pour f_1 : $\quad S_{4^j}(0,f_1) = \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{k=2^{2^{n-1}}}^{2^{2^n}-1} \frac{1}{k} > \frac{1}{2^{n/2}} \log 2^{2^{n-1}} = \frac{\log 2}{2} 2^{n/2}$,

pour $2^n < j \leq 2^{n+1}$,

et pour f_2 : $\quad S_{2.4^j}(0,f_2) > \frac{\log 2}{2} 2^{n/2}$ $\quad$ pour $\quad 2^n < j \leq 2^{n+1}$.

Donc, pour $f = f_1 + f_2$: $\quad S_{2^j}(0) > C\sqrt{j}$.

L. Carleson a proposé le problème suivant sur la réunion des suites.

PROBLEME.

Les conditions $\begin{cases} |S_{n_j}(0,f)| \longrightarrow +\infty, \\ |S_{m_j}(0,g)| \longrightarrow +\infty, \end{cases}$ f et g bornées

impliquent-elles l'existence d'une fonction bornée h telle que

$|S_{\ell_j}(0,h)| \longrightarrow +\infty$ où $\{\ell_j\} = \{n_j\} \cup \{m_j\}$?

Nous rappelons maintenant deux problèmes classiques encore ouverts.

On connait depuis longtemps (Lusin et Priwaloff [11]) des exemples de fonctions :

$$f(r,t) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k(a_k \cos kt + b_k \sin kt) \qquad (r < 1)$$

telles que $\qquad \lim_{r \to 1} f(r,t) = +\infty \qquad$ p. p.

Kahane et Katznelson ont trouvé également de telles fonctions, astreintes en outre à des conditions restrictives sur les coefficients $\{a_k\}$ et $\{b_k\}$ ([7]).

Mais,

PROBLEME ([15] p. 27).

Existe-t-il une série trigonométrique

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

dont les sommes partielles tendent vers $+\infty$ sur un ensemble de mesure > 0 ?

Ce problème a été résolu par Menchov ([12]) dans le cas de la convergence en mesure vers $+\infty$, et par d'autres auteurs dans le cas de certains systèmes orthonormaux (entre autres [16]).

Pour une approche de ce problème [8] .

D'autre part, on sait que si $f \in L^1$,

$$S_n(x) = o(\log n) \quad \text{p. p.}$$

L. Carleson ([3]) a même prouvé que

$$S_n(x) = o(\log \log n) \quad \text{p. p.}$$

sous l'hypothèse supplémentaire $f \in L(\log^+ L)^{1+\delta}$ $(\delta > 0)$; et, si $f \in L^1$, on ne peut pas remplacer $\log \log n$ par une suite croissant moins vite ([5] et [6] p. 105). On sait aussi qu'on peut trouver ([2]) une fonction continue telle que

$$\|S_n\|_\infty \geq C \log n \ , \quad \text{pour} \quad n \geq 1 \qquad (c > 0).$$

(Pour une comparaison entre la suite $\{\|S_n\|_\infty\}$ et la suite des constantes de Lebesgue [14]).

Cependant, on a le

PROBLEME ($[18]_I$ p. 308).

Etant donné une suite $\varepsilon_n \longrightarrow 0$, peut-on trouver une $f \in L^1$ telle que

$$S_n(x) > \varepsilon_n \log n$$

ait lieu pour presque tout x , pour une infinité d'entiers (dépendant de x) ?

Bibliographie

[1] BUGROV, Ja, S. (Я. С. Бугров) On linear summation methods of Fourier series. Analysis Math. 5 (1979), 119-133.

[2] BUSKO, E. Fonctions continues et fonctions bornées non adhérentes dans $L^{\infty}(T)$ à la suite de leurs sommes partielles de Fourier. Studia Math. 34 (1970), 319-337.

[3] CARLESON, L. On convergence and growth of partial sums of Fourier series. Acta Math. 116 (1966), 135-157.

[4] CARLESON, L. Volume dédié à Paul Turan, édité par l'Acad. Sc. Hongrie. A paraître.

[5] CHEN, Y. M. A remarkable divergent Fourier series. Proc. Japan Acad. 38 (1962), no. 6, 239-244.

[6] KAHANE, J.-P. Some random series of functions. Heath (1968).

[7] KAHANE, J.-P. et KATZNELSON, Y. Sur le comportement radial des fonctions analytiques. C. R. Acad. Sc. Paris 272 (1971), 718-719.

[8] ______________ Sur les coefficients des séries de Fourier dont les sommes partielles sont positives sur un ensemble. Studia Math. 44 (1972), 555-562.

[9] ______________ Series de Fourier des fonctions bornées. Volume dédié à Paul Turan, édité par l'Académie des Sciences de Hongrie. A paraître.

[10] LONG Jui-Lin Sommes partielles de Fourier des fonctions bornées. Prépublic. Université de Paris-Sud, Orsay (1980).

[11] LUSIN, N. et PRIWALOFF, J. Sur l'unicité et la multiplicité des fonctions analytiques. Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 42 (1925), 143-191.

[12] MENCHOV, D. E. (Д. Е. Меньшов) О сходимости по мере тригонометрических рядов, Труды Мат. Стеклова XXXII (1950).

[13] NEWMAN, D. J. Summability methods fail for the 2^nth partial sums of Fourier series. Proc. Amer. Math. Soc. 45 (1974), 300-302.

[14] OSKOLKOV, K. J. (Осколков, К. И.) Последовательности норм сумм Фурье ограниченных функций, Труды Мат. Инст. АН СССР 143 (1977), 129-142.

[15] OULIANOV, P. L. (Ульянов, П. Л.) Решённые и нерешённые проблемы тригонометрических и ортогональных рядов, Успехи Мат. Наук 19 (1964) n° 1 (115), 3-69.

[16] OVSEPIANE, R. J. et TALALIANE, A. A. (Овсепян и Талалян А. А.) О сходимости ортогональных рядов к +∞, Математ. Заметки 8 (1970), 129-136.

[17] SALEM, R. On strong summability of Fourier series. Amer. J. Math. 77 (1955), 535-540.

[18] I et II ZYGMUND, A. Trigonometric series. Cambridge University Press (1959), vol. I et II.

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

ÉQUIPE DE RECHERCHE ASSOCIÉE AU CNRS (296)
ANALYSE HARMONIQUE
MATHÉMATIQUE (Bât. 425)
91405 ORSAY CEDEX

ON PROJECTIONS OF CONTINUOUS FUNCTIONS.

G. HALÁSZ

We think of periodic continuous functions as functions on the unit circle $|z| = 1$ with Fourier series

$$f(z) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$$

and norm

$$\|f\| = \max_{|z|=1} |f(z)| .$$

It is a classical fact that the partial sum operator

$$T_n^* f = \sum_{k=-n}^{n} a_k z^k$$

does not necessarily converge to f at certain points, let alone uniformly, so it was natural to ask whether one can construct a sequence of projections $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ (i. e. linear operators mapping into the space of trigonometric polynomials of degree $\leq n$, leaving each such polynomial invariant) such that

$$T_n f \longrightarrow f(z)$$

uniformly on $|z| = 1$ for every continuous function $f(z)$. The negative answer is given (via the Banach-Steinhaus theorem) by the so called Lozinski-Harshiladze theorem :

$$|||T_n||| \overset{\text{def}}{=} \sup_{\|f\| \leq 1} \|T_n f\| \geq |||T_n^*||| ,$$

the right hand side being known to be $\sim c \log n$. It has been asked whether one can have point-wise convergence. The answer (via Banach-Steinhaus) is again no given by

THEOREM 1. <u>For any sequence of projections</u> $\{T_n\}$, <u>defining</u>

$$\|T_n(z)\| = \sup_{\|f\|\leq 1} |T_n f \text{ at the point } z|,$$

<u>the set</u>

$$\{z : \limsup_n \|T_n(z)\| = +\infty\}$$

<u>has positive linear measure</u>.

An earlier result of Erdös states that this measure is 2π for T_n defined by (arbitrary) Lagrange interpolation. It would be interesting to extend this to a wider class of projections, for in general we have

THEOREM 2. <u>For any closed subarc</u> Γ of $|z| = 1$ <u>one can construct a sequence of projections</u> $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ with $\|T_n(z)\|$ <u>uniformly bounded on</u> Γ.

As to uniform behavior on $|z| = 1$ one can state

THEOREM 3. (i) <u>For any projection</u> T_n

$$\int_{|z|=1} \log\|T_n(z)\|\,|dz| \geq 2\pi \log\log n - c_1 .$$

(ii) <u>One can construct a sequence of projections</u> $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ <u>such that</u>

$$\int_{|z|=1} \log\|T_n(z)\| / [\log\log(\|T_n(z)\| + 3)]^3 \,|dz| < c_2 .$$

Summarising, one can say that in the senses we would most like it there are no better projections than the partial sums of the Fourier series but there are in some closely related senses. A simple consequence of Theorem 2 is e. g. that we can have point-wise convergence for functions restricted by any fixed modulus of continuity which for the partial sums only holds with modulus of continuity $o(\frac{1}{\log})$.

Detailed proofs can be found in Acta Math. Hungarica 30(3-4) (1977), 307-317.

Related results with interesting differences have later been found by G. Somorjai, a very talented young man who died at the age of 26 for other spaces of functions.

HOMEOMORPHISMES DU CERCLE ET SERIES DE FOURIER.

Jean-Pierre KAHANE

Soit f une fonction continue sur le cercle. Peut-on, en la composant avec un homéomorphisme du cercle, φ, obtenir une fonction $f \circ \varphi$ ayant une "bonne" série de Fourier ?

Le sujet remonte à Pál (1914) et Bohr (1935). Etant donné une fonction continue <u>réelle</u> f, il existe un homéomorphisme φ tel que $f \circ \varphi$ ait sa série de Fourier uniformément convergente. Une démonstration élégante est due à Salem (1944). Aussi bien Salem que Bohr et Pál utilisent une propriété des représentations conformes du disque unité sur l'intérieur d'une courbe de Jordan simple, due à L. Fejér (c'est une application facile de son théorème de sommabilité des séries de Fourier) : si

$$\Phi(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n$$

est une telle représentation conforme, la série à droite converge uniformément pour $|z| \leq 1$. En choisissant convenablement les fonctions à variation bornée Δf et g, la courbe décrite par $(f + \Delta f + ig)(t)$ quand t décrit $\mathbf{T}$ est une courbe de Jordan ; d'après le théorème de Fejér, c'est aussi la courbe décrite par $\Phi(z)$ quand $|z| = 1$; on peut écrire

$$\Phi(e^{2\pi it}) = (f + \Delta f + ig)(\varphi(t))$$

et comme la série de Fourier d'une fonction continue à variation bornée est uniformément convergente, on obtient le résultat annoncé.

Dans la démonstration, il est essentiel que f soit réelle. L'extension du théorème de Bohr et Pál à des fonctions f complexes est restée longtemps un problème ouvert (cf. Alpár (1978)). Il a été résolu positivement, indépendamment, par Saakian (1979) et par Kahane et Katznelson (1978). J'indiquerai une variante de la preuve de Kahane et Katznelson.

Peut-on, dans les énoncés précédents, remplacer "série de Fourier uniformément convergente" par "série de Fourier absolument convergente" ? C'est un problème de Lusin (cf. N. K. Bari, Trigonometričeskie ryadi, Moscou 1961, p. 158). La réponse est négative. Cela a été montré par Kahane et Katznelson (1981) pour f complexe, et par Olevskii (1981) pour f réelle. J'indiquerai la preuve de Kahane et Katznelson, et seulement un aperçu de celle d'Olevskii.

Avec la solution de ce problème de Lusin, Saakian avait établi un résultat curieux. Soit f une fonction continue réelle sur le cercle, et $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ une suite positive tendant vers 0 à l'infini (aussi lentement que l'on veut). Il existe un homéomorphisme du cercle, φ, tel que les coefficients de Fourier de $f \circ \varphi$, multipliés par (ε_n), forment une suite sommable

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} |\widehat{f \circ \varphi}(n)| \, \varepsilon_n < \infty .$$

J'indiquerai une preuve de ce résultat, que j'ai trouvée avec Katznelson, et qui introduit la notion de "distribution topologique" d'une fonction réelle définie et continue sur le cercle. Nous avons également, avec Katznelson, remarqué que le résultat de Saakian ne s'étend pas à f complexe. C'est implicite dans notre note de 1981.

Explicitons les notations.

$\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ est le cercle, quelquefois identifié à l'intervalle $[0,1[$.

$C(\mathbf{T})$ est l'espace des fonctions continues sur $\mathbf{T}$, réelles ou complexes (on précisera dans chaque cas).

H est l'ensemble des homéomorphismes de $\mathbf{T}$.

$\omega(\delta)$ $(\delta \geq 0)$ est une fonction continue strictement croissante telle que $\omega(0) = 0$.

H^{ω} est l'ensemble des homéomorphisme $\varphi \in H$ dont le module de continuité est majoré par $\omega(\delta)$.

$U(\mathbf{T})$ est l'ensemble des fonctions $f \in C(\mathbf{T})$ dont la série de Fourier est uniformément convergente, au sens

$$f(t) = \lim_{N \to \infty} \text{unif} \sum_{-N}^{N} \hat{f}_n \, e^{2\pi i n t}.$$

$A(\mathbf{T})$ est l'ensemble des fonctions $f \in C(\mathbf{T})$ dont la série de Fourier est absolument convergente, c'est-à-dire

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} |\hat{f}_n| < \infty$$

$\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ est une suite positive tendant vers 0 à l'infini.

$A_{\varepsilon}(\mathbf{T})$ est l'ensemble des fonctions $f \in C(\mathbf{T})$ telles que

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \varepsilon_n |\hat{f}_n| < \infty.$$

Les résultats mentionnés plus haut s'énoncent ainsi.

1. (Bohr et Pál ; Salem). Pour toute $f \in C(\mathbf{T})$ réelle, il existe $\varphi \in H$ tel que $f \circ \varphi \in U(\mathbf{T})$.

2. (Saakian ; Kahane et Katznelson). Même énoncé avec f complexe.

3. (Kahane et Katznelson). Il existe $f \in C(\mathbf{T})$ complexe telle que, pour tout $\varphi \in H$, on ait $f \circ \varphi \notin A(T)$.

4. (Olevskii). Même énoncé avec f réelle.

5. (Saakian). Pour toute $f \in C(\mathbf{T})$ réelle et toute suite ε tendant vers 0, il existe $\varphi \in H$ tel que $f \circ \varphi \in A_{\varepsilon}(T)$.

6. (Kahane et Katznelson). Cet énoncé est faux pour f complexe.

Ajoutons une généralisation de 2.

7. Pour tout compact K de l'espace de Banach $C(\mathbf{T})$, il existe $\varphi \in H$

<u>tel que</u> $f \circ \varphi \in U(\mathbf{T})$ <u>pour toute</u> $f \in K$.

On a les implications

$$7 \Longrightarrow 2 \Longrightarrow 1 \quad , \quad 4 \Longrightarrow 3 \quad , \quad 6 \Longrightarrow 3.$$

On donnera les preuves de 7, 5, 6, et seulement un aperçu de 4 (la méthode d'Olevskii est celle qui avait été proposée comme problème lors de l'exposé oral). Pour préparer 7, on donnera quelques résultats sur $U(\mathbf{T})$, intéressants en eux-mêmes.

Cas de $U(\mathbf{T})$.

Soit E l'ensemble triadique de Cantor construit sur $[0,1]$. Ainsi $E = \bigcap_k E_k$, où E_k est réunion de 2^k intervalles de longueur commune $d_k = 3^{-k}$.

8. <u>Toute fonction continue sur</u> $\mathbf{T}$, <u>qui est linéaire sur chaque intervalle contigü à</u> E, <u>appartient à</u> $U(\mathbf{T})$.

Preuve. Ecrivons $f \in C(\mathbf{T})$ sous la forme

$$f = \sum_1^\infty f_k$$

où f_k est la différence entre l'interpolée linéaire de f restreinte à ∂E_{k+1} et l'interpolée linéaire de f restreinte à ∂E_k. Ainsi

$$\|f_k\|_{C(\mathbf{T})} \le 2\|f\|_{C(\mathbf{T})} \quad , \quad \lim_{k\to\infty} \|f_k\|_{C(\mathbf{T})} = 0 \quad ,$$

$$\|f_k + f_{k+1} + \dots\|_{C(\mathbf{T})} \le 2\|f\|_{C(\mathbf{T})}.$$

Soit

$$D_n(t) = \frac{\sin(2n+1)\pi t}{\sin \pi t}$$

le noyau de Dirichlet, et

$$S_n(f) = f * D_n = \sum_{-n}^{n} \hat{f}_m e^{2\pi i m t}.$$

Supposons $\|f\|_{C(\mathbf{T})} \le 1$. Majorons d'abord $|S_n(f_k + f_{k+1} + \dots)|$. Etant donné $t \in \mathbf{T}$, il y a au plus deux intervalles de E_k à distance de t inférieure à

$(\frac{1}{2}d_{k-1} - d_k)$, au moins de quatre intervalles de E_k à distance de t inférieure à $(\frac{1}{2}d_{k-2} - d_{k-1})$, etc..., moins de 2^ℓ intervalles de E_k à distance de t inférieure à $(\frac{1}{2}d_{k-\ell} - d_{k-\ell+1})$. Comme $f_k + f_{k+1} +$ est porté par E_k et de norme ≤ 2,

$$|S_n(f_k + f_{k+1} + \ldots)(t)| \leq 2\int_{E_k} |D_n(t-s)|\,ds$$

$$\leq 4d_k\Big(2n+1+\sum_{\ell=2}^{k} \frac{2^{\ell-1}}{\sin(\pi(\frac{1}{2}d_{k-\ell} - d_{k-\ell-1}))}\Big)$$

(1) $$\leq C\,n\,d_k + C'$$

où C et C' sont des constantes absolues.

Majorons maintenant $|S_n(f_k) - f_k|$. Posons

$$f_k = \sum_\ell f_{k\ell}$$

où chaque $f_{k\ell}$ est porté par un intervalle $E_{k\ell}$ de longueur d_k, la réunion des $E_{k\ell}$ étant E_k. Des calculs classiques donnent

$$|S_n(f_{k\ell}) - f_{k\ell}| \leq \frac{C}{n\,d_{k+1}}$$

et

$$|S_n(f_{k\ell})(t)| \leq \frac{C}{n^2 d\, d_{k+1}}$$

si d est la distance de t à E_k. En ajoutant,

(2) $$|S_n(f_k) - f_k| \leq C\Big(\frac{1}{n\,d_{k+1}} + \frac{1}{n^2 d_{k+1}^2}\Big).$$

Quand n est donné, on choisit $\varkappa$ de façon que $d_{\varkappa+1} < \frac{1}{n} \leq d_\varkappa$; on utilise (1) pour $k = \varkappa$ et (2) pour $k < \varkappa$, et on obtient $|S_n(f)| < C$. Quitte à approcher d'abord f par un polynôme trigonométrique, on voit que $S_n(f)$ converge vers f dans $C(\mathbf{T})$. CQFD.

Naturellement, on peut remplacer l'ensemble de Cantor construit sur $[0,1]$ par l'ensemble de Cantor construit sur un sous-intervalle si f est portée par ce sous-intervalle. En tous cas $\|f\|_{U(T)} \leq C\|f\|_{C(T)}$, C étant une constante absolue.

Comme application du théorème 8, toute fonction continue sur un ensemble triadique de Cantor est la restriction d'une fonction appartenant à U(T). On sait que c'est faux pour A(T).

Voici une autre application.

9. <u>Soit</u> ψ_o <u>une application croissante de</u> $[0,1]$ <u>sur</u> $[0,1]$, <u>constante sur les intervalles contigüs à l'ensemble de Cantor</u> E. <u>Pour toute</u> $f \in C(\mathbf{T})$, <u>la fonction composée</u> f ψ_o <u>appartient à</u> $U(\mathbf{T})$.

Désormais ψ_o est la fonction de Lebesgue construite sur E, c'est-à-dire que les accroissements de ψ_o sur des portions égales de E sont égales. Convenons que $\psi_o(t) = 0$ pour $t \leq 0$ et $\psi_o(t) = 1$ pour $t \geq 1$. Posons

$$\psi_1(t) = \psi_o(3(t-\tfrac{1}{3}))$$

$$\psi_{2,0}(t) = \psi_o(9(t-\tfrac{1}{9}))$$

$$\psi_{2,1}(t) = \psi_o(9(t-\tfrac{1}{9}-\tfrac{1}{3}))$$

$$\psi_{2,2}(t) = \psi_o(9(t-\tfrac{1}{9}-\tfrac{2}{3}))$$

$$\psi_{k,\ell}(t) = \psi_o(3^k(t-3^{-k}-\ell 3^{-k+1})) \qquad (0 \leq \ell < 3^{k-1})$$

et soit $\delta_o, \delta_1, \delta_2, \ldots \delta_k, \ldots$ une suite strictement positive telle que

$$\delta_o + \delta_1 + 3\delta_2 + \ldots + 3^{k-1}\delta_k + \ldots = 1. \tag{3}$$

Posons

$$\varphi = \delta_o\psi_o + \delta_1\psi_1 + \delta_2(\psi_{20}+\psi_{21}+\psi_{22}) + \ldots + \delta_k \sum_{0\leq \ell<3^{k-1}} \psi_{k\ell} + \ldots. \tag{4}$$

C'est une application continue strictement croissante de $[0,1]$ sur $[0,1]$. Donc $\varphi \in H$.

10. Soit K un compact dans $C(\mathbf{T})$. Il existe une suite δ_k vérifiant (3) telle que, φ étant l'homéomorphisme de $\mathbf{T}$ défini par (4), on ait $f \;\; \varphi \in U(\mathbf{T})$ pour toute $f \in K$.

Preuve. Désignons par $E_o, E_1, E_{k\ell}$ les supports des mesures dérivées de $\psi_o, \psi_1, \psi_{k\ell}$. Ainsi $E_o = E$, l'ensemble de Cantor construit sur $[0,1]$, E_1 est l'homothétique de E dont le support convexe est l'intervalle $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, $E_{k\ell}$ est l'homothétique de E dont le support convexe est l'intervalle $\left[3^{-k} + \ell 3^{-k+1}\right.$, $\left.2.3^{-k} + \ell 3^{-k+1}\right]$.

Etant donné $f \in K$ et φ donné par (4) (on choisira les δ_k plus tard), posons $g = f \circ \varphi$. Soit g_o l'interpolée linéaire de $g\big|_{E_o}$, c'est-à-dire la fonction égale à g sur E_o, continue sur $\mathbf{T}$, linéaire sur les intervalles contigüs à E_o. Soit g_1 l'interpolée linéaire de $(g-g_o)\big|E_1$, et pour tout $k \geq 2$, soit $g_k = \Sigma\, g_{k\ell}$. Comme la réunion de E_o, E_1 et des $E_{k\ell}$ est dense sur $\mathbf{T}$ et que, pour chaque k, $g_o + g_1 + \ldots + g_k$ est l'interpolée linéaire de g restreinte à $E_o \cup E_1 \cup \quad \cup E_k$, où $E_k = \bigcup_\ell E_{k\ell}$, on a l'égalité

$$g = g_o + g_1 + \ldots + g_k + \ldots$$

dans $C(\mathbf{T})$. Si la série du second membre converge dans $U(\mathbf{T})$, on a donc $g \in U(\mathbf{T})$. Pour qu'il en soit ainsi, il suffit que pour tout k et ℓ on ait

$$\|g_{k\ell}\|_{U(\mathbf{T})} < C\, 4^{-k}$$

donc il suffit que

$$\|g_{k\ell}\|_{C(\mathbf{T})} \leq 4^{-k}$$

(voir la remarque après la preuve de 8). Or $\|g_{k\ell}\|_{C(\mathbf{T})}$ est majorée par l'oscillation de g sur $E_{k\ell}$, qui est l'oscillation de f sur $\varphi(E_{k\ell})$. Or le diamètre de $\varphi(E_{k\ell})$ est

$$\varepsilon_k = \delta_k + \delta_{k+1} + 3\delta_{k+2} + \ldots + 3^\ell \delta_{k+\ell+1} + \ldots$$

Pour avoir $f \circ \varphi \in U(T)$, il suffit donc que

$$\omega_f(\varepsilon_k) \leq 4^{-k} \qquad (k = 2, 3, \ldots.)$$

ce qui est possible par un choix des δ_k ne dépendant que de K. CQFD.

7 est un corollaire de 10. L'intérêt de cette démonstration est de jouer avec l'ensemble triadique de Cantor. La démonstration de Kahane-Katznelson (   ) est un peu plus directe.

Cas de $A_\varepsilon(\mathbf{T})$.

Commençons par décrire la distribution topologique d'une fonction continue positive à support compact sur R, non identiquement nulle.

Le cas le plus simple est celui d'une fonction unimodale, c'est-à-dire croissante puis décroissante (au sens large). Désignons par G l'ensemble des fonctions continues unimodales à support compact, $\not\equiv 0$. Deux fonctions de G ont même distribution topologique (c'est-à-dire qu'on passe de l'une à l'autre par un homéomorphisme croissant de $\mathbf{R}$: $g_2 = g_1 \circ \varphi$) si et seulement si elles admettent les mêmes valeurs-paliers (valeur-palier = valeur prise sur un intervalle de constance) dans le même ordre.

11. <u>Toute fonction</u> $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^+$ <u>continue, à support compact</u>, $\not\equiv 0$, <u>s'écrit de manière unique sous la forme</u>

$$f = g - \Sigma\, g_k + \Sigma\, g_{k_1k_2} - \Sigma\, g_{k_1k_2k_3} + \ldots \tag{5}$$

<u>où les fonctions écrites au second membre appartiennent à</u> G, <u>chaque fonction</u> $g_{k_1\ldots k_{\ell-1}k_\ell}$ <u>est portée par un intervalle de constance de</u> $g_{k_1\ldots k_{\ell-1}}$, <u>et</u> $g_{k_1\ldots k_{\ell-1}k_\ell} \leq g_{k_1\ldots k_{\ell-1}}$.

Preuve. Si une telle décomposition existe, g est nécessairement la plus petite fonction de G supérieure (au sens large) à f.

Alors $f - g$ est une somme de fonctions positives portées par les intervalles de constance de g, soit

$$f - g = \Sigma\ f_k .$$

Chaque g_k est nécessairement la plus petite fonction de G supérieure à f_k, et ainsi de suite. Inversement, si g, les g_k, les $g_{k_1k_2}$ etc... sont construits par ce procédé, on a bien (5).

La décomposition (5) décrit la distribution topologique de f au sens suivant : pour tout homéomorphisme croissant de $\mathbf{R}$, soit φ, on a

$$f \circ \varphi = g \circ \varphi - \Sigma\, g_k \circ \varphi + \Sigma\, g_{k_1k_2} \circ \varphi - \Sigma\, g_{k_1k_2k_3} \circ \varphi + \ldots\ldots$$

et le second membre est la décomposition (5) associée à $f \circ \varphi$.

Inversement, si pour deux fonctions f et f^* les développements correspondants (5) et (5^*) sont tels qu'à chaque stade les sommes partielles aient même distribution topologique, f et f^* ont aussi même développement topologique.

12. <u>Pour toute suite</u> $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ <u>positive tendant vers</u> 0 <u>à l'infini, et pour toute fonction</u> $f \in C(\mathbf{T})$ <u>réelle, il existe un homéomorphisme</u> $\varphi \in H$ <u>tel que</u> $f \circ \varphi \in A_\varepsilon(\mathbf{T})$.

Preuve. Quitte à ajouter une constante et à translater on peut supposer $f \geq 0$, $f(0) = f(1) = 0$. Alors, sur l'intervalle $[0,1]$, f s'écrit sous la forme (5), g étant portée par l'intervalle $[0,1]$. Désignons par g^* une fonction ayant même support et même distribution topologique que g, et voisine d'une fonction "triangle" Δ au sens que

$$\|g^* - \Delta\|_{A(T)} \leq \alpha_o \quad \text{donné}$$

(Δ est la fonction triangle ayant même support et même hauteur que g, et pour obtenir g^* on lui ajoute des fonctions ou dont la somme des normes dans $A(T)$ soit inférieure à α_o). De même soit g_k^*, $g_{k_1k_2}^*$, ... des fonctions ayant même distribution topologique que g_k, $g_{k_1k_2}$, ... ordonnées de façon qu'à chaque étape les fonctions

$$g^* - \Sigma g^*_k + \Sigma g^*_{k_1k_2} \;\ldots\ldots + (-1)^\ell \,\Sigma g^*_{k_1k_2\ldots k_\ell}$$

et

$$g - \Sigma g_k + \Sigma g_{k_1k_2} \;\ldots + (-1)^\ell \,\Sigma g_{k_1k_2\ldots\, k_\ell}$$

aient même distribution topologique. On peut les choisir de façon que, pour des fonctions triangles convenables, on ait

1. $\|g^*_{k_1k_2\ldots k_\ell} - \Delta_{k_1k_2\ldots k_\ell}\|_{A(\mathbf{T})} < \alpha_{k_1k_2\ldots k_\ell}$

2. $\|\Delta_{k_1k_2\ldots k_\ell}\|_{A_\varepsilon(\mathbf{T})} < \alpha_{k_1k_2\ldots k_\ell}$

(la seconde condition est satisfaite dès que le support de la fonction triangle $\Delta_{k_1k_2\ldots k_\ell}$ est assez petit), la suite $\alpha_{k_1k_2\ldots k_\ell}$ étant choisie de manière que

$$\alpha_o + \Sigma \alpha_k + \Sigma \alpha_{k_1k_2} \;\ldots\ldots + (-1)^\ell \,\Sigma g^*_{k_1\ldots k_\ell} + \ldots$$

converge à la fois dans $C(\mathbf{T})$ et dans $A_\varepsilon(\mathbf{T})$, vers une fonction f^* ayant même distribution topologique que f. On définit $\varphi \in H$ par $f^* = f \circ \varphi$, et on a bien $f \circ \varphi \in U(\mathbf{T})$. CQFD.

Remarques 1. L'hypothèse $\lim \varepsilon_n = 0$ a été utilisée dans la condition 2. ci-dessus. 2. Il est facile de réaliser

$$f \circ \varphi \in A_\varepsilon(\mathbf{T}) \cap U(\mathbf{T}).$$

3. Les énoncés 5 et 12 sont les mêmes.

Soit maintenant ω une application strictement croissante de $\mathbf{R}^+$ sur $\mathbf{R}^+$, et soit H^ω l'ensemble des homéomorphismes $\varphi \in H$ dont le module de continuité est majoré par $\omega(\delta)$:

$$|\varphi(t) - \varphi(t')| < \omega(\delta) \quad \text{si} \quad |t-t'| \leq \delta.$$

13. <u>La fonction</u> $\omega(\delta)$ <u>étant donnée, il existe une suite</u> $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ <u>tendant vers</u> 0 <u>à l'infini et une fonction réelle</u> $f \in C(\mathbf{T})$ <u>tels que, pour tout homéomorphisme</u> $\varphi \in H^\omega$, <u>on ait</u> $f \circ \varphi \notin A_\varepsilon(\mathbf{T})$.

Preuve. Soit χ_ν la fonction indicatrice de l'intervalle $[2^{-\nu}, 2^{-\nu+1}]$.

Nous poserons

$$(6) \qquad f(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} h_\nu \chi_\nu(t) \sin(\pi 2^{\nu+1} m_\nu t)$$

$h_\nu \searrow 0$, m_ν entiers $\nearrow \infty$; alors $f \in C(\mathbf{T})$. Les h_ν et m_ν seront déterminés plus tard.

Supposons $\varphi \in H^\omega$, et soit ψ l'homéomorphisme réciproque. Fixons ν. Comme les intervalles

$$I_{\nu,j} = [2^{-\nu} + j2^{-\nu} m_\nu^{-1}, 2^{-\nu} + (j+1)2^{-\nu} m_\nu^{-1}] \quad (j = 0, 1, \ldots m_\nu - 1)$$

sont disjoints, l'un au moins des intervalles $\psi(I_{\nu,j})$ a une longueur inférieure à m_ν^{-1} ; désignons-le par $J = \psi(I)$. Soit I^+ et I^- les deux sous-intervalles de I, de longueur $\frac{|I|}{4}$, définis par

$$I^+ = \left\{t \in I \,\middle|\, \sin(\pi 2^{\nu+1} m_\nu t) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\right\} = \left\{t \in I \,\middle|\, f(t) \geq h_\nu \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

$$I^- = \left\{t \in I \,\middle|\, \sin(\pi 2^{\nu+1} m_\nu t) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\} = \left\{t \in I \,\middle|\, f(t) \leq -h_\nu \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

Posons $J^+ = \psi(I^+)$, $J^- = \psi(I^-)$. On a

$$\omega(|J^+|) \geq |I^+| \quad , \quad \omega(|J^-|) \geq |I^-|$$

donc

$$|J^+| \geq \delta_\nu \quad , \quad |J^-| \geq \delta_\nu$$

où δ_ν est défini par

$$\omega(\delta_\nu) = 2^{-\nu-2} m_\nu^{-1} = \frac{|I|}{4}.$$

Soit K^+ resp. K^- un sous-intervalle de J^+ resp. J^- de longueur δ_ν, et

$$\theta_\nu(t) = \delta_\nu^{-1}(1_{K^+}(t) - 1_{K^-}(t)) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{\theta}_\nu(n)\, e^{2\pi i n t}.$$

On a

$$|\hat{\theta}_\nu(n)| \leq \begin{cases} 2\pi |n| m_\nu^{-1} \\ 2 \\ |n|^{-1} \delta_\nu^{-1} \end{cases}$$

donc, en choisissant $m_{\nu+1} > 2\delta_\nu^{-1}$, on a

$$\sup_n \left|\sum_\nu \hat{\theta}_\nu(n)\right| \leq C, \quad \text{constante absolue.}$$

Soit α_ν une suite positive tendant vers 0 et non sommable, par exemple $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$. Posons

$$\varepsilon_n = \varepsilon_{-n} = \left|\sum_\nu \alpha_\nu \, \hat{\theta}_\nu(n)\right| .$$

C'est une suite positive, tendant vers 0 à l'infini.

Posons $g = f \circ \varphi$, et $\theta = \sum \alpha_\nu \theta_\nu$. On a

$$\int_{\mathbf{T}} g\,\theta \geq \sum \alpha_\nu \int g\,\theta_\nu \geq \sqrt{2}\,\sum \alpha_\nu h_\nu .$$

Or le premier membre est fini si g appartient à $A_\varepsilon(\mathbf{T})$. Donc, si on choisit la suite h_ν de façon que $\sum \alpha_\nu h_\nu = \infty$, on a $f \circ \varphi \notin A_\varepsilon(\mathbf{T})$ lorsque $\varphi \in H^\omega$. CQFD.

14. Il existe $\varepsilon\,(\varepsilon_n)_{n\in Z}$ tendant vers 0, et $F \in C(T)$, complexe, tels que pour tout homéomorphisme $\varphi \in H$, on ait $F \ \varphi \notin A_\varepsilon(T)$.

Preuve. Soit $g \in C(\mathbf{T})$, réelle, telle que $g(t) = t$ au voisinage de 0, et soit ε et f donnés comme en 13 lorsque $\omega(\delta) = (\log \frac{1}{\delta})^{-1}$. Si l'on avait $F \circ \varphi \in A_\varepsilon(\mathbf{T})$, on aurait $g \circ \varphi \in A(\mathbf{T})$, donc φ serait une fonction monotone appartenant localement à $A(\mathbf{T})$ au voisinage de $\psi(0)$ (ψ étant l'homéomorphisme réciproque de φ), donc le module de continuité de φ dans un voisinage de $\psi(0)$ satisfait

$$\omega_\varphi(\delta) = O((\log \frac{1}{\delta})^{-1})$$

(Katznelson ; cf. J.-P. Kahane Séries de Fourier absolument convergentes, p. 22), et il en résulterait $f \circ \varphi \in A_\varepsilon(\mathbf{T})$, une contradiction. Donc $F \circ \varphi \notin A_\varepsilon(\mathbf{T})$. CQFD.

14 est une autre formulation de 6.

Cas de $A(\mathbf{T})$.

Quitte à choisir convenablement les h_ν et m_ν, la fonction f donnée par (6) répond négativement au problème de Lusin, c'est-à-dire que $f \circ \varphi \notin A(\mathbf{T})$

pour tout $\varphi \in H$. La démonstration repose sur le lemme suivant (proposé comme problème dans l'exposé oral, et démontré dans la note d'Olevskii).

15. Il existe une suite $\omega_\nu \to \infty$ telle que, si f a la même distribution topologique que $1_{[0,\frac{1}{2}]}(t) \sin 2\pi mt$, et est portée par $[0, \frac{1}{2}]$,

$$\|f\|_{A(\mathbf{T})} > \omega_\nu .$$

La conjecture naturelle est qu'on peut choisir $\omega_\nu = c \log \nu$.

Si T est remplacé par un groupe p-adique, le problème de Lusin admet une solution positive (B. B. Wells 1975).

Le mouvement brownien et les homéomorphismes de $\mathbf{T}$.

La fonction de Wiener complexe sur $[0,1]$, nulle en 0, s'écrit

$$X(t) = X_o t + \sum_{n\in\mathbf{Z}, n\neq 0} X_n \frac{e^{2\pi int}}{2\pi in}$$

où les X_n sont des variables aléatoires gaussiennes complexes normalisées et indépendantes $(E(X_n) = 0 \ , \ E(|X_n|^2) = 1)$.

Soit φ un homoémorphisme croissant de $[0,1]$. Posons $X(t) = X(\varphi(t))$, et $Y_o = X_o$. Les coefficients de Fourier de $Y(t) - Y_o t$ appartiennent à l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ de variables gaussiennes engendré par les X_n. Ecrivons

$$Y(t) = Y_o t + \sum_{n\in\mathbf{Z}, n\neq 0} Y_n \frac{e^{2\pi int} - 1}{2\pi in}$$

ou, ce qui revient au même,

$$Y' \sim \sum_{n\in\mathbf{Z}} Y_n e^{2\pi int}$$

Y' étant la distribution de Schwartz dérivée de Y.

La distribution aléatoire X' ("distribution brownienne") définit un isomorphisme de $L^2(\mathbf{T})$ sur $\mathcal{H}$

$$f \rightsquigarrow \int_T f\,\overline{X'} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_n\,\overline{X}_n\ .$$

Désignons par ψ l'homéomorphisme récirpoque de φ. Ainsi, pour toute fonction f assez régulière,

$$\int_{\mathbf{T}} f\,\overline{Y'} = \int f\circ\psi\,\overline{X'}$$

qui est une variable gaussienne de norme $(\int_{\mathbf{T}} |f\circ\psi|^2)^{1/2}$, soit $\int_{\mathbf{T}} |f|^2\,d\varphi$.

Donc Y' définit un isomorphisme de $L^2(\mathbf{T}, d\varphi)$ sur $\mathcal{H}$ par la formule

$$\int \rightsquigarrow \int_T f\,\overline{Y'} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_n\,\overline{Y}_n\ .$$

Par conséquent, les Y_n sont des variables gaussiennes normalisées, et on a

$$E(Y_n\,\overline{Y}_m) = \int_{\mathbf{T}} e^{2\pi imt}\,e^{-2\pi int}\,d\varphi(t) = \hat{\varphi}(n-m)$$

(Y_n) est donc un processus gaussien stationnaire sur $\mathbb{Z}$, dont la fonction de corrélation est la suite définie-positive $\hat{\varphi}(n)$, transformée de Fourier-Stieltjes de la mesure $d\varphi$.

On peut vérifier que

$$\text{p. s.} \qquad \sum_{n\neq 0} \left|\frac{Y_n}{n}\right| = \infty$$

donc p. s. la fonction $Y(t) - Y_0 t$ n'appartient pas à $A(\mathbf{T})$. En posant $X_0(t) = X(t) - X_0 t$, on a donc presque sûrement $X_0\circ\varphi \notin A(\mathbf{T})$ quand φ est fixé. Est-il vrai que presque sûrement $X_0\circ\varphi \notin A(\mathbf{T})$ pour tout φ ? Si c'est vrai, c'est une autre façon de répondre négativement au problème de Lusin.

Références

BOHR, H. Über einen Satz von J. Pál. Acta Scient. Math. (Szeged) 7 (1935), 129-135.

SALEM, R. On a theorem of Bohr and Pál. Bull. Amer. Math. Soc. 50 (1944), 579-580.

ALPAR, L. Sur les transformées des séries de Fourier absolument convergentes (en hongrois). Mat. Lapok 18 (1967), 97-104 (voir p. 98) et Fourier analysis and approximation Theory. Coll. Math. Soc. J. Bolyai 19 (1978), 918-919.

KAHANE, J.-P. et KATZNELSON, Y. Séries de Fourier des fonctions bornées. (Orsay 1978, à paraître dans Studies in Pure Mathematics, volume en hommage à Paul Turan).

SAAKIAN, A. A. О свойствах коэффициентов Фурье у суперпозиции функций. DAN SSSR, 248 (1979).

KAHANE, J.-P. et KATZNELSON, Y. Homéomorphismes du cercle et séries de Fourier absolument convergentes. C. R. Acad. Sc. Paris 292 (1981), 271-273.

OLEVSKII, A. M. Замена переменной и абсолютная сходимость ряда Фурье. Doklady Akademii Nauk SSSR 256 (1981), 284-287.

SAAKIAN, A. A. Интегральные модули гладкости и коэффициенты Фурье суперпозиции функций. Mat. Sbornik 1979, 597-608.

WELLS, B. B. Rearrangements of functions on the ring of integers of a p-series field. Pacific J. Math. 65 (1979), 253-259.

ASYMPTOTIC FRACTIONAL CARTESIAN PRODUCTS AND SIDON SETS.

Thomas KÖRNER

1. INTRODUCTION.

The object of this talk is to give a simple account of the contents of a joint paper with R. C. Blei entitled "Random Fractional Products of Sets". The simplicity is achieved by proving less powerful results.

Recall first that if G is a discrete Abelian group with dual $\hat{G}$ then a set $E \subseteq G$ is called p Sidon if, whenever $f : \hat{G} \longrightarrow \mathbb{C}$ is a continuous function with spectrum in E (i. e. with $\hat{f}(\chi) = 0$ for $\chi \notin E$) then

$$\|\hat{f}\|_p \leq K \|f\|_\infty$$

where K is a constant independent of f $\left[1 \leq p \leq 2\right]$. We call E an <u>exact</u> p <u>Sidon set</u> if it is p Sidon but is not q Sidon for any $q > p$.

How can we construct such sets. Recall that an infinite set $F = \{\chi_1, \chi_2, \ldots\} \subseteq G$ is said to be independent if for each N the equation

$$\prod_{j=1}^{N} \chi_j^{n(j)} = 1$$

has no, non trivial, solutions in integers (i. e. $\prod_{j=1}^{N} \chi_j^{n(j)} = 1$ implies $n(1) = n(2) = \ldots$ $\ldots = n(N) = 0$). Some discrete Abelian groups contain such independent sets (consider $\mathbb{Z}^\omega = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \ldots$ with $\chi_j = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, having a 1 in the jth place) and some do not (consider $\mathbb{Z}$). For simplicity we shall suppose that G does contain an infinite independent set, though the ideas discussed can be extended to other groups (for example, in $\mathbb{Z}$, if $m(j+1)/m(j) \longrightarrow \infty$ then the set $\{m(1), m(2), \ldots\}$ is "nearly independent").

The following result due to Johnson and Woodward (Indiana Univ. Math. J. 24 (1974), 161-167) gives "typical" p Sidon sets for certain p.

THEOREM 1. Suppose G is a discrete Abelian group containing an infinite independent set F. Then $F^n = \{(u_1, u_2, \ldots, u_n) : u_j \in F\}$ is an exact $2n/n+1$ Sidon set in G^n.

Although the technical details are complicated, the argument which established it has a classical "Kahane and Salem" feel involving Riesz products and probabilistic arguments. Blei (Ann. Inst. Fourier, Grenoble 29, 2 (1979), 77-105) realised that they could be further extended by the use of the new idea of a "fractional Cartesian product".

Suppose $E \subseteq \mathbb{N}^n$ (where $\mathbb{N}$ denotes the strictly positive integers). For each positive integer s we define $\psi_E(s)$ by $\psi_E(s) = \max\{|E \cap (A_1 \times \ldots \times A_n)| : A_i \subseteq \mathbb{N}, |A_1| = \ldots = |A_n| = s\}$. (Here as elsewhere $|A|$ means the number of elements in A). Thus $\psi_E(s)$ is the maximum number of points of E that can be "caught" by a "net" $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ each of whose sides $A_1, A_2, \ldots, A_n$ contains s points. For example if $E(1) = \{(m, 0, \ldots 0) : m \geq 1\}$ then $\psi_{E(1)}(s) = s$, if $E(2) = \{(m, r, 0, \ldots 0) : m, r \geq 1\}$ then $\psi_{E(2)}(s) = s^2$ and if $E(3) = \{(m, m, \ldots m) : m \geq 1\}$ then $\psi_{E(3)}(s) = s$. We say that E is an α product in $\mathbb{N}^n$ $[1 \leq \alpha \leq n]$ if we can find constants $K_1, K_2 > 0$ such that

$$K_1 s^\alpha \geq \psi(s) \geq K_2 s^\alpha \quad \text{for all } s \geq 1.$$

Thus $E(1)$ and $E(3)$ are 1-products but $E(2)$ is a 2-product. Blei proved the following theorem.

THEOREM 2. Suppose G is a discrete Abelian group containing an infinite independent set $F = \{\chi_1, \chi_2, \ldots\}$. Then if E is an α product in $\mathbb{N}^n$ and $F(E,n) = \{(\chi_{m(1)}, \chi_{m(2)}, \ldots, \chi_{m(n)}) : (m(1), m(2), \ldots, m(n)) \in E\}$ it follows that

$F(E,n)$ is an exact $2\alpha/\alpha+1$ Sidon set.

That Theorem 2 implies Theorem 1 is readily seen on noting that $F^n = F(\mathbb{N}^n, n)$ is an n-product in $\mathbb{N}^n$.

Moreover Blei was able to construct J/K cartesian products in $\mathbb{N}^n$ where $n = \binom{J}{K}$ and $J \geq K \geq 1$ are integers. Thus Theorem 2 gave him examples of exact $2J/(J+K)$ Sidon sets in G^n. A glueing argument then enabled him to construct exact α Sidon sets in $G^{\omega} = G \times G \times \ldots$ However he could not construct α Cartesian products directly and left open the following combinatorial question.

Question 3. Do there exist a Cartesian products in $\mathbb{N}^n$ for all $1 \leq \alpha \leq n$?

We do not know the answer to this question which apparently has an independent graph theoretic interest.

2. ASYMPTOTIC α PRODUCTS.

In spite of this apparent impasse we can produce something which is almost as useful from the point of view of harmonic analysis. Suppose $E \subseteq \mathbb{N}^n$ and $\psi_E(s)$ is defined as before. We say that E is an asymptotic α product if we can find $K_1, K_2 > 0$ so that

(i) $$\psi_E(s) \leq K_1 s^{\alpha} \quad \text{for all} \quad s \geq 1$$

and

(ii) $$\limsup_{s\to\infty} \frac{\psi_E(s)}{s^{\alpha}} \geq K_2 .$$

We can generalize Theorem 2 to cover asymptotic α products.

THEOREM 2'. Suppose G is a discrete Abelian group containing an infinite independent set $F = \{\chi_1, \chi_2, \ldots\}$. Then if E is an asymptotic α product in $\mathbb{N}^n$ and $F(E,n) = \{(\chi_{m(1)}, \chi_{m(2)}, \ldots, \chi_{m(n)}) : (m(1), m(2), \ldots, m(n) \in E\}$ it follows that $F(E,n)$ is an exact $2\alpha/\alpha+1$ Sidon set.

It is, if not in the nature of things, at least in the nature of Kahane and Salem methods that asymptotic α products should turn out to be as easy to handle as α products. However although we do not know how to construct α products for all α we can construct asymptotic α products and this is what the rest of the talk will be concerned with. For convenience we shall take $n = 2$ but the generalization to any n is trivial.

THEOREM 4. <u>If</u> $1 \leq \alpha \leq 2$ <u>we can find an asymptotic</u> α <u>product in</u> $\mathbb{N}^2$.

It is easy to see that Theorem 4 has the following finite equivalent

THEOREM 4'. <u>Given</u> $1 \leq \alpha \leq 2$ <u>we can find constants</u> K_1, K_2 <u>with the following property. There exists a sequence</u> $1 \leq n(1) < n(2) < \ldots$ <u>and sets</u> $E(n(j)) \subseteq \{1,2,\ldots,n(j)\}^2$ <u>such that</u>

$$\psi_{E(n(j))}(s) \leq K_1 s^\alpha \quad \underline{\text{for all}} \quad s \geq 1$$

<u>and</u>

$$\frac{\psi_{E(n(j))}(n(j))}{n(j)^\alpha} \geq K_2 \quad \underline{\text{for all}} \quad j.$$

<u>Proof of the equivalence of theorems</u> 4 <u>and</u> 4'.

(At some stage in the argument the reader will see that this is trivial. He needs read no further).

Thm 4 $\Longrightarrow$ Thm 4'. Let E be an asymptotic α product with associated constants K_1 and $K_2/2$. By hypothesis we can find $1 \leq n(1) < n(2) < \ldots$ with $\psi_E(n(j))/n(j)^\alpha \geq K_2$. Now by definition we can find $A(j), B(j) \subseteq \mathbb{N}$ with $|A(j)| = |B(j)| = n(j)$ and $|F(j)| = \psi_E(n(j))$ where $F(j) = E \cap (A(j) \times B(j))$. Since $F(j) \subseteq E$ we have

$$\psi_{F(j)}(s) \leq \psi_E(s) \leq K_1 s^\alpha \qquad \text{for all} \quad s \geq 1.$$

By renaming coordinates we may suppose $F(j) \subseteq \{1, 2, \ldots, n(j)\}^2$ and we are done.

Thm 4' $\Longrightarrow$ Thm 4. Set $m(j) = n(1) + n(2) + \ldots + n(j-1)$ and take $F(j) = \{(m_1+m(j), m_2+m(j)) : (m_1, m_2) \in E(n(j))\}$.

$$F(j) \subseteq \{m(j)+1, m(j)+2, \ldots, m(j+1)\}^2$$

$$\psi_{F(j)}(s) \leq K_1 s^\alpha \quad \text{for all} \quad s \geq 1$$

and $\psi_{F(j)}(n(j)) \geq K_2\, n(j)^\alpha$.

Thus if we take $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} F(j)$ we observe that $\psi_E(n(j)) \geq \psi_{F(j)}(n(j))$ and so

$$\psi_E(n(j)) \geq K_2\, n(j)^\alpha.$$

On the other hand if $A, B \subseteq N$ and $|A| = |B| = s$ then, setting

$$A(j) = A \cap \{m(j)+1, m(j)+2, \ldots, m(j+1)\}$$

$$B(j) = B \cap \{m(j)+1, m(j)+2, \ldots, m(j+1)\},$$

we obtain

$$|E \cap (A \times B)| = \left|\bigcup_{j=1}^{\infty} F(j) \cap (A(j) \times B(j))\right|$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} |F(j) \cap (A(j) \times B(j))| \leq K_1 \sum_{j=1}^{\infty} |A(j)|^\alpha$$

$$\leq K_1 \left(\sum_{j=1}^{\infty} |A(j)|\right)^\alpha = K_1 |A|^\alpha = K_1 s^\alpha$$

as required.

Theorem 4 will thus follow if we can prove the following lemma.

LEMMA 5. <u>For each</u> $1 < \alpha < 2$ <u>there exists an</u> $L(\alpha)$ <u>with the following property. Given any</u> $M \geq L(\alpha)$ <u>there exists an integer</u> $N > M$ <u>and a set</u> $E \subset \{1, 2, 3, \ldots, N\}^2$ <u>such that</u>

$$\psi_E(s) \leq s^\alpha \quad \underline{\text{for all}} \quad s \geq L(\alpha)$$

<u>and</u> $\psi_E(N) \geq N^\alpha$.

<u>Proof of Theorem 5 from Lemma 5.</u> Take $K_1 = L(\alpha)^2$, $K_2 = 1$ and E as in Lemma 5. Then

$$\psi_E(s) \leq K_1\, s^\alpha \qquad \text{for all} \quad s \geq 1$$

and $\psi_E(N) \geq K_2 N^\alpha$.

Since N can be made as large as we please by increasing M we obtain Theorem 4' and thus Theorem 4 at once.

REMARK. Notice that Lemma 5 does not allow us to choose a specific N but merely to ensure that N is as large as we please. This weakness account for the fact that we can only use it to construct asymptotic α products and not α products, and appears to be intrinsic in the method by which we construct the sets.

3. THE CONSTRUCTION.

We obtain the set of Lemma 5 by semi probabilistic means. More exactly we use a probabilistic construction to obtain the following apparently even weaker version of Lemma 5.

LEMMA 5'. For each $1 < \alpha < 2$ there exists an $L(\alpha)$ with the following property. Given any $M \geq L(\alpha)$ there exists an integer $n > M$ and a set $F \subset \{1, 2, \ldots, n\}^2$ such that

(i) $$\psi_F(s) \leq s^\alpha \quad \text{for all} \quad M \geq s \geq L(\alpha)$$

and

(ii) $$|F| \geq n^\alpha.$$

We now obtain the set E Lemma 5 by removing points from F.

Proof of Lemma 5. Let $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_K\}$ say and set $F(r) = \{x_1, x_2, \ldots, x_{K-r}\}$. Since $F(K) = \emptyset$ we have $\psi_{F(K)}(s) = 0 < s^\alpha$ for all $s \geq M$ whilst $\psi_{F(0)}(n) = \psi_F(n) = |F| \geq n^\alpha$. Thus there exists $Q \geq 1$ and $N \geqslant M$ such that

(i) $$\psi_{F(Q-1)}(s) \leq s^\alpha - 1 \quad \text{for all} \quad s \geq M$$

yet

(ii) $$\psi_{F(Q)}(N) \geq N^\alpha.$$

Pick A and B with $|A| = |B| = N$ and $|F(Q) \cap (A \times B)| = \psi_{F(Q)}(N)$ and set $H = F(Q) \cap (A \times B)$. Then automatically

$$\psi_H(s) \le \psi_{F(Q)}(s) \le \psi_{F(Q-1)}(s) + 1 \le s^{\alpha} \quad \text{for all} \quad s \ge M$$

yet $\psi_H(N) = \psi_{F(Q)}(N) \ge N^{\alpha}$.

By renaming the coordinates we may suppose $H \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}^2$ and so, taking $E = H$, we are done.

Before proving Lemma 5' we perform a few trivial computations.

LEMMA 6. (i) If χ is a random variable with Poisson distribution with mean $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ then $\Pr(X < n) \le 2\lambda^{n+1}$.

(ii) If $0 < \delta < \frac{1}{2}$ then $|1 - \exp(-\delta) - \delta| \le 2\delta^2$.

(iii) There exists an integer $L(\alpha)$ such that if $L \ge L(\alpha)$ then $(2 - \alpha)L^{\alpha} > 2L$.

Proof. (i) Trivially

$$\Pr(X > n) = 1 - \sum_{r=0}^{n} \lambda^r e^{-\lambda}/r^1 = e^{-\lambda}(e^{\lambda} - \sum_{r=0}^{n} \lambda^r/r!)$$

$$= e^{-\lambda}\Big(\sum_{r=n+1}^{\infty} \lambda^r/r!\Big) \le e^{-\lambda} \sum_{r=n+1}^{\infty} \lambda^r \le e^{-\lambda}\lambda^{n+1}/(1-\lambda) \le 2\lambda^{n+1}.$$

(ii) Similar to (i).

(iii) Observe that $L^{\alpha-1} \to \infty$ as $L \to \infty$.

Proof of Lemma 5'. Let n be a (large) integer. For each $1 \le i$, $j \le n$ let X_{ij} be a Poisson distribution with mean $2n^{\alpha-2}$ and let the X_{ij} be independent. We consider the set F of points (i,j) for which $X_{ij} \ge 1$.

Suppose $M \ge s \ge L(\alpha)$ and $A, B \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ with $|A| = |B| = s$. To estimate $|F \cap (A \quad B)|$ we observe that $X_{ij} \ge 1$ for each $(i,j) \in F \cap (A \quad B)$ and so

$$|F \cap (A \quad B)| \le \sum_{i \in A, j \in B} X_{ij}.$$

But the sum of independent Poisson variables is itself a Poisson variable so $\sum_{i \in A, j \in B} X_{ij}$ is Poisson with mean $2s^2 n^{\alpha-2}$. Thus, using Lemma 6(i),

$$\Pr(|F \cap (A \times B)| > s^{\alpha}) \le \Pr(\sum_{i \in A, j \in B} X_{ij} > s^{\alpha})$$
$$\le 2(2s^2 n^{\alpha-2})^{s^{\alpha}}.$$

We now sum over all $A, B \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ with $|A| = |B| = s$ to obtain

$$\Pr\{|F \cap (A \times B)| \ge s^{\alpha} \text{ for some } |A| = |B| = s\}$$
$$\le \sum_{|A|=|B|=s} \Pr\{|F \cap (A \times B)| > s^{\alpha}\}$$
$$\le \sum_{|A|=|B|=s} 2(2s^2 n^{\alpha-2})^{s^{\alpha}}$$
$$\le n^{2s}(2s^2 n^{\alpha-2})^{s^{\alpha}}$$
$$= C(s,\alpha)\, n^{2s+(\alpha-2)s^{\alpha}}$$

where C depends on s and α but not on n.

But the definition of $L(\alpha)$ in Lemma 6 (iii) we have $2s + (\alpha-2)s^{\alpha} < 0$ and so we conclude that $\Pr\{|F \cap (A \quad B) > s^{\alpha}$ for some $|A| = |B| = s\} \longrightarrow 0$ as $n \longrightarrow \infty$. In other words

$$\Pr\{\psi(s) > s^{\alpha}\} \longrightarrow 0 \quad \text{as} \quad n \longrightarrow \infty$$

for each fixed s. It follows at once that (for fixed M)

$$\Pr\{\psi(s) > s^{\alpha} \text{ for some } M \ge s \ge L(\alpha)\} \to 0 \text{ as } n \to \infty$$

and so

$$\Pr\{\psi(s) \le s^{\alpha} \text{ for all } M \ge s \ge L(\alpha)\} \to 1.$$

Thus F obeys conclusion (1) of lemma 5' with high probability provided n is large.

What about conclusion (ii). Let us write $Y_{ij} = 0$ if $X_{ij} = 0$, $Y_{ij} = 1$ otherwise (so that $Y_{ij} = 0$ if $(i,j) \notin F$ and $Y_{ij} = 1$ if $(i,j) \in F$). The Y_{ij} are then independent random variables taking the value 0 with probability $\mu = \exp(-2n^{\alpha-2})$ and 1 with probability $1-\mu$. Thus $|F| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} Y_{ij}$ has mean $n^2(1-\mu)$ and variance $n^2\mu(1-\mu)$. By Tchebychev's inequality

$$\Pr\left\{\left||F| - n^2(1-\mu)\right| \geq n^2(1-\mu)/4\right\} \leq \frac{n^2\mu(1-\mu)}{n^4(1-\mu)^2} = \frac{\mu}{n^2(1-\mu)} =$$

$$\mu\left(\frac{n^{-2}}{1-\exp(-2(n^{-2})^{(2-\alpha)/2})}\right) \longrightarrow 0$$

using L'Hopital's rule or Lemma 6 (ii). Thus

$$\Pr\left\{|F| \geq 3n^2(1-\mu)/4\right\} \longrightarrow 1 \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

But, by Lemma 6 (ii) again,

$$\left|(1-\mu) - 2n^{\alpha-2}\right| \leq 4n^{2(\alpha-2)}$$

so that $\left|\dfrac{3n^2(1-\mu)}{4n^\alpha} - \dfrac{3}{2}\right| \leq 3n^{\alpha-2} \longrightarrow 0$ as $n \longrightarrow \infty$ and thus

$$\Pr\left\{|F| \geq n^\alpha\right\} \longrightarrow 1 \quad \text{as} \quad n \longrightarrow \infty.$$

Thus F obeys conclusion (ii) of Lemma 5' with high probability provided n is large.

In particular we may conclude that

$$\Pr\left\{F \text{ obeys conclusions (i) and (ii)}\right\} > 0$$

for n large and so, since something with positive probability must have a representative the lemma, and so our theorem, follows.

REMARK. The proof of Lemma 5' looks complicated but the kind of construction used is one which either fails completely or works with a geat deal to spare. In the joint paper we use Bernoulli rather than Poisson variables but this is just a question of taste. (Blei prefers the one and I prefer the other).

POLYNOMES ORTHOGONAUX ET ITERATION DES TRANSFORMATIONS QUADRATIQUES.

Pierre MOUSSA
Département de Physique Théorique, Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay, 91190 Gif/Yvette Cedex.

0. INTRODUCTION.

Les progrès récents de la théorie des systèmes dynamiques ainsi que les propriétés d'universalité récemment établies par Feigenbaum [1], ont suscité un renouveau d'intérêt pour le problème de l'itération des transformations rationnelles déjà considéré antérieurement par Fatou et Julia. On trouvera dans le livre de Collet et Eckmann [2] une revue des travaux récents ainsi que de nombreuses références.

Parallèlement, des études menées sur le modèle d'Ising, ont conduit à l'étude des mesures dont les moments sont des nombres entiers [3], et dans une tentative de classification de ces mesures [4], les transformations rationnelles à coefficients entiers semblent jouer un rôle important.

C'est à partir de ce dernier point de vue, que l'on a été amené à considérer les polynômes orthogonaux par rapport à une mesure invariante sous une transformation quadratique [5]. Cet exposé reprend l'essentiel d'un travail effectué en collaboration avec D. Bessis et M. L. Mehta [5,6], dont le résultat principal est de montrer une relation directe entre systèmes de polynômes orthogonaux par rapport à une mesure supportée par un ensemble de Cantor, et itération de transformations quadratiques de la variable réelle.

I. LA TRANSFORMATION QUADRATIQUE DU PLAN.

On va étudier l'action de la transformation quadratique

(1) $$F(x) = (x - q)^2$$

sur des fonctions analytiques au voisinage de l'infini.

Dans la suite $g(z)$ est une fonction analytique dans le voisinage de zéro

(2) $$g(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma_o} \frac{g(u)\, du}{u - z} = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma_\infty} \frac{\gamma(v)\, dv}{1 - vz}.$$

Γ_o est un petit cercle entourant l'origine et Γ_∞ un grand cercle entourant l'infini, décrits tous deux dans le sens direct. Les fonctions γ et g sont reliées par

(3) $$\gamma(v) = \frac{1}{v}\, g(\tfrac{1}{v}).$$

Enfin, on a

(4) $$g(z) = \sum_n g_n z^n, \quad \text{avec} \quad g_n = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma_\infty} \gamma(v)\, v^n\, dv .$$

Nous allons étudier la transformation

(5) $$g_1(z) = \frac{1}{1 - qz}\, g_o\left(\left(\frac{z}{1 - qz}\right)^2\right)$$

qui s'exprime également sur les fonctions correspondantes $\gamma(v)$:

(6) $$\gamma_1(v) = (v - q)\, \gamma_o((v-q)^2).$$

Formellement si $\gamma(v) = \frac{d}{dv}\Gamma(v)$, on a (à une constante près)

(7) $$\Gamma_1(v) = \frac{1}{2}\, \Gamma_o((v - q))^2.$$

Un cas particulier intéressant est celui où $g(z)$ est analytique réelle et a toutes ses singularités sur l'axe réel positif. Alors on peut écrire

(8) $$g_o(z) = \int_o^{+\infty} \frac{\sigma_o(v)\, dv}{1 - vz} \quad \text{avec} \quad \sigma_o(v) = \frac{1}{2i\pi}\Big[\gamma_o(v - i\varepsilon) - \gamma_o(v + i\varepsilon)\Big].$$

Si le support de σ_o est contenu dans un intervalle $[a,b]$, tel que $0 \leq a < b \leq q^2$, alors g_1 admet une représentation du même type que (8) et le support correspondant est alors $[q-\sqrt{b}\ ,\ q-\sqrt{a}] \cup [q+\sqrt{a}\ ,\ q+\sqrt{b}]$, et on a

(9) $$\sigma_1(v) = |v-q|\,\sigma((v-q)^2)$$

donc

(10) $$\sigma_1(v) = \sigma_1(2q - v).$$

En intégrant, on obtient

(11) $$\mu(v) = \int_{-\infty}^{v} \sigma(v)dv$$

et la relation de symétrie

(12) $$\mu_1(v) + \mu_1(2q - v) = 2\mu_1(q)$$

et l'équivalent de l'équation (7)

(13) $$\mu_1(v) = \frac{1}{2}\,\mu_o((v - q))^2 + \text{cte}.$$

II. ITERATION DE LA TRANSFORMATION QUADRATIQUE.

On définit

(14) $$g_n(z) = \frac{1}{1 - qz}\, g_{n-1}\left(\left(\frac{z}{1 - qz}\right)^2\right)$$

à laquelle on associe $\tilde{g}_n(z) = g_n(\frac{1}{z})$ qui satisfait :

(15) $$\tilde{g}_n(z) = \frac{z}{z - q}\,\tilde{g}_{n-1}((z - q)^2).$$

Définissons les itérés de la transformation quadratique

(16) $$\begin{cases} F^{(0)}(z) = z \\ F^{(1)}(z) = (z - q)^2 \\ F^{(2)}(z) = F^{(1)}(F^{(1)}(z)) = ((z-q)^2 - q)^2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ F^{(n)}(z) = F^{(1)}(F^{(n-1)}(z)) = (F^{(n-1)}(z) - q)^2. \end{cases}$$

Le degré de $F^{(n)}$ est 2^n. Il vient alors

(17) $$\tilde{g}_n(z) = \frac{z(F^{(0)}-q)(F^{(1)}-q)\ \ldots\ (F^{(p-2)}-q)}{(F^{(p-1)}-q)}\tilde{g}_{n-p}(F^{(p)}(z))$$

d'où l'équation

(18) $$g_n(z) = \frac{(F^{(0)}(\frac{1}{z})-q)\ \ldots\ (F^{(n-2)}(\frac{1}{z})-q)}{z(F^{(n-1)}(\frac{1}{z})-q)}\ g_o(\frac{1}{F^{(n)}(\frac{1}{z})}).$$

En rationalisant, on obtient

(19) $$g_n(z) = \frac{(\pi_{(0)}-qz)(\pi_{(1)}-qz^2)\ \ldots\ (\pi_{(n-2)}-qz^{(2^{(n-2)})})}{\pi_{(n-1)}-qz^{(2^{(n-1)})}}\ g_o(\frac{z^{2^n}}{\pi_{(n)}(z)})$$

avec

(20) $$\pi_p(z) = z^{(2^p)}\ F^{(p)}(\frac{1}{z}).$$

De l'équation (20), on déduit que la fraction rationnelle :

$$R = \frac{(\pi_o-qz)(\pi_1-qz^2)\ \ldots\ (\pi_{n-2}-qz^{(2^{(n-2)})})}{\pi_{n-1}-qz^{(2^{(n-1)})}}$$

est une fraction rationnelle dont les degrés respectifs du numérateur et du dénominateur sont $2^{(n-1)}-1$ et $2^{(n-1)}$. Son développement coïncide avec celui de $g_n(z)$ jusqu'à l'ordre 2^n exclus. C'est donc un approximant de Padé $[2^{(n-1)}-1/2^{(n-1)}]$ à la fonction $g_n(z)$: il y a dans la fraction rationnelle 2^n coefficients indépendants, nombre égal au nombre de termes du développement qui coïncident avec ceux du développement de g_n.

Au sens des séries formelles, l'équation itérée (14) admet une limite

(21) $$g_n \longrightarrow g_\infty .$$

g_∞ est la solution (au sens des séries formelles) de :

(22) $$g_\infty(z) = \frac{1}{1-qz}\, g_\infty\Big(\Big(\frac{z}{1-qz}\Big)^2\Big).$$

La solution de (22) est unique à une constante multiplicative près qu'on peut fixer en choisissant la valeur à 0 : $g_\infty(0) = 1$.

On a alors le résultat suivant :

THEOREME. $z^{(2^n)}\left[F^{(n)}(\frac{1}{z}) - q\right]$ est le dénominateur de l'approximant de Padé $\left[N - 1/N\right]$, $N = 2^n$, à la série formelle $g_\infty(z)$ engendrée par l'équation (22).

Remarquons que ce même polynôme est également dénominateur d'approximant (au même ordre) à toute fonction $g_p(z)$, $p \geq n+1$, obtenue en itérant au moins $(n+1)$ fois à partir de n'importe quelle initialisation.

III. APPROXIMATION DE PADE ET POLYNOMES ORTHOGONAUX.

Soit une série formelle $f(z) = \Sigma\, f_n\, z^n$ et $\frac{R_{n-1}}{Q_n}$ son approximant de Padé, défini comme la fraction rationnelle telle que R_{n-1} a pour degré $n-1$, S_n a pour degré n et

(23) $$Q_n(z)\, f(z) = R_{n-1}(z) + z^{2n}\, \Phi_n(z).$$

Φ_n est une série formelle. Supposons de plus $f(z)$, donc $\Phi_n(z)$ analytique dans un voisinage de l'origine. On a alors

(24) $$\frac{1}{2i\pi}\oint_{\Gamma_o} \frac{Q_n\, Q_{n'}\, f(z)\, dz}{z^{n+n'+1}} = \frac{1}{2i\pi}\oint \frac{R_{n-1}Q_{n'}\, dz}{z^{n+n'+1}} + \frac{1}{2i\pi}\oint \frac{Q_{n'}\Phi_n(z)dz}{z^{n'-n+1}}\ .$$

La première intégrale est toujours nulle et si $n' > n$ la deuxième intégrale est nulle.

On en déduit

(25) $$\frac{1}{2i\pi}\oint_{\Gamma_o} z^{-n}\, Q_n(z)\, z^{-n'}\, Q_{n'}(z')\, z\, f(z)\, \frac{dz}{z^2} = \delta_{nn'}\, Q_n(0)\, \Phi_n(0)\ .$$

Soit, en posant $\overline{Q}_n(z) = z^n\, Q_n(\frac{1}{z})$

(26) $$\frac{1}{2i\pi}\oint_{\Gamma_\infty} \overline{Q}_n(z)\, \overline{Q}_{n'}(z)\frac{1}{z}\, f(\frac{1}{z})\, dz = h_n\, \delta_{nn'}\ .$$

Une telle équation donne sous une forme un peu inhabituelle la propriété d'orthogonalité des polynômes. On retrouve la forme classique lorsque $f(z)$ est analytique réelle et a ses singularités sur l'axe réel. Voir l'équation (8) ci-dessus. La densité de la mesure est alors reliée à la discontinuité de $\frac{1}{z}\, f(\frac{1}{z})$ le long de l'axe réel.

Ces résultats montrent que les polynômes $\overline{Q}_{(2^n)} = F^{(n)}(z) - q$ admettent la propriété d'orthogonalité

(27) $$\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_\infty} \overline{Q}_{2^n}(z)\,\overline{Q}_{2^{n'}}(z)\,\frac{1}{z}\,g_\infty\!\left(\frac{1}{z}\right) dz = h_{(2^n)}\,\delta_{nn'} .$$

IV. UN CAS PARTICULIER : q REEL > 2.

Si on initialise la série d'itération avec une fonction g_o telle que

(28) $$g_o(z) = \int_o^{q^2} \frac{\sigma_o(x)\,dx}{1 - xz} .$$

On voit alors que g_n admet une représentation analogue où g_n est associée à une mesure σ_n dont le support est inclus dans l'ensemble défini par les signes $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-2}$:

(29) $$E = \bigcup_{\substack{\varepsilon_i \\ i=1,\dots n-2}} I(\varepsilon_1, \dots \varepsilon_{n-2})$$

où I est l'intervalle dont les extrémités sont

$$q + \varepsilon_1\sqrt{q+\varepsilon_2\sqrt{q+\dots h+\varepsilon_{n-2}\sqrt{q-\sqrt{2q}}}} \quad \text{et} \quad q + \varepsilon_1\sqrt{q+\varepsilon_2\sqrt{q+\dots+\varepsilon_{n-2}\sqrt{q+\sqrt{2q}}}}$$

(les deux valeurs ne sont ordonnées que si $\varepsilon_1\varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-2} = +1$).

L'ensemble limite est un ensemble de Cantor et la fonction g_∞ ainsi obtenue est la transformée de Cauchy d'une mesure singulière

(30) $$g_\infty(z) = \int_E \frac{d\mu(x)}{1-xz} .$$

En effet, il suffit de vérifier que g_n tend bien vers l'infini en tant que fonction analytique dans tout domaine ouvert excluant le support de la mesure. La suite des fractions rationnelles est bornée dans un domaine excluant les pôles qu'on sait localiser, et il y a convergence de la suite des dérivées à l'origine. Le théorème de Vitali permet alors d'étendre la propriété de convergence des séries formelles à la convergence au sens des fonctions analytiques (uniforme sur tout compact excluant le support. Il est possible de montrer que le support limite a une mesure nulle [7], [8].

V. TRANSFORMATION DES POLYNÔMES ORTHOGONAUX.

On considère la famille des polynômes orthogonaux

(31)
$$\int_a^b P_m(x)\, P_n(x)\, d\mu(x) = h_m\, \delta_{mn}$$

où les polynômes P_m, de degré m sont moniques : $P_m(x) = x^m + \dots$

a) Translation. Si on fait une translation, la mesure $d\mu_q(x) = d\mu(x-q)$ a pour support $[a+q\ ,\ b+q]$, et la fonction g_q associe

$$g_q(z) = \int_{a+q}^{b+q} \frac{d\mu_q(x)}{1 - xz} = \frac{1}{1 - qz} \int_a^b \frac{d\mu(y)}{1 - y\frac{z}{1-qz}} .$$

Soit

(32)
$$g_q(z) = \frac{1}{1-qz}\, g\left(\frac{z}{1-qz}\right).$$

Les polynômes orthogonaux $P_m^{(q)}$ par rapport à $d\mu^{(q)}(x)$ sont donnés par

(33)
$$P_m^q(x) = P_m(x - q) \qquad \text{et normalisés par} \quad h_m^q = h_m.$$

b) Transformation $x \longrightarrow x^2$.

(34)
$$g_c(z) = g(z^2) = \int_E \frac{d\mu_c(x)}{1 - xz} \quad \text{avec} \quad g(z) = \int_a^b \frac{d\mu(x)}{1 - xz}.$$

avec

(35)
$$E = [-\sqrt{b}\ ,\ -\sqrt{a}] \cup [\sqrt{a}\ ,\ \sqrt{b}]$$

(36)
$$d\mu_c(t) = \sigma_c(t)\, dt \qquad , \qquad \sigma_c(t) = |t|\, \sigma_c(t^2).$$

$\sigma_c(x)$ est symétrique $x \longrightarrow -x$, on peut en déduire facilement que les polynômes orthogonaux sont respectivement pairs et impairs sous le changement $x \longrightarrow -x$, lorsque l'ordre est pair ou impair. Les formules explicites sont :

(37) $$P^c_{2m}(x) = P_m(x^2) \quad , \quad h^c_{2m} = h_m$$

(38) $$P^c_{2m+1}(x) = x\, P^{(1)}_m(x^2), \quad h^c_{2m+1} = h^{(1)}_m .$$

Les $P^{(1)}_m$ sont les polynômes orthogonaux associés à la mesure $d\mu^{(1)}(x) = x\, d\mu(x)$ correspondant à la fonction génératrice

(39) $$g^{(1)}(x) = \int_a^b \frac{x\, d\mu(x)}{1 - xz} = \frac{g(z) - g(0)}{z}.$$

On vérifie les formules (37) et (38) directement : l'orthogonalité de P^c_{2m} avec $P^c_{2m'}$ est immédiate au vu de (36), ainsi que l'orthogonalité de P^c_{2m+1} avec $P^c_{2m'+1}$. Quant à l'orthogonalité de P_{2m} avec $P_{2m'+1}$ elle résulte des propriétés de parité.

c) <u>En combinant les deux transformations</u> $x \longrightarrow (x-q)^2 = F(x)$, on obtient

(40) $$g_p(z) = \frac{1}{1 - qz}\, g\left(\left(\frac{z}{1-qz}\right)^2\right)$$

g_p correspond à la mesure $d\mu_p(x) = \sigma_p(x)$ dont le support E est donné par $E = [q-\sqrt{b}\ ,\ q-\sqrt{a}] \cup [q+\sqrt{a}\ ,\ q+\sqrt{b}]$ et on a $\sigma_p(x) = |x-q|\,\sigma((x-q)^2)$. On a le résultat suivant.

THEOREME. Les polynômes orthogonaux $P^{(F)}_m(x)$ par rapport à la mesure $\sigma_F(x)dx = |x - q|\,\sigma((x-q)^2)$ sont donnés par

(41) $$P^{(F)}_{2m}(x) = P_m((x-q)^2) \quad , \quad h^{(F)}_{2m} = h_m$$

(42) $$P^{(F)}_{2m+1}(x) = (x-q)\, P^{(1)}_{2m+1}((x-q)^2) \quad , \quad h^{(F)}_{2m+1} = h^{(1)}_m$$

en fonction des polynômes $P_m(x)$ et $P^{(1)}_m(x)$, orthogonaux par rapport à $\sigma(x)\,dx$ et $\sigma(x)\,x\,dx$ respectivement.

VI. POLYNOMES ORTHOGONAUX CORRESPONDANT AU POINT FIXE g_∞.

Ces polynômes satisfont aux équations

$$(43) \quad \begin{cases} P_{2m}(x) = P_m((x-q)^2) \\ P_{2m+1}(x) = (x-q)\, P_m^{(1)}((x-q)^2) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} P_o = 1 \\ P_1 = x-q \\ P_2 = ((x-q)^2-q). \end{array}$$

Si on pose

$$(44) \qquad Q_p(x) = P_p(x) + q, \quad \text{avec} \quad Q_1 = x \quad , \quad Q_2 = (x-q)^2$$

on obtient $Q_{2m}(x) = Q_m((x-q)^2)$ qui s'itère à partir de Q_1 en

$$(45) \qquad \begin{cases} Q_2 = (x-q)^2 \\ Q_{p\,2^n}(x) = Q_p\left\{Q_{2^n}(x)\right\}. \end{cases}$$

On retrouve bien pour $p = 2^n$ la relation entre itérés $Q_1^{(n)}(x)$ et polynômes orthogonaux $P_{2^n}(x)$.

VII. RELATION DE RECURRENCE A TROIS TERMES.

Tout système de polynômes orthogonaux satisfait à une relation de récurrence du type

$$(46) \qquad P_{m+1}(x) = (x - a_m)\, P_m(x) - R_m\, P_{m-1}(x).$$

La symétrie autour du point $x = q$ permet de montrer que $a_m = q$ en utilisant par récurrence la relation

$$(47) \qquad P_m(q - x) = (-1)^m\, P_m(q+x).$$

D'autre part, on a

$$(48) \qquad P_{2m+1}(x+q) = P_m(x^2)$$

que l'on va utiliser en réécrivant (46) comme

$$(49) \qquad x\, P_n(x+q) = P_{n+1}(x+q) + R_n\, P_{n-1}(x+q)$$

$$(50) \qquad x^2\, P_n(x+q) = x\, P_{n+1}(x+q) + R_n\, x\, P_{n-1}(x+q).$$

D'où

$$(51)\qquad \begin{aligned} x^2\, P_n(x+q) &= P_{n+2}(x+q) + R_{n+1}\, P_n(x+q) \\ &\quad + R_n\, P_n(x+q) + R_n\, R_{n-1}\, P_{n-2}(x+q) \end{aligned}$$

et en écrivant cette équation pour n changé en $(2n)$:

$$(52)\qquad x^2\, P_n(x^2) = P_{n+1}(x^2) + (R_{2n} + R_{2n+1})\, P_n(x^2) + R_{2n}\, R_{2n-1}\, P_{n-1}(x^2).$$

Soit

$$(53)\qquad P_{n+1}(x) = (x - (R_{2n}+R_{2n+1}))\, P_n(x) - R_{2n}\, R_{2n-1}\, P_{n-1}(x).$$

D'où par identification

$$(54)\qquad \begin{cases} R_{2n} + R_{2n+1} = q \\ R_{2n}\, R_{2n-1} = R_n \\ R_1 = q \quad , \quad R_2 = 1 . \end{cases}$$

La relation :

$$(55)\qquad P_{n+1}(x) = (x - q)\, P_n(x) - R_n\, P_{n-1}(x)$$

constitue donc une interpolation linéaire entre les itérés du polynôme $(x-q)^2 = F^{(1)}(x)$

$$(56)\qquad P_{2^n}(x) = F^{(n)}(x) + q .$$

VIII. PROPRIETES DES COEFFICIENTS DE LA RECURRENCE.

1.

$$(57)\qquad 0 < R_{2n} < R_n \quad \text{et} \quad 0 < R_{2n} \leq 1$$

se démontre par récurrence : si c'est vrai pour $1, \ldots, n-1$, alors

$$R_{2n} = \frac{R_n}{R_{2n-1}} = \frac{R_n}{q - R_{2n-2}} \leq \frac{R_n}{q-1} < R_n .$$

Si n est pair, on a donc $0 < R_{2n} < R_n \leq 1$.

Si n est impair, $R_{2n-2} < R_{n-1} \leq 1$, donc $q - R_{n-1} < q - R_{2n-2}$

et $R_{2n} = \frac{R_n}{q-R_{2n-2}} = \frac{q-R_{n-1}}{q-R_{2n-2}} < 1$, ce qui achève la récurrence.

2.

(58) $$\lim k \to \infty \; R_{(p2^k)} = 0.$$

En effet $R_{2n} = \frac{R_n}{q-R_{2n-2}}$ et $0 < R_{2n-2} \leq 1$. Donc P_{2n} est compris entre $\frac{R_n}{q}$ et $\frac{R_n}{q-1}$. De même $R_{(p2^k)}$ est compris entre $\frac{R_p}{q^k}$ et $\frac{R_p}{(q-1)^k}$ d'où le résultat.

3.

(59) $$\lim_{k \to \infty} R_{p2^k+s} = R_s.$$

En effet $R_{p2^k+s} = q - R_{(p2^k+s-1)}$ si s est impair

$$= \frac{R_{(p2^{k-1}+s/2)}}{(R_{(p2^k+s-1)})} \quad \text{si } s \text{ est pair.}$$

Il suffit alors de raisonner par récurrence. Si la propriété annoncée est vraie pour $0, 1, \ldots s$, elle sera vraie pour $(s+1)$ grâce à ces deux dernières équations.

IX. CYCLES SUPERSTABLES.

Soit $F^{(1)}(x) = (x - q)^2$. La fonction itérée $F^{(n)}(x)$ admet un cycle superstable si l'équation

(60) $$F^{(n)}(x) = x$$

admet la solution $x = q$. Mais la valeur $x = 0$ doit être également dans le cycle, car $F^{(1)}(x = q) = 0$. Il y aura donc un cycle superstable si q est solution de

(61) $$F^{(n)}(x=0 \;,\; q) = 0,$$

ou de façon équivalente, le point $x = 0$ étant le transformé du point $x = q$

(62) $$F^{(n-1)}(0,q) = q.$$

Mais nous avons vu que $F^{(n-1)}(x,q) = P_{2^{(n-1)}}(x,q)$ où maintenant nous considérons les polynômes orthogonaux en incluant dans la notation la dépendance dans la variable q.

Il est donc intéressant d'étudier les racines de l'équation :

(63) $$P_k(0,q) = 0.$$

Utilisant

(64) $$P_{m+1}(x,q) = (x - q)\, P_m(x,q) - R_m(q)\, P_{m-1}(x,q)\,,$$

il vient pour $m = 2p-1$ et $x = q$

$$P_{2p}(q,q) = - R_{2p-1}(q)\, P_{2p-2}(q,q).$$

Mais $P_{2p}(x+q\ ,\ q) = P_p(x^2,q)$, donc $P_{2p}(q,q) = P_p(0,q)$.

D'où

(65) $$P_k(0,q) = (-1)^k\, R_1(q) \ldots\ldots R_{2k-1}(q).$$

X. CONCLUSION.

Nous avons, via la théorie des polynômes orthogonaux, établi une interpolation linéaire (et de degrés entiers consécutifs) des itérés des polynômes quadratiques. D'autre part, la relation entre polynômes orthogonaux et itérés de la transformation peut être généralisée à quelques détails près à des polynômes quelconques. La linéarisation des itérations successives de polynômes est donc une propriété générale. La relation (55) représente en fait l'équivalent discret d'une équation différentielle du deuxième ordre dans la variable n, mettant ainsi en analogie l'asymptotique à grand n de telles équations et les propriétés des transformations itérées. La généralisation des résultats présentés ici au cas des polynômes de degré quelconque est donnée dans la référence [9].

XI. REFERENCES.

[1] FEIGENBAUM, M. J. Statist. Physics 19 (1978), p. 25.

[2] COLLET, P. et ECKMANN, J.-P. Iterated maps on an interval as dynamical system. Progress in Physics 1 (1980). Birkhäuser.

[3] BARNSLEY, M., BESSIS, D., MOUSSA, P. J. Math. Physics 20 (1979), p. 535.

[4] MOUSSA, P. Comptes-Rendus RCP 25, Inst. Rech. Math. Avancées Strasbourg. A paraître.

[5] BESSIS, D., MEHTA, M.-L. et MOUSSA, P. C. R. Acad. Sc. Paris, série B. A paraître début 1982.

[6] BESSIS, D., MEHTA, M.-L. et MOUSSA, P. A paraître début 1982 dans "Letters in Math. Physics".

[7] BRÖLIN, H. A. Arkiv för Math. 6 (1965), p. 103.

[8] BARNSLEY, M., GERONIMO, J. et HARRINGTON, A. Preprint Institute of Technology, Atlanta (1981).

[9] BESSIS, D. et MOUSSA, P. Preprint Départ. Physique Saclay, Février 1982.

UNE INEGALITE DE H. MONTGOMERY SUR LES SOMMES D'EXPONENTIELLES

S. PICHORIDES

Cet exposé résulte de la synthèse d'un manuscrit, dont la lecture est assez difficile, de H. Montgomery, d'une conférence donnée par celui-ci à Chicago en mars 1981 et de remarques de H. Delange, J.-P. Kahane et B. Saffari. On donne une démonstration du résultat suivant.

THEOREME (H. Montgomery). Il existe un nombre $C > 0$ tel que, pour tout intervalle I de $\mathbf{R}$, de longueur $|I|$, et pour toute fonction F de la forme $F(x) = \sum_{1\le n\le N} a_n e^{i\lambda_n x}$, avec $a_n \in \mathbf{C}$ et $-L \le \lambda_n \le L$, on ait

$$\sup_{x\in I} |F'(x)| \le C\left(L \log N + \frac{N^2}{|I|}\right) \sup_{x\in I} |F(x)| .$$

Pour éviter quelques cas triviaux, on supposera N assez grand.

Dans la suite, la lettre C désignera une constante absolue strictement positive, non nécessairement la même à chacune de ses apparitions.

Il est facile de voir que prouver ce théorème revient à démontrer l'inégalité $|F'(0)| \le C(L \log N + N^2)$ sous l'hypothèse supplémentaire $\sup_{x\in I} |F(x)| = 1$.

La démonstration repose sur le résultat suivant dû à Halász [1] :

THEOREME (G. Halász). Soit f une fonction de la forme $f(x) = \sum_{j=1}^{N} b_j e^{i\lambda_j x}$, avec $\mathrm{Re}\, \lambda_j \ge 0$. Alors on a

$$|f(x)| \leq 30\, N^2 \exp(6N \sqrt{\mathrm{dist}(x, [0,1])}) \sup_{0\leq t\leq 1} |f(t)|.$$

Passons maintenant à la démonstration. Elle se déroule en trois étapes. Dans la première on obtient en utilisant l'inégalité de Halász une majoration de $|F(z)|$ sur le cercle de rayon R. Dans la seconde on utilise le fait que $\sup_{0\leq x\leq 1} |F(x)| = 1$ pour améliorer la majoration précédente. Enfin on calcule $F'(0)$ par la formule de Cauchy.

ETAPE 1.

L'inégalité de Halász suggère de dominer $F(z)$, pour $\mathrm{Im}\, z \geq 0$, par la fonction $K(z) = 30N^2 \exp\left[6N(\sqrt{z-1} - i\sqrt{z}) + iLz\right]$ (on prend la détermination des arguments comprise entre 0 et 2π).

Si z est réel, on a immédiatement $|F(z)| \leq |K(z)|$.

Si $y = \mathrm{Im}\, z$ est positif, on a

$$|F(z)| \leq (\Sigma |a_n|)\, e^{-Ly}$$

et

$$|K(z)| \leq 30\, N^2 \left|\exp\left[6N(\sqrt{z-1} - i\sqrt{z})\right]\right| e^{-Ly}.$$

Comme, pour R assez grand, on a $\mathrm{Re}(\sqrt{z-1} - i\sqrt{z}) \geq c\sqrt{R}$, $F(z)/K(z)$ tend vers 0 lorsque $|z|$ tend vers l'infini, y restant ≥ 0. Le principe du maximum, montre alors que l'on a

$$|F(z)| \leq |K(z)| \quad \text{pour} \quad \mathrm{Im}\, z \geq 0.$$

Il est d'autre part clair que

$$|\mathrm{Re}(\sqrt{z-1} - i\sqrt{z})| \leq C\sqrt{R}.$$

Donc, pour $|z| \leq R$ et $\mathrm{Im}\, z \geq 0$, on a $|F(z)| \leq 30N^2 \exp(CN\sqrt{R} + LR)$.

Il est clair que cette inégalité est en fait valable sans restriction sur $\mathrm{Im}\, z$.

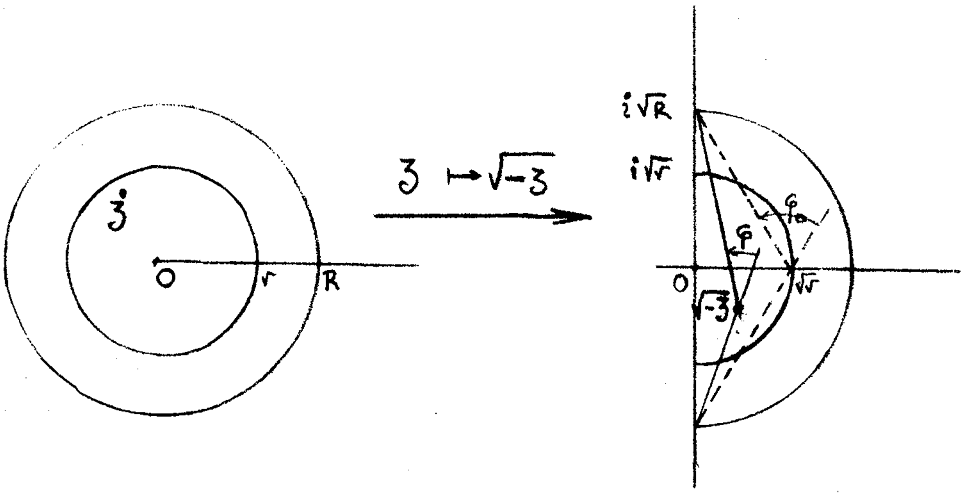
ETAPE 2.

Soit r et R deux nombres tels que $0 < r < R < 1$. Posons

$M_R = 30N^2 \exp(CN\sqrt{R} + LR)$ et considérons la fonction

$$q(z) = \exp\left[\frac{2}{\pi i}(\log M_r)\log\left(\frac{i\sqrt{R} - \sqrt{-z}}{i\sqrt{R} + \sqrt{-z}}\right)\right]$$

(on a pris les déterminations princiaples de $\sqrt{}$ et log).



On a (voir la figure) $|q(z)| = M_R^{\frac{2\varphi}{\pi}}$. La fonction $|q(z)|$ domine donc $|F(z)|$ sur la frontière de l'ensemble

$$A = \{z \; ; \; |z| \leq R \quad , \quad z \notin [0,1]\}.$$

En conséquence on a $|F(z)| \leq |q(z)|$ pour tout z dans A. En particulier, si $|z| \leq r$, puisque φ est inférieur à φ_o (voir la figure), on a

$$|F(z)| \leq M_R^{\frac{2}{\pi}\varphi_o} = M_R^{\frac{4}{\pi}\mathrm{Arctg}\sqrt{\frac{r}{R}}} .$$

ETAPE 3.

On optimise le choix de r et R : on prend

$$R = \min\left(\frac{\log N}{L}, \left(\frac{\log N}{N}\right)^2\right) \quad \text{et} \quad r = \frac{R}{(\log N)^2} .$$

Avec ces choix on obtient $|F(z)| \leq C$ pour $|z| \leq r$

D'où, en utilisant la formule de Cauchy,

$$|F'(0)| \leq \frac{c}{r} \leq C(L \log N + N^2) ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

REMARQUES.

a) Montgomery conjecture que l'on peut obtenir la majoration $\sup\limits_{x\in I} |F'(x)| \leq C(L + \frac{N^2}{|I|}) \sup\limits_{x\in I} |F(x)|$. On ne peut espérer mieux comme le prouvent les deux exemples suivants

1. $F(x) = e^{iLx}$

2. $F(x) = T_k(\frac{\sin \varepsilon x}{\sin \varepsilon})$ où T_k est le $k^{\text{ième}}$ polynôme de Tchebychef

$(T_k(\cos \theta) = \cos k\theta)$. On prend $I = [-1, 1]$. On a $L = \varepsilon k$, $N = k$ et $|F'(0)| = 0(k^2)$ quand ε tend vers 0.

b) L'inégalité de Halász améliore l'inégalité suivante, due à Turán : si $f(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j e^{\lambda_j x}$ où $b_j \in \mathbf{C}$ et $\operatorname{Re} \lambda_j \geq 0$, alors, si a est petit, on a

$$|f(0)| \leq [2e(a+1)]^n \sup_{a\leq x\leq a+1} |f(x)| .$$

L'inégalité de Halász est meilleure que celle-ci lorsque a est petit. Pour plus de détails, se reporter à [1].

c) Il peut être utile de comparer l'inégalité de Montgomery avec celle de Privalov pour les polynômes trigonométriques : si J est un intervalle strictement contenu dans l'intervalle I et tel que $\operatorname{dist}(I,J) > 0$, on a

$$\sup_{x\in J} |f'(x)| \leq C(I,J)N \sup_{y\in I} |f(y)|$$

où N est le degré de f.

Si on examine soigneusement la démonstration de cette dernière inégalité, on obtient, si $|I| < \pi$ et si f est un polynôme trigonométrique de degré N,

$$|f'(x)| \leq \frac{CN}{\mathrm{dist}(x, \partial I)} \max_{x \in I} |f(x)| . \qquad (\forall\ x \in \overset{\circ}{I})$$

L'inégalité de Montgomery n'est pas seulement plus forte que celle-ci au voisinage des extrémités de I, mais, ce qui est peut-être plus important fait intervenir la nombre N de termes de F et pas seulement son degré L.

Références

[1] HALÁSZ, G. Turán memorial volume of the Janos Bolyai Math. Soc. 1983 (or later ?).

[2] MONTGOMERY, H. Exposé au Colloque à Chicago à l'occasion du 80ième anniversaire de A. Zygmund. A paraître.

No. d'impression 534
2ème trimestre 1982