PUBLICATIONS

MATHÉMATIQUES

D'ORSAY

# COLLOQUE de THÉORIE ANALYTIQUE des NOMBRES "Jean COQUET"

Proceedings Journées SMF-CNRS, CIRM 1985

Editeurs : H. DABOUSSI, J.-M. DESHOUILLERS
P. LIARDET

88 - 02

Université de PARIS-SUD

Département de Mathématiques
Bâtiment 425
91405 ORSAY France

# COLLOQUE DE THÉORIE ANALYTIQUE

# DES NOMBRES

# "Jean COQUET"

## Proceedings

Journées SMF-CNRS
CIRM : Marseille, septembre 1985

Éditeurs :

Hédi DABOUSSI
Université de Paris Sud
F–91405 Orsay

Jean-Marc DESHOUILLERS
Université de Bordeaux I
F–33405 Talence

Pierre LIARDET
Université de Provence
F–13331 Marseille

**Ce volume est dédié**

**à la mémoire de**

**Jean COQUET (1949-1984)**

Organisées au Centre International de Rencontres Mathématiques sous les auspices de la Société Mathématique de France, avec le concours de l'Université de Bordeaux I et des Unités associées au C.N.R.S. n° 225 et 226, les Journées de Théorie analytique des Nombres de Septembre 1985 s'insèrent dans le cadre des réunions qui regroupent tous les deux ou trois ans les arithméticiens de tendance analytique.

Lors de cette rencontre, on a pu mesurer l'influence de l'oeuvre de Jean COQUET : plusieurs articles de ce volume en témoignent. Son décès prématuré nous prive également de sa chale
et de sa gentillesse. C'est pour marquer la place de Jean COQUET dans la communauté arithméticienne que ses amis saluent sa mémoire en lui dédiant ce volume.

# LISTE DES CONFERENCES

M. BALAZARD (Limoges) - Distribution des valeurs de la fonction $\Omega_E$.

A. BALOG (Budapest, H) - On numbers without large prime factors.

A. BERTRAND (Bordeaux) - Récurrence de Poincaré et ensembles intersectifs.

B. CONREY (Stillwater, USA) - Simple zeros of quadratic zeta functions.

H. DELANGE (Orsay) - Suites d'entiers dont la fonction caractéristique est presque-périodique".

J-M. DESHOUILLERS (Bordeaux) - Waring's problem for biquadrates.

F. DRESS (Bordeaux) - Majorations numériques du reste relatif à la fonction sommatoire des entiers sans facteur carré.

E. FOUVRY (Bordeaux) - The dispersion method : an example of computation.
- Brun-Titchmarsh near 1/2.

F. GRUPP (Ulm, D) - Sieve of dimension greater than 1.

J. HAIGHT (Londres, GB) - On multiples of real sequences.

P. LIARDET (Marseille) - Jean COQUET.

C. MAUDUIT (Marseille) - Arithmétique et substitutions.

M. MENDÈS-FRANCE (Bordeaux) - $\theta^n$ modulo 1.

J-L. NICOLAS (Limoges) - Bornes effectives pour certaines fonctions arithmétiques.

A. PERELLI (Gênes, I) - Sieve methods and class-number problems.

J. PINTZ (Budapest, H) - On the exceptional set in Golbach's problem.

G. RHIN (Metz) - Mesures d'irrationnalité.

P. SARGOS (Dakar, Senegal) - Sur le problème des diviseurs généralisés.

J. SHALLIT (Chicago, USA) - Sur certains produits liés aux sommes des chiffres.

J. SZMIDT (Varsovie, PL) - Asymptotics of divisor sums for imaginary quadratic number fields.

G. TENENBAUM (Nancy) - Sur un problème de crible et ses applications.

TABLE DES MATIERES

# PROPRIETES HARMONIQUES DE LA NUMERATION SUIVANT JEAN COQUET

Pierre LIARDET

## I.- INTRODUCTION.

I.1. La numération, qu'elle soit en base fixe ou variable, ou plus généralement suivant une échelle, intervient dans de nombreuses questions. Nous allons ici l'étudier du point de vue de l'analyse harmonique et de la théorie ergodique. Pour illustrer les développements actuels dans ce domaine, nous avons choisi de rendre hommage à Jean COQUET en cheminant à travers son œuvre. Le sujet est vaste. Nous commencerons par rappeler les éléments spectraux ( corrélations, mesures spectrales ) et dynamiques ( flots, flots mesurés ) que l'on associe aux suites. La somme des chiffres et ses variations nous servirons de fil d'Arianne pour continuer... et nous terminerons sur les derniers résultats que Jean COQUET se proposait de nous démontrer. Quelques propriétés nouvelles seront données.

I.2. *Corrélations et mesures spectrales.* Soit $W$ l'ensemble des suites complexes $g:\mathbb{N} \to \mathbb{C}$, introduit par Wiener [75] , telles que la limite

$$(1) \qquad \gamma_g(m) := \lim_{N:\infty} \Big( N^{-1} \sum_{n<N} g(m+n)\overline{g(n)} \Big)$$

existe pour tout entier $m \geq 0$ . La suite $\gamma_g$ , prolongée à $\mathbb{Z}$ par $\gamma_g(-m) = \overline{\gamma_g(m)}$ s'appelle la *corrélation* de $g$ . Elle est definie-positive et d'après le théorème de Bochner-Herglotz, $\gamma_g$ est la transformée de Fourier d'une mesure borélienne positive $\sigma_g$ sur le tore $\mathbb{T}$ :

$$\gamma_g(m) = \hat{\sigma}_g(m) := \int_{\mathbb{T}} e^{2i\pi mt} \sigma_g(dt) \qquad (m \in \mathbb{Z}) .$$

$\sigma_g$ est appelée la *mesure spectrale* de $g$ , elle est limite faible [30] de la suite des mesures

$$\sigma_{g,N}(dt) := N^{-1} \Big| \sum_{n<N} g(n) e^{-2i\pi tn} \Big|^2 dt$$

sur le tore. Dans la suite, pour simplifier, nous poserons $e(t) := e^{2i\pi t}$ ($t \in \mathbb{R}$). Au lieu de prendre la limite suivant $\mathbb{N}$, il est loisible de choisir une limite suivant une partie infinie $J$ de $\mathbb{N}$. En particulier, si $c = \lim_{N \in J} N^{-1} \sum_{n<N} g(n)$, alors la suite $f := g - c$ possède ( suivant $J$ ) une corrélation égale à $\gamma_g - |c|^2$, la mesure spectrale correspondante étant $\sigma_g - |c|^2\delta_0$ ( où $\delta_0$ est la mesure de Dirac en $0$ ). En choisissant $J$, on obtient

$$(2) \qquad \limsup_{N:\infty} \left| N^{-1} \sum_{n<N} g(n) \right| \leqslant \sqrt{\sigma_g(\{0\})} \ .$$

Soit $g_a$ la suite $n \to g(n)e(na)$. Elle est dans $W$ et $\gamma_{g_a}(m) = e(ma)\gamma_g(m)$, en d'autres termes $\sigma_{g_a} = \delta_a * \sigma_g$. En appliquant (2) à $g_{-a}$,
on obtient ( $a$ étant considéré comme élément de $\mathbb{T}$ ) :

$$(3) \qquad \limsup_{N:\infty} \left| N^{-1} \sum_{n<N} g(n)e(-na) \right| \leqslant \sqrt{\sigma_g(\{a\})} \ .$$

La suite $g$ est dite pseudo-aléatoire [5 ] si $\sigma_g$ est continue. Comme on a

$$(4) \qquad \lim_{N:\infty} N^{-1} \sum_{n<N} |\gamma_g(n)|^2 = \sigma_g \otimes \sigma_g(\Delta)$$

où $\Delta$ est la diagonale de $\mathbb{T}^2$, la continuité de $\sigma_g$ équivaut à la limite nulle en (4). L'ensemble

$$\mathcal{S}p(g) := \{ x \in \mathbb{T} \ ; \ \limsup_{N:\infty} |N^{-1} \sum_{n<N} g(n)e(-nx)| > 0 \}$$

est appelé <u>spectre de Fourier-Bohr</u> de $g$. Lorsque $g$ est pseudo-aléatoire, son spectre est vide. La suite $n \to e(\sqrt{n})$ fournit un exemple simple de suite à spectre vide et qui n'est pas pseudo-aléatoire. Ainsi, (3) ne suffit pas pour déterminer le support de la composante discrète de la mesure spectrale.

Introduisons la notion d'affinité [30,59] . Soient $p$, $q$, $r$ des mesures positives sur le tore. Si $p$ et $q$ sont absolument continues par rapport à $r$, *l'affinité* de $p$ et $q$ est alors définie par

$$\rho(p,q) := \int_{\mathbb{T}} \left( \frac{dp}{dr} \right)^{1/2} \left( \frac{dq}{dr} \right)^{1/2} dr \ ,$$

elle ne dépend pas du choix de $r$ et l'égalité $\rho(p,q) = 0$ est équivalente à $p$ et $q$ mutuellement singulières ( notation : $p \perp q$ ). Supposons $f$ et $g$ dans $W$, on sait alors ( [30] , corollaire 1 ) que :

$$(5) \qquad \limsup_{N:\infty} \left| N^{-1} \sum_{n<N} f(n)\overline{g(n)} \right| \leqslant \rho(\sigma_f, \sigma_g) \ ,$$

ce qui généralise (3).

Soit $S$ l'espace des suites complexes $z : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ telles que la quantité

$$\| z \| := \limsup_{N:\infty} \left( N^{-1} \sum_{n<N} | z(n) |^2 \right)^{1/2}$$

soit finie. On a $W \subset S$ et $\| . \|$ est une semi-norme.L'espace quotient $B := S/N$ pour $N = \{ z \in S \, ; \, \| z \| = 0 \}$ est un espace de Banach avec la norme correspondante à $\| . \|$. Soit $T$ le shift unilatéral sur $S$ ( $Tz(n) = z(n+1)$ , $n \geqslant 0$ ), alors $TN \subset N$ et $T^{-1}N \subset N$ de sorte que $T$ passe au quotient $B$ et détermine une isométrie inversible notée encore $T$ . Pour $z$ dans $S$ , le plus souvent identifié à sa classe $\zeta$ , on notera $H(z)$ ( ou $H(\zeta)$) le sous-espace fermé engendré par $T^n\zeta$ , $n \in \mathbb{Z}$ . Choisissons $a$ et $b$ dans $S$ de classes $\alpha$ et $\beta$ dans $H(\zeta)$ , alors la limite

$$(6) \qquad (\alpha|\beta) := \lim_{N:\infty} N^{-1} \sum_{n<N} a(n)\overline{b(n)}$$

existe et $H(z)$ devient un espace de Hilbert, de produit scalaire donné par (6). Lorsque $z$ est dans $W$ , sa mesure spectrale ne dépend que de sa classe $\zeta$ et se notera aussi bien par $\sigma_\zeta$ .

Le théorème suivant résulte de la théorie spectrale classique des opérateurs unitaires ( cf.[48] par exemple), on le retrouve avec des variantes chez plusieurs auteurs ( par exemple [31,51,54 ]) :

THEOREME 1. *Soient* $\alpha$ *et* $\beta$ *dans* $B$ . *Il y a équivalence entre :*

*(i)* $\sigma_\alpha \perp \sigma_\beta$ .

*(ii)* $H(\alpha) \perp H(\beta)$ *et* $H(\alpha) \subset H(\alpha + \beta)$ .

Soit $H$ un espace de Hilbert et $T$ une isométrie linéaire sur $H$ . Notons $(.|.)$ le produit scalaire, $M(\mathbb{T})$ le dual fort de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ et dont la norme ( variation totale ) est notée $|| . ||$. Pour $\alpha$ , $\beta$ dans $H$ , la suite

$$\gamma_{\alpha,\beta} : (m-n) \to (T^m\alpha|T^n\beta)$$

est bien définie sur $\mathbb{Z}$ . Elle est la transformée de Fourier d'une mesure complexe $\sigma_{\alpha,\beta}$ sur le tore. Introduisons l'application $(\alpha,\beta) \to \sigma_{\alpha,\beta}$ définie sur $H\times H$ à valeurs dans $M(\mathbb{T})$. Elle est sesquilinéaire continue. La mesure $\sigma_{\alpha,\alpha}$ , notée $\sigma_\alpha$ , est positive. De plus

$$(7) \qquad ||\sigma_\alpha|| = \| \alpha \|^2 \quad \text{et} \quad ||\sigma_{\alpha,\beta}|| \leqslant \| \alpha\| \, \| \beta \| .$$

$\sigma_{\alpha,\beta}$ est absolument continue par rapport à $\sigma_\alpha$ et $\sigma_\beta$ ; par ailleurs on a au sens de la convergence faible :

$$(8) \qquad \sigma_{\alpha,\beta} = * - \lim_{N:\infty} N^{-1} \left( \sum_{n<N} e(-nt)T^n\alpha \mid \sum_{n<N} e(-nt)T^n\beta \right)dt \; .$$

Notons enfin que le théorème 1 reste vrai avec H au lieu de $B$ . Nous renvoyons à [69] pour plus de détails.

I.3. *Flots associés à une suite.* Soit X un espace métrisable compact. Un flot sur X est un couple $(F;X)$ où F est une application continue de X dans X . Il est habituel de supposer F surjective. Soit $\mu$ une probabilité borélienne sur X, le triplet $(F;X,\mu)$ est appelé *flot mesuré* lorsque $\mu$ est invariante par F ( i.e. $\mu F^{-1} = \mu$ ) . Soit $u := (u_n)_{n\geq 0}$ une suite à valeurs dans X et soit T le shift unilatéral sur l'espace compact produit $X^{\mathbb{N}}$ . L'ensemble $K_u$ des valeurs limites de la suite $u^* := (T^n u)_n$ est compact, non vide, stable par T . La restriction de T à $K_u$ est encore notée T , elle détermine un flot $\mathbb{K}(u) := (K_u;T)$ . La suite u est dite *récurrente* si $u \in K_u$ ; dans ce cas $K_u$ est exactement l'orbite fermée $\overline{\mathrm{Orb}(u)}$ de u suivant T .
Le shift bilatéral $\tilde{T}$ de $X^{\mathbb{Z}}$ réalise une extension *naturelle* de T . D'autre part T est surjective sur $K_u$ , le flot $\mathbb{K}(u)$ admet donc une extension naturelle que l'on réalise comme sous-flot de $(\tilde{T};X^{\mathbb{Z}})$ . Il s'agit du flot $\tilde{\mathbb{K}}(u)$ obtenu par restriction de $\tilde{T}$ au compact

$$\tilde{K}_u = \{ x \in X^{\mathbb{Z}} \; ; \forall k \in \mathbb{N} \; , (x_{n-k})_{n\geq 0} \in K_u \} \; .$$

Soit $\pi$ la projection naturelle $(\tilde{T};X^{\mathbb{Z}}) \to (T;X^{\mathbb{N}})$ ( morphisme de flots ) . Lorsque $\pi^{-1}(u) \cap \tilde{K}_u$ se réduit à un point, $\tilde{\mathbb{K}}(u)$ est isomorphe à $\mathbb{K}(u)$ par $\pi_{|\tilde{K}_u}$ ; de plus u est récurrente.

Dans la suite $I(u)$ désigne l'ensemble des valeurs limites pour la convergence faible de la suite des moyennes de Dirac $( N^{-1} \sum_{n<N} \delta_{u_n})_{N\geq 1}$ . On définit de même $I(u^*)$ . Toute mesure $\mu$ de $I(u^*)$ est invariante par T , de support dans $K_u$ et possède un relèvement unique $\tilde{\mu}$ de support dans $\tilde{K}_u$ telle que $\tilde{\mu}\,\tilde{T}^{-1} = \tilde{\mu}$ et $\mu = \tilde{\mu}\,\pi^{-1}$ de sorte que $\tilde{\mathbb{K}}(u,\mu) := (\tilde{T};\tilde{K}_u,\tilde{\mu})$ est un flot mesuré inversible, extension naturelle de $\mathbb{K}(u,\mu) := (T;K_u,\mu)$. T (resp. $\tilde{T}$ ) est aussi considéré comme un opérateur linéaire sur les espaces $L^2$ associés et devient ainsi une isométrie (resp. un opérateur unitaire ) à laquelle nous rattachons les éléments spectraux définis précédemment.

Lorsque $I(u^*)$ se réduit à un seul élément $\mu$ , u est dite *complètement stochastique* de distribution $\mu$ . Dans ce cas, pour toute $f : X^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}$ continue, la mesure spectrale $\sigma_f$ correspond à la suite $n \to f(u_n)$ . La suite u est dite *ergodique* si $\mathbb{K}(u;\mu)$ est ergodique, ce qui est équivalent à la condition ( cf.[31]) :

(9) $\qquad \forall\, f \in \mathcal{C}(K_u) \;:\; \sigma_f(\{0\}) = |\,\mu(f)\,|^2$ .

I.4. *Type spectral.* Les notations précédentes étant conservées, soit $\mu \in I(u^*)$, $E$ l'hyperplan de $\mathcal{C}(K_u)$ sur lequel s'annule $\mu$ et soit $\{ f_n \;;\; n \in \mathbb{N}^* \}$ une famille d'éléments de $E$ qui engendre un sous-espace dense dans $E$ ( pour la topologie de la norme uniforme ou de la norme de $L^2(\mu)$ ). Supposons en outre $\|f_n\| = 1$ pour tout $n$ et définissons la probabilité

$$(10) \qquad \tau_\mu(u) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\sigma_{f_n}$$

où $\sigma_{f_n}$ est la mesure spectrale de $f_n$ par rapport à l'isométrie $T$ de $L^2(\mu)$. D'après les propriétés ci-dessus de $\sigma_{(\cdot,\cdot)}$ la classe de $\tau_\mu$ ( modulo l'absolue continuité réciproque ) ne dépend pas du choix des $f_n$ , on l'appelle *type spectral* de $\mathbb{K}(u,\mu)$.

## II. SUITES q-MULTIPLICATIVES.

II.1. *Définitions et exemples.* Soit $q$ un entier $\geqslant 2$ . Une suite $g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ est dite $q$-*multiplicative* si

$$(11) \qquad g(aq^r + b) = g(aq^r)g(b)$$

pour tous entiers $a$ , $b$ , $r$ , $a \geqslant 0$ , $r \geqslant 1$ , $0 \leqslant b < q^r$ . Une suite $f$ à valeurs réelles est dite $q$-*additive* lorsqu'au lieu de (11) on a $f(aq^r + b) = f(aq^r) + f(b)$ avec les mêmes hypothèses sur $a$ , $b$ , $r$ . Ces notions remontent à A. GEL'FOND [46]. Représentons l'entier $n \geqslant 0$ en base $q$ :

$$(12) \qquad n = \sum_{r \geqslant 0} e_r(n)q^r \qquad , \quad e_r(n) \in \{0,1,\ldots,q-1\} .$$

La somme des chiffres $s_q(n) := \sum_{r \geqslant 0} e_r(n)$ fournit l'un des premiers exemples de de suites q-additives qui retiennent l'attention [43,46,6]. Dans sa thèse M. MENDES-FRANCE [61] étudie les fonctions de Walsh ; elles sont q-multiplicatives et définies, pour chaque $x := (x_r)_{r \geqslant 0}$ dans $\{0,1,\ldots,q-1\}^{\mathbb{N}}$ , par

$$(13) \qquad w_x : n \to \prod_{r \geqslant 0} e(\, q^{-1} x_r e_r(n)) \quad .$$

Les $w_x$ sont en fait les caractères du groupe additif $\mathbb{N}_q$ formé par l'addition sans retenue des entiers en base q. Ecartons le cas où $w_x$ est périodique qui correspond à $x_n = 0$ pour tout $n$ assez grand, alors :

PROPOSITION 1.[61] *Si* $x_n \neq 0$ *pour une infinité de* $n$ *, le caractère de Walsh* $w_x$ *est pseudo-aléatoire ( et il n'est pas speudo-aléatoire au sens de Bass* [ 3 ] *i.e. , la fonction de corrélation de* $w_x$ *ne converge pas vers* 0 *à l'infini ).*

Dans toute la suite, nous ne nous intéresserons qu'aux suites q-multiplicatives $g$ de module 1 ; elles forment dans leur ensemble un groupe multiplicatif noté $M(q)$ et l'on a pour de telles $g$ :

$$(14) \qquad \limsup_{N:\infty} N^{-1} \left| \sum_{n<N} g(n) \right| = \prod_{r=0}^{\infty} q^{-1} \left| \sum_{a<q} g(aq^r) \right| .$$

Lorsque $g$ possède une valeur moyenne $m(g)$ sur $\mathbb{N}$ , H. DELANGE montre [37]

$$(15) \qquad m(g) = \prod_{r=0}^{\infty} m_r \qquad \text{avec} \qquad m_r = q^{-1} \sum_{a<q} g(aq^r)$$

et précise :

PROPOSITION 2.

*(i)* $m(g) = 0$ *si et seulement si la série* $\sum_{r\geq 0} (1 - \mathcal{R}e\, m_r)$ *diverge ou il existe* $r \in \mathbb{N}$ *tel que* $m_r = 0$ .

*(ii)* $m(g) \neq 0$ *si et seulement si la série* $\sum_{r\geq 0} (1 - m_r)$ *converge et pour tout* $r \in \mathbb{N}$ , $m_r \neq 0$ .

II.2. *Etude spectrale.* Les suites q-multiplicatives ( de module 1 ) appartiennent à l'ensemble de Wiener. C'est une conséquence du *lemme de Bésineau*, à savoir :

LEMME 1 [6 ] . *Soit* $f$ *q-additive réelle et* $t \in \mathbb{N}$. *Il existe une partition de* $\mathbb{N}$ *en progressions arithmétiques* $P_m$ , $m \in \mathbb{N}^*$ *( de la forme* $q^{r_m}\mathbb{N} + b_m$ *), telle que la suite* $n \to f(n+t) - f(n)$ *soit constante ( égale à* $l_m$ *) sur* $P_m$ .

Ce lemme donne pour valeurs de la corrélation $\gamma$ de $g = e(f)$ :

$$(16) \qquad \gamma(t) = \sum_{m\geq 1} d(P_m)e(l_m)$$

où $d(P_m)$ est la densité de $P_m$ .

Le cas particulier des suite $n \to e(\alpha s_q(n))$ conduit J. BESINEAU au résultat suivant :

PROPOSITION 3. $e(\alpha s_q(.))$ *est pseudo-aléatoire si* $\alpha(q-1) \notin \mathbb{Z}$ *, périodique dans le cas contraire.*

L'étude générale du spectre des suites q-multiplicatives se développe intensivement au fil des années 70 [ 9 ,10,11,14,18,30,32,62,68] . Résumons :

THEOREME 2. *Soit* $g$ $q$-*multiplicative de module* 1 , $g_\alpha(.) = g(.)e(\alpha(.))$ *et soit* $D$ *le groupe des nombres rationnels* $x$ *tels que* $q^k x \in \mathbb{Z}$ *pour un entier* $k > 0$.

*(i)* $Sp(g) \subset \{ \alpha \in \mathbb{R} \ ; \ \sum_{r=0}^{\infty} [ \sum_{a<q} (1 - \mathcal{R}e(g_\alpha(aq^r)) ] < +\infty \}$ . *De plus si* $\alpha \in Sp(g)$ , *la mesure spectrale* $\sigma_g$ *est atomique , portée par* $\alpha + D$ .

*(ii) Si* $Sp(g)$ *est vide ,* $g$ *est pseudo-aléatoire.*

*(iii)* $g$ *est presque périodique*-$B_1$ *si et seulement si il existe* $\beta \in \mathbb{R}$ *tel que la série*

$$\sum_{r=0}^{\infty} [ \sum_{a<q} (1 - g_\beta(aq^r)) ] \qquad \textit{converge} .$$

Lorsque $Sp(g) \neq \emptyset$ ( et $g \in M(q)$) la suite $g$ est moyenne-presque périodique [5 ] en ce sens que pout tout $\varepsilon > 0$ , il existe une partie à lacunes bornées $E_\varepsilon$ de $\mathbb{N}$ telle que pour tout $t$ dans $E_\varepsilon$ on ait

$$\limsup_{N:\infty} N^{-1} \sum_{n<N} | g(n+t) - g(n) | < \varepsilon .$$

Lorsque $Sp(g) = \emptyset$ , le caractère pseudo-aléatoire de $g$ repose sur l'égalité (14) et l'inégalité (3) qui est en fait une égalité dans le cas des suites q-multiplicatives de module 1. Notons d'autre part que si $g = e(f)$ où $f$ est q-additive réelle on a aussi la caractérisation suivante [18] :

*(ii') Pour que* $g$ *(* $\in M(q)$ *) soit pseudo-aléatoire, il faut et il suffit que que la série* $\sum_{r \geq 0} [ \sum_{2 \leq a \leq q} \| f(aq^r) - af(q^r) \|^2 ]$ *diverge , avec pour* $x \in \mathbb{R}$*:* $\| x \| := \mathrm{Min} \{ \ | x - n | \ ; n \in \mathbb{Z} \}$.

La nécessité de *(ii')* résulte de la caractérisation par *(i)* du spectre vide. La suffisance de la condition repose sur des relations linéaires entre les corrélations des suites $n \to g(q^r n)$ qui se traduisent en fait par la propriété de convolution suivante découverte par M. QUEFFELEC [68] :

$$(17) \qquad \sigma_g = (q^{-N} | \sum_{n<q^N} g(n)e(-n(.))|^2)( \omega(q^{-N}) * \sigma_g ) ,$$

où $\omega(q^{-N})$ est la mesure de Haar du sous-groupe de $\mathbb{T}$ engendré par $q^{-N}$ .
Dans une série d'articles [12,18,19,20] J. COQUET *éprouve* les méthodes utilisées pour obtenir *(ii)* et *(ii')* dans plusieurs directions, soit en regardant les produits de suites q-multiplicatives et de leurs translatées par le shift soit en étudiant des suites de la forme

$$(18) \qquad n \to e( \sum_{k=0}^{\infty} a_k [n(s_k)^{-1}]) \qquad ( [.] := \text{partie entière} ),$$

lorsque par exemple :

(a) $(s_k)$ est une suite strictement croissante d'entiers tels que chaque $s_k$ divise $s_{k+1}$.

(b) $(s_k)$ est une suite strictement croissante d'entiers deux à deux premiers entre eux telle que la série $\Sigma(s_k^{-1})$ converge.

(c) $s_k = \tau^k$ ( $k \in \mathbb{N}$ ) et $\tau$ nombre réel transcendant $> 1$ .

Il obtient :

PROPOSITION 4. *Sous l'une des hypothèses* (a) , (b) , (c) *la suite* (18) *est pseudo-aléatoire si et seulement si la série* $\Sigma \| a_k \|^2$ *diverge.*

II.3. *Généralisation à des bases variables.* Soit $q:=(q_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'entiers, telle que $q_0 = 1$ et $q_n \geqslant 2$ pour $n \geqslant 1$ . Posons $p_r = q_0 \ldots q_r$ . Disons avec J. COQUET [ 9 ] qu'une suite complexe $z$ est $q$-multiplicative si pour tous entiers $a$ , $b$ , $r$ , $a \geqslant 0$ , $r \geqslant 0$ , $0 \leqslant b < p_r$ :

$$(11') \qquad z(ap_r + b) = z(ap_r)z(b) .$$

Soit $k$ un entier $\geqslant 0$ ; on définie les suites $q^{(k)}$ et $p^{(k)}$ par $q_0^{(k)} = 1$ $q_n^{(k)} = q_{n+k}$ , $p_n^{(k)} = q_0^{(k)} \ldots q_n^{(k)}$ $(n \geqslant 0)$ et la suite complexe $z^{(k)}$ par $z^{(k)}(n) = z(p_k n)$. Cette suite est $q^{(k)}$-multiplicative.

Nous supposons maintemant $z$ de module constant égal à 1 et pour tout $m = (m_0,\ldots,m_s)$ dans $\mathbb{Z}^{s+1}$, on posera

$$(19) \qquad \chi_m := z^{m_0}(Tz)^{m_1}\ldots(T^s z)^{m_s} \qquad \text{et} \qquad |m| := m_0+\ldots+m_1 ,$$

où $T$ est le shift, enfin :

$$(20) \qquad P_{m,N}(\cdot) := N^{-1} \, | \sum_{n<N} \chi_m(n)e(-n(\cdot)) \, |^2 .$$

Les résultats qui suivent s'inspirent de [30,58,68]. Les suites $\chi_m$ ( $m \in \mathbb{Z}^{s+1}$) appartiennent à $W$ . En fait, on a le

THEOREME 3. *Si* $|m| = 0$ , $\chi_m$ *est limite presque périodique.*

*Démonstration.* Définissons la suite $\chi_m^{(k)} : j \to [z(p_k[jp_k^{-1}])]^{|m|} \chi_m^*(j)$ où $\chi_m^*$ est la suite périodique de période $p_k$ définie par $\chi_m^*(j) = \chi_m(j)$ pour $j = 0, 1,\ldots,p_k-1$ . Alors $\chi_m = \chi_m^{(k)}$ sauf sur un ensemble d'entiers de densité $\leqslant sp_k^{-1}$, d'où le théorème dans le cas $|m| = 0$ .

THEOREME 4. *Soit* $\Lambda_m$ *la mesure spectrale de* $\chi_m$ *( cf.* (19) *)* .

*(i)* $\Lambda_m$ *est limite faible de la suite des mesures* $N \to P_{m,N}(t)dt$ *sur* $\mathbb{T}$ .

*(ii)* $\Lambda_m$ *est limite forte ( au sens de la variation totale ) de la suite des mesures*

$$k \to (P_{m,p_k})(\omega(p_k^{-1}) * \Lambda_{|m|}) \qquad ,$$

*où* $\omega(p_k^{-1})$ *est la mesure de Haar du groupe engendré par* $p_k^{-1}$ *dans* $\mathbb{T}$ .

*(iii) Pour tout* $x$ *( modulo* 1 *) on a :*

$$\Lambda_m(\{x\})^{1/2} = \limsup_{N:\infty} N^{-1} \mid \sum_{n<N} \chi_m(n)e(-nx) \mid$$

$$= \lim_{r:\infty} p_r^{-1} \mid \sum_{a<p_r} \chi_m(a)e(-ax) \mid \quad .$$

*Démonstration. (i)* est classique ( cf. §I.2 ) et donne $\omega(p_k^{-1})*\Lambda_{|m|}$ comme limite faible de la suite des mesures

$$r \to \frac{1}{p_r^{(k)}} \mid \sum_{a<p_r^{(k)}} ( z^{(k)}(a) )^{|m|} e(-ap_k t) \mid^2 dt \ .$$

*(ii)* s'obtient en remarquant que $\chi_m^{(k)}$ définie dans la démonstration précédente converge vers $\chi_m$ dans l'espace $B$ du §1.2 ( cf. [58, théorème 7 ]).
La propriété *(iii)* est connue pour $\chi_{|m|}( = z^{|m|} )$ , le cas général résulte alors de *(ii)* et d'un simple calcul.

*REMARQUE 1.* Pour toute probabilité borélienne $\Lambda$ sur $\mathbb{T}$ , un calcul direct des coefficients de Fourier donne :

$$\lim_{k:\infty} P_{m,p_k}( \omega(p_k^{-1})*\Lambda)^\wedge(h) = \Lambda^\wedge(0)(\Lambda_m)^\wedge(h) \ , \ ( h \in \mathbb{Z} ) \ ,$$

de sorte que la partie *(ii)* du théorème 4 caractérise ( à un facteur multiplicatif près ) la mesure $\Lambda_m$ . On en déduit alors comme dans [68] des propriétés de pureté et de D-ergodicité de $\Lambda_m$ où $D$ est le groupe engendré modulo 1 par $\{p_k^{-1} ; k\geqslant 0\}$.
*REMARQUE 2.* Le type spectral de $\mathbb{K}(z,\mu)$ ne dépend pas du choix de $\mu$ dans $I(z^*)$.

Rappelons que le critère *(ii')* faisant suite au théorème 2 se généralise :

THEOREME 5 [30]. *Supposons la base variable* $q:=(q_n)_n$ *BORNEE, alors la mesure spectrale* $\Lambda_{(1)}$ ( $= \sigma_z$ ) *de* $z$ *est atomique ou diffuse singulière. Elle est diffuse si et seulement si, la série*

$$\sum_{k=0}^{\infty} [ \sum_{2\leqslant a\leqslant q_{k+1}} \mid z(ap_k) - (z(p_k))^a \mid^2 ]$$

*diverge.*

II.4. *Flots associés à la somme des chiffres.* Soit encore $q$ une suite d'entiers $q_k$ avec $q_0 = 1$ et $q_k \geqslant 2$ si $k \geqslant 1$. Tout entier $n \geqslant 0$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$n = \sum_{r\geqslant 0} e_r(n)p_r \ , \ ( p_r := q_0q_1\dots q_r \text{ et } e_r(n) \in \{0,1,\dots,q_{r+1}-1\}).$$

La somme des chiffres *en base* $q$, définie par $s_q(.) := \sum_{r\geqslant 0} e_r(.)$ est q-additive. Pour tout nombre réel $\alpha$, la suite

$$(21) \qquad v_\alpha : n \to e(\alpha s_q(n)) \ ,$$

est *complètement* multiplicative, c'est-à-dire vérifie

$$(22) \qquad v_\alpha(bp_r) = (v_\alpha(p_r))^b$$

pour tous entiers $r, b$, $r \geqslant 0$, $0 \leqslant b < q_{r+1}$. Dans la suite $\mathbb{U}$ désigne le groupe des nombres complexes de module 1 et $h$ sa mesure de Haar. Pour tout $\zeta \in \mathbb{U}$, on note $a_\zeta$ l'automorphisme du shift $(T;\mathbb{U}^{\mathbb{N}})$ défini par

$$a_\zeta(x_0,x_1,x_2,\dots) := (\zeta x_0,\zeta x_1,\zeta x_2,\dots) \ .$$

<u>THEOREME</u> 6. *La suite* $q$ *est supposée bornée et* $\alpha$ *irrationnel. Alors :*

*(i) La suite* $v_\alpha$ *est récurrente, le flot* $\mathbb{K}(v_\alpha)$ *est minimal et uniquement ergodique, d'unique mesure invariante, notée* $\mu_\alpha$, *telle que* $h = \mu_\alpha|_1$ *(= projection de* $\mu_\alpha$ *sur le premier facteur de* $\mathbb{U}^{\mathbb{N}}$*).*

*(ii) Pour tout* $\zeta \in \mathbb{U}$, *la restriction de* $a_\zeta$ *à l'orbite fermée* $K_{v_\alpha}$ *de* $v_\alpha$ *définit un automorphisme du flot* $\mathbb{K}(v_\alpha)$ *et du flot mesuré* $\mathbb{K}(v_\alpha,\mu_\alpha)$.

*Démonstration.*

*(i)* D'après les théorèmes 4 et 5, pour tout $m \in \mathbb{Z}^*$ et tout $r \geqslant 0$, les suites $q^{(r)}$-multiplicatives

$$n \to (v_\alpha(p_r n))^m$$

sont pseudo-aléatoires. Soit $\varepsilon > 0$ et $\ell$ un entier $\geqslant 0$. Choisissons $r$ tel que $\ell < p_r$. Il existe $K \geqslant 1$ tel que l'ensemble $\{v_\alpha(0), v_\alpha(p_r), \dots, v_\alpha(p_r(K-1))\}$ soit $\varepsilon$-dense dans $\mathbb{U}$. Montrons que l'ensemble

$$J(\ell) := \{ n \in \mathbb{N} \ ; \ \mathrm{Max}_{0\leqslant a<\ell} \mid v_\alpha(a) - v_\alpha(a+n) \mid \ < \ \varepsilon \ \}$$

est à lacunes bornées. En effet, choisissons un entier $k$ tel que $p_k \geqslant Kp_r$. Pour tout $t \in \mathbb{N}$, d'après (11') et les choix de $K$ et $r$, il existe $\rho(t) \in \{0,\dots,K-1\}$ tel que $|v_\alpha(p_r\rho(t) + p_k t) - 1| < \varepsilon$ de sorte que $p_r\rho(t) + p_k t \in J(\ell)$.

En d'autres termes, la différence entre deux entiers consécutifs de $J(\ell)$ est au plus égale à $2p_k$ .
Le point $v_\alpha$ est donc uniformément récurrent pour le shift $(T;\mathbb{U}^{\mathbb{N}})$ , par suite $\mathbb{K}(v_\alpha)$ est minimal ( cf. [45] ). Pour établir l'unique ergodicité, il suffit de remarquer que pour tout $m = (m_0,\dots,m_s)$ dans $\mathbb{Z}^{s+1}$ tel que $|m| \neq 0$ , la mesure spectrale de $n \to (v_\alpha(n))^{m_0}\dots(v_\alpha(n+s))^{m_s}$ est diffuse puis d'appliquer le théorème 8 de [58].

*(ii)* Soient $x \in K_{v_\alpha}$ , $\zeta \in \mathbb{U}$ et $(n_k)$ , $(m_k)$ , $(r_k)$ des suites strictement croissantes d'entiers, telles que

$$\lim_{k:\infty} T^{n_k}(v_\alpha) = x \quad , \quad n_k + k < p_{m_k} \ ( k \in \mathbb{N}) \text{ et } \lim_{k:\infty} v_\alpha(r_k p_{m_k}) = \zeta .$$

Soit $j \in \mathbb{N}$ . Pour $k \geq j$ , on a $v_\alpha(n_k + j + r_k\, p_{m_k}) = v_\alpha(n_k + j)v_\alpha(r_k p_{m_k})$ , d'où $\lim_{k:\infty} T^{n_k+r_k p_{m_k}}(v_\alpha) = a_\zeta(x) \in K_{v_\alpha}$ . Ainsi $a_\zeta(K_{v_\alpha}) \subset K_{v_\alpha}$ et d'autre part $a_\zeta$ commute avec le shift. Le caractère minimal de $\mathbb{K}(v_\alpha)$ assure $a_\zeta(K_{v_\alpha}) = K_{v_\alpha}$ .

Il reste à montrer l'invariance de $\mu_\alpha$ par $a_\zeta$ . Pour tout $m = (m_0,m_1,\dots,m_s)$ de $\mathbb{Z}^{s+1}$ , notons $\psi_m$ le caractère sur $\mathbb{U}^{\mathbb{N}}$ donné par

$$\psi_m(x_0,x_1,x_2,\dots) = (x_0)^{m_0}\dots(x_s)^{m_s} \quad , \ ( \psi_{|m|}(x) = (x_0)^{|m|}).$$

Alors

$$\mu_\alpha(\psi_m \circ a_\zeta) = \zeta^{|m|}\mu_\alpha(\psi_m)$$

et $\mu_\alpha(\psi_m) = 0$ si $|m| \neq 0$ . Par combinaisons linéaire et passage à la limite uniforme, on obtient $\mu_\alpha(f \circ a_\zeta) = \mu_\alpha(f)$ pour toute application $f:K_{v_\alpha} \to \mathbb{C}$ continue.

Introduisons les applications $\Delta : \mathbb{U}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{U}^{\mathbb{N}}$ et $\Delta_1 : \mathbb{U}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{U}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{U}$ définies respectivement par

$$(23) \qquad \Delta(x) = (x_0^{-1}x_1,\ x_1^{-1}x_2,\dots) \quad \text{et} \quad \Delta_1(x) = (\Delta(x),x_0)$$

pour tout $x = (x_0,x_1,x_2,\dots)$ dans $\mathbb{U}^{\mathbb{N}}$ . Il est clair que le shift $(T;\mathbb{U}^{\mathbb{N}})$ et le flot *croisé* $(T;\mathbb{U}^{\mathbb{N}})\square\mathbb{U} = (T_1;\mathbb{U}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{U})$ défini par

$$(24) \qquad T_1(x,\zeta) = (Tx,x_0\zeta) \quad ,$$

sont conjugués par $\Delta_1$ . D'autre part, la restriction de $\Delta$ sur $K_{v_\alpha}$ est un morphisme du flot $\mathbb{K}(v_\alpha)$ sur le flot ( minimal ) $\mathbb{K}(\Delta v_\alpha)$ et pour

$\xi \in K_{\Delta v_\alpha}$ , $x \in K_{v_\alpha}$ tel que $\Delta x = \xi$ , on a , d'après le théorème 6*(ii)* ,

$$\Delta^{-1}(\xi) = \{ a_\zeta(x) \ ; \ \zeta \in \mathbb{U} \} .$$

La restriction de $\Delta_1$ à $K_{v_\alpha}$ ( notée encore $\Delta_1$ ) réalise alors un isomorphisme de $\mathbb{K}(v_\alpha)$ sur le flot

$$\mathbb{K}(\Delta v_\alpha)\square\mathbb{U} = (T_1 ; K_{\Delta v_\alpha} \times \mathbb{U}) .$$

$\mathbb{K}(\Delta v_\alpha)$ est uniquement ergodique, de mesure invariante $\Delta^*\mu_\alpha$ , projection de $\mu_\alpha$ par $\Delta$ . L'invariance de $\mu_\alpha$ par $a_\zeta$ ( $\zeta \in \mathbb{U}$ ) et l'égalité $\mu_{|1} = h$ montre que l'image $\Delta_1{}^*\mu_\alpha$ de $\mu_\alpha$ par $\Delta_1$ est égale à $\Delta^*\mu_\alpha \otimes h$ d'où

THEOREME 6'.

*(iii)* $\mathbb{K}(v_\alpha,\mu_\alpha)$ *est conjugué par* $\Delta_1$ *au flot croisé*

$$\mathbb{K}( \Delta v_\alpha, \Delta^*\mu_\alpha)\square\mathbb{U} = (T_1 ; K_{\Delta v_\alpha} \times \mathbb{U} , \Delta^*\mu \otimes h) .$$

*REMARQUE 3.* $\mathbb{K}(\Delta v_\alpha,\Delta^*\mu_\alpha)$ est de type spectral atomique porté par un sous-groupe D' du groupe D engendré par $\{ p_k^{-1} \ ; \ k \geq 0 \}$ . D'après le théorème de Halmos-von Neumann, $\mathbb{K}(\Delta v_\alpha,\Delta^*\mu_\alpha)$ est conjugué à la translation $t \to t+1$ sur le dual $(D')^\wedge$ de D' . En fait, il est possible de montrer que D'= D de sorte que $\mathbb{K}(v_\alpha,\mu_\alpha)$ est une extension en groupe selon $\mathbb{U}$ de la translation $t \to t+1$ sur le groupe des entiers q-adiques $\mathbb{Z}_q$ ( $= \hat{D}$ ).

*REMARQUE 4.* L'analyse des démonstrations précédentes montre que l'isomorphisme en *(iii)* résulte des deux propriétés suivantes :

(a) $v_\alpha$ est équirépartie dans $\mathbb{U}$ ;
(b) $v_\alpha$ et $(\Delta v_\alpha)^*$ sont statistiquement indépendantes ( cf.[70],Déf. 4.1).

En d'autres termes la suite $v_\alpha$ est une $\Delta_{\mathbb{U}}$-extension de $\Delta v_\alpha$ au sens de [31]. Finalement on a:

THEOREME 7. *Soit* z *une suite* q-*multiplicative en base* q *bornée et telle que les suites* $z^m$ *soient pseudo-aléatoires pour tout* $m \in \mathbb{Z}^*$ . *Alors le flot associé à* z *est minimal, uniquement ergodique de mesure invariante* $\mu$ *telle que* $\mathbb{K}(z,\mu)$ *soit conjugué ( par* $\Delta_1$ (23) *) au flot croisé* $(T_1 ; K_{\Delta z} \times \mathbb{U} , \Delta^*\mu \otimes h)$*, où* $T_1$ *est définie par* (24). *Le flot dérivé* $\mathbb{K}(\Delta z,\Delta^*\mu)$ *est conjugué à une translation sur un groupe compact, image du groupe des entiers* q-*adiques.*

Il est possible de comparer les flots précédents entre eux. Ainsi le résultat de T. KAMAE [50] peut encore s'écrire sous la forme suivante

PROPOSITION 5. *Soient* $g$ , $g'$ *des entiers* $\geq 2$ *premiers entre eux. Pour tous* $\alpha$ , $\alpha'$ *irrationnels, les flots ( uniquement ergodiques )* $\mathbb{K}(e(\alpha s_g(.)),\mu_\alpha)$ ; $\mathbb{K}(e(\alpha' s_{g'}(.)),\mu_{\alpha'})$ *sont de types spectaux mutuellement singuliers.*

Il en résulte en particulier que le flot produit $\mathbb{K}(e(\alpha s_g),\mu_\alpha) \times \mathbb{K}(e(\alpha' s_{g'}),\mu_{\alpha'})$ est lui aussi uniquement ergodique, isomorphe au flot $\mathbb{K}((e(\alpha s_g),e(\alpha' s_{g'})),\mu_\alpha \otimes \mu_{\alpha'})$. En fait, on a le cas général suivant :

THEOREME 8. *Soient* $z$ , $z'$ *des suites respectivement* $q$- *et* $q'$-*multiplicatives de module* 1 *et satisfaisant aux hypothèses correspondantes du théorème 7. Soit* $(z,z')$ *la suite* $n \to (z(n),z'(n))$ *et supposons les entiers* $q_n$ ( $n \geq 1$ ) *premiers aux entiers* $q'_{n'}$ ( $n' \geq 1$ ). *Alors le flot* $\mathbb{K}(z,\mu) \times \mathbb{K}(z',\mu')$ *est minimal, uniquement ergodique, isomorphe au flot* $\mathbb{K}((z,z'),\mu\otimes\mu')$.

*Démonstration.* Les composantes discrètes des types spectaux des flots $\mathbb{K}(z,\mu)$ et $\mathbb{K}(z',\mu')$ sont mutuellement singulières puisque les translations de $\mathbb{Z}_q$ et $\mathbb{Z}_{q'}$ sont de types spectraux mutuellement singuliers. Il en résulte que $\mathbb{K}(z,\mu) \times \mathbb{K}(z',\mu')$ est ergodique et d'après [31] , les flots associés aux suites $z$ et $z'$ sont disjoints au sens de H. FURSTENBERG [44] c'est-à-dire que $\mu\otimes\mu'$ est la seule mesure invariante du flot $\mathbb{K}(z) \times \mathbb{K}(z')$ dont les projections sur le premier et second facteur soient respectivement $\mu$ et $\mu'$ .

On peut naturellement espérer une indépendance des types spectraux des flots du théorème 8 , comme dans le cas de la proposition 5 , en faisant usage du théorème 1 par exemple.

## III. SUITES DE COQUET.

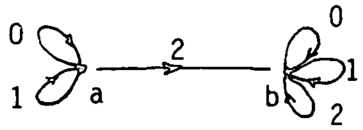
III.1. *Définition* . $g$ désigne un entier $\geq 2$ , $\Delta$ une partie de $\{0,1,\dots,g-1\}$ de cardinal $\delta$ . On suppose $2 \leq \delta < g$ . Soit $\nu(n) = [\![\mathrm{Log}\, n / \mathrm{Log}\, g]\!]$ et

$$n = \sum_{r=0}^{\nu(n)} e_r(n) g^r$$

le développement $g$-adique de $n$ . L'ensemble

$$(25) \qquad \mathcal{S}(g;\Delta) = \{ n \in \mathbb{N} \ ; \ \forall r \in \{0,1,\dots,\nu(n)\} , e_r(n) \in \Delta \}$$

est le support d'une suite strictement croissante d'entiers $(c_n)_n$ appelée *suite de COQUET* ( en base $g$ de chiffres dans $\Delta$ ). Une telle suite est reconnaissable par un automate fini ( cf.[42]) . Par exemple, la suite 0, 1 , 3 , 4 , 9 , 10 ,... des entiers dont l'écriture en base trois ne contient pas le chiffre 2 est reconnaissable par l' automate à lecture indirecte ( ou directe ) de graphe




où a est l'état initial et de reconnaissabilité.

III.2. Soit $d(0) < d(1) < \ldots < d(\delta-1)$ la numérotation croissante de $\Delta$ .
*Si* $0 \in \Delta$ , la suite $(c_n)$ est $\delta$-additive. Plus précisément, on a

$$c_n = \sum_{r \geq 0} d(\varepsilon_r(n)) g^r$$

où $n = \sum_{r \geq 0} \varepsilon_r(n) \delta^r$ est le développement $\delta$-adique de $n$ .

*Si* $0 \notin \Delta$ , introduisons avec Jean Coquet le développement $\delta$-quasi-adique de $n$ . Soit $\rho := \rho(n)$ l'entier défini par

$$1 + \delta + \ldots + \delta^{\rho} \leq n < 1 + \delta + \ldots + \delta^{\rho+1} .$$

Il existe alors une suite finie unique $(\varepsilon_0^*(n), \ldots, \varepsilon_\rho^*(n))$ tell

$$(26) \qquad n = \sum_{r=0}^{\rho} \varepsilon_r^*(n) \delta^r \quad \text{et} \quad \varepsilon_r^*(n) \in \{1, \ldots, \delta\} \text{ pour tout } 0 \leq r \leq \rho.$$

Une suite complexe $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ est dite $\delta$-*quasi-additive* s'il existe une suite d'applications $( \sigma_j : \{1, \ldots, \delta\} \to \mathbb{C} )_{j \geq 0}$ telle que

$$(27) \qquad f(n) = \sum_{0 \leq r \leq \rho(n)} \sigma_r(\varepsilon_r^*(n)) \qquad , \quad ( n \in \mathbb{N}^* ) .$$

La suite $(c_n)_{n \geq 1}$ de Coquet est dans ce cas $\delta$-quasi-additive , plus précisément

$$c_n = \sum_{0 \leq r \leq \rho(n)} d(\varepsilon_r^*(n)) g^r \qquad , \quad ( n \in \mathbb{N}^* ) .$$

La notion de suite $\delta$-*quasi-multiplicative* se définit de manière analogue. Ces suites ont un comportement proche des suites $\delta$-additives et multiplicatives. En particulier [17].

PROPOSITION 6. *Soit* $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ *une suite réelle* $\delta$-*quasi-additive donnée par* (27).

*(i) Soit* $t \in \mathbb{N}^*$ . *Il existe une partition* $(P_m)_{m \geq 1}$ *de* $\mathbb{N}^*$ *en progressions arithmétiques ( de raisons* $\delta^{b_m}$ *) et une suite* $(\lambda_m)_{m \geq 1}$ *de nombres réels tels que* $k \to f(k+t) - f(k)$ *soit constante, égale à* $\lambda_m$, *sur* $P_m$ .

*(ii)* $e(f)$ *possède une corrélation ( donnée par* (16) *).*

*(iii) Pour tout* $N \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\left| \sum_{1 \leq n \leq N} e(f(n)) \right| \leq \sum_{1 \leq r \leq \rho(N)} \varepsilon_r^*(N)\delta^r |\mu_r| \quad ,$$

*avec*

$$\mu_r = \prod_{j=0}^{r-1} \left( \delta^{-1} \sum_{1 \leq a \leq \delta} e(\sigma_j(a)) \right)$$

III.3. *Sous-suites de suites polynomiales.* Un polynôme réel $P$ tel que $P - P(0)$ ait un coefficient irrationnel est dit *polynôme de Weyl* . On a

<u>THEOREME</u> 9[13,17] *Pour tout polynôme de Weyl* $P$ *et toute suite de Coquet* $(c_n)_n$ *la suite extraite* $n \to P(c_n)$ *est équirépartie modulo* 1 .

La démonstration se fait par récurrence sur l'hypothèse

$(H_l)$ Pour tout polynôme de Weyl $P = a_o + a_1 x + \ldots + a_s x^s$ tel que $l = \text{Max}\{ i \; ; \; a_i \notin \mathbb{Q} \}$ , la suite $n \to e(P(c_n))$ est de moyenne nulle sur toute progression arithmétique de raison $\delta^b$ ( $b \in \mathbb{N}$ ).

L'hypothèse $(H_l)$ résulte du théorème 5 dans le cas où $0 \in \Delta$ et dans le cas contraire, elle s'obtient grâce à la

<u>PROPOSITION 7</u> [17]. *Soit* $f$ $\delta$*-quasi-additive donnée par* (27). *Si* $\sum_{r \geq 0} \sum_{1 \leq a \leq \delta} \|\sigma_r(a)\|^2 = +\infty$ *, alors* $e(f)$ *est de moyenne nulle sur toute progression arithmétique de raison* $\delta^b$ ( $b \in \mathbb{N}$ ).

L'implication de récurrence ( $(H_l) \Rightarrow (H_{l+1})$ , $l \in \mathbb{N}^*$) dérive de la proposition 6*(i)*.

III.4. *Généralisation.* Soit $\Omega$ une partie de $\{0,1,\ldots,g-1\}^2$ telle que :

$(C_1)$ $(0,0) \in \Omega$ et $2 \leq \text{card}\,\Omega < g^2$ .
$(C_2)$ Le graphe associé à $\Omega$ est fortement connexe ( cf. [4 ]).

On pose

$$\mathcal{C}(g;\Omega) = \{ n \in \mathbb{N} \; ; \; \forall\, r \in \mathbb{N} \; , \; (e_r(n), e_{r+1}(n)) \in \Omega \}$$

et on note $(c_n)_n$ la suite ( de Coquet ) strictement croissante de support $\mathcal{C}(g;\Omega)$. Lorsque $0 \in \Delta$ et $\Omega = \Delta^2$ , on retrouve un des cas déjà envisagés. On a [24]:

*Le théorème 9 reste vrai pour les suites strictement croissantes de support* $\mathcal{C}(g;\Omega)$ *lorsque* $\Omega$ *satisfait aux hypothèses* $(C_1)$ *et* $(C_2)$ .

Remarquons que les suites de Coquet sont de croissance polynômiale et reconnaissables par automates finis, de sorte que l'hypothèse $(H_1)$ est vérifiée avec cette fois-ci toutes les progressions arithmétiques, grâce au théorème de C. MAUDUIT [60]:

THEOREME 10. *Soit* $(u_n)$ *une suite strictement croissante d'entiers, reconnaissable par automate fini. Alors* $(au_n)_n$ *est équirépartie modulo* 1 *pour tout nombre* a *irrationnel si et seulement si,*

$$\limsup_{N:\infty} (\operatorname{Log} N)^{-1} \operatorname{Log}(\operatorname{card}\{n \in \mathbb{N} \ ; \ u_n < N\}) > 0 \ .$$

Pour les suites u de ce théorème la question reste ouverte de savoir si pour les polynômes de Weyl P , les suites extraites $P\circ u$ sont encore équiréparties modulo1.

## IV. ECHELLE DE NUMERATION.

IV.1. *Définitions.* Soit t une suite strictement croissante d'entiers naturels , telle que $t_0 = 1$ . On sait que tout entier $n \geqslant 0$ s'écrit de manière unique

$$(28) \qquad n = \sum_{r\geqslant 0} \varepsilon_r(n)t_r$$

où les $\varepsilon_r(n)$ sont des entiers $\geqslant 0$ déterminés par les conditions

$$(29) \qquad \forall\, K \in \mathbb{N}^* \quad ; \ \sum_{k<K} \varepsilon_k(n)t_k < t_K \ .$$

Une suite $F : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ est dite *additive dans l'échelle* $(t_r)_r$ si elle vérifie

$$(30) \qquad F(0) = 0 \quad \text{et} \quad F(n) = \sum_{r\geqslant 0} F(\varepsilon_r(n)t_r)$$

quel que soit $n \in \mathbb{N}$ . En particulier, la somme des chiffres dans l'échelle $(t_r)_r$ définie par

$$(31) \qquad \Sigma_t(\cdot) := \sum_{r\geqslant 0} \varepsilon_r(\cdot)$$

est additive dans l'échelle $(t_r)_r$ .

Une suite $G : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ est dite *multiplicative dans l'échelle* $(t_r)_r$ si

$$(30') \qquad G(0) = 1 \quad \text{et} \quad G(\cdot) = \prod_{r\geqslant 0} G(\varepsilon_r(\cdot)t_r) \ .$$

Quel que soit l'échelle, on a :

PROPOSITION 8 . *Soit* G *une suite de module* $\leqslant 1$ *multiplicative dans l'échelle* t *et posons* $m_k(G) = t_k^{-1} \sum_{n<t_k} G(n)$ . *Alors*

$$\limsup_{N:\infty} N^{-1} \left| \sum_{n<N} G(n) \right| = \limsup_{k:\infty} |m_k(G)| \ .$$

*Démonstration* ( tirée de [21] ). Posons $N = \varepsilon_0(N) + \varepsilon_1(N)t_1 + \ldots + \varepsilon_r(N)t_r$ , avec $\varepsilon_r(N) \neq 0$ et pour $0 \leqslant a \leqslant r$ , posons

$$N(a) = \varepsilon_a(N)t_a + \ldots + \varepsilon_r(N)t_r \quad .$$

Alors :

$$\sum_{n<N} G(n) = \sum_{n<N(r)} G(n) + \sum_{o\leqslant a<r} \sum_{N(a+1)\leqslant n<N(a)} G(n)$$

et $$\sum_{N(a+1)\leqslant n<N(a)} G(n) = G(N(a+1))t_a m_a(G) \sum_{o\leqslant b<\varepsilon_a(N)} G(bt_a) \quad ,$$

d'où $$\sum_{n<N} G(n) = \sum_{o\leqslant a<r} G(N(a+1))t_a m_a(G) \left( \sum_{o\leqslant b<\varepsilon_a(N)} G(bt_a) \right) ,$$

en posant $N(r+1) = 0$ . En particulier

$$(32) \qquad \left| \sum_{n<N} G(n) \right| \leqslant \sum_{a\geqslant o} \varepsilon_a(N)t_a |m_a(G)|$$

et la proposition en résulte.

PROPOSITION 9. *$\Sigma_t$ est bornée si et seulement si , $n \to t_{r+1} - t_r$ est bornée.*

*Démonstration.* Soit $n_o$ un entier tel que $\Sigma_t(n_o)$ soit le maximum de $\Sigma_t$ , alors pour $r$ assez grand, (29) donne $t_{r+1} < n_o + t_r$ . Réciproquement, supposons $t_{r+1} \leqslant t_r + C$ pour tout $r \in \mathbb{N}$ . Soit $k_o$ tel que $t_{k_o} > C$ , $n$ un entier $\geqslant 0$ et $k$ l'entier défini par $t_k \leqslant n < t_{k+1}$ . Si $n \geqslant t_{k_o}$ , on a aussi $t_{k+1} < 2t_k$ , d'où $\varepsilon_k(n) = 1$ et $\Sigma_t(n) = \Sigma_t(n-t_k) + 1 \leqslant \mathrm{Max}_{n<C}\, \Sigma_t(n) + 1$ .

IV.2.*Exemples.*

*1)* Lorsque $t_r$ divise $t_{r+1}$ pour tout $r \geqslant 0$ , on retrouve la notion de numération en base ( fixe ou variable ) du paragraphe II.

*2) $\alpha$-échelle* . Soit $[a_0;a_1,\ldots,a_k,\ldots]$ le développement en fraction continue du nombre irrationnel $\alpha$ . Les dénominateurs $t_k$ des réduites successives de $\alpha$ vérifient les relations de définition ( *$\alpha$-échelle* associée à $\alpha$ ):

$$(33) \qquad t_o = 1 \text{ , } t_1 = a_1 \text{ et } t_{k+2} = a_{k+2}t_{k+1} + t_k \quad ( k \in \mathbb{N} ).$$

Les conditions (29) deviennent :

1) $\varepsilon_0(n) \in \{0,\ldots,a_1-1\}$ ,
2) $\varepsilon_r(n) \in \{0,\ldots,a_{r+1}\}$ et ( $\varepsilon_r(n) = a_{r+1} \Rightarrow \varepsilon_{r-1}(n) = 0$ ) pour tout $r \in \mathbb{N}^*$.

Le développement (28) est appelé *$\alpha$-développement* de $n$ . La somme des chiffres correspondante ( ou $\alpha$-*somme* ) est notée $\Sigma_\alpha$ . Pour simplifier, on parle de suites $\alpha$-additives, $\alpha$-multiplicatives au lieu de suites additives, multiplicatives dans l'échelle associée à $\alpha$ définie par (33). Le $\alpha$-développement joue un rôle important dans l'étude de la discrépance de la suite $(n\alpha)_n$ modulo 1 [41,52,57]. Lorsque $\alpha$ est égal au nombre d'Or $\theta$ ( $= (1+\sqrt{5})/2$ ), la $\theta$-échelle associée est formée de la suite de Fibonacci $(F_n)_n$ définie par

$$F_o = F_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad F_{r+2} = F_{r+1} + F_r \quad ( r \in \mathbb{N} ) .$$

La condition (29) s'écrit simplement :

$$\varepsilon_r(n) \in \{0,1\} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_r(n)\varepsilon_{r+1}(n) = 0 , \; ( r \in \mathbb{N}).$$

IV.3. *Répartition et somme des chiffres*. En 1979 J. COQUET attire l'attention sur les comportements similaires de la somme des chiffres en base g et de celle obtenue dans l'échelle de Fibonacci et démontre :

THEOREME 11 [15,16]. *Soit* $g$ *un entier* $\geq 2$ , $\theta$ *le nombre d'Or,* $s_g$ *la somme des chiffres en base* $g$ *et soit* $\Sigma_\theta$ *la* $\theta$-*somme des chiffres. Alors pour toute suite réelle* $u$ *uniformément équirépartie modulo* 1 *( i.e. " well-distributed " dans* [56] *p. 40 ), les suites* $u\circ s_g$ *et* $u\circ\Sigma_\theta$ *sont aussi uniformément équirépartie modulo* 1

En particulier la suite $n \to x\Sigma_\theta(n)$ est uniformément équirépartie modulo 1 lorsque $x$ est irrationnel. Ce résultat n'est pas propre au nombre d'Or.

THEOREME 12 [21]. *Pour tous* $\alpha$ , $x$ *nombres irrationnels, les suites* $x\Sigma_\alpha(.)$ *sont uniformément équiréparties modulo* 1 .

La démonstration repose sur des propriétés de récurrence des sommes

$$(34) \qquad M_k = \sum_{n<t_k} G(n)$$

lorsque $G$ est une suite multiplicative dans une $\alpha$-échelle $(t_r)_r$ . Plus précisément :

$$(35) \qquad M_{k+2} = M_{k+1}\Big( \sum_{0\leq b<a_{k+2}} G(bt_{k+1}) \Big) + M_kG(a_{k+2}t_{k+1}) ,$$

(35') si $a_{k+2} = 1$ et $k \geq 1$ :

$$M_{k+2} = M_k\Big(1 + G(t_{k+1}) + \sum_{0<b<a_{k+1}} G(bt_k) \Big) + M_{k-1}G(a_{k+1}t_k) .$$

Récemment N. KOPECEK, R. TICHY et G. TURNWALD ont donné une forme qualitative aux théorèmes 11 et 12 par estimation des sommes de Weyl. Disons que le nombre irrationnel $x \in \mathbb{R}$ est de type d'approximation $< \tau$ si $\|hx\| \geq h^{-\tau}$ pour tout entier $h$ assez grand. Rappelons que la discrépance d'ordre $N$ d'une suite $(u_n)_n$ de nombres réels est définie ( cf. [56] ) par la quantité

$$D_N(u) := \operatorname{Sup}_I N^{-1} \left| \sum_{n<N} (1_I(\{u_n\}) - |I|) \right|$$

où le supremum porte sur les intervalles $I$ de longueur $|I|$ dans $[0,1[$ et où $\{.\}$ désigne la partie fractionnaire.

PROPOSITION 10 [55,73]. *Pour* $\sigma = s_g$ *ou* $\Sigma_\alpha$ *, et* $x$ *de type d'approximation* $< \tau$*, il existe une constante* $C = C(x,\sigma,\tau)$ *telle que*

$$D_N(x\sigma(n)) \leq C\,(\operatorname{Log} N)^{-\frac{1}{2\tau}} \quad .$$

Ces estimations sont en outre *optimales*.

IV.4. *Indépendance statistique.* Dans une série d'articles [23,33,34,35], J. COQUET, G. RHIN et Ph. TOFFIN explorent les propriétés d'indépendance statistique entre les suites $xs_g(.)$ et $y\Sigma_\alpha(.)$ modulo 1, qu'ils ramènent à l'étude de corrélations. Le lemme suivant est fondamental, il correspond au lemme 1 du §II dans le cas des suites q-additives en base $q = (1,q_1,q_2,\ldots)$ .

LEMME 2. *Soit* $f' : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *une suite réelle additive dans une* $\alpha$*-échelle et soit* $k \in \mathbb{N}^*$ *. Alors*

*(i) Il existe une partition de* $\mathbb{N}$ *en sous-ensemble* $Q_m$ *,* $m \in \mathbb{N}^*$ *, et une suite* $(l'_m)_{m\geq 1}$ *de nombres réels telles que* $n \to f'(k+n) - f'(n)$ *soit constante, égale à* $l'_m$ *, sur* $Q_m$ .

*(ii) Les ensembles* $Q_m$ *possèdent une densité asymptotique :*

$$d(Q_m) = \lim_{N:\infty} N^{-1} \operatorname{card}(Q_m \cap [0,N[)$$

*et sont statistiquement indépendants de toute progression arithmétique.*

*(iii) La suite* $\alpha$*-multiplicative* $G' = e(f')$ *possède une corrélation* $\gamma_{G'}$ *donnée par :*

$$\gamma_{G'}(k) = \sum_{m\geq 1} d(Q_m)e(l'_m) \quad .$$

*Démonstration.* La propriété *(i)* est obtenue dans le cas particulier où $f' = \Sigma_\alpha$

dans ([34], lemme 5), la démonstration du cas général est identique et conduit à *(ii)* ([34], lemme 8). La propriété *(iii)* en résulte aussitôt.

Le lemme 1 ( généralisé aux suites q-additives en bases variables) et le lemme 2 donnent conjointement :

<u>TEOREME</u> 12. *Soit* $f$ *une suite* q*-additive dans une base* $q = (1, q_1, q_2, \ldots)$ , $\alpha$ *un nombre réel irrationnel,* $f'$ *une suite* $\alpha$*-additive. Posons* $G = e(f)$ *et* $G' = e(f')$. *Alors* $G.G'$ *possède une corrélation* $\gamma_{G.G'}$ *donnée par :* $\gamma_{G.G'} = \gamma_G . \gamma_{G'}$.

Lorsqu'une suite q-multiplicative bornée en module est de moyenne nulle, elle l'est *uniformément en translation*. Cette propriété que nous allons expliciter a été aussi observée pour certaines suites $\alpha$-multiplicatives [23], elle est générale :

<u>THEOREME</u> 13. *Soit* $G$ *une suite* $\alpha$*-multiplicative de module* $\leqslant 1$ *et de moyenne nulle, alors*

$$\lim_{N:\infty} \left( \operatorname{Sup}_{s \geqslant 0} N^{-1} \left| \sum_{n<N} G(n+s) \right| \right) = 0 .$$

*Démonstration.* Soient $N \in \mathbb{N}^*$ , $s \in \mathbb{N}$ et soit $K$ l'entier tel que : $\varepsilon_K(s) < \varepsilon_K(s+N)$ et $\varepsilon_j(s) = \varepsilon_j(s+N)$ pour tout $j \geqslant K+1$ . Posons :

$$u = \sum_{j \leqslant K} \varepsilon_j(s) t_j \quad , \quad w = (1 + \varepsilon_K(s)) t_K \quad , \quad v = \sum_{j \leqslant K} \varepsilon_j(s+N) t_j \quad \text{et}$$

$$A = \sum_{j > K} \varepsilon_j(s) t_j \ .$$

Alors

$$\sum_{n<N} G(s+n) = G(A) \sum_{u<m\leqslant v} G(m),$$

et d'autre part

$$\sum_{w \leqslant m < v} G(m) = M_K(G) \sum_{1+\varepsilon_K(s) \leqslant a < \varepsilon_K(s+N)} G(a t_K) + $$
$$+ G(\varepsilon_K(s+N) t_K) \sum_{o \leqslant n < v - (\varepsilon_K(s+N) t_K)} G(n) \ ,$$

ce qui donne :

$$(36) \qquad \left| \sum_{w \leqslant m < v} G(m) \right| \leqslant (\varepsilon_K(s+N) - \varepsilon_K(s) - 1) |M_K(G)| + \sum_{j<K} \varepsilon_j(s+N) |M_j(G)|$$

avec $M_j = \sum_{n<t_j} G(n)$ . Posons $r_j = \sum_{j<k\leqslant K} \varepsilon_k(s) t_k$ et pour $o \leqslant j < K$ :

$$u_j = \begin{cases} r_j + (\varepsilon_j(s) + 1)t_j & \text{si} \quad \varepsilon_j(s) < a_{j+1} \ , \\ r_{j+1} + (\varepsilon_{j+1}(s) + 1)t_{j+1} & \text{si} \quad \varepsilon_j(s) = a_{j+1} \ . \end{cases}$$

Notons que si $\varepsilon_j(s) = a_{j+1}$ , alors $u_{j+1} = u_j$ et si $u_j \neq u_{j+1}$ alors :

$$\sum_{u_j \leqslant m < u_{j+1}} G(m) = G(r_j)[M_j \sum_{\varepsilon_j(s) < a < a_{j+1}} G(at_j) + M_{j-1} G(a_j t_j)] \ .$$

Posons $\mu_j = \operatorname{Max} \{ t_j^{-1} |M_j(G)| , (t_{j-1})^{-1} |M_{j-1}(G)| \}$ , on obtient en partageant l'intervalle $[u,w[$ par les $u_j$ :

$$(37) \qquad | \sum_{u \leqslant m < w} G(m) | \leqslant 1 + \sum_{j<K} \mu_j (u_{j+1} - u_j) \ .$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $K_0$ un entier tel que $\mu_j \leqslant \varepsilon$ si $j \geqslant K_0$ . Alors (36) et (37) donnent

$$| \sum_{n<N} G(n+s) | \leqslant C_0 + 2N\varepsilon \ ,$$

où $C_0$ est une constante qui ne dépend que de $K_0$ .

*Indépendance uniforme*. Soient $u$ , $u'$ des suites à valeurs respectivement dans des espaces métrisables compacts $X$ , $X'$ . Nous dirons que $u$ et $u'$ sont *uniformément statistiquement indépendantes* si pour toutes applications continues $h : X \to \mathbb{C}$ , $h' : X' \to \mathbb{C}$ on a

$$0 = \lim_{N:\infty} \operatorname{Sup}_{s \geqslant 0} \Big[ (N^{-1} \sum_{n<N} h(u_{n+s}) h'(u'_{n+s})) - (N^{-1} \sum_{n<N} h(u_{n+s}))(N^{-1} \sum_{n<N} h'(u'_{n+s})) \Big] .$$

Le théorème suivant rassemble et complète plusieurs résultats.

<u>THEOREME</u> 14. *Soit* $q = (1, q_1, q_2, \dots)$ *une base bornée,* $s_q$ *la somme des chiffres dans cette base. Soit* $\alpha$ *irrationnel et* $\Sigma_\alpha$ *la* $\alpha$*-somme des chiffres. Alors pour tout couple* $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ *, les suites* $xs_q(.)$ *et* $y\Sigma_\alpha(.)$ *sont uniformément statistiquement indépendantes modulo* 1 *( et uniformément équiréparties modulo* 1 *).*

*Démonstration*. En bref, avec les hypothèses faites sur $x$ et $y$ , le théorème 5 montre que ou bien $e(xs_q(.))$ est pseudo-aléatoire, donc $e(xs_q(.) + y\Sigma_\alpha(.))$ est aussi pseudo-aléatoire, ou alors $e(xs_q(.))$ est périodique. Dans ce cas, $y$ est irrationnel et les suites $n \to e(n\rho + y\Sigma_\alpha(n))$ , $\rho \in \mathbb{Q}$ , sont de moyennes nulles d'après le théorème suivant :

<u>THEOREME</u> 15[34]. *Soit* F *une suite complètement* $\alpha$*-additive, c'est-à-dire telle que* $F(.) = \sum_{r\geqslant 0} \varepsilon_r(.)F(t_r)$ *, où* $(t_r)_r$ *est la* $\alpha$*-échelle. Alors* $G = e(F)$ *est de moyenne nulle si :*

$$\sum_{r\geqslant 0} (\ 1 + a_r^{-1} - (a_{r+1})^{-1})(a_{r+1})^2 \, \| F(t_r) \|^2 \ = +\infty \ .$$

L'indépendance statistique uniforme se montre comme dans [23] en remarquant que les fonctions caractéristiques des ensembles $Q_m$ du lemme 2 sont uniformément statistiquement indépendantes des fonctions caractéristiques de toutes les progressions arithmétiques, ce qui revient en définitive ( thm 13) à montrer que les suites $\alpha$-multiplicatives

$$n \to e\left( \frac{a}{u} n + \frac{b}{t_{h+1}} \Psi_h(n) \right) \ , \ 1 \leqslant a < u \qquad 0 \leqslant b < t_{h+1} \ ,$$

avec $\Psi_h(.) := \sum_{0\leqslant k\leqslant h} \varepsilon_k(.) t_k$ et $h \in \mathbb{N}$ , ont une moyenne nulle ( cf.[34]).

IV.5. *Echelle de COQUET*. Entre la suite de Fibonacci $(F_r)_r$ qui vérifie une relation de récurrence linéaire et les échelles $(t_r)_r$ présentant une condition de lacunarité du type

$$\mathcal{L} : \ \exists\, \omega > 1 \ , \{r \in \mathbb{N} \ ; \ t_{r+1} \geqslant \omega t_r \} \text{ est à lacunes bornées}$$

pour lesquelles les suites $x\Sigma_t(.)$ sont équiréparties modulo 1 quel que soit le nombre irrationnel $x$ [22], il existe une notion introduite dans [22(2)] qui offre ces deux avantages.

*Définition :* Une échelle $(t_r)_r$ sera dite de *Coquet* si elle vérifie les deux conditions suivantes :

(lim): $\lim_{r:\infty} t_{r+1}.t_r^{-1} = \omega$ et $\omega > 1$ .

(Réc): Il existe un entier $\Delta$ et des entiers relatifs $b_0, b_1, \ldots, b_{\Delta-1}$ , $b_0 \neq 0$ , tels que

$$t_{r+\Delta} = \sum_{0\leqslant j<\Delta} b_j t_{j+r}$$

pour tout $r \in \mathbb{N}$ .

Dans un acticle en préparation [29], J. COQUET se proposait de compléter un premier résultat sous la forme :

THEOREME A. *Soit* $(t_r)_r$ *une échelle de Coquet et* $g$ *un entier* $\geqslant 2$ *tel que pour une infinité d'indices* $r$ , $t_r$ *soit premier à* $g$ . *Alors*

*(i) La suite* $e(y\Sigma_t(.))$ *a un spectre de Fourier-Bohr vide pour tout* $y$ *irrationnel.*

*(ii) Pour tout couple* $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ , *la suite* $xs_g(.) + y\Sigma_t(.)$ *est équirépartie modulo* 1 .

La partie *(i)* de ce théorème est démontrée dans [22(2)], de sorte que la partie *(ii)* revient à montrer le théorème 12 dans le cas d'une échelle de Coquet, via un lemme analogue au lemme 2 où la condition *(ii)* de ce lemme est à remplacer par l'indépendance statistique des éléments de la partition $\{Q_m ; m \geqslant 1\}$ de $\mathbb{N}$ avec certaines progressions arithmétiques. Les détails ne sont pas donnés.

## V. SOMME DES CHIFFRES ET FORMULES SOMMATOIRES.

Dans la suite $s_g$ désigne encore la somme des chiffres en base ( fixe ) $g$ où $g$ est un entier $\geqslant 2$ . Pour $g = 2$ , on pose simplement $s := s_2$ . La fonction logarithme en base $g$ sera notée $L_g(.)$ .

V.1. *Sommes de puissances.* Dans [7'] L. BUSH montre

$$(38) \qquad N^{-1} \sum_{n<N} s_g(n) \sim \frac{g-1}{2} L_g(N) \quad \text{quand } N \to +\infty .$$

Le terme d'erreur en (38) a été étudié par plusieurs auteurs. En particulier L. MIRSKY [63] montre qu'il est borné et H. DELANGE [38] améliore un résultat de J. TROLLOPE obtenu pour $g = 2$ [74] sous la forme précise suivante :

TEOREME 16. *Il existe* $F_g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de période* 1 , *continue et nulle part dérivable, telle que*

$$\sum_{n<N} s_g(n) = \frac{g-1}{2} N L_g(N) + N F_g(L_g(N)) .$$

De plus, il donne une expression de $F_g$ et calcule ses coefficients de Fourier $c_k = \int_0^1 F_g(x) e(-kx)dx$ à l'aide de la fonction $\zeta$ de Riemann :

$$c_k = i \frac{g-1}{2k\pi} \left( 1 + \frac{2ik\pi}{\mathrm{Log}(g)} \right)^{-1} \zeta\left( \frac{2ik\pi}{\mathrm{Log}(g)} \right) , \quad ( k \in \mathbb{Z}^* ) \text{ et}$$

$$c_0 = \frac{g-1}{2\,\mathrm{Log}(g)} ( \mathrm{Log}(2\pi) - 1 ) - \frac{g+1}{4} .$$

Dans [72] K. STOLARSKY étudie les sommes de puissances

$$(39) \qquad \tau_d(N) := \sum_{n<N} (s(n))^d \qquad , \quad ( d \in \mathbb{R} ) \ ,$$

et il démontre :

$$(40) \qquad \tau_d(N) = N \left( \frac{L_2(N)}{2} \right)^d + \mathbf{O}\left( N \left( L_2(N) \right)^{d-1} \right)$$

pour tout $d \in \mathbb{N}$ , avec un terme d'erreur en $\mathbf{O}\left( N(L_2(N))^{d-1/2} (\mathrm{Log}(L_2 N))^{1/2} \right)$ dans le cas où $d$ est réel $\geqslant 0$ ( la constante implicite dans le $\mathbf{O}(.)$ ne dépendant que de $d$ ). Définissons la suite $\delta_d$ par

$$\delta_d(N) := \frac{\tau_d(N) - N\left( \frac{L_2(N)}{2} \right)^d}{N \left( L_2(N) \right)^{d-1}}$$

et soient $\alpha_d := \limsup_{N:\infty} \delta_d(N)$ , $\beta_d := \liminf_{N:\infty} \delta_d(N)$ .

On sait [39] que $\alpha_1 = 0$ , $\beta_1 = \frac{1}{2} L_2(3) - 1$ et dans le cas général [72], $-\infty < \beta_d < \alpha_d < +\infty$ . Dans [27] J. COQUET obtient comme corollaire d'un résultat sommatoire général sur $\tau_p$ ( p entier ) le

<u>THEOREME</u> 17. *Pour tout nombre réel* $d$ *:*

$$\tau_d(N) = N \left(\frac{L_2(N)}{2}\right)^d + N \left(\frac{L_2(N)}{2}\right)^{d-1} \left(d\, F_2(L_2(N)) + \frac{d(d-1)}{4}\right) + \mathbf{O}(N(L_2N)^{d-2})$$

*et*

$$\alpha_d = d(d-1)2^{-1-d} \qquad , \qquad \beta_d = d(d-1)2^{-1-d} + d\, 2^{1-d}\left( \frac{1}{2} L_2(3) - 1 \right) .$$

De plus, pour $d = 2$ , le terme d'erreur est de la forme $NG(L_2N)$ où $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application continue de période 1 . Le contrôle du terme d'erreur par une fonction de période 1, continue et nulle part dérivable, semble être la règle pour ce type de somme et s'étend à des sommes plus générales ( cf. [53]). Dans cette direction J. COQUET avait obtenu un premier résultat non publié [28].

<u>THEOREME</u> 18. *Soient* $a$ , $b$ *dans* $\{0,1,\ldots,g-1\}$ , $(a,b) \neq (0,0)$ *et soit* $\Phi$ *la fonction indicatrice du singleton* $\{(a,b)\}$ . *Posons*

$$Z_{ab}(n) = \sum_{r \geqslant 0} \Phi(e_r(n), e_{r+1}(n)) \quad ,$$

*où* $e_r(n)$ *est le* $r$*-ième chiffre de* $n$ *en base* $g$ . *Alors il existe* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ , *de période* 1, *continue et nulle part dérivable, telle que pour tout entier* $N \geqslant 1$

$$\sum_{n<N} Z_{ab}(n) = N g^{-2} L_g(N) + F(L_g(N)) .$$

Les coefficients de Fourier $c_k$ de $F$ sont donnés à l'aide de la fonction $\zeta$ d'Hurzwitz [2 ]

$$\zeta(s,\alpha) := \sum_{m=o}^{\infty} (m+\alpha)^{-s} \quad , ( \mathcal{R}\acute{e}\ s > 1 \text{ et } 0 < \alpha \leqslant 1 ).$$

Explicitement, pour $k \neq 0$

$$c_k = \frac{1}{2i\pi k} \left( 1 + \frac{2i\pi k}{\operatorname{Log}(g)} \right)^{-1} \left[ \zeta\left(\frac{2i\pi k}{\operatorname{Log}(g)} , \frac{a + bg}{g^2}\right) - \zeta\left(\frac{2i\pi k}{\operatorname{Log}(g)} , \frac{a+1+bg}{g^2}\right) \right]$$

et pour $k = o$

$$c_o = - \frac{1}{2 g^2} - \frac{1}{g^2 \operatorname{Log}(g)} + \frac{1}{\operatorname{Log}(g)} \left[ \operatorname{Log} \Gamma\left(\frac{a+bg}{g^2}\right) - \operatorname{Log} \Gamma\left(\frac{a+1+bg}{g^2}\right) \right] .$$

V.2. *Coefficients binomiaux impairs*. Désignons par $F(N)$ le nombres de coefficients binomiaux impairs dans les $N$ premières lignes du triangle de Pascal, c'est-à-dire parmi les entiers $\binom{n}{m}$ , $0 \leqslant m \leqslant n < N$ . J. GLAISHER a montré [47] que

$$F(N) = \sum_{n<N} 2^{s(n)} .$$

K. STOLARSKY donne dans [72] : $F(N) = O(N^{\beta})$ avec $\beta = \dfrac{\operatorname{Log} 3}{\operatorname{Log} 2}$ , qu'il déduit de propriétés fonctionnelles de $F$ , à savoir $F(2^r+a) = F(2^r) + 2F(a)$ pour $0 \leqslant a \leqslant 2^r$ .
H. HARBORTH précise dans [49] :

$$1 = \limsup_{N:\infty} F(N)N^{-\beta} \quad \text{et} \quad q := \liminf_{N:\infty} F(N)N^{-\beta} = 0{,}812556\ldots$$

mais la valeur exacte de $q$ n'est pas déterminée. Remarquons que pour tout $x > 0$ , la limite

$$\Psi(x) := \lim_{k:\infty} F(2^k x) (2^k x)^{-\beta}$$

existe et que $\Psi(2x) = \Psi(x)$ . D'autre part, pour $x \in [1,2[$ , de développement binaire ( régulier ou pas ) $x = \sum_{r\geqslant 0} e_r 2^{-r}$ , $e_o = 1$ , on a

$$\Psi(x) = x^{-\beta} \sum_{r\geqslant 0} e_r \left( \prod_{a<r} (1+e_a) \right) 3^{-r} .$$

On vérifie sans difficulté qu'il existe $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, de période 1 telle que $\Psi(x) = G(L_2 x)$ , de sorte que

$$F(N) = N^{\beta} G(L_2 N) \quad , ( N \geqslant 1 ) .$$

Il est clair que $q = \inf \Psi$ ( $= \inf G$ ) . A. STEIN a montré [71] que si

$$q_n = \inf \{ \Psi(x) \ ; \ x \in [1,2] \ , \ 2^n x \in \mathbb{N} \}$$

alors l'inégalité suivante a lieu :

$$q > q_n - ( 1 - e^{-\beta/2^n} ) \ .$$

Ceci précise la rapidité de convergence de $(q_n)_n$ vers $q$ mais ne permet pas de décider si le minimum de $\Psi$ est atteint en un seul point de [1,2], ni de donner le développement binaire de ce point. J. COQUET se proposait [29] de démontrer :

THEOREME B.

*(i)* $G$ *est nulle part dérivable.*

*(ii) Soit* $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *la suite définie par* $h(0) = 0$ *et pour* $k \geq 1$ *, par l'entier* $m > h(k-1)$ *rendant minimale la quantité*

$$\operatorname{Log}\left(1 + \frac{2^k 3^{-m}}{\sum\limits_{r<k} 2^r 3^{-h(r)}}\right) - \beta \operatorname{Log}\left(1 + \frac{2^{-m}}{\sum\limits_{r<k} 2^{-h(r)}}\right) .$$

*Alors la fonction caractéristique de* $h(\mathbb{N})$ *est presque-périodique et* $\Psi$ *atteint sa borne inférieure en un seul point* $u$ *donné par* $u := \sum\limits_{r\geq 0} 2^{-h(r)}$ .

V.3.*Formules sommatoires liées à la suite de Morse.* La suite de Morse [64] notée multiplicativement est la suite de terme général $(-1)^{s(n)}$ ; elle est 2-multiplicative et aussi reconnaissable par un automate fini [ 7, 8] . De nombreux articles ont été consacrés à des formules asymptotiques pour les sommes

$$(41) \qquad \sum_{n<N} (-1)^{s(an+b)} \quad , ( a \in \mathbb{N}^* \ , \ b \in \mathbb{N} ) .$$

Dans le cas des sommes

$$(42) \qquad S(N) := \sum_{n<N} (-1)^{s(3n)} \quad ,$$

D. NEWMAN a obtenu [65] les inégalités $\frac{3^\alpha}{20} N^\alpha \leq S(N) \leq 5.3^\alpha N^\alpha$ ( $\alpha = \frac{\operatorname{Log} 3}{\operatorname{Log} 4}$ ), récemment améliorées par J. COQUET [25] :

THEOREME 19. *Pour les sommes* $S(N)$ *définies en* (42) *on a :*

*(i)* $S(N) = \frac{\eta}{3} + N^\alpha F(L_4(N))$ *où* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est de période* 1 *, continue nulle part dérivable et où*

$$\eta = \begin{cases} 0 \ \textit{si} \ N \ \textit{pair} , \\ (-1)^{s(3N-3)} \ \textit{si} \ N \ \textit{impair} . \end{cases}$$

*(ii)* $\limsup_{N:\infty} S(N)N^{-\alpha} = \operatorname{Sup} F = \frac{55}{3}\left(\frac{3}{65}\right)^{\alpha}$

$\liminf_{N:\infty} S(N)N^{-\alpha} = \operatorname{Inf} F = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ .

*En outre* $\operatorname{Sup} F = \lim_{n:\infty} S(a_n)\, a_n^{-\alpha}$ *pour la suite* $a : n \to \frac{1}{3}(65.4^n+1)$ *et* $\operatorname{Inf} F = \lim_{n:\infty} S(b_n)\, b_n^{-\alpha}$ *pour la suite* $b : n \to 2.4^n$ .

D. NEWMAN et M. SLATER [66] ont donné des majorations asymptotiques des sommes (41) , résultats précisés par F. DEKKING [36] et J-M. DUMONT[40] qui donnent pour certaines valeurs de a , l'ordre de grandeur de ces sommes et le comportement des restes. J. COQUET se proposait d'étudier la somme

$$G(N) := \sum_{n<N} (-1)^{s(n)+s(3n)}$$

et de montrer en particulier le

THEOREME C. *Les sommes* $G(N)$ *changent de signe une infinité de fois.*

Compte tenu des propriétés générales des suites d'entiers reconnaissables par automates finis ( cf. [42]) on a :

PROPOSITION 11. *Les suites* $n \to \prod_{k=1}^{K} (-1)^{s(a_k n+b_k)}$ , *(* $a_k \in \mathbb{N}^*$ , $b_k \in \mathbb{N}$ , *pour tout* $k \in \{1,\dots,K\}$ *) sont* automatiques , *i.e. l'ensemble des entiers pour lesquels la suite vaut* $+1$ *est reconnaissable par un automate fini* .

La suite $((-1)^{s(n)+s(3n)})_n$ est donc automatique. J. COQUET [29] fournit directement un automate qui reconnaît l'ensemble des entiers $n \geq 0$ tels que $s(n)+s(3n)$ soit pair . Nous allons donner sa construction qui offre une particularité intéressante que nous exploiterons pour donner une démonstration complète du théorème C par une estimation précise des sommes $G(N)$.

Posons $g_i(n) = (-1)^{s(n)+s(3n+i)}$ pour $i \in \{0,1,2\}$ et

$$\gamma(n) = \begin{bmatrix} g_0(n) \\ g_1(n) \\ g_2(n) \end{bmatrix} \quad (\in \{+1,-1\}^3) .$$

La 2-additivité de $s(.)$ donne pour tout entier $n \geq 0$ :

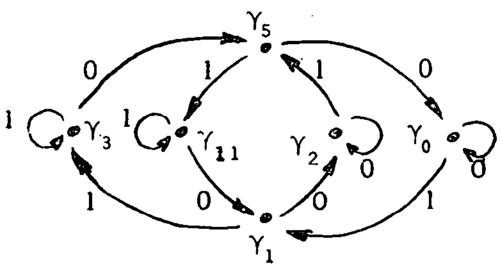
$$\gamma(2n) = \begin{bmatrix} g_0(n) \\ -g_0(n) \\ g_1(n) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \gamma(2n+1) = \begin{bmatrix} g_1(n) \\ -g_2(n) \\ g_2(n) \end{bmatrix}$$

Le passage de $\gamma(n)$ à $\gamma(2n)$ se fait donc par la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A_0$ et correspondra à l'instruction du chiffre 0 . Le passage de $\gamma(n)$ à $\gamma(2n+1)$ se fait par la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A_1$ et correspondra à l'instruction du chiffre 1.

L'ensemble des entiers $n$ tels que $g_0(n) = 1$ est alors reconnaissable par le 2-automate en lecture directe d'espace $E = \{+1,-1\}^3$ d'instructions $A_0$ , $A_1$ , d'état initial $\gamma(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ , d'ensemble d'états de reconnaissabilité

$$R = \{\gamma(0),\gamma(3),\gamma(5)\} \;\left( = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right)$$

et d'états inaccessibles $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ , $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ que l'on élimine. Finalement, l'automate a pour graphe :




Pour $n = \sum_{0 \leqslant r \leqslant K} e_r(n)2^r$ on a par définition :

$$\gamma(n) = A_{e_0} \ldots A_{e_K} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} .$$

Posons $A = A_0 + A_1$ et $\Gamma(N) = \sum_{n<N} \gamma(n)$ , alors de $\Gamma(2N) = A\Gamma(N)$ on déduit $\Gamma(2^k) = A^k\Gamma(1)$.

Posons $N = \sum_{0 \leqslant r \leqslant K} e_r(N)2^r$ avec $e_K(N) = 1$ et pour $0 \leqslant m \leqslant K$ posons $t_m = \sum_{m \leqslant r \leqslant K} e_r(N)2^r$ et $t_{K+1} = 0$ . Pour tout entier $n < 2^m$ on a

$$\gamma(t_m+n) = A_{e_0(n)} \cdots A_{e_{m-1}(n)} A_{e_m(N)} \cdots A_{e_K(N)} \gamma(0) = A_{e_0(n)} \cdots A_{e_{m-1}(n)} \gamma([\![ \tfrac{N}{2^m} ]\!]) .$$

Remarquons que $A^m = \sum_{n<2^m} A_{e_0(n)} \cdots A_{e_{m-1}(n)}$ , ce qui implique la formule sommatoire

$$(43) \qquad \Gamma(N) = \sum_{m \geqslant 0} e_m(N) A^m \gamma([\![ \frac{N}{2^m} ]\!])$$

obtenue par sommations successives sur les intervalles d'entiers $[t_{m+1}, t_m[$.Le polynôme caractéristique de A étant $(X - 1)(X - \omega)(X - \bar{\omega})$ avec

$\omega = \dfrac{1+i\sqrt{7}}{2}$ , on obtient $A = P.D.P^{-1}$ pour

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\omega} \end{bmatrix} \quad , \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\bar{\omega} & -\omega \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad P^{-1} = \frac{1}{2(\omega-\bar{\omega})} \begin{bmatrix} \omega-\bar{\omega} & 0 & -(\omega-\bar{\omega}) \\ \underline{\omega} & 2 & \underline{\omega} \\ -\bar{\omega} & -2 & -\bar{\omega} \end{bmatrix}.$$

La décomposition de $\gamma(0)$ dans la base propre choisie par $P$ donne en particulier $G(2^k) = 1 + \frac{i}{\sqrt{7}}\,(\,\omega^k - \bar{\omega}^k\,)$ . Soit $\xi = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Arg}(\,\frac{\omega}{|\omega|}\,)$ et notons que $\xi$ n'est pas un nombre rationnel. Le calcul précédent donne donc

$$\sum_{n<2^k} (-1)^{s(n)+s(3n)} = 1 - \frac{2}{\sqrt{7}}\, 2^{k/2} \sin(2k\pi\xi) ,$$

et pour une infinité de $N$ , $G(N)$ change de signe avec $|G(N)| \geqslant C'\sqrt{N}$ où $C'$ est une constante choisie strictement inférieure à $2/\sqrt{7}$ .

<u>THEOREME</u> 20. *Pour tout entier* $N \geqslant 0$ *on a*

$$\Big|\sum_{n<N} (-1)^{s(n)+s(3n)}\Big| \leqslant s(N) + \frac{4}{\sqrt{7}(\,2-\sqrt{2})}\sqrt{N} .$$

*Démonstration.* Avec les notations précédentes, posons

$$P^{-1}(\gamma([\,\frac{N}{2^m}\,])) = \begin{bmatrix} \varepsilon_m(N) \\ \varepsilon'_m(N) \\ \overline{\varepsilon'_m(N)} \end{bmatrix} \quad , \quad (\,0 \leqslant m \leqslant K\,) .$$

Ce vecteur ne prend que 6 valeurs, fonctions des 6 états ( accessibles ) de l'automate; précisément :

$$(\varepsilon_m(N), \varepsilon'_m(N)) \in \{\,(\mp 1, \mp \frac{i}{\sqrt{7}})\ ,\ (0, \mp \frac{1-\omega}{\omega-\bar{\omega}})\,\}$$

et $\left|\frac{1-\omega}{\omega-\bar{\omega}}\right| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$ . La première projection du vecteur $A^m(\gamma([\,\frac{N}{2^m}\,]))$ est donc

$$\eta_m(N) := \varepsilon_m(N) + \varepsilon'_m(N)\omega^m + \overline{\varepsilon'_m(N)\omega^m} ,$$

d'où la majoration

$$|\,\eta_m(N)\,| \leqslant 1 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\, 2^{m/2} .$$

D'autre part, on sait que [ 1 ] :

$$\sum_{r\geqslant 0} e_r(N)\, 2^{r/2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}-1}\sqrt{N} ,$$

de sorte que

$$| G(N) | \leqslant s(N) + \frac{4}{\sqrt{7}(2-\sqrt{2})} \sqrt{N} .$$

Le théorème 20 montre en particulier que les suites $((-1)^{s(n)})_n$ et $((-1)^{s(3n)})_n$ sont statistiquement indépendantes, un résultat qui en fait se trouve généralisé dans [26] sous la forme :

THEOREME 21. *Soient des nombres réels* $x_1,\dots x_K$ *et des entiers* $>0$ *distincts* $h_1,\dots,h_K$ . *Si la suite*

$$n \to e\Big( \sum_{1\leqslant j\leqslant K} x_j\, s_g(h_j n) \Big)$$

*n'est pas constante, elle a une valeur moyenne nulle.*

La densité des entiers $n \geqslant 1$ premiers avec leur somme des chiffres $s(n)$ a été étudiée par M. OLIVIER [67] ; J. COQUET se proposait d'établir un résultat analogue pour $s(n)$ et $s(3n)$ , à savoir :

THEOREME D. Card $\{ n < N \ ; (s(n),s(3n)) = 1 \} \sim \frac{6}{\pi^2} N \ , \ ( N \to +\infty )$ .

Le terme d'erreur n'étant pas *encore* déterminé .

BIBLIOGRAPHIE.

[1] ALLOUCHE J-P. et MENDES FRANCE M. : On an extremal property of the Rudin-Shapiro sequence. Mathematika, 32 (1985), 33-38.

[2] APOSTOL T.M. : *Introduction to Analytic Number Theory*. Springer-Verlag (1976).

[3] BASS J. : Suites uniformément denses, moyennes trigonométriques, fonctions pseudo-aléatoires. Bull. Soc. Math. France, 87 (1959), 1-69.

[4] BERGE C. : *Théorie des graphes et applications*. Dunod, Paris (1952).

[5] BERTRANDIAS J-P. : Espaces de fonctions bornées et continues en moyenne asymptotique d'ordre p. Bull. Soc. Math. France, Mémoire 5 (1966), 1-106.

[6] BESINEAU J. : Indépendance statistique d'ensembles liés à la somme des chiffres. Acta Arithm., 20 (1972), 401-416.

[7'] BUSH L.E. : An asymptotic formula for the average sum of digits of integers.

Amer. Math. Monthly, 47 (1940), 154-156.

[7] CHRISTOL G. , KAMAE T., MENDES FRANCE M., RAUZY R.: Suites algébriques, automates et substitutions. Bull. Soc. Math. France, 108 (1980), 401-419.

[8] COBHAM A.: Uniform tag sequences. Math. Syst. Theory, 6 (1972), 164-192.

[9] COQUET J.: Sur les fonctions $S$-multiplicatives et $S$-additives. Thèse de 3$^{e}$ Cycle, Orsay ( mars 1975).

[10] COQUET J.: Sur les fonctions q-multiplicatives presque-périodiques. Note C.R. Acad. Sc. Paris, 281 (1975),sér.A, 63-65.

[11] COQUET J.: Sur les fonctions q-multiplicatives pseudo-aléatoires. Note C.R. Acad. Sc. Paris, 282 (1976),sér.A, 175-178.

[12] COQUET J.: Sur certaines suites pseudo-aléatoires. Acta Sc. Mathematicarum, 40 (1978), 229-235.

[13] COQUET J.: On the uniform distribution modulo one of some subsequences of polynomial sequences. J. Number Theory, 10 (1978),n°3, 291-296.

[14] COQUET J.: Contribution à l'étude harmonique de suites arithmétiques. Thèse d'Etat, Orsay ( Décembre 1978).

[15] COQUET J.: Sur certaines suites uniformément équiréparties modulo 1 . Acta Arithmetica, 36 (1980), 157-162

[16] COQUET J.: Sur certaines suites uniformément équiréparties modulo 1 (II). Bull. Soc. Royale Sc. Liège, 48$^{e}$ Année, 11-12 (1979), 426-431.

[17] COQUET J.: On the uniform distribution modulo one of subsequences of polynomial sequences II. J. Number Theory, 12 (1980), 244-250.

[18] COQUET J.: Répartition modulo 1 des suites q-additives. Annales Soc. Math. Polonae, Series I: Commentationes Mathematicae XXI (1979), 23-42.

[19] COQUET J.: Sur certaines suites pseudo-aléatoires II. Acta Math. Acad. Sc. Hungaricae, 36 (1980), 139-146.

[20] COQUET J.: Sur certaines suites pseudo-aléatoires III. Mh.Math., 90 (1980), 27-35.

[21] COQUET J.: Répartition de la somme des chiffres associée à une fraction continue. Bull. Soc. Royale Sc. Liège, 51$^{e}$ Année, 3-4 (1982), 161-165.

[22] COQUET J.: Représentations lacunaires des entiers naturels. Arch. Math.,38 1982), 184-188.*Ibidem* (2). Arch. Math., 41 (1983), 238-242.

[23] COQUET J.:Représentation des entiers naturels et suites uniformément équiréparties. Ann. Inst. Fourier,Grenoble, 32-1 (1982), 1-5.

[24] COQUET J.: Graphes connexes, représentation des entiers et équirépartition. J. Number Theory, 16-3 (1983), 363-375.

[25] COQUET J.: A summation formula related to binary digits. Inv. Math.,73 -1 (1983), 107-115.

[26] COQUET J.: Sur la représentation des multiples d'un entier dans une base. Colloque H. Delange, Publ. Math. Osay (1983).

[27] COQUET J.: Power sums of digital sums. J. Number Theory,22 (1986),161-176.

[28] COQUET J.: Formules sommatoires et série de Dirichlet. *pré-publication* 1984.

[29] COQUET J.: *Notes manuscrites : Quatre études inachevées sur la numération.* ( communications privées ) : (1) Représentations des entiers naturels et indépendance statistique,III. (2) Une suite presque-périodique liée aux coefficients binomiaux. (3) Une formule sommatoire liée à la suite de Morse. (4) Sur la probabilité de $(s(n),s(3n)) = 1$ .

[30] COQUET J., KAMAE T., MENDES FRANCE M.: Sur la mesure spectrale de certaines suites arithmétiques. Bull. Soc. Math. France,105 (1977), 369-384.

[31] COQUET J., LIARDET P.: A metric study involving independent sequences. *à paraître.*

[32] COQUET J., MENDES FRANCE M.:Suites à spectre vide et suites pseudo-aléatoires. Acta Arith. 32 (1977), 99-106.

[33] COQUET J., TOFFIN Ph.: Représentations des entiers naturels et indépendance statistique. Bull. Sc. Math. $2^e$ série, 105 (1981), 289-298.

[34] COQUET J., RHIN G., TOFFIN Ph.: Représentations des entiers naturels et indépendance statistique 2 . Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 31-1(1981), 1-15.

[35] COQUET J., RHIN G., TOFFIN Ph.: Fourier-Bohr spectrum of sequences related to continued fractions. J. Number Theory, 17-3 (1983), 327-336.

[36] DEKKING F.M.: On the distribution of digits in arithmetic sequences. *Sém. Th. Nombres*, Bordeaux, Année 82-83, 32-(01-12).

[37] DELANGE H.: Sur les fonctions q-additives ou q-multiplicatives. Acta Arith., 21 (1972), 285-298.

[38] DELANGE H.: Sur la fonction sommatoire de la fonction "somme des chiffres". Enseignement Math.,21 (1975), 31-47.

[39] DRAZIN M.P., GRIFFITH J.S.: On the decimal representation of integers. Proc. Cambridge Philos. Soc., 48 (1952), 555-565.

[40] DUMONT J-M.: Discrépance des progressions arithmétiques dans la suite de Morse. Thèse 3e Cycle, Univer. Provence, Marseille (1984).

[41] DUPAIN Y.: Intervalles à restes majorés pour la suite $\{n\alpha\}$. Acta Math. Acad. Sc. Hungaricae, 29 (1977), 289-303.

[42] EILENBERG S.: *Automata, Languages and Machines.* vol. A (1974), Acad. Press.

[43] FINE M.N.J.: The distribution of sum of digits (mod p). Bull. Amer. Math. Soc. 71 (1965), 651-652.

[44] FURSTENBERG H. Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in diophantine approximation. Math. Systems Theory, 1 (1967), 1-49.

[45] FURSTENBERG H.: *Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory.* Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey.

[46] GEL'FOND A.O.: Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données. Acta Arith., 13 (1968), 259-265.

[47] GLAISHER J.W.L.: On the residue of a binomial-theorem coefficient with respect to a prime modulus. Quart. J. Pure Appl. Math., 30 (1899), 150-156.

[48] HALMOS P.R.: *Introduction to Hilbert spaces.* Chelsea, New York (1957).

[49] HARBORTH H.: Number of odd binomial coefficients. Proc. Amer. Math. Soc., 62 (1977), 19-22.

[50] KAMAE T.: Mutual singularity of spectra of dynamical systems given by "sum of digits" to different bases. Soc. Math. France, *Asterisque*, 49 (1977), 109-114.

[51] KAMAE T.: Sum of digits to different bases and mutual singularity of their spectral measures. Osaka J. Math., 15 (1978), 569-574.

[52] KESTEN H.: On a conjecture of Erdös and Szüsz related to uniform distribution mod. 1. Acta Arith., 12 (1966), 193-212.

[53] KIRSCHENHOFER P.: Subblock occurrences in the q-ary representation of n. S.I.A.M. J. Alg. and Discr. Math., 4 (1983), 231-236.

[54] KOLMOGOROV A.N.: Stationary sequence in Hilbert spaces (*Russian*). Bull. Math. Univ. Moscow, 2-6 (1941).

[55] KOPECEK N., TICHY R.F., TURWALD G.: On the discrepancy of sequences associated with the sum-of-digits function, *preprint.*

[56] KUIPERS L., NIEDERREITER H.: *Uniform distribution of sequences.* Wiley Interscience, New York (1974).

[57] LESCA J.: Sur la répartition modulo 1 des suites ($n\alpha$). *Sém. D.P.P.*,Paris, $8^e$ Année,1966-67, fasc. 1, n°2.

[58] LIARDET P.: Regularities of distribution. Compositio Mathematica, *à paraître* (1987).

[59] MATUSIKA K.: Interval estimation based on the notion of affinity. Bull. Inst. Internat. Statist., 38 (1961), 241-244.

[60] MAUDUIT C.: Automates finis et ensembles normaux. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 36 (1986), *à paraître*.

[61] MENDES FRANCE M.: Nombres normaux. Applications aux fonctions pseudo-aléatoires. J. Analyse Math. , Jérusalem, 20 (1967), 1-56.

[62] MENDES FRANCE M.: Les suites à spectre vide et la répartition modulo 1. J. Number Theory, 5 (1973), 1-15.

[63] MIRSKY L.: A theorem on representation of integers in the scale of r. Scripta Math., 15 (1949), 11-12.

[64] MORSE M.: Recurrent geodesics on a surface of negative curvature. Trans. Amer. Math. Soc., 22 (1921), 84-100.

[65] NEWMAN D.: On the number of binary digits in multiple of three. Proceedings Amer. Math. Soc., 21 (1969), 719-721.

[66] NEWMAN D. et SLATER M.: Binary digit distribution over naturally defined sequences. Trans. Amer. Math. Soc., 213 (1975), 71-78.

[67] OLIVIER M.: Sur la probabilité que n soit premier à la somme de ses chiffres. Note C.R. Acad. SC., Paris, sér. A-B, 280 (1975).

[68] QUEFFELEC M.: Mesures spectrales associées à certaines suites arithmétiques. Bull. Soc. Math. France, 107 (1979), 385-421.

[69] QUEFFELEC M.: Contribution à l'étude spectrale de suites arithmétiques. Thèse d'Etat, Paris Nord ( décembre 1984).

[70] RAUZY G.: *Propriétés statistiques des suites arithmétiques*. P.U.F., Coll. SUP (1976).

[71] STEIN A.H.: Exponential sums related to binomial coefficient parity. Proceedings Amer. Math. Soc., 80 (1980), 526-530.

[72] STOLARSKY K.B.: Power and exponential sums of digital sums related to binomial coefficient parity. S.I.A.M. J. Appl. Math., 32 (1977), 717-730.

[73] TICHY R.F., TURNWALD G.: On the discrepancy of some special sequences. J. Number Theory, *à paraître*.

[74] TROLLOPE J.R.: An explicit expression for binary digital sums. Math. Mag., 41 (1968), 21-27.

[75] WIENER N.: The spectrum of an array and its application to the study of the translation properties of a simple class of arithmetical functions. J. Math. and Phys., 6 (1927), 145-157.

LIARDET Pierre
Université de Provence
Laboratoire associé
C.N.R.S. n°225
3, Place Victor Hugo
13331 Marseille cédex 3.

# REPARTITION DE LA SUITE DES PUISSANCES D'UNE SERIE FORMELLE ALGEBRIQUE

Jean-Paul ALLOUCHE et Jean-Marc DESHOUILLERS

**Résumé** : Soit $\mathbb{F}_q((X))$ le corps des séries formelles sur le corps fini $\mathbb{F}_q$. Si $\theta$ est un élément de $\mathbb{F}_q((X))$, algébrique sur le corps des fractions rationnelles $\mathbb{F}_q(X)$, nous montrons que la suite $(\theta^n)$ admet une loi logarithmique de répartition modulo 1, et que la dimension de Hausdorff de l'adhérence de l'ensemble $\{ \{\theta^n\} ; n \in \mathbb{N} \}$ est nulle : en particulier la suite $(\theta^n)$ n'est pas équirépartie modulo 1.

**Abstract** : Let $\mathbb{F}_q((X))$ be the field of formal series over the finite field $\mathbb{F}_q$. If $\theta$ belongs to $\mathbb{F}_q((X))$ and is algebraic over the field of rational functions $\mathbb{F}_q(X)$, we prove that the sequence $(\theta^n)$ admits a logarithmic distribution modulo 1, and that the Hausdorff dimension of the closure of the set $\{ \{\theta^n\} ; n \in \mathbb{N} \}$ is equal to zero : as a corollary the sequence $(\theta^n)$ is not uniformly distributed modulo 1.

U.A. 226
U.E.R. de Math. et d'Info.
BORDEAUX I
351 Cours de la Libération

33405 TALENCE Cedex

FRANCE

Introduction : Les propriétés des séries formelles sur un corps fini ressemblent souvent à celles des nombres réels; on peut dès lors être tenté de s'intéresser à la répartition modulo 1 dans le corps des séries formelles sur un corps fini, et plus particulièrement à la répartition modulo 1 des puissances d'une série donnée : rappelons qu'on ne sait pas, dans le cas réel, si la suite $(3/2)^n$ est équirépartie modulo 1, ni même si elle est dense modulo 1. Le cas du corps $\mathbb{F}_q((X))$ des séries formelles sur le corps fini $\mathbb{F}_q$ a été étudié par de nombreux auteurs ( voir par exemple les travaux de Carlitz [3], Dijksma [5] à [9], Hodges [12] à [14], de Mathan [18] à [20], Meijer [21] et Rhin [22] à [24]; voir aussi le livre de Kuipers et Niederreiter [16]. Comme dans le cas réel, la suite $(\Theta^n)$ est équirépartie modulo 1 pour presque tout $\Theta$ (au sens de la mesure de Haar sur le groupe compact $\mathbb{F}_q((X))/\mathbb{F}_q[X^{-1}]$ ). Pour certains $\Theta$ analogues aux nombres de Pisot-Vijayaragavan, $\Theta^n$ tend vers 0 modulo 1, (voir les travaux de Bateman et Duquette [2] et de Grandet-Hugot [10] et [11], voir aussi l'article de Liardet [17]), ce qui implique que la suite $(\Theta^n)$ admet comme loi de répartition la mesure de Dirac à l'origine.

En 1979 Houndonougbo a montré ([15]) que, pour u et v entiers positifs, la suite $(X^u + X^{-v})^n$ est répartie modulo 1 suivant la mesure de Dirac à l'origine. Puis Deshouillers a complètement étudié dans [4] le cas d'un $\Theta$ rationnel "décimal" (c'est-à-dire tel que $X^j\Theta$ soit un polynôme pour un certain entier positif j).

Nous nous proposons ici de résumer la démonstration du résultat suivant (les détails se trouvent dans [1]) :

Théorème : Soit $\Theta$ un élément de $\mathbb{F}_q((X))$, algébrique sur $\mathbb{F}_q(X)$. Alors la suite $(\Theta^n)$ admet une loi de répartition logarithmique modulo 1; de plus l'adhérence de l'ensemble $\{\ \{\Theta^n\}; n \in \mathbb{N}\}$ est de mesure de Hausdorff nulle, ce qui implique que la suite $(\Theta^n)$ n'est pas équirépartie modulo 1 .

## §1. Notations :

Pour simplifier les notations nous supposerons dorénavant que q est égal à 2 (le cas général se traite de la même façon, en utilisant le fait que $\mathbb{F}_q^{\times}$ est cyclique).

Si $\eta$ est un élément de $\mathbb{F}_2((X))$, on note :

$$\eta = \sum_{-\infty}^{+\infty} e_k(\eta)\, X^k$$

où $e_k(\eta)$ est dans $\mathbb{F}_2$, et nul pour $k$ voisin de $-\infty$.

On dira qu'une suite $(\eta_n)$ de $(\mathbb{F}_2((X)))^{\mathbb{N}}$ admet une loi de répartition modulo 1 (respectivement une loi de répartition logarithmique modulo 1) si quel que soit l'entier $s$ et quel que soit l'élément $B$ dans $(\mathbb{F}_2)^s$, l'ensemble

$$\{\, n \in \mathbb{N} \; ; \; (e_1(\eta_n), e_2(\eta_n), \ldots , e_s(\eta_n)) = B \,\}$$

admet une densité naturelle (respectivement une densité logarithmique). Rappelons qu'on dit que l'ensemble $A$ admet une densité naturelle $d$ si

$$\lim_{x \to +\infty} \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in A}} 1$$

existe et vaut $d$, et que l'ensemble $A$ admet une densité logarithmique $d'$ si

$$\lim_{x \to +\infty} \Big( \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in A}} (1/n) \Big) / \operatorname{Log} x$$

existe et vaut $d'$ ; de plus si $A$ admet une densité naturelle, il admet aussi une densité logarithmique et ces deux quantités sont égales.

En particulier, la suite $(\eta_n)$ est équirépartie modulo 1 si et seulement si, quels que soient l'entier $s$ et l'élément $B$ dans $(\mathbb{F}_2)^s$, l'ensemble $\{\, n \in \mathbb{N} \; ; \; (e_1(\eta_n), e_2(\eta_n), \ldots , e_s(\eta_n)) = B \,\}$ admet une densité naturelle égale à $2^{-s}$.

## §2. Existence d'une loi de répartition logarithmique :

- Première remarque :

Il ne sera pas suffisant d'étudier des blocs de chiffres des $\Theta^i$ : nous allons en effet utiliser l'algébricité de $\Theta$, donc des relations du type $\Sigma\, a_i(X)\, \Theta^i = 0$, où les $a_i$ sont des fractions rationnelles donc des séries formelles ultimement périodiques; les chiffres d'un terme $a_i(X)\Theta^i$ feront donc intervenir des sommes (finies) du type

$$\sum_{k=1}^{+\infty} e_{s-kT_i}(\Theta^i) \quad ,$$

où $T_i$ est la période des chiffres de $a_i$.

- Seconde remarque :

Le calcul des chiffres de $\Theta^{2i}$ connaissant ceux de $\Theta^i$ est immédiat :

$$\Theta^{2i} = (\Theta^i)^2 = (\ \Sigma\, e_k(\Theta^i)X^i\ )^2 = \Sigma\, e_k(\Theta^i)X^{2i} \quad .$$

- Troisième remarque :

Si $w$ est le degré de $\Theta$ sur $\mathbb{F}_2(X)$, on peut montrer que $(\Theta^2, \Theta^4, \ldots, \Theta^{2w})$ est une base de $\mathbb{F}_2(X)(\Theta)$ sur $\mathbb{F}_2(X)$, et donc qu'il existe des fractions rationnelles $a_j$ et $b_j$ telles que :

$$\Theta^{2w+1} = \sum_1^w a_j(X)\ \Theta^{2j}$$

$$\Theta = \sum_1^w b_j(X)\ \Theta^{2j} \quad .$$

- <u>Quatrième remarque</u> :

La connaissance de $\theta^{(2\varpi+1)\lambda+j}$ pour j appartenant à [1,2ϖ+1] permet de "calculer" $\theta^{(2\varpi+1)2\lambda+j}$ et $\theta^{(2\varpi+1)(2\lambda+1)+j}$ pour j dans l'intervalle [1, 2ϖ+1]; en effet, par élévation facile au carré des $\theta^{(2\varpi+1)\lambda+j}$, on obtient les $\theta^{(2\varpi+1)2\lambda+2j}$ pour j dans l'intervalle [1, 2ϖ+1]. Puis l'égalité

$$\theta^{2\varpi+1} = \sum_{1}^{\varpi} a_j(X)\, \theta^{2j}$$

implique :

$$\theta^{(2\varpi+1)(2\lambda+1)+2k} = \sum_{1}^{\varpi} a_j(X)\, \theta^{2(j+\lambda(2\varpi+1)+k)}$$

d'où le calcul de $\theta^{(2\varpi+1)(2\lambda+1)+2k}$ pour k dans l'intervalle [0,ϖ]. Enfin l'égalité

$$\theta = \sum_{1}^{\varpi} b_j(X)\, \theta^{2j}$$

implique :

$$\theta^{(2\varpi+1)2\lambda+2k+1} = \sum_{1}^{\varpi} b_j(X)\, \theta^{2(j+\lambda(2\varpi+1)+k)}$$

d'où le calcul de $\theta^{(2\varpi+1)2\lambda+2k+1}$ pour k dans l'intervalle [0,ϖ]. Ceci permet, grâce à un calcul technique qu'on trouvera dans [1] d'établir la proposition :

- <u>Proposition</u> :

Si $\eta = \Sigma\, e_k(\eta)X^k$ , on note $m(\eta,s,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} e_{s-kT}(\eta)$ .

Soit T une période commune (supposée paire) aux $a_j$ et $b_j$ de la troisième remarque.

On appelle $M(\lambda)$ l'élément de $(\mathbb{F}_2)^{T(2\varpi+1)}$ de composantes :

$m(\Theta^{(2\varpi+1)\lambda+1},-T+1,T), m(\Theta^{(2\varpi+1)\lambda+1},-T+2,T),\ldots,m(\Theta^{(2\varpi+1)\lambda+1},0,T),\ldots$

$m(\Theta^{(2\varpi+1)(\lambda+1)},-T+1,T), m(\Theta^{(2\varpi+1)(\lambda+1)},-T+2,T),\ldots,m(\Theta^{(2\varpi+1)(\lambda+1)},0,T),$

et $B_k(\lambda)$ l'élément de $(\mathbb{F}_2)^{k(2\varpi+1)}$ de composantes :

$e_{-T+1}(\Theta^{(2\varpi+1)\lambda+1}),\ \ldots,\ e_{k-T}(\Theta^{(2\varpi+1)\lambda+1}),\ \ldots,\ e_{-T+1}(\Theta^{(2\varpi+1)(\lambda+1)}),$
$\ldots,\ e_{k-T}(\Theta^{(2\varpi+1)(\lambda+1)})$ .

Alors, si L est un entier supérieur ou égal à 2T, il existe deux applications $\sigma$ et $\tau$ de $(\mathbb{F}_2)^{(2\varpi+1)T} \times (\mathbb{F}_2)^{(2\varpi+1)L}$ dans lui-même telles que :

$$\sigma(M(\lambda),B_L(\lambda)) = (M(2\lambda),B_L(2\lambda))$$

$$\tau(M(\lambda),B_L(\lambda)) = (M(2\lambda+1),B_L(2\lambda+1))\ .$$

- <u>Comment en déduire l'existence d'une loi de répartition logarithmique pour $\Theta^n$ ?</u>

On note $C_1, \ldots, C_U$ , avec $U = 2^{(2\varpi+1)(L+T)}$ , les éléments de $(\mathbb{F}_2)^{T(2\varpi+1)} \times (\mathbb{F}_2)^{L(2\varpi+1)}$ classés dans l'ordre lexicographique.

On pose :

$$a_{u,v} = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma(C_v) \neq C_u \text{ et } \tau(C_v) \neq C_u \\ 1 & \text{si } \sigma(C_v) = C_u \text{ et } \tau(C_v) = C_u \\ 1/2 & \text{si } \sigma(C_v) = C_u \text{ et } \tau(C_v) \neq C_u \\ 1/2 & \text{si } \sigma(C_v) \neq C_u \text{ et } \tau(C_v) = C_u \end{cases}$$

et on appelle A la matrice $(a_{u,v})$ , élément de $\mathcal{M}_U(\mathbb{C})$.
Cette matrice est stochastique, c'est-à-dire à coefficients réels positifs ou nuls, et telle que la somme des éléments de chaque colonne vaille 1; ses valeurs propres sont donc de module inférieur ou égal à 1, et celles de module 1 sont des racines de l'unité.
Un raisonnement classique permet d'en déduire l'existence d'une densité logarithmique pour la suite

$$\mathcal{A}_u = \{ \lambda \in \mathbb{N}^{\mathbb{Z}} \ ; \ (M(\lambda), B(\lambda)) = C_u \}$$

puisque la matrice A permet d'exprimer la répartition des éléments de l'intervalle $[2x, 4x[$ parmi les différentes suites $\mathcal{A}_u$ en fonction linéaire des éléments de l'intervalle $[x, 2x[$ parmi ces mêmes suites.
Puis on conclut à l'existence d'une loi de répartition logarithmique pour la suite $(\Theta^n)$. C'est à cause de la présence éventuelle de racines de l'unité parmi les valeurs propres de la matrice A que l'on n'obtient, par cette méthode, qu'une loi de répartition logarithmique, et non une (vraie) loi de répartition.

## §3. Dimension de Hausdorff :

Pour prouver que la dimension de Hausdorff de l'adhérence de l'ensemble $\{ \{\theta^n\} \; ; \; n \in \mathbb{N} \}$ est nulle, il suffit de montrer que, quel que soit $\varepsilon$ strictement positif, on a :

$$\mathrm{Card} \{ B \in (\mathbb{F}_2)^L, \exists m \geqslant 0, \exists S \in \mathbb{Z}, (e_{S+1}(\theta^m),\dots,e_{S+L}(\theta^m)) = B \}$$
$$= O_\varepsilon((1+\varepsilon)^L)$$

(autrement dit il n'y a "pas beaucoup de blocs" B qui apparaissent dans les $\theta^n$ lorsque $\theta$ est algébrique).

L'idée essentielle (le détail est dans [1]) est de commencer par remarquer que l'on a

$$\mathbb{F}_2(X)(\theta) = \mathbb{F}_2(X)(\theta^2) = \dots = \mathbb{F}_2(X)(\theta^{2^x}),$$

donc, pour i dans l'intervalle $[1,2^x]$, et pour j dans l'intervalle $[1,w]$, il existe des $a_{i,j}$ tels que :

$$\theta^i \quad = \sum_1^w a_{i,j}(X)\, \theta^{j2^x} \qquad ,$$

d'où

$$\theta^{i+\lambda 2^x} = \sum_1^w a_{i,j}(X)\, \theta^{(j+\lambda)2^x} \qquad .$$

On reprend alors des calculs analogues à ceux évoqués plus haut en en utilisant la propriété (immédiate mais déterminante ici) :

$$e_r(\theta^{(j+\lambda)2^x}) = 0 \quad \text{si } r \not\equiv 0 \text{ modulo } 2^x \ ,$$

il ne reste plus qu'à choisir x gigantesque ... .

Conclusion :

Il résulte en particulier de ce qui précède que la suite des puissances d'une série formelle algébrique sur le corps des fractions rationnelles sur un corps fini n'est pas équirépartie modulo 1. Deux problèmes restent néanmoins ouverts :

- quelle est la nature de la mesure répartition logarithmique dont l'existence est prouvée ci-dessus ?

- existe-t-il en général une (vraie) mesure de répartition ?

-----------------------------------

[1] J.-P. ALLOUCHE, Théorie des nombres et automates. Thèse d'Etat, Bordeaux 1983, 103-121.

[2] P. BATEMAN and A. DUQUETTE, The analogous of Pisot-Vijayaragavan numbers in fields of formal power series, Illinois J. Math. 6 (1962), 594-606.

[3] L. CARLITZ, Diophantine approximations in fields of characteristic p, Trans. Amer. Math. Soc., 72 (1952), 187-208.

[4] J.-M. DESHOUILLERS, La répartition modulo 1 des puissances de rationnels dans l'anneau des séries formelles sur un corps fini, Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux, 1979-1980, exposé n°5.

[5] A. DIJKSMA, The measure theoretic approach to uniform distribution of sequences in GF[q,x], Mathematica (Cluj.), 11 (1969), 221-240.

[6] A. DIJKSMA, Uniform distribution of polynomials over GF{q,x} in GF[q,x], Part I, Nederl. Akad. Wet., Proc. Ser.A, 72 (1969), 376-383, ou Indag. Math. 31 (1969), 376-383.

[7] A. DIJKSMA, Uniform distribution of polynomials over GF{q,x} in GF[q,x], Part II, Nederl. Akad. Wet., Proc. Ser.A, 73 (1970), 187-195, ou Indag. Math. 32 (1970), 187-195.

[8] A. DIJKSMA, Metrical theorems concerning uniform distribution in GF[q,x] and GF{q,x}, Nieuw Arch. voor Wisk. (3), 18 (1970), 279-293.

[9] A. DIJKSMA, Uniform distribution in GF{q,x} and GF[q,x], Thesis, Technische Hogeschool Delft, 1971.

[10] M. GRANDET-HUGOT, Une propriété des "nombres de Pisot" dans un corps de séries formelles, C.R. Acad. Sc. Paris, Sér.A, 265 (1967), 39-41, errata p. 551.

[11] M. GRANDET-HUGOT, Eléments algébriques remarquables dans un corps de séries formelles, Acta Arith. 14 (1967-1968), 177-184.

[12] J.H. HODGES, Uniform distribution of sequences in GF[q,x], Acta Arith. 12 (1966), 55-75.

[13] J.H. HODGES, Uniform distribution of polynomial generated sequences in GF[q,x], Ann. Mat. Pura Appl. (IV), 82 (1969), 135-142.

[14] J.H. HODGES, Uniform distribution of sequences in GF{q,x} and GF[q,x], Ann. Mat. Pura Appl. (IV), 85 (1970), 287-294.

[15] V. HOUNDONOUGBO, Mesure de répartition d'une suite ($\theta^n$) dans un corps de séries formelles sur un corps fini, C.R. Acad. Sc. Paris, Sér.A-B, 288 (1979), n°22, A 997- A 999.

[16] L. KUIPERS and H. NIEDERREITER, Uniform distribution of sequences, 1974, Wiley and Sons.

[17] P. LIARDET, Stabilité algébrique et topologies hilbertiennes, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 1975-1976, exposé n°8.

[18] B. de MATHAN, Sur un théorème métrique d'équirépartition modulo 1 dans un corps de séries formelles sur un corps fini, C.R. Acad. Sc. Paris, Sér.A, 265 (1967), 289-291.

[19] B. de MATHAN, Théorème de Koksma dans un corps de séries formelles, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 1967-1968, exposé n°4.

[20] B. de MATHAN, Approximations diophantiennes dans un corps local, Bull. Soc. Math. France, mémoire 21, 1970.

[21] H.G. MEIJER and A. DIJSKMA, On uniform distribution of sequences in GF[q,x] and GF{q,x}, Duke Math. J. 37 (1970), 507-514.

[22] G. RHIN, Quelques résultats métriques dans un corps de séries formelles sur un corps fini, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 1967-1968, exposé n°21.

[23] G. RHIN, Généralisation d'un théorème de I.M. Vinogradov à un corps de séries formelles sur un corps fini, C.R. Acad. Sc. Paris, Sér.A, 272 (1971), 567-569.

[24] G. RHIN, Répartition modulo 1 dans un corps de séries formelles sur un corps fini, Dissertationes Math. 95, 1972.

-----------------------------------

# DISTRIBUTION DES VALEURS DE LA FONCTION $\Omega_E(N)$

par Michel BALAZARD

## I INTRODUCTION -

Soit $P$ l'ensemble des nombres premiers. Si $p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ est la décomposition de $n \in \mathbb{N}^*$ en facteurs premiers $(p_1,\dots,p_r \in P,\ \alpha_1,\dots,\alpha_r \in \mathbb{N}^*)$, on note $\Omega(n) = \alpha_1 + \dots + \alpha_r = \text{card}\{(p,k) \in P \times \mathbb{N}^* \,/\, p^k | n\}$. Rappelons quelques propriétés de la fonction $\Omega$ :

i) $\Omega(n) \leqslant \dfrac{\log n}{\log 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (car $2^{\Omega(n)} \leqslant n$)

ii) $\sum\limits_{n \leqslant x} \Omega(n) \sim x \sum\limits_{p \leqslant x} \dfrac{1}{p} \sim x \log\log x$ quand $x \to +\infty$

iii) $\Omega(n) \sim \log\log n$ presque partout.

Ce dernier résultat, dû à Hardy et Ramanujan, est l'un des points de départ de la théorie probabiliste des nombres.

Pour étudier la distribution des valeurs de la fonction $\Omega(n)$, posons $N(x,k) = \text{card}\{n \in \mathbb{N}^* \,/\, n \leqslant x \text{ et } \Omega(n) = k\}$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 2$. Gauss avait conjecturé la formule : $N(x,k) \sim \dfrac{x}{\log x} \dfrac{(\log\log x)^{k-1}}{(k-1)!}$ quand $x \to +\infty$ et $k \in \mathbb{N}^*$ ($k$ constant). Pour $k = 1$, c'est le théorème des nombres premiers ; pour $k > 1$ c'en est un corollaire démontré par E. Landau en 1900. Nous reviendrons au paragraphe II à l'étude du comportement de $N(x,k)$.

Soit maintenant $E$ une partie de $P$ telle que $\sum\limits_{p \in E} \dfrac{1}{p} = +\infty$, $p_1 < p_2 < \dots$ la suite ordonnée des éléments de $E$. Nous noterons :

$$E(x) = \sum_{\substack{p \in E \\ p \leqslant x}} \frac{1}{p} \text{ pour tout } x \geqslant 2 \ ; \ \Omega_E(n) = \text{card}\{(p,k) \in E \times \mathbb{N}^* \,/\, p^k | n\} .$$

On a les propriétés suivantes :

iv) $\Omega_E(n) \leqslant \dfrac{\log n}{\log p_1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (car $p_1^{\Omega_E(n)} \leqslant n$)

v) $\sum\limits_{n \leqslant x} \Omega_E(n) \sim x\, E(x)$ quand $x \to +\infty$

vi) $\Omega_E(n) \sim E(n)$ presque partout.

Ce dernier résultat découle de l'inégalité de Turan-Kubilius.

Nous poserons ici $N_E(x,k) = \text{card}\{n \in \mathbb{N}^* \ / \ n \leq x \text{ et } \Omega_E(n) = k\}$ et nous verrons au paragraphe III comment les résultats concernant l'ensemble P de tous les nombres premiers se transposent à cette situation plus générale.

## II CAS OU E EST L'ENSEMBLE DE TOUS LES NOMBRES PREMIERS -

Commençons par deux remarques élémentaires :

i) si $x \geq 2$ et $k > \frac{\log x}{\log 2}$, on a $N(x,k) = 0$ (d'après i), § I)

ii) si $x \geq 2$, $\sum_{k \in \mathbb{N}} N(x,k) = [x]$.

Le théorème suivant décrit l'état actuel des connaissances concernant $N(x,k)$.

Théorème 1. - *a) Si* $\delta > 0$ *on a*

$$N(x,k) = F\left(\frac{k-1}{\log\log x}\right) \frac{x}{\log x} \frac{(\log\log x)^{k-1}}{(k-1)!} \left(1 + O_\delta\left(\frac{k}{(\log\log x)^2}\right)\right)$$

*uniformément pour* $x \geq 3$ *et* $1 \leq k \leq (2-\delta) \log\log x$, *où* $F$ *désigne la fonction définie pour* $|z| < 2$ *par* $F(z) = \frac{1}{\Gamma(z+1)} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^z \left(1 - \frac{z}{p}\right)^{-1}$.

*b) Pour tout* $A > 0$, *on a*

$$N(x,k) = C\, G(t) \frac{x \log x}{2^k} \left(1 + O_A\left(\frac{1}{\sqrt{\log\log x}}\right)\right)$$

*uniformément pour* $x \geq 3$ *et* $|t| \leq A$, *où* $k = 2 \log\log x + t\, 2\sqrt{\log\log x}$, $C = \frac{1}{4} \prod_{p>2} \left(1 + \frac{1}{p(p-2)}\right)$ *et* $G(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2}\, du$.

*c) Si* $\delta > 0$ *on a uniformément pour* $x \geq 3$ *et* $(2+\delta) \log\log x \leq k \leq \frac{\log x}{\log 2}$

$$N(x,k) = C \frac{x}{2^k} \log \frac{x}{2^k} + O_\delta\left(\frac{x}{2^k} \log^b\left(3 \frac{x}{2^k}\right)\right)$$

*où* $b$ *est une constante* $\in ]0,1[$ *ne dépendant que de* $\delta$.

a) est dû à L.G. Sathe et A. Selberg, étendant le théorème de Landau et un résultat précédent de P. Erdös (cf. [6], [3], [11], [12]).

b) est dû à H. Delange et n'est pas publié.

c) est dû à J.L. Nicolas (cf. [8]).

Il était naturel d'essayer de décrire les transitions entre les formules a), b), et c). C'est l'objet du théorème suivant. Avant de l'énoncer, introduisons la notation $P_k(X) = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \dots + \frac{X^k}{k!}$ (somme partielle de la série exponentielle).

<u>Théorème 2.</u> - *Pour* $x$ *réel* $\geqslant 2$ *et* $k$ *entier* $\geqslant 1$, *posons* $y = \frac{x}{2^k}$.

*On a :*

*a) si* $y < 1$, $N(x,k) = 0$

*b) si* $1 \leqslant y < 1{,}5$, $N(x,k) = 1$

*c) si* $1{,}5 \leqslant y < 2{,}25$, $N(x,k) = 2$

*d) si* $2{,}25 \leqslant y < 2{,}5$, $N(x,1) = 2$ *et* $N(x,k) = 3$ *pour* $k > 1$

*e) si* $2{,}5 \leqslant y < 3$, $N(x,1) = 3$ *et* $N(x,k) = 4$ *pour* $k > 1$

*f) si* $y \geqslant 3$, $N(x,k) = f(r) \dfrac{y}{\log y} P_{k-1}(2 \log\log y) \left\{1 + O\left(\dfrac{1}{\log\log y}\right)\right\}$,

*où* $f(z) = \dfrac{1}{2^{z-1}\Gamma(z+1)} \prod_{p \geqslant 3} \dfrac{(1-\frac{1}{p})^z}{1-\frac{z}{p}}$ *(fonction holomorphe de* $z$ *pour* $|z| < 3$*)*,

$r = 0$ *si* $k = 1$, $r = 2\dfrac{P_{k-2}(2\log\log y)}{P_{k-1}(2\log\log y)}$ *si* $k \geqslant 2$. *Le* $0$ *est absolu.*

Grâce aux estimations connues concernant $P_k(X)$, on retrouve les formules du théorème 1, sauf le reste dans les formules a) et c).

Indiquons la structure de la démonstration du théorème 2. L'idée de départ est due à G. Halasz (cf. [8]). En écrivant tout entier positif $n$ sous la forme $n = 2^\alpha m$, $m$ impair, on a :

$$\begin{aligned} n \leqslant x \text{ et } \Omega(n) = k &\Longleftrightarrow 2^\alpha m \leqslant x \quad \text{et} \quad \alpha + \Omega(m) = k \\ &\Longleftrightarrow m\, 2^{k-\Omega(m)} \leqslant x \quad \text{et} \quad \Omega(m) \leqslant k \\ &\Longleftrightarrow \psi(m) \leqslant y \quad \text{et} \quad \Omega(m) \leqslant k \end{aligned}$$

où l'on a posé $\psi(m) = m\, 2^{-\Omega(m)}$ ($\psi$ est complètement multiplicative, et tend vers $+\infty$ sur les nombres impairs). On a donc :

$$N(x,k) = \sum_{\substack{\psi(m) \leqslant y \\ \Omega(m) \leqslant k}}' 1 = T(y,k), \qquad \text{disons, où}$$

l'apostrophe indique une sommation ne portant que sur des nombres impairs.

Les cinq premières assertions du théorème 2 résultent aisément de (1).

D'autre part, la formule de Cauchy donne

$$T(y,k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \sum_{\psi(m) \leqslant y}' z^{\Omega(m)} \cdot \frac{z^{-k-1}}{1-z}\, dz \tag{2}$$

où $\gamma_r$ est la circonférence de centre 0 et de rayon $r < 1$ parcourue dans le sens positif.

Le résultat découle alors de l'estimation de l'intégrale de (2). Pour cela nous utilisons une formule asymptotique pour $\sum'_{\psi(m) \leqslant y} z^{\Omega(m)}$, établie suivant les idées de A. Selberg et H. Delange (cf. [12], [1]).

Il reste encore de nombreux problèmes non résolus concernant la distribution des valeurs de $\Omega$. Citons une conjecture de P. Erdös (cf. [3]) : si $x \geq 3$ est fixé, notons $k(x)$ l'entier $k$ qui maximise $N(x,k)$ ; alors $k(x) = \log\log x + O(1)$ quand $x \to +\infty$. On peut également conjecturer que $k \to N(x,k)$ est croissante pour $k < k(x)$ et décroissante pour $k \geq k(x)$.

## III CAS OU E EST UN ENSEMBLE DE NOMBRES PREMIERS TEL QUE $\sum_{p \in E} \frac{1}{p} = +\infty$ -

Nous avons, comme au § II :

i) si $x \geq 2$ et $k > \frac{\log x}{\log p_1}$, on a $N_E(x,k) = 0$ (d'après iv), § I)

ii) si $x \geq 2$, $\sum_{k \in \mathbb{N}} N_E(x,k) = [x]$.

Nous n'évoquerons ici que les résultats concernant l'ordre de grandeur de $N_E(x,k)$. Pour l'étude des formules asymptotiques de G. Halasz, voir [4] ou [2], tome 2, chapitres 19 et 21.

Le résultat essentiel est dû à G. Halasz et A. Sarközy (cf. [5] et [10]) :

Théorème 3. - *a) Si* $\delta > 0$ *on a* $N_E(x,k) \ll_\delta x\, e^{-E(x)} \frac{E(x)^k}{k!}$ *ment pour* $0 \leq k \leq (2-\delta)E(x)$.

*b) Si* $\delta > 0$ *on a* $N_E(x,k) \gg_\delta x\, e^{-E(x)} \frac{E(x)^k}{k!}$ *ment pour* $\delta\, E(x) \leq k \leq (2-\delta)E(x)$.

L'intérêt majeur de ces estimations est que les constantes impliquées par les symboles $\gg$ et $\ll$ ne dépendent que de $\delta$, et aucunement de l'ensemble E ; cette exigence rend d'ailleurs la démonstration de b) assez longue, et il serait intéressant d'en trouver une plus courte. Notons également que les démonstrations de G. Halasz et A. Sarközy contiennent le résultat légèrement meilleur suivant :

Théorème 3'. - *Pour tout* $A > 0$*, il existe deux constantes absolues* $m(A)$ *et* $M(A) \in ]0,+\infty[$*, telles que l'on ait :*

$$m(A)\, x e^{-E(x)} \frac{E(x)^{k-1}}{(k-1)!} \leq N_E(x,k) \leq M(A)\, x e^{-E(x)} \frac{E(x)^k}{k!}, \quad \textit{uniformément}$$

*pour* $1 \leq k \leq A\, E(x)$ *si* $A < p_1$ *; la deuxième inégalité est vérifiée également pour* $k = 0$.

On peut se demander si les polynômes $P_k$ intervenant dans le théorème 2 sont utiles pour étudier $N_E(x,k)$. La réponse à cette question est affirmative.

Théorème 4. - *Pour* $x$ *réel* $\geq 2$ *et* $k$ *entier* $\geq 1$*, posons* $y = \frac{x}{p_1^k}$.

*On a*

$$N_E(x,k) \asymp_{p_1,p_2,\delta} y\, e^{-E(y)} P_k(p_1 E(y)) \qquad \textit{uniformément}$$

*pour* $x \geq 2$ *et* $\delta\, E(x) \leq k \leq \dfrac{\log x}{\log p_1}$ .

La démonstration de ce théorème utilise le théorème 3 et des idées de G. Halasz et J.L. Nicolas (cf. [5], [7] et [8]).

En particulier si $k \geq p_1 E(x) \geq p_1 E(y)$, on a $P_k(p_1 E(y)) \asymp e^{p_1 E(y)}$ donc $N_E(x,k) \asymp_{p_1,p_2} y \exp\{(p_1-1)E(y)\}$ d'où on déduit facilement que

$$S_E(x,k) = \sum_{\substack{n \leq x \\ \Omega_E(n) > k}} 1 = \sum_{y \geq k+1} N_E(x,y) \asymp_{p_1,p_2} \frac{x}{p_1^{\,k}} \exp\{(p_1-1)E(\frac{x}{p_1^{\,k}})\} \ ,$$

résultat annoncé par K.K. Norton dans [9].

BIBLIOGRAPHIE -


[1] H. DELANGE : Sur des formules de Atle Selberg.
Acta Arith., 19 (1971), 105-146.

[2] P.D.T.A. ELLIOTT : Probabilistic Number Theory II.
Springer Verlag.

[3] P. ERDÖS : On the integers having exactly k prime factors.
Ann. of Math., (2) 49 (1948) 53-66.

[4] G. HALASZ : On the distribution of additive and the mean values of multiplicative arithmetic functions.
Studia Sci. Math. Hungar., 6 (1971) 211-233.

[5] G. HALASZ : Remarks to my paper "On the distribution of additive and the mesn values of multiplicative arithmetic functions".
Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 23 (1972), 425-432.

[6] E. LANDAU : Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen
Chelsea Publishing Company.

[7] J.L. NICOLAS : Autour de formules dues à Atle Selberg.
Colloque Hubert Delange. Orsay 1982.

[8] J.L. NICOLAS : Sur la distribution des entiers ayant une quantité fixée de facteurs premiers.
Acta Arith., 44 n°3 (1984), 191-200.

[9] K.K. NORTON : On the numbers of restricted prime factors of an integer III.
L'Enseignement Mathématique t XXVIII, fasc 1-2, 31-52.

[10 ] A. SARKÖZY : Remarks on a paper of G. Halasz.
Period. Math. Hungar., 8 (1977), 135-150.

[11] L.G. SATHE : On a problem of Hardy on the distribution of integers having a given number of prime factors I, II, III, IV.
J. Indian Math. Soc. (N.S.), 17 (1953) 63-141 ; 18 (1954), 27-81.

[12] A. SELBERG : Note on a paper of L.G. Sathe.
J. Indian Math. Soc. (N.S.), 18 (1954), 83-87.

Michel BALAZARD

Département de Mathématiques
Université de Limoges
123, Avenue Albert Thomas
87060 LIMOGES CEDEX.

# ENSEMBLES INTERSECTIFS ET RECURRENCE DE POINCARÉ

Anne BERTRAND

Le but de cet article est de montrer que les ensembles intersectifs sont exactement les ensembles de Poincaré Depuis la rédaction de ce travail deux (ou trois) démonstrations (indépendantes) de ce résultat ont été proposées par P Liardet, J.-F. Mela (et peut-être Katznelaon).

## § 1. - Les ensembles intersectifs sont les ensembles de Poincaré

Nous appellerons système dynamique tout quadruplet $(X, B, \mu, T)$ où $X$ désigne un ensemble, $B$ une $\sigma$-algèbre sur $X$, $\mu$ une mesure probabiliste sur cette algèbre et $T$ une application de $X$ dans lui-même conservant la mesure $\mu$ (c'est-à-dire que pour tout ensemble mesurable $A$, $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$.

DÉFINITION I. - Nous appellerons ensemble de Poincaré tout sous-ensemble $P$ de $\mathbb{N}^*$ tel que étant donnés un système dynamique $(X, B, \mu, T)$ et un ensemble mesurable $A$ de mesure non nulle :

$$\exists m \in P \qquad \mu(T^{-m}A \cap A) > 0 \ .$$

Pour tout sous-ensemble $S$ de $\mathbb{N}^*$, nous désignerons par $S$-$S$ l'ensemble des nombres de la forme $a$-$b$ avec $a \in S$, $b \in S$, $a \neq b$. Nous appellerons densité d'un sous-ensemble $S$ de $\mathbb{N}$ la limite, lorsqu'elle existe :

$$d(S) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \#\{ b \in S , \ b < N \}$$

où $A^{*}$ désigne le cardinal d'un ensemble $A$.

Nous appellerons densité supérieure de $S$

$$\bar{d}(S) = \overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{N} \#\{ b \in S \ , \ b < N \} \ .$$

Nous appellerons densité supérieure de Banach le nombre

$$\overline{BD}(S) = \overline{\lim_{\# I \to \infty}} \frac{\#(S \cap I)}{\# I}$$

où la limite supérieure est prise sur l'ensemble des intervalles $I$ de $\mathbb{N}$ .

DÉFINITION II. - Nous appellerons <u>ensemble intersectif</u> tout sous-ensemble $H$ de $\mathbb{N}^*$ vérifiant les conditions équivalentes qui suivent :

1) pour tout sous-ensemble $S$ de densité strictement positive, alors

$$H \cap (S-S) \neq \emptyset \ .$$

2) pour tout sous-ensemble $S$ de densité supérieure strictement positive

$$H \cap (S-S) \neq \emptyset \ .$$

3) pour tout sous-ensemble $S$ de densité supérieure de Banach strictement positive :

$$H \cap (S-S) \neq \emptyset \ .$$

On trouvera dans Rusza [1] et Fürstenberg [2] la preuve que ces conditions sont équivalentes ; on trouvera dans Kamae-Mendès France [3] et Rusza [4] la preuve que les conditions qui suivent sont aussi équivalentes :

DÉFINITION III. - Nous appellerons <u>ensemble de van der Corput</u> tout sous-ensemble $H$ de $\mathbb{N}^*$ vérifiant les conditions équivalentes qui suivent :

1) Pour toute mesure positive $\nu$ sur $[0, 2\pi]$ si

$$\forall k \in H \quad \int_0^{2\pi} \cos kx \ d\nu(x) = 0 \ ,$$

alors $\nu$ est continue en $0$ .

2) Pour toute mesure $\nu$ positive sur $[0, 2\pi]$ si

$$\forall k \in H \quad \gamma_k = \int_0^{2\pi} e^{-ihx} \ d\nu(x) = 0$$

alors $\nu$ est continue en $0$ .

3) Si pour tout $h \in H$ la suite $v_n = (u_{n+h} - u_n)_{n \geq 0}$ est équirépartie modulo un alors la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ l'est aussi.

4) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists P(x) = \sum_{h \in H \cup \{0\}} a_n \cos hx \qquad a_h \in R$

tel que

$$P(0) = 1$$

$$a_o \leq \varepsilon$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \, , \quad P(x) \gtrsim 0 \, .$$

Les réflexions qui suivent ont été inspirées par l'article de Mendès France et Kamae [3] et par l'ouvrage de Fürstenberg [2] ; leur langage commun nous a frappé : ce n'était pas la même soupe, mais c'était le même assaisonnement et il nous a semblé raisonnable de conjecturer que les ensembles de Poincaré et ceux de van der Corput sont exactement les mêmes.

Rusza de son côté a conjecturé que les ensembles de van der Corput et les ensembles intersectifs étaient les mêmes ensembles.

Nous ne nous sommes tirés d'aucune deces conjectures mais nous sommes en mesure de prouver le résultat bâtard que voici :

THÉORÈME 1. - Soit $H$ un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ ; les conditions suivantes sont équivalentes :

1) $H$ est un ensemble de Poincaré ;

2) $H$ est un ensemble intersectif.

On trouvera dans [2] la preuve que $1 \Rightarrow 2$ . Montrons que $2 \Rightarrow 1$ :

LEMME 1. - Soit $(X, B, \mu, T)$ un système dynamique, et soit $A$ un sous-ensemble mesurable de $X$ . Alors l'ensemble

$$C = \{x \; ; \exists n, m \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \, , \; x \in T^n A \cap T^m A \text{ et } \mu(T^n A \cap T^m A) = 0$$

est un ensemble $T$ invariant de mesure nulle.

C'est en effet la réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle et il est clair qu'il est $T$-invariant.

LEMME 2. - <u>Soit</u> $(X, B, \mu, T)$ <u>un système dynamique</u>, <u>et soit</u> $A$ <u>un ensemble de mesure non nulle</u>.

<u>Soit</u> $D$ <u>l'ensemble des éléments</u> $x$ <u>de</u> $A$ <u>tels qu'il existe une suite</u> $(j_i)_{i\geq 0}$ <u>d'éléments de</u> $A$ <u>et une suite</u> $(n_i)_{i\geq 0}$ <u>croissants d'entiers de densité supérieure strictement positive telle que</u>

$$x = T^{n_i}(j_i) .$$

<u>Alors</u> $D$ <u>est de mesure non nulle</u>.

D'après le théorème de récurrence de Khintchine [5], il existe une suite $m_i$ de densité positive $d$ telle que pour tout $i$ :

$$\mu(T^{-m_i} A \cap A) \geq \frac{\mu[A]^2}{2} .$$

Soit $f_n$ la fonction qui vaut $1$ si $x$ appartient à $T^{-n} A \cap A$, ou $0$ sinon. Alors pour tout $n$ appartenant à $M = \{m_i ; i \geq 0\}$

$$\int_X f_n \geq \frac{1}{2}(\mu(A))^2$$

et donc :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \Sigma \int_X f_n \, d\mu \geq \frac{d}{2}(\mu(A))^2 .$$

Soit $V = \{x ; \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \Sigma f_n(x) = 0\}$. Montrons que

$$\mu(V) < 1 .$$

Sinon, par convergence dominée :

$$\frac{1}{N} \sum_{m\leq N} \int_X f_m \, d\mu = \frac{1}{N} \sum_{n\leq N} \int_V f_n \, d\mu$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \int_V f_n \, d\mu = \int_V \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \Sigma f_n \, d\mu = 0$$

et donc

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n<N} \int_X f_n \, d\mu = 0$$

ce qui contredit le théorème de Khintchine.

L'ensemble D est égal à X-V car

$$x \in X-V \Leftrightarrow \overline{\lim_{N \to \infty}} \frac{1}{N} \sum_{n<N} f_n(x) > 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \#\{n \leq N \; ; \; x \in T^{-n} A \cap A\} > 0$$

$$\Leftrightarrow x \in D$$

et la mesure de D est donc positive.

LEMME 3. - Soient H un ensemble intersectif, $(X, B, \mu, T)$ un système dynamique, T une transformation inversible, A un ensemble de mesure non nulle.

Alors

$$\exists n \in H \qquad \mu(T^{-n} A \cap A) > 0 \; .$$

Soit D comme au lemme 2 et soit C défini comme au lemme 1.

Soit x appartenant à D mais pas à C ( x existe car C est de mesure nulle contrairement à D .

Soient $(n_i)_{n \geq 0}$ et $(z_i)_{i \geq 0}$ définis comme au lemme 2 en fonction de x .

La suite $(n_i)_{n \geq 0}$ étant de densité strictement positive, et l'ensemble M étant intersectif.

$$\exists i, j \quad n_i - n_j \in H$$

$$x = T^{n_i}(z_i) = T^{n_j}(z_j)$$

T étant inversible

$$z_j = T^{n_i - n_j} z_i \; .$$

Comme $z_i$ et $z_j$ sont dans A , $T^{-(n_i - n_j)} A \cap A$ est non vide ; il contient $z_i$ ; $z_i$ n'appartient pas plus que x à C car C est T-invariant et donc

$$\mu(T^{-(n_i-n_j)} A \cap A) > 0$$

$n = n_j - n_i$ contient donc $0$ .

La preuve du théorème s'achève en étendant le lemme 3 au cas où $T$ n'est pas inversible selon la technique standard.

<u>Remarque</u>. - La classe des ensembles de la forme $B-B$ ou $B$ est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ de densité supérieure de Banach positive (resp. de densité positive, ou de densité supérieure positive) ne possède pas la propriété de Ramsey (on dit qu'une classe $S$ de sous-ensembles de $\mathbb{N}$ possède la propriété de Ransey si

$$S_1 \cup S_2 \in S \Rightarrow S_1 \text{ ou } S_2 \text{ contient un élément de } S \text{ ).}$$

(La classe des ensembles de la forme $B-B$ sans condition sur $B$ par exemple possède cette propriété [ 2] .)

En effet, si la classe $S$ possède la propriété de Ramsey, la classe $S^*$ des ensembles qui recoupent tous les ensembles de la classe $S$ possède la propriété suivante :

$$S_1\ S_2 \in S^* \Rightarrow S_1 \cap S_2 \in S^* \ .$$

Si $S$ est la classe des ensembles de la forme $B-B$ ou $B$ est de densité positive, $S^*$ est alors la classe des ensembles de Poincaré d'après le théorème 1 et les ensembles

$$H_1 = \{ n^2 \ ;\ n \in \mathbb{N} \}$$
$$H_2 = \{ 2n^2 \ ;\ n \in \mathbb{N} \}$$

sont d'intersection vide et sont des ensembles de Poincaré [2] .

## § 2. - Ensembles de van der Corput

Rusza a prouvé [4] que les ensembles de van der Corput sont des ensembles tersectifs ; ils sont donc des ensembles de Poincaré d'après le théorème 1. ›nnons une preuve "ergodique" de ce résultat, basée sur le lemme suivant :

Lemme de récurrence de Khintchine

LEMME 4. - Soit $(X, B, \mu, T)$ un système dynamique. Alors pour tout ensemble mesurable A la suite

$$(\gamma_n)_{n \geq 0} = (\mu(T^{-n} A \cap A))_{n \geq 0}$$

est une suite définie positive et possède une moyenne

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n<N} \mu(T^{-n} A \cap A) \geq [\mu(A)]^2 .$$

La suite $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ est définie positive car si $a_o \dots a_n$ sont des nombres complexes :

$$\sum_{i,j=0}^{n} a_i \overline{a}_j \gamma_{i-j} = \sum_{i,j=0}^{n} a_i \overline{a}_j \mu(T^{-(j-i)} A \cap A) = \sum_{i,j=0}^{n} a_i \overline{a}_j \mu(T^{-i} A \cap T^{-j} A) .$$

Notons $\chi_E$ la fonction caractéristique d'un ensemble E :

$$\sum_{i,j=0}^{n} a_i \overline{a}_j \gamma_{i-j} = \int_X = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \chi_{T^{-i}A}\right)\left(\sum \overline{a}_i \chi_{T^{-i}A}\right) d\mu \geq 0 .$$

Par conséquent cette suite possède une moyenne $\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} \gamma_n$, et il est classique que cette moyenne est supérieure ou égale à $(\mu(A))^2$.

Il est donc immédiat que les ensembles de van der Corput sont des ensembles de Poincaré : étant donné un ensemble mesurable B de mesure non nulle d'un système dynamique $(X, B, \mu, T)$, la suite $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ associée est la transformée de Fourier d'une mesure positive $\nu$ sur $[0, 2\pi]$ et si les $\gamma_n$ s'annulent sur H, d'après la définition 3, $\mu$ est continue en 0 et donc la moyenne de $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ est nulle, ce qui est impossible (on trouvera dans Bass [6] toutes précisions sur les suites définies positives et leurs moyennes).

Nous aurions souhaité montrer que lorsque les coefficients de Fourier d'une mesure tendent vers 0 lorsque n tend vers l'infini en restant dans un ensemble de van der Corput, alors la mesure est continue. Nous n'y sommes pas parvenus mais :

THÉORÈME II. - Soit H un ensemble de van der Corput.

1) Soit $\nu$ une mesure sur $[0, 2\pi]$ telle que :

$$\exists \alpha \geq 0 \qquad \sum_{k \in H} \left| \int_0^{2\pi} \cos k x \, d\nu(x) \right|^{\alpha} < \infty$$

ou encore

$$\sum_{k \in H} \left| \int_0^{2\pi} e^{-inx} \, d\nu(x) \right|^{\alpha} < \infty$$

alors la mesure $\nu$ est continue sur $[0, 2\pi]$.

2) Soit $(X, B, \mu, T)$ un système dynamique, A un ensemble mesurable tel que

$$\exists \alpha \geq 0 \qquad \sum_{k \in H} [\mu(T^{-k} A \cap A)]^{\alpha} < \infty$$

alors $\mu(A) = 0$.

3) Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle telle que pour tout entier p il existe $\alpha \geq 0$ tel que

$$\sum_{k \in H} \left| \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} e^{2i\pi p(u_{n+k} - u_n)} \right|^{\alpha} < \infty .$$

Alors la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est équirépartie modulo un.

La démonstration s'inspire directement de Kamae et Mendès France [3] et Rusza [4].

Soit H un ensemble de van der Corput ; montrons que

$$\sum_{k \in H} \left| \int_0^{2\pi} \cos k x \, d\nu(x) \right|^2 < \infty \Rightarrow \nu \quad \text{est continue sur } [0, 2\pi].$$

Soit $P(x) = \frac{a_o}{\sqrt{2}} + \sum_{k \in H} a_k \cos k x$ un polynôme trigonométrique vérifiant

$$P(0) = 1$$
$$P(x) \geq 0$$
$$a_o < \varepsilon$$

dont il est fait état dans la définition III.

D'après un théorème de Fejer, il existe $g(x) = \sum_{m\geq 0} b_m e^{imx}$ tel que

$$P(x) = g(x)\ \overline{g(x)}\ .$$

Ainsi

$$\frac{a_o}{\sqrt{2}} = \sum_{m\geq 0} \| b_m \|^2$$

et :

$$2\pi \left( \sum_{k\in H\cup\{0\}} \| a_k \|^2 \right) = \int_0^{2\pi} P(x)\ \overline{P(x)}\ dx$$

où $dx$ désigne la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ ,

$$\begin{aligned} 2\pi \left( \sum_{k\in H\cup\{0\}} \| a_k \|^2 \right) &= \int_0^{2\pi} (g\ \bar{g})^2(x)\ dx \\ &\leq \sqrt{\int_0^{2\pi} g\ \bar{g}(x)\ dx}\ \sqrt{\int_0^{2\pi} g\ \bar{g}(x)\ dx} \\ &\leq \sum \| b_m \|^2 = a_o\ . \end{aligned}$$

Comme $P(x)$ est toujours positif, si nous posons $\ell_k = \int^{2\pi} \cos k x\, d\nu(x)$ :

$$\begin{aligned} 0 \leq \nu(\{0\}) \leq \int_0^{2\pi} P\, d\nu &= \frac{a_o}{\sqrt{2}} + \sum_{k\in H} a_k\, \ell_k \\ &\leq \sqrt{\sum_{k\in H\cup\{0\}} \| a_k \|^2}\ \sqrt{\sum_{k\in H\cup\{0\}} \| \ell_k \|^2} \\ &\leq a_o \sum_{k\in H} \left| \int_0^{2\pi} \cos k\, x\ d\nu(x) \right|^2 . \end{aligned}$$

Comme $a_o$ peut être pris arbitrairement petit, $\mu(0)$ est nul.

Si $\nu$ avait une masse au point $c \neq 0$ , la mesure translatée $\nu_1(x) = \nu_1(x-c)$ en aurait une en $0$ ainsi que la mesure

$$\nu_2(x) = \frac{1}{2} [\ \nu_1(x) + \nu_1(2\pi - x)\ ] \qquad x \in [0, 2\pi]\ .$$

Or

$$\int_0^{2\pi} \cos k\, x\ d\nu_2(x) = \frac{1}{2}\ \cos k\, c\ . \int_0^{2\pi} \cos k\, x\, d\nu(x)$$

et d'après ce qui précède $\nu_2$ n'a pas de masse en $0$ , donc $\nu$ n'a pas de masse en $c$ .

Passons au cas où $\alpha$ n'est plus égal à $2$ .

Si $\alpha \leq 2$ et $\sum \left| \int \cos k\, x\, d\nu(x) \right|^\alpha$ converge, alors $\sum \left| \int \cos k\, x\ d\nu(x) \right|^2$ converge aussi, d'où le résultat.

Si $\alpha$ est supérieur ou égal à $2$, il existe $m$ tel que $\alpha \leq 2m$ et :

$$\sum \left| \int_0^{2\pi} \cos kx \, d\nu(x) \right|^{2m} < \infty .$$

Supposons, quitte à changer $\nu$ en $\frac{1}{2}(\nu(x) + \nu(2\pi - x))$ que $\int_0^{2\pi} \sin kx \, d\nu(x) = 0$ ; alors si $\nu$ a une masse en $0$ la mesure $\nu_m = \nu * \nu * \nu \; \dots * \nu$ ($m$ fois) a aussi une masse et

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \, d\nu_m(x) = \int_0^{2\pi} (\cos kx \, d\nu(x))^m$$

ainsi

$$\int_0^{2\pi} \left| \cos kx \, d\nu_m(x) \right|^2 < \infty$$

et donc $\nu_m$ n'a pas de masse, donc $\nu$ non plus.

La preuve se ferait de même en considérant $\int_0^{2\pi} e^{-2ikx} \, d\nu(x)$ au lieu de $\int_0^{2\pi} \cos kx \, d\nu(x)$.

La seconde proposition est immédiate au vu du lemme 4.

Prouvons la troisième. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle ; fixons un entier $p$ et posons

$$y_n = e^{2i\pi p u_n} .$$

Supposons qu'il existe $\alpha = \alpha(p)$ tel que

$$\sum_{k \in H} \left| \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi p(u_{n+k} - u_n)} \right|^\alpha$$

$$= \sum_{k \in K} \left| \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum y_{n+k} \cdot \overline{y}_n \right|^\alpha < \infty$$

et soit $F$ un sous-ensemble infini de $\mathbb{N}$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$ la limite suivante existe :

$$\lim_{N \in F} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} y_{n+k} \overline{y}_n = \gamma_k .$$

La suite $(\gamma_k)_{k \geq 0}$ est une suite définie positive (car c'est une corrélation) et est donc la transformée de Fourier d'une mesure sans masse en $0$ d'après 1). Or la masse en $0$ est égale ([6]) à la moyenne de $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ qui est aussi égale ([6]) au carré de la moyenne de $(y_n)_{n \geq 0}$ ; ainsi :

$$\lim_{\substack{N\to\infty\\ N\in F}} \frac{1}{N} \sum_{n<N} y_n = \lim_{\substack{N\to\infty\\ N\in F}} \frac{1}{N} \sum_{m<N} e^{2i\pi p u_n} = 0 .$$

Ceci étant vrai pour tout $p$, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est équirépartie modulo un d'après le critère de Weyl.

§ 3. - Quelques exemples cités par Kamae et Mendès France où l'on peut en dire davantage

THÉORÈME 3. - A) Nous dirons qu'un sous-ensemble $H$ de $\mathbb{N}$ possède la propriété $A$ s'il existe un sous-ensemble infini de $I$ tel que $H$ contienne

$$I - I = \{ p-q \ ; \ p > q \ ; \ p,q \in I \} .$$

B) Nous dirons qu'un sous-ensemble $H$ de $\mathbb{N}$ possède la propriété $B$ si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $H \cap K\mathbb{Z}$ contient un sous-ensemble infini $B_k = (b_1^k \ b_2^k \ \dots)$ tel que la suite $(b_n^k x)_{n\geq 0}$ soit équirépartie modulo un pour tout $x$ irrationnel.

Soit $H$ un ensemble possédant la propriété $A$ ou $B$ ; alors

1) Pour toute mesure positive $\nu$ sur $[0, 2\pi]$, de série de Fourier $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{Z}}$

$$\lim_{\substack{n\in N\\ n\to\infty}} \gamma_n = 0 \Rightarrow \nu \ \text{est une mesure continue}$$

$$\lim_{\substack{k\in H\\ k\to\infty}} \int_0^{2\pi} \cos kx \, d\nu(x) = 0 \Rightarrow \nu \ \text{est une mesure continue}$$

et de façon plus précise pour toute mesure $\nu$ sur $[0, 2\pi]$ :

$$\nu(\{0\}) \leq \overline{\lim_{\substack{k\in H\\ k\to\infty}}} \int_0^{2\pi} \cos kx \, d\nu(x)$$

$$\nu(\{0\}) \leq \overline{\lim_{\substack{h\in H\\ h\to\infty}}} \gamma_h .$$

2) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle telle que pour tout entier $p$ :

$$\lim_{\substack{k\to\infty\\ k\in H}} \left( \overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} e^{2i\pi p(u_{n+k} - u_n)} \right) = 0$$

alors la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est équirépartie modulo un.

3) Soit $(X, B, \mu, T)$ un système dynamique, soit $A$ un ensemble mesurable ; alors

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in H \quad \mu(T^{-n} A \cap A) \geq [\mu(A)]^2 - \varepsilon .$$

Un exemple d'ensemble vérifiant B est

$$\{ p^2 \ ; \ p \in \mathbb{N}^* \}$$

et plus généralement

$$\{ Q(p) \ ; \ p \in \mathbb{N}^* \}$$

où $Q(X)$ est un polynôme à coefficients entiers tel que $Q(0) = 0$ .

Les suites "à distributions homogènes" ([7]) vérifient également B (on dit qu'une suite $(n_i)_{i \geq 0}$ est à distribution homogène si pour tout $x$ non nul la suite $(n_i x)_{i \geq 0}$ est équirépartie modulo un).

Montrons que $A \Rightarrow 1$.

Soit $J = \{j_1, j_2 \ldots\}$ un ensemble inclus dans $I$ tel que $\dfrac{j_{n+1}}{j_n} > 3$ .

Alors $H$ contient $(J-J)^* = \{ p-q \ ; \ p > q \ , \ p\,q \in J \}$ , et chaque élément de $J-J$ est obtenu d'une seule façon comme la différence de deux éléments de $J$ .

Considérons, suivant Mendès France et Kamae, le polynôme trigonométrique

$$f_N(x) = \frac{1}{N^2} \Big( \sum_{\substack{i_\ell \in J \\ \ell < N}} e^{i j_\ell x} \Big) \Big( \sum_{\substack{j_\ell \in N \\ \ell < N}} e^{i j_\ell x} \Big)$$

$$= \frac{1}{N} + \frac{2}{N^2} \sum_{\substack{j_\ell \in J \\ j_k \in J \\ N > \ell > k}} e^{i(j_\ell - j_k)x} .$$

Le polynôme trigonométrique $f_N(x)$ prend des valeurs positives pour tout $x$ ; sa partie réelle

$$\frac{1}{N} + \frac{2}{N^2} \sum_{\substack{j_\ell \in J \\ j_k \in J \\ N > \ell > k}} \cos (j_\ell - j_k) x$$

prend donc des valeurs positives et vaut 1 lorsque $x = 0$ ; donc étant donné une mesure $\nu$ sur $[0, 2\pi]$ :

$$\begin{aligned}
\nu(\{0\}) &\leq \int_0^{2\pi} f_N(x)\, d\nu(x) \\
&= \frac{1}{N} + \frac{2}{N^2} \sum_{N>\ell>k} \cos(j_\ell - j_k)x\, d\nu(x) \\
&\leq \Big[ \sup_{h\in (J-J)^*} \int_0^{2\pi} \cos hx\, d\nu \Big] \Big( \frac{1}{N} + \sum_{N>\ell>k} \frac{2}{N^2} \Big) \\
&\leq \sup_{h\in(J-J)^*} \int_0^{2\pi} \cos hx\, d\nu(x)
\end{aligned}$$

et comme $J$ est simplement un sous-ensemble de $I$ suffisamment lacunaire :

$$\nu\{0\} \leq \limsup \int_0^{2\pi} \cos hx\, d\nu(x)$$

et $\nu\{0\} = 0$ lorsque cette limite est nulle.

Nous procéderions de même pour les $(\gamma_k)_{k\geq 0}$ .

Nous montrerions que $A \Rightarrow 2$ comme au théorème 2, compte tenu de la remarque ci-dessus sur $f_N(x)$.

Nous montrerions de même que si $H$ vérifie la propriété $A$ , alors si $A$ est un ensemble mesurable d'un système dynamique $(X, B, \mu, T)$ d'après le lemme 4 la suite $(\gamma_n)_{n\geq 0} = \mu(T^{-n} A \cap A)$ est la transformée de Fourier d'une mesure $\nu$ sur $[0, 2\pi]$ vérifiant $\nu\{0\} \geq [\mu(A)]^2$ et d'après 1)

$$\begin{aligned}
[\nu(A)]^2 &\leq \overline{\lim_{\substack{h\to\infty \\ h\in H}}}\ \gamma_n \\
&\leq \overline{\lim_{\substack{k\to\infty \\ k\in H}}}\ \mu(T^{-n} A \cap A) .
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que $B \Rightarrow 1$ . Suivons toujours la démonstration de Kamae et Mendès France ; étant donné une mesure $\nu$ sur $[0, 2\pi]$, choisissons un entier $k$ tel que :

$$\sum_{\substack{2\pi(p/q)\in Q\cap[0,2] \\ q \text{ ne divise pas } k}} \nu\Big(\Big\{\frac{2\pi p}{q}\Big\}\Big) < \varepsilon$$

Soit $B_k = (b_1^k\, b_2^k \ldots) \subset H \cap k\,\mathbb{Z}$ une suite telle que la suite $(b_n x)_{n \geq 0}$ soit équirépartie modulo un pour tout $x$ irrationnel ; soit

$$f_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} e^{ib_i x} .$$

Lorsque $x$ est irrationnel

$$\lim_{N \to \infty} f_N(x) = 0 .$$

Lorsque $x$ est rationnel et se met sous la forme $\frac{p}{k}$ , $f_N(x) = 1$ pour tout $N$ .

Lorsque $x$ est rationnel et ne se met pas sous la forme $\frac{p}{k}$ , $1 \geq f(x) \geq -1$ .

Par convergence dominée, les coefficients de Fourier $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ de la mesure $\nu$ vérifient :

$$\sum_{\substack{x \in 2\pi(p/k) \\ x \in [0, 2\pi]}} \nu(\{x\}) - \sum_{\substack{x = 2\pi(p/q) \\ x \in [0, 2\pi] \\ q \text{ ne divise pas } k}} \nu(\{x\}) \leq \underline{\lim}_{N \to \infty} \frac{1}{N} (\gamma_{b_1} + \ldots + \gamma_{b_n}) \leq$$

$$\leq \overline{\lim}_{N \to \infty} \frac{1}{N} (\gamma_{b_1} + \ldots + \gamma_{b_n}) \leq \sum_{\substack{x \in 2\pi(p/k) \\ x \in [0, 2\pi]}} \nu(\{x\}) + \sum_{\substack{x = 2\pi(p/q) \\ x \in [0, 2\pi] \\ q \text{ ne divise pas } k}} \nu(\{x\})$$

Comme $\sum_{\substack{x = 2\pi(p/q) \\ x \in [0, 2\pi] \\ q \text{ ne divise pas } k}} \nu\{x\}$ est majoré en valeur absolue par $\varepsilon$ nous obtenons

$$\nu\{0\} \leq \overline{\lim}_{k \to \infty} \left( \overline{\lim}_{N \to \infty} \frac{1}{N} \left( \gamma_{b_1^k} + \ldots + \gamma_{b_N^k} \right) \right)$$

$$\leq \overline{\lim}_{\substack{h \to \infty \\ h \in H}} \gamma_h .$$

On passe à $\int_0^{2\pi} \cos kx \, d\nu(x)$ selon le procédé standard, ainsi qu'au cas des sauts situés hors de l'origine.

Les propositions 2 et 3 se déduisent immédiatement de 1 .

D'une façon analogue (on trouvera dans Bass, 5e partie, le type de démonstration à mettre en œuvre) nous pourrions prouver dans le cas B :

COMPLÉMENT AU THÉORÈME 3. - Etant donné un ensemble H vérifiant l'hypothèse B, une mesure $\nu$ sur $[0, 2\pi]$, et sa série de Fourier $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ :

$$\sum_{(p/q)\in \mathbb{Q}\cap[0,1]} \nu\left(\left\{\frac{2\pi p}{q}\right\}\right) = \lim_{k\to\infty} \lim_{N\to\infty} \frac{(\gamma_{b_1^k}+\dots+\gamma_{b_N^k})}{N}$$

et plus généralement :

$$\sum_{(p/q)\in \mathbb{Q}\cap[0,1]} \nu\left(\left\{x+\frac{2\pi p}{q}\right\}\right) = \lim_{k\to\infty} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \left(\sum_{j=1}^{N} e^{ib_j x} \gamma_{b_j^k}\right) .$$

On peut également obtenir des indications sur la somme des carrés des sauts de $\nu$.

Si H est un ensemble à distribution homogène, nous obtenons plus simplement :

$$\nu(\{0\}) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \gamma_i .$$

## § 4. - Application à la suite $(x\,\theta^n)_{n\geq 0}$

THÉORÈME 4. - Soient a et r des entiers positifs ; soit $\theta$ un nombre réel supérieur à 1 vérifiant

$$\theta^{2r} = a\,\theta^r + 1$$

$$\theta^{2r} = a\,\theta^r - 1$$

où encore

$$\theta = \sqrt[r]{a} .$$

Si la suite $\{x\,\theta^n\}_{n\geq 0}$ est répartie modulo un selon une mesure dont les coefficients de Fourier tendent vers 0, alors elle est équirépartie modulo un (c'est le cas en particulier si la mesure de répartition est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue)

Les bases $\theta$ ainsi définies se comportent, sous cet aspect, comme des bases entières.

Soit $u_n = (x(\sqrt[r]{a})^n)_{n\geq 0}$

$$u_{n+hr} - u_n = x(a^h - 1)(\sqrt[r]{a})^n$$

Soit $\nu$ la mesure de répartition de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$, (ou à défaut une mesure associée à cette suite, ce qui veut dire qu'il existe un sous-ensemble infini F de $\mathbb{N}$ tel que pour toute fonction $e^{mix}$

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ N\in F}} \frac{1}{N} \sum_{n<N} e^{imu_n} = \int_0^1 e^{imx}\, d\nu(x)) .$$

La somme

$$v_{h,m} = \lim_{\substack{N\to\infty \\ N\in F}} \frac{1}{N} \sum_{n<N} e^{2i\pi m(u_{n+hr}-u_n)} = \lim_{\substack{N\to\infty \\ N\in F}} \frac{1}{N} \sum_{n<N} e^{2i\pi m(a^h-1)u_n}$$

est donc égale à $\gamma_{n(a^h-1)}$.

Si nous fixons $m$, la limite de $v_{h,m}$ est nulle lorsque $h$ tend vers l'infini ; d'après le théorème 3, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est équirépartie modulo un.

Soit maintenant $\theta^{2r} = a\theta^r \pm 1$. Nous savons que la suite $(x\theta^n)_{n\geq 0}$ est équirépartie modulo un si et seulement si la suite $((\theta^{4r}-1)x\theta^n)_{n\geq 0}$ l'est ([8]).

Soit $\nu$ une mesure associée à la suite $(x\theta^n)_{n\geq 0}$, dont les coefficients de Fourier tendent vers zéro lorsque n tend vers l'infini.

Soit $u_n = x(\theta^{4r}-1)\theta^n$

$$u_{n+4pr} - u_n = x\theta^n((\theta^{4r+4pr} - \theta^{4pr})) - (\theta^{4r}-1))$$

$$= x\theta^n.\theta^{2pr+2r}(\theta^{2pr+2r} + \frac{1}{\theta^{2p+2r}} - (\theta^{2p-2r} + \frac{1}{\theta^{2p-2r}})) .$$

D'après les formules de Newton

$$m(p) = \theta^{2r+2p} + \frac{1}{\theta^{2r+2p}} - (\theta^{2p-2r} + \frac{1}{\theta^{2p-2r}})$$

est un entier qui tend vers l'infini avec $p$ (en effet $\theta^{2s}$ a pour conjugué $\frac{1}{\theta^{2s}}$).

Les répartitions des suites $(m(p) . x\,\theta^n . \theta^{2pr+2r})_{n \geq 0}$ et $(m(p)\, x\,\theta^n)_{n \geq 0}$ sont les mêmes.

Pour tout entier $k$ fixé :

$$\lim_{p \to \infty} \Big| \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n<N} e^{2i\pi k x \theta^n m(p)} \Big| = \lim_{p \to \infty} \gamma_{m(p)} = 0$$

et d'après le théorème 3, $(u_n)_{n \geq 0}$ est équirépartie modulo un, donc $(x\theta^n)_{n \geq 0}$ aussi.

-:-:-:-

## BIBLIOGRAPHIE

[1] I. RUSZA, <u>On Difference sets</u>, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungaria 13 (1978).

[2] H. FÜRSTENBERG, <u>Recurrence in Ergodic Theory and combinatorial number Theory</u>, Princeton University Press, Princeton 1981.

[3] T. KAMAE, M. MENDÈS FRANCE, van der CORPUT, <u>Difference Theorem</u>, Israel J. of Math. 31. 32, 1978-1979.

[4] I. RUSZA, <u>Ensembles intersectifs</u>, Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux, 1982-1983.

[5] W. PARRY, <u>Topics in ergodic Theory</u>, Cambridge University Press, New York , 1981.

[6] J. BASS, <u>Cours de mathématiques</u>, tomme III, Masson Paris, 1971.

[7] M. BOSHERNITZAN, <u>Homogeneously distributed sequences and Poincaré sequences of integers of sublacunary growth</u>, Mh. Math. 96, 173-181 (1983).

[8] A. BERTRAND-MATHIS, <u>Développements en base</u> $\theta$ <u>et répartition modulo un de la suite</u> $(x\,\theta^n)_{n \geq 0}$, à paraître.

-:-:-:-

Anne BERTRAND - MATHIS
U.E.R. de Math. et Informatique
L.A. associé au C.N.R.S. 226
Université de Bordeaux I
351, cours de la Libération
F - 33405 TALENCE CEDEX

# ESTIMATIONS NUMERIQUES DU RESTE DE LA FONCTION SOMMATOIRE RELATIVE AUX ENTIERS SANS FACTEUR CARRE

par Henri COHEN et François DRESS

## 1. POSITION DU PROBLEME

On désignera par $\mu$ la fonction de Möbius, par M et Q les fonctions sommatoires $M(x) := \sum_{n\leqslant x} \mu(n)$ et $Q(x) := \sum_{n\leqslant x} \mu(n)$, et par $R(x)$ le reste $Q(x) - (6/\pi^2)x$. On utilisera les notations standards [ ] et { } pour représenter respectivement la partie entière et la partie fractionnaire.

Contrairement au cas des fonctions $|\pi(x) - \mathrm{li}\,x|$ ou $|\Psi(x) - x|$, il est très malaisé de donner de bonnes majorations effectives de $|M(x)|$ et de $|R(x)|$, même asymptotiquement plus faibles que le théorème des nombres premiers. L'exemple le plus frappant est celui de $|M(x)|$, dont la majoration $x/143,7$ pour $x \geqslant 3\,297$ (F. Dress [2], amélioration de $x/80$ pour $x \geqslant 1119$ de R. A. Mac Leod [3]) est meilleure que la majoration $5,3x/(\mathrm{Log}\,x)^{10/9}$ (L. Schoenfeld [6]) jusqu'à $2,25\ 10^{170}$. Enfin, il n'existe même pas de majoration effective connue de $|M(x)|$ en $x\exp(-c\sqrt{\mathrm{Log}\,x})$.

Pour ce qui est de $|R(x)|$, la meilleure majoration en $\sqrt{x}$ était jusqu'à présent $0,5\sqrt{x}$ pour $x \geqslant 8$ (L. Moser et R. A. Mac Leod [4]).

## 2. RESULTATS

Nous avons établi les majorations suivantes.

Théorème 1. Pour tout $x$ et tout $y \geqslant 1$, on a

$$|R(x+y) - R(x)| < 1,6749\sqrt{y} + 0,6212\,x/y\,.$$

Corollaire. Pour tout $x \geqslant 1$ et tout $y > 1,911\,x^{2/3}$, on a

$$|R(x+y) - R(x)| < 2\sqrt{y}\,.$$

Théorème 2. Pour tout $x$ et tout $y \geq 1$, on a

$$|R(x+y) - R(x)| < 0{,}7343\, y/(x^{1/3}) + 1{,}4327\, x^{1/3}$$

Théorème 3. Pour tout $x \geq 1664$, on a

$$|R(x)| < 0{,}1333\sqrt{x}\,.$$

## 3. DEMONSTRATIONS

Elles sont toutes obtenues par la conjonction de majorations asymptotiques effectives et de vérifications par ordinateur qui permettent de "raccorder" avec les vraies bornes inférieures de validité.

Le point de départ consiste à raffiner la formule triviale $Q(x) = \Sigma_{a^2 \leq x}\, \mu(a)\,[x/a^2]$ (dont l'utilisation "bloque" à $(3/\pi^2)\sqrt{x}$, comme Moser et Mac Leod en ont fait l'expérience) en

$$Q(x) = \Sigma_{a \leq x_n} \mu(a)\,[x/a^2] + \Sigma_{j=1}^{n-1} M(x_j) - (n-1)M(x_n)$$

$$(\text{avec } x_j := [\sqrt{x/j}\,])\,,$$

et à utiliser des majorations effectives de $|M(x)|$, notamment pour majorer le terme $\Sigma_{a > x_n} \mu(a)/a^2$ qui ne manquera pas d'apparaître lorsque l'on voudra retrancher $(6/\pi^2)x$.

Pour la démonstration des théorèmes 1 et 2, on établit dans un premier temps la majoration

$$|R(x+y) - R(x)| < 1{,}0625\, y\sqrt{n/x} + 0{,}66\sqrt{x/n} + n - 0{,}5\, y/\sqrt{x}\,,$$

valable sous les conditions (techniques mais essentiellement inévitables) $n < x/y$ et $n \leq x/576$. On choisit ensuite une valeur de $n$ qui minimise, soit $1{,}0625\, y\sqrt{n/x} + 0{,}66\sqrt{x/n}$ (théorème 1, $n$ est alors de l'ordre de $x/y$), soit $0{,}66\sqrt{x/n} + n$ (théorème 2, $n$ est alors de l'ordre de $x^{1/3}$).

Dans un cas comme dans l'autre l'exigence très contraignante $n$ entier et les conditions théoriques évoquées restreignent et compliquent le domaine de validité a priori. La démonstration doit donc se terminer par un découpage convenable du complémentaire et des vérifications (fort laborieuses dans le cas du théorème 1), certaines théoriques, certaines par ordinateur, sur les parties ainsi définies.

Pour la démonstration du théorème 3, l'utilisation de la formule fondamentale conduit à écrire

$$|R(x)| \leq T_1 + T_2 + T_3\,,$$

avec

$$T_1 = \left| -2x \int_{x_n} (M(t)/t^3)\, dt \right| ,$$
$$T_2 = \left| \Sigma_{j=1}^{n-1} M(x_j) + (1/2) M(x_n) \right| ,$$
$$T_3 = \left| \Sigma_{a \leqslant x_n} \mu(a) (\{x/a^2\} - 1/2) \right| ,$$

L'utilisation banale de la majoration déjà évoquée $|M(x)| < x/143{,}7$ pour traiter $T_1$ et $T_2$, et la majoration triviale $|T_3| < (1/2)Q(x_n)$, ne permettent pas de descendre en-dessous de $|R(x)| < 0{,}23\sqrt{x}$. Nous avons introduit deux améliorations.

La première utilise la majoration "intermédiaire"

$$|M(x)| < (1/2)\sqrt{x} \text{ pour } 201 \leqslant x \leqslant \xi = 7\,725\,038\,628$$

(vérifiée par ordinateur, jusqu'à $10^8$ par G. Neubauer [5], puis jusqu'à $\xi$ par H. C et F. D [1]). On obtient ainsi une majoration qui peut servir de <u>relais</u> entre les vérifications numériques par ordinateur (jusqu'à $2{,}54\ 10^8$ environ) et les vraies majorations asymptotiques (à partir de $x_n = \xi$, soit donc, comme on prendra 7 pour valeur optimale de $n$, à partir de $x = 7\xi^2 = 4{,}17\ldots 10^{20}$). Repousser aussi loin la borne inférieure d'utilisation des majorations asymptotiques de $T_1$ et $T_2$ permet de rendre négligeables plusieurs termes parasites très gênants vers $10^8 - 10^{10}$.

La deuxième amélioration consiste à majorer $|T_3|$ par

$$\sqrt{\Sigma_{a \leqslant x_n} \mu^2(a)}\ \sqrt{\Sigma_{a \leqslant x_n} |\mu(a)| (\{x/a^2\} - 1/2)^2} ,$$

le deuxième facteur étant lui-même majoré par $\sqrt{\Sigma_{a \leqslant x_n} h(a) (\{x/a^2\} - 1/2)^2}$, où $h(a)$ est la fonction caractéristique des entiers qui ne sont divisibles ni par 4 ni par 9. La mise en oeuvre est longue et délicate mais le gain est apopréciable, d'autant plus qu'il bénéficie pareillement de l'existence de la majoration-relais.

On obtient en récapitulant une majoration de $|R(x)|$ dont le terme principal est $C(n)\sqrt{x}$, avec

$$C(n) = (1/143{,}7)\{2\sqrt{n} + 1/\sqrt{1} + \ldots + 1/\sqrt{n-1} + 1/(2\sqrt{n})\} + 1/(\pi\sqrt{3n}) .$$

On constate directement que 7 est la valeur optimale de $n$, et on en déduit la partie asymptotique de la majoration. L'établissement de la partie intermédiaire de la majoration s'effectue de façon tout à fait similaire, avec bien entendu des valeurs différentes de certains paramètres numériques. Quant aux vérifications numériques par ordinateur, elles s'effectuent avec le programme le plus simple et ne nécessitent que des moyens de calcul très ordinaires

Remarque 1. Les résultats présentés sont en cours d'amélioration, notamment parce que la majoration $|M(x)| < x/143,7$ est elle-même en cours d'amélioration (il y a d'ailleurs rétroaction entre les deux majorations).

Remarque 2. Il n'est pas inintéressant de noter que, si l'on utilisait la majoration $|M(x)| < 5,3\,x/(\mathrm{Log}\,x)^{10/9}$, on obtiendrait

$$|R(x)| < 6,166\,\sqrt{x}/(\mathrm{Log}\,x)^{5/9} \quad ,$$

qui n'est meilleure que la majoration du théorème 3 que pour x au-delà de $4\ 10^{431}$.

## Références


[1] H. COHEN et F. DRESS, Rapport de l'ATP A12311 "Informatique 1975" du CNRS (publication interne), 1979.

[2] F. DRESS, Majorations de la fonction sommatoire de la fonction de Möbius, Bull. Soc. Math. Fr., mémoire n° 49-50, 1977, p. 47-52.

[3] R. A. MAC LEOD, A new estimate for the sum $M(x) = \sum_{n \leqslant x} \mu(n)$, Acta Arithmetica, XIII, 1967, p. 49-59.

[4] L. MOSER and R. A. MAC LEOD, The error term for the squarefree integers, Canad. Math. Bull., 9, 1966, p. 303-306.

[5] G. NEUBAUER, Eine empirische Untersuchung zur Mertensschen Funktion, Numer. Math., 5, 1963, p. 1-13.

[6] L. SCHOENFELD, An improved estimate for the summatory function of the Möbius function, Acta Arithmetica, XV, 1969, p. 221-233.



U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique
Unité associée au C.N.R.S. n° 226
Université Bordeaux I
33405 TALENCE Cedex

# Simple Zeros of Zeta Functions

J.B. Conrey, A. Ghosh, S.M. Gonek

In this note we present an easy proof that $\zeta(s)$, the Riemann zeta-function, has infinitely many non-real simple zeros. We also state some theorems on simple zeros of the Dedekind zeta-function of a quadratic extension of the rationals.

It is known that a positive proportion of the zeros of $\zeta(s)$ are simple. This follows from Levinson's work on zeros on the critical line as observed by Selberg and, independently, Heath-Brown. In light of the difficulty of Levinson's method it seems desirable to have an easy proof that $\zeta(s)$ has infinitely many simple zeros. For this reason and to motivate the technique of proof of our other theorems we give this proof.

The facts that we use regarding the zeta-function are as follows:

(1) $\zeta(s) = \chi(s)\,\zeta(1-s)$, $\chi(s) \ll T^{1/2-\sigma}$ $(|\sigma| \ll 1,\ |t| \ll T)$;

(2) $\zeta(s),\ \zeta'(s) \ll T^{1/3(1-\sigma)}$ $(\sigma \geq 1/2,\ |t| \ll T,\ |s-1| \gg 1)$;

(3) $\frac{\chi'}{\chi}(s) = -\log\frac{t}{2\pi} + O(\frac{1}{1+|t|})$ $(|\sigma| \ll 1,\ |s| \gg 1)$;

(4) $N(T) = \#\{\rho = \beta + i\gamma : \zeta(\rho) = 0,\ 0 < \gamma \ll T\} \ll T\log T$;

(5) $N(3/4, T) = \#\{\rho = \beta + i\gamma : \zeta(\rho) = 0,\ \sigma \geq 3/4,\ |\gamma| \ll T\} \ll T^{2/3}$,

(6) $T'$ s.t. $|T - T'| \ll 1$ and $\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + iT') \ll \log^2 T$ $(|\sigma| \ll 1)$;

(7) if $a_n \ll_\varepsilon n^\varepsilon$ for all $\varepsilon > 0$, then for $c > 1$ and all $\varepsilon > 0$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c+i}^{c+iT} \chi(1-s)\,\Sigma\, a_n n^{-s}\,ds = \sum_{n \leq T/2\pi} a_n + O_\varepsilon(T^{c-1/2+\varepsilon}).$$

The first six of these assertions may be found in Titchmarsh [5] while (7) is in Gonek [4].

Our proof will show that if

$$N^*(T) = \# \{\rho = \beta + i\gamma: \zeta(\rho) = 0, \ \zeta'(\rho) \neq 0, \ 0 < \gamma \leq T\},$$

then

$$N^*(T) \gg T^{1/3}.$$

By using stronger density estimates and mean value theorems for Dirichlet polynomials at well-spaced points we can obtain $N^*(T) \gg T^{4/5+\delta}$ for some small $\delta > 0$.

The starting point of the proof is Cauchy's inequality:

$$\Big|\sum_{0<\gamma\leq T} \zeta'(\rho)\Big|^2 \leq \Big|\sum_{0<\gamma\leq T} 1\Big| \sum_{0<\gamma\leq T} |\zeta'(\rho)|^2 .$$

The second sum here is $N^*(T)$ so it suffices to bound the first sum from below and the third sum from above. (We shall obtain an asymptotic formula for the first sum.)

We begin by estimating the third sum, say $S_3$. Then by the symmetry of the zeros about the 1/2-line and the identity

$$\zeta'(\rho) = -\chi(\rho)\ \zeta'(1-\rho)$$

which follows from (1) we obtain

$$S_3 = \sum_{\substack{0<\gamma\leq T\\ \beta\geq 1/2}} \left(|\zeta'(\rho)|^2 + |\zeta'(1-\rho)|^2\right)$$

$$= \sum_{\substack{0\leq\gamma<T\\ \beta\geq 1/2}} |\zeta'(\rho)|^2 \left(1 + |\chi(1-\rho)|^2\right).$$

By (1) and (2) we obtain

$$S_3 \ll \sum_{\substack{0<\gamma\leq T\\ \beta\geq 1/2}} T^{(4/3)\beta-1/3} \ll \sum_{\substack{0\leq\gamma<T\\ 1/2\leq\beta\leq 3/4}} T^{2/3} + \sum_{\substack{0<\gamma\leq T\\ 3/4\leq\beta<1}} T$$

whence by (4) and (5),

$$S_3 \ll T^{2/3} N(T) + T N(3/4,T) \ll T^{5/3} \log T.$$

Next we evaluate the first sum, say $S_1$. Let $T'$ be as in (6). Then by Cauchy's theorem and (1) and (2),

$$S_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \, ds + O_\varepsilon(T^{1/2 + \varepsilon})$$

where $\mathcal{C}$ is the positively oriented rectangular contour with vertices $c+i$, $c+iT'$, $1-c+iT'$, $1-c+i$ ($c=1 + (\log T)^{-1}$). The integral along the "bottom" edge is $\ll 1$; the integral along the "top" edge is $\ll_\varepsilon T^{1/2+\varepsilon}$ by (1), (2), and (6). Along the "right" side the integral is

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{m,n} \frac{\Lambda(m) \log n}{m^c n^c} \int_1^{T'} (mn)^{-it} \, dt$$

$$\ll \sum_{m,n} \frac{\Lambda(m) \log n}{m^c n^c \log(mn)} \ll \frac{\zeta'}{\zeta}(c) \, \zeta'(c) \ll (\log T)^3.$$

Finally, the integral along the left side is

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{1-c+iT'}^{1-c+i} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \, \zeta'(s) \, ds = \frac{-1}{2\pi i} \int_{c-iT'}^{c-i} \frac{\zeta'}{\zeta}(1-s) \, \zeta'(1-s) \, ds = -\bar{I}$$

where

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{c+i}^{c+iT'} \frac{\zeta'}{\zeta} (1-s) \, \zeta'(1-s) \, ds.$$

From (1) it follows that

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{c+i}^{c+iT'} \left(\frac{\chi'}{\chi}(s) - \frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right) \chi(1-s) \left(-\zeta'(s) + \frac{\chi'}{\chi}(s) \, \zeta(s)\right) ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{c+i}^{c+iT'} \chi(1-s) \left(\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \, \zeta'(s) - 2 \frac{\chi'}{\chi}(s) + \left(\frac{\chi'}{\chi}(s)\right)^2 \zeta(s)\right) ds$$

$$= J_1 - 2J_2 + J_3$$

say.

By (7) and the prime number theorem,

$$J_1 = \sum_{mn \leq \frac{T}{2\pi}} \Lambda(m) \log n + O_\varepsilon(T^{1/2+\varepsilon})$$

$$= \frac{T}{4\pi} \log^2 T + O(T \log T).$$

Now let

$$K_2(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c+i}^{c+iu} \chi(1-s)\, \zeta'(s)\, ds$$

and

$$K_3(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c+i}^{c+iu} \chi(1-s)\, \zeta(s)\, ds.$$

Then for $1 \leq u \ll T$ it follows from (7) that

$$K_2(u) = \frac{-u}{2\pi} \log u + O(u)$$

and

$$K_3(u) = \frac{u}{2\pi} + O_\varepsilon(u^{1/2+\varepsilon}).$$

Now by (1), (2), (3) and integration by parts we obtain

$$J_2 = \frac{-1}{2\pi i} \int_{c+i}^{c+iT'} \log \frac{t}{2\pi}\, \chi(1-s)\, \zeta'(s)\, ds + O_\varepsilon(T^{1/2+\varepsilon})$$

$$= - \int_1^{T'} \log \frac{t}{2\pi}\, dK_2(t) + O_\varepsilon(T^{1/2+\varepsilon})$$

$$= - \log \frac{t}{2\pi} K_2(t) \Big|_1^{T'} + \int_1^{T'} \frac{K_2(t)}{t} \, dt + O_\varepsilon(T^{1/2 + \varepsilon})$$

$$= \frac{T}{2\pi} \log^2 T + O(T \log T).$$

Similarly, we find that

$$J_3 = \frac{T}{2\pi} \log^2 T + O(T \log T).$$

Thus,

$$I = \frac{-T}{4\pi} \log^2 T + O(T \log T)$$

which leads to

$$S_1 = \frac{T}{4\pi} \log^2 T + O(T \log T).$$

Finally,

$$N^*(T) \geq \frac{|S_1|^2}{S_3} \gg \frac{T^2 \log^4 T}{T^{5/3} \log T} \gg T^{1/3} .$$

An elaboration of this method leads to a result on simple zeros of the Dedekind zeta-function of a quadratic extension k of the rationals. Let $\zeta_k(s)$ denote such a zeta-function and

$$N_k^*(T) = \#\{\rho_k = \beta_k + i\gamma_k : \zeta_k(\rho_k) = 0, \ \zeta_k'(\rho_k) \neq 0, \ 0 < \gamma_k < T\}.$$

Then we can prove [2]

$$N_k^*(T) \gg T^{6/11} .$$

If we assume the Riemann-Hypothesis, then $S_3$ can be evaluated asymptotically (see Gonek [4]). In this case we obtain $N^*(T) \gg T$ (since $S_3 \ll T(\log T)^4$). To obtain $N^*(T) \gg N(T)$ we sum $\zeta'(\rho) B(\rho)$ instead of $\zeta'(\rho)$ where $B(s)$ is a function which makes $\zeta' B$ normal in terms of moments. Our choice is

$$B(s) = \sum_{n \leq y} \frac{b(n)}{n^s}$$

with $y = T^{1/2 - \epsilon}$ and $b(n) = \mu(n)\, P(\frac{\log y/n}{\log y})$ where $\mu$ is the Möbius function and P is a polynomial satisfying $P(0) = 0$, $P(1) = 1$. By the calculus of variations, $P(x) = \frac{-x}{2} + \frac{3}{2} x^2$ is the optimal choice of P and this leads to (on RH)

$$N^*(T) \geq (\frac{19}{27} + o(1))\; N(T)$$

(see [1]). Of course, the proof we have given in this paper does not even begin to address the obstacles which must be submounted to obtain this result.

Finally, we mention that our last result can be used in conjunction with a theorem on common zeros of L-functions to derive (on RH) that

$$N_k^*(T) \geq (\frac{1}{54} + o(1))\; N_k(T)$$

where

$$N_k(T) = \# \{\rho_k : \zeta_k(\rho_k) = 0,\ 0 < \gamma_k < T\}$$

(see [3]). This result does not seem to be accessible by other known methods.

J.B. Conrey and A. Ghosh
Stillwater

S.M. Gonek
Rochester

## References

[1] Conrey, J.B., A. Ghosh, and S.M. Gonek, Simple zeros of the Riemann zeta-function, preprint.

[2] ______________________, Simple zeros of the zeta function of a quadratic number field, I, preprint.

[3] ______________________, Simple zeros of the zeta-function of a quadratic number field, II, in preparation.

[4] Gonek, S.M., Mean values of the Riemann zeta-function and its derivatives, Invent. Math. 75, 123-141 (1984).

[5] Titchmarch, E.C. The Theory of the Riemann Zeta-Function, Oxford, Clarendon Press, 1951.

# SUBSTITUTIONS ET EQUIREPARTITION MODULO 1

Christian MAUDUIT

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers point fixe d'une substitution de longueur quelconque. On note $B(u)$ l'ensemble normal associé à $u$, c'est-à-dire l'ensemble des réels $\alpha$ tels que la suite $(u_n \cdot \alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ soit équirépartie modulo 1 .

Nous montrons que si $u$ n'est pas trop "lacunaire" , $\mathbb{R} \setminus B(u)$ est inclus dans une extension de degré fini de $\mathbb{Q}$ .

## I - Rappels et notations.

On se donne $A = \{a_1,\ldots,a_g\}$ un alphabet à $g$ lettres $(g \geqslant 2)$ et $\Sigma$ une substitution (ou morphisme) sur $A$ (cf [8]) .

Pour tout $i \in \{1,\ldots,g\}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ , on note $\ell_n^i$ la longueur du mot $\Sigma^n(a_i)$ .

A la substitution $\Sigma$ sont associés :

(1) Une matrice $M$ , carrée d'ordre $g$ , dont le terme général $M_{ij}$ est égal au nombre d'apparitions de la lettre $a_j$ dans le mot $\Sigma(a_i)$ .

$\Lambda$ désigne l'ensemble des valeurs propres de $M$ qui interviennent dans l'écriture de $(\ell_n^1, \ldots, \ell_n^g)$ en fonction de $n$ (on rappelle que $(\ell_n^1, \ldots, \ell_n^g) = (1,\ldots,1)\ {}^tM^n)$ . On note $\rho(M)$ le rayon spectral de $M$ .

(2) Un graphe $G$, dont l'ensemble des sommets est $A$ , et tel que le nombre d'arcs allant de $a_i$ vers $a_j$ pour $(i,j) \in \{1,\ldots,g\}^2$ soit égal à $M_{ij}$ .

Si $i \in \{1,\ldots,g\}$ , on désigne par $\widetilde{a}_i$ la composante fortement connexe de $a_i$ dans $G$ (cf [1]) , et par $\gamma(\widetilde{a}_i)$ le nombre cyclomatique de $\widetilde{a}_i$ (c'est-à-dire le nombre d'arcs de $\widetilde{a}_i$ plus 1 moins le nombre de sommets de $\widetilde{a}_i$ ) .

Si $m \in A^{\mathbb{N}}$ est un point fixe de $\Sigma$ et si $t \in \{1,\ldots,g\}$ , on considère l'ensemble $[m]_t$ des entiers $n$ tels que la $(n+1)^{\text{ième}}$ lettre du mot $m$ soit $a_t$ .

On note maintenant $I$ l'ensemble des $i \in \{1,\ldots,g\}$ tels qu'il existe un chemin dans $G$ allant du sommet $a_i$ vers le sommet $a_t$ .

Nous allons montrer que si $[m]_t$ n'a pas une croissance trop rapide (cf hypothèse (H)) , alors $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{Q}(\lambda) \subset B([m]_t)$ .

D'après le théorème de Weyl (cf [7]) ceci revient à étudier le comportement asymptotique des sommes de Weyl associées au point fixe considéré.

Lorsque $\rho(M) > 1$ , l'idée consiste à estimer les paquets de Weyl $S_n^i(\alpha)$ associés aux mots $\Sigma^n(a_i)$ , puis d'en déduire le comportement des sommes de Weyl de longueur quelconque.

Mais si $\rho(M) = 1$ ( $\Sigma$ est alors appelée substitution unispectrale), cette démarche ne peut aboutir : les longueurs des plages d'observation (i.e. des mots $\Sigma^n(a_i)$) , polynomialement bornées, sont en quelque sorte trop courtes.

On est ainsi amené, pour déterminer $B(u)$ , à préciser la forme de ces substitutions.

II - Cas des substitutions unispectrales : $\rho(M) = 1$ (cf [5])

Une telle substitution est caractérisée par la propriété suivante :

Proposition 1 : $\Sigma$ est une substitution unispectrale si et seulement si toute composante fortement connexe de son graphe a un nombre cyclomatique égal à 0 ou 1 .

On remarque alors que pour tout $i \in \{1,\ldots,g\}$ les longueurs $\ell_n^i$ sont des fonctions polynomiales de $n$ , à coefficients rationnels.

On en déduit, par récurrence sur $g$ , que tout point fixe d'une substitution unispectrale vérifie la propriété suivante :

Proposition 2 : Si $m$ est point fixe d'une substituition unispectrale, alors pour tout $t \in \{1,\dots,g\}$ , $[m]_t$ , ou $\mathbb{N} \setminus [m]_t$ , est une réunion finie d'ensembles de la forme

$$\{ P^o_{g-1}(n) + P_{g-1}(n_1) + \dots + P_{g-i+1}(n_{i-1}) \, ; n_{i-1} < \dots < n_1 < n \, , \, n \in \mathbb{N} \} \text{ où } i \geq 2$$

et $\forall j \in \{1,\dots,i-1\}$ $P^o_{g-1}$ (resp $P_{g-j}$) est un polynôme à coefficients rationnels de degré inférieur ou égal à $g-1$ (resp. $g-j$) .

Grâce à ce résultat, on démontre alors très simplement, en utilisant le critère de Weyl, le théorème suivant :

Théorème 1 : Si $m$ est point fixe d'une substitution unispectrale, alors pour tout $t \in \{1,\dots,g\}$ , $B([m]_t) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

III - Cas $\rho(M) > 1$ (cf [6])

Hypothèse (H) : On dira que $t \in \{1,\dots,g\}$ vérifie l'hypothèse (H) s'il existe $i \in I$ tel que $\gamma(\tilde{a}_i) \geq 2$ .

Théorème 2 : Si $m$ est un point fixe d'une substitution $\Sigma$ et si $t \in \{1,\dots,g\}$ vérifie l'hypothèse (H) , alors $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{Q}(\lambda) \subset B([m]_t)$ .

La démonstration de ce théorème s'effectue par récurrence sur le nombre de composantes fortement connexes de la restriction du graphe de $\Sigma$ aux sommets $a_i$ tels que $i \in I$ .

L'étude du comportement asymptotique des sommes de Weyl de longueur $\ell^i_n$ $(i \in I)$ , et plus précisément de la suite de vecteurs $w_n(\alpha) = \left( \frac{S^i_n(\alpha)}{S^i_n(o)} \right)_{i \in I}$ constitue le centre de cette démonstration.

Ceci nous conduit à étudier un produit infini de matrices à coefficients complexes (matrices de passage de $w_n(\alpha)$ à $w_{n+1}(\alpha)$ ) .

Lorsque $\alpha \notin \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{Q}(\lambda)$ , les arguments de ces coefficients ne peuvent pas tendre vers 0 modulo $2\pi$ lorsque $n$ tend vers l'infini; on en déduit que le produit

matriciel opère une contraction sur la suite de ces coefficients, et en définitive que la suite $w_n(\alpha)$ tend vers le vecteur nul.
L'estimation des sommes de Weyl de longueur quelconque n'offre plus alors de difficulté, et permet de montrer que la suite $(n.\alpha)_{n \in [m]_t}$ est équirépartie modulo 1 .

IV - Cas particulier des automates finis (cf [4])

Si $m$ est engendré par un $\ell$-automate fini $(\ell \geq 2)$ , $m$ est point fixe d'une substitution $\Sigma$ de longueur constante $\ell = \ell_1^1 = \ldots = \ell_1^g$ (cf [2]) . Donc $\rho(M) = \ell$ , $\Lambda = \{\ell\}$ et le théorème 2 permet de retrouver le théorème suivant, qui généralise un résultat dû à Jean Coquet (cf [3]) :

Théorème 3 : Si $m$ est engendré par un automate fini et si $t$ vérifie l'hypothèse (H) , alors $B([m]_t) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

## REFERENCES

[1] C. BERGE Graphes et hypergraphes. 1973, Dunod.

[2] G. CHRISTOL, T. KAMAE, M. MENDES-FRANCE, G. RAUZY Suites algébriques, automates et substitutions. Bull. S.M.F., t. 108, 1980, p. 401-418.

[3] J. COQUET Graphes connexes, représentation des entiers et équirépartition. Journ. of Number Theory, vol. 16, n° 3, juin 1983, p. 363-375.

[4] C. MAUDUIT Automates finis et ensembles normaux. Ann. Inst. Fourier, t. 36, 1986 (à paraître).

[5] C. MAUDUIT Morphismes unispectraux. Theor. Comp. Science (à paraître).

[6] C. MAUDUIT Sur l'ensemble normal des substitutions de longueur non constante (en préparation).

[7] G. RAUZY Propriétés statistiques des suites arithmétiques. 1976 , P.U.F.

[8] G. ROZENBERG et A. SALOMAA
The mathematical theory of L-systems. 1980, Academic Press.

P.R.C. Mathématiques et Informatique
Université d'Aix-Marseille II
70, route Léon Lachamp
13288 MARSEILLE Cédex 2
FRANCE

# BORNES EFFECTIVES POUR CERTAINES FONCTIONS ARITHMETIQUES

par Jean Louis NICOLAS

Dans cet exposé nous désignerons par $p_k$ le $k^{\text{ième}}$ nombre premier. On a ainsi $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, etc...

## § 1 LA FONCTION $\omega(n) = \sum_{p|n} 1$.

Proposition 1. – *Soit* $N_k = \prod_{1 \leq j \leq k} p_j$. *Pour* $k \geq 13$, *on a* $N_k \geq k^k$.

Démonstration : En minorant $p_j$ par $j$, on a $N_k \geq k! \geq k^k e^{-k}$ d'après la formule de Stirling. Si l'on pouvait minorer $p_j$ par $3j$, le résultat serait démontré. Mais ceci n'est pas exact lorsque $j$ est petit. Cependant il est facile de voir que pour $j \geq 12$, on a $p_j \geq 3j$, en observant qu'entre deux multiples de 6, il y a au plus deux nombres premiers (sauf entre 0 et 6 où il y en a 3).

On observe ensuite que ; pour $k \geq 11$, on a :

$$(k+1)^{k+1} / k^k = (k+1)(1+1/k)^k \leq e(k+1) < p_{k+1} .$$

La proposition se démontre alors par récurrence, en constatant qu'elle est vraie pour $k = 13$.

Proposition. – *Soit* $\omega(n) = \sum_{p|n} 1$, *le nombre de diviseurs premiers de* $n$. *Pour* $k \geq 1$, *on a :*

$$n < N_k \Rightarrow \omega(n) < k.$$

Démonstration : Soit $n$ tel que $\omega(n) \geq k$. La décomposition de $n$ en facteurs premiers s'écrit :

$$n = q_1^{\alpha_1} \dots q_j^{\alpha_j} \qquad \text{avec} \quad j \geq k.$$

On a :

$$n \geq q_1 \dots q_j \geq N_j \geq N_k \ .$$

Proposition 3. - *On a pour tout* $k \geq 2$ *:*

$$k = \omega(N_k) \leq 1{,}38402\ldots \frac{\log N_k}{\log \log N_k}$$

*avec égalité lorsque* $k = 9$.

Démonstration : Supposons $k \geq 13$. Par la proposition 1, on a :

$$\frac{\log N_k}{\log \log N_k} \geq \frac{k \log k}{\log(k \log k)} = \frac{k}{1+(\log \log k)/\log k} \geq \frac{k}{1+1/e} \ .$$

Comme $e^{-1} < 0{,}37$, cela démontre la propriété pour $k \geq 13$. Il reste à vérifier l'inégalité pour $2 \leq k \leq 12$.

Proposition 4. - *On a pour tout* $n \geq 3$

$$\omega(n) \leq 1{,}38402\ldots \frac{\log n}{\log \log n}$$

*avec égalité si et seulement si* $n = N_9$ .

Démonstration : On vérifie d'abord la relation pour $3 \leq n \leq 30$. On suppose ensuite que $N_k < n < N_{k+1}$ avec $k \geq 3$. D'après la proposition 2, on a : $\omega(n) < k+1$, soit

$$\omega(n) \leq k \leq 1{,}38402\ldots \frac{\log N_k}{\log \log N_k} < 1{,}38402\ldots \frac{\log n}{\log \log n}$$

en utilisant la croissance pour $x \geq e$ de la fonction $x \to \dfrac{x}{\log x}$ .

Proposition 5. - *On a pour tout* $n \geq 3$ *:*

$$\omega(n) \leq \frac{\log n}{\log \log n}\left(1 + \frac{1{,}45743\ldots}{\log \log n}\right)$$

*avec égalité pour* $n = N_{47}$

$$\omega(n) \leq \frac{\log n}{\log \log n}\left(1 + \frac{1}{\log \log n} + \frac{2{,}89726\ldots}{(\log \log n)^2}\right)$$

*avec égalité pour* $n = N_{442}$ .

*On a pour* $n \geq 26$ *:*

$$\omega(n) \leq \frac{\log n}{\log \log n - 1{,}1714\ldots}$$

*avec égalité pour* $n = N_{189}$.

<u>Proposition 6.</u> - *On pose :*

$$Li(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^{x} \frac{dt}{\log t}\right\}.$$

*Sous l'hypothèse de Riemann on a :*

*pour* $n \geq N_4 = 210$ : $\quad \omega(n) \leq Li(\log n) + 0{,}12\sqrt{\log n}$

$\exists n_o$ *tel que pour* $n \geq n_o$, $\quad \omega(n) \leq Li(\log n)$.

On trouvera la démonstration des propositions 4, 5, 6 dans les deux articles de G. Robin : [Rob 1] et [Rob 2]. La démonstration des deux dernières propositions nécessitent des estimations de $N_k$ et de $p_k$ en fonction de $k$ beaucoup plus fines que celles utilisées dans la preuve ci-dessus de la proposition 4. La constante $n_o$ peut être calculée, mais le calcul n'a pas encore été fait.

## § 2 <u>LES NOMBRES ω-LARGEMENT COMPOSES.</u>

On dit que $N$ est $\omega$-largement composé si

$$n \leq N \Rightarrow \omega(n) \leq \omega(N).$$

On voit facilement, que si $N_k \leq N < N_{k+1}$, dire que $N$ est $\omega$-largement composé revient à dire que $\omega(N) = k$. On peut ainsi construire de tels nombres en remplaçant dans $N_k$ des grands facteurs premiers par une quantité égale de nombres premiers plus grands que $p_k$.

Soit $Q(X)$ la quantité de nombre $\omega$-largement composés inférieurs ou égaux à $X$. On trouvera dans ([Erd]) la démonstration du résultat : Il existe $c_1$ et $c_2 > 0$, tels que pour $X$ assez grand, on ait :

$$\exp(c_2\sqrt{\log X}) \leq Q(X) \leq \exp(c_1\sqrt{\log X}).$$

On conjecture que $\log Q(X) \sim \pi\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\log X}$.

Dans sa thèse de 3e cycle, P. Van den Bosch, (cf [Van]) en utilisant une idée de Carl Pomerance a montré que l'on pouvait prendre $c_2 = 2{,}44$, qui n'est pas très loin de la valeur conjecturée $\pi\sqrt{2/3} = 2{,}565$.

Dans un travail non encore publié, Jean Coquet et P. Van den Bosch ont montré que l'on pouvait prendre pour $c_2$ n'importe quel nombre inférieur à $\pi\sqrt{2/3}$. Plus précisément, étant donné une fonction $\phi : [-1,+1] \longrightarrow [0,1]$ vérifiant $\int_{-1}^{1} \phi = 1$, ils montrent que l'on peut prendre pour $c_2$ n'importe quel nombre inférieur à

$$-\int_{-1}^{+1} (\phi\log\phi + (1-\phi)\log(1-\phi)) \Big/ \sqrt{1/2 + \int_{-1}^{+1} t\,\phi(t)dt}$$

et ils choisissent $\phi(t) = 1/(1+e^{rt})$ avec $r$ tendant vers l'infini.

La constante $c_1$ donnée dans [Erd] vaut $2\pi\sqrt{2/3}+\varepsilon$. Il semble difficile de l'améliorer.

## § 3 LA FONCTION $d(n) = \sum_{d|n} 1$.

Il est commode d'écrire la décomposition de $n$ en facteurs premiers sous la forme :

$$n = \prod_{k\geq 1} p_k^{a_k}, \qquad a_k \geq 0.$$

Le nombre de diviseurs de $n$ vaut alors :

$$d(n) = \prod_{k\geq 1} (a_k+1).$$

Lemme 1. - *Soit $t$ un paramètre réel positif. On considère la fonction définie pour $x \geq 0$ :* $x \longrightarrow (x+1)e^{-tx}$.

*1°) Si $t \geq 1$ cette fonction est décroissante,*

*2°) Si $t < 1$ cette fonction a un maximum pour $x = (1/t)-1$, qui vaut $e^{t-1}/t$.*

*3°) On considère la quantité* $\max_{x\in\mathbb{N}} (x+1)e^{-tx}$.

*Si $t \geq \log 2$, ce maximum est atteint en $x = 0$, et vaut 1.*

*Si $t < \log 2$, ce maximum est atteint en $x = [\frac{1}{e^t-1}]$, où $[u]$ désigne la partie entière de $u$. Il est inférieur ou égal à $2/(e\,t)$.*

Démonstration : Elle est élémentaire.

Lemme 2. - *Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Alors la fonction $n \to d(n)\,n^{-\varepsilon}$ a un maximum, qu'elle atteint au nombre*

$$H_\varepsilon = \prod_{p\leq 2^{1/\varepsilon}} p^{\alpha(p,\varepsilon)}, \quad \text{avec} \quad \alpha(p,\varepsilon) = [\frac{1}{p^\varepsilon - 1}].$$

*On a de plus, pour $n \geq 1$ :*

$$d(n)n^{-\varepsilon} \leq d(H_\varepsilon)H_\varepsilon^{-\varepsilon} \leq (2/(e\,\varepsilon \log 2))^{2^{1/\varepsilon}}.$$

Démonstration : On écrit

$$d(n)n^{-\varepsilon} = \prod_{k\geq 1} (a_k+1)p_k^{-\varepsilon a_k}.$$

On applique le lemme précédent en posant $t = \varepsilon \log p_k$. Lorsque $t \geq \log 2$, c'est-à-dire lorsque $p_k \geq 2^{1/\varepsilon}$, le maximum de $(a_k+1)p_k^{-\varepsilon a_k}$ vaut 1. Lorsque $t < \log 2$, ce maximum est atteint pour $a_k = \alpha(p_k,\varepsilon)$, et vaut moins que le maximum réel qui est $e^{t-1}/t \leqslant \frac{2}{e\,\varepsilon \log p_k} \leqslant \frac{2}{e\,\varepsilon \log 2}$.

Proposition 7. - *Pour tout $n \geqslant 3$, on a :*

$$\log d(n) \leqslant 3{,}6\ (\log n)/\log \log n.$$

Démonstration : On déduit du lemme précédent que pour tout $n$, et tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\log d(n) \leqslant \varepsilon \log n + 2^{1/\varepsilon} \log(2/(e\,\varepsilon \log 2)).$$

On choisit $\varepsilon = 2 \log 2 / \log \log n$. On doit supposer $n \geqslant 3$, pour avoir $\varepsilon > 0$. On a alors :

$$\log d(n) \leqslant \frac{\log n}{\log \log n}\ 2 \log\left(2 + \frac{\log \log n \ \log \log \log n}{\sqrt{n} \log n}\right).$$

On majore alors $\log \log \log n$ par $\log \log n$, et il reste à constater que la fonction $t^2 e^{-t/2}$ est inférieure à $16/e^2$ pour $t > 0$.

Dans la démonstration ci-dessus, les majorations sont très grossières, et la constante 3,6 n'est pas optimale. En choisissant $\varepsilon = (\log 2 + \eta)/\log \log n$, avec $\eta > 0$, la même démonstration permet de calculer $n_o$, tel que l'on ait, pour $n \geqslant n_o$ :

$$\log d(n) \leqslant (\log 2 + 2\eta)(\log n)/(\log \log n).$$

Mais cet $n_o$ sera grand, pour $\eta < 1$, trop grand pour qu'un ordinateur puisse calculer $\log d(n)$ pour $n \leqslant n_o$.

Dans un repère orthonormé, écrivons pour chaque $n \geqslant 1$, le point d'abscisse $\log n$, et d'ordonnée $\log d(n)$. L'enveloppe convexe de ces points est une ligne brisée dont la pente des cotés successifs tend vers 0. Dans ce repère, la droite de pente $\varepsilon$ qui passe par le point $(\log n, \log d(n))$ a pour ordonnée à l'origine $\log \frac{d(n)}{n^\varepsilon}$. Elle sera une droite d'appui pour notre ensemble convexe, et un point d'appui sera $H_\varepsilon$ défini au lemme 2.

Les sommets de l'enveloppe convexe définie ci-dessus sont exactement les points $(\log H_\varepsilon, \log d(H_\varepsilon))$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, où $H_\varepsilon$ est défini au lemme 2. Les nombres $H_\varepsilon$ sont appelés par S. Ramanujan "nombres hautement composés supérieurs". (cf. [Ram]).

Supposons que l'on veuille démontrer l'inégalité

(*) $$\forall n \geqslant 5040, \quad \log d(n) \leqslant A(\log n)/(\log \log n).$$

Dans notre repère, cela veut dire que la courbe $y = Ax/\log x$ est au dessus de notre ensemble convexe. Or pour $x \geqslant e^2$, cette courbe est concave. Comme 5040 est un nombre hautement composé supérieur, et que $5040 \geqslant 1619 \geqslant \exp(e^2)$, il suffira de vérifier que cette courbe est au dessus de tous les sommets de l'enveloppe convexe, autrement dit de vérifier la relation (*) ci-dessus lorsque n est un nombre hautement composé supérieur $\geq 5040$.

Cela se fait en deux temps : Pour les "petits" nombres hautement composés supérieurs, on utilise l'ordinateur. Pour les plus "grands", on utilise la factorisation de $H_\varepsilon$, et les estimations connues sur les nombres premiers.

Par cette méthode, et en considérant des fonctions différentes de $Ax / \log x$, on peut démontrer (cf. [Rob 4] et [Nic 1]).

Proposition 8. - *Pour* $n \geq 3$, *on a :*

$$\frac{\log d(n)}{\log 2} \leq 1,5379\ldots \frac{\log n}{\log \log n}$$

*avec égalité pour* $n = 6\ 983\ 776\ 800 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$.

$$\frac{\log d(n)}{\log 2} \leq \frac{\log n}{\log \log n} + 1,9349 \frac{\log n}{(\log \log n)^2}, \quad n \geq 3.$$

$$\frac{\log d(n)}{\log 2} \leq \frac{\log n}{\log \log n} + \frac{\log n}{(\log \log n)^2} + 4,7624 \frac{\log n}{(\log \log n)^3}, \quad n \geq 3.$$

$$\frac{\log d(n)}{\log 2} \leq \frac{\log n}{\log \log n - 1,39177}, \quad n \geq 56 \geq \exp(\exp 1,392).$$

Remarque : Sous l'hypothèse de Riemann, en tenant compte du développement asymptotique obtenu par S. Ramanujan (cf. [Ram], § 43), on peut démontrer que

$$\frac{\log d(n)}{\log 2} \leq \mathrm{Li}(\log n) + c(\log n)^{(\log 3/2)/\log 2}.$$

Aucune valeur effective de c n'est connue pour le moment.

## § 4 LA FONCTION D'EULER $\phi(n)$.

J.B. Rosser et L. Schoenfeld ont démontré (cf. [Ros]) que pour $n \geq 3$, on a :

(**) $$\frac{n}{\phi(n)} \leq e^\gamma \log \log n + \frac{5}{2 \log \log n}$$

excepté pour $n = 2230\ 92870 = N_9$ pour lequel $\frac{5}{2}$ doit être remplacé par 2,50637. Le nombre $\gamma$ est la constante d'Euler.

Proposition 9. - *Pour* $k \geq 1$, *on a :*

$$n < N_k \Rightarrow \frac{n}{\phi(n)} \leq \frac{N_{k-1}}{\phi(N_{k-1})}.$$

Démonstration : Elle est voisine de celle de la proposition 2.

Corollaire. - *Soit $f(n)$ une fonction croissante de $n$. Pour démontrer que pour tout $n$, $\frac{n}{\phi(n)} \leqslant f(n)$, il suffit de le démontrer lorsque $n = N_k$ pour tout $k$.*

Le deuxième membre de (**) n'est croissant que pour $n \geqslant 59$. On démontre donc (**) pour $n = N_k \geqslant N_4 = 210$, puis pour tous les $n \leqslant 210$. La démonstration de (**) pour $n = N_k$ se ramène à des estimations sur les nombres premiers.

Proposition 10. - *Il existe une infinité de $n$ pour lesquels :*

$$\frac{n}{\phi(n)} > e^{\gamma} \log \log n .$$

La démonstration se trouve dans [Nic 2].

Les nombres $N_k$ jouent le rôle des nombres hautement composés supérieurs pour la fonction $d(n)$. D.W. Masser et P. Shiu ont considéré les nombres $n$ tels que $m > n \Rightarrow \phi(m) > \phi(n)$, qui jouent le rôle des nombres hautement composés (cf. [Ala] et [Masser]).

## § 5 LA FONCTION $\sigma(n)$ = SOMME DES DIVISEURS DE $n$.

Si $n$ s'écrit :

$$n = \prod_{k \geqslant 1} p_k^{a_k}, \qquad a_k \geqslant 0 ;$$

alors,

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \prod_{k \geqslant 1} \left(1 + \frac{1}{p_k} + \dots + \frac{1}{p_k^{a_k}}\right) < \prod_{k \geqslant 1} \frac{1}{1 - 1/p_k} = \frac{n}{\phi(n)} .$$

Les majorations obtenues pour $\frac{n}{\phi(n)}$ sont donc aussi valables pour $\frac{\sigma(n)}{n}$.

On définit pour $\varepsilon > 0$, le nombre colossalement abondant $S_\varepsilon$ qui maximise $\sigma(n)/n^{1+\varepsilon}$, et l'on peut faire la même théorie qu'avec la fonction $d(n)$ et les nombres hautement composés supérieurs. (cf. [Ala]).

Proposition 11. - *Pour $n \geqslant 3$, on a :*

$$\frac{\sigma(n)}{n} \leqslant e^{\gamma} \log \log n + \frac{0,6482\ldots}{\log \log n}$$

*avec égalité pour $n = 12$.*

*Sous l'hypothèse de Riemann, on a :*

*pour $n \geqslant 5041$,* $$\frac{\sigma(n)}{n} \leqslant e^{\gamma} \log \log n.$$

*Réciproquement, si l'hypothèse de Riemann est fausse, il existe une infinité de $n$ tels que $\sigma(n) > n\, e^{\gamma} (\log \log n)$.*

La démonstration de cette proposition se trouve dans [Rob 3].

## § 6 LA FONCTION $g(n)$ DE LANDAU.

Soit $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de $n$ éléments.

On définit :

$$g(n) = \max_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} (\text{ordre de } \sigma).$$

On peut démontrer que :

$$g(n) = \max_{\ell(k)\leq n} k ,$$

où, pour $k = \prod_{j\geq 1} p_j^{a_j}$ , on définit

$$\ell(k) = \sum_{\substack{j\geq 1 \\ a_j\geq 1}} p_j^{a_j} .$$

Pour $\rho > 0$, on considère les nombres $G_\rho$ qui minimisent la quantité $\ell(n) - \rho \log n$. Ces nombres j uent le rôle des nombres hautement composés supérieurs de Ramanujan. Ils permettent de démontrer le résultat suivant :

Proposition 12. - *Pour $n \geq 1$, on a :*

$$\log g(n) \leq 1{,}05341\ldots\sqrt{n \log n}$$

*avec égalité pour $n = 1319766$.*

*Pour $n \geq 2$, on a :*

$$\log g(n) < \sqrt{n \log n}\ \left(1 + \frac{\log \log n}{2 \log n}\right).$$

*Pour $n \geq 906$, on a :*

$$\log g(n) \geq \sqrt{n \log n}.$$

La démonstration de cette proposition se trouve dans [Mas 1] et [Mas 2].

## REFERENCES

[Ala] L. ALAOGLU and P. ERDÖS. - On highly composite and similar numbers, Trans. Amer. Math. Soc. t. 56, 1944, p. 448-469.

[Erd] P. ERDÖS et J.L. NICOLAS. - Sur la fonction : nombre de facteurs premiers de n, Ens. Math. t. 27, 1981, p. 3-27.

[Mas 1] J.P. MASSIAS. - Majoration explicite de l'ordre d'un élément du groupe symétrique. Annales Fac. Sci. Toulouse. t. 6 , 1984, p. 269-281.

[Mas 2] J.P. MASSIAS. - Ordre maximum d'un élément du groupe symétrique et applications, Thèse de 3ème cycle de l'Université de Limoges, mai 1984.

[Masser] D.W. MASSER and P. SHIU. - On sparsely totient numbers. A paraître Pacific J. of Maths, 1985.

[Nic 1] J.L. NICOLAS et G. ROBIN. - Majorations explicites pour le nombre de diviseurs de n, Canad. Math. Bull. t. 26, 1983, p. 485-492.

[Nic 2] J.L. NICOLAS. - Petites valeurs de la fonction d'Euler, J. of Number Theory, t. 17, 1983, p. 375-388.

[Ram] S. RAMANUJAN. - Highly composite numbers, Proc. London Math. Soc. , Séries 2, t. 14, 1915, p. 347-400 ; and Collected papers, Cambridge, at the University Press, 1927, p. 78-128.

[Rob 1] G. ROBIN. - Estimation de la fonction de Tchebychef $\theta$ sur le k-ième nombre premier, et grandes valeurs de la fonction $\omega(n)$ nombre de diviseurs premiers de n, Acta Arithmetica, t. 42, 1983, p. 367-389.

[Rob 2] G. ROBIN. - Sur la différence $Li(\theta(x)) - \pi(x)$, Annales Fac. Sci. Toulouse, t. 6, 1984, p. 257-268.

[Rob 3] G. ROBIN. - Grandes valeurs de la fonction somme des diviseurs et hypothèse de Riemann, J. Math. pures et appliquées t. 63, 1984,p.187-213

[Rob 4] G. ROBIN. - Grandes valeurs de fonctions arithmétiques et problèmes d'optimisation en nombres entiers, Thèse, Université de Limoges, mars 1983.

[Ros] J.B. ROSSER and L. SCHOENFELD. - Approximate formulas for some functions of prime numbers, Illinois J. of Math. t. 6, 1962, p. 64-94.

[Van] P. VAN DENBOSCH. - Etude des propriétés de la fonction $\omega(n)$ , Thèse $3^{\text{ème}}$ cycle, Université de Lille, juin 1982.



J.L. NICOLAS

Département de Mathématiques
Université de Limoges
123, Avenue Albert Thomas
87060 LIMOGES CEDEX.

# A note on the exceptional set in Goldbach's problem

by

Janos Pintz (Budapest)

1. The famous conjecture of Goldbach states that every even integer exceeding 2 can be written as a sum of two primes. Let $E$ denote the set of those even numbers which cannot be written as a sum of two primes. Further for any $A \subset N = \{1,2,\ldots\}$ let $A(x)$ denote the number of elements of $A$, not exceeding $X$. Whilst Goldbach's conjecture is equivalent with $E(X)=1$ for $X \geq 2$, the best upper estimation is due to Montgomery and Vaughan [4]. They proved

$$(1.1) \qquad E(X) \ll X^{1-\delta}$$

with a very slight (effectively computable) $\delta > 0$. Hardy and Littlewood [2] showed that the Genaralized Riemann Hypothesis implies for any $\varepsilon > 0$

$$(1.2) \qquad E(X) \ll X^{1/2+\varepsilon} .$$

The aim of this work is to show that if $n$ is restricted for numbers of the form $n=2kp$ with $k$ constant or small $(k<\log n)$, $p$ prime, then a much better upper bound can be given for the corresponding $E_1(X)$ where, somewhat more generally, we define $(a,b,n$ denote natural numbers, $p$ primes)

$$(1.3) \qquad E_1 = N_1 \cap E,\ N_1 = \{n=2ab;\ a<\log n,\ p|b \rightarrow p \geq b^{1/3}\} .$$

Further we can show that - apart a small exceptional set - the elements of $N_1$ have asymptotically the expected number of Goldbach decomposition, i.e.

(1.4) $$R(n) = \sum_{n=p+p'} 1 \sim \sigma(n)\frac{n}{\log^2 n} \quad \text{where} \quad \sigma(n) = \prod_{p\nmid n}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{p\mid n}\left(1+\frac{1}{p-1}\right).$$

<u>Theorem.</u> There exists a set $N_2$ of even numbers with

(1.5) $$N_2(X) \ll_\varepsilon X^{2/3+\varepsilon} \quad \text{for any} \quad \varepsilon>0$$

such that

(1.6) $$R(n) = \sigma(n)\frac{n}{\log^2 n} + O\left(\frac{n}{\log^{11/5} n}\right) \quad \text{if} \quad n\in N_1\setminus N_2 .$$

Consequently

(1.7) $$E_1(X) \ll X^{2/3+\varepsilon} .$$

Choosing $a=1$, $b=p$ in (1.3) we obtain Goldbach decompositions for the numbers $2p$. This problem is equivalent with searching arithmetic progressions consisting of three primes with middle term $p$. So we obtain that - apart a small exceptional set - all primes appear as middle term in the expected number of three primes arithmetic progressions. This we formulate as

<u>Corollary.</u> There exists a set $P_2$ of primes with

(1.8) $$|P_2(X)| \ll_\varepsilon X^{2/3+\varepsilon} \quad \text{for any} \quad \varepsilon>0$$

such that every prime $p\notin P_2$ appears

(1.9) $$2C_o \frac{p}{\log^2 p}\left(1+O(\log^{-1/5}p)\right)$$

times as the middle term of a three primes arithmetic progression, where $C_0 = \prod_{p>2} (1-(p-1)^{-2})$.

We remark that there is no simple (or elementary) proof for the fact that there are infinitely many three primes arithmetic progressions. The only way to show this is through $E(X) = o(\pi(X))$, which is a consequence of the deep work of Vinogradov on the ternary Goldbach problem.

The technique involved in the proof of the Theorem is similar to that of Montgomery-Vaughan but there are some essential differences too, if we would like to obtain a stronger estimate for a restricted type of even numbers. So in place of Gallagher's theorem [1] we need a modified form of Gallagher's theorem where the quantities $Z(\chi)$ have weights which are in most cases smaller than one (cf. (4.7)-(4.10)) but we have much more terms of type $Z(\chi)$. To furnish this bound we need a Vinogradov-type zero-free region for L-functions (Lemma 4), density theorems as well as large sieve mean value theorems but we do not use Deuring-Heilbronn phenomenon.

An advantage of our result is that apart the exceptional set the conjectured asymptotic formula holds for $R(n)$ too in contrary to [4]. It is natural to ask why do numbers of the form $n=2kp$ ($k$ small) behave more regularly concerning Goldbach's decomposition than others? The answer is that they have small common divisors with every modulus $q \leqq \sqrt{n}$; and a careful analysis of the phenomenon shows that the most problem arise with numbers $n$ which are multiples of a bad modulus $q$, i.e. one with irregular prime distribution in the reduced residue classes mod $q$ (cf. our Lemma 2 and Lemma 5.5 of [4]).

2. Throughout this work we suppose $X>X_0(\varepsilon)$ (explicitly calculable constant) and we write

(2.1) $\quad L = \log X, \quad Y = XL^{-2}, \quad K = \exp(L^{1/10})$.

We shall use the symbol $c$ for a generic (explicitly calculable) absolute constant, whose value might be different at various appearances. The symbols $\ll$ and $O$ may always depend on $\varepsilon$ (without mentioning it). The expressions $\sum_{\chi(q)}$, $\sum^{*}_{\chi(q)}$ denote, respectively, a sum over all characters $\chi$ (mod $q$) and a sum over all primitive characters $\chi$ (mod $q$). Zeros of $L(s,\chi)$ functions will be denoted by $\rho=\rho_\chi=\beta+i\gamma$; we write the complex variable $s$ as $s=\sigma+it$, $p$ will denote always primes.

As usual let $e(\alpha) = e^{2\pi i\alpha}$,

$$(2.2) \qquad C_q(m) = \sum_{\substack{h=1\\(h,q)=1}}^{q} e\left(\frac{hm}{q}\right), \quad C_\chi(m) = \sum_{h=1}^{m} \chi(h) e\left(\frac{hm}{q}\right), \quad \tau(\chi) = C_\chi(1).$$

Instead of working with the primes as in [4] we define

$$(2.3) \qquad S(\alpha) = \sum_{Y<m\leq X} \Lambda_2(m) e(m\alpha) \quad \text{with} \quad \Lambda_2(m) = \begin{cases} \log p & \text{if} \quad m=p \quad \text{or} \quad p^2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

and

$$(2.4) \qquad S(\chi,\eta) = \sum_{Y<m\leq X} \Lambda_2(m)\chi(m) e(m\eta).$$

By this definition we have $(q,m)=1$ if $q\leq P$ and $m>Y$, $\Lambda_2(m) \neq 0$.

Similarly to [4] we define the major and minor arcs as

$$(2.5) \qquad \mathfrak{M} = \bigcup_{1\leq q\leq P} \bigcup_{\substack{1\leq a\leq q\\(a,q)=1}} \mathfrak{M}(q,a) \quad \text{with} \quad \mathfrak{M}(q,a) = \left[\frac{a}{q}-\frac{1}{qQ}, \frac{a}{q}+\frac{1}{qQ}\right]$$

and

$$(2.6) \qquad \mathfrak{m} = [1/Q, 1+1/Q] \setminus \mathfrak{M}$$

where, differently from [4] we set

(2.7) $$P = X^{1/3-\varepsilon}, \; Q = X/P = X^{2/3+\varepsilon} .$$

Let $R_o(n)$ be the coefficient of $e(\alpha n)$ in the sum $S^2(\alpha)$:

(2.8) $$R_o(n) = \int_{\mathfrak{M}} S^2(\alpha)e(-n\alpha)d\alpha + \int_{\mathfrak{m}} S^2(\alpha)e(-n\alpha)d\alpha = R_1(n) + R_2(n).$$

The arguments of §3 in [4] show (using Vaughan's result [6])

(2.9) $$\sum_{n \leq X} R_2^2(n) \ll X^3 P^{-1} L^c .$$

This implies that apart an exceptional set $N_2 = N_{2,X} \subset (X/2,X]$ we have

(2.10) $$R_2(n) \ll nL^{-1} \quad \text{if} \quad n \in (X/2,X] \setminus N_2$$

where $N_2(X) \ll X^{2/3+2\varepsilon}$.

So in the following we shall investigate $R_1(n)$ for $n \in N_1 \cap (X/2,X]$. In the last § we shall show for these $n$ the relation

(2.11) $$R_1(n) = \sigma(n)n + O(nL^{-1/5})$$

and this with (2.10) will actually prove our Theorem.

3. Lemma 1. Let $\chi$ be a character (mod q) induced by a primitive character $\chi^*$ (mod r). Then

(3.1) $$r|q \quad \text{and} \quad |\tau(\chi)| \leq \sqrt{r},$$

$$(3.2) \qquad C_\chi(m)=0 \quad \text{if} \quad r\nmid q_1 \quad \text{and} \quad |C_\chi(m)| \leq \frac{\varphi(q)}{\varphi(q_1)}\sqrt{r} \quad \text{if} \quad r|q_1 \ ,$$

where $q_1 = q/(q,|m|)$ and $m$ is an arbitrary integer. These assertions are contained in Lemmas 5.1-5.4 of [4].

Lemma 2. Let $\chi_i$ be primitive characters (mod $r_i$) $i=1,2$. Then for $n \in N_1 \cap (X/2,X]$

$$(3.3) \qquad \sum_{\substack{q\leq P \\ [r_1,r_2]|q}} \varphi^{-2}(q)|C_{\chi_1\chi_2\chi_0}(-n)\tau(\bar{\chi}_1\chi_0)\tau(\bar{\chi}_2\chi_0)| << L^{1/2+\varepsilon}\frac{(r_1,r_2)^{3/2}}{r_1r_2}$$

and

$$(3.4) \qquad \sum_{r_1|q,\, q\leq P} |\mu(q)|\varphi^{-2}(q)|C_{\chi_1\chi_0}(-n)\tau(\bar{\chi}_1\chi_0)| << r_1^{-1} L^{1/2+\varepsilon}$$

where $\chi_0$ is the principal character mod $q$.

Proof. Let $r_3$ be the conductor of the primitive character that induces $\chi_1\chi_2$, and let $q_1 = q/(q,n)$. Then we have $q_1 \geq qL^{-1}$ and $r_3|q_1$ if $C_{\chi_1\chi_2\chi_0}(-n) \neq 0$. Thus, by Lemma 1, the left hand side of (3.3) is

$$(3.5) \quad << \sum_{\substack{q\leq P \\ [r_1,r_2]|q,\, r_3|q_1 \\ q_1\geq qL^{-1}}} \frac{\sqrt{r_3}\sqrt{r_1r_2}}{\varphi(q)\varphi(q_1)} << \sum_{\substack{q\leq P \\ q=\ell[r_1,r_2] \\ q_1\geq qL^{-1}}} L^{\varepsilon}\frac{\sqrt{r_1r_2}}{q\sqrt{q_1}}$$

$$<< \sum_{\ell=1}^{\infty} L^{1/2+\varepsilon}\frac{\sqrt{r_1r_2}}{\ell^{3/2}[r_1,r_2]^{3/2}} << L^{1/2+\varepsilon}\frac{(r_1,r_2)^{3/2}}{r_1r_2} \ ,$$

which proves (3.3). Inequality (3.4) is a special case of (3.3) where $r_2=1$, since $\tau(\bar{\chi}_2\chi_0)=\tau(\chi_0) = \mu(q)$.

4. In the following (see, (4.1)-(4.6)) we summarize the results (6.1)-(6.16) of [4]. For $\alpha\in\mathfrak{M}(q,a)$ we write $\alpha = a/q+\eta$. Then for $q\leq P<\sqrt{Y}$ we have $(q,m)=1$ if $Y<m\leq X$ and $\Lambda_2(m)\neq 0$. Hence

$$(4.1)\qquad S(\alpha)=\varphi(q)^{-1}\sum_{\chi(q)}\chi(a)\tau(\bar{\chi})S(\chi,\eta) = $$
$$= \mu(q)\varphi(q)^{-1}T(\eta)+\varphi(q)^{-1}\sum_{\chi(q)}\chi(a)\tau(\bar{\chi})W(\chi,\eta),$$

where $T(\eta) = \sum_{Y<m\leq X} e(m\eta)$ and

$$(4.2)\qquad W(\chi,\eta) = \begin{cases} S(\chi,\eta) & \text{if } \chi\neq\chi_0 \\ S(\chi,\eta)-T(\eta) & \text{if } \chi=\chi_0 . \end{cases}$$

So the contribution of the major arcs is

$$(4.3)\qquad \sum_{q\leq P}\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}\int_{\mathfrak{M}(q,a)} S^2(\alpha)e(-n\alpha)d\alpha = \sum_{q\leq P}\frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)}c_q(-n)\int_{-1/qQ}^{1/qQ}T^2(\eta)e(-n\eta)d\eta +$$
$$+ 2\sum_{q\leq p}\frac{\mu(q)}{\varphi^2(q)}\sum_{\chi(q)}c_\chi(-n)\tau(\bar{\chi})\int_{-1/qQ}^{1/qQ}T(\eta)W(\chi,\eta)e(-n\eta)d\eta +$$
$$+ \sum_{q\leq P}\frac{1}{\varphi^2(q)}\sum_{\chi,\chi'(q)}c_{\chi\chi'}(-n)\tau(\bar{\chi})\tau(\bar{\chi}')\int_{-1/qQ}^{1/qQ}W(\chi,\eta)W(\chi',\eta)e(-n\eta)d\eta .$$

For a $\chi(\text{mod } q)$ induced by $\chi^*(\text{mod } r)$ put

$$(4.4)\qquad W(\chi) = \left(\int_{-1/rQ}^{1/rQ}|W(\chi,\eta)|^2d\eta\right)^{1/2}$$

and note that $W(\chi) = W(\chi^*)$. Further we have

$$(4.5)\qquad \int_{-1/qQ}^{1/qQ}|T(\eta)|^2d\eta \leq \int_0^1|T(\eta)|^2d\eta = \sum_{Y<m\leq X} 1 < X.$$

In formula (4.3) the first term contributes to the main term. In fact it is equal to

$$(4.6)\quad \sum_{q\leq P}\frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)}C_q(-n)(n+O(Y))+O(qQ)=\sum_{q\leq P}\frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)}C_q(-n)n+O(YL)+O(\frac{X^{1+\varepsilon}}{P})$$
$$=\sigma(n)n+O(XL^{-1}).$$

In (4.3) the second and third terms contribute to the remainder term. Using Cauchy-Schwarz inequality, (4.5) and Lemma 2, their contribution can be bounded by the quantities $E_2(P)$ and $E_3(P)$, resp. where

$$(4.7)\qquad E_2(P) = c_\varepsilon L^{1/2+\varepsilon}\sqrt{X}\sum_{r\leq P} r^{-1}\sum_{\chi(r)}{}^{*} W(\chi)\ ,$$

$$(4.8)\quad E_3(P) = c_\varepsilon L^{1/2+\varepsilon}\sum_{r_1\leq P}\sum_{r_2\leq P}\frac{(r_1,r_2)^{3/2}}{r_1r_2}\sum_{\chi_1(r_1)}{}^{*}\sum_{\chi_2(r_2)}{}^{*} W(\chi_1)W(\chi_2).$$

The following Lemma is due to Gallagher ([1, Lemma 1]).

<u>Lemma 3.</u> If $u_1,\ldots,u_N$ are real numbers, $\kappa>0$ then

$$\int_{-\kappa}^{\kappa}\left|\sum_{m\leq N}u_m e(m\eta)\right|^2 d\eta \ll \int_{-\infty}^{\infty}\left|\kappa\sum_{x}^{x+(2\kappa)^{-1}}u_m\right|^2 dx.$$

Applying this for $W(\chi)$ where $\chi$ is primitive (mod r) we obtain

$$(4.9)\qquad W(\chi) \ll \sqrt{X}Z(\chi)\quad\text{where}\quad Z(\chi) = \max_{x<X}\,(rQ)^{-1}\Big|\sum_{m\in(A_x,B_x]}{}' \chi(m)\Lambda_2(m)\Big|.$$

Here $\Sigma'$ indicates that the term with $r=1$ is to be

$$(4.10)\qquad \sum_{m\in(A_x,B_x]}\Lambda_2(m)-1 \quad\text{and}\quad (A_x,B_x] = (x,x+rQ/2]\cap(Y,X]$$

where for the empty interval we choose $A_x=B_x>0$.

Put

$$(4.11)\quad H(r)=\sum_{\chi(r)}^{*} Z(\chi),\ I(d,R)=\sum_{\substack{d\mid r\\ R<r\leq 2R}} H(r),\ I(1,R)=I(R).$$

Then by a splitting up argument we obtain

$$(4.12)\quad E_3(P)\ll E_3(K)+XL^4 \max_{\max(K,R_1)\leq R_2\leq P}\ \max_{1\leq D\leq P}\ \sum_{d=D}^{2D}\ \sum_{\substack{r_1=R_1\\ (r_1,r_2)=d}}^{2R_1}\ \sum_{r_2=R_2}^{2R_2} H(r_1)H(r_2)\frac{D^{3/2}}{R_1R_2}.$$

In the second term we have

$$(4.13)\quad \sum_{D<d\leq 2D}\ \sum_{\substack{r_1=R_1\\ (r_1,r_2)=d}}^{2R_1}\ \sum_{r_2=R_2}^{2R_2} H(r_1)H(r_2)\ll \sum_{r_1=R_1}^{2R_1} H(r_1)d(r_1)\max_{D<d\leq 2D}\ \sum_{\substack{r_2=R_2\\ d\mid r_2}}^{2R_2} H(r_2)$$

$$\ll R_1^{\varepsilon}\, I(R_1)\max_{D<d\leq 2D} I(d,R_2).$$

Similarly, we have

$$(4.14)\quad E_2(P)\ll E_2(K)+XL^2\max_{K\leq R\leq P} I(R)/R.$$

In §'s 5 and 6 we shall give upper bounds for $E_\nu(K)$ and $I(d,R)$. These will lead to bounds for $E_\nu(P)$. Finally, from (4.3) and (4.6) -(4.8) we have for $n\in N_1\cap(X/2,X]$

$$(4.15)\quad R_1(n)=\sigma(n)n+O(XL^{-1})+O(E_2(P))+O(E_3(P)).$$

5. We shall estimate $E_\nu(K)$ by density theorems. We need the following Lemmas.

<u>Lemma 4.</u> There is a constant $c_1>0$ such that

$$(5.1)\quad L(s,\chi)\neq 0 \quad \text{whenever}\quad \sigma>1-\frac{c_1}{\max(\log R,\ \log^{4/5}(|t|+2))}$$

for all primitive characters $\chi$ of modulus $r \leqq R$, with the possible exception of at most one primitive character $\tilde{\chi}(\bmod\ \tilde{r})$. If it exists, the (unique) exceptional real zero $\tilde{\beta}$ of $L(s,\tilde{\chi})$ is simple and satisfies

$$(5.2) \qquad \tilde{\beta} > 1 - c_2 \tilde{r}^{-3/5} .$$

<u>Lemma 5.</u> For any character $\chi(\bmod\ r)$ and $0 \leqq \alpha \leqq 1$ we have

$$(5.3) \qquad N(\alpha,T,\chi) = \sum_{\substack{\rho=\rho_\chi \\ \beta \geqq \alpha,\, |\gamma| \leqq T}} 1 \ll (rT)^{(5/2)(1-\alpha)} \log^{14}(rT).$$

For Lemmas 4 and 5 see [5, Satz 6.2], [4, Lemma 4.1] and Montgomery [3, Theorem 12.1], resp.

Let us apply Lemma 4 with $R = K$. Then for any primitive $\chi \bmod r \leqq K$, $\chi \neq \tilde{\chi}$ we have

$$(5.4) \quad Z(\chi) \ll (rQ)^{-1} \max_{x<X} \left\{ \sum_{|\gamma| \leqq X^{1/3}} \left| \frac{B_x^\rho - A_x^\rho}{\rho} \right| + \frac{XL^2}{X^{1/3}} + X^{1/3} \right\}$$

$$\ll \sum_{|\gamma| \leqq X^{1/3}} Y^{\beta-1} + X^{-\varepsilon/2}$$

$$\ll L \max_{0 \leqq \alpha \leqq 1 - c_1 L^{-4/5}} \frac{N(\alpha, X^{1/3}, \chi)}{X^{(7/8)(1-\alpha)}} + X^{-\varepsilon/2}$$

$$\ll L^{15} \left(\frac{X^{6/7}}{X^{7/8}}\right)^{c_1 L^{-4/5}} + X^{-\varepsilon/2} \ll e^{-L^{1/6}} .$$

If $\chi = \tilde{\chi}$ we have, similarly to this, by (5.2)

$$(5.5) \qquad Z(\tilde{\chi}) \ll e^{-L^{1/6}} + e^{-cL\tilde{r}^{-3/5}} .$$

These estimations imply for $E_\nu(K)$ in (4.7)-(4.8)

$$(5.6)\qquad E_3(K) \ll XK^5 e^{-L^{1/6}} + \frac{XL^{1/2+\varepsilon}}{\tilde{r}^{1/2} e^{cL\tilde{r}^{-3/5}}}$$

$$\ll Xe^{-L^{1/7}} + \frac{XL^{1/2+\varepsilon}}{L^{3/4}} \ll XL^{-1/5},$$

which we obtain by distinguishing the cases $r \geq L^{3/2}$ and $r \leq L^{3/2}$. Similarly we get

$$(5.7)\qquad E_2(K) \ll XL^{-1/5}.$$

6. The needed estimate for $I(d,R)$ will be given by

<u>Lemma 6.</u> For $R \leq P$ we have $I(d,R) \ll L^c(1+(X^{-\varepsilon}Rd^{-1})^{1/2})$.

<u>Proof.</u> Since this is trivial for $R<1$, we may suppose $R\geq 1$. By Vaughan's identity we obtain (with $L=L(s,\chi)$)

$$(6.1)\qquad J_o = \frac{L'}{L} + F = FGL + GL' + (1-LG)\left(\frac{L'}{L} + F\right) = J_1 + J_2 + J_3,$$

where

$$(6.2)\; F = F_\chi(s) = \sum_{n\leq X^{1/3}} \chi(n)\Lambda(n)n^{-s},\; G = G_\chi(s) = \sum_{n\leq X^{1/3}} \chi(n)\mu(n)n^{-s}.$$

By Perron's formula we have for $R<r\leq 2R$

$$(6.3)\; Z(\chi) \ll (RQ)^{-1} \max_{x<X} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{1+L^{-1}-iX}^{1+L^{-1}+iX} J_o(s)\, \frac{B_x^s - A_x^s}{s}\, ds + O\left(\frac{XL^c}{X}\right) + O(X)^{1/3} \right\}.$$

Let us investigate the quantities $(\nu=1,2,3)$

$$(6.4)\qquad B_\nu(\chi,r,x) = \frac{-1}{2\pi i RQ}\int_{1+L^{-1}-iX}^{1+L^{-1}+iX} J_\nu(s)\,\frac{B_x^s-A_x^s}{s}\,ds\ .$$

On shifting the line of integration to $\sigma=1/2$ we obtain for $\nu\leq 2$

$$(6.5)\qquad \max_{x<X} B_\nu(\chi,r,x) \ll \int_{-X}^{X}|J_\nu(\tfrac{1}{2}+it)|\min\left(\frac{x^{1/2}(RQ)^{-1}}{|t|+1},\ Y^{-\frac{1}{2}}\right)dt + \frac{X^{1/3}}{RQ}\ .$$

Now for the L-functions and their derivatives we use the quadratic mean value theorem and for $F$ and $FG$ the large sieve mean value theorem [3, Theorem 7.3] in the modified form

$$(6.6)\qquad \sum_{\substack{r\leq R\\ d|r}}\ \sum_{\chi(r)}{}^{*}\int_{T_o}^{T_o+T}\Big|\sum_{n\leq N} a_n\chi(n)n^{-it}\Big|^2dt \ll \Big(\frac{R^2T}{d}+N\Big)\log N\sum_{n\leq N}|a_n|^2\ ,$$

which can be proved along the same lines as Theorem 7.3 in [3]. These imply by Cauchy-Schwarz inequality for $1\leq T\leq X$

$$(6.7)\qquad \sum_{\substack{R<r\leq 2R\\ d|r}}\ \sum_{\chi(r)}{}^{*}\int_{T-1}^{2T}|J_\nu(\tfrac{1}{2}+it)|dt \ll$$

$$\ll\left(\sum_{\substack{R<r\leq 2R\\ d|r}}\ \sum_{\chi(r)}{}^{*}\int_{T-1}^{2T}|GF^{2-\nu}(\tfrac{1}{2}+it)|^2dt\right)^{1/2}\left(\sum_{\substack{R<r\leq 2R\\ d|r}}\ \sum_{\chi(r)}{}^{*}\int_{T-1}^{2T}|L^{(\nu-1)}(\tfrac{1}{2}+it)|^2dt\right)^{1/2}$$

$$\ll L^c\left(\frac{R^2T}{d}+X^{2/3}\right)^{1/2}\left(\frac{R}{d}\,RT\right)^{1/2}\ .$$

In case of $B_3(\chi,r,x)$ we can neglect any subset $A$ of coffecients of $J_3(s)$ with $A\subset[2X,\infty)$ and so, analogously to (6.5)-(6.7) it is enough to estimate $O(L^2)$ quantities of the form

$$(6.8)\qquad S_{M,N} = \sum_{\substack{R<r\leq 2R\\ d|r}}\ \sum_{\chi(r)}{}^{*}\int_{T-1}^{2T}|M(\tfrac{1}{2}+it)N(\tfrac{1}{2}+it)|dt \quad\text{with}$$

$$M(s) = \sum_M^{2M} a_m m^{-s}, \quad N(s) = \sum_N^{2N} b_n n^{-s}, \quad \sum_M^{2M} |a_m|^2 \ll \mathcal{L}^c M, \quad \sum_N^{2N} |b_n|^2 \ll \mathcal{L}^c N$$

where $M,N \ll X^{2/3}$, $MN \ll X$. Working similarly to (6.5)-(6.7) we obtain

$$(6.9) \qquad S_{M,N} \ll \mathcal{L}^c\left(\frac{R^2T}{d} + M\right)^{1/2}\left(\frac{R^2T}{d} + N\right)^{1/2}$$

$$\ll \mathcal{L}^c\left(\frac{R^2T}{d} + X^{1/2} + X^{1/3}\frac{RT^{1/2}}{d^{1/2}}\right).$$

Summarizing (6.3)-(6.9) we have

$$(6.10) \quad I(d,R) \ll \mathcal{L}^c \max_{1\le T\le X}\left\{\left(\frac{R^2T}{d} + X^{1/2} + X^{1/3}\frac{RT^{1/2}}{d^{1/2}}\right)\min\left(\frac{X^{1/2}(RQ)^{-1}}{T}, X^{-1/2}\right)\right\}$$

$$+ \frac{X^{1/3}R}{Q}.$$

Since the maximum is attained for $T = X/RQ$ we get

$$(6.11) \quad I(d,R) \ll \mathcal{L}^c\left\{\frac{R}{d}X^{-1/6-\varepsilon} + 1 + \left(\frac{R}{d}X^{-\varepsilon}\right)^{1/2}\right\} \ll \mathcal{L}^c\left\{1 + \left(\frac{R}{d}X^{-\varepsilon}\right)^{1/2}\right\}. \text{ Q.E.D.}$$

7. By (4.14), (5.7), and Lemma 6 we have

$$(7.1) \quad E_2(P) \ll X(\mathcal{L}^{-1/5} + \mathcal{L}^c K^{-1} + \mathcal{L}^c X^{-\varepsilon/2}) \ll X\mathcal{L}^{-1/5}.$$

Further for $\max(K,R_1) \le R_2 \le P$, $D \le 2R_1$ we obtain from Lemma 6

$$(7.2) \quad R_1^{\varepsilon}\, I(R_1) \max_{D<d\le 2D} I(d,R_2)\cdot\frac{D^{3/2}}{R_1R_2} \ll \frac{\mathcal{L}^c D^{3/2}}{R_1^{1-\varepsilon}R_2}(1+(X^{-\varepsilon}R_1)^{1/2})(1+(\frac{X^{-\varepsilon}R_2}{D})^{1/2})$$

$$\ll \frac{\mathcal{L}^c D^{3/2}}{R_1^{1-\varepsilon}R_2}\left(1+\left(X^{-\varepsilon}\frac{R_1R_2}{D}\right)^{1/2}\right) \ll K^{-1/3} + X^{-\varepsilon/6} \ll K^{-1/3}.$$

Thus (4.12)-(4.13) and (5.6) imply

$$(7.3) \qquad E_3(P) \ll XL^{-1/5} + XL^4K^{-1/3} \ll XL^{-1/5} .$$

Formulas (4.15), (7.1) and (7.3) yield

$$(7.4) \qquad R_1(n) = \sigma(n)n + O(XL^{-1/5}) .$$

Taking into account (2.10) we have for $n \in N_1 \setminus N_2 \cap [X/2, X]$

$$(7.5) \qquad R_0(n) = \sigma(n)n + O(XL^{-1/5}) .$$

The contribution of prime squares can be included in the error term and so we have

$$(7.6) \quad R_0(n) = \sum_{\substack{p+p'=n \\ Y<p,p' \leqq X}} (L+O(\log L))^2 = L^2(1+O(\frac{\log L}{L}))R(n)+O(YL).$$

Hence we have for $n \in N_1 \setminus N_{2,X} \cap [X/2, X]$

$$(7.7) \qquad R(n) = \frac{\sigma(n)n}{\log^2 n} + O\left(\frac{n}{\log^{11/5} n}\right)$$

which obviously proves our Theorem, since

$N_{2,X}(X) \ll X^{2/3+2\varepsilon}$, $\varepsilon>0$ was arbitrary and $\sum_{j=0}^{\infty} (2^{-j}X)^{2/3+2\varepsilon} \ll X^{2/3+2\varepsilon}$ .

## References

[1] P.X.Gallagher, A large sieve density estimate near $\sigma=1$, Invent. Math. 11(1970), 329-339.

[2] G.H.Hardy and J.E. Littlewood, Some problems of 'Partitio Numerorum' (V): A further contribution to the study of Goldbach's problem, Proc. London Math. Soc. (2) 22 (1924), 46-56.

[3] H.L.Montgomery, Topics in Multiplicative Number Theory, Springer, 1971.

[4] H.L.Montgormery and R.C. Vaughan, The exceptional set in Goldbach's problem, Acta Arith. 27(1975), 353-370.

[5] K.Prachar, Primzahlverteilung, Springer, 1957.

[6] R.C. Vaughan, Mean value theorems in prime number theory, J. London Math. Soc. (2) 10 (1975), 153-162.

[7] R.C. Vaughan, An elementary method in prime number theory, Acta Arith. 37(1980), 111-115.

Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences
Reáltanoda u. 13-15., Budapest, H-1053, Hungary.

# SUR LE PROBLEME DES DIVISEURS GENERALISES

PAR

PATRICK SARGOS

## §1 - INTRODUCTION

1.1. : Soit $P(\underline{x}) = P(x_1, \ldots, x_n)$ un polynôme à coefficients positifs, qui dépend effectivement des $n$ variables $x_1, \ldots, x_n$. Pour chaque $t > 0$, on définit le volume :

$$(1.1) \qquad V_P(t) = \mathrm{Vol}\{\underline{x} \in [1, +\infty[^n \ : \ P(\underline{x}) \leq t\},$$

et le nombre de points entiers :

$$(1.2) \qquad N_P(t) = \# \{\underline{\nu} \in \mathbb{N}^{*n} \ : \ P(\underline{\nu}) \leq t\}.$$

On étudie le comportement asymptotique, quand $t \to +\infty$, de $V_P(t)$, de $N_P(t)$ et de $N_P(t) - V_P(t)$. Les résultats sont exprimés au moyen du polyèdre de Newton à l'infini de $P$ (cf §2), noté $\mathcal{E}(P)$.

1.2. - Théorème : Il existe un nombre rationnel $\sigma_o > 0$, et un entier $\rho_o$, vérifiant $1 \leq \rho_o \leq n$, calculables géométriquement à partir de $\mathcal{E}(P)$, et deux constantes $A_o$ et $B_o$ positives, explicitement calculables à partir de $\mathcal{E}(P)$ et des coefficients de $P$, tels qu'on ait, quand $t \to +\infty$ :

$$(1.3) \qquad V_P(t) = A_o \, t^{\sigma_o} (\mathrm{Log}\, t)^{\rho_o - 1} \left(1 + O\left(\frac{1}{\mathrm{Log}\, t}\right)\right),$$

et

$$(1.4) \qquad N_P(t) = B_o \, t^{\sigma_o} (\mathrm{Log}\, t)^{\rho_o - 1} \left(1 + O\left(\frac{1}{\mathrm{Log}\, t}\right)\right).$$

Au §3, on donne une construction géométrique de $\sigma_o$ et de $\rho_o$. Le calcul de $A_o$ et $B_o$ fait l'objet du Théorème 3.3.

.../...

C'est A. N. Varchenko [8] qui a introduit l'interprétation géométrique de l'exposant $\sigma_o$ à partir du polyèdre de Newton. Le cadre très général dans lequel il se place ne contient pas entièrement la situation décrite ici, et implique, d'autre part, des démonstrations très sophistiquées.

La construction géométrique de l'entier $\rho_o$ est due à V. A. Vasiliev [9] , qui montre directement que, sous des hypothèses légèrement plus restrictives que les nôtres, on a :

$$V_P(t) \underset{\cap}{\cup} t^{\sigma_o} (\mathrm{Log}\, t)^{\rho_o - 1} .$$

Les constantes $A_o$ et $B_o$ ont été calculées par P. Cassou-Noguès [1] , lorsque $P(x_1, x_2)$ est un polynôme à deux variables, pour $\rho_o = 1$ (cf exemple 3.5).

<u>1.3.</u> : Il est facile de vérifier, au moyen d'inégalités élémentaires, qu'on a toujours

(1.5) $\quad N_P(t) \geqslant V_P(t),$

et

(1.6) $\quad N_P(t) \underset{\cap}{\cup} V_P(t) \qquad (t \to +\infty),$

Ce dernier point étant aussi une conséquence du Théorème 1.2.

Un différence "importante" entre $N_P(t)$ et $V_P(t)$ ne peut exister que si une fraction "importante" des points entiers, comptés dans $N_P(t)$, se trouvent à proximité des hyperplans de coordonnées (cf figure 2) . Ce phénomène peut-être traduit en termes de polyèdre de Newton :

**<u>1.4. - Théorème</u> : Il existe un entier $\rho$ vérifiant $0 \leqslant \rho \leqslant n-1$ et $\rho \leqslant \rho_o$, qui peut-être calculé géométriquement à partir de $\mathcal{E}(P)$, et une constante positive $A$, explicitement calculable à partir de $\mathcal{E}(P)$ et des coefficients de $P$ , tels qu'on ait, quand $t \to +\infty$ :**

$$(1.7)\quad N_P(t) - V_P(t) = \begin{cases} O\left(t^{\sigma_o - \delta}\right) & \text{pour un certain } \delta > 0, \text{ si } \rho = 0 \\ A\, t^{\sigma_o} (\mathrm{Log}\ t)^{\rho-1} \left(1 + O\left(\frac{1}{\mathrm{Log}\ t}\right)\right), & \text{si } \rho > 0. \end{cases}$$

La construction géométrique de $\rho$ est donnée au § 4, et le calcul de $A$ fait l'objet du Théorème 4.4.

1.5. - Exemple : (Problème des diviseurs)

Soit $P(x, y) = xy$. Le résultat suivant est bien connu (cf [7 ; chap. XII]) :

$$(1.8)\quad \begin{cases} V_P(t) = t\,\mathrm{Log}\, t - t + 1 \\ N_P(t) = t\,\mathrm{Log}\, t + (2\gamma - 1)\,t + O_\varepsilon(t^{\alpha+\varepsilon}), \end{cases}$$

pour un certain $\alpha < 1$, $\gamma$ désignant la constante d'Euler.

Notre méthode, appliquée à cet exemple, donne :

$$V_P(t) \sim N_P(t) \sim t\,\mathrm{Log}\, t,$$

$$N_P(t) - V_P(t) \sim 2\gamma\, t.$$

1.6. - Théorème : Il existe une suite décroissante $(\sigma_k)_{k \geqslant 0}$, finie ou non, contenue dans une progression arithmétique de la forme $\sigma_o - \frac{1}{N}\mathbb{N}$, où $N$ est un entier qui ne dépend que de $\mathcal{E}(P)$, et il existe des polynômes $Q_k$ et $R_k \in \mathbb{R}[X]$, de degrés $\leqslant n-1$, tels qu'on ait :

$$(1.9)\quad V_P(t) = \sum_{k \geqslant 0} t^{\sigma_k}\, Q_k(\mathrm{Log}\, t),$$

pour $t$ assez grand, et

$$(1.10)\quad N_P(t) = \sum_{k=0}^{m} t^{\sigma_k}\, R_k(\mathrm{Log}\, t) + O_\varepsilon\left(t^{\sigma_o - 1/d + \varepsilon}\right)$$

quand $t \to +\infty$, où $d$ est le degré total du polynôme $P$, et où $m$ est le plus grand des entiers $k \geqslant 0$ vérifiant $\sigma_k > \sigma_o - 1/d$.

1.7. - Remarques :

a) La convergence, pour $t$ assez grand, de la série (1.9), implique qu'il existe une constante positive $M = M(P)$ telle que les coefficients de $Q_k$ soient $\ll M^k$. En particulier, on a le développement asymptotique illimité :

$$(1.11) \qquad V_P(t) \sim \sum_{k \geqslant 0} t^{\sigma_k} \; Q_k \, (\operatorname{Log} t).$$

b) Nous verrons à l'exemple 5.3 ci-dessous que l'égalité (1.9), appliquée à un polynôme $P$ à une variable, permet d'obtenir la racine de l'équation :

$$(1.12) \qquad P(x) = t ,$$

qui tend vers $+\infty$ quand $t \to +\infty$, sous forme d'une série de Lagrange [3 ; III, chap. 5, §1], qui converge pour $t$ assez grand.

c) L'estimation (1.10), appliquée au problème des diviseurs, montre que, dans (1.8), on peut prendre $\alpha = 1/2$, ce qui n'est pas la meilleure valeur de $\alpha$ [7 ; Théorème 12.2 et 12.4].

Mais si on suppose que $P$ est une forme linéaire à coefficients entiers, alors l'exposant $\sigma_0 - 1/d$, dans le terme-reste de (1.10), est optimal.

1.8. - On pose $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$. On désigne par $Z_P(s)$ le prolongement méromorphe de la série de Dirichlet :

$$(1.13) \qquad Z_P(s) = \sum_{\underline{\nu} \in \mathbb{N}^{*n}} P(\underline{\nu})^{-s}$$

et par $Y_P(s)$ celui de la fonction :

$$(1.14) \qquad Y_P(s) = \int_{[1, +\infty[^n} P(\underline{x})^{-s} \, d\underline{x} .$$

Ces fonctions ont été étudiées dans [1], [2], [4].

.../...

Le lien entre $Z_P(s)$ et $N_P(t)$ d'une part, entre $Y_P(s)$ et $V_P(t)$ d'autre part, est exposé au §6 (Lemme 6.3).

En particulier, si $\mathcal{P}$ est un ensemble, contenu dans $\sigma_o - \frac{1}{N}\mathbb{N}$, pour un certain entier N, et contenant les pôles de $Z_P$ et $Y_P$, alors, dans le Théorème 1.6, on peut prendre pour $(\sigma_k)_{k \geqslant 0}$ la suite des éléments de $\mathcal{P} \cup \{0\}$, rangés par ordre décroissant.

Au §5, nous construisons, à partir des équations des faces de $\mathcal{E}(P)$ et des exposants des monômes de P, un ensemble $\mathcal{P}$ de pôles "présumés". Cette construction est due à P. Cassou-Noguès [1] dans le cas $n = 2$, et peut être généralisée sans modification pour $n \geqslant 3$. En s'appuyant sur les expressions qui apparaissent au cours de la démonstration, on peut conjecturer que chaque élément $s_o$ de l'ensemble $\mathcal{P}$ ainsi obtenu est effectivement un pôle pour les fonctions $Y_P(s)$ et $Z_P(s)$, sauf peut-être si $s_o$ est un entier négatif (cf [1] et [6]), ou si les coefficients de P vérifient certaines équations spécifiques.

Nous ne donnerons pas ici les démonstrations : grâce au Lemme 6.3, le Théorème 1.6 est une conséquence des résultats de [4] et [5], et les Théorèmes 1.2, 1.4, 3.3, 4.4 et 5.2 sont conséquence des résultats de [6].

Cet exposé résume l'essentiel des travaux que j'ai effectués sous la direction de Gérald Tenenbaum pendant ces quatre dernières années. Je profite de l'occasion pour lui exprimer des rermerciements particulièrement chaleureux : ses conseils, ses remarques et ses encouragements m'ont été d'un apport inestimable.

## §2 - DEFINITIONS ET NOTATIONS GEOMETRIQUES

2.1. : Pour tout polyèdre convexe $E$ de $\mathbb{R}^n$, on désigne par $\tilde{E}$ le sous-espace vectoriel associé au sous-espace affine engendré par $E$. La dimension de $E$ est le nombre

$$(2.1) \qquad \dim E = \dim \tilde{E} .$$

Une facette de $E$ est l'intersection de $E$ avec l'un de ses hyperplans d'appui ; on conviendra que $E$ est une facette de lui-même. Les facettes de dimension zéro sont les sommets de $E$. Si $E$ est de dimension $n$, les facettes de dimension $n-1$ sont les faces de $E$ ; chaque facette de $E$, distincte de $E$, est l'intersection des faces qui la contiennent.

2.2. : Pour toute partie $A$ de $\mathbb{R}^n$, on pose

$$\mathrm{conv}(A) = \text{enveloppe convexe de } A.$$

On désigne par $\underline{e}_1 = (1, 0,\ldots,0)$, $\underline{e}_2 = (0, 1, 0,\ldots, 0),\ldots,$ $\underline{e}_n = (0,\ldots, 0, 1)$ les $n$ vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

La diagonale du premier octant est la demi-droite

$$(2.2) \qquad \Delta = \{ (\tau,\ldots,\tau) : \tau \geqslant 0 \} \quad \mathbb{R}^n .$$

Le produit scalaire des vecteurs $\underline{\alpha}$ et $\underline{\beta} \in \mathbb{R}^n$ est noté $< \underline{\alpha}, \underline{\beta} >$ ($< \underline{\alpha}, \underline{\beta} > = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \beta_i$). Enfin, pour tout sous-espace vectoriel $E$ de $\mathbb{R}^n$, on désigne par $E^{\perp}$ son orthogonal.

2.3. : Soit $P \in \mathbb{C}[X_1,\ldots, X_n]$. On pose

$$(2.3) \qquad P(\underline{x}) = \sum_{\underline{\alpha}} a_{\underline{\alpha}} \, \underline{x}^{\underline{\alpha}} .$$

On appelle support de $P$ l'ensemble

$$(2.4) \qquad \mathrm{supp}\, P = \{ \underline{\alpha} \in \mathbb{N}^n : a_{\underline{\alpha}} \neq 0 \} .$$

.../...

Le polyèdre de Newton de $P$ est l'ensemble

(2.5) $\quad \mathcal{E}(P) = \text{conv}(\text{supp } P) - \mathbb{R}_+^n$

( $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ ). Pour chaque facette $G$ de $\mathcal{E}(P)$, on pose :

(2.6) $\quad P_G(\underline{x}) = \sum_{\underline{\alpha} \in G \cap \text{supp } P} a_{\underline{\alpha}} \cdot \underline{x}^{\underline{\alpha}}$

On suppose dans toute la suite que $P$ dépend effectivement des $n$ variables $x_1, \ldots, x_n$. Alors $\underline{0}$ est intérieur à $\mathcal{E}(P)$, et, pour chaque face $F$ de $\mathcal{E}(P)$, il existe un unique vecteur $\underline{\lambda} \in \mathbb{R}_+^n$ tel que $F$ soit contenue dans l'hyperplan :

$$H_{\underline{\lambda}} = \{ \underline{\alpha} \in \mathbb{R}^n \ : \ <\underline{\lambda}, \underline{\alpha}> = 1 \} .$$

On dira que $\underline{\lambda}$ est le vecteur polaire de $F$.

Une face $F$ de $\mathcal{E}(P)$ est parallèle au vecteur de base $\underline{e}_i$ si, désignant par $\underline{\lambda}$ le vecteur polaire de $F$, on a $<\underline{\lambda}, \underline{e}_i> = 0$. Une facette $G$ de $\mathcal{E}(P)$ est parallèle à $\underline{e}_i$ si chaque face qui la contient est parallèle à $\underline{e}_i$. On conviendra que $\mathcal{E}(P)$ est parallèle à chaque $\underline{e}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Pour qu'une facette de $\mathcal{E}(P)$ soit bornée, il faut et il suffit qu'elle ne soit parallèle à aucun des $\underline{e}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

## §3 - CALCUL DE L'EQUIVALENT DE $N_P(t)$ ET DE $V_P(t)$

3.1. : Soient $\sigma_o$ et $\rho_o$ les nombres définis au Thoérème 1.2. Soit $\underline{\delta} = (\delta, \ldots, \delta)$ le point d'intersection de $\Delta$ avec le bord de $\mathcal{E}(P)$. On a :

(3.1) $\quad \sigma_o = 1/\delta$ .

Soit $G_o$ l'intersection de toutes les faces de $\mathcal{E}(P)$ qui rencontrent $\Delta$ ($G_o$ est la plus petite facette de $\mathcal{E}(P)$ qui rencontre $\Delta$ ).

Le nombre $\rho_o$ est égal à

(3.2) $\rho_o = \operatorname{codim} G_o$ .

<u>3.2.</u> - Le calcul des constantes $A_o$ et $B_o$ nécessite une construction géométrique préliminaire.

On fait une permutation des coordonnées de façon que les deux propriétés suivantes soient vérifiées :

(3.3) On a la décomposition : $\mathbb{R}^n = \tilde{G}_o \oplus (\mathbb{R}\,\underline{e}_1 + \ldots + \mathbb{R}\,\underline{e}_{\rho_o})$

(3.4) L'ensemble des vecteurs de base auxquels $G_o$ est parallèle est $\{\underline{e}_{m+1}, \ldots, \underline{e}_n\}$

(une telle permutation est toujours possible, et il peut y en avoir plusieurs).

On construit le polytope K de $\mathbb{R}^n$ : soient $D_1, \ldots, D_N$ les génératrices extrémales du cône polyédral $\mathbb{R}_+^n \cap \tilde{G}_o^{\perp}$ ; pour chaque k $(1 \leqslant k \leqslant N)$, soit $\underline{\lambda}_k$ le vecteur de $D_k$ qui vérifie $\langle \underline{\lambda}_k , \underline{\alpha} \rangle = 1$ pour tout $\underline{\alpha} \in G_o$.

On pose :

(3.5) $K = \operatorname{conv} \{ \underline{0} , \underline{\lambda}_1, \ldots, \underline{\lambda}_N , \underline{e}_{\rho_o+1}, \ldots, \underline{e}_n \}$.

<u>3.3. - Théorème</u> : Les constantes $A_o$ et $B_o$ apparaissant dans l'énoncé du Théorème 1.2 peuvent être définies par les expressions convergentes suivantes :

(3.6) $$A_o = \frac{n!\ \mathrm{Vol}\,(K)}{\sigma_o\,(\rho_o - 1)!} \int_{[1, +\infty[^{n-m}} \left( \int_{\mathbb{R}_+^{m-\rho_o}} P_{G_o}(\underline{1}, \underline{x}, \underline{y})^{-\sigma_o}\, d\underline{x} \right) d\underline{y}$$

(3.7) $$B_o = \frac{n!\ \mathrm{Vol}\,(K)}{\sigma_o\,(\rho_o - 1)!} \sum_{\underline{\nu} \in \mathbb{N}^{*n-m}} \int_{\mathbb{R}_+^{m-\rho_o}} P_{G_o}(\underline{1}, \underline{x}, \underline{\nu})^{-\sigma_o}\, d\underline{x} .$$

.../...

Dans cette écriture, on a posé :

$$(\underline{1}, \underline{x}, \underline{y}) = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{\rho_o}, x_1, \ldots, x_{m-\rho_o}, y_1, \ldots, y_{n-m}).$$

<u>3.4. - Exemple</u> : Si la facette $G_o$ est bornée, on a $m = n$, et les expressions (3.6) et (3.7) se simplifient :

$$(3.8) \quad A_o = B_o = \frac{n!\ \mathrm{Vol}\ (K)}{\sigma_o\ (\rho_o - 1)!} \int_{\mathbb{R}_+^{n-\rho_o}} P_{G_o}(\underline{1}, \underline{x})^{-\sigma_o}\ d\underline{x}.$$

<u>3.5. - Exemple</u> : On suppose en outre $\rho_o = 1$. Alors $G_o$ est une face (bornée) de $\mathcal{E}(P)$ ; son vecteur polaire $\underline{\lambda}$ n'est dans aucun hyperplan de coordonnées ; le polytope $K$ se réduit à un simplexe :

$K = \mathrm{conv}\ \{\underline{\lambda}, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n\}$ et $n!\ \mathrm{Vol}\ (K) = \det\ (\underline{\lambda}, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n) = \lambda_1$ ; on remarque également que toutes les permutations de coordonnées vérifient (3.3) et (3.4).

Si on introduit la fonction $\Gamma$ d'Euler, on peut, à l'aide de changements de variables faciles, transformer (3.8), et on obtient :

$$(3.9) \quad A_o = B_o = \frac{1}{\sigma_o\ \Gamma(\sigma_o)} \int_{\mathbb{R}_+^n} \exp(-P_{G_o}(\underline{x}))\ d\underline{x}.$$

Dans le cas $n = 2$, cette expression est due à P. Cassou-Noguès [1].

<u>3.6. - Exemple</u> : Le cas le plus simple est celui où on a $\rho_o = n$ ; $G_o$ se réduit à un sommet $\underline{\alpha} = (\alpha, \ldots, \alpha)$, et $K$ est le simplexe

$$K = \frac{1}{\alpha}\ \mathrm{conv}\ \{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n\},\ \text{d'où}$$

$$(3.10) \quad A_o = B_o = \frac{\alpha^{1-n}}{(n-1)!}\ a_{\underline{\alpha}}^{1/\alpha}.$$

<u>3.7. - Remarque</u> : Si on suppose $\rho_o = 1$ ou $\rho_o = n$, $K$ est un simplexe, et son volume s'exprime à l'aide d'un simple déterminant. Il en est encore ainsi pour $\rho_o = 2$. En effet, le cône $\tilde{G}_o^{\perp} \cap \mathbb{R}_+^n$,

étant de dimension 2, n'a que deux génératrices extrémales, d'où l'écriture :

$$K = \text{conv}\,\{ \underline{0}, \underline{\lambda}_1, \underline{\lambda}_2, \underline{e}_3, \ldots, \underline{e}_n \} \;.$$

Mais $K$ n'est en général pas un simplexe en dimension $n \geqslant 4$, quand on a $3 \leqslant \rho_o \leqslant n-1$.

## §4 - COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE $N_P(t) - V_P(t)$

4.1. : Remarquons d'abord que la relation :

$$(4.1) \quad N_P(t) - V_P(t) = \sum_{\substack{\underline{\nu} \in \mathbb{N}^{*n} \\ P(\underline{\nu}) \leqslant t}} \left[ 1 - \int_{\substack{\underline{\theta} \in [0,\, 1]^n \\ P(\underline{\nu} + \underline{\theta}) \leqslant t}} d\underline{\theta} \right]$$

montre que cette quantité est toujours $\geqslant 0$, et est $> 0$ pour $t$ assez grand. On calcule la partie principale de (4.1) lorsque celle-ci est $\gg t^{\sigma_o}$.

On construit géométriquement le nombre $\rho$ défini au Théorème 1.4 en posant :

$$(4.2) \quad \rho = \max_G \ \text{codim}\, G \ ,$$

où $G$ parcourt l'ensemble des facettes non bornées de $\mathcal{E}(P)$ qui rencontrent la diagonale $\Delta$.

On définit l'ensemble $g$ :

$$(4.3) \quad g = \{ G : G \text{ facette non bornée de } \mathcal{E}(P),\ \text{codim}\, G = \rho,\ G \cap \Delta \neq \emptyset \}.$$

Il y a équivalence entre $\rho = 0$ et $g = \{ \mathcal{E}(P) \}$. Dans le cas $\rho > 0$, il y a, pour chaque $i$ fixé $(1 \leqslant i \leqslant n)$, au plus une facette $G \in g$ qui soit parallèle à $\underline{e}_i$ (cf §2.3) ; en particulier, $g$ a au plus $n$ éléments.

On suppose $\rho > 0$, et on calcule la constante $A$ du Théorème 1.4.

.../...

4.2. : On fixe $G \in g$. On lui associe une constante $A_G$ comme suit. On fait une permutation des coordonnées de façon que les deux propriétés suivantes soient vérifiées :

(4.4) $\mathbb{R}^n = \tilde{G} \oplus (\mathbb{R}\,\underline{e}_1 + \dots + \mathbb{R}\,\underline{e}_\rho)$

(4.5) l'ensemble des vecteurs auxquels $G$ est parallèle est $\{\underline{e}_{m+1}, \dots, \underline{e}_n\}$.

Comme $G$ est non bornée, on a $1 \leq m \leq n-1$.

Soient $D_1, \dots, D_N$ les génératrices extrémales du cône $\mathbb{R}^n_+ \cap \tilde{G}^\perp$ ; pour chaque $k$ $(1 \leq k \leq N)$, on désigne par $\underline{\lambda}_k$ le vecteur de $D_k$ qui vérifie $< \underline{\lambda}_k, \underline{\alpha} > = 1$ pour tout $\underline{\alpha} \in G$. On définit le polytope :

$$K = \operatorname{conv}\{\underline{0}, \underline{\lambda}_1, \dots, \underline{\lambda}_N, \underline{e}_{\rho+1}, \dots, \underline{e}_n\}.$$

4.3. - Lemme : L'expression

(4.6) $$A_G = \frac{n!\ \mathrm{Vol}(K)}{\sigma_o\ (\rho-1)!} \sum_{\underline{\nu} \in \mathbb{N}^{*n-m}}$$

$$\int_{\mathbb{R}_+^{m-\rho}} \left[ P_G(\underline{1}, \underline{x}, \underline{\nu})^{-\sigma_o} - \int_{[0,1]^{n-m}} P_G(1, \underline{x}, \underline{\nu}+\underline{\theta})^{-\sigma_o}\, d\underline{\theta} \right] d\underline{x}$$

est convergente. Le nombre $A_G$ ainsi défini est $> 0$, et ne dépend pas de la permutation des coordonnées vérifiant (4.4) et (4.5).

Dans l'écriture ci-dessus, on a posé :

$$(1, \underline{x}, \underline{\nu} + \underline{\theta}) = (\underbrace{1, \dots, 1}_{\rho}, x_1, \dots, x_{m-\rho}, \nu_1 + \theta_1, \dots, \nu_{n-m} + \theta_{n-m}).$$

Comme la quantité entre crochets, dans (4.6), est positive, dire que l'expression ci-dessus est convergente signifie qu'on a :

$$\sum_{\underline{\nu}\in \mathbb{N}^{*n-m}} \int_{\mathbb{R}_+^{m-\rho}} \left[ P_G(\underline{1},\, \underline{x},\, \underline{\nu})^{-\sigma_o} - \int_{[0,1]^{n-m}} P_G(\underline{1},\, \underline{x},\, \underline{\nu}+\underline{\theta})^{-\sigma_o}\, d\underline{\theta} \right] d\underline{x} < +\infty \, .$$

Par contre, l'expression $\displaystyle\sum_{\underline{\nu}\in \mathbb{N}^{*n-m}} \int_{\mathbb{R}_+^{m-\rho}} P_G(\underline{1},\, \underline{x},\, \underline{\nu})^{-\sigma_o}\, d\underline{x}$

converge si et seulement si $\rho = \rho_o$ , donc si et seulement si $G_o$ est non bornée.

4.4. - Théorème : La constante $A$ figurant dans l'estimation (1.7) peut être définie par la formule suivante :

$$A = \sum_{G \in g} A_G$$

4.5. - Exemple : On reprend l'exemple du problème des diviseurs (cf §1.5) qui correspond au polynôme à 2 variables $P(x, y) = xy$ .

On a $\sigma_o = 1$ , $\rho_o = 2$ , $G_o = \{(1, 1)\}$ , $\rho = 1$ , $g = \{G_1, G_2\}$ .

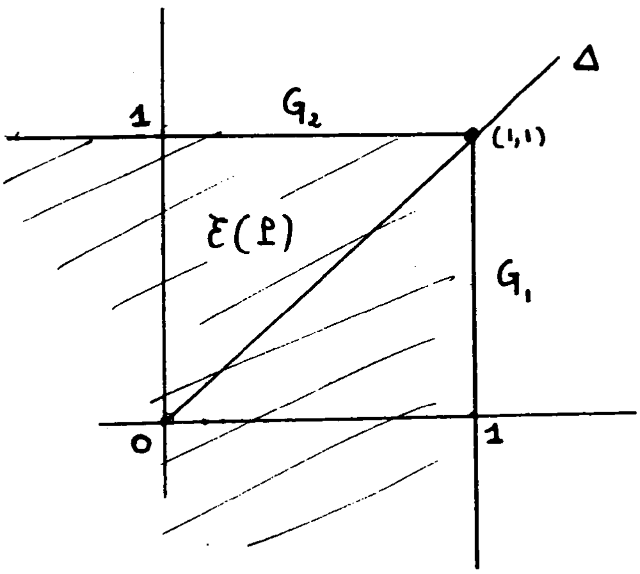



figure 1

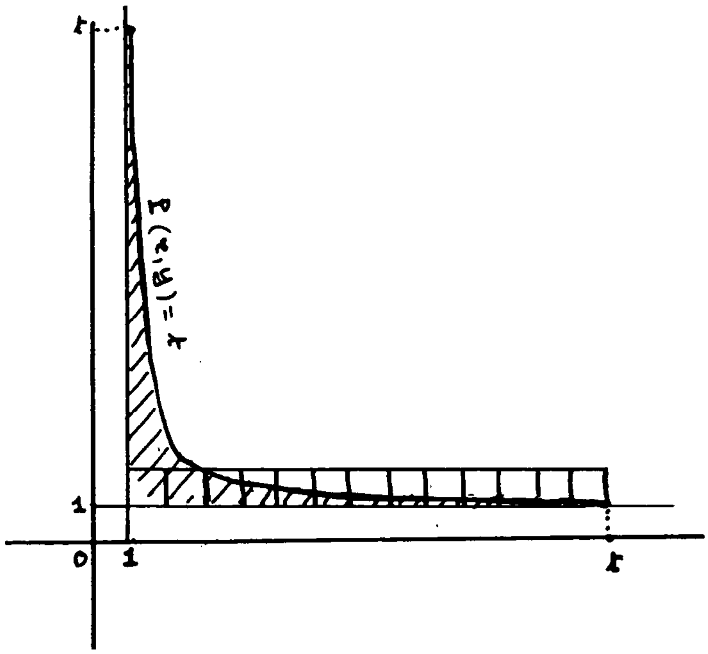



figure 2

...\/...

La figure 2, en relation avec (4.1), montre qu'on a $N_P(t) - V_P(t) >> t$.

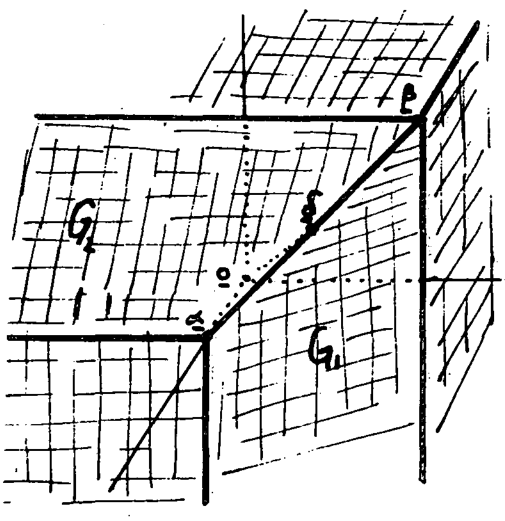
La formule (4.6) s'écrit :

$$A_{G_1} = A_{G_2} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[ P(1, \nu)^{-1} - \int_0^1 P(1, \nu+\theta)^{-1} \, d\theta \right]$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\nu} - \int_0^1 \frac{d\theta}{\nu+\theta} \right] = \gamma$$

4.6. - Exemple : Soit $P(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 x_3^2 = \underline{x}^{\underline{\alpha}} + \underline{x}^{\underline{\beta}}$

avec $\underline{\alpha} = (2, 0, 0)$ et $\underline{\beta} = (0, 2, 2)$




On a $\sigma_o = 1$, $\rho_o = 2$, $G_o = [\underline{\alpha}, \underline{\beta}]$ , $\rho = 1$

et $g = \{G_1, G_2\}$ (cf figure 3).

Le Théorème 3.3 donne :

$N_P(t) \sim V_P(t) \sim \frac{\pi}{8} t \operatorname{Log} t$.

Le Théorème 4.4 donne :

$N_P(t) - V_P(t) \sim \frac{\pi\gamma}{2} t$

figure 3

.../...

## §5 - UNE CONSTRUCTION DE LA SUITE $(\sigma_k)_{k\geq 0}$

5.1. : On associe à P un ensemble $\mathcal{P}$ de la façon suivante :

On désigne par $(F_i)_{i\in I}$ la famille des faces de $\mathcal{E}(P)$, et par $\underline{\lambda}_i$ le vecteur polaire de $F_i$. Soit $p$ le nombre d'éléments du support de P (cf (2.4)).

Pour chaque $i \in I$, et chaque $\underline{\nu} = (\nu_{\underline{\alpha}})_{\underline{\alpha} \in \text{supp } P} \in \mathbb{N}^p$, on pose

$$(5.1) \qquad s_i(\underline{\nu}) = |\underline{\lambda}_i| - \sum_{\underline{\alpha} \in \text{supp } P} (1 - \langle \underline{\lambda}_i, \underline{\alpha} \rangle)\, \nu_{\underline{\alpha}}$$

(avec la notation $|\underline{\lambda}_i| = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}$ ). On pose enfin

$$(5.2) \qquad \mathcal{P} = \{ s_i(\underline{\nu}) \ : \ i \in I \,,\ \underline{\nu} \in \mathbb{N}^p \} .$$

Pour que l'ensemble $\mathcal{P}$ ainsi construit soit fini, il faut et il suffit que P soit de la forme $P(\underline{x}) = a_{\underline{\alpha}}\, \underline{x}^{\underline{\alpha}}$.

On vérifie qu'on a

$$(5.3) \qquad \sigma_o = \max_{i\in I} |\underline{\lambda}_i| ,$$

Ainsi, le plus grand élément de $\mathcal{P}$ est $\sigma_o$.

5.2. - Théorème : Dans le Théorème 1.6, la suite $(\sigma_k)_{k\geq 0}$ peut être choisie égale à la suite des éléments de $\mathcal{P} \cup \{0\}$ rangés par ordre décroissant.

5.3. - Exemple : On suppose que P est un polynôme à une variable. On désigne par $u(t)$ la solution réelle de l'équation :

$$(5.4) \qquad P(x) = t ,$$

qui tend vers $+\infty$ quand $t \to +\infty$. Alors, on a $u(t) = 1 + V_P(t)$. L'égalité (1.9) permet donc d'exprimer $u(t)$ sous la forme d'une série convergente, pour $t$ assez grand.

.../...

De façon plus précise, on pose

$$(5.5)\qquad P(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k\, x^k \qquad (\text{avec } a_k \in \mathbb{R}\ ,\ \text{et } a_m > 0),$$

et

$$(5.6)\qquad \hat{P}(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k\, x^{m-k}$$

(il n'est pas nécessaire, dans le cas $n = 1$, de supposer que $P$ est à coefficients positifs). La formule (1.9) s'écrit :

$$(5.7)\qquad u(t) = \frac{t^{1/m}}{a_m^{1/m}} - \frac{a_{m-1}}{m\, a_m} - \sum_{\substack{k\geq 1\\ k\notin m\mathbb{N}}} \frac{t^{-k/m}}{k(k+1)!}\left[\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\ \hat{P}(x)^{k/m}\right]_{x=0}$$

la série convergeant pour $t$ assez grand.

## §6 - UN THEOREME TAUBERIEN

On établit le lien entre $Y_p(s)$ (cf (1.13)) et $V_p(t)$ d'une part, et $Z_p(s)$ (cf (1.12)) et $N_p(t)$ d'autre part, au moyen d'un résultat général.

6.1. : Soit $\phi(t)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, croissante (au sens large), nulle au voisinage de $0$. On suppose qu'il existe $\sigma_o > 0$ tel que

$$(6.1)\qquad \phi(t) = 0_\varepsilon\,(t^{\sigma_o+\varepsilon}) \qquad \text{pour tout } \varepsilon > 0.$$

On pose, pour $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ :

$$(6.2)\qquad f(s) = s\int_0^{\infty} \phi(t)\ t^{-s}\ \frac{dt}{t}\ .$$

La fonction $f(s)$ est définie et holomorphe pour $\sigma > \sigma_o$.

Soit $c > \sigma_o$. On a la formule d'inversion :

$$(6.3)\qquad \frac{1}{2i\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s)\ t^s\ \frac{ds}{s} = \frac{1}{2}\Big[\ \phi(t+0) + \phi(t-0)\Big] \qquad (t > o),$$

l'intégrale ci-dessus convergeant en valeur principale.

6.2. : On suppose que $f(s)$ admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe, que ses pôles sont d'ordre $\leqslant n$, et contenus dans un ensemble de la forme $\sigma_o - \frac{1}{N}\mathbb{N}$, où $N$ est un entier positif, que $\sigma_o$ est un pôle pour $f$, et que le pôle (éventuel) en zéro est d'ordre $\leqslant n-1$.

On désigne par $(\sigma_k)_{k\geqslant 0}$ la suite des pôles de $f(s)/s$ rangés par ordre décroissant. Pour chaque $k \geqslant 0$, on définit le polynôme $Q_k \in \mathbb{R}[X]$, de degré $\leqslant n-1$, par la relation :

$$(6.4) \qquad Q_k(X) = e^{-\sigma_k X} \operatorname*{Rés}_{s=\sigma_k} \left( f(s) \frac{e^{sX}}{s} \right) .$$

On définit les ensembles du plan complexe :

$$W_a = \{ s \in \mathbb{C} : \quad a \leqslant \sigma \leqslant \sigma_o + 1 \ , \quad |\tau| \geqslant 1 \}$$

où $a$ est un réel donné, et

$$W = \{ s \in \mathbb{C} : \quad \sigma \leqslant \sigma_o + 1 \text{ , et distance de } s \text{ à } (\sigma_k)_{k\geqslant 0} \geqslant \frac{1}{3N} \}.$$

On considère les deux hypothèses suivantes sur $f$ :

(6.5) Il existe $M > 0$ t.q. $f(s) \ll M^{-\sigma}$ pour $s \in W$

$$(6.6)\begin{cases} \text{Il existe } A > 0 \text{ t.q. pour chaque } a \in \mathbb{R} \text{ et chaque } \varepsilon > 0 : \\ f(s) \ll 1 + |\tau|^{A(\sigma_o-\sigma)+\varepsilon} \qquad (s \in W_a). \end{cases}$$

6.3. - Lemme : (i) On suppose que l'hypothèse (6.5) est vérifiée. Alors, pour chaque $t > M$, on a :

$$(6.7) \qquad \phi(t) = \sum_{k\geqslant 0} t^{\sigma_k} Q_k(\operatorname{Log} t),$$

la série étant convergente.

(ii) On suppose que $f$ vérifie (6.6). Alors, pour chaque $\varepsilon > 0$, on a, quand $t \to +\infty$ :

$$(6.8) \qquad \phi(t) = \sum_{k=0}^{m} t^{\sigma_k} Q_k(\operatorname{Log} t) + O_\varepsilon(t^{\sigma_o - 1/A + \varepsilon}),$$

où $m$ est le plus grand entier $k$ t.q. $\sigma_k > \sigma_o - 1/A$.

.../...

La déduction du Lemme 6.3 à partir de (6.3) est standard.

6.4. - Exemples :

(i) On prend $\phi(t) = V_P(t)$. Alors on a $f(s) = Y_P(s)$. Pour démontrer que $Y_P(s)$ vérifie (6.5), il suffit d'adapter la démonstration du Théorème 4.8 de [4].

(ii) On prend $\phi(t) = N_P(t)$. Alors $f(s) = Z_P(s)$. Dans [4], on montre que $Z_P(s)$ vérifie (6.6) pour un certain $A > 0$, et dans [5], on montre qu'on peut choisir $A$ égal au degré total $d$ du polynôme $P$.

# B I B L I O G R A P H I E

[1] P. Cassou-Noguès : "Séries de Dirichlet et intégrales associées à un polynôme à deux indéterminées", à paraître au Journal of Number Theory.

[2] H. MELLIN : "Eine Formelfür den Logarithmus transcendenter Funktionen von endlichen Geschlecht", Acta Soc. Scient. Fennicae 29 (1900), p. 3 - 49.

[3] G. POLYA, G. SZEGÖ : "Problems and Theorems in Analysis I", Springer - Verlag (1972).

[4] P. SARGOS : "Prolongement méromorphe des séries de Dirichlet associées à des fractions rationnelles de plusieurs variables". Ann. Inst. Fourier 33, 3 (1984), p.83-123.

[5] P. SARGOS : "Croissance de certaines séries de Dirichlet et applications", à paraître au Journ. für die Riene und Ang. Mat.

[6] P. SARGOS : "Séries de Dirichlet et polyèdres de Newton" (en préparation).

[7] E. C. TITCHMARSH : "The theory of the Riemann zeta function", Clarendon Press, Oxford (1951).

[8] A. N. VARCHENKO : "Newton Polyhedra and estimation of oscillating integrals". Funkts. Analyz. Vol.10, n° 3 (1976), p. 13 - 38.

[9] V. A.VASILEV : "Asymptotic behaviour of exponential integrals, Newton's diagram and the classification of minimal points", Funkts. Analyz. Vol. 13, n° 4 (1979) p. 1 - 12.

Patrick SARGOS
Faculté des Sciences
Université de Dakar-Fann

DAKAR - (Sénégal)

# Sur certains produits liés aux sommes des chiffres

*J. O. Shallit*

*U. E. R. de Mathématiques et Informatique*
*Université de Bordeaux I*
*351, cours de la Libération*
*33405 TALENCE Cedex*
*France*

*Department of Computer Science*
*University of Chicago*
*1100 E. 58th St.*
*Chicago, IL 60637*
*USA*

## I. Introduction.

En 1978, Woods [8] a demandé

*Quelle est la limite de la suite suivante:*

$$x_0 = 1/2, \quad x_1 = \frac{1/2}{3/4}, \quad x_2 = \frac{\frac{1/2}{3/4}}{\frac{5/6}{7/8}}, \ldots \ ?$$

(Chaque terme est le numérateur du terme suivant). Les valeurs sont faciles à calculer:

$$x_0 = 0,5000;$$

$$x_1 = 0,6666;$$

$$x_2 = 0,7000;$$

et $x_{10} = 0,7071$; donc il semble que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{1}$$

Robbins [6] a trouvé une belle démonstration de l'équation (1) qui est très simple. On considère plûtot la suite

$$\frac{x}{x+1}, \quad \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x+3}{x+2}}, \ldots$$

et on s'intéresse au cas $x = 1$. Soit

$$f(x) = \frac{x}{x+1} \cdot \frac{x+3}{x+2} \cdot \frac{x+5}{x+4} \cdot \frac{x+7}{x+6} \cdots$$

La fonction $f(x)$ est bien définie parce qu'elle peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = \prod_{k\geq 0} (\frac{x+4k+1}{x+4k} \cdot \frac{x+4k+2}{x+4k+3})^{\pm 1} \tag{2}$$

$$= \prod_{k\geq 0} (1 + \frac{2}{(x+4k)(x+4k+3)})^{\pm 1}$$

$$= \prod_{k\geq 0} (1 + O(k^{-2}))^{\pm 1},$$

qui montre que le produit converge pour tout $x$ tel que les dénominateurs de (2) ne s'annulent pas.

On vérifie immédiatement que

$$f(x) = \prod_{k\geq 0} (\frac{x+2k}{x+2k+1})^{(-1)^{s_2(k)}} \tag{3}$$

où $s_2(k)$ est la somme des chiffres du développement de $k$ en base 2. Comme $s_2(2k) = s_2(k)$ et $s_2(2k+1) = s_2(k) + 1$, on a

$$f(x) = \prod_{k\geq 0} (\frac{x+4k}{x+4k+1})^{(-1)^{s_2(2k)}} \prod_{k\geq 0} (\frac{x+4k+2}{x+4k+3})^{(-1)^{s_2(2k+1)}}$$

$$= \prod_{k\geq 0} (\frac{x+4k}{x+4k+2})^{(-1)^{s_2(k)}} \prod_{k\geq 0} (\frac{x+4k+3}{x+4k+1})^{(-1)^{s_2(k)}}$$

$$= f(\frac{x}{2}) f(\frac{x+1}{2})^{-1}.$$

Donc, en faisant $x = 1$, on trouve que

$$f(1)^2 = f(1/2).$$

$f(x)$ est continue et dérivable en $x = 0$; donc en employant la règle de l'Hôpital on trouve que

$$f(1/2) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x/2)}{f(x)} = \frac{\frac{1}{2}f'(0)}{f'(0)} = \frac{1}{2};$$

et par conséquent $f(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

## II. Généralisations.

Maintenant nous voudrions trouver une bonne généralisation du résultat ci-dessus.

**Théorème.**

Soit $k$ entier, $k \geq 2$. Soit $s_k(n)$ la somme des chiffres de $n$ en base $k$. Soit $1 \leq j \leq k-1$. Alors

$$\prod_{i\geq 0} \frac{c_i + 1}{d_i + 1} = k^{-1/k}$$

où les $c_i, d_i$ sont les entiers uniques tels que

$$ki \leq c_i, d_i < k(i+1)$$

et $s_k(c_i) \equiv j - 1 \pmod{k}$, $s_k(d_i) \equiv j \pmod{k}$.

**Démonstration.**

Soit $A_j(x) = \prod_{i\geq 0} \frac{x+c_i}{x+d_i}$. Nous montrerons que $A_j(1) = k^{-1/k}$.

Il faut dire quelque chose de la convergence de ce produit. Écrivons

$$A_j(x) = \prod_{i\geq 0} \frac{x + c_i}{x + d_i}$$

$$= \prod_{r\geq 0} \frac{x + c_{rk}}{x + d_{rk}} \cdot \frac{x + c_{rk+1}}{x + d_{rk+1}} \cdots \frac{x + c_{rk+k-1}}{x + d_{rk+k-1}}$$

et remarquons que

$$rk^2 \leq c_{rk+a}, d_{rk+a} \leq (rk + k)k.$$

pour tout $a$, $0 \leq a \leq k - 1$. Soient

$$C_{rk} = c_{rk} - rk^2$$

$$D_{rk} = d_{rk} - rk^2.$$

Alors

$$0 \leq C_{rk+a}, D_{rk+a} \leq k^2$$

pour tout $a$, $0 \leq a \leq k - 1$. Alors

$$A_j(x) = \prod_{r\geq 0} \frac{x + rk^2 + C_{rk}}{x + rk^2 + D_{rk}} \cdots \frac{x + rk^2 + C_{rk+k-1}}{x + rk^2 + D_{rk+k-1}}$$

$$= \prod_{r\geq 0} \frac{f_r}{g_r},$$

en groupant les termes $k$ par $k$, où les $f_r, g_r$ sont des polynômes de degré $k$ en $(x + rk^2)$.

On voit facilement que

$$f_r = (x + rk^2)^k + (C_{rk} + C_{rk+1} + \cdots + C_{rk+k-1})(x + rk^2)^{k-1} + \cdots$$

$$g_r = (x + rk^2)^k + (D_{rk} + D_{rk+1} + \cdots + D_{rk+k-1})(x + rk^2)^{k-1} + \cdots.$$

J'affirme que

$$c_{rk} + c_{rk+1} + \cdots + c_{rk+k-1} = d_{rk} + d_{rk+1} + \cdots + d_{rk+k-1} \tag{4}$$

ce qui implique que

$$C_{rk} + C_{rk+1} + \cdots + C_{rk+k-1} = D_{rk} + D_{rk+1} + \cdots + D_{rk+k-1} \tag{5}$$

et donc

$$|\frac{f_r}{g_r} - 1| \leq \frac{A}{(x + rk^2)^2}$$

où $A$ est une constante qui ne dépend pas de $r$. Maintenant

$$\sum_{r\geq 1} \frac{1}{(x + rk^2)^2}$$

converge pour tout $x \in [0,1]$; donc selon un théorème d'Henrici [5], le produit infini pour $A_j(x)$ converge absolument et uniformément dans cet intervalle.

(L'égalité (4) est un cas particulier d'un théorème de Prouhet [9].)

**Lemme.**

Il existe des équations fonctionnelles pour les $A_j(x)$:

$$A_1(x) = \frac{A_1(\frac{x}{k})A_2(\frac{x+k-1}{k})A_3(\frac{x+k-2}{k})\cdots A_{k-1}(\frac{x+2}{k})}{A_1(\frac{x+1}{k})A_2(\frac{x+1}{k})\cdots A_{k-1}(\frac{x+1}{k})} \tag{6}$$

$$A_2(x) = \frac{A_1(\frac{x+1}{k})A_2(\frac{x}{k})A_3(\frac{x+k-1}{k})\cdots A_{k-1}(\frac{x+3}{k})}{A_1(\frac{x+2}{k})A_2(\frac{x+2}{k})\cdots A_{k-1}(\frac{x+2}{k})} \tag{7}$$

$$\vdots$$

$$A_{k-1}(x) = \frac{A_1(\frac{x+k-2}{k})A_2(\frac{x+k-3}{k})\cdots A_{k-1}(\frac{x}{k})}{A_1(\frac{x+k-1}{k})\cdots A_{k-1}(\frac{x+k-1}{k})} \tag{8}$$

**Démonstration.**

Nous ne démontrerons le résultat que pour $A_1(x)$, les autres équations étant pareilles. Écrivons $\{N_i\}$ pour l'ensemble $\{x \geq 0 \mid s_k(x) \equiv i \pmod k\}$.

On a

$$\frac{A_1(\frac{x}{k})A_2(\frac{x+k-1}{k})A_3(\frac{x+k-2}{k})\cdots A_{k-1}(\frac{x+2}{k})}{A_1(\frac{x+1}{k})A_2(\frac{x+1}{k})\cdots A_{k-1}(\frac{x+1}{k})}$$

$$= \frac{\prod \frac{\frac{x}{k}+\{N_0\}}{\frac{x}{k}+\{N_1\}} \cdot \prod \frac{\frac{x+k-1}{k}+\{N_1\}}{\frac{x+k-1}{k}+\{N_2\}} \cdots \prod \frac{\frac{x+2}{k}+\{N_{k-2}\}}{\frac{x+2}{k}+\{N_{k-1}\}}}{\prod \frac{\frac{x+1}{k}+\{N_0\}}{\frac{x+1}{k}+\{N_1\}} \cdot \prod \frac{\frac{x+1}{k}+\{N_1\}}{\frac{x+1}{k}+\{N_2\}} \cdots \prod \frac{\frac{x+1}{k}+\{N_{k-2}\}}{\frac{x+1}{k}+\{N_{k-1}\}}}$$

$$= \prod \frac{x+k\{N_0\}}{x+k\{N_1\}} \cdot \prod \frac{x+k-1+k\{N_1\}}{x+k-1+k\{N_2\}} \cdots \prod \frac{x+2+k\{N_{k-2}\}}{x+2+k\{N_{k-1}\}} \cdot \prod \frac{x+1+k\{N_{k-1}\}}{x+1+k\{N_0\}}$$

$$= \prod \frac{x+\{N_0\}}{x+\{N_1\}} = A_1(x),$$

ce qui achève la preuve du lemme. ■

Finissons la preuve du théorème. En faisant $x = 1$ dans les équations (5) - (7) ci-dessus, on trouve que

$$A_1(1) = \frac{A_1(\frac{1}{k})A_2(1)A_3(\frac{k-1}{k})\cdots A_{k-1}(\frac{3}{k})}{A_1(\frac{2}{k})A_2(\frac{2}{k})\cdots A_{k-1}(\frac{2}{k})} \tag{9}$$

$$A_2(1) = \frac{A_1(\frac{2}{k})A_2(\frac{1}{k})A_3(1)\cdots A_{k-1}(\frac{4}{k})}{A_1(\frac{3}{k})A_2(\frac{3}{k})\cdots A_{k-1}(\frac{3}{k})}$$

$$\vdots$$

$$A_{k-1}(1) = \frac{A_1(\frac{k-1}{k})A_2(\frac{k-2}{k})\cdots A_{k-1}(\frac{1}{k})}{A_1(1)\cdots A_{k-1}(1)}.$$

Montrons que $A_1(1) = A_2(1)$. En faisant $x = 0$ dans l'équation (7) on obtient

$$A_2(0) = \frac{A_1(\frac{1}{k})A_2(0)A_3(\frac{k-1}{k})\cdots A_{k-1}(\frac{3}{k})}{A_1(\frac{2}{k})A_2(\frac{2}{k})\cdots A_{k-1}(\frac{2}{k})}.$$

En employant le fait que $A_2(0) \neq 0$ et l'équation (9), on voit que

$$1 = \frac{A_1(\frac{1}{k})A_3(\frac{k-1}{k})\cdots A_{k-1}(\frac{3}{k})}{A_1(\frac{2}{k})\cdots A_{k-1}(\frac{2}{k})} = \frac{A_1(1)}{A_2(1)}.$$

Donc $A_1(1) = A_2(1)$. De la même façon, on peut montrer que

$$A_1(1) = A_2(1) = \cdots = A_{k-1}(1).$$

Maintenant multiplions les $k-1$ équations (9) pour $A_1(1), \ldots, A_{k-1}(1)$. En simplifiant les facteurs appropriés on obtient

$$A_1(1)A_2(1)\cdots A_{k-1}(1) = \frac{A_1(\frac{1}{k})A_2(\frac{1}{k})\cdots A_{k-1}(\frac{1}{k})}{A_1(1)A_2(\frac{k-1}{k})A_3(\frac{k-2}{k})\cdots A_{k-1}(\frac{2}{k})}. \tag{10}$$

En employant l'équation (6), on voit facilement que

$$\frac{A_2(\frac{k-1}{k})A_3(\frac{k-2}{k})\cdots A_{k-1}(\frac{2}{k})}{A_1(\frac{1}{k})A_2(\frac{1}{k})\cdots A_{k-1}(\frac{1}{k})} = \lim_{x\to 0}\frac{A_1(x)}{A_1(\frac{x}{k})} = \frac{A_1'(0)}{\frac{1}{k}A_1'(0)} = k.$$

Donc d'après l'équation (10), $A_1(1) = k^{-1/k}$, ce qu'il fallait démontrer. ∎

## III. Autres résultats.

Allouche et Cohen [1] ont obtenu les résultats ci-dessus en regardant deux séries de Dirichlet liées à la fonction $s_q(n)$:

$$f(s) = \sum_{n\geq 0}\frac{\varsigma^{s_q(n)}}{(n+1)^s};$$

$$g(s) = \sum_{n\geq 0}\frac{\varsigma^{s_q(n)}}{n^s}.$$

(Ici $\varsigma$ est une racine $q$-ème de l'unité.) Ils ont démontré que

$$\sum_{m\geq 0} x^{s_q(m)}\log_q\left(\frac{m+1}{q\lfloor\frac{m}{q}\rfloor+q}\right) = \frac{1}{x-1}, \tag{11}$$

si $x^q = 1$.

Récemment, avec Allouche, Cohen, et Mendès France, j'ai montré que l'équation (11) est en fait vérifiée pour tout $x$ tel que

$$\sup(|x|^{q-1}, |1 + x + \cdots + x^{q-1}|) < q.$$

La démonstration pour $|x| < 1$ est très simple [2].

Dans [7], j'ai fait la conjecture suivante: développons $\frac{\sqrt{2}}{2}$ sous la forme

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{e_0} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{e_1} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{e_2} \cdots$$

où les $e_i$ sont égaux à $+1$ ou $-1$. Choisissons $e_0 = +1$ et puis choisissons les $e_i$ inductivement selon la règle suivante: $e_{i+1} = +1$ si

$$\prod_{j=0}^{i} \left(\frac{2j+1}{2j+2}\right)^{e_j} > \frac{\sqrt{2}}{2},$$

et $e_{i+1} = -1$ si

$$\prod_{j=0}^{i} \left(\frac{2j+1}{2j+2}\right)^{e_j} < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Alors $e_i = (-1)^{s_2(i)}$. Je ne pouvais pas démontrer cette conjecture, mais récemment, Allouche et Cohen ont trouvé une très belle démonstration [1].

L'équation (3) ci-dessus suggère l'existence d'une équation semblable liée à la fonction $a_0(n)$ qui compte le nombre d'occurrences du chiffre "0" (et non du chiffre "1") dans le développement de $n$ en base 2. En fait, on a

$$\prod_{k \geq 1} \left(\frac{2k}{2k+1}\right)^{a_0(n)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Il existe des formules analogues pour les fonctions $a_w(n)$ qui comptent le nombre d'apparitions d'un bloc de chiffres $w$ [3].

Il faut aussi mentionner que les valeurs des fonctions $A_j(x)$ ont récemment paru dans un article intéressant de Flajolet [4].

## IV. Remerciements.

Je voudrais remercier Michel Mendès France pour son invitation à l'Université de Bordeaux, et pour sa cordialité et sa gentillesse.

Je voudrais aussi remercier Henri Cohen, et Jean-Paul Allouche (qui m'a beaucoup aidé avec le français dans cet article.)

## Bibliographie

[1] J.-P. Allouche et H. Cohen, Dirichlet series and curious infinite products, *Bull. Lond. Math. Soc.* **17** (1985) 531-538.

[2] J.-P. Allouche, H. Cohen, M. Mendès France et J. O. Shallit, De nouveaux curieux produits infinis, en préparation.

[3] J.-P. Allouche et J. O. Shallit, Infinite products associated with counting blocks in binary strings, en préparation.

[4] P. Flajolet et G. Nigel Martin, Probabilistic counting algorithms for data base applications, *J. Comp. System Sci.* **31** (1985) 182-209.

[5] Peter Henrici, Applied and Computational Complex Analysis, V. 2, John Wiley & Sons, New York: 1977, p. 4.

[6] David Robbins, Solution to Problem E 2692, *Am. Math. Monthly* **86** (1979) 394-5.

[7] J. O. Shallit, On infinite products associated with sums of digits, *J. Number Theory* **21** (1985) 128-134.

[8] Donald R. Woods, Elementary Problem Proposal E 2692, *Am. Math. Monthly* **85** (1978) 48.

[9] E. M. Wright, Prouhet's 1851 solution of the Tarry-Escott problem of 1910, *Am. Math. Monthly* **66** (1959) 199-201.

n° d'impression : 966
2e trimestre 1988