Publications Mathématiques d'Orsay

ALGEBRES TENSORIELLES

Par

N.Th. VAROPOULOS

année 1966-1967

Notes rédigées par Melle DETRAZ

Mathématiques
(Service des Publications)
Faculté des Sciences
91-ORSAY (France)

ALGEBRES TENSORIELLES ET APPLICATIONS A L'ANALYSE HARMONIQUE

Cours de N. Th. VAROPOULOS

Rédigé par Melle DETRAZ

Les notes suivantes ont été rédigées d'après mon cours d'Orsay (printemps 1966) et mes conférences à l'Ecole d'Eté Scandinave de Sigtuna (juin 1966) et à l'Ecole d'Eté de Bruges (septembre 1966).

Je tiens à signaler que la mise en forme du chap. I partie B a été améliorée par C.S. Herz [5,6] à qui j'adresse tous mes remerciements.

Je remercie vivement, Mademoiselle Detraz, attachée de recherches C.N.R.S. à Orsay et participante à l'Ecole d'Eté de Bruges, pour l'excellent travail qu'elle a fait dans la rédaction de ces notes.

N. Th. Varopoulos

I.- Définition et premières propriétés

Le but de ce cours est d'étudier les algèbres tensorielles, en particulier comme instruments permettant d'aborder des problèmes d'analyse harmonique.

Cette méthode va ainsi donner une nouvelle démonstration du théorème de Malliavin sur l'existence d'un ensemble de non synthèse dans tout groupe localement compact non discret, va permettre d'exhiber une nouvelle classe d'ensemble d'analyticité, et d'aborder de façon nouvelle des problèmes ouverts concernant par exemple la synthèse spectrale.

A.- Définition I.1

Soit K_1 et K_2 deux espaces compacts ; $K = K_1 \times K_2$ l'espace produit, et $\mathcal{C}(K)$ l'espace des fonctions continues complexes sur K.

L'algèbre tensorielle notée $V(K)$ ou $\mathcal{C}(K_1) \hat{\otimes} \mathcal{C}(K_2)$ est l'ensemble de toutes les fonctions f de $\mathcal{C}(K)$ qui s'écrivent :

$$(1) \quad f(k_1,k_2) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \; f_j(k_1) \; \varphi_j(k_2) \quad \text{ou} \quad f_j \in \mathcal{C}(K_1) \; \|f_j\|_\infty \leq 1 \quad \text{et} \quad \sum_1^\infty |\alpha_j| < \infty$$

$$\varphi_j \in \mathcal{C}(K_2) \; \|\varphi_j\|_\infty \leq 1$$

En prenant comme norme $\|f\|_{V(K)}$ la borne inférieure de $\sum_1^\infty |\alpha_j|$ pour toutes les décompositions de f satisfaisant (1), $V(K)$ est une algèbre de Banach.

La sous algèbre de $V(K)$ des fonctions telles qu'il n'y ait qu'un nombre fini de termes dans la somme de (1) se note $\mathcal{C}(K_1) \otimes \mathcal{C}(K_2)$.

La définition donnée ci-dessus de l'algèbre tensorielle $V(K)$ n'est qu'un cas particulier de la définition générale du produit tensoriel topologique d'algèbres de Banach [cf 2] .

On établit les premières propriétés simples suivantes :

<u>Propriété</u> <u>I.1</u> = <u>Spectre</u> $V(K) = K_1 \times K_2$

$V(K)$ est une sous algèbre séparante de $\mathcal{C}(K)$ et $\|f\|_{V(K)} \geqslant \|f\|_{\mathcal{C}(K)}$, K est donc contenu dans Spectre $V(K)$: un point $k = (k_1,k_2)$ définit l'homomorphisme $f \longrightarrow f(k_1,k_2)$.

Réciproquement tout homomorphisme Υ de $V(K)$ définit un homomorphisme sur la sous algèbre $\mathcal{C}(K_1) \hat{\otimes} 1$, homomorphique à $\mathcal{C}(K_1)$ donc un point de K_1 ; de même Υ définit un point de K_2 ; et $\Upsilon(f)$ s'écrit :

$$\Upsilon(f) = \Upsilon(\sum \alpha_j \; f_j \otimes \varphi_j) = \sum_1^\infty \alpha_j \; \Upsilon(\varphi_j) \; \Upsilon(f_j) = \sum_1^\infty \alpha_j \; f_j(k_1) \; \varphi_j(k_2) = f(k_1,k_2)$$

Donc la propriété est démontrée.

<u>Propriété</u> <u>I.2</u>.- $V(K)$ <u>est</u> <u>une</u> <u>algèbre</u> <u>régulière</u>

Soit C un compact de K et $k = (k_1,k_2)$ un point de K, non dans C et $V_1 \times V_2$ un voisinage de k ne rencontrant pas C.

Il existe une fonction f_1 de $\mathcal{C}(K_1)$ égale à 1 en k_1, nulle hors de V_1

Il existe une fonction f_2 de $\mathscr{C}(K_2)$ égale à 1 en k_2, nulle hors de V_2

Si le point (t_1,t_2) n'appartient pas à $V_1 \times V_2$, $f_1(t_1)$ ou $f_2(t_2)$ est nulle.

La fonction $f(t_1,t_2) = f_1(t_1) \times f_2(t_2)$ qui appartient à $V(K)$ est égale à 1 en k et nulle sur C l'algèbre est donc régulière.

B.- Liens avec l'analyse harmonique :

Supposons que K_1 et K_2 soient identifiables en tend que espaces topologiques à un même groupe compact G ; $A(G)$ est l'algèbre de Banach des transformées de Fourier des fonctions sommables sur le dual Γ de G qui est discret.

Si f appartient à $A(G)$ f s'écrit :

$$f(x) = \sum_{\chi \in \Gamma} a_\chi \quad \chi(x) \quad \text{et} \quad \|f\|_{A(G)} = \sum |a_\chi| < \infty$$

on notera $V(G)$ l'algèbre tensorielle $\mathscr{C}(K_1) \hat{\otimes} \mathscr{C}(K_2) = \mathscr{C}(G) \hat{\otimes} \mathscr{C}(G)$.

On définit deux applications linéaires $\tilde{M}$ et $\tilde{P}$:

$$\mathscr{C}(G) \xrightarrow{\tilde{M}} \mathscr{C}(G \times G) \xrightarrow{\tilde{P}} \mathscr{C}(G) :$$

$f \in \mathscr{C}(G)$ $(\tilde{M}f)$ $(x,y) = f(x+y)$

$\varphi \in \mathscr{C}(G\times G)$ $(\tilde{P}\varphi)$ $(x) = \int_G \varphi(x-y,\, y)dy$ (dy étant la mesure normalisée de Haar de G)

On établit alors les lemmes suivants :

Lemme I.3 $\tilde{P} o \tilde{M}$ est l'identité de $\mathscr{C}(G)$.

En effet, $(\tilde{P}\tilde{M})\ (f)\ (x) = \int_G (\tilde{M}f)\ (x-y,y)dy = \int_G f(x)dy = f(x)$

En particulier $\tilde{P}$ est surjective.

Notons M l'application $\tilde{M}$ restreinte à $A(G)$ et P, l'application $\tilde{P}$ restreinte à $V(G)$.

Lemme I.4 M applique continuement $A(G)$ dans $V(G)$ et sa norme est ≤ 1

si f appartient à $A(G)$ $f(x) = \sum a_{\chi}\ \chi(x)$ avec $\sum |a_{\chi}| < \infty$

$(Mf)\ (x,y) = \sum a_{\chi}\ \chi(x+y) = \sum a_{\chi}\ \chi(x)\ \chi(y)$ donc $M(f)$ est dans $V(G)$ et

$\| Mf\|_{V(G)} \leq \sum |a_{\chi}| = \|f\|_{A(G)}$

Lemme I.5 P applique continuement $V(G)$ sur $A(G)$ et sa norme est ≤ 1

si f est dans $V(G)$ $f(x,y) = \sum \alpha_j\ f_j(x)\ \varphi_j(y)$

$(Pf)\ (x) = \int_G \sum \alpha_j\ f_j(x-y)\ \varphi_j(y)dy = \sum \alpha_j\ (f_j * \varphi_j)\ (x)$

f_j, φ_j étant dans $L^2(G)$ $f_j * \varphi_j$ appartient à $A(G)$ avec

$\|f_j * \varphi_j\|_{A(G)} \leq \|f_j\|_{L^2(G)} \|\varphi_j\|_{L^2(G)} \leq \|f_j\|_{\mathscr{C}(G)} \|\varphi_j\|_{\mathscr{C}(G)} \leq 1$

Pf appartient aussi à $A(G)$ et

$$\|Pf\|_{A(G)} \leq \sum|\alpha_j| \quad \|f_j * \varphi_j\|_{A(G)} \leq \sum |\alpha_j|$$

Donc : $\|Pf\|_{A(G)} \leq \|f\|_{V(G)}$

Enfin $P(V(G)) = A(G)$ d'après le lemme I.1

Conséquences 1.- Po M étant l'identité, c'est donc une isométrie ; PoM étant de norme $\leqslant 1$, M est en fait une isométrie de $A(G)$ dans $V(G)$.

$M(A(G))$ est l'ensemble de toutes les fonctions de $V(G)$ qui ne dépendent que de $x + y$.

2.- $V(G)$ est strictement inclus dans $\mathcal{B}(G \times G)$ car $P(V(G)) = A(G)$ et $P(\mathcal{B}(G \times G)) = \mathcal{B}(G)$ or $\mathcal{B}(G) \neq A(G)$.

Il s'agit alors d'étudier si on peut déduire des propriétés de $V(G)$ des propriétés analogues pour $A(G)$ et inversement.

Nous pouvons déjà établir deux théorèmes après avoir rappelé les définitions suivantes.

<u>Définition</u> <u>I.6</u> ([1] p. 131)

Une algèbre de fonctions $\mathcal{R}$ est d'<u>analyticité</u> si les seules fonctions définies sur $]-1, +1[$ telles que $\phi_\circ f$ soit dans $\mathcal{R}$ pour tout élément f de $\mathcal{R}$ à valeurs dans $]-1, +1[$ [c'est-à-dire : ϕ opéré dans $\mathcal{R}$] sont les fonctions analytiques.

<u>Définition</u> <u>I.7</u>

$\mathcal{A}$ étant une algèbre régulière, unitaire et semi simple, E un fermé de spectre $\mathcal{A}$ on note :

I(E), l'idéal de $\mathcal{A}$, des éléments dont les transformées de Gelfand sont nulles sur E.

$I_o(E)$, l'idéal de $\mathcal{A}$, des éléments dont les transformées de Gelfand sont nulles au voisinage de E.

$J(E)$, la fermeture dans $\mathcal{A}$ de $I_o(E)$.

<u>E est dit de synthèse si</u> $J(E) = I(E)$

<u>$\mathcal{A}$ est dite de synthèse si</u> tout fermé du spectre est de synthèse

<u>Théorème I.8 $V(G)$ est une algèbre d'analyticité</u>

$M(A(G))$ étant constituée de fonctions ne dépendant que de $x + y$, si une fonction ϕ opère dans $V(G)$, elle opère dans $M(A(G))$ donc dans $A(G)$ qui est une algèbre d'analyticité. ϕ est donc analytique. ([1] p. 131)

<u>Théorème I.9 Si un fermé E de G n'est pas de synthèse, le fermé $E^* = \{(x,y)\ x + y \in E\}$ n'est pas de synthèse pour $V(G)$.</u>

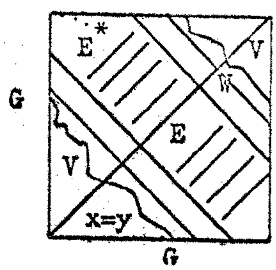
E étant de non synthèse, il existe $\alpha > 0$ et une fonction f de $I(E) \subset A(G)$ telle que pour tout g de $J(E)$ $\|f - g\|_{A(G)} \geqslant \alpha$.

Mf est une fonction de $I(E^*) \subset V(G)$.

Soit ψ une fonction quelconque de $I_o(E^*)$, alors $P\psi$ appartient à $I_o(E)$ car tout voisinage de E^* contient, par raison de compacité un voisinage de la forme $\{x,y\ ;\ x + y \in W\}$ où W est un voisinage de E et

$$\|Mf - \psi\|_{V(G)} \geqslant \|P\,Mf - P\psi\|_{A(G)} = \|f - P\psi\|_{A(G)} \geqslant \alpha$$

Donc E n'est pas un ensemble de synthèse.



II.- Ensemble de Kronecker

Nous allons d'abord rappeler les définitions et propriétés de certains sous-ensembles d'un groupe G localement compact [cf [1] p. 97]

Définition II.1

Un sous ensemble E de G est dit indépendant, si pour tout choix de k points distincts $x_1, \dots x_k$ et k entiers $n_1, \dots n_k$.

On a soit $n_j x_j = 0 \ \forall j < k$

soit $\sum_{i}^{k} n_j x_j \neq 0$

Définition II.2

Un sous ensemble E de G est dit de Kronecker, si toute fonction continue sur E de module 1, peut être approchée uniformément sur E par des caractères de G.

Dans les groupes d'ordre borné il n'y a pas d'ensembles de Kronecker, on pose alors une définition modifiée.

Définition II.3

E sous ensemble de G est dit de type K_p, $p \geqslant 2$, si toute fonction continue à valeurs dans Z_p le sous groupe cyclique d'ordre p du tore est la restriction à E d'un caractère de G.

Définition II.4

Un sous ensemble E de G est dit de Helson, si l'algèbre des restrictions de A à E notée A(E) est égale à $\mathscr{C}(E)$.

L'algèbre A(E) est munie de la norme quotient : $\|f\|_{A(E)} = \inf\left\{\|F\|_{A(G)},\ F = f \text{ sur } E.\right\}$ Si E est de Helson, il existe une constante k telle que pour toute fonction f de A(E)

$$\|f\|_{\mathscr{C}(E)} \leqslant \|f\|_{A(E)} \leqslant k \quad \|f\|_{\mathscr{C}(E)}$$

Si μ est une mesure sur E, on note $\|\mu\|_{M(E)}$ sa masse $\hat{\mu}$ sa transformée de Fourier-Stieljes, on a une caractérisation des ensembles de Helson.

E est de Helson $\Longleftrightarrow \|\hat{\mu}\|_{\infty}$ et $\|\mu\|_{M(E)}$ sont des normes équivalentes

Propriété II.5

Tout ensemble E de Kronecker est indépendant.

En effet, si on a une égalité : $\sum_{1}^{k} n_j\, x_j = 0$

$\chi(\sum_{1}^{k} n_j\, x_j) = 1$ pour tout caractère de G soit $\prod_{j=1}^{k} (\chi(x_j))^{n_j} = 1$

E étant de Kronecker, on a aussi $\prod_{j=i}^{k} f(x_j)^{n} = 1$ pour toute fonction continue de module 1.

Donc $\prod_{j=1}^{k} (\alpha_j)^{n_j} = 1$ pour tout ensemble de k points de module 1, ce qui est impossible si les n_j ne sont pas tous nuls. Donc E est indépendant.

Propriété II.6

Si E est un compact de Kronecker, μ une mesure de E alors $\|\mu\|_{M(E)} = \|\hat{\mu}\|_\infty$. E est donc de Helson.

$$\|\mu\| = \sup\{\mu(f)\ ;\ f \in \mathcal{C}(E) \quad \|f\| \leqslant 1\}.$$

Or, on démontre que la boule unité de $\mathcal{C}(E)$ est l'enveloppe convexe des fonctions de module 1.

Donc $\|\mu\| = \sup\ \{\mu(f)\ ;\ f \in \mathcal{C}(E)\ |f| = 1\}$

E étant de Kronecker on a aussi

$$\|\mu\| = \sup\ \{\mu(\chi)\quad \chi \in \Gamma\} = \|\hat{\mu}\|\infty.$$

De la même façon si E est de Kronecker $A(E)$ et $\mathcal{C}(E)$ sont isométriques. On démontre les propriétés analogues pour les ensembles de type K_p.

Théorème II.7 Soit G un groupe compact

Si K_1 et K_2 sont deux fermés de G disjoints dont la réunion K est de Kronecker, $A(K_1 + K_2) \cong \mathcal{C}(K_1)\ \hat{\otimes}\ \mathcal{C}(K_2)$ et les normes sont égales.

$K_1 \cup K_2$ étant de Kronecker donc indépendant (cf propriété II.5), on a une bijection canonique $K = K_1 \times K_2 \longleftrightarrow K_1 + K_2 = E$, qui permet d'identifier l'algèbre des restrictions $A(E)$ à une sous algèbre $A'(K)$ de $\mathcal{C}(K)$ munie de la norme de $A(E)$

$$A'(K) = \left\{F(k_1,k_2) \in \mathscr{C}(K) ;\ F(k_1,k_2) = f(k_1 + k_2) \quad f \in A(E)\right\}, \quad \|F\|_{A'(K)} = \|f\|_{A(E)}$$

Nous allons démontrer que $A'(K) = V(K)$ et que les normes des deux algèbres sont égales, le théorème sera alors démontré.

1.- $A'(K) \underset{\longrightarrow}{\subset} V(K)$ et l'injection est à norme décroissante.

Si F appartient à $A'(K)$ pour tout ε il existe une fonction $\tilde{f} = \sum a_{\chi} \chi$ de $A(G)$ telle que $F(k_1,k_2) = \tilde{f}(k_1+k_2)$ si $k_1 \in K_1$ et $k_2 \in K_2$ et

$\sum |a_{\chi}| \leqslant \|F\|_{A'(K)} + \varepsilon$

$$F(k_1,k_2) = \sum a_{\chi} \quad \chi(k_1 + k_2)$$

$$F(k_1,k_2) = \sum a_{\chi} \quad \chi(k_1) \quad \chi(k_2)$$

La fonction F appartient donc à $V(K)$ et

$$\|F\|_{V(K)} \leqslant \sum |a_{\chi}| \leqslant \|F\|_{A'(K)} + \varepsilon \quad \text{pout tout } \varepsilon$$

Donc $\|F\|_{V(K)} \leqslant \|F\|_{A'(K)}$

2.- $V(K) \underset{\longrightarrow}{\subset} A'(K)$

Si F appartient à $V(K)$, pour tout ε, F peut s'écrire :

$$F(k_1,k_2) = \sum \alpha_j \ f_j(k_1) \quad \varphi_j(k_2) ;\ \|f_j\|_{\mathscr{C}(K_1)} \leqslant 1 \quad \|f_j\|_{\mathscr{C}(K_2)} \leqslant 1 \quad \text{et}$$

$\sum |\alpha_j| \leqslant \|F\|_{V(K)} + \varepsilon$

K_1 et K_2 comme $K_1 \cup K_2$ sont de Kronecker ; $A(K_i)$ et $\mathscr{C}(K_i)$ sont isométriques (i = 1, 2)(d'après la propriété II.6). Il existe donc pour tout j, deux fonctions de $A(G)$ égales respectivement à f_j sur K_1 et φ_j sur K_2 :

$$f_j(k_1) = \sum_{\chi\in\Gamma} \beta_\chi \chi(k_1) \; ; \quad \varphi_j(k_2) = \sum_{\psi\in\Gamma} \gamma_\psi \psi(k_2) \quad \text{où}$$

$$\sum_{\chi\in\Gamma} |\beta_\chi| < 1 + \varepsilon \qquad \sum_{\psi\in\Gamma} |\gamma_\psi| < 1 + \varepsilon$$

$F(k_1,k_2)$ s'écrit alors :

$$F(k_1,k_2) = \sum a_{\chi,\psi} \, \chi(k_1) \, \psi(k_2) \quad \text{où} \quad \sum |a_{\chi\,\psi}| \leqslant \|F\|_{V(K)} [1 + \varepsilon'] \quad \text{où}$$

$\varepsilon' = \varepsilon^2 + 2\varepsilon$.

Soit $\chi \cup \psi$ la fonction continue sur K de module 1 égale à χ sur K_1 et ψ sur K_2, $\underbrace{K_1 \cup K_2}$ étant de Kronecker, pour tout η, il existe un caractère θ de G tel que $\|\chi \cup \psi - \theta\| < \eta$

Alors $\|\chi(k_1) \; \psi(k_2) - \theta(k_1) \; \theta(k_2)\|_{V(K)} \leq 2\eta$

Si on pose $f_\eta(k_1,k_2) = \sum a_{\chi,\psi} \; \theta(k_1) \; \theta(k_2)$ $\qquad f_\eta \in A'(K)$

$$\|f_\eta\|_{A'(K)} \leqslant \|F\|_{V(K)} [1 + \varepsilon']$$

et $\|F - f_\eta\|_{V(K)} \leqslant 2\eta \; \|F\|_{V(K)} (1 + \varepsilon')$

On recommence la même construction pour $F - f_\eta$ ect... en choisissant η tendant assez rapidement vers zéro, F est la somme d'une série de fonctions convergentes dans $A'(K)$, F appartient donc à $A'(K)$ et la première des deux inégalités ci-dessus entraîne que $\|F\|_{A'(K)} \leqslant \|F\|_{V(K)}$ [Technique standart ⊚

de la progression géométrique utilisée dans la démonstration du théorème de Banach.]

Application II.8.- Démonstration du théorème de Malliavin [11]

Un ensemble est parfait s'il est compact, non vide, sans point isolé.

Un ensemble est de Cantor s'il est métrique, parfait, totalement discontinu. Les ensembles de Cantor sont tous homéomorphiques à l'ensemble de Cantor sur la droite.

En particulier le groupe $D_\infty = \prod_N Z_2$ produit dénombrable de groupe à deux éléments est un ensemble de Cantor.

Un théorème bien connu établit que dans tout groupe localement compact, il existe un ensemble de Kronecker ou de type K_p qui est de Cantor.

Le théorème de Malliavin établit que si G est un groupe quelconque non discret, $A(G)$ ne satisfait pas la synthèse spectrale.

Nous allons déduire cette propriété de la propriété correspondante pour une algèbre tensorielle particulière.

Soit K un ensemble de Cantor (donc homéomorphe à D_∞) qui est de Kronecker ou de type K_p.

Soit une partition de K en deux ensembles K_1 et K_2 qui sont aussi homéomorphes à D_∞. Pour montrer que $A(G)$ n'est pas de synthèse spectrale, il suffit de montrer que l'algèbre des restrictions $A(E)$ ne l'est pas, où $E = K_1 +$

Or, d'après le théorème II.7, $A(E)$ est homeomorphe à $\mathcal{C}(K_1) \hat{\otimes} \mathcal{C}(K_2) = V(D_\infty)$ avec des normes équivalentes.

Le théorème de Malliavin sera donc démontré si nous montrons que $V(D_\infty)$ n'est pas une algèbre de synthèse.

<u>Théorème : La synthèse spectrale est un défaut dans</u> $V(D_\infty)$

Si T désigne le tore, le contre-exemple de Schwartz montre que l'algèbre $A(T^3)$ n'est pas de synthèse spectrale. ([1] p. 165)

D'après le théorème I.9 l'algèbre tensorielle $V(T^3) = \mathcal{C}(T^3) \hat{\otimes} \mathcal{C}(T^3)$ n'est donc pas de synthèse.

Il existe une application s de D_∞ dans T^3, application donnée par les développements binaires.

$$(\alpha_1, \alpha_2 \ldots) \in D_\infty \xrightarrow{s} (0,\alpha_1 \alpha_4, \alpha_7 \ldots \; ; \; 0,\alpha_2 \alpha_5 \alpha_8 \ldots \; ; \; 0,\alpha_3 \alpha_6 \alpha_9 \ldots)$$

cette application est continue surjective, elle conserve la mesure de Haar et est bijective si on enlève de D_∞ un ensemble de mesure nulle. s permet alors d'identifier canoniquement $L^\infty(D_\infty)$ et $L^\infty(T^3)$ et définir une application isométrique canonique de $\mathcal{C}(T^3)$ dans $\mathcal{C}(D_\infty)$.

En tensorisant ces applications et en utilisant l'injection canonique de $\mathcal{C}(D_\infty)$ dans $L^\infty(D_\infty)$ on peut écrire :

$$\mathcal{E}(T^3) \hat{\otimes} \mathcal{E}(T^3) \longrightarrow \mathcal{E}(D_\infty) \hat{\otimes} \mathcal{E}(D_\infty) \longrightarrow L^\infty(D_\infty) \hat{\otimes} L^\infty(D_\infty) \simeq L^\infty(T^3) \hat{\otimes} L^\infty(T^3)$$

que l'on note :

$$V(T^3) \xrightarrow{\sigma} V(D_\infty) \xrightarrow{\sigma'} V' = L^\infty(D_\infty) \hat{\otimes} L^\infty(D_\infty) \simeq L^\infty(T^3) \hat{\otimes} L^\infty(T^3)$$

l'application composée $\sigma' \circ \sigma$ est l'injection canonique.

D'après les propriétés du produit tensoriel σ et σ' sont de norme inférieure à 1.

Nous allons démontrer que σ' est isométrique.

En effet, on peut régulariser les fonctions de $L^\infty(D_\infty)$ par convolution avec des unités approchées $\{\ell_n\}$ de $\mathcal{E}(D_\infty)$ telles que ℓ_n soit positive, $\int_{-\infty}^{+\infty} \ell_n(y)dy = 1$ et $\{\text{support } (\ell_n)\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \{0\}$

Il existe donc une suite p_n d'applications de $L^\infty(D_\infty)$ dans $\mathcal{E}(D_\infty)$ de norme inférieure à 1 telle que $p_n f \longrightarrow f$ pour toute fonction f de $\mathcal{C}(D_\infty)$, (définie par $p_n \psi = \ell_n * \psi \quad \forall \psi \in L^\infty$).

Si l'application σ' n'était pas isométrique, il existerait une fonction F de $V(D_\infty)$ telle que

$$\| (p_n \otimes p_n) \circ \sigma' (F) \|_{V(D_\infty)} \leqslant \| \sigma'(F) \|_{V'} < \| F \|_{V(D_\infty)}$$

quand n tend vers l'infini $(p_n \otimes p_n) \circ \sigma' (F) \longrightarrow F$ et on aurait $\| F \|_{V(D_\infty)} \leqslant \| \sigma'(F) \|_{V'} < \| F \|_{V(D_\infty)}$ ce qui est impossible donc σ' est isométrique. De la mêm façon par régularisation dans $L^{\infty}(T^3)$, on démontre que $\sigma' \circ \sigma$, donc σ est isométrique :

Il correspond alors une application $\overline{\sigma}$ bijective continue du spectre $D_{\infty} \times D_{\infty}$ de $V(D_{\infty})$ dans le spectre $T_3 \times T_3$ de $V(T^3)$, $\overline{\sigma}$ d'ailleurs est égale à $s \times s$.

$V(T^3)$ n'étant pas de synthèse, il existe $\alpha > 0$, E fermé de $T^3 \times T^3$ f dans $I(E) \subset V(T^3)$ telle que $\|f - \Psi\|_{V(T^3)} > \alpha$ pour toute Ψ dans $J(E)$.

Considérons $E^* = \overline{\sigma}^{-1}(E) \subset D_{\infty} \times D_{\infty}$, σf appartient à $I(E^*)$.

Soit φ une fonction quelconque de $I_0(E^*)$ σ' étant isométrique :

$$\|\sigma f - \varphi\|_{V(D_{\infty})} = \|\sigma' \circ \sigma f - \sigma' \varphi\|_{V'}$$

On utilise dans $L^{\infty}(T^3)$ la régularisation décrite ci-dessus à l'aide de fonctions ρ_n de $\mathcal{E}(T^3)$, unités approchées et les applications p_n correspondantes de $L^{\infty}(T^3)$ dans $\mathcal{E}(T^3)$. $p_n \otimes p_n$ est de norme inférieure à 1 et on peut écrire :

$$\|(p_n \otimes p_n)(\sigma' \circ \sigma) f - (p_n \otimes p_n) \circ \sigma' \varphi\|_{V(T^3)} \leqslant \|\sigma f - \varphi\|_{V(D_{\infty})}$$

Si on pose :

$$(p_n \otimes p_n)(\sigma' \circ \sigma) f = f_n \in V(T^3) \quad \text{et} \quad (p_n \otimes p_n) \circ \sigma' \varphi = \varphi_n \in V(T^3).$$

D'une part $\|f_n - f\|_{V(T^3)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, en prenant donc n assez grand

$\| f_n - f \|_{V(T^3)} < \frac{\alpha}{2}$, d'autre part le support des fonctions ℓ_n définissant p_n tendant vers zéro, on peut choisir n assez grand pour que φ_n soit aussi nul dans un voisinage de E ; donc $\| f - \varphi_n \|_{V(T^3)} \geqslant \alpha$. En regroupant les inégalités :

$$\| \sigma f - \varphi \|_{V(D_\infty)} \geqslant \| f_n - \varphi_n \|_{V(T^3)} \geqslant \| f - \varphi_n \|_{V(T^3)} - \| f_n - f \|_{V(T^3)} \geqslant \alpha - \frac{\alpha}{2} \geqslant \frac{\alpha}{2}$$

et E^* ne peut être un ensemble de synthèse.

Application II.9

Un fermé E d'un groupe compact est de résolution spectrale si tout fermé de E est de synthèse pour l'algèbre $A(G)$.

Un fermé E est un ensemble d'analyticité si l'algèbre des restrictions $A(E)$ est une algèbre d'analyticité (cf définition I.6).

Si K_1 et K_2 sont deux ensembles disjoints homéomorphes à D_∞ dont la réunion est de Kronecker, l'algèbre $A(K_1 + K_2)$ est homéomorphe à $V(D_\infty)$ d'après le théorème II.7, et cette dernière (cf I.8, II.8), est une algèbre de non synthèse et d'analyticité.

Tout fermé de $K_1 + K_2$ ne peut être de synthèse pour $A(K_1 + K_2)$ donc pour $A(G)$. Or on peut démontrer (cf [11]) qu'un fermé contenant la somme algébrique de deux ensembles parfaits contient la somme algébrique de deux ensembles homéomorphes à D_∞ , dont la réunion est de Kronecker.

On connaît ainsi de nouveaux ensembles d'analyticité et de non résolution, à savoir, les ensembles contenant la somme algébrique de deux parfaits.

III.- Problèmes sur les ensembles de synthèse [8], [12]

Nous allons aborder certains problèmes d'analyse harmonique en utilisant les algèbres tensorielles.

Lemme III.1

X et Y étant 2 algèbres de Banach de fonctions, K un sous espace fermé de Y. Notons p la projection de Y sur Y/K et $\mathrm{id}\, X \otimes p$ l'application canonique de $X \hat{\otimes} Y$ dans $X \hat{\otimes} Y/K$. Soit (H) l'hypothèse suivante.

(H) Il existe une suite d'applications T_n de X dans X de rang fini tel que $T_n \longrightarrow$ Identité X fortement.

Alors si (H) est vérifié $X \otimes K$ est dense dans le noyau de l'application $\mathrm{id}\, X \otimes p$ (cf I.1 pour la définition de $X \otimes K$).

D'après le théorème de Banach-Steinhaus $\sup \|T_n\| < \infty$ donc

$T_n \otimes \mathrm{Id}\, Y \longrightarrow \mathrm{Id}\, X \otimes \mathrm{id} Y$ fortement

Comme $(T_n \otimes \mathrm{Id}\, Y)(\ker(\mathrm{Id}\, X \otimes p)) \subset X \otimes K$ car T_n est de rang fini, tout point x de $\ker(\mathrm{Id}\, X \otimes p)$ est limite d'une suite de points x_n de $X \otimes K$, le lemme est démontré.

Plus généralement si on considère k algèbres de Banach de fonctions B_j,

p_j les k projections de B_j sur B_j/K_j, où K_j sont des sous-espace fermé de B_j alors d'après le lemme $K = \sum_{j=1}^{k} (B_1 \otimes \dots \otimes B_{j-1} \otimes K_j \otimes B_{j+1} \dots \otimes B_k)$ est dense dans le noyau de l'application $p_1 \otimes \dots \otimes p_k$ de $B_1 \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} B_k$ dans $B_1/K_1 \hat{\otimes} \dots B_2/K_2$.

Théorème III.2

Si deux fermés Σ_1 et Σ_2 de deux groupes G_1 et G_2 sont respectivement de synthèse pour les algèbres $A(G_1)$ et $A(G_2)$, et si les deux algèbres $A(\Sigma_1)$ et $A(\Sigma_2)$ vérifient l'hypothèse (H) du lemme précédent alors $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ est de synthèse pour $A(G_1) \hat{\otimes} A(G_2)$.

Soit $I(\Sigma_1)$ (resp $I(\Sigma_2)$ l'idéal des fonctions nulles sur Σ_1 (resp sur Σ_2)

Soit $J(\Sigma_1)$ (resp $J(\Sigma_2)$ l'idéal fermé des fonctions nulles au voisinage de Σ_1 (resp Σ_2).

Σ_1 et Σ_2 étant de synthèse $I(\Sigma_1) = J(\Sigma_1)$ et $I(\Sigma_2) = J(\Sigma_2)$ et $A(G_i) \otimes I(\Sigma_j) = A(G_i) \otimes J(\Sigma_j)$ (il n'y a qu'un nombre fini de fonctions). $j, i = 1,2$

Soit Π_i l'application $A(G_i) \longrightarrow A(G_i) / I(\Sigma_i)$ $i = 1,2$ et $\Pi = \Pi_1 \otimes \Pi_2$

$A(G_1) \otimes J(\Sigma_2) + A(G_2) \otimes J(\Sigma_1) \subset J(\Sigma_1 \times \Sigma_2)$

(H) étant satisfaite d'après le lemme précédent $A(G_1) \otimes J(\Sigma_2) + A(G_2) \otimes J(\Sigma_1)$ est dense dans $\ker \Pi$.

$\ker \Pi$ est donc égal à $J(\Sigma_1 \times \Sigma_2)$

et $A/J(\Sigma_1 \times \Sigma_2) = A/\ker\Pi = A(\Sigma_1) \hat{\otimes} A(\Sigma_2)$ qui, produit tensoriel d'algèbres semi simples est semi simple donc :

$$I(\Sigma_1 \times \Sigma_2) = J(\Sigma_1 \times \Sigma_2)$$

Remarque : l'hypothèse (H) du lemme est vérifiée par tous les espaces de Banach séparable connus.

Théorème III.3

Soit G un groupe compact. Si l'union de deux ensembles K_1, K_2, disjoints, fermés totalement discontinus est de Kronecker alors $K_1 + K_2$ est de synthèse pour $A(G)$.

Soit un nombre $\eta > 0$, et f une fonction quelconque de $A(G)$ nulle sur $K_1 + K_2$.

Posons $\tilde{f}(x_1, x_2) = f(x_1 + x_2)$ alors $\tilde{f}$ est une fonction de $A(G) \hat{\otimes} A(G)$ nulle sur $K_1 \times K_2$, qui d'après le théorème précédent est de synthèse dans $G \times G$. Il existe donc une fonction $\tilde{\varphi}$ de $A(G) \hat{\otimes} A(G)$ nulle sur un voisinage de $K_1 \times K_2$ et telle que $\| \tilde{f} - \tilde{\varphi} \|_{A(G) \hat{\otimes} A(G)} \leq \eta$

Nous allons construire un homomorphisme h continu de G dans $G \times G$ tel que $\tilde{f} \circ h = f$ et que la fonction de $A(G) \hat{\otimes} A(G)$ $\tilde{\varphi} \circ h$ soit nulle dans un voisinage de $K_1 + K_2$.

Pour cela, nous allons d'abord construire un endomorphisme continu h_1 de G dans G tel que $h_1(k) - \sigma_1(k) \in V$, où k est un point de $K_1 \cup K_2$, V un voisinage convenable de zéro dans G et σ_1 l'application de $K_1 \cup K_2$ dans G égal au zéro de G sur K_2 et l'identité sur K_1, $(\sigma_1(k_1) = k_1 \quad \forall k_1 \in K_1)$.

Pour définir h_1, nous remarquons que nous pouvons supposer sans restreindre la généralité que $G \subseteq T^A = \prod_{\alpha \in A} T_\alpha$ ou $T_\alpha \cong T$ le Tore, car tout groupe compact G peut se plonger topologiquement dans un groupe de cette forme.

Soit p_α la projection canonique $T^A \longrightarrow T_\alpha$ et 0_α le zéro de T. $p_\alpha \circ \sigma_1$ est une fonction continue de module 1 qui peut être approchée uniformément sur $K_1 \cup K_2$ qui est de Kronecker, par des caractères χ_α. On peut alors choisir un ensemble fini F de A et les caractères χ_α de façon que la fonction $h_1(g) = \prod_{\alpha \in F} \chi_\alpha(g) \prod_{\alpha \in A-F} 0_\alpha$ vérifie la propriété voulue.

Alors si h_2 est défini par $h_1(g) + h_2(g) = g$, h_2 est un endomorphisme continu de G.

Si on définit h par $h(g) = (h_1(g), h_2(g))$ $g \in G$:

$(\tilde{f} \circ h)(g) = \tilde{f}(h_1(g), h_2(g)) = f(h_1(g) + h_2(g)) = f(g)$

$$(\tilde{\varphi} \circ h)(k_1 + k_2) = \tilde{\varphi}(h(k_1) + h(k_2)) = \tilde{\varphi}(k'_1, k'_2) = 0 \begin{cases} \text{où } k'_j \in k_j + V + V \\ \text{si } k_1, k_2 \in K_1 \times K_2 \end{cases}$$

h étant continu $\tilde{\varphi} \circ h$ est nulle dans un voisinage de $K_1 + K_2$ et

$$\| \tilde{\varphi} \circ h - f \|_{A(G)} = \| \tilde{\varphi} \circ h - \tilde{f} \circ h \|_{A(G)} \leqslant \| \tilde{\varphi} - \tilde{f} \|_{A(G) \hat{\otimes} A(G)} \leqslant \eta$$

Donc $K_1 + K_2$ est de synthèse.

Le problème P_1 = "La réunion de deux ensembles de synthèse est-il un ensemble de synthèse" est un problème ouvert. On ne connaît pas la réponse même pour l'algèbre $A(T)$, T étant le tore.

Théorème III.4

Le problème P_1 sera résolu dès qu'on connaîtra la réponse pour un quelconque groupe particulier.

1.- Si P_1 est faux pour l'algèbre $V(D_\infty) = \mathcal{C}(D_\infty) \hat{\otimes} \mathcal{C}(D_\infty)$, P_1 est faux pour $A(G)$, G étant un groupe quelconque non discret. On sait en effet qu'il existe dans G deux ensembles disjoints K_1 et K_2 homéomorphe à D_∞ dont la réunion est de Kronecker.

$A(K_1 + K_2) \cong V(D_\infty)$ (théorème II.7)

$K_1 + K_2$ est de synthèse (théorème III.3)

Si P_1 est faux dans $V(D_\infty)$, P_1 est faux pour $A(G)$.

En effet, il existe deux ensembles K'_1, K'_2 inclus dans $K_1 + K_2$ de synthèse pour $A(K_1 + K_2)$ donc pour $A(G)$ tel que $K'_1 \cup K'_2$ ne soit pas de synthèse pour $A(K_1 + K_2)$ donc pour $A(G)$

2.- Si P_1 est faux pour un certain groupe G particulier, P_1 est faux pour $V(G)$ et pour $V(D_\infty)$.

On sait que si E est un ensemble de non synthèse pour $A(G)$ $E^* = \{(x,y),\ x + y \in E\}$ est de non synthèse pour $V(G)$ (cf Théorème I.9). La réciproque qui m'a été signalée pour la première fois par Herz [7] est vraie aussi. Ce qui entraîne l'équivalence de P_1 pour $A(G)$ et $V(G)$.

D'autre part si G est un groupe quelconque, G et D_∞ sont presque isomorphes topologiquement (si G est discontinu, c'est vrai, sinon, on prend le groupe quotient de G par la composante connexe de l'unité) ce qui permet de démontrer l'équivalence de P_1 pour $V(G)$ et $V(D_\infty)$. Le théorème est donc démontré.

De même, le problème de l'intersection de deux ensembles de synthèse se ramène à la solution pour un groupe G particulier. Or, on peut construire un contre exemple pour l'algèbre $A(T^3)$, en utilisant l'exemple de Schwartz [1 p.172]. (on peut aussi procéder directement dans $A(D_\infty)$ en utilisant un Théorème de C.S.Herz [1] p.166)

<u>Définition</u> <u>III.5</u> (pour cette définition et les propriétés qui suivent [4])

$\mathcal{A}$ étant une algèbre de Banach, régulière, semi simple, un fermé E du spectre de $\mathcal{A}$ est dit de <u>Ditkin</u> <u>si</u> pour toute fonction f de $I(E)$ il existe une suite u_n de $I_o(E)$ [cf définition I.7] tel que fu_n tende vers f dans

Les ensembles de Ditkin ont les propriétés suivantes :

1.- Ce sont des ensembles de synthèse : on ne sait pas si la réciproque est fausse.

2.- La réunion de deux ensembles de Ditkin est un ensemble de Ditkin. En effet si D_1 et D_2 sont deux ensembles de Ditkin et f une fonction de $I(D_1 \cup D_2)$, pour tout ε, il existe une fonction u, de $I_o(D_1)$ telle que $\|f - fu_1\|_{\mathcal{K}} < \frac{\varepsilon}{2}$

fu_1 appartient à $I(D_2)$, il existe donc une fonction u_2 de $I_o(D_2)$ telle que $\|fu - fu_1 u_2\| < \frac{\varepsilon}{2}$

Donc $\|f - fu_1 u_2\|_{\mathcal{K}} < \varepsilon$ et $D_1 \cup D_2$ est de Ditkin.

3.- Plus généralement si $(D_n)_{n\in N}$ est une suite d'ensembles de Ditkin, si $D = \bigcup_{n\in N} D_n$ est compacte, alors D est de Ditkin. En effet, il existe une suite d'éléments u_n de $I_o(D_n)$ telle que :

$$\| fu_1 u_2 \ldots u_n - fu_1 \ldots u_{n-1} \| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Le produit $u_1 \ldots u_n$ appartient à $I_o(D_1 \cup D_2 \ldots \cup D_n)$

D étant compact, il existe un entier N tel que $u_1 \cup \ldots \cup u_N$ soit dans $I_o(D)$

$\| fu_1 \ldots u_N - f \| < \varepsilon$. D est donc de Ditkin.

<u>Théorème III.6</u>

<u>Si</u> K_1 <u>est un ensemble dénombrable totalement discontinu de</u> G, <u>et</u> K_2 <u>un</u>

<u>ensemble discontinu quelconque</u>, $\mathcal{C}(K_1) \hat{\otimes} \mathcal{C}(K_2)$ <u>est une algèbre de synthèse</u>

Notons $\{\ell_n\}_{n \in N}$ l'ensemble K_1

Soit E un fermé quelconque du spectre $K_1 \times K_2$ de $V(K_1 \times K_2)$

$E = \bigcup_{n \in N} E_n$ où $E_n = E \cap \{\ell_n \times K_2\}$

On montre d'abord que E_n est de synthèse pour $V(K_1 \times K_2)$ ensuite qu'il est de Ditkin en utilisant le lemme suivant, facile à démontrer et dont E_n vérifie les conditions.

<u>Lemme III.7</u>

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre régulière semi simple et F un ensemble de synthèse du spectre de $\mathcal{A}$.

Si pour tout voisinage π de F, il existe a dans $\mathcal{A}$ tel que $a \in I_0(F)$, $\hat{a} = 1$ sur $\complement \pi$ et $\|a\|_{\mathcal{A}} \leqslant 10000$ alors F est de Ditkin.

E_n étant de Ditkin, $E = \bigcup E_n$ est de Ditkin donc E est de synthèse.

IV.- Ensembles de Sidon [13]

Un sous ensemble E dénombrable, fermé compact, d'un groupe G est dit de Sidon si $A(E) \cong \mathscr{C}(E)$.

Beaucoup de problèmes sur les ensembles de Sidon sont ouverts : par exemple la réunion de deux ensembles de Sidon est-elle de Sidon ?

Pour l'algèbre $A(T)$, T étant le tore, on connaît des conditions nécessaires et des conditions suffisantes pour que E soit de Sidon.

Théorème IV.1 (cf. [14] p. 146)

Si E est de Sidon, il existe un nombre entier L tel que E vérifie la condition suivante $R_1(L)$ de (Kahane-Salem).

$$R_1(L) = \Big\{ \forall n \in N, \forall (x_1 \dots x_n) \in T^n, \ \forall s \in N$$

$$\text{cardinal} \Big\{ E \cap \Big\{ \sum_1^n \alpha_i \ x_i \ ; \ \alpha_i \in Z, \ \sum^n |\alpha_i| < 2^s \Big\} \leqslant \frac{L \, n \, s}{2} \Big\}$$

En prenant $s = 1$, on obtient les conditions nécessaires plus faibles $R'_1(L)$ et $R''_1(L)$.

$$R'_1(L) = \big| \forall n \in N, \forall (x_1 \dots x_n) \in T^n \ \text{card} \big\{ E \cap \{ \pm x_p \pm x_q \ ; \ p,q \leqslant n \} \big\} \leqslant L\, n/2$$

$$R''_1(L) = \big| \forall n \in N, \forall (x_1 \dots x_n) \in T^n \ \text{card} \big\{ E \cap \{ (x_p + x_q) \ ; \ p,q \leqslant n \} \big\} \leqslant L\, n/2$$

Soit F un ensemble dénombrable de G, qu'on peut donc ordonner suivant une suite $\{x_n\}_{n \in N}$; pour chaque point x de G, on note :

$R_s(x,F)$, le nombre de représentations de x de la forme :

$$x = \pm x_{n_1} \pm x_{n_1} \pm \dots \pm x_{n_s} \qquad n_1 < n_2 \dots < n_s$$

En particulier, si F est un ensemble indépendant (cf. définition II.1)

$R_s(x,F) = 1$ pour tout point x de F.

Théorème IV.2 (cf [1] p. 120)

Si Il existe un nombre entier L tel que l'ensemble E dénombrable vérifie la condition suivante $R_2(L)$, E est de Sidon :

$R_2(L)$: {il existe une constante β et une partition de E en L ensembles $E_1 \dots E_L$, chacun ordonné de telle façon que $R_s(x, E_j) \leqslant \beta^s$ $(j \leqslant L,\ s \in N,\ x \in E \cup \{0\}$

, on en déduit une condition suffisante plus forte.

$R'_2(L)$: {il existe une partition de E en L ensembles indépendants}. On ne sait pas si $R_2(L)$ et $R_1(L)$ sont équivalentes.

Si un ensemble E vérifie la condition $R'_2(L)$ on peut démontrer (cf [1] chapitre 5) qu'il existe une constante $C = C(L)$ ne dépendant que de L, telle que la condition $R''_2(C)$ suivante soit vérifiée :

$R''_2(C)$: $\|\mu\|_{M(E)} \leqslant C \|\hat{\mu}\|_\infty$ pour toute mesure μ de $M(E)$

Et, d'autre part, si $R''_2(C)$ est vérifiée, E est de Sidon.

Or, si tout sous ensemble fini de E vérifie $R'_2(L)$ alors $R''_2(C(L))$ est vérifiée pour l'ensemble des mesures à support fini, donc pour l'ensemble des mesures car toute mesure est approchable par des mesures à support fini ; donc E est encore de Sidon.

Donc, pour démontrer qu'un ensemble est de Sidon, il suffit de démontrer qu'il vérifie $R'_2(L)$ "localement" (i.e, il existe un entier L tel que tout sous ensemble fini de E est décomposable en L ensembles indépendants.

Nous allons supposer maintenant que l'ensemble E dénombrable fermé compact est contenu dans la somme algébrique de deux ensembles disjoints K_1, K_2 dont l'union est un Kronecker dénombrable.

$K_1 \cup K_2$ étant en particulier indépendant, il existe une correspondance bijective entre $K_1 + K_2$ et $K_1 \times K_2$ $(k_1 + k_2) \longleftrightarrow (k_1, k_2)$: tout ensemble S de $k_1 + k_2$ correspond à un ensemble S^* de (K_1, K_2).

La condition $R''_1(L)$ écrite plus haut pour un ensemble E de $K_1 + K_2$ est entraîne alors la condition $R''{}'_1(L)$ suivante vérifiée par son image E^* dans $K_1 \times K_2$

$$R''{}'_1(L) = \left\{\forall n \in N,\ \forall x_1 \ldots x_n \in K_1,\ y_1 \ldots y_n \in K_2\ \operatorname{card}\left\{E^* \cap \left\{(x_p, y_q)\ p, q \leqslant n\right\} \leqslant L\, n\right\}\right.$$

On appelle cycle tout sous ensemble fini de $K_1 \times K_2$, de la forme :

$$\left\{(k_1^1\ k_2^1),\ (k_1^1, k_2^2)\ (k_1^2\ k_2^2) \ldots (k_1^{n-1}\ k_2^{n-1}),\ (k_1^{n-1}\ k_2^1)\right\}$$

Si on représente $K_1 \times K_2$ par un carré, un cycle est l'ensemble des sommets d'un polygone à côtés parallèles aux axes.

Lemme IV.3

Soit S un ensemble de $K_1 + K_2$

S indépendant $\Longleftrightarrow S^*$ sans cycle.

Si S contient un cycle, avec les notations de la définition, on peut écrire : $(k_1^1 + k_2^1) - (k_1^1 + k_2^2) + \dots + (k_1^{n-1} + k_2^{n-1}) - (k_1^{n-1} + k_2^1) = o$

donc S n'est pas indépendant.

Si S n'est pas indépendant, il existe une relation entre un nombre fini de points de S :

$\sum_1^n \lambda_j (k_1^j + k_2^j) = o$, $\lambda_j \in \mathbb{Z}$, les n points $(k_1^j + k_2^j)$ étant distincts.

$K_1 \cup K_2$ étant indépendant k_1^1 est égal à un certain k_1^j, par exemple k_1^2, de même k_2^2 est égal à un k_2^j $j \neq 1$ car les points donnés sont distincts par exemple $k_2^2 = k_2^3$.

En recommençant après un nombre fini d'étapes, n étant fini, on trouve un point de la forme $k_1^P + k_2^1$ et les points

(k_1^1, k_1^2), $(k_1^1, k_2^2) \dots (k_1^P, k_2^1)$ forment un cycle.

Conséquence : on a l'équivalence

$E \subset K_1 + K_2$ vérifie $R'_2(L) \longleftrightarrow E^*$ vérifie la condition $R''_2(L)$ suivante.

$R''_2(L) : \left\{E^*\right.$ est décomposable en L ensembles sans cycle.$\left.\right\}$

Lemme IV.4

Soit deux ensembles K_1, K_2 finis de même cardianl, un ensemble F de $K_1 x K_2$ vérifiant $R''_1(L)$ vérifie $R''_2(L)$.

Tout ensemble F de $K_1 \times K_2$ est fini et contenu dans un réseau de $n^2(F)$ points de $K_1 \times K_2$; nous allons raisonner par récurrence sur le nombre n.

Supposons que tout ensemble contenu dans un réseau de $(M - 1)^2$ points de $K_1 \times K_2$ et vérifiant $R''_1(L)$ vérifie $R''_2(L)$.

Soit F un ensemble contenu dans un réseau $Q_M(E)$ de M^2 points et vérifiant $R''_1(L)$ alors pour tout réseau Q_n de n^2 points de $K_1 \times K_2$

card $\left\{F \cap Q_n\right\} \leqslant L\, n$

En particulier pour $Q_M(E)$, on obtient card $\left\{F\right\} \leqslant L\, M$. Donc au moins, une ligne $\mathcal{L}_1$ (ensemble de points de F, ayant la même seconde composante) de F à un nombre de points inférieur ou égal à L de même une colonne $\mathcal{C}_1$.

Posons $F' = F \cap \complement_{K_1 \times K_2}(\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{L}_1)$.

F' comme F vérifie $R''_1(L)$, et est contenu dans un réseau de $(M - 1)^2$ points, donc d'après l'hypothèse de récurrence, F' est décomposable en L ensembles

$F'_1 \dots F'_L$ sans cycle.

Si on ajoute à F'_1 un des L points au plus de F situé dans la colonne $\mathcal{C}_1$, et un des L points au plus de F de la ligne $\mathcal{L}_1$ on obtient un ensemble F_1 qui est encore sans cycle ; on recommence avec $F'_2 \dots F'_3$, jusqu'à épuisement des points de $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{C}_1$. On peut donc construire L ensembles F_1, $F_2 \dots F$ sans cycle, disjoints, dont la réunion est F. F vérifie donc $R'''_2(L)$.

On peut alors énoncer le théorème principal.

Théorème IV.5

Soit un ensemble dénombrable E du tore T, contenu dans la somme algébrique de deux ensembles disjoints K_1, K_2 dont l'union est un Kronecker dénombrable ; alors E est de Sidon si, et seulement si, il existe un entier L tel que E vérifie $R'_1(L)$.

Le théorème énoncé IV.1 donne la moitié de la réponse.

D'autre part, si E vérifie $R''_1(L)$, son image E^* dans $K_1 \times K_2$ vérifie $R'''_1(L)$, et en utilisant le lemme IV.4 précédent, tout sous ensemble fini de E^* vérifie $R'''_2(L)$, donc tout sous ensemble fini de E vérifie $R''_2(L)$ et d'après les remarques suivant le théorème IV.2 E est de Sidon.

B I B L I O G R A P H I E

[1] W. Rudin : Fourier Analysis on Groups Interscience Nº 12 (1962)

[2] Séminaire Schwartz (1953-1954) : Produits tensoriels Topologiques...

[3] J.-P. Kahane : Séminaire Bourbaki Nº 291 (mai 1965)

[4] C.S. Herz : Spectral Synthesis of bounded functions
Trans. Am. Math. Soc. 94 181-232 (1960)

[5] C.S. Herz : C.R. Acad. S. à Paris (260) (6001-6004) 1965

[6] C.S. Herz : Math. Review (2567) Vol 31 Nº 3 (Mars 1966 p. 462)

[7] C.S. Herz : Communication Verbale

[8] N. Th. Varopoulos : C. R. Acad. S. à Paris (260) (3831-3834) 1965

[9] N. Th. Varopoulos : C. R. Acad. S. à Paris (260) (4668-4670) 1965

[10] N. Th. Varopoulos : C. R. Acad. S. à Paris (260) (5165-5168) 1965

[12] N. Th. Varopoulos : C. R. Acad. S. à Paris (262) (384-387) 1965

[11] N. Th. Varopoulos : C. R. Acad. S. à Paris (260) (5997-6000) 1965

[13] N. Th. Varopoulos : C. R. Acad. S. à Paris (262) (447-449) 1965

[14] J.-P. Kahane et R. Salem : Ensembles parfaits et séries trigonométriques
Herman A.S.I. (1301) 1963.