

**P  
R  
É  
P  
U  
B  
L  
I  
C  
A  
T  
I  
O  
N  
S**

**P.G. LEMARIE-RIEUSSET  
G. MALGOUYRES  
A. SEGHER  
(Editeurs)**

**GROUPE DE TRAVAIL  
ONDELETTES ET APPLICATIONS**

**Exposés 1991-1992**

**92-38**

**Université de PARIS-SUD  
MATHÉMATIQUES  
Bâtiment 425  
91405 ORSAY France**

**P  
R  
É  
P  
U  
B  
L  
I  
C  
A  
T  
I  
O  
N  
S**

**P.G. LEMARIE-RIEUSSET  
G. MALGOUYRES  
A. SEGHER  
(Editeurs)**

49042

**GROUPE DE TRAVAIL  
ONDELETTES ET APPLICATIONS**

**Exposés 1991-1992**

**92-38**



**Université de PARIS-SUD  
MATHÉMATIQUES  
Bâtiment 425  
91405 ORSAY France**

GROUPE DE TRAVAIL  
ONDELETTES ET APPLICATIONS  
ORSAY 1991-1992

—ooOoo—

Pour sa troisième d'existence active, le groupe de travail Ondelettes et Applications (P. G. Lemarié-Rieusset, G. Malgouyres, A. Seghier) présente dans ce fascicule les résumés, parfois étendus des exposés (pas tous, certains ne sont pas encore parvenus) de l'année écoulée. Les thèmes de ces exposés concernent principalement les équations aux dérivées partielles et le traitement d'image.

In the following notes, we present the contents of the lectures given in the frame of the Orsay workshop on Wavelets and Applications during the Academic year 1991-1992.

This workshop goes on its third year of activity.

This lectures deal mainly with P.D.E. and Image Processing.

AMS code : 42C15

MOTS CLES : Burgers (équation de), EDP, Image, Navier-Stokes, Ondelettes, Sobolev (espace de), Toeplitz (matrice de).

KEYWORDS : Burgers equation, compression, Image processing, Navier-Stokes, PDE, Sobolev spaces, spline functions, Toeplitz matrices, wavelets.

## EXPOSES

### 1. G. BOURDAUD

Le calcul fonctionnel dans les espaces de Sobolev

### 2. J. FROMENT

d'après J. Froment et S. Mallat

Second generation compact image coding with wavelets

### 3. O. GOUBET

Construction de variétés inertielles approximatives  
à l'aide d'ondelettes

### 4. G. MALGOUYRES

Ondelettes à support compact et analyse multirésolution  
sur l'intervalle.

### 5. V. PERRIER

Les méthodes d'ondelettes de résolution numériques des  
équations aux dérivées partielles en Juin 1991.

### 6. P. G. LEMARIE-RIEUSSET

Dérivation et différences finies en théorie des ondelettes

### 7. A. SEGHIER

d'après E. D. Katz et A. Seghier

Développement asymptotique d'ondelettes splines dans un cube de  $\mathbb{R}^d$

### 8. A. COHEN

Bases d'ondelettes sur l'intervalle et effets de bord.

Obs. (Résumé non encore parvenu. Il existe cependant une  
forme manuscrite de l'exposé).

### 9. F. CATTE & F. DIBOS

Diffusion anisotropique non linéaire. Deux applications :  
Edge detection et détermination de contours fermés.

## LE CALCUL FONCTIONNEL DANS LES ESPACES DE SOBOLEV

Gérard Bourdaud

La présente note est une synthèse de résultats obtenus par l'auteur, en collaboration avec Dalila Kateb, Djaliil Kateb et Yves Meyer. Elle constituait le thème d'exposés au séminaire E.D.P. de Rennes (12-12-91), au G.T. "Ondelettes et applications" d'Orsay (16-01-92) et au G.T. "Ondelettes et applications statistiques" de Paris VII (21-01-92).

## I-Introduction

Pour un espace  $E$  de fonctions à valeurs réelles, le problème du *calcul fonctionnel* consiste à rechercher des conditions nécessaires et suffisantes aussi simples que possible pour qu'une fonction  $G$ , définie sur  $\mathbb{R}$ , opère, par composition à gauche, sur  $E$ ; autrement dit, pour qu'on ait  $G \circ f \in E$  chaque fois que  $f \in E$ .

Le calcul fonctionnel dans les espaces de Sobolev usuels  $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$  ( $s \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$ ) a été entièrement élucidé au début de 1990 (G. Bourdaud, Invent. Math., 1991) mais il est loin de l'être dans les espaces de Sobolev fractionnaires. Ces derniers s'organisent traditionnellement en deux familles, les espaces de Besov et ceux de Triebel-Lizorkin, dont nous rappellerons les définitions en termes d'ondelettes.

La donn e d'une A.M.R.  $(V_j)$  sur  $\mathbb{R}^n$  (cf. le livre d'Y. Meyer) conduit à la décomposition Hilbertienne:

$$L^2(\mathbb{R}^n) = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \dots$$

Il existe alors des fonctions  $\varphi$  (fonction d'échelle) et  $\psi^\varepsilon$  (ondelettes) telles que  $\{\varphi(x-k) / k \in \mathbb{Z}^n\}$  soit une base orthonorm e de  $V_0$  et  $\{\psi^\varepsilon(x-k) / k \in \mathbb{Z}^n, \varepsilon \in \{0,1\}^n \setminus \{(0,\dots,0)\}\}$  une base orthonorm e de  $W_0$ . La régularité de  $\varphi$  et  $\psi^\varepsilon$  sera suppos e supérieure à  $|s|$ .

Toute distribution "raisonnable" sur  $\mathbb{R}^n$  se décompose en série

d'ondelettes

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \beta_k \varphi(x-k) + \sum_{\varepsilon} \sum_{j \geq 0} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \alpha_{j,k,\varepsilon} 2^{jn/2} \psi^\varepsilon(2^j x - k).$$

L'espace de Besov  $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$  ( $s \in \mathbb{R}$ ,  $p, q \in [1, +\infty]$ ) est défini par les conditions

$$\begin{aligned} & (\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\beta_k|^p)^{1/p} < +\infty, \\ & \sum_{\varepsilon} \{ \sum_{j \geq 0} (2^{nj((1/2)-(1/p))} 2^{js} (\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\alpha_{j,k,\varepsilon}|^p)^{1/p})^q \}^{1/q} < +\infty. \end{aligned}$$

Le principal défaut de l'échelle de Besov, c'est qu'elle ne contient pas les  $W^{s,p}$  ( $s \in \mathbb{N}$ ,  $p \neq 2$ ) qu'elle est censée généraliser: pour  $s$  entier, les  $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$  sont des espaces plus ou moins pathologiques apparentés à la fameuse classe de Zygmund  $B_\infty^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ . L'espace de Triebel–Lizorkin  $F_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$  ( $s \in \mathbb{R}$ ,  $p \in [1, +\infty[$ ,  $q \in [1, +\infty]$ ) est défini par les conditions

$$\begin{aligned} & (\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\beta_k|^p)^{1/p} < +\infty, \\ & \sum_{\varepsilon} \| \{ \sum_{j \geq 0} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (|\alpha_{j,k,\varepsilon}| 2^{nj/2} 2^{js} \chi_{k,j})^q \}^{1/q} \|_p < +\infty, \end{aligned}$$

où  $\chi_{k,j}$  est la fonction caractéristique du cube  $2^j x - k \in [0, 1]^n$ .

Pour  $p > 1$ , on montre que  $F_p^{s,2}(\mathbb{R}^n)$  est l'espace  $(1-\Delta)^{-s/2}(L^p(\mathbb{R}^n))$ ; en particulier, pour tout *entier*  $s$ , on a  $F_p^{s,2}(\mathbb{R}^n) = W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ . De même, pour  $s$  entier,  $F_1^{s,2}(\mathbb{R}^n)$  est l'espace de Sobolev modelé sur l'espace de Hardy local (espace de Goldberg)  $F_1^{0,2}(\mathbb{R}^n)$ . Les espaces de Sobolev  $W^{s,1}$  et  $W^{s,\infty}$ , qui n'admettent pas de base inconditionnelle, ne sont ni des espaces de Besov, ni des espaces de Triebel–Lizorkin.

La distinction entre ces différents types d'espaces fractionnaires est peu significative en ce qui concerne le calcul fonctionnel, aussi les engloberons-nous sous l'appellation générique  $E_p^s(\mathbb{R}^n)$ .  $\|f\|$  désignera la norme de  $f$  dans  $E_p^s(\mathbb{R}^n)$ , quand il n'y aura pas de risque de confusion. On supposera désormais  $s > 0$ .

Ajoutons – pour rassurer le lecteur – que nous utilisons rarement les définitions précises de ces espaces. Il nous suffira bien souvent d'observer que  $E_p^s(\mathbb{R}^n)$  se plonge dans  $B_p^{s,\infty}(\mathbb{R}^n)$ , pour lequel nous disposons

d'une norme "raisonnable", à savoir

$$\|f\|_p + \sup_{h \neq 0} |h|^{-s} \left( \int |(\Delta_h)^m f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

où  $\Delta_h$  est l'opérateur de différence finie  $\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$  et  $m$  n'importe quel entier tel que  $m > s$ .

L'introduction du nombre  $\rho = (n/p) - s$  est justifiée par l'importante estimation

$$(1) \quad \|f(\cdot/\lambda)\| \leq \lambda^\rho \|f\| \quad (\forall \lambda \in ]0,1]).$$

On dira que  $E_p^s(\mathbb{R}^n)$  est *sur-critique* s'il s'injecte dans  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ , sous-critique dans le cas contraire. Il est bien connu que  $E_p^s(\mathbb{R}^n)$  est sous-critique pour  $s < n/p$ , sur-critique pour  $s > n/p$ . Voici la liste exhaustive des  $E_p^{n/p}(\mathbb{R}^n)$  *sur-critiques*:

$$B_p^{n/p,1}(\mathbb{R}^n), F_1^{n,q}(\mathbb{R}^n) \text{ et } W^{n,1}(\mathbb{R}^n).$$

Une dernière précision: à l'exception du cas  $p = +\infty$ ,  $E_p^s(\mathbb{R}^n)$  ne contient pas de constante non nulle, de sorte que la condition  $G(0) = 0$  est toujours nécessaire pour que  $G$  opère sur  $E_p^s(\mathbb{R}^n)$ ; elle sera, en règle générale, sous-entendue.



**Théorème 1.** *Les conditions suivantes sont nécessaires et suffisantes pour que la fonction  $G$  opère sur l'espace fonctionnel  $E = E_p^s(\mathbb{R}^n)$ :*

(i)  $G \in W^{s,p}(\mathbb{R})_{loc}$ , pour  $s$  entier,  $s \geq 2$ , et  $E = W^{s,p}$ , s'il est *sur-critique*.

(ii)  $G' \in W^{s-1,p}(\mathbb{R})_{loc-unif}$ , pour  $s$  entier,  $s = n/p \geq 2$ , et  $E = W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ , s'il est *sous-critique*.

(iii)  $G'' \in L^1(\mathbb{R})$ , si  $E = W^{2,1}(\mathbb{R}^n)$ , avec  $n \geq 3$ .

(iv)  $G(t) = ct$ , si  $1 + (1/p) \leq s < n/p$  (sauf pour  $E = W^{2,1}$  et - peut-être - pour  $E = B_p^{1+(1/p),1}$  et  $E = F_1^{2,q}$ ).

(v)  $G' \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$ , pour  $0 < s < 1$ , si  $E$  est *sur-critique* (ainsi que  $E = W^{1,p}$ , s'il est *sur-critique*).

(vi)  $G' \in L^\infty(\mathbb{R})$ , pour  $0 < s < 1$ , si  $E$  est sous-critique (ainsi que  $E = W^{1,p}$ , s'il est sous-critique).

Dans les cas où l'on ne connaît pas de condition nécessaire et suffisante, on dispose néanmoins de conditions suffisantes qui assurent que le calcul fonctionnel est non-trivial (contrairement à ce qui se passe dans le cas (iv)):

Proposition. Les conditions suivantes sont suffisantes pour que  $G$  opère sur  $E_p^s(\mathbb{R}^n)$ :

- (i)  $G^{(j)} \in L^\infty$  ( $j = 1, \dots, [s]+1$ ), pour  $s \geq n/p$  et  $s$  non entier.
- (ii)  $G''$  est une mesure bornée, pour  $1 \leq s < 1+(1/p)$ .

S'il est impossible, dans le cadre de cet exposé, de détailler la preuve du théorème 1, nous allons mettre l'accent sur les résultats où les techniques d'ondelettes jouent un rôle:

Théorème 2. Quel que soit  $s > 0$ , si  $E_p^s(\mathbb{R}^n)$  est sous-critique, la condition  $G' \in L^\infty$  est nécessaire pour que  $G$  opère sur  $E_p^s(\mathbb{R}^n)$ .

Théorème 3. Pour  $p < n+1$ , la condition  $G(t) = ct$  est nécessaire (et suffisante!) pour que  $G$  opère sur  $E_p^{1+(1/p)}(\mathbb{R}^n)$  (sauf pour  $W^{2,1}$  et – peut-être – pour  $B_p^{1+(1/p),1}$  et  $F_1^{2,q}$ ).

Voici un esquisse des démonstrations. Si la fonction  $G$  opère sur  $E_p^s(\mathbb{R}^n)$ , on sait que  $G$  opère de façon bornée; en d'autres termes, il existe des constantes  $C_j > 0$  telles que, pour toute fonction  $f$ , portée – disons – par le cube unité  $Q = [-1/2, +1/2]^n$ ,  $\|f\| \leq C_1$  implique  $\|G \circ f\| \leq C_2$ .

Lemme 1. Dans le cas sous-critique, il existe une suite  $(\theta_\nu)_{\nu \geq 1}$  de fonctions  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n$ , portées par  $Q$ , telles que  $\theta_\nu(x) = 1$  sur le cube  $2^{-\nu}Q$  et  $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \|\theta_\nu\| = 0$ .

Preuve du lemme 1. Donnons-nous une fonction  $\omega \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  telle que  $\omega(x) = 1$  sur  $Q$  et  $\omega(x) = 0$  hors de  $2Q$ .

Le cas  $s < n/p$  est très simple: on pose  $\theta_\nu(x) = \omega(2^\nu x)$  et on utilise l'estimation (1).

Supposons maintenant  $s = n/p$  et posons

$$\theta_\nu(x) = \nu^{-1} \sum_{1 \leq j \leq \nu} \omega(2^j x) ;$$

tout se passe comme si la somme ci-dessus était une série d'ondelettes, de sorte que  $\|\theta_\nu\|$  est estimée par  $\nu^{(1/q)-1}$  dans le cas Besov et par  $\nu^{(1/p)-1}$  dans le cas Triebel-Lizorkin.

Revenons au théorème 2 en posant

$$f(x) = (b - a) \sum_{|k_j| \leq \nu} g(r^{-1}x - k) + a \theta_\nu(x)$$

( $a$  et  $b$  sont des nombres donnés; la fonction  $g$  est une fonction plateau portée par  $\varepsilon Q$ , où  $\varepsilon = \varepsilon(s)$  est suffisamment petit; la somme porte sur les  $k \in \mathbb{Z}^n$  tels que  $|k_j| \leq \nu$  pour  $j = 1, \dots, n$ ).

Le lemme 1 permet d'obtenir un entier  $\nu$  assez grand pour avoir  $|a| \|\theta_\nu\| \leq C_1/2$ ; alors on choisit l'entier  $\nu \geq 1$  et  $r \in ]0, 1]$  tels que  $r\nu$  soit petit devant  $2^{-\nu}$  et qu'on ait  $\|f\| \leq C_1$ ; il suffit pour cela que  $r^\theta \nu^{n/p}$  soit de l'ordre de grandeur de  $|a-b|^{-1}$ . L'inégalité  $\|G \circ f\|_{B_p^{s,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq C_2$  conduit alors à  $|G(a) - G(b)| \leq C_3|a-b|$ .

La preuve du théorème 3 débute par le

Lemme 2. Il existe une suite  $(u_\nu)_{\nu \geq 1}$  de fonctions  $C^\infty$ , portées par  $Q$ , telles que

$$(i) u_\nu(x) = x_1, \text{ pour } |x_1| \leq 2^{-\nu-1} \text{ et } |x_j| \leq 1/4 (j = 2, \dots, n);$$

(ii)  $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} u_\nu = 0$ , dans l'espace  $E_p^{1+(1/p)}(\mathbb{R}^n)$  (sauf pour  $W^{2,1}$  et – peut-être – pour  $B_p^{1+(1/p),1}$  et  $F_1^{2,q}$ ).

Preuve du lemme 2. On se ramène aisément à la dimension 1, auquel cas les fonctions  $u_\nu(x) = \int_{-\infty}^x \theta_\nu(t) dt$  font l'affaire (pourvu qu'on ait pris soin de choisir  $\omega$  paire et d'intégrale nulle).

On reprend la preuve du théorème 3 en testant  $G$  sur la fonction

$$f(x) = 2^\nu a u_\nu(r^{-1}x),$$

où  $\nu$  est un grand entier et  $a = \|u_\nu\|^{-1}$ ; le choix d'un  $r = r(\nu) \in ]0, 1]$

permet d'obtenir  $\|f\| \leq C_1$ ; l'exploitation de l'inégalité

$\|G \circ f\|_{B_p^{1+(1/p),\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq C_2$  conduit alors à

$$\int_{[-a, +a]} |G'(t+\tau) - G'(t)|^p dt \leq C_3 a^{-p},$$

pour tout  $\tau$  assez petit; en faisant tendre  $\nu$  vers  $+\infty$ , on obtient  $G' = \text{Cte}$ .

## BIBLIOGRAPHIE

1 – Travaux résumés dans l'exposé:

G.BOURDAUD. – Le calcul fonctionnel dans les espaces de Sobolev. Invent. Math. 104 (1991), 435–446.

– Le calcul fonctionnel dans l'espace de Besov critique. Proc. Amer. Math. Soc (à paraître).

– Fonctions qui opèrent sur les espaces de Besov et de Triebel. Annales de l'I.H.P. (Analyse non linéaire) (à paraître).

– La triviale du calcul fonctionnel dans  $H^{3/2}(\mathbb{R}^4)$ . C.R.A.S. (à paraître).

G.BOURDAUD et Dalila KATEB. – Fonctions qui opèrent sur certains espaces de Besov. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 40 (1990), 153–162.

– Fonctions qui opèrent sur les espaces de Besov. Proc. Amer. Math. Soc. 112 (1991), 1067–1076.

G.BOURDAUD et Djalil KATEB. – Calcul fonctionnel dans l'espace de Sobolev fractionnaire. Math. Zeit. (à paraître).

G.BOURDAUD et Y.MEYER. – Fonctions qui opèrent sur les espaces de Sobolev. J. Funct. Anal. 97 (1991), 351–360.

## 2– Travaux antérieurs sur le calcul fonctionnel:

G.BOURDAUD. – Fonctions qui opèrent sur les espaces de Sobolev. Sémin. Anal. Harm., Orsay (1980–81), 6–17.

B.E.J.DAHLBERG. – A note on Sobolev spaces. Proc. Symp. Pure Math. 35,1 (1979), 183–185.

S.IGARI. – Sur les fonctions qui opèrent sur l'espace  $\hat{A}^2$ . Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 15 (1965), 525–536.

S.JANSON. – Harmonic Analysis and Partial Differential Equations (El Escorial, 1987), 193–201, Lecture Notes in Math. 1384, Springer (1989).

M.MARCUS et V.J.MIZEL. – Complete characterization of functions which act, via superposition, on Sobolev Spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 251 (1979), 187–218.

J.PEETRE. – Interpolation of Lipschitz operators and metric spaces. Mathematica (Cluj) 12 (35) (1970), 325–334.

T.RUNST. – Mapping properties of non-linear operators in spaces of Triebel–Lizorkin and Besov type. Analysis Mathematica 12 (1986), 313–346.

## 3- Ouvrages sur les ondelettes et les espaces fonctionnels:

G.BOURDAUD. – Analyse fonctionnelle dans l'espace Euclidien. Publ. Math. Paris VII, 23 (1987).

M.FRAZIER et B.JAWERTH. – Decomposition of Besov Spaces. Indiana Univ. Math. J. 84 (1985), 777–799.

– A Discrete Transform and Applications to Distribution Spaces. J. Funct. Anal. 93 (1990), 34–170.

Y.MEYER . – Ondelettes et Opérateurs, Tome I, Hermann, Paris (1991).

H.TRIEBEL. – Theory of Function Spaces. Birkhäuser, Basel, Boston, Stuttgart (1983).

– Characterizations of Besov–Hardy–Sobolev Spaces: a unified Approach. J. Approx. Th. 52 (1988), 162–203.

– Local approximation spaces. Z. Anal. Anwendungen 8 (1989), 261–288.

Université Paris VII  
C.N.R.S. U.A. 212  
Tour 45–55–5<sup>e</sup> étage  
2, place Jussieu  
75251 Paris Cedex 05  
France

# CONSTRUCTION DE VARIETES INERTIELLES APPROXIMATIVES A L'AIDE D'ONDELETTES

Olivier Goubet  
Laboratoire d'Analyse Numérique  
Université de Paris-Sud

## Motivation :

Le travail exposé ci-dessous se situe dans le cadre de l'étude pour les grands temps des solutions d'une équation aux dérivées partielles dissipative.

Soit une E.D.P. (parabolique) non linéaire qui s'écrit sous forme abstraite

$$\frac{du}{dt} + Au + B(u) = f$$

où , pour se fixer les idées, l'opérateur  $A$  est de la forme  $(-\frac{\partial^2}{\partial x^2})^m$  avec conditions au bord périodiques. On se place dans le cas où le système dynamique associé à cette équation a une structure non triviale pour les grands temps, c'est à dire quand l'attracteur est non réduit à un point.

En quelques mots, l'attracteur est un sous ensemble compact de l'espace ambiant qui attire toutes les orbites quand  $t \rightarrow +\infty$ . Les difficultés que l'on rencontre alors sont que la vitesse de convergence des orbites vers l'attracteur peut être arbitrairement lente et que celui-ci peut avoir une structure complexe, fractale.

Pour remédier à ces difficultés, de nouveaux objets mathématiques ont été introduits : Les variétés inertielles approximatives (Approximate Inertial Manifolds en anglais) qui sont des variétés régulières de dimension finie, qui attirent dans un voisinage mince toutes les orbites avec une vitesse exponentielle. A titre d'exemple, l'espace de dimension finie sur lequel on implémente une méthode de Galerkin pour calculer une solution approchée de l'équation considérée, représente la V.I.A. la plus simple, puisque plate, et la plus grossière, puisque fournissant un ordre d'approximation peu élevé. Par ailleurs les V.I.A. d'ordre supérieur sont la base d'algorithmes numériques plus stables en vue de l'intégration pour les grands temps des équations d'évolution.

La théorie et la pratique des Méthodes de Galerkin Non Linéaires est maintenant bien développée dans le cas d'une approximation spectrale des solutions, et s'étend à présent au-delà (éléments finis, différences finies ...). Dans la suite de l'exposé, on va prouver que les ondelettes permettent de construire des V.I.A

d'ordre comparable à ce que l'on peut obtenir en spectral. Pour la clarté de l'exposé on se limitera au cas de la dimension un et aux splines-ondelettes.

**Quelques propriétés des splines-ondelettes :**

Soit  $N$  la régularité des ondelettes considérées. On se place sur l'ouvert  $(0,1)$  que l'on subdivise en intervalles de longueur  $1/2^j$ . Soit  $V_j$  l'espace des fonctions de classe  $C^N$ , polynômiales de degré  $N + 1$  par morceaux. On pose

$$W_j = V_{j+1} \cap (V_j)^\perp.$$

Les propriétés des ondelettes que l'on va utiliser par la suite sont les propriétés "spectrales" suivantes :

- Inégalités de type Bernstein (ou inegalités inverses) :

$$\text{pour } s \leq N + 1, \text{ pour } y \in V_j$$

$$\| y \|_{\dot{H}_{per}^s} \leq \beta_0 2^{js} \| y \|_{L^2}.$$

- Inégalités de type Poincaré (améliorées) :

$$\text{pour } s \leq N + 1, \text{ pour } z \in W_j$$

$$\| z \|_{L^2} \leq \pi_0 2^{-js} \| z \|_{\dot{H}_{per}^s}.$$

A l'aide de ces inégalités on peut retrouver que pour  $|s| < N + 1$  la décomposition orthogonale

$$L^2(T) = \bigoplus_{j=0}^{+\infty} W_j$$

s'étend en une décomposition inconditionnelle des espaces  $\dot{H}_{per}^s$ .

**Le théorème principal :**

On considère l'équation de départ où, pour se fixer les idées,  $B$  envoie  $D(A^{1/2})$  dans  $L^2$ ,  $f$  et la donnée initiale  $u_0$  sont dans  $\dot{L}^2$ .

**Théorème :**

Pour  $2m \leq N + 2$ , les trajectoires  $u(t)$  s'approchent de  $V_j$  à une distance bornée par  $C4^{-jm}$  dans  $L^2$ , et par  $C2^{-jm}$  dans  $D(A^{1/2})$ . De plus la distance de  $\frac{du}{dt}(t)$  à  $V_j$  dans  $L^2$  est elle-même contrôlée par  $C2^{-jm}$ .

Les estimations ci-dessus étant vérifiées pour un temps assez grand dépendant des données de l'équation, et pour une constante  $C$  dépendante de ces mêmes données, mais indépendante de  $u_0$ .

Esquisse de la preuve :

Le premier point consiste à utiliser une inégalité de type Poincaré améliorée sur l'orthogonal de  $V_j$  dans  $D(A^{1/2})$ ; ceci explique en partie pourquoi on a besoin de plus de régularité ( $2m \leq N + 1$ ) que pour des estimations d'erreur pour des temps finis.

Ensuite on établit des estimations a priori sur le projeté d'une trajectoire sur l'orthogonal de  $V_j$  dans  $D(A^{1/2})$ , à l'aide des inégalités décrites ci-dessus.

Les estimations sur les dérivées en temps sont alors plus difficiles à obtenir. On complexifie en temps et en espace, on démontre des propriétés d'analyticité sur un voisinage uniforme du demi-axe réel  $t > T_0$ , et l'on termine comme pr edemment en utilisant les formules de Cauchy.

Ce théorème est le point de départ à la construction d'une famille de V.I.A. qui approchent l'attracteur avec un ordre supérieur. A titre d'exemple donnons l'équation d'une première variété non plate :

*Soit  $Q_j$  le projecteur sur  $(V_j)^\perp$*

$$\text{Soit } \Phi(y) = (Q_j^* A Q_j)^{-1} [f - Ay - B(y)]$$

On a alors

**Proposition :**

La variété définie comme le graphe de  $\Phi$  approche les trajectoires à une distance  $C8^{-jm}$  dans  $L^2$ ,  $C4^{-jm}$  dans  $D(A^{1/2})$ , pour un temps et une constante  $C$  de même type que pr edemment.

**Perspectives numériques :**

On peut envisager d'implémenter un algorithme non linéaire sur la V.I.A. de type

$$\frac{dy}{dt} + A_j(y + \Phi(y)) + B_j(y + \Phi(y)) = f_j.$$

On espère les gains suivants

- Gain de temps par rapport au système complet
- Meilleure stabilité par rapport au système complet

Par ailleurs le calcul sera d'autant plus facile à effectuer que la matrice  $Q_j^* A Q_j$  est bien conditionnée et que l'on dispose d'algorithmes rapides pour passer de  $(y, \Phi(y))$  à  $y + \Phi(y)$ .

### Bibliographie :

Pour les questions relatives au travail présenté

O.Goubet, Construction of Approximate Inertial Manifolds using Wavelets, soumis au *SIAM J. of Math. Anal.*

Pour les questions relatives à l'approximation pour les grands temps des solutions d'équations dissipatives

R.Temam, *Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, New-York, Applied Mathematical Science Series, vol.68, 1988.

R.Temam; Attractors for the Navier-Stokes equations, Localization and Approximation, *J. Fac. Sci. Tokyo*, Sec IA, 629-647, 1989.

Pour les ondelettes et plus particulièrement les splines-ondelettes

Y.Meyer, *Ondelettes et Opérateurs*, Hermann, 1990.

P.G.Lemarié; Ondelettes à localisation exponentielle, *J. Math. Pures et Appl.*, 67, p. 227-236, 1988.

## DIFFUSION ANISOTROPIQUE NON LINÉAIRE

### Deux applications : Edge detection et détermination de contours fermés

Francine CATTÉ et Françoise DIBOS

CEREMADE UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

#### Première partie : EDGE DETECTION

On veut analyser une image de manière à distinguer les différentes zones d'intensité moyenne constante en localisant leurs contours ( ou arêtes ou *edges*) le mieux possible.

La diffusion consiste à lisser une image, c'est-à-dire à éliminer les fluctuations (bruit) introduites par les capteurs ou inhérentes à l'image. Les contours de l'image peuvent être alors identifiés à l'ensemble des points où la norme du gradient  $\nabla u$  de l'image est grande.

**Modèle 1 : MARR et HILDRETH** , diffusion isotropique.

On commence par lisser l'image  $u_0$ , c'est à dire par éliminer le bruit en effectuant un filtrage linéaire :

$$u = G_\sigma * u_0$$

où  $G_\sigma$  est une famille de gaussiennes de variance  $\sigma$  croissante.

Si on pose  $\sigma = \sqrt{t}$ , on résout en fait l'équation de la chaleur :

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) = \Delta u(x, y, t) \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \end{cases}$$

On définit ensuite les arêtes à chaque échelle  $t^{1/2}$  comme les points où  $\Delta u(x, y, t)$  change de signe et  $|\nabla u(x, y, t)|$  est grand. Ceci suppose un seuil défini *a priori* et brutal. Cette analyse " espace, échelle " tend à déplacer les arêtes et produit des effets de flou désagréables.

**Modèle 2 : MALIK et PERONA**

On introduit la détection d'arêtes, de manière plus douce, en diffusant de manière sélective :

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) = \operatorname{div}(g(|\nabla u|)\nabla u) \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \end{cases}$$

$g$  est une fonction de contraste régulière.

$g(0) = 1$ ,  $g(x) \geq 0$  et  $g(x) \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow \infty$ .

Si  $|\nabla u|$  est petit, on a l'équation de la chaleur et la diffusion est celle du modèle 1.

Si  $|\nabla u|$  est grand, la diffusion est inhibée ; on conserve les arêtes.

L'inhibition de la diffusion se produit aussi pour les fausses arêtes, dues par exemple au bruit. Dans certains cas, il n'existe pas de théorie pour (2).

### Modèle 3 : T COLL, F CATTÉ, J M MOREL

Les fluctuations dues au bruit ont des gradients très forts mais ceux-ci sont localement de moyenne nulle.

On va donc appliquer un seuillage non plus sur  $|\nabla u|$  comme dans (2), mais sur  $|G_\sigma * \nabla u|$ . Ceci va permettre de distinguer les points de gradient fort à cause du bruit et ceux qui correspondent à des variations significatives de l'image :

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) = \operatorname{div}(g(|G_\sigma * \nabla u|)\nabla u) \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \end{cases}$$

où  $g$  est encore une fonction de contraste comme dans (2).

On prouve l'existence et l'unicité de la solution du modèle (3), pour une donnée  $u_0 \in L^2$ , par des raisonnements classiques de points fixes. On a pour ce modèle (3) convergence et stabilité des schémas numériques.

### Modèle 4 : L ALVAREZ , P L LIONS, J M MOREL, diffusion anisotropique.

Pour mieux localiser les arêtes, on va régulariser l'image des deux côtés d'une arête, tout en évitant que celle ci s'estompe.

On va donc diffuser seulement dans la direction parallèle aux arêtes :

$$(4) \quad u_t = g(|G_\sigma * \nabla u|)u_{\xi\xi}$$

où  $\xi$  est la coordonnée associée à la direction orthogonale à  $\nabla u$ . On peut encore écrire (4) sous la forme divergence :

$$(4') \quad u_t = g(|G_\sigma * \nabla u|)|\nabla u| \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$$

Le modèle (4) est à deux paramètres :  $t$  paramètre d'échelle,  $g$  paramètre qui fixe le contraste.

On a une bonne théorie pour ce modèle à l'aide du concept de solution de viscosité au sens de Crandall et Lions et le schéma numérique associé est stable.

On peut remarquer que si  $g = 1$ , on retrouve le modèle *mean curvature motion* étudié par Osher, Sethian, Barles, Evans, Spruck, Ishii...

On obtient pour (4) de très bons résultats visuels.

### Deuxième partie : DÉTECTION DE CONTOURS FERMÉS.

On commence par fixer un contour initial  $\gamma_0$  près du contour apparent que l'on souhaite déterminer. On déforme et déplace ce contour initial ( comme dans les méthodes classiques de *snakes*) de manière à le faire coïncider au contour apparent recherché.

La méthode que nous proposons ici est liée à la *mean curvature motion* et sa modélisation repose sur la diffusion anisotropique d' Alvarez, Lions, Morel.

Plus précisément, nous proposons l'équation :

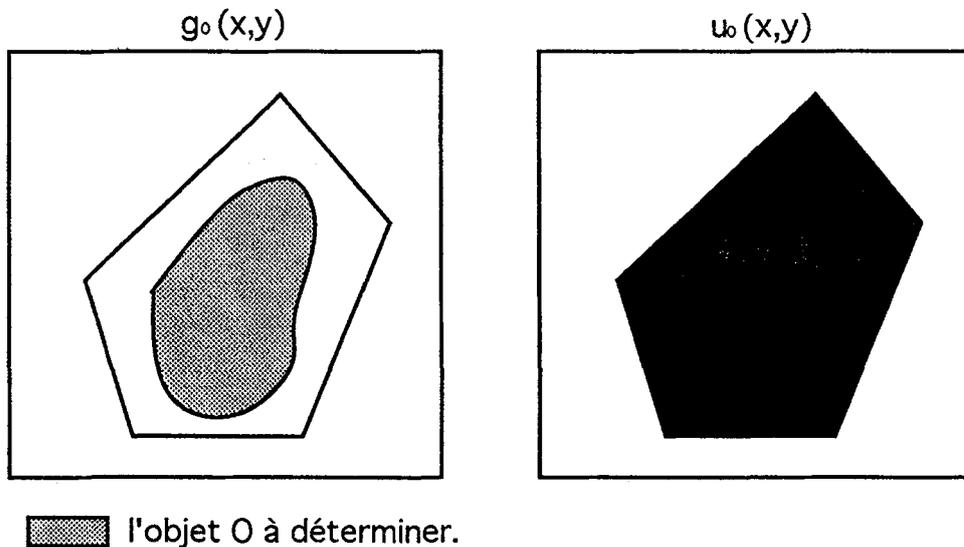
$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = g(x)|\nabla u|(\operatorname{div} \frac{\nabla u}{|\nabla u|} + \nu) & (t, x) \in [0, \infty[ \times \mathbb{R}^2 \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) & x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

où  $\nu$  est une constante réelle positive,  $g_0(x, y)$  l'image dans laquelle l'on cherche à déterminer le contour d'un objet  $\mathcal{O}$  et

$$g(x) = \frac{1}{1 + (\nabla G_\sigma * g_0)^2}$$

où  $G_\sigma * g_0$  est le produit de convolution de l'image  $g_0$  et d'une gaussienne  $G_\sigma(x) = C\sigma^{1/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\sigma}\right)$ .

$u_0$ , la donnée initiale, est la version lissée de  $1 - X_{\mathcal{C}_0}$  où  $X_{\mathcal{C}_0}$  est la fonction caractéristique d'un ensemble  $\mathcal{C}_0$  qui contient  $\mathcal{O}$  :



*Interprétation géométrique de l'équation (1) :*

Supposons que  $u(x, y, t)$  soit de classe  $C^2$  et que :

$$\gamma_t = \partial\mathcal{C}_t = \{(x, y) \mid u(x, y, t) = \lambda\}$$

où  $\mathcal{C}_t = \{(x, y) \mid u(x, y, t) \leq \lambda\}$  et  $\lambda$  est un entier compris entre 0 et 255.

On paramétrise  $\gamma_t$  par son abscisse curviligne, de telle sorte que  $\mathcal{C}_t$  soit laissé sur la gauche lorsqu'on parcourt  $\gamma_t$  dans le sens positif. Un calcul simple montre que la courbure de  $\gamma_t$  au point  $(x(s), y(s))$  est égale à :

$$\rho = \operatorname{div} \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$$

Considérons alors l'équation (1).

1) le terme  $\operatorname{div} \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$  assure que le niveau de gris d'un point de  $\gamma_t$  va augmenter proportionnellement à la courbure de  $\gamma_t$  en ce point.

$\nu$  est un terme correcteur, choisi de sorte que  $\operatorname{div} \frac{\nabla u}{|\nabla u|} + \nu$  soit toujours positif.

Le niveau de gris d'un point de  $\gamma_t$  va donc augmenter ( passer du noir (codé 0) au blanc (codé 1)) et l'on va voir  $\gamma_t$  se resserrer autour du contour de  $\mathcal{O}$ .  $\nu$  peut être interprété comme une force qui permet de pousser  $\gamma_t$  vers le contour de  $\mathcal{O}$  lorsque la courbure est nulle, voire négative.

2) le terme  $|\nabla u|$  permet de contrôler ce qui se passe à l'intérieur et à l'extérieur de  $\gamma_t$ . En effet, ces domaines ont un niveau de gris sensiblement constant,  $|\nabla u|$  est petit et l'image  $u(x, y, t)$  reste au même niveau de gris.

3)  $g(x)$  contrôle la vitesse de déplacement de  $\gamma_t$ . Lorsque  $\gamma_t$  arrive à proximité du contour de  $\mathcal{O}$ ,  $|\nabla G_\sigma * g_0|$  est grand et donc  $\gamma_t$  stoppe.

Pour que  $\gamma_t$  ne soit pas arrêté par des gradients parasites, on lisse  $g_0(x, y)$  par une gaussienne.

### Remarques

Notre modèle dépend a priori de 4 paramètres :

- le choix de la ligne de niveau  $\lambda$  suivie,
- la force  $\nu$  (indispensable lorsque l'objet à déterminer n'est pas convexe),
- la variance de la gaussienne  $\sigma$  (paramètre d'échelle),
- le temps d'arrêt  $T$ .

Nous montrons en fait que ce modèle peut être considéré comme un modèle 0-paramètre, le temps d'arrêt  $T$  étant déterminé comme suit :

on calcule à chaque itération

$$E(\gamma_t) = \frac{1}{L(\gamma_t)} \int_{\gamma_t} |\nabla G_\sigma * g_0(x(s), y(s))| ds$$

où  $\gamma_t$  est la courbe dont on suit la déformation,  $L(\gamma_t)$  sa longueur.

Puisque  $\gamma_t$  traverse au début une zone homogène de l'image  $g_0(x, y)$ , puis colle au contour de l'objet  $\mathcal{O}$  et traverse de nouveau une zone homogène de  $g_0(x, y)$ , l'énergie  $E(\gamma_t)$  passe donc par un maximum lorsque  $\gamma_t$  trouve le contour cherché.

Notre modèle permet de plus de déterminer simultanément plusieurs contours sans augmentation du temps de calcul.

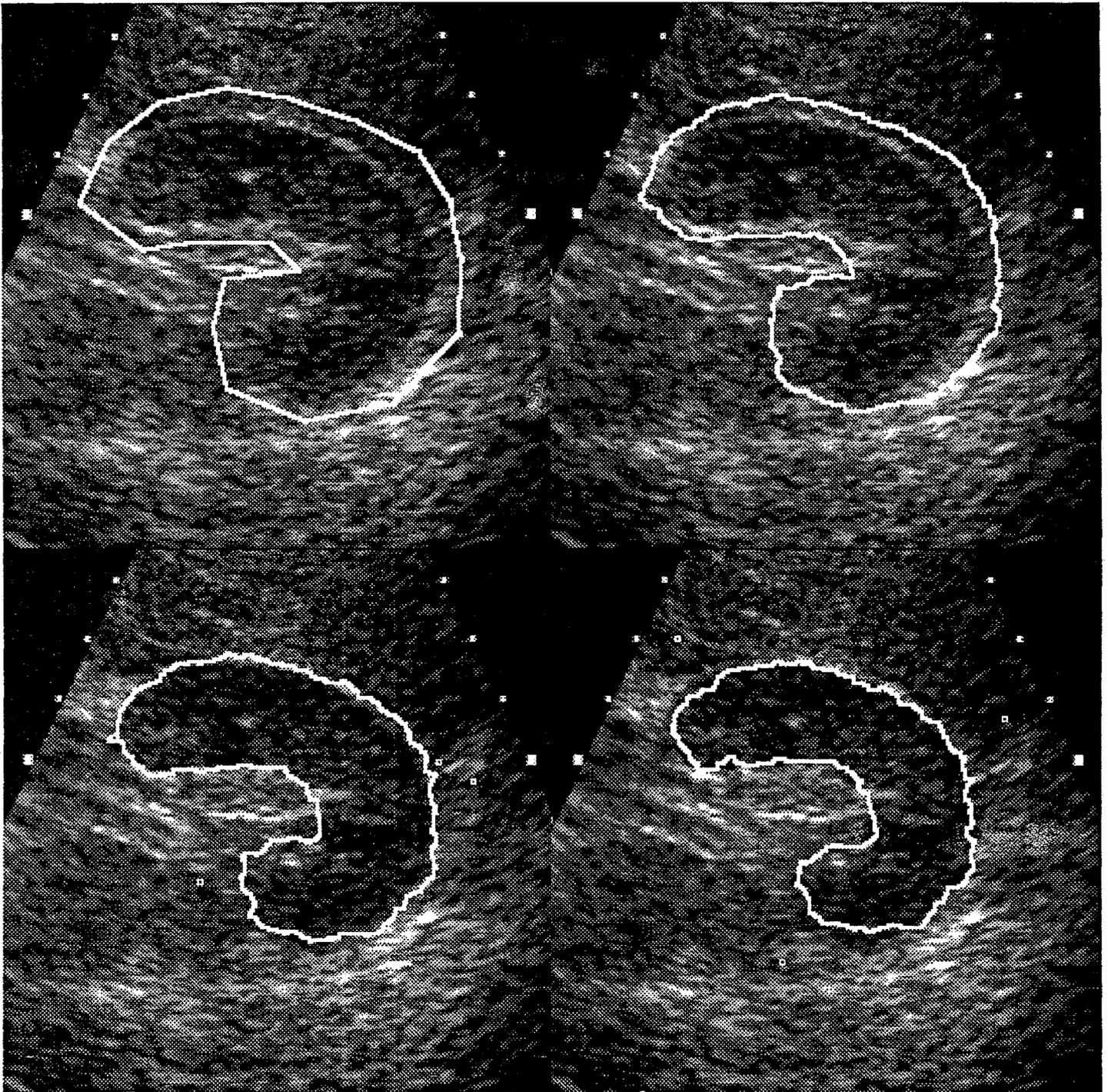
### *Expérimentations*

1. *Échographie*. On peut voir de gauche à droite et de bas en haut, le contour initial et les résultats des itérations successives.
2. *Les étoiles* sont une expérience de détection de contour d'un objet non convexe. Ceci n'est possible que si  $\nu > 0$ .
3. *Les pommes* présentent une expérience multi contours . Deux initialisations différentes sont présentées.

Le temps de calcul sur une station de travail SUN IPC est de l'ordre de 6 secondes par itération pour une image 256x256.

### **Références**

- L. Alvarez, P.L. Lions, J.M. Morel. *Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion II*. Cahier du CEREMADE n° 9046, à paraître dans SIAM J. of Numer. Anal. 92
- V. Caselles, F. Catté, T. Coll, F. Dibos. *A geometric model for active contours in image processing*. Cahier du CEREMADE n° 9210, à paraître dans SIAM J. of Numer. Anal. 92
- F. Catté, T. Coll, P.L. Lions, J.M. Morel. *Image selective smoothing and edge detection by non linear diffusion I*. SIAM J. of Numer. Anal. Vol 29 n° 1, p 182-193, Février 92.
- F. Dibos. *Formalisation du problème de détection de contours : deux théories*. Thèse, CEREMADE, Paris Dauphine, avril 92.
- Malik & Perona *A scale space and edge detection using anisotropic diffusion*. Proc. IEEE Computer Soc. Workshop on Computer Vision, 1987.
- Marr & Hildreth *Theory of edge detection*. Proc. Roy. Soc. Lond. B207 1980, 187-217.

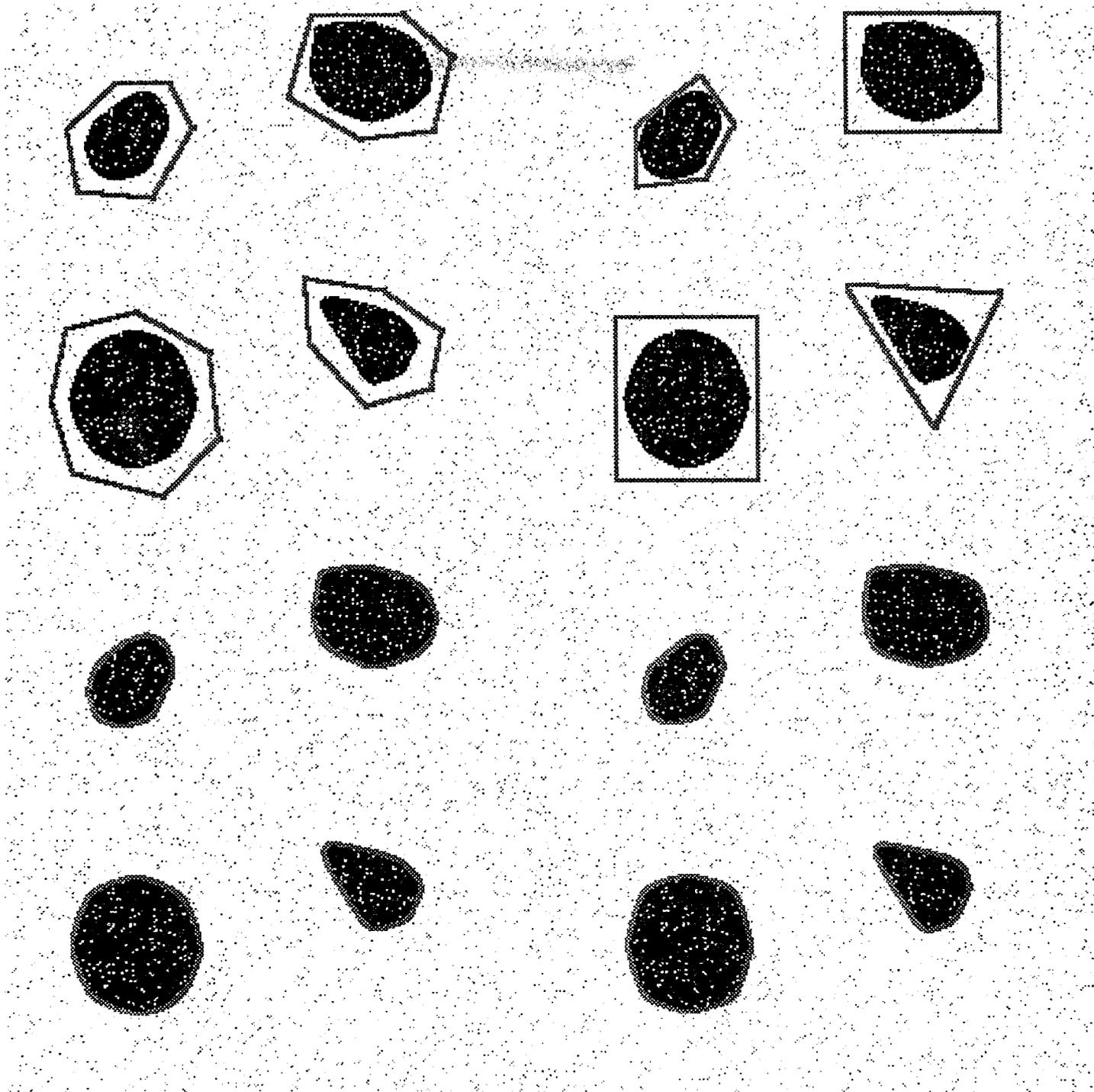


"echographie"

25/5/92

MegaWave

Taille en pixels : (512,512) Sortie en 256 NG Blanc = 255 MinNG = 0 MaxNG = 255 MoyNG = 68.6 Ecart-T = 58.92 Entropie = 5.53  
*contour initial, iteration 2, 6 et 8*



"pommes"

25/5/92

MegaWave

Taille en pixels : (512,512) Sortie en 256 NG Blanc = 255 MinNG = 0 MaxNG = 255 MoyNG = 222.6 Ecart-T = 79.66 Entropie = 1.46  
*contours initiaux et iteration 13 dans les deux cas*

# Second Generation Compact Image Coding with Wavelets <sup>1</sup>

*Jacques Froment (\*) and Stéphane Mallat <sup>2</sup>*

Courant Institute of Mathematical Sciences  
New York University  
251 Mercer Street  
New York, NY 10012, USA

(\*) New address:

Université Paris V - René Descartes  
UFR de Mathématiques, Statistique et Informatique  
Sorbonne, 12 rue Cujas, 75005 Paris, FRANCE

<sup>1</sup>To appear in "WAVELETS: A TUTORIAL IN THEORY AND APPLICATIONS",  
Edited by Charles K. Chui, Academic Press Inc.

<sup>2</sup>This research was supported by the NSF grant IRI-890331, AFOSR grant AFOSR-90-0040 and ONR grant N00014-91-J-1967

## 1 Introduction

Compact image coding algorithms have been divided [6,12] into first and second generation methods. Among first generation coding algorithms, the most efficient technics decompose the image in an orthogonal basis. Several orthogonal transforms have been used for this purpose: the Karhunen-Loeve transform [14], the discrete cosine transform [13], and different orthogonal sub-band decompositions [3,16] such as the wavelet transform [8] or wavelet packets [15]. The original image is decomposed in the corresponding orthogonal basis and the decomposition coefficients are quantized with various technics. For the discrete cosine transform as well as the wavelet transform, the orthogonal basis is chosen once for all. On the opposite, a Karhunen-Loeve transform or wavelet packets adapt the orthogonal basis to the statistical properties of each image. The basis is chosen in order to minimize the entropy of the decomposition coefficients and thus the number of bits required for the coding.

Second generation methods try to take advantage of the structural properties of images, and the way they are perceived by a human observer. The image information can be roughly divided in two categories. The first corresponds to edges, which are particularly important for image understanding. Degradations of the image contours generally affects severely the image quality. The second category regroups the different textures. The notion of texture is ill-defined in computer vision, but seems to be very important for image perception. Textures corresponds to an information that is less structured than edges, although this depends upon the reference scale. What we might label as edges when looking at an image at a given scale, can be considered as texture elements at a larger scale. In most cases, texture distortions are not highly visible. This suggest to code the texture information less precisely than the edge information. Edge and texture coding algorithms have already been developed by Carlsson [2] and Kunt et. al. [6]. These algorithms allow to obtain high compressions, while introducing distortions that do not affect to much the image visualization. Right now, second generation coding procedures are mostly feasibility studies. The detection of edges and textures require non-linear transforms that are difficult to understand mathematically. The algorithms involved are complicated and require a lot of computations. It has been shown by Zhong and one of us [9] that multiscale edges can be detected and characterized with a wavelet transform. For a particular class of wavelets, the local maxima of the wavelet transform modulus provide the locations of edges in images. A close approximation of the original image can be reconstructed from these multiscale edges [9]. The reconstructed image is visually identical to the original one. A compact coding algorithm has already been implemented [9] from multiscale edges. For images of 256 by 256 pixels, this algorithm compresses the image data by a factor of the order of 30 and restores an image without visible distortions along the edges. However, this compression algorithm removes all textures which is not acceptable when textures provide important information.

In this chapter, we introduce a double layer coding based on edges and tex-

tures. A first coding from multiscale edges is performed. We then compute the difference between the original image and the coded image. This error image includes all the textures. It is coded with an orthogonal wavelet transform. The orthogonal wavelet transform is well adapted to the statistical properties textures in images, in the sense that the entropy of the wavelet coefficients, on average, is relatively small [5,8,16]. One can also adapt the quantization of the wavelet coefficients, to the human visual sensitivity [5]. The texture coding makes a coarse quantization of these wavelet coefficients, because texture distortions are not highly visible. This double coding algorithm is similar to the approach of Carlsson [2] but takes advantage of the multiscale properties of the wavelet transform. We give two examples of coding with a lady image of 256 by 256 pixels and 512 by 512 pixels. The compression ratios are respectively 40 and 100.

## 2 Multiscale edge detection from a wavelet transform

The edges of the different structures that appear in an image, are often the most important features for pattern recognition. This is well illustrated by our visual ability to recognize an object from a drawing that only outlines edges. Edge points are located where the image intensity has sharp transitions. Hence, in computer vision, a large class of edge detectors look for points where the gradient of the image intensity has a modulus which is locally maximum. Canny's [1] edge detector is a multiscale version of this approach. The image is smoothed by a low-pass filter that is dilated by a scale factor. Edges are located by computing the gradient vector of the image intensity, at each pixel location. Such an edge detector can be reformalized within a wavelet framework, which allows us to understand more precisely the properties of multiscale edges. For a particular class of wavelets, edge points can be detected from the local maxima of the wavelet transform modulus. This section reviews the work of Zhong and one of us [9], on the detection of multiscale edges with a wavelet transform.

We call a smoothing function any function  $\theta(x, y)$  whose double integral is equal to 1. It is the impulse response of a low-pass filter. Let us define two functions, respectively equal to the partial derivatives along  $x$  and  $y$  of a smoothing function  $\theta(x, y)$ :

$$\psi^1(x, y) = \frac{\partial\theta(x, y)}{\partial x} \quad \text{and} \quad \psi^2(x, y) = \frac{\partial\theta(x, y)}{\partial y}. \quad (1)$$

These functions are called wavelets. Let us dilate each of these functions by a scale factor  $2^j$ . We denote

$$\theta_{2^j}(x, y) = \frac{1}{4^j} \theta\left(\frac{x}{2^j}, \frac{y}{2^j}\right), \quad (2)$$

$$\psi_{2^j}^1(x, y) = \frac{1}{4^j} \psi^1\left(\frac{x}{2^j}, \frac{y}{2^j}\right) \quad \text{and} \quad \psi_{2^j}^2(x, y) = \frac{1}{4^j} \psi^2\left(\frac{x}{2^j}, \frac{y}{2^j}\right). \quad (3)$$

For any function  $f(x, y) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ , the wavelet transform defined with respect to  $\psi^1(x, y)$  and  $\psi^2(x, y)$ , has two components given by the convolution products

$$\mathcal{W}_{2^j}^1 f(x, y) = f * \psi_{2^j}^1(x, y) \text{ and } \mathcal{W}_{2^j}^2 f(x, y) = f * \psi_{2^j}^2(x, y). \quad (4)$$

We call a dyadic wavelet transform of  $f(x, y)$  the sequence of functions

$$\left( \mathcal{W}_{2^j}^1 f(x, y), \mathcal{W}_{2^j}^2 f(x, y) \right)_{j \in \mathbb{Z}}. \quad (5)$$

Since the wavelet transform is defined by convolution products, the Fourier transform of each component is given by

$$\widehat{\mathcal{W}_{2^j}^1 f}(\omega, \xi) = \widehat{f}(\omega, \xi) \widehat{\psi}^1(2^j \omega, 2^j \xi) \text{ and } \widehat{\mathcal{W}_{2^j}^2 f}(\omega, \xi) = \widehat{f}(\omega, \xi) \widehat{\psi}^2(2^j \omega, 2^j \xi).$$

A dyadic wavelet transform is a complete signal representation, if and only if, the dilations of the Fourier transform of each wavelet cover completely the Fourier plane. This means that there exists two constant  $A > 0$  and  $B > 0$  such that

$$\forall (\omega, \xi) \in \mathbb{R}^2, A \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\psi}^1(2^j \omega, 2^j \xi) \right|^2 + \left| \widehat{\psi}^2(2^j \omega, 2^j \xi) \right|^2 \leq B. \quad (6)$$

One can then prove that there exists a non-unique pair of reconstructing wavelets  $\chi^1(x, y)$  and  $\chi^2(x, y)$ , whose Fourier transform satisfy

$$\sum_{j \geq 1} \widehat{\psi}^1(2^j \omega, 2^j \xi) \widehat{\chi}^1(2^j \omega, 2^j \xi) + \widehat{\psi}^2(2^j \omega, 2^j \xi) \widehat{\chi}^2(2^j \omega, 2^j \xi) = 1. \quad (7)$$

Any function  $f(x, y)$  can be reconstructed from its wavelet transform with the following summation

$$f(x, y) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{W}_{2^j}^1 f * \chi_{2^j}^1(x, y) + \mathcal{W}_{2^j}^2 f * \chi_{2^j}^2(x, y). \quad (8)$$

A dyadic wavelet transform is more than complete; it is a redundant signal representation. This means that any sequence of functions is not a priori the wavelet transform of some signal in  $L^2(\mathbb{R}^2)$ . In order to be a dyadic wavelet transform, a sequence of function must satisfy a reproducing kernel equation that is given in [9].

Since we defined wavelets that are the partial derivatives of the smoothing function  $\theta(x, y)$ , one can derive from equations (1) and (4), that the two components of the wavelet transform satisfy

$$\begin{pmatrix} \mathcal{W}_{2^j}^1 f(x, y) \\ \mathcal{W}_{2^j}^2 f(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^j \frac{\partial}{\partial x} (f * \theta_{2^j})(x, y) \\ 2^j \frac{\partial}{\partial y} (f * \theta_{2^j})(x, y) \end{pmatrix} = 2^j \nabla (f * \theta_{2^j})(x, y). \quad (9)$$

The two components of the wavelet transform at the scale  $2^j$ , define a vector that is proportional to the gradient vector of the image smoothed by  $\theta_{2^j}(x, y)$ . The modulus of the gradient vector is proportional to the modulus image

$$M_{2^j} f(x, y) = \sqrt{|\mathcal{W}_{2^j}^1 f(x, y)|^2 + |\mathcal{W}_{2^j}^2 f(x, y)|^2}. \quad (10)$$

At each point  $(x, y)$ , the angle of the gradient vector with the horizontal is also given by

$$A_{2^j} f(x, y) = \arctan \left( \frac{\mathcal{W}_{2^j}^2 f(x, y)}{\mathcal{W}_{2^j}^1 f(x, y)} \right). \quad (11)$$

The gradient vector points in the direction along which the partial derivative of  $f * \theta_{2^j}(x, y)$  has a maximum amplitude. Like in a Canny edge detection [1], we detect the points where the modulus of  $\nabla(f * \theta_{2^j})(x, y)$  is locally maximum, in the direction where the gradient vector points to. At each scale  $2^j$ , the modulus maxima of the wavelet transform are thus defined as points  $(x, y)$ , where the modulus image  $M_{2^j} f(x, y)$  is locally maximum along the gradient direction given by  $A_{2^j} f(x, y)$ . These modulus maxima are inflection points of  $f * \theta_{2^j}(x, y)$ . We record the position of each modulus maximum and the values of  $M_{2^j} f(x, y)$  and  $A_{2^j} f(x, y)$  at the corresponding location.

Images are measured at a finite resolution. We thus can not compute the wavelet transform below a given scale that we normalize to 1. In order to model this scale limitation, we introduce a real function  $\phi(x, y)$  whose Fourier transform modulus satisfies

$$|\hat{\phi}(\omega, \xi)|^2 = \sum_{j \geq 1} \hat{\psi}^1(2^j \omega, 2^j \xi) \hat{\chi}^1(2^j \omega, 2^j \xi) + \hat{\psi}^2(2^j \omega, 2^j \xi) \hat{\chi}^2(2^j \omega, 2^j \xi).$$

As a consequence of equation (7), one can prove that  $\phi(x, y)$  is a smoothing function and we define the smoothing operator

$$\mathcal{S}_{2^j} f(x, y) = f * \phi_{2^j}(x, y),$$

where  $\phi_{2^j}(x, y)$  is a dilation of  $\phi(x, y)$  by  $2^j$ . Due to the finite resolution of measurements, we suppose that the input image is a smoothing at the scale 1 of some original image  $f(x, y)$ , and is thus equal to  $\mathcal{S}_1 f(x, y)$ . We can not compute the wavelet transform at very large scales because the signal is measured over a finite domain. The scale must remain smaller than the size of the signal support. Let us limit the scale parameter above a given scale  $2^J$ . We call finite dyadic wavelet transform of  $\mathcal{S}_1 f(x, y)$  the sequence

$$\left\{ \left( \mathcal{W}_{2^j}^1 f(x, y), \mathcal{W}_{2^j}^2 f(x, y) \right)_{1 \leq j < J}, \mathcal{S}_{2^J} f(x, y) \right\}. \quad (12)$$

It gives the wavelet transform between the scale 1 and  $2^J$ , and the remaining information is carried by the low-frequency image  $\mathcal{S}_{2^J} f(x, y)$ . One can prove that  $\mathcal{S}_1 f(x, y)$  can be recovered from its finite dyadic wavelet transform. The discretization of this model is studied in more details in [9]. If the original image has  $N$  pixels, its finite dyadic wavelet transform can be computed with a fast algorithm that requires  $O(N \log(N))$  computations. Fig. 1 shows the finite dyadic wavelet transform of a lady image. The image  $\mathcal{S}_1 f(x, y)$  is at the top left, and the low-frequency image  $\mathcal{S}_{2^4} f(x, y)$  is at the top right. The first two column show respectively  $\mathcal{W}_{2^j}^1 f(x, y)$  and  $\mathcal{W}_{2^j}^2 f(x, y)$ , and the scale increases from top to bottom. We can recognize the effect of the partial derivative along



$x$  and  $y$ , in each component of the wavelet transform. The wavelets used for this computations are defined from a smoothing function  $\theta(x, y)$ , that is a separable product along  $x$  and  $y$  of a one-dimensional cubic spline function of compact support. These wavelets are further defined in [9]. The modulus images  $M_{2^j}f(x, y)$  and angle images  $A_{2^j}f(x, y)$ , are shown in the third and fourth columns. The fifth column gives the position of the edge points, defined as local maxima of the modulus image in the direction indicated by the angle image. When the scale  $2^j$  is small, the smoothing introduced by  $\theta_{2^j}(x, y)$  is negligible. Any small fluctuation, due to the image noise, creates an edge point. At coarser scales, the smoothing removes such variations and edges are located at the boundaries of more important image structures.

### 3 Reconstruction of images from multiscale edges

For image coding, we need to reconstruct an image approximation from the multiscale edge information. Zhong and one of us [9] have built an algorithm that reconstructs images from the multiscale edges obtained with a wavelet transform. When all the edge information is kept, the algorithm recovers an image that is visually identical to the original one. This section reviews this algorithm and adapts it for our coding purposes. At each scale, an edge point is defined by its position in the image plane, plus the values of  $M_{2^j}f(x, y)$  and  $A_{2^j}f(x, y)$ , at the corresponding location. As it can be observed along the right column of Fig. 1, the smoothing component at different scale modifies the position of edge points. Edge points that appear at a scale  $2^{j+1}$ , can be found at a finer scale  $2^j$ , but their position has often changed. To code different edge maps at different scales is expensive. We thus only detect edges at one scale of reference, from the local maxima of the wavelet transform modulus. At all other scales, we record the values of  $M_{2^j}f(x, y)$  and  $A_{2^j}f(x, y)$ , at the same positions, as if the edge location did not move across scales. In our computations, we choose the reference scale equal to  $2^2$ . Indeed, edges at the finest scale  $2^1$  are too much affected by the image noise, and at coarser scales, the detection of the edge locations is less precise. The right image of Fig. 3 shows the edges obtained from the lady image, at the scale  $2^2$ . Among these, one can select a sub-set of edges that are considered as “important” for the visualization of the image. The edges that appear in the right image of Fig. 4 have been selected with an algorithm described in the next section.

Let  $((u_n, v_n))_{n \in \mathbb{Z}}$  be the positions of the edge points that are selected at the scale  $2^2$ . Let us suppose that we keep the values of the modulus and angle images at these locations:

$$(M_{2^j}f(u_n, v_n), A_{2^j}f(u_n, v_n))_{1 \leq j \leq J, n \in \mathbb{Z}}.$$

This edge detection can be also interpreted as an adaptive sampling of the modulus and angle images. At the coarse scale  $2^J$ , for coding purposes, we need to reduce the low-frequency image  $S_{2^J}f(x, y)$ . One can show that the Fourier transform of this image has an energy mostly concentrated at frequencies smaller than  $2^{-J}\pi$ . We thus sample uniformly this low-frequency image,

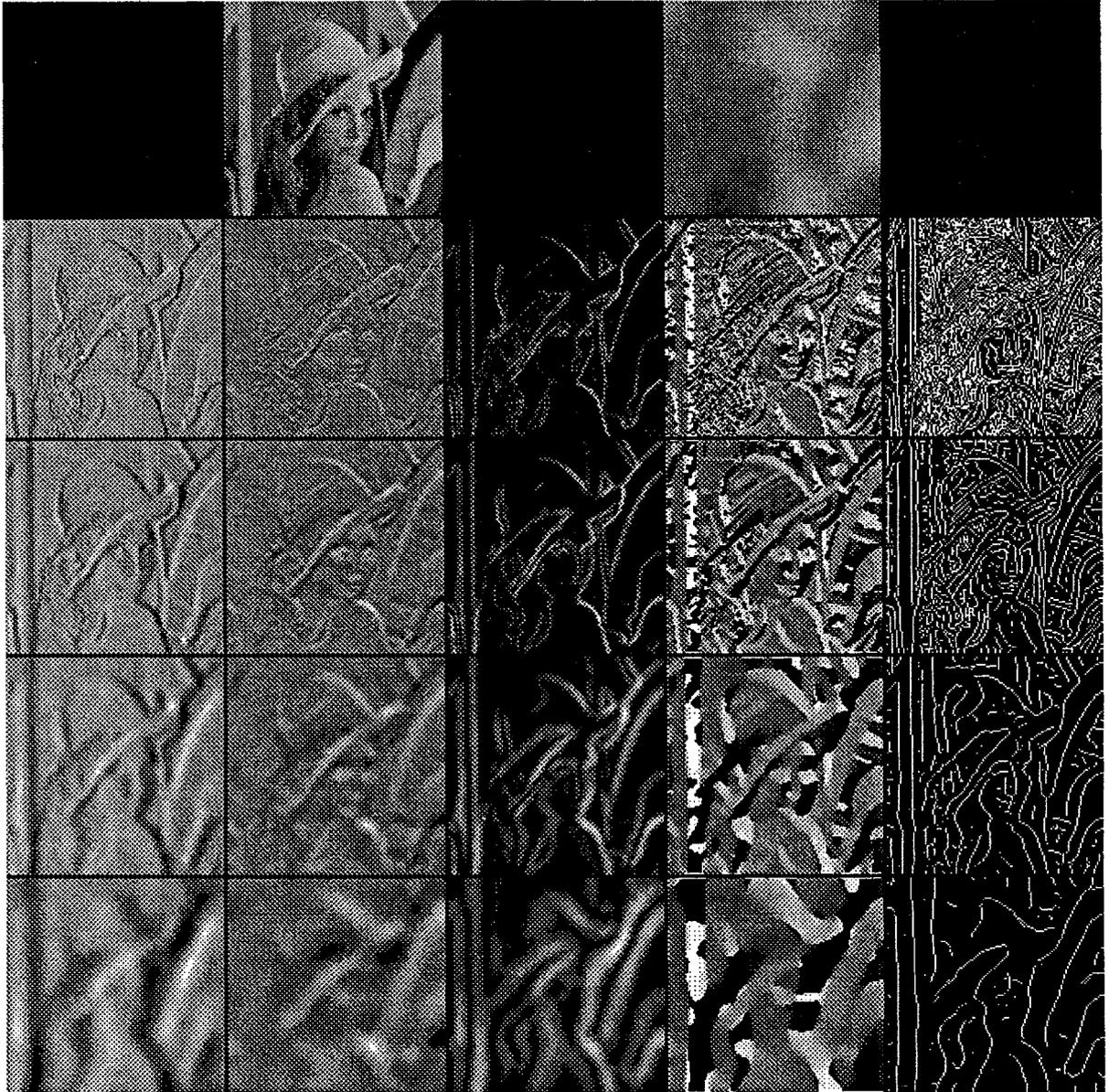


Figure 1: The original image  $S_1 f(x, y)$  is at the top left. The top right is the low-frequency image  $S_{2^4} f(x, y)$ . The first column from the left gives the images  $W_{2^j}^1 f(x, y)$  and the scale increases from top to bottom. The second columns displays  $W_{2^j}^2 f(x, y)$ . Black, grey and white pixels indicate respectively negative, zero and positive sample values. The third column displays the modulus images  $M_{2^j} f(x, y)$ . Black pixels indicate zero values and white ones correspond to high amplitudes. The fourth column gives the angle images  $A_{2^j} f(x, y)$ . The angle value goes from 0 (black) to  $2\pi$  (white). The fifth column displays in white the position of the points that are local maxima of  $M_{2^j} f(x, y)$  in the direction given by the angle image  $A_{2^j} f(x, y)$ .

at the rate  $2^{-J}$  along  $x$  and  $y$ . Given the values of the modulus  $M_{2^j}f(x, y)$  and the angle  $A_{2^j}f(x, y)$  at the edge locations  $((u_n, v_n))_{n \in \mathbb{Z}}$ , for  $1 \leq j \leq J$ , plus the uniform sampling of  $\mathcal{S}_{2^j}f(x, y)$ , at the rate  $2^{-J}$ , we want to recover the best possible approximation of  $f(x, y)$ . We expect to recover an image that contains the main edge features that have been selected, but where some details have disappeared.

To perform the reconstruction, we follow the same approach than in [9]. The goal is to recover an image  $\mathcal{S}_1h(x, y)$  whose dyadic wavelet transform has the same values as the dyadic wavelet transform of  $\mathcal{S}_1f(x, y)$ , at the edge locations. At any edge location  $(u_n, v_n)$ , from  $M_{2^j}f(u_n, v_n)$  and  $A_{2^j}f(u_n, v_n)$ , we can compute  $\mathcal{W}_{2^j}^1f(u_n, v_n)$  and  $\mathcal{W}_{2^j}^2f(u_n, v_n)$ , and vice-versa. The finite dyadic wavelet transform of  $\mathcal{S}_1h(x, y)$  should therefore satisfy for any  $(u_n, v_n)$  and  $1 \leq j \leq J$ ,

$$\mathcal{W}_{2^j}^1h(u_n, v_n) = \mathcal{W}_{2^j}^1f(u_n, v_n) \text{ and } \mathcal{W}_{2^j}^2h(u_n, v_n) = \mathcal{W}_{2^j}^2f(u_n, v_n), \quad (13)$$

and for any pair of integers  $(n, m)$

$$\mathcal{S}_{2^j}h(n2^J, m2^J) = \mathcal{S}_{2^j}f(n2^J, m2^J). \quad (14)$$

Outside the edge points  $(u_n, v_n)$ , we do not know the values of the wavelet transform of  $\mathcal{S}_1h(x, y)$ . By default, we impose that  $\mathcal{S}_1h(x, y)$  should be as smooth as possible. Equation (9) shows that the wavelet transform corresponds to the gradient of the image intensity. We thus try to recover a wavelet transform whose energy is as small as possible. To avoid any edge at other locations than the points  $(u_n, v_n)$ , we also impose that each component of the wavelet transform should have as few oscillations as possible, so that we do not create local maxima in the modulus images  $M_{2^j}f(x, y)$ . If we suppose that both  $\psi^1(x, y)$  and  $\psi^2(x, y)$  are continuously differentiable, then the wavelet transform at each scale is also differentiable. Let us denote as  $\|g\|$  the  $L^2(\mathbb{R}^2)$  norm of any function  $g(x, y) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ . We impose the smoothness constraints by minimizing the following Sobolev norm

$$\begin{aligned} & \left\| \left( (\mathcal{W}_{2^j}^1h, \mathcal{W}_{2^j}^2h)_{1 \leq j \leq J}, \mathcal{S}_{2^j}h \right) \right\|^2 = \\ & \sum_{j=1}^J \left( \|\mathcal{W}_{2^j}^1h\|^2 + 2^{2j} \left\| \frac{\partial \mathcal{W}_{2^j}^1h}{\partial x} \right\|^2 \right) + \\ & \sum_{j=1}^J \left( \|\mathcal{W}_{2^j}^2h\|^2 + 2^{2j} \left\| \frac{\partial \mathcal{W}_{2^j}^2h}{\partial y} \right\|^2 \right) + \|\mathcal{S}_{2^j}h\|^2. \end{aligned} \quad (15)$$

The minimization of this norm yields a wavelet transform where the energy of  $\mathcal{W}_{2^j}^1h$  and  $\mathcal{W}_{2^j}^2h$  is small and which has as few oscillations as possible. The Sobolev norm uses a partial derivative along  $x$  for  $\mathcal{W}_{2^j}^1h$ , because this component is defined by a partial derivative with respect to  $x$  (equation (9)), and thus oscillates mostly along the  $x$  variable. The same is true for  $\mathcal{W}_{2^j}^2h$ , along the  $y$  variable. The partial derivative terms are weighted by  $2^j$  because the smoothness of  $\mathcal{W}_{2^j}^1h$  and  $\mathcal{W}_{2^j}^2h$  increases with the scale  $2^j$ .

We recover the function  $h(x, y)$  that minimizes the Sobolev norm (15), and satisfies the constraints (13) and (14), with the same alternative projection algorithm as described in [9]. Let us define the space  $\mathbf{K}$  of all sequences of functions  $\left( \left( w_j^1(x, y), w_j^2(x, y) \right)_{1 \leq j \leq J}, s_J(x) \right)$  such that the Sobolev norm  $\| \left( w_j^1(x, y), w_j^2(x, y) \right)_{1 \leq j \leq J}, s_J(x) \|$ , defined in (15), is finite. The space  $\mathbf{K}$  is a Hilbert space, with respect to this norm. Let  $\Gamma$  be the set of sequences  $\left( \left( w_j^1(x, y), w_j^2(x, y) \right)_{1 \leq j \leq J}, s_J(x) \right)$  that belong to  $\mathbf{K}$  and such that at all edge points  $(u_n, v_n)$ , and for  $1 \leq j \leq J$ ,

$$w_j^1(u_n, v_n) = \mathcal{W}_{2^j}^1 f(u_n, v_n) \text{ and } w_j^2(u_n, v_n) = \mathcal{W}_{2^j}^2 f(u_n, v_n), \quad (16)$$

and for any pair of integers  $(n, m)$

$$s_J(n2^J, m2^J) = \mathcal{S}_{2^J} f(n2^J, m2^J). \quad (17)$$

The set  $\Gamma$  is a closed affine space in  $\mathbf{K}$ . Let us also define the space  $\mathbf{V}$  of all sequences of functions that are the finite dyadic wavelet transform of some function  $\mathcal{S}_1 g(x, y)$ , with  $g(x, y) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2)$ . By definition, the set of dyadic wavelet transforms that satisfy the constraints (13) and (14) are the sequences of functions that belong to

$$\Lambda = \Gamma \cap \mathbf{V}. \quad (18)$$

The dyadic wavelet transform that satisfies these constraints and minimizes the Sobolev norm  $\| \cdot \|$  is thus the element of  $\Lambda$  whose norm is minimum. We recover this element through alternative projections on  $\Gamma$  and  $\mathbf{V}$ .

Let  $\mathbf{P}_\Gamma$  be the orthogonal projector onto  $\Gamma$ , with respect to the Sobolev norm  $\| \cdot \|$ . This operator transforms any element of  $\mathbf{K}$  into the closest element of  $\Gamma$ , with respect to the norm  $\| \cdot \|$ . The analytical expression of this operator is given in [9], as well as its numerical implementations. Let  $\mathbf{P}_\mathbf{V}$  be the orthogonal projector onto  $\mathbf{V}$ , with respect to the norm  $\| \cdot \|$ . This operator is also characterized in [9]. Let  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_\Gamma \cdot \mathbf{P}_\mathbf{V}$  be alternative projections on  $\Gamma$  and  $\mathbf{V}$ . Let  $\mathbf{P}^n$  be  $n$  iterations over the operator  $\mathbf{P}$ . Since  $\Gamma$  is a closed affine space and  $\mathbf{V}$  a Hilbert space, a classical result on alternative projections [17] proves that for any element of  $\mathbf{K}$

$$X = \left( \left( w_j^1(x, y), w_j^2(x, y) \right)_{1 \leq j \leq J}, s_J(x) \right), \quad (19)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^n X = \mathbf{P}_\Lambda X. \quad (20)$$

The alternative projections converge strongly to the orthogonal projection of  $X$ , on the affine space  $\Lambda$ . If  $X = 0$ , which means that all the functions of the sequence (19) are equal to 0, then the limit (20) converges strongly to the element of  $\Lambda$  whose Sobolev norm  $\| \cdot \|$  is minimum. This algorithm is illustrated by Fig. 2. If the original image has  $N$  pixels, the implementation of  $\mathbf{P}_\Gamma$  and  $\mathbf{P}_\mathbf{V}$ , requires  $O(N \log(N))$  operations [9]. The stability and convergence rate of this iterative algorithm is studied in more detail in [9]. We reconstruct an

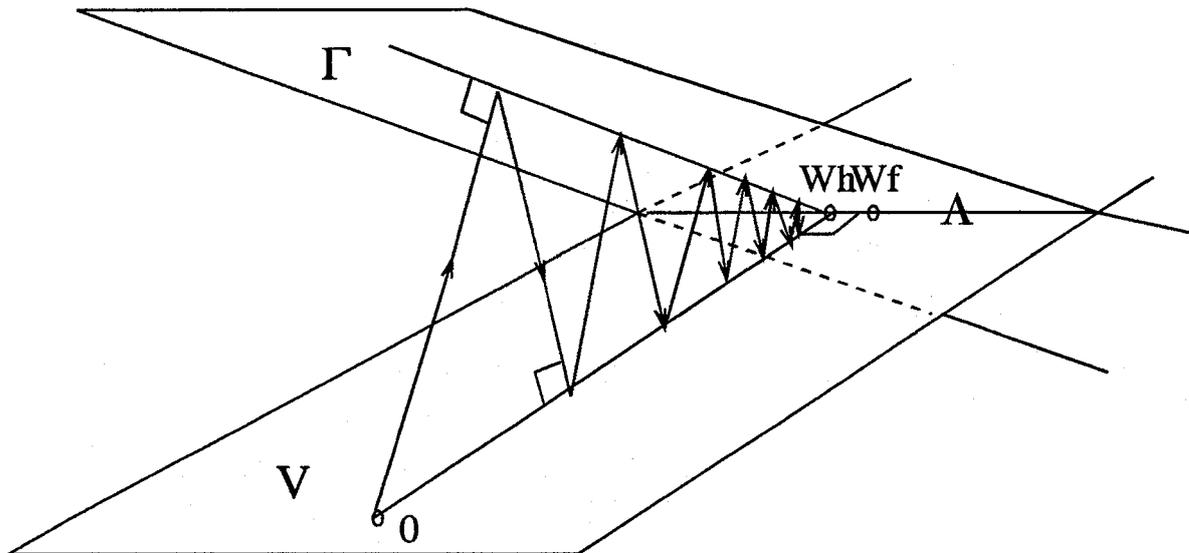


Figure 2: An approximation of the wavelet transform of  $f(x, y)$  is reconstructed by alternating orthogonal projections on an affine space  $\Gamma$  and on the space  $V$  of all dyadic wavelet transforms. The projections begin from the zero element and converges to its orthogonal projection on  $\Gamma \cap V$

image by applying the inverse wavelet transform operator on the reconstructed dyadic wavelet transform. For image processing applications, 10 iterations are sufficient to recover an approximation that has no visible difference with the solution of our inverse problem. Let us emphasize that this solution is not equal to the original image  $S_1 f(x, y)$ . Meyer proved [10] that even when all the edge information is kept, we do not reconstruct exactly the original image. In our case, since we first select the edge information, we only recover an image approximation where the main image components are restored.

At the left of Fig. 4 is an image reconstructed from the wavelet transform values along the edge map shown on the right. This image is obtained with 10 iterations on the operator  $P$ . The wavelet transform was computed over 4 scales ( $J = 4$ ). The edges that have been selected are well recovered, but the small edge details that have been removed from the edge map, have disappeared. The next section studies the application of this reconstruction algorithm to compact image coding.

## 4 Compact coding of edges

A compact image coding based on edges involves two steps. We must first select from the “most important” edge points for the image visualization. Then we code efficiently this edge information. Instead of processing isolated edge points detected by the wavelet transform maxima, we chain together



Figure 3: Left: original lady image of 256 by 256 pixels. Right: Edges obtained from the modulus maxima of the wavelet transform, at the scale  $2^2$ .



Figure 4: Left: image reconstructed from the wavelet transform values along the edge map shown on the right. This reconstruction is obtained with 10 iterations on the operator  $\mathbf{P}$ . Right: edge curves selected from the edges shown at the right of Fig. 3. The selection is done with a thresholding based on the length of the edge curves and their average modulus value.

these edge points in order to build edge curves. At an edge location, the direction of the gradient vector is perpendicular to the edge curve that goes through this point. Hence, the chaining procedure links together two neighbor edge points, whose relative position is perpendicular to the direction given by the angle image. We also impose that the modulus value  $M_{2^j} f(x, y)$  varies smoothly along an edge curve, so that the image intensity profile has no abrupt modification along this curve. The maxima chains that we obtain are generally located at the boundaries of the image structures. The selection of the most “important” edge curves requires sophisticated algorithms, if we take into account the image context. For example, in the lady image, it is important to introduce no distortions around the eyes because they are highly visible for a human observer. To take this factor into account, we need to find the location of the eyes, which is a difficult pattern recognition problem. In this chapter, we do not introduce such context information for the edge selection. The boundaries of important coherent structures often generate long edge curves. We thus remove any edge curve whose length is smaller than a given threshold. Among the remaining curves, we select the ones that correspond to the sharpest image variations. This is done by removing the edge curves, along which the average value of the wavelet transform modulus is smaller than an amplitude threshold. The edge map at the right of Fig. 4 shows the edge curves, at the scale  $2^2$ , that are selected by this simple algorithm. The parameters of the edge selection depend upon how many bits we can use for the image coding. The more edges after the selection, the more bits are needed. Fig. 6 is the same lady image with 512 by 512 pixels, and Fig. 7 shows the edge map at the scale  $2^2$ . Fig. 8 displays the edge curves selected by doubling the length threshold and the average modulus threshold, that were used for the edge curve selection in Fig. 5. As a result, more edge curves are removed by this selection.

Once the edge selection is done, we must code efficiently the remaining information. This requires to code the position of the edge points that have been selected. At each scale  $2^j$ , for  $1 \leq j \leq J$ , we must also code the modulus and angle values of the wavelet transform along these edge curves. Finally, we must store the sub-sampling of the the low frequency image  $\mathcal{S}_{2^J} f$ . An algorithm for building a compact image code from edges, has already been developed by Zhong and one of us [9]. In this previous approach, the image was coded only from the edge information. In our case, the errors of the edge coding are then coded with an orthogonal wavelet transform. We can thus afford to quantize the edge information with very few bits, even-though the quantization errors can yield important visual distortions. These distortions are then reduced by the second coding layer.

The spatial geometry of the edge curves is coded with an algorithm described by Carlsson [2]. We record the position of the first point of each curve, and code the increment from one pixel to the next. Carlsson [2] showed that with an entropy coding, this requires on average, 10 bits for the first point and 1.3 bits for each point along an edge curve. To reduce the cost of this geometrical coding by a factor 2, we subsample by 2 the image grid where the edge curves

are defined. From the edge curves on this sub-grid, we estimate the geometry of the edge curves on the full grid with linear interpolations.

Along an edge curve at the reference scale  $2^2$ , we know that the angle value  $A_{2^2}f(x, y)$  indicates the direction of the gradient vector, which is perpendicular to the tangent of the curve. We can estimate the value of  $A_{2^2}f(x, y)$  at an edge point, by computing the direction of the tangent to the edge. We thus do not need to code these angle values. At the other scales  $2^j$ , we approximate  $A_{2^j}f(x, y)$  by the value of  $A_{2^2}f(x, y)$  at the same location. Along each edge curve, the modulus values  $M_{2^j}f(x, y)$  varies smoothly. The larger the scale, the smoother the evolution of  $M_{2^j}f(x, y)$ . We make a predictive coding of these values along the edges, that takes into account the increase of smoothness with the scale.

The image at the right of Fig. 5, shows the interpolated edge map that is used for the lady image coding. At the left is the image reconstructed from the coded edge representation. This image coding requires 0.116 bits per pixel. Compared to the original lady image shown in Fig. 3, that was coded with 8 bits per pixel, this corresponds to a compression factor of 72. The reconstructed images shows the main image features, but important distortions are visible and all the texture information has disappeared. Fig. 9 is reconstructed from the coded wavelet transform values along the edge map shown in Fig. 8, with 10 iterations on the operator  $\mathbf{P}$ . This 512 by 512 image was coded on total of 0.043 bits per pixel. This corresponds to a compression ratio of 186, but the coded image is over-simplified. Few edge curves were selected for the coding, so we only recover the main image components. The reconstructed image is however sharp and does not include distortions along the edges such as Gibbs phenomena.

## 5 Error image coding and final result

The edge coding algorithm restores the main image features but removes all the textures as well as fine image details. Like in Carlsson coding algorithm [2], we can compute an error image by subtracting the coded image from the original one. Fig. 10 is obtained by subtracting the coded image in Fig. 9, to the original one shown in Fig. 6. The textures appear clearly in this error image, as well as some features such as the vertical bar on the left, whose edges have not been selected in Fig. 8. The error image carries more information than the coded one, because we use a high compression rate in the edge coding. To recover some of the texture information, we code the error image within a wavelet orthonormal basis [11].

Wavelet orthonormal bases provide one of the most effective transforms for compact image coding. These bases are well adapted to the statistical properties of images and the coding artifacts can be adapted to the human visual sensitivity [5,8,16]. At high compression rates, wavelet orthogonal bases produces Gibbs phenomena errors at the location of edges, which degrade considerably the image quality. Because we already coded most of the edge information, we can compress the error image with a high compression rate,

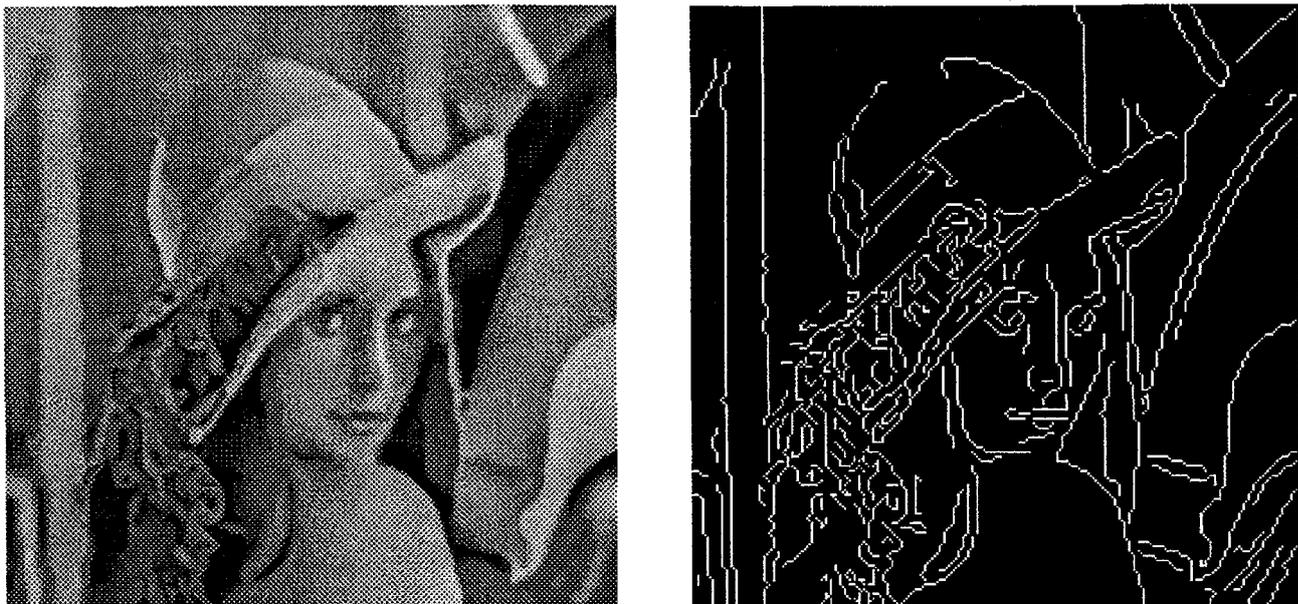


Figure 5: Left: image reconstructed from the coded wavelet edge representation. It is reconstructed with 10 iterations on the operator  $\mathbf{P}$ . This 256 by 256 image was coded on 0.116 bits per pixel. Right: edge curves selected and coded on a sub-grid, twice smaller.

without creating such errors. A wavelet orthogonal basis decomposes an image into “details” appearing at different resolutions, and within different spatial orientations. In two dimensions, one can build a wavelet orthonormal basis from three wavelets  $\psi^1(x, y)$ ,  $\psi^2(x, y)$  and  $\psi^3(x, y)$ . Each of these wavelets are dilated by scale factors  $2^j$ , for  $1 \leq k \leq 3$ ,

$$\psi_{2^j}^k(x, y) = \frac{1}{4^j} \psi^k\left(\frac{x}{2^j}, \frac{y}{2^j}\right). \quad (21)$$

At each scale  $2^j$ , these wavelets are translated over a uniform grid whose intervals are equal to  $2^j$ . The three wavelets are chosen so that the resulting family of functions

$$\left( \psi_{2^j}^1(x - 2^j n, y - 2^j m), \psi_{2^j}^2(x - 2^j n, y - 2^j m), \psi_{2^j}^3(x - 2^j n, y - 2^j m) \right)_{(j,n,m) \in \mathbb{Z}^2} \quad (22)$$

is an orthonormal basis of  $L^2(\mathbb{R}^2)$ . Any function is thus characterized by its inner products with each element of this basis.

An image is measured at a finite resolution that is normalized to 1. It is thus decomposed with wavelets dilated by scale factors larger than 1. Fig. 11 shows the decomposition of the error image of Fig. 10, with wavelets derived from a one-dimensional Daubechies wavelet [4] of compact support. At each scale  $2^j$ , there are three images of size  $2^{-j}N$ , where  $N$  is the total number of pixels of the original image. These images correspond to the inner products of the original image with each of the three wavelets, dilated by



Figure 6: original lady image of 512 by 512 pixels



Figure 7: edge detected from the local maxima of the wavelet transform modulus, at the scale  $2^2$ .



Figure 8: edge curves selected with a thresholding on their length and on the average value of the wavelet transform modulus, at the scale  $2^2$ . The length and modulus thresholds are twice larger than in Fig. 5.



Figure 9: image reconstructed from the coded wavelet transform values, along the edge map shown in Fig. 8. This coding requires 0.043 bits per pixel.

$2^j$  and translated over a uniform grid of size  $2^{-j}N$ . White pixels indicate orthogonal coefficients whose absolute value have a large amplitude. As it can be observed, these coefficients are mostly concentrated in the texture regions of the error image. In this example, the error image is decomposed over 5 scales levels. The total number of samples of this orthogonal representation is equal to the number of sample of the original error image. A large portion of the orthogonal coefficients are nearly zero, and appear in black in Fig. 10. In order to reduce the number of wavelet coefficient to be coded, we set to zero as many coefficients as possible. This is done in a first step through a simple thresholding operation. At each scale  $2^j$ , and for each orientation, we also measure the total energy of the wavelet coefficients in blocks of size  $16.2^{-j}$  by  $16.2^{-j}$  pixels. If this total energy is smaller than a given threshold, we put to zero all the coefficients of the block. It means that there is no texture in this image block and any non-negligible wavelet coefficient most probably corresponds to a less “important” image fluctuation. The quantization of the remaining non-zero coefficients is adapted to their probability distribution. One of us [5] showed that an exponential quantizer is well adapted to the statistical distributions of the wavelet orthogonal coefficients, in order to produce a small mean-square error. The error image in Fig. 12 is coded in a wavelet orthonormal basis, with 0.38 bits per pixel. This coding restores the most irregular textures of the image. Fig. 13 is obtained by adding the coded error image to the edge coded image of Fig. 9. It requires a total of  $0.043 + 0.038 = 0.081$  bits per pixel for its coding. This corresponds to a compression ratio of about a 100. There are clear visual differences with the original image shown in Fig. 6, however, given the very high compression ratio, the important edges and textures are well recovered. The left of Fig. 14 is the error image for the 256 by 256 lady image, that is computed by subtracting the coded image in Fig. 5 from the original image that is shown at the left of Fig. 15. The right of Fig. 14 is the result of coding the error image in a orthogonal basis, with 0.86 bits per pixel. The final coded image shown at the right of Fig. 15 is obtained by adding the coded error image with the edge coded lady image of Fig. 5. It requires a total of  $0.116 + 0.86 = 0.202$  bits per pixel. This represent a compression factor of about 40. Again, the main image features are well restored given the high compression ratio that is obtained.

## 6 Conclusion

The double layer coding technic introduced in this chapter, enables us to compress images with factors between 40 and a 100. By coding specifically the edges and the textures of the image, we can take into account the fact that texture distortions are less visible than edge distortions. An important issue is to understand how to select optimally the image edges, given a final compression ratio. The edge selection algorithm that we described is quite simple and can be enhanced. We also need to understand precisely how to allocate bits between the the texture and the edge coding, in order to match

the image information and its perception by human observers.

The wavelet transform is an important tool to detect edges in images. A precise characterization of edge types can be obtained from the behavior of the wavelet transform values across scales [9], which has applications in pattern recognition. Textures are more difficult to characterize and better statistical models are needed to optimize the texture coding.



Figure 10: this error image is obtained by subtracting the edge coded image of Fig. 9 from the original image in Fig. 6. Black, grey and white pixels correspond respectively to negative, zero and positive coefficients. Most of its energy is concentrated in texture regions.

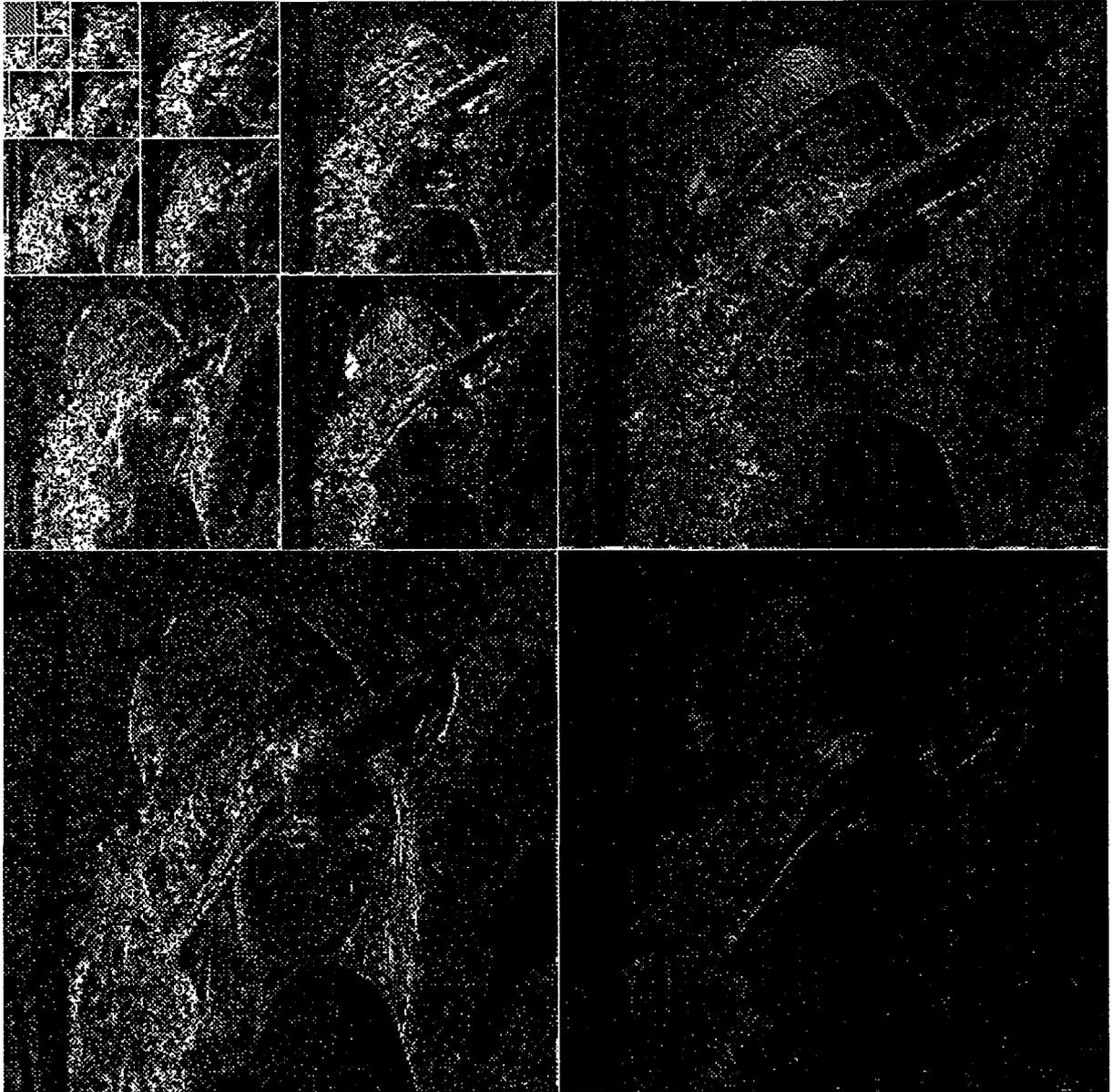


Figure 11: orthogonal wavelet decompositions of the error image shown in Fig. 10. We display the absolute value of the orthogonal coefficients. Black and white pixels correspond respectively to zero and high amplitude values. The high energy coefficients are mostly concentrated in the texture regions of the error image.

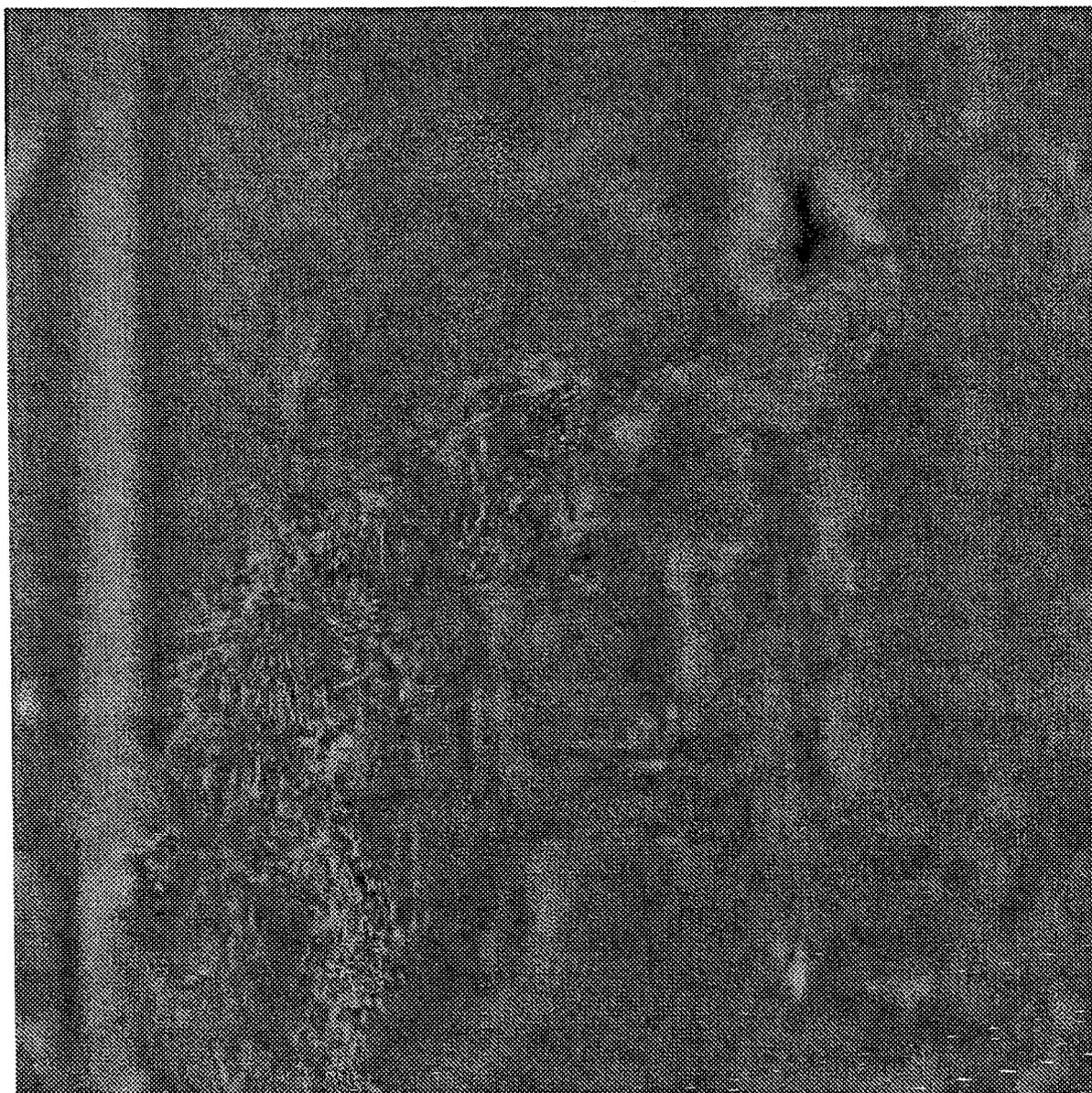


Figure 12: error image coded on 0.038 bits per pixel, within a wavelet orthonormal basis. The main textures are restored.



Figure 13: coded image obtained by adding the edge coded lady image of Fig. 9 and the error coded image of Fig. 12. This image is coded on a total of 0.081 bits per pixel.

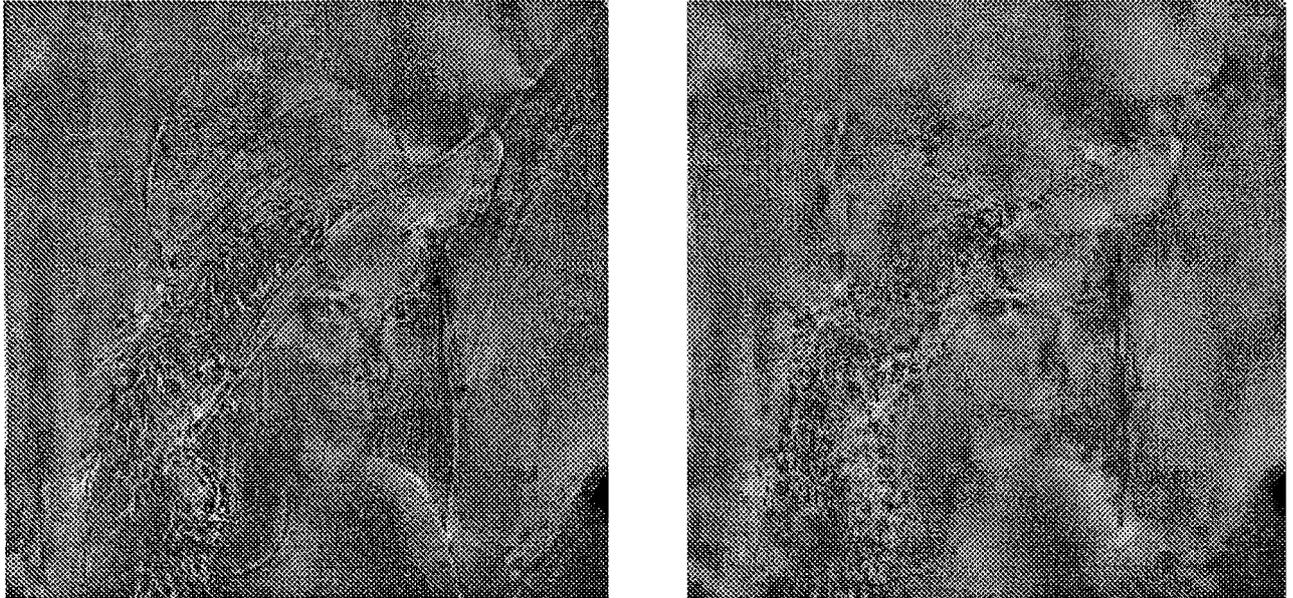


Figure 14: Left: error image obtained by subtracting the left image of Fig. 5 to the original image which is at the left of Fig. 15. Right: error image coded in a wavelet orthogonal basis, with 0.086 bits per pixel.



Figure 15: Left: original image. Right: image obtained by adding the coded error image at the right of Fig. 14 with the coded edge image of Fig. 5. This image was coded on 0.202 bits per pixel.

## References

- [1] J. Canny "A computational approach to edge detection" *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 8, p. 679-698, 1986.
- [2] S. Carlsson, "Sketch based coding of grey level images", *Signal Processing North-Holland*, vol. 15 No. 1, July 1988, p. 57-83.
- [3] R.E. Crochiere, S.A. Webber and J.L. Flanagan, "Digital coding of speech in sub-bands", *Proc. int. Conf. IEEE Acoust., Speech, Signal Processing*, Philadelphia, 1976.
- [4] I. Daubechies, "Orthonormal bases of compactly supported wavelets", *Commun. Pure Appl. Math.*, vol. 41, Nov. 1988, p. 909-996.
- [5] J. Froment, "Traitement d'images et applications de la transformée en ondelettes", *Thèse de l'Université Paris-IX*, Ch. 4, Nov. 1990, p. 131-180.
- [6] M. Kunt, A. Ikononopoulos, M. Kocher, "Second-generation image-coding techniques", *Proc. of IEEE*, vol. 73, No 4, April 1985, p. 549-574.
- [7] M. Kunt, M. Bénard, R. Leonardi, "Recent Results in High-Compression Image Coding" *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, Nov. 1987, p. 1306-1336.
- [8] S. G. Mallat, "A theory for multiresolution signal decomposition : the wavelet representation", *IEEE Trans. on Patt. Anal. and Mach. Intell.*, July 1989, p. 674-693.
- [9] S. Mallat and S. Zhong, "Characterization of signals from multiscale edges" New York University, Computer Science, Tech. Report, 1991. To appear in *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*.
- [10] Y. Meyer, "Un contre-exemple à la conjecture de Marr et à celle de S.Mallat", *Preprint CEREMADE, Univ. Paris-IX*, Mai 1991.
- [11] Y. Meyer, "Ondelettes et opérateurs", Tome 1, Hermann, Paris, 1990.
- [12] A.N. Netravali and J.O. Limb, "Picture coding : a review", *Proc. of IEEE*, vol. 68, No 3, March 1980, p. 366-406.
- [13] K.R. Rao and P. Yip, *Discrete Cosine Transform*, Academic Press, Inc, New York, 1990.
- [14] A. Rosenfeld and A.C. Kak, "Digital picture processing", second edition, Academic Press Inc., Computer science and applied mathematics, vol. 1, 1982, p. 116-150.

- [15] M.V. Wickerhauser, “Codage et compression du signal et de l’image par les ondelettes et les paquets d’ondelettes”, *Problèmes Non Linéaires Appliqués, Ondelettes et Paquets d’ondes*, INRIA, Juin 1991, p. 31-99.
- [16] J. W. Woods and A. S. D. O’Neil, “Subband coding of images”, *IEEE Trans. on Acoustic Speech and Signal Proc.*, vol 34, Oct. 1986.
- [17] D. Youla and A. H. Webb, “Image restoration by the method of convex projections”, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 1, p. 81-101, Oct. 1982.

# Ondelettes à support compact et analyse multirésolution sur l'intervalle

§ Malgouyres

Résumé: Nous construisons des bases multirésolution de  $L^2[0,1]$ . Ces bases sont associées, suivant la construction de Y. Meyer [1] aux analyses multirésolutions de  $L^2(\mathbb{R})$  possèdent des fonctions à support compact. Cette construction est basée sur plusieurs résultats de propriétés locales des analyses multirésolutions sur  $\mathbb{R}$ .

Rappelons d'abord les bases du calcul dans les analyses multirésolutions telles que  $V_0$  possèdent des fonctions à support compact dont on trouvera l'essentiel dans [2]. P.G. Lemarie-Rieuset a montré l'existence et l'unicité d'une fonction à support minimal sur  $[0, N]$  normalisé par  $\int g(x) dx = 1$ , dont l'ensemble des translations entières forment une base de Riesz de  $V_0$ . On sait qu'alors  $\hat{g}(2\pi) = m_0(\pi) \hat{g}(\pi)$ , où  $m_0(\pi)$  est un polynôme trigonométrique  $M_0(e^{i\pi}) = \sum_{k=0}^N m_k^0 e^{ik\pi} = m_0(\pi)$  de degré  $N$ ;  $\hat{g}(\pi)$  désignant la transformée de Fourier de  $g(x)$ . La fonction d'autocorrélation de la base a alors pour transformée de Fourier discrète :

$$|\hat{g}(k\pi)|^2 = \left| \sum_{\ell=0}^{N-1} m_\ell e^{-i\ell k\pi} \right|^2 = |m(k\pi)|^2 = |M(e^{ik\pi})|^2 = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\pi + 2k\pi\ell)|^2$$

où  $H(z) = \sum_{l=0}^{N-1} m_l z^{-l}$  est la transformée en  $z$  de la suite  $\{m_l\}$  et est un polynôme obtenu grâce au lemme de Riesz.  $H(z)$  n'a pas de zéro sur le cercle unité et on a donc  $0 < c_1 \leq |m(s)|^2 \leq c_2$

D'autre part en écrivant l'équation de renouvellement dans la définition de la fonction d'autovariance on obtient la relation  $|m(s)|^2 = |m_0(\frac{s}{2})|^2 |m_{\frac{s}{2}}|^2 + |m_0(\frac{s}{2} + \pi)|^2 |m_{\frac{s}{2} + \pi}|^2$  et  $\mathcal{T}, [3], \mathcal{T}_q(e^{i\theta}) = |m(s)|^2$  engendre le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 que possède l'opérateur :

Définition  $f(s) \rightarrow P_{m_0}(f) = |m_0(\frac{s}{2})|^2 f(\frac{s}{2}) + |m_0(\frac{s}{2} + \pi)|^2 f(\frac{s}{2} + \pi)$  est appelé l'opérateur de covariance interéchelle.

## I Les bases fondamentales d'une analyse multiresolution donnée :

### changement de base dans $V_0$

Soit  $N(z)$  sans zéros ni pôles sur le cercle unité, holomorphe sur un voisinage du cercle unité. La transformée de Fourier inverse de  $\hat{h}(s) = N(e^{i\theta}) \hat{g}(s)$  est à décroissance exponentielle dès que  $g(t)$  l'est, et  $\{h(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une nouvelle base de Riesz de  $V_0$

les coordonnées dans la nouvelle base s'obtiennent en filtrant les anciennes par le filtre de fonction de transfert  $\frac{1}{N(z)}$  et réciproquement par  $N(z)$ .

### les bases fondamentale de $V_0$

A la base  $\{g(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , le filtre  $M(z)$  précédemment défini permet d'associer les bases engendrées par la transformée de Fourier

inverse respectivement de  $\hat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{m(\xi)} \hat{g}(\xi)$  et de  $\hat{\Omega}(\xi) = \frac{1}{|m(\xi)|^2} \hat{g}(\xi)$ . La base associée à  $\varphi$  est orthonorm et celle associée à  $\Omega$  est la base duale de  $g$  au sens où  $\langle g(x-k), \Omega(x-l) \rangle = \delta_{l-k}$  et les coefficients de la projection orthogonale d'une fonction  $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$  sur  $V_0$ , s'obtiennent dans la base  $g$  par  $a_k = \langle f(x), g(x-k) \rangle$  :

$$f_0(x) = \sum_k \langle f(x), g(x-k) \rangle g(x-k) = \sum_k \langle f(x), \Omega(x-k) \rangle \Omega(x-k)$$

les filtres de renouvellement pour les nouvelles bases sont alors donnés par :

$$\hat{\varphi}(2\xi) = m_0(\xi) \frac{m(\xi)}{m(2\xi)} \hat{\varphi}(\xi) \text{ et } \hat{\Omega}(2\xi) = m_0(\xi) \frac{|m(\xi)|^2}{|m(2\xi)|^2} \hat{\Omega}(\xi)$$

les bases fondamentales de  $V_0$  :

Soit  $V_0^\perp$  le supplémentaire orthogonal de  $V_0$  dans  $V$ , on sait, [4], que la fonction  $\psi(x)$ , définie par  $\hat{\psi}(2\xi) = \frac{m_0(\xi+\pi)}{m(\xi+\pi)} \frac{m(\xi)}{m(2\xi)} e^{-i\xi} \hat{\varphi}(\xi)$ , forme avec ses translations entières une base orthonormée de  $V_0^\perp$  à support sur les demi-droites gauches. Par des changements de bases dans  $V_0^\perp$ , on en déduit alors facilement d'autres bases <sup>de Riesz</sup> de  $V_0^\perp$ . En particulier  $h(x)$  à support compact,  $\delta(x)$  et  $\omega(x)$  qu'on appellera bien localisées duales l'une de l'autre, définies par :

$$\hat{h}(2\xi) = e^{-i\xi} \frac{m_0(\xi+\pi)}{m(\xi+\pi)} \frac{m(\xi)}{|m(2\xi)|^2} \hat{g}(\xi) = \frac{m(\xi+\pi)}{m(\xi)} \frac{m(2\xi)}{|m(2\xi)|^2} \hat{\psi}(2\xi)$$

$$\hat{\omega}(2\xi) = e^{i\xi} \frac{m_0(\xi+\pi)}{m(\xi+\pi)} \hat{\Omega}(\xi) = \frac{m(2\xi)}{m(\xi+\pi)} \frac{1}{m(\xi)} \hat{\psi}(2\xi)$$

$$\hat{\delta}(2\xi) = \frac{\hat{h}(2\xi)}{|m(2\xi)|^2} = \frac{m(\xi+\pi)}{m(2\xi)} \frac{m(\xi)}{|m(2\xi)|^2} \hat{\psi}(2\xi)$$

Les fonctions d'autocovariance <sup>de ces bases</sup> sont égales à <sup>la fonction inverse</sup> au carré <sup>de la fonction</sup> du filtre de renouvellement de la base.

Les fonctions d'autocovariance de ces bases est (3.6)  
donnée par  $\Gamma_{\mathcal{B}}(e^{i\omega}) = \left| \frac{m(\omega+\pi) \overline{m(\omega)}}{m(\omega)} \right|^2$  avec

$0 < C_h \leq \Gamma_h(e^{i\omega}) \leq C'_h$  et de la même façon pour  $h \neq 1$

Modulo les changements de bases appropriés,  
on n'utilise alors, pour décomposer les fonctions de  $V_1$ ,  
dans  $V_1 = V_0 \oplus W_0$  que les filtres  $\{ \overline{m_0(\omega)}, m_0(\omega+\pi) e^{i\omega} \}$   
pour décomposer et  $\{ m_0(\omega), \overline{m_0(\omega+\pi)} e^{-i\omega} \}$  pour  
reconstituer.

(4)

L'ensemble des résultats de cette partie sont conservés par translations entières dans  $V_0$  et par dilations dans  $V_{\frac{1}{2}}$ . Sauf avis contraire, il en est de même dans ce qui va suivre.

## II Propriétés locale des analyses multirésolutions :

Pour comprendre et fabriquer des analyses multirésolution sur l'intervalle il est essentiel de dégager des propriétés locale des analyses multirésolution de  $\mathbb{R}$ . C'est l'objet de cette partie dont les résultats ont été initiés dans [1], [5] et [6]

### Théorème de séparation :

Soit  $f(x)$  une fonction de  $V_0$  et  $f(x) \Big|_{[a,b]} = 0$  pour  $a < b$ , alors  $f(x) \Big|_{[0,a]}$  et  $f(x) \Big|_{[b,+\infty]}$  appartiennent séparément à  $V_0$  et  $f(x)$  est orthogonal à  $\Omega(x-k)$  pour  $[a-N] \leq k < b$  ou  $[ ]$  désigne la partie entière.

¶ voir [5] et [6] ¶

Définition : on appelle  $V_{\frac{1}{2}}^{[a,b]}$  l'espace vectoriel des restrictions  $f(x) \Big|_{[a,b]}$  des fonctions de  $V_{\frac{1}{2}}$ . On munit  $V_{\frac{1}{2}}^{[a,b]}$  du produit scalaire de  $L^2_{\frac{1}{2}}[a,b]$ .

### Théorème de la base :

L'application restriction du sous-espace vectoriel de  $V_0$  engendré par  $\{g(x-k) \text{ pour } -N+1 \leq k \leq L-1\}$  dans  $V_0^{[0,L]}$  ou  $V_0^{[a,b]}$  est un isomorphisme.

¶ corollaire immédiat du théorème de ~~la base~~ <sup>séparation</sup> ¶

Il s'agit maintenant d'introduire un outil qui se révélera essentiel par la suite. (5)

Théorème de l'opérateur d'identification locale :

(i) L'opérateur de  $V_0^{[0,1]}$  dans  $V_1^{[0,1/2]}$ , qui à  $f(x)$  fait correspondre  $f(x) \mathbb{1}_{[0,1/2]}^{(x)}$ , est un isomorphisme

(ii) même chose entre  $V_0^{[0,1]}$  et  $V_1^{[1/2,1]}$  :

(iii) même chose entre  $V_0^{[-1,1]}$  et  $V_1^{[-1/2,1/2]}$

▮ (i) Soit  $f(x) \in V_0^{[0,1]}$ ,  $f(x) = \tilde{f}(x) \mathbb{1}_{[0,1]}^{(x)}$  où  $\tilde{f}(x) \in V_0$  donc  $\tilde{f}(x) \in V_1$  et  $\tilde{f}(x) \mathbb{1}_{[0,1/2]}^{(x)} = f(x) \mathbb{1}_{[0,1/2]}^{(x)}$ . C'est une application linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension finie. Le théorème de séparation donne immédiatement l'injectivité.

(ii) et (iii) se montrent de la même façon. ▮

Définition : On appelle centre des ondelettes duales

$\delta(x-i)$  et  $w(x-i)$  le point  $i + \frac{1}{2}$

Théorème de la bonne localisation des ondelettes  $\delta$  et  $w$ .

Pour qu'une fonction de  $V_1$  coïncide sur un intervalle d'extrémités entières avec une fonction de  $V_0$ , il faut et il suffit qu'elle soit orthogonale aux ondelettes dont le centre appartient à cet intervalle.

D'autre part  $\delta(x)$  coïncide sauf sur  $[0,1]$  avec des fonctions de  $V_0$ .

▮ Dans le sens direct, soit  $f(x) \in V_1$  et coïncidant sur  $[k,L]$ ,  $k$  et  $L$  entiers, avec  $u(x) \in V_0$ ; le théorème de séparation nous dit que  $f(x) - u(x)$  est orthogonale à  $\Omega(2x-i)$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  entier  $i \in [2k-N+1, 2L-1]$ . De plus

$$\omega(x) = \sum_{i=-N+1}^1 (-1)^i m_i^0 \cdot \Omega(2x-i) \quad (6)$$
 on obtient alors  $\langle f(x) - u(x), \omega(x-i) \rangle = 0$  pour  $K \leq i + \frac{1}{2} \leq L$  et donc  $\langle f(x), \omega(x-i) \rangle = 0$  pour les mêmes  $i$ .

Réciproquement, si l'on suppose  $f(x) \in V$ , et  $\langle f(x), \omega(x-i) \rangle = 0$  pour  $-N+1 \leq i \leq 0$ ; D'où, puisque  $\omega(x) = \sum_{i=-N+1}^1 (-1)^i m_i^0 \Omega(2x-i)$  on a  $0 = \sum_{i=-N+1}^1 (-1)^i m_i^0 \langle f(x) - u(x), \Omega(2x-i) \rangle = -m_0^0 \langle f(x) - u(x), \Omega(2x) \rangle$

Comme  $m_0^0 \neq 0$  on obtient  $\langle f(x) - u(x), \Omega(2x) \rangle = 0$  et (théorème de séparation)  $f(x) - u(x)$  est nulle sur  $[0, 1]$ . Il ne reste plus alors qu'à translater et itérer ce résultat pour l'obtenir sur un intervalle quelconque d'extrémités entières.

La conséquence sur  $\mathbb{R}$  est alors immédiate. Il s'agit maintenant de tirer les conséquences de ces résultats.

Bibliographie: (dans l'ordre des citations)

- [1] Y. MEYER  
Ondelettes sur l'intervalle
- [2] P. G. LEMARIÉ-RIEUSSET  
Ondelettes à support compact Revista 1990.
- [3] LAWTON  
"Necessary and Sufficient Conditions for Constructing orthonormal Basis" Preprint AWARE (BOSTON).
- [4] S. MALLAT. Multiresolution approximations and wavelets orthonormal basis of  $L^2(\mathbb{R})$ . Trans. A.M.S Vol 715 (1984) pp 69-88.
- [5] G. MALGOUYRES. Analyse multiresolution sur l'intervalle. algorithme rapide. Preprint ORSAY 9137
- [6] P.G. LEMARIÉ-RIEUSSET & MALGOUYRES  
Support de fonctions de base. dans la analyse multiresolution, CRAS

# Les Méthodes d'Ondelettes de Résolution Numérique des Equations aux Dérivées Partielles en Juin 1991

Valérie PERRIER\*

Du 3 au 7 Juin se réunissait le "Workshop" Franco-Américain '*Ondelettes et Turbulence*' à l'Université de Princeton, dans le New Jersey. Ce groupe de travail était organisé conjointement par la DARPA (Defense Advanced Research Project Agency) et l'ONERA (Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales) dans le but de financer des projets sur '*L'utilisation des Ondelettes pour résoudre des problèmes ouverts en Turbulence*'.

Les conférenciers, au nombre de 26, avaient été regroupés suivant 4 thèmes principaux :

- 1) Analyse et interprétation de signaux turbulents (expérimentaux et numériques)
- 2) Analyse fonctionnelle et phénoménologique des équations aux dérivées partielles
- 3) Simulation numérique : méthodes utilisant les bases d'ondelettes ; techniques de filtrage
- 4) Algorithmes

Les proceedings des conférences doivent paraître chez Springer, courant de l'année 1992.

Nous nous proposons dans cet exposé de développer le 3ème thème, celui de la simulation numérique des équations aux dérivées partielles basée sur des techniques d'ondelettes. Nous commencerons par faire le point sur l'avancement des recherches dans ce domaine (tout au moins en ce qui concerne les présentations faites à Princeton), puis nous dégagerons les principes de deux techniques : schéma adaptatif utilisant les bases orthonormées d'ondelettes comme bases fixes en espace, et décomposition de la solution sur une base d'ondelettes mobiles, évoluant continuellement en temps.

---

\*Université Paris Nord, Département de Mathématiques, URA 742, 93430 Villetaneuse et Laboratoire de Météorologie Dynamique, E.N.S., 24 rue Lhomond, 75231 Paris cedex 05



## 1 L'état des lieux

La modélisation des écoulements turbulents passe par la résolution des équations de Navier-Stokes : la difficulté de la simulation numérique de la turbulence provient d'une part de la complexité de ces équations, d'autre part du trop grand nombre de paramètres à gérer, en raison du spectre continu d'échelles dynamiquement actives dans l'écoulement. Les méthodes d'ondelettes proposées ici ont pour objectif commun de diminuer ce nombre de degrés de liberté. Ces méthodes étant récentes, elles sont pour le moment appliquées dans un cadre simplifié :

- L'équation de Navier-Stokes est remplacée par l'équation de Burgers à une dimension d'espace :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

où  $u(x, t)$  est le champ de vitesse dépendant de l'espace  $x$  et du temps  $t \geq 0$ ,  $\nu$  la viscosité. L'équation de Burgers est l'équation monodimensionnelle la plus simple combinant les effets de propagation (terme  $u \frac{\partial u}{\partial x}$ ) et les effets de diffusion (terme  $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ). C'est en ce sens une première étape à l'approximation des équations de Navier-Stokes. D'autre part, la connaissance théorique de la solution exacte en fait un excellent modèle test pour les nouveaux schémas.

- La prise en compte de conditions aux limites pose actuellement des problèmes numériques intrinsèquement liés à la construction d'ondelettes sur l'intervalle. Dans les applications, les conditions aux limites sont remplacées par des conditions aux limites périodiques, permettant l'utilisation d'ondelettes périodiques et des algorithmes rapides associés.

## 2 Les méthodes de type spectral

Cette première approche de résolution des E.D.P. est inspirée des méthodes spectrales, et s'appuie sur la théorie des bases orthonormées d'ondelettes. L'apport important des ondelettes par rapport aux méthodes spectrales consiste en la possibilité d'un raffinement du maillage en espace, diminuant considérablement, à précision

égale, le nombre de degrés de liberté à gérer au cours de la résolution. Le principe de l'adaptativité en espace a tout d'abord été introduit par Liandrat et al. [1], puis par Maday et al [2]. Deux algorithmes différents d'adaptativité en espace ont été présentés à Princeton respectivement par J. Liandrat et Y. Maday. Nous rappelons ici le principe du 'raffinement de maillage'.

## 2.1 Adaptativité en espace

Soit le problème à résoudre :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= Ku(x, t) \quad x \in [0, 1], t \geq 0 \\ u(0, t) &= u(1, t) \\ u(x, 0) &= \sin 2\pi x \end{aligned} \quad (2)$$

$K$  étant l'opérateur :  $Ku = -u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Soit  $(V_j)_{j \geq 0}$  une analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$  (fonctions 1-périodiques). L'équation du problème (2) est approchée dans  $V_N$  par :

Trouver  $u_N$  élément de  $V_N$  vérifiant :

$$\frac{\partial u_N}{\partial t}(x, t) = K_N u_N(x, t) \quad (3)$$

où  $K_N = P_N K P_N$  avec  $P_N$ , projection orthogonale sur  $V_N$ .

On introduit alors une discrétisation temporelle de type différences finies. Considérons ici le schéma le plus simple, celui d'Euler-explicite.  $\Delta t$  étant le pas de temps de la discrétisation, le problème (3) devient :

$$\tilde{u}_N(x, t + \Delta t) = (I + \Delta t K_N) \tilde{u}_N(x, t) \quad (4)$$

où  $\tilde{u}_N(x, t)$  est la solution approchée au temps  $t$ .

Les propriétés de localisation spacio-fréquentielle des ondelettes interviennent à cette étape de la résolution : la solution approchée  $\tilde{u}_N(x, t)$  est cherchée dans l'espace  $V_N$ , sous la forme d'une série d'ondelettes périodiques  $\psi_{j,k}$  :

$$\tilde{u}_N(x, t) = \sum_{j=0}^{\ln_2(N/2)} \sum_{k=0}^{2^j-1} c_{jk}(t) \psi_{j,k}(x)$$

Dans le cadre de cette équation, il s'avère que pour chaque instant  $t$ , un très grand nombre de coefficients  $c_{jk}(t)$  sont négligeables (c'est-à-dire inférieurs à un seuil  $\epsilon$  fixé), comme le suggère la figure 1 (prise dans [3]) :

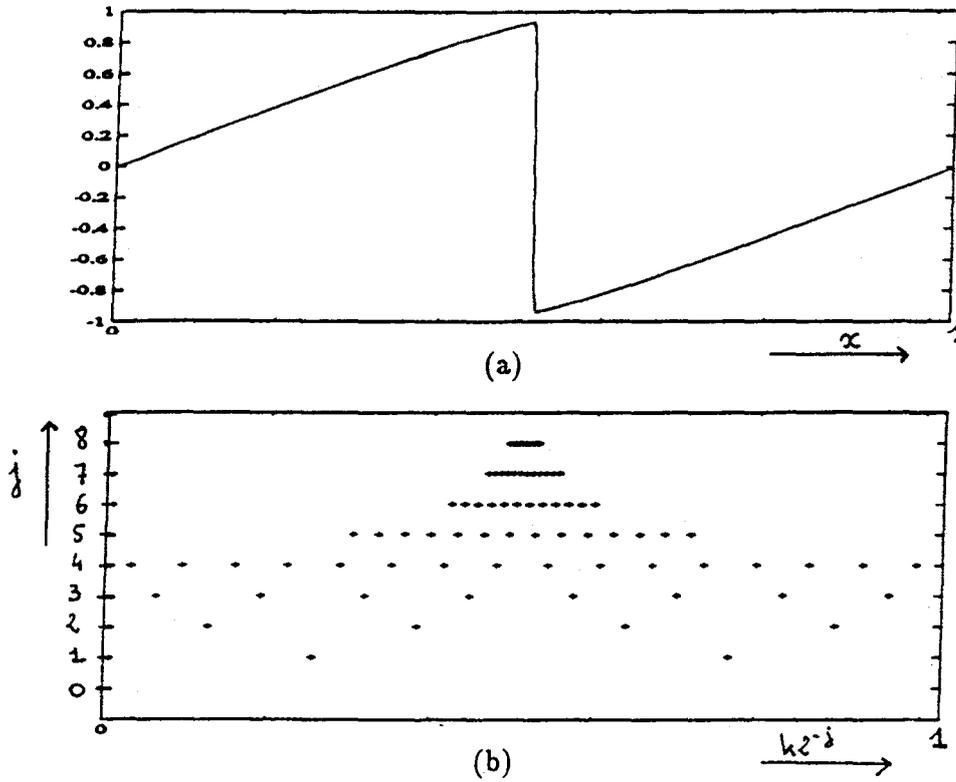
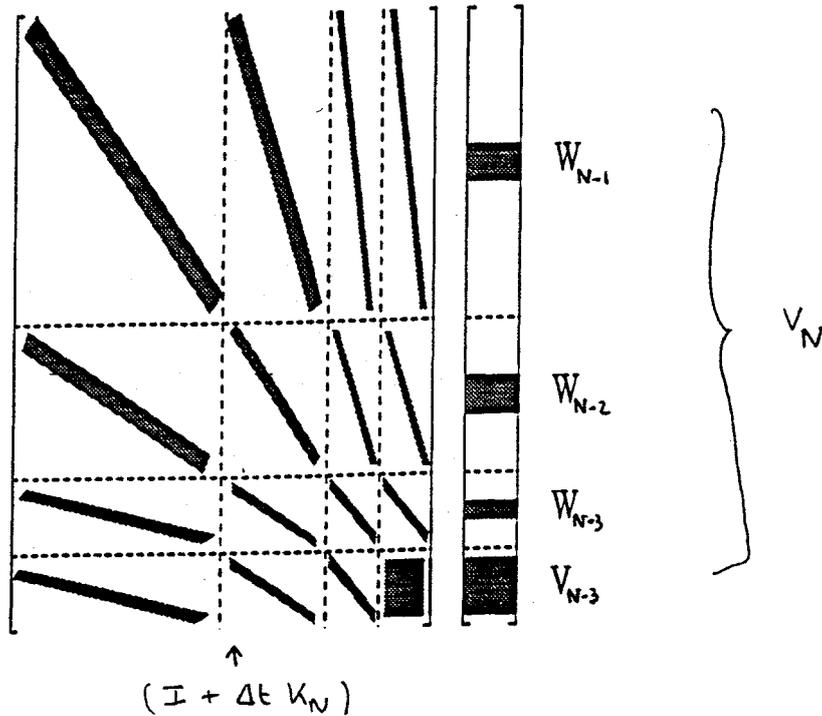


Figure 1 : (a) Représentation de la solution  $\tilde{u}_N(x, t)$  à  $t = 1/\pi$ . (b) Les coefficients en ondelettes non négligeables (ici supérieurs à  $5.10^{-3}$ )  $c_{jk}$  de la solution  $\tilde{u}_N(x, t)$  sont représentés par une croix dans le plan  $(2^{-j}k, j)$  pour  $N = 512$ .

L'opérateur  $(I + \Delta t K_N)$ , décomposé dans la base d'ondelettes possède alors la structure lacunaire et diagonale par bloc suivante (figure 2, prise dans [3]) :



**Figure 2 :** Représentation de l'opérateur  $(I + \Delta t K_N)$  dans la base orthonormée d'ondelettes de  $V_N$ . Les zones grises représentent les coefficients non négligeables de la matrice.

Les algorithmes mis en oeuvre par Beylkin et al. ([6]) permettent alors un calcul rapide de l'étape (4). L'originalité de chaque méthode réside dans la gestion de la grille restreinte des coefficients  $c_{jk}(t)$ . Comment calculer la grille irrégulière des coefficients  $c_{jk}(t + \Delta t)$  non négligeables au temps  $t + \Delta t$  connaissant la grille irrégulière au temps  $t$ ? Cette étape est détaillée de deux manières différentes dans [1] et [2].

Ces algorithmes n'ont pour le moment pas été optimisés, dans le sens où les méthodes rapides B.C.R. ([6]) ne sont pas injectés dans les programmes (en particulier pour le calcul du terme non linéaire). Aucune conclusion ne peut donc être tirée quant au temps de calcul.

Par contre, comparée à une méthode spectrale classique, le gain en degrés de liberté est significatif : à titre d'exemple, pour représenter la solution de l'équation au moment du choc (celui qui nécessite le plus de fonctions), il suffit de 128 ondelettes au lieu de

1024 dans une méthode de Galerkin classique, à précision équivalente (même erreur  $L^2$  avec la solution de référence du problème (2)).

## 2.2 Adaptativité en temps et en espace

Une idée originale développée par S. Mallat dans son exposé ([3]) est, en plus de l'adaptativité en espace précédemment décrite, d'adapter le pas de temps à la résolution spatiale.

Considérons l'étape de résolution (4), transposée dans l'espace  $V_j$ , c'est-à-dire à la résolution  $2^j$  :

$$\tilde{u}_j(x, t + \Delta t) = (I + \Delta t_j K_j) \tilde{u}_j(x, t) \quad (5)$$

avec  $K_j = P_j K P_j$ ,  $P_j$  étant la projection orthogonale sur l'espace  $V_j$ .

La condition de stabilité du schéma (4) s'écrit:

$$\|I + \Delta t_j K_j\| \leq 1 \quad (6)$$

où  $\Delta t_j$  est le pas de temps choisi à la résolution  $2^j$ .

Considérons pour simplifier l'équation de la chaleur. L'opérateur  $K$  considéré est alors :

$$K = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

donc  $\|K_j\| = C 2^{2j}$  avec  $C > 0$  et la condition de stabilité (6) s'écrit :

$$\Delta t_j \leq C' 4^{-j}$$

Cette relation montre que quand la résolution augmente d'un facteur 2, le pas de temps peut être divisé par 4 tout en satisfaisant toujours la condition de stabilité. On peut donc considérer que :

$$\Delta t_{j-1} = 4 \Delta t_j \quad (7)$$

Décrivons le schéma adaptatif en temps pour l'équation de la chaleur :

Soit dans  $V_N$ ,  $\Delta t$ , pas de temps choisi pour que la condition de stabilité (6) soit vérifiée pour  $j = N$ . Dans  $V_{N-1}$ , on choisira alors comme pas de temps  $4\Delta t$ , dans  $V_j$  ( $j = 0, \dots, N-1$ ), on choisira  $4^{N-j}\Delta t$ .

Le schéma s'écrit alors :

$$\text{Dans } V_N : \tilde{u}_N(x, t + 4\Delta t) = (I + \Delta t K_N)^4 \tilde{u}_N(x, t)$$

$$\text{Dans } V_{N-1} : \tilde{u}_{N-1}(x, t + 4\Delta t) = (I + 4\Delta t K_{N-1})\tilde{u}_{N-1}(x, t)$$

$$\text{Dans } V_j : \tilde{u}_j(x, t + 4^{N-j}\Delta t) = (I + 4^{N-j}\Delta t K_j)\tilde{u}_j(x, t)$$

Introduisons pour tout  $j$ ,  $W_j$  le supplémentaire orthogonal de  $V_j$  dans  $V_{j+1}$ .

Comme  $V_N = V_{N-1} \oplus W_{N-1}$ ,  $K_N$  se décompose :  $K_N = K_{N-1} + T_{N-1}$ ,

avec  $T_{N-1} = Q_{N-1}K_{N-1}P_{N-1} + P_{N-1}K_{N-1}Q_{N-1} + Q_{N-1}K_{N-1}Q_{N-1}$ ,

et  $Q_{N-1}$  projection orthogonale sur  $W_{N-1}$ .

Le schéma dans  $V_N$  s'écrit alors :

$$\tilde{u}_N(x, t + 4\Delta t) = (I + \Delta t(K_{N-1} + T_{N-1}))^4 \tilde{u}_N(x, t) \quad (8)$$

ce qui est approché par :

$$\tilde{u}_N(x, t + 4\Delta t) = ((I + \Delta t + T_{N-1})^4 + 4\Delta t K_{N-1})\tilde{u}_N(x, t) \quad (9)$$

et ainsi de suite en décomposant successivement  $K_{N-1}$  suivant tous les espaces  $V_j$  pour  $j$  variant de  $N-2$  à  $0$ .

Pour l'équation de la chaleur, la stabilité du schéma (9) peut se démontrer théoriquement (fait dans [3]) dans le cas des ondelettes de Shannon. Le coefficient 4 (facteur entre les pas de temps des différentes échelles) qui intervient dans cette équation devra être réduit dans le cas de l'équation de Burgers. Les tests numériques [4] confirment les facteurs 2 et  $\sqrt{2}$ .

Le gain de cette méthode est effectif grâce à l'adaptativité en espace. En effet, les coefficients de petite échelle (c'est-à-dire l'espace  $W_{N-1}$ ) sont en petite quantité (voir figure 1) et ce sont précisément ces coefficients qui nécessitent le pas de temps le plus petit.

### 3 Une méthode de type particulière : la méthode des ondelettes mobiles

Un tout autre état d'esprit est de considérer les ondelettes comme des particules de l'espace des phases, c'est-à dire du demi-plan position-échelle (b,a). Contrairement à l'approche précédente, où la base d'ondelettes est fixée une fois pour toute sur une grille, les ondelettes vont pouvoir évoluer librement à la fois en échelle et en position (on utilise la version continue de la transformée en ondelettes). La solution de l'équation (1) sera cherchée sous la forme :

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^n c_i(t) \psi\left(\frac{x - b_i(t)}{a_i(t)}\right)$$

Cette représentation n'est pas homogène dans l'espace physique : là où la fonction est régulière, elle sera représentée par quelques ondelettes uniformément réparties dans cette zone de régularité ; par contre, les singularités de la fonction  $u$  seront mises en évidence par une forte concentration d'ondelettes autour de ces points . Nous retrouvons ainsi la représentation "lacunaire" des solutions approchées par méthodes particulières.

Cette représentation possède également l'avantage d'être dynamique : les ondelettes, uniformément réparties au début du calcul si la condition initiale ne possède pas de forte singularité, vont se déplacer (dans l'espace physique), vers les points singuliers qui peuvent apparaître.

On ne cherche évidemment pas, dans cette approche, à résoudre exactement l'équation : celle-ci sera approchée par des équations différentielles ordinaires décrivant l'évolution en temps des amplitudes  $c_i(t)$  et des paramètres  $(b_i(t), a_i(t))$  de l'espace des phases. Cette méthode, dite des "ondelettes mobiles" consiste à définir les dérivées temporelles de  $a, b, c$  en minimisant à tout instant  $t$  l'erreur locale de troncature :

$$\min_{\dot{c}_i, \dot{a}_i, \dot{b}_i} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|^2 dx$$

ce qui conduit à un système linéaire (d'ordre  $3n$ ) gouvernant les inconnues  $\dot{c}_i(t), \dot{a}_i(t), \dot{b}_i(t)$ .

La résolution numérique de ce système linéaire est liée à son conditionnement : la matrice est tridiagonale quand les ondelettes sont éloignées dans le demi-plan (b,a) (d'où un faible coût de résolution), mais mal conditionnée si deux ondelettes se rapprochent : un nouveau mécanisme doit être envisagé.

Par contre le modèle possède la propriété remarquable de conserver l'énergie de la solution de l'équation (1) et peut fournir la solution exacte pour certaines équations linéaires (convection-diffusion à vitesse constante par exemple).

Enfin, l'ondelette  $\psi$  de décomposition doit être adaptée à la forme de la solution : dans le cas de l'équation de Burgers, on préférera une ondelette antisymétrique, comme la dérivée première de la Gaussienne par exemple.

Tous les détails concernant la méthode, les propriétés remarquables et la mise en oeuvre pourront se trouver dans [6] et [7].

## References

- [1] J. LIANDRAT, V. PERRIER, P. TCHAMITCHIAN, *Numerical resolution of Nonlinear Partial Differential Equations using the Wavelet approach*, 'Wavelets and their Applications', ed. Ruskai et al., Jones and Barlett, pp. 227-238, 1992.
- [2] Y. MADAY, V. PERRIER, J.C. RAVEL, *Adaptativité dynamique sur bases d'ondelettes pour l'approximation d'équations aux dérivées partielles*, C.R.Acad.Sci.Paris, t.312, Série I, p. 405-410, 1991.
- [3] E. BACRY, S. MALLAT, G. PAPANICOLAOU, *A wavelet based space-time adaptative numerical method for partial differential equations*, Proc. of the USA-French 'Wavelets and Turbulence' Workshop, Princeton, Juin 1991, à paraître chez Springer.
- [4] G. BEYLKIN, R. COIFMAN, V. ROKHLIN, *Fast wavelet transform and numerical algorithm, I and II*, Yale University Tech. Report YALE/DCS/RR-696, 1989.
- [5] C. BASDEVANT, M. HOLSCHNEIDER, V. PERRIER, *Méthode des ondelettes mobiles*, C.R.Acad. Sci. Paris, Série I, 647-652, 1990.
- [6] V. PERRIER, C. BASDEVANT, *Travelling Wavelet Method*, Proc. of the USA-French 'Wavelets and Turbulence' Workshop, Princeton, Juin 1991, à paraître chez Springer.
- [7] V. PERRIER, *Ondelettes et Simulation Numérique*, Thèse de l'Université Paris VI, Février 1991.

**I. Fonctions d'échelle à support compact.**

Dans [4], j'ai étudié les propriétés des fonctions à support compact dans les analyses multi-résolutions. En particulier, si  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  est une analyse multi-résolution de  $L^2(\mathbb{R})$  qui contient des fonctions à support compact non triviales, alors il existe une fonction  $g$  unique dans  $V_0$  telle que :

- (i)  $g$  est à support compact,  $\text{Inf Supp } g = 0$  et  $\int g \, dx = 1$
- (ii) la famille  $g(x - k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , est une base de Riesz de  $V_0$
- (iii) tout élément de  $V_0$  à support compact s'écrit comme une combinaison linéaire finie des  $g(x - k)$ .

$g$  est appelée la *fonction d'échelle* de  $(V_j)$ .

Une caractérisation importante de la fonction d'échelle est la suivante : si  $g$  vérifie (i) alors  $g$  est la fonction d'échelle de  $V_0$  si et seulement si, en notant  $N = \text{Supp } g$ , les restrictions à  $[0, 1]$  des  $g(x - k)$ ,  $-N + 1 \leq k \leq 0$ , sont linéairement indépendantes (et donc l'espace  $V_0([0, 1])$  des restrictions à  $[0, 1]$  des éléments de  $V_0$  est de dimension  $N$ ). En effet, si ces restrictions sont linéairement indépendantes, il existe  $h \in L^2([0, 1])$  telle que  $\langle h | g(x - k) \rangle = \delta_{0,k}$  et alors, si  $\theta \in V_0$ ,  $\theta = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \theta | h(x - k) \rangle g(x - k)$ , ce qui suffit à prouver (ii) et (iii). Pour la réciproque, une démonstration élémentaire a été donnée dans [6].

**II. Primitivation et dérivation des fonctions d'échelle.**

Si  $g$  est la fonction d'échelle (à support compact) d'une analyse multi-résolution  $V_j$ , alors  $g\left(\frac{x}{2}\right)$  se décompose sur les  $g(x - k)$  :

$$(1) \quad g\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{k=0}^N a_k g(x - k) \quad (\text{où } \text{Supp } g = [0, N])$$

ou encore

$$(2) \quad \hat{g}(2\xi) = \frac{1}{2} \left( \sum_{k=0}^N a_k e^{-ik\xi} \right) \hat{g}(\xi) = M_0(\xi) \hat{g}(\xi).$$

A  $g$  on peut associer d'autres fonctions d'échelle par la primitivation ou la dérivation (si  $g$  est dérivable). Plus précisément, la fonction d'échelle "primitive" de  $g$  est la fonction  $g^{(-1)}$  définie par  $g^{(-1)}(x) = \int_{x-1}^x g(t)dt$ . Cela revient à convoler  $g$  avec  $\varphi(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ , la fonction d'échelle du système de Haar, et on a donc

$$\hat{g}^{(-1)}(2\xi) = \hat{g}(2\xi)\hat{\varphi}(2\xi) = \left(\frac{1+e^{-i\xi}}{2}\right)M_0(\xi)\hat{g}^{(-1)}(\xi).$$

La fonction  $g^{(-1)}$  engendre bien une analyse multi-résolution  $(V_j^{(-1)})$  ; de plus  $g^{(-1)}$  est à support compact,  $\text{Supp } g^{(-1)} = [0, N+1]$  et la dimension de  $V_0^{(-1)}([0,1])$  est bien  $N+1$ , car  $V_0^{(-1)}([0,1])$  est l'espace des primitives des fonctions de  $V_0([0,1])$  ; cela prouve que  $g^{(-1)}$  est la fonction d'échelle de  $(V_j^{(-1)})$ .

Si  $g$  est dérivable, on part de l'identité  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x-k) = 1$  pour conclure que  $g^{(1)} = \sum_{k \geq 0} g'(x-k)$  est à support compact (puisque  $\text{Supp } \sum_{k \geq 0} g'(x-k) \subset [0, +\infty[$  et que  $\text{Supp } \sum_{k \leq -1} g'(x-k) \subset ]-\infty, N-1]$ ). On a  $g'(x) = g^{(1)}(x) - g^{(1)}(x-1)$  et on en conclut que

$$\hat{g}^{(1)}(2\xi) = \frac{2}{1+e^{-i\xi}}M_0(\xi)\hat{g}^{(1)}(\xi).$$

La fonction  $g^{(1)}$  engendre bien une analyse multi-résolution  $(V_j^{(1)})$  ; de plus  $\text{Supp } g^{(1)} = [0, N-1]$  et la dimension de  $V_0^{(1)}([0,1])$  est bien  $N-1$ , car  $V_0^{(1)}([0,1])$  est l'espace des dérivées des fonctions de  $V_0([0,1])$  (et  $1 \in V_0([0,1])$ ) ; à nouveau,  $g^{(1)}$  est la fonction d'échelle de  $(V_j^{(1)})$ .

La découverte de  $g^{(1)}$  (et donc de  $g^{(-1)}$ ) est due à G. Malgouyres [7] pour le cadre des analyses multi-résolutions. Elle implique que la dérivation dans  $V_0$  est une opération de différence finie :

$$(3) \quad \frac{d}{dx} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k g(x-k) \right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (a_k - a_{k-1}) g^{(1)}(x-k).$$

### III. La formule de commutation.

La formule (3) est particulièrement bien adaptée au cas des analyses multi-résolutions bi-orthogonales de Cohen, Daubechies et Feauveau [1]. On considère deux fonctions d'échelle  $g, g^*$  à support compact de deux analyses multi-résolution  $(V_j)$  et  $(V_j^*)$  et on suppose les relations de bi-orthogonalité suivante :

$$(4) \quad \langle g(x) | g^*(x-k) \rangle = \delta_{k,M} \quad \text{pour un } M \in \mathbb{Z}.$$

On dispose alors du projecteur  $P_j$  de  $L^2$  sur  $V_j$  parallèlement à  $(V_j^*)^\perp$  qui se calcule comme :

$$(5) \quad P_j f = 2^j \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f(x) | g^*(2^j x - k - M) \rangle g(2^j x - k).$$

Mais il est facile de vérifier que  $V_j^{(1)}$  et  $V_j^{*(-1)}$  sont encore des analyses multi-résolutions bi-orthogonales et que

$$(6) \quad \langle g^{(1)}(x) \mid g^{*(-1)}(x-k) \rangle = \delta_{k, M-1}.$$

Si  $P_j^{(1)}$  désigne le projecteur de  $L^2$  sur  $V_j^{(1)}$  parallèlement à  $V_j^{*(-1)\perp}$ , on a alors la formule de commutation

$$(7) \quad \frac{d}{dx}(P_j f) = P_j^{(1)} \left( \frac{df}{dx} \right)$$

qui exprime que la dérivée de l'approximée de  $f$  est une approximée de la dérivée de  $f$ .

Cette formule a été introduite dans [5].

#### IV. Ondelettes sur l'intervalle.

Yves Meyer a montré récemment comment construire une analyse multi-résolution de  $L^2([0, 1])$  [8]. On part d'une analyse multi-résolution  $(V_j)$  d'I. Daubechies (avec une fonction d'échelle  $\varphi$  à support compact telle que les  $\varphi(x-k)$  soient orthonormées) et on pose pour  $j \geq 0$ ,  $V_j([0, 1])$  l'espace des restrictions à  $[0, 1]$  des fonctions de  $V_j$ . Une base de Riesz de  $V_j([0, 1])$  est alors donnée par les  $2^{jk}\varphi(2^j x - k)|_{[0, 1]}$  pour  $-2N + 2 \leq k \leq 2^j - 1$  (si  $\text{Supp } \varphi = [0, 2N - 1]$ ).

Par primitivation et dérivation, on peut alors facilement construire des analyses multi-résolutions bi-orthogonales sur l'intervalle [2] : on vérifie facilement que si  $\varphi$  est  $k$ -fois dérivable alors  $V_j^{(k)}([0, 1])$  et  $V_j^{*(-k)}([0, 1]) \cap H_0^k$  sont en dualité pour le produit scalaire de  $L^2$ . La description de bases pour ces espaces repose sur le lemme suivant : si  $(e_p)$ ,  $(e_p^*)$  ( $p_0 \leq p \leq p_1$ ) sont deux familles de fonctions sur  $[0, 1]$  telles que  $e_p \in H^1$ ,  $e_p^* \in H_0^k$ ,  $\langle e_p \mid e_q^* \rangle = \delta_{p,q}$  et  $\sum_p e_p = 1$  alors les familles  $(\epsilon_p = \sum_{q \geq p} e'_q)$  et  $(\epsilon_p^* = \int_0^x (e_{p-1}^*(t) - e_p^*(t)) dt)$  ( $p_0 + 1 \leq p \leq p_1$ ) vérifient encore  $\langle \epsilon_q \mid \epsilon_p^* \rangle = \delta_{p,q}$  ; de plus  $\epsilon_p^* \in H_0^{k+1}$  ; enfin les supports de  $\epsilon_p$  et de  $\epsilon_p^*$  sont bien contrôlés car  $\epsilon_p = -\sum_{q < p} e'_q$  et  $\int e_{p-1}^* dt = \int e_p^* dt (= 1)$  de sorte que si les  $e_p$  ont des supports de la forme  $[a_p, b_p]$  avec  $a_p \leq a_{p+1}$ ,  $b_p \leq b_{p+1}$  et de même les  $e_p^*$  avec  $[a_p^*, b_p^*]$  alors  $\text{Supp } \epsilon_p \subset [a_p, b_{p-1}]$  et  $\text{Supp } \epsilon_p^* \subset [a_{p-1}^*, b_p^*]$ .

#### V. Exemple d'application : ondelettes vecteurs à divergence nulle.

Pour analyser les champs de vecteurs à divergence nulle sur  $\mathbb{R}^n$ , on part de deux analyses multi-résolutions bi-orthogonales  $V_j^{(0)}$ ,  $V_j^{*(0)}$  de  $L^2(\mathbb{R})$  et de leurs analyses primitive  $V_j^{(-1)}$  et dérivée  $V_j^{*(1)}$ .

Pour analyser les fonctions de  $\mathbb{R}^n$ , on considère les analyses suivantes  $V_j^{[k]}$  et  $V_j^{*[k]}$

(de projecteur  $P_j^{[k]}$ ) pour  $0 \leq k \leq n$  :

$$\begin{aligned} V_j^{[k]} &= V_j^{(-\delta_{1,k})} \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} V_j^{(-\delta_{n,k})} \\ V_j^{*[k]} &= V_j^{*(+\delta_{1,k})} \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} V_j^{*(+\delta_{n,k})} \\ P_j^{[k]} &= P_j^{(-\delta_{1,k})} \otimes \dots \otimes P_j^{(-\delta_{n,k})} \end{aligned}$$

et pour analyser les vecteurs de  $(L^2(\mathbb{R}^n))^n$ , on considère les analyses :

$$\begin{aligned} \vec{V}_j &= (V_j^{[1]}, \dots, V_j^{[n]}) \\ \vec{V}_j^* &= (V_j^{*[1]}, \dots, V_j^{*[n]}) \\ \vec{P}_j &= (P_j^{[1]}, \dots, P_j^{[n]}). \end{aligned}$$

On a alors la formule de commutation :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{P}_j \vec{f}) = P_j^{[0]} (\vec{\nabla} \cdot \vec{f}).$$

En particulier, si  $\vec{f}$  est à divergence nulle,  $\vec{P}_j \vec{f}$  est à divergence nulle. Le processus d'approximation  $\vec{f} \rightarrow (\vec{P}_j \vec{f})_{j \in \mathbb{Z}}$ , valable pour tout  $(L^2(\mathbb{R}^n))^n$  se révèle être un processus d'approximation interne pour l'espace  $\vec{H}$  des fonctions vecteurs à divergence nulle. On obtient alors une description de  $\vec{H}$  à l'aide d'ondelettes vecteurs à divergence nulle [5], [2]. Ces ondelettes sont actuellement programmées par M. Lahzami [3].

### Références

- [1] A. COHEN, I. DAUBECHIES and J.-C. FEAUVEAU Bi-orthogonal bases of compactly supported wavelets. Preprint, 1991.
- [2] A. JOUINI & P. G. LEMARIE-RIEUSSET Analyse multi-résolution bi-orthogonale sur l'intervalle et applications. Soumis aux *Annales de l'I.H.P.* (Analyse non-linéaire).
- [3] M. LAHZAMI Thèse en cours, Paris XI.
- [4] P. G. LEMARIE Fonctions à support compact dans les analyses multi-résolutions. *Revista Matematica Iberoamericana* 7 (1991), 157-182.
- [5] P. G. LEMARIE-RIEUSSET Analyses multi-résolutions non orthogonales, commutation entre projecteurs et dérivations et ondelettes vecteurs à divergence nulle. À paraître à la *Revista Matematica Iberoamericana*.
- [6] P. G. LEMARIE-RIEUSSET & G. MALGOUYRES Support des fonctions de base dans une analyse multi-résolutions. *C. R. Acad. Sc. Paris* 313 (1991), 377-380.

[7] G. MALGOUYRES Communication personnelle, 1990.

[8] Y. MEYER Ondelettes sur l'intervalle. *Revista Matematica Iberoamericana* 7 (1991), 115-134.

CNRS - URA 757  
Université de Paris-Sud  
Mathématiques - Bât. 425  
91405 ORSAY CEDEX (France)

# DEVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE D'ONDELETTES-SPLINES DANS UN CUBE DE $\mathbb{R}^d$ .

Mohammed El-Djalil KATEB et Abdellatif SEGHER

## Résumé

S. Jaffard a montré que les ondelettes-splines sur un ouvert de  $\mathbb{R}^d$  sont numériquement très proches des ondelettes définies sur  $\mathbb{R}^d$  pourvu qu'elles soient centrées suffisamment loin du bord de l'ouvert. Nous étudions dans cette note le comportement asymptotique de splines lagrangiens et de fonctions d'échelle permettant de construire les ondelettes-splines sur un cube de  $\mathbb{R}^d$ .

Nous décrivons alors, avec précision, les termes correctifs dus aux effets de bord de différente nature : effets dus aux « faces » d'ordre  $d - 1, d - 2, \dots, 0$ . L'ordre 0 correspond à l'effet de coin.

## Abstract

S. Jaffard has shown that the spline-wavelets constructed on an open set of  $\mathbb{R}^d$  are numerically close to those defined on the whole of  $\mathbb{R}^d$ , provided they are centered far from the boundary of this open set. We study in this note the asymptotic behaviour of the lagrangian splines and scale functions which permit us to construct the spline-wavelets on the cube of  $\mathbb{R}^d$ . We describe the correction terms due to the « boundary effect » of different order.

## INTRODUCTION

Une lecture attentive d'un article de Y. Meyer et S. Jaffard [Ja-Me] révèle l'importance de la structure des matrices de Gram qui interviennent dans la construction d'ondelettes sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$ . Cette structure particulière (matrice de Toeplitz) permet d'effectuer un calcul asymptotique de l'inverse de telles matrices [Se]. Ces matrices (tronquées) apparaissent naturellement, par leurs inverses et les racines carrées de leurs inverses, dans la construction de splines lagrangiens et des fonctions d'échelle (qui seront précisées plus loin) sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$ . Le développement asymptotique de ces matrices [Se] permet d'obtenir dans le cas d'un cube de  $\mathbb{R}^d$  les termes correctifs, qui traduiront les effets de bords de différente nature : face d'ordre «  $d - 1$  », face d'ordre «  $d - 2$  », ..., sommets du cube.

Ces termes sont en outre décrits, pour chaque bord, par une collection finie de fonctions qui permet, à l'aide de changements d'échelle et de la fonction principale du développement, de restituer asymptotiquement les bases que nous étudions. La donnée

d'une collection finie de ces nouvelles fonctions permet de compenser l'impossibilité d'effectuer la translation près du bord du cube.

La construction d'Y. Meyer et S. Jaffard [Ja-Me] sera utilisée pour transférer le développement asymptotique des splines lagrangiens et des fonctions d'échelle à celui des ondelettes.

## NOTATIONS ET DÉFINITIONS

### Matrices de Toeplitz indexées par une partie finie $\Lambda \times \Lambda$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

Soient  $f \geq 0$ ,  $f \in L^1(\mathbb{T})$ ,  $\Lambda$  une partie finie de  $\mathbb{Z}$ . On désignera par  $E_\Lambda$  le sous-espace vectoriel des polynômes trigonométriques engendré par les exponentielles indexées par  $\Lambda$ . On note  $\chi^m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , la fonction  $\chi^m(e^{i\theta}) = e^{im\theta}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi[$ .

On pose  $\pi_\Lambda(h) = \sum_{m \in \Lambda} \alpha_m \chi^m$ , pour tout  $h \in L^1(\mathbb{T})$  et  $h \simeq \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_m \chi^m$  (série de Fourier de  $h$ ). On définit ainsi  $\pi_\Lambda$  comme projecteur de  $L^1(\mathbb{T})$  sur  $E_\Lambda$ . La matrice de Toeplitz associée à  $f$  et à la partie  $\Lambda$  est la matrice (notée  $T_\Lambda(f)$ ) de l'opérateur défini par :  $\forall p \in E_\Lambda$ ,  $T_\Lambda(f)(p) = \pi_\Lambda(fp)$ . (On dit que  $f$  est le *symbole* de  $T_\Lambda(f)$ ).

### 1.— Calcul symbolique asymptotique pour les matrices de Toeplitz.

On note, dans  $L^2(\mathbb{T})$ ,  $H_+^2 = \{h \in L^2(\mathbb{T}), h \simeq \sum \alpha_m \chi^m, m \in \mathbb{Z}_+\}$ ,  $P_+$  le projecteur orthogonal de  $L^2(\mathbb{T})$  sur cet espace et  $P_- = I - P_+$ .

On prendra  $\Lambda = \{p \in \mathbb{Z}, -n \leq p \leq m\}$ ,  $n$  et  $m$  sont des entiers positifs (que l'on fera tendre vers l'infini pour obtenir des propriétés asymptotiques). On suppose que  $f$  est factorisable sous la forme  $f = |g|^2$  où  $g$  est telle que  $\hat{g}(k) = 0$ ,  $k < 0$ .

L'inversion asymptotique de la matrice  $T_{n,m}(f) = T_\Lambda(f)$  s'obtient à une translation près grâce à un théorème dû à l'un des auteurs de cette note [Se]. Nous étendons ce résultat à  $F(T_{n,m}(f))$  où  $F$  est analytique au voisinage de 1.

Quelques notations et fonctions auxiliaires sont nécessaires. On suppose  $f$  (qui est strictement positive), continue et bornée. On peut toujours se ramener au cas où  $f$  est comprise entre 0 et 1. On posera alors  $h = 1 - f$  et  $f_\lambda = 1 - \lambda h$ ,  $-1 < \lambda < 1$ . Soit  $Q_r(\theta)$  la fonction définie par

$$Q_r(\theta) = (1 + r e^{i\theta}) / (1 - r e^{i\theta}), \quad 0 < r < 1.$$

Un simple calcul montre que si  $g_\lambda$  est la fonction telle que

$$g_\lambda(\theta) = \lim_{r \rightarrow 1} \exp((1/2)Q_r * \text{Log}(1 - \lambda h)(\theta)), \text{ p.p.}$$

on a alors  $f_\lambda = |g_\lambda|^2$ . Nous remarquons que la convolution du noyau  $Q_r$  avec  $\text{Log}(1 - \lambda h)$  est définie dès que cette dernière fonction est dans  $L^1(\mathbb{T})$ , et que la fonction

$g_\lambda$  vérifie  $\hat{g}_\lambda(k) = 0$ ,  $k < 0$ . Cette méthode, classique, généralise le lemme de F. Riesz (factorisation des polynômes positifs en dimension 1). Nous aurons besoin des dérivées successives par rapport à  $\lambda$  en 0 de  $1/g_\lambda$ . Posons  $\tilde{h} = \lim_{r \rightarrow 1} (\frac{1}{2} Q_r * h)$ . On a alors  $\frac{d}{d\lambda}(1/g_\lambda) \Big|_{\lambda=0} = \tilde{h}$ ;  $\frac{d^2}{d\lambda^2}(1/g_\lambda) \Big|_{\lambda=0} = (\tilde{h})^2 + \tilde{h}^2$ , etc... On notera  $\Psi_n(\lambda, h)(p, q) = \langle P_-(\chi^n/\bar{g}_\lambda)p, P_-(\chi^n/\bar{g}_\lambda)q \rangle$  et  $\Psi_m(\lambda, h)(p, q) = \langle P_-(\bar{\chi}^{m+1}/g_\lambda)p, P_-(\bar{\chi}^{m+1}/g_\lambda)q \rangle$ . On posera enfin  $E_{n,m} = E_\Lambda$ .

**Théorème 1.** On suppose que  $f = |g|^2$  avec  $g$  et  $g^{-1} \in H^\infty$ . Pour tout  $q$  appartenant à  $E_{n,m}$  on a

$$(i) \quad [T_{n,m}(f)]^{-1}(q) = T_{n,m}(1/f)(q) - (\chi^{-n}/g)P_-( (\chi^n/\bar{g})q) \\ - (\bar{\chi}^{m+1}/\bar{g})P_+ ( (\bar{\chi}^{m+1}/g)q) + R_{n,m}(q) \\ = T_{n,m}(1/f)(q) + (A_{0,n} + A_{1,m} + R_{n,m})(q)$$

(ii) Si  $f > 0$ ,  $1/f$  est  $C^\infty$ , alors  $\|R_{n,m}\| = o(1/(n+m)^k)$ , pour tout entier  $k$ .

(iii) On suppose de plus  $f < 1$ , on pose  $f = 1 - h$ . Pour toute fonction analytique au voisinage de 1,  $F(z) = \sum_{k \geq 0} a_k(z-1)^k$ , on a l'égalité matricielle

$$F(T_{n,m}(f)) = T_{n,m}(F(f)) + \sum_{k \geq 2} (a_k/k!) \Psi_n^{(k)}(0, h) + \sum_{k \geq 2} (a_k/k!) \Psi_m^{(k)}(0, h) + \tilde{R}_{n,m}(h)$$

où  $\|\tilde{R}_{n,m}(h)\|_\infty = o(1/(m+n)^s)$ , pour tout entier  $s$ .

On dispose en particulier du développement de  $(T_{n,m}(f))^{-1/2}$ .

## 2. Développement asymptotique de splines lagrangiens et de la fonction d'échelle.

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ . On considère la fonction  $\sigma_s$  telle que  $\hat{\sigma}_s(\xi) = \left( \sin(\xi/2)/(\xi/2) \right)^{2s}$  et l'analyse graduée constituée par les espaces splines emboîtés  $V_j^\Omega$  engendrés par les fonctions  $\sigma_j^\lambda(x) = 2^{dj/2} \sigma_s(2^j x - k)$ , où  $\lambda = 2^{-j} k$ , telles que  $\text{supp } \sigma_j^\lambda \subset \Omega$ . On note  $\Lambda_j$  l'ensemble des  $\lambda = k2^{-j}$  correspondants. Pour chaque  $\lambda \in \Lambda_j$ , on définit un spline lagrangien  $\theta_j^\lambda$  comme étant la fonction appartenant à  $V_j^\Omega$  telle que  $\theta_j^\lambda(\lambda') = 1$  si  $\lambda = \lambda'$ , 0 sinon.

Considérons la fonction  $B_j^\lambda(x) = \sum_{k' \in \mathbb{Z}^d} b(2^{-j}k, 2^{-j}k') \sigma_s(2^j x - k')$  telle que  $B_j^\lambda(2^{-j}k') = \delta_{k,k'}$ . On vérifie sans peine que les coefficients  $b(2^{-j}k, 2^{-j}k')$  sont les éléments de  $\sqrt{\text{l'inverse de}}$  la matrice bi-infinie  $S = (\sigma_s(k-l))_{k,l \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d}$ .

On établit [Me, page 61] que les éléments  $\sigma_s(k-l)$  de la matrice (de Toeplitz)  $S$  sont les coefficients de Fourier, aux points  $k-l$ , de la fonction  $f(\theta) = \prod_{i=1}^d |g(\theta_i)|^2$ ,  $\theta_i \in [0, 2\pi[$ , avec  $|g(\nu)|^2 = (\sin \nu)^{2s} \sum_{k \in \mathbb{Z}} 1/(\nu + k\pi)^{2s} = P_{2s}(\cos(\nu))$  où  $P_{2s}(t)$  est un polynôme de degré  $2s - 2$ , strictement positif quand  $t$  parcourt  $[-1, 1]$ .

Nous allons donner une série de résultats relatifs au cas  $d = 1$  et  $\Omega = ]0, 1[$ . Nous posons  $n_1 = s + 1$  et  $m_j = 2^j - (s + 1)$ ; on a alors  $2^j \Lambda_j = [n_1, m_j]$ . En appliquant le théorème 1 à  $S_j = (\sigma_s(k - l))_{(k, l) \in 2^j \Lambda_j \times 2^j \Lambda_j}$ , on obtient

**Lemme 1.** Si  $1/g(\theta) = \sum_{k \geq 0} \beta_k e^{ik\theta}$  on a alors

$$S_j^{-1} = (S^{-1})_j + T_{0, n_1} + T_{1, m_j} + R_{n_1, m_j}$$

où pour  $k, l \in 2^j \Lambda_j$

$$\begin{aligned} (S^{-1})_j(k, l) &= b(2^{-j}k, 2^{-j}l) \\ T_{0, n_1}(k, l) &= - \sum_{p \geq 1} \bar{\beta}_{k+p+n_1} \beta_{l+p+n_1} \\ T_{1, m_j}(k, l) &= - \sum_{p \geq 1} \bar{\beta}_{p-l+m_j} \beta_{p-k+m_j} \end{aligned}$$

et où  $\|R_{n_1, m_j}\| = o\left(\frac{1}{(n_1 + m_j)^p}\right)$  pour tout entier  $p$ .

**Preuve.**

D'après les remarques précédentes, les hypothèses du théorème 1 sont vérifiées pour  $f(\theta) = |g(\theta)|^2$  car  $g$  et  $g^{-1}$  appartiennent à  $H^\infty$ . On a alors  $S_j^{-1} = (S^{-1})_j + T_{0, n_1} + T_{1, m_j} + R_{n_1, m_j}$  où  $T_{0, n_1}$ ,  $T_{1, m_j}$  et  $R_{n_1, m_j}$  sont respectivement les matrices associées aux opérateurs de bord donnés par le théorème 1. Un simple calcul permet alors de déduire explicitement les éléments des matrices.

Ce lemme nous permet alors de mieux comprendre le lien asymptotique entre  $\theta_j^\lambda$  et  $B_j^\lambda$  quand  $\lambda \in \Lambda_j$ .

Soit  $n_0$  un entier. On définit  $n_0 + 1$  « splines de bord 0 »

$$b_{j, p}(x) = \sum_{n_1 \leq q \leq n_1 + n_0} T_{0, n_1}(p, q) \sigma_s(2^j x - q) \quad n_1 \leq p \leq n_1 + n_0$$

et  $n_0 + 1$  « splines de bord 1 »

$$d_{j, p'}(x) = \sum_{m_j - n_0 \leq q' \leq n_j} T_{1, m_j}(p', q') \sigma_s(2^j x - q') \quad m_j - n_0 \leq p' \leq n_j$$

Grâce au lemme 1, on a

**Théorème 2.** Soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n_0 = n_0(\varepsilon)$  et  $j_0 = j_0(\varepsilon)$  tels que pour tout  $x$  appartenant à  $]0, 1[$  et pour tout  $j > j_0$  on ait

(i) Pour tout entier  $k$  tel que  $n_1 + n_0 < k < m_j - n_0$

$$\theta_j^\lambda(x) = B_j^\lambda(x) + \tilde{r}_j^\lambda(x); \quad \text{où } \|\tilde{r}_j^\lambda\|_\infty \leq \varepsilon.$$

(ii) Pour tout entier  $k$  tel que  $n_1 \leq k \leq n_1 + n_0$

$$\theta_j^\lambda(x) = B_j^\lambda(x) + b_{j,k}(x) + \tilde{r}_{0,j}^\lambda(x) \text{ où } \|\tilde{r}_{0,j}^\lambda\|_\infty < \varepsilon$$

(iii) Pour tout entier  $k$  tel que  $m_j - n_0 \leq k \leq m_j$

$$\theta_j^\lambda(x) = B_j^\lambda(x) + d_{j,k}(x) + \tilde{r}_{1,j}^\lambda(x) \text{ où } \|\tilde{r}_{1,j}^\lambda\|_\infty < \varepsilon.$$

Dans le cas de la fonction d'échelle, on suit la même démarche. En effet, une base orthonormée de  $V_j^\Omega$  est donnée par

$$(\varphi_j^\lambda(x))_{\lambda \in \Lambda_j} = G_j^{-1/2} (\sigma_j^\lambda(x))_{\lambda \in \Lambda_j} \text{ où } G_j = (\langle \sigma_j^\lambda, \sigma_j^{\lambda'} \rangle)_{(\lambda, \lambda') \in \Lambda_j \times \Lambda_j}$$

Pour comprendre le lien asymptotique de cette base à celle de  $V_j^{\mathbf{R}}$ , qu'on note  $(\tilde{\varphi}_j^\lambda)_{\lambda \in 2^{-j}\mathbf{Z}^d}$ , il suffit d'étudier le comportement asymptotique de  $G_j^{-1/2}$ . On remarque que  $G = (\langle \tilde{\varphi}_j^\lambda, \tilde{\varphi}_j^{\lambda'} \rangle)$  est une matrice de Toeplitz de symbole  $P_{4s}(\cos \theta)$ . Posons  $F(z) = (1-z)^{-1/2} = \sum_{s \geq 0} a_s z^s$  et pour  $(k, l) \in 2^j \Lambda_j \times 2^j \Lambda_j$  on note  $\Phi_0(k, l) = \sum_{s \geq 0} (a_s / s!) \langle \Psi_{n_1}^{(s)}(0, h) \chi^k, \chi^l \rangle$  et  $\Phi_1(k, l) = \sum_{s \geq 0} (a_s / s!) \langle \Psi_{m_j}^{(s)}(0, h) \chi^k, \chi^l \rangle$ . Comme auparavant, on introduit les  $n_0 + 1$  « fonctions d'échelle de bord 0 »

$$u_{j,p}(x) = \sum_{n_1 \leq q \leq n_1 + n_0} \Phi_0(p, q) \sigma_s(2^j x - q)$$

et les  $n_0 + 1$  « fonctions d'échelle de bord 1 »

$$v_{j,p}(x) = \sum_{m_j - n_0 \leq q' \leq m_j} \Phi_1(p, q') \sigma_s(2^j x - q').$$

Le lien entre  $\varphi_j^\lambda$  et  $\tilde{\varphi}_j^\lambda$  est alors donné par le théorème suivant

**Théorème 3.** Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n_0 = n_0(\varepsilon)$  et  $j_0 = j_0(\varepsilon)$  tels que pour tout  $x$  appartenant à  $]0, 1[$  et pour tout  $j > j_0$ , on ait

(i) Pour tout entier  $k$  tel que  $n_1 + n_0 < k < m_j - n_0$

$$\varphi_j^\lambda(x) = \tilde{\varphi}_j^\lambda(x) + r_j^\lambda(x) ; \text{ où } \|r_j^\lambda\|_\infty \leq \varepsilon.$$

(ii) Pour tout entier  $k$  tel que  $n_1 \leq k \leq n_1 + n_0$

$$\varphi_j^\lambda(x) = \tilde{\varphi}_j^\lambda(x) + u_{j,k}(x) + r_{0,j}^\lambda(x) \text{ où } \|r_{0,j}^\lambda\|_\infty \leq \varepsilon$$

(iii) Pour tout entier  $k$  tel que  $m_j - n_0 \leq k \leq m_j$

$$\varphi_j^\lambda(x) = \tilde{\varphi}_j^\lambda(x) + v_{j,k}(x) + r_{1,j}^\lambda(x) \text{ où } \|r_{1,j}^\lambda\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Remarque. Le passage au cas  $\Omega = ]0, 1[^d$  se fait par simple produit tensoriel. Nous aurons ainsi les effets dus aux « faces » d'ordre  $d - 1, d - 2, \dots$ . L'ordre 0 correspond à « l'effet de coin ».

### Construction asymptotique d'une base d'ondelettes de $L^2(]0, 1[^d)$ .

Nous décrivons dans une version détaillée la construction effective d'ondelettes asymptotiques et en particulier celles qui sont attachées au bord du cube. Nous suivrons, pour cela le schéma, devenu classique, de construction d'ondelettes dans un ouvert due à Y. Meyer et S. Jaffard. Toutes les propriétés décrites dans les théorème 2 et 3 se transfèrent sans peine aux ondelettes.

### BIBLIOGRAPHIE

- [Ja] S. Jaffard, *Propriétés des matrices « bien localisées » près de leur diagonale et quelques applications*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. 7, n°5, 1990, p.461-476.
- [Ja-Me] S. Jaffard et Y. Meyer, *Bases d'ondelettes dans des ouverts de  $\mathbb{R}^d$* , J. Math. Pures et Appl., Vol. 68, 1989, p.95-108.
- [Ka-Se] M.-D. Kateb et A. Seghier, *Le système de Franklin et l'ondelette de Strömberg*, (Nov.1991), à paraître.
- [Me] Y. Meyer, *Ondelettes et opérateurs*, Vol. 1, Hermann (1990).
- [Se] A. Seghier, *Inversion de la matrice de Toeplitz en  $d$  dimensions et développement asymptotique de la trace de l'inverse à l'ordre  $d$* , J. of Funct. Anal., Vol. 67, n°3, July 1986, p.380-412.

N° D'IMPRESSION 1331  
2ème TRIMESTRE 1992