

UNIVERSITÉ PARIS XI

U.E.R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE



N° 110 75-24

23.730

SUR QUELQUES PROBLEMES
NON LINEAIRES EN GLACIOLOGIE

par

Marie-Claude PELISSIER

Publication mathématique d'Orsay

CHAPITRE 0 - INTRODUCTION

Nous avons tenté de recenser et étudier ici un certain nombre de problèmes se posant en glaciologie à propos de l'écoulement des glaciers. Il apparaît alors deux directions de recherche :

- D'abord l'étude des équations régissant le milieu. On établit ainsi l'existence et l'unicité des solutions pour différentes lois physiques "habituelles" et on met en évidence les deux principes variationnels duaux relatifs au champ des vitesses et au champ des contraintes.

- Puis l'étude des problèmes inverses dans les différents cas physiques envisagés : identification de la loi de frottement au fond ou identification du lit rocheux.

Le chapitre 1 est avant tout un chapitre de rappels et s'appuie essentiellement sur le "Traité de Glaciologie" de M. Lliboutry [1]. On y pose le problème des vitesses sous sa forme la plus générale et on indique les différentes lois de frottement envisagées.

Le chapitre 2 traite le cas de l'écoulement permanent parallèle des glaciers de vallée dans les deux hypothèses où la loi de frottement est soit connue, soit à identifier.

Le chapitre 3 est consacré à l'écoulement d'une nappe de glace dans le cas bidimensionnel, puis à l'identification du lit rocheux.

Cette étude n'a pu être menée à bien que grâce aux fructueux contacts que nous avons pu établir au Laboratoire de Glaciologie du C.N.R.S. de Grenoble avec M. Lliboutry son Directeur, et M. Reynaud. Qu'ils soient remerciés ici pour leur collaboration ainsi que M. Gastinel dont une conférence au Colloque d'Analyse Numérique a été le point de départ de ce travail.

Ma gratitude va, bien sûr, tout spécialement à M. Temam, et à l'équipe

d'Analyse Numérique d'Orsay dont les encouragements et les conseils amicaux m'ont été précieux, ainsi qu'à M. Glowinski à qui la partie numérique de cette étude doit beaucoup.

Je remercie également M. Deny d'avoir bien voulu accepter la présidence du Jury et M. Métivier de m'avoir, à l'occasion de mon second sujet, proposé une ouverture vers les équations aux dérivées partielles stochastiques.

Mme Parvan a bien voulu se charger de taper mon manuscrit ; son efficacité n'a eu d'égale que sa gentillesse et je lui en suis très reconnaissante, de même qu'à Mmes Launay et Zielinski qui en ont assuré avec diligence le tirage.

Je dois enfin remercier mon mari et mes enfants qui non seulement supportent mais même encouragent mon encombrant penchant pour les mathématiques.

CHAPITRE 1 - DESCRIPTION DES MODELES MATHÉMATIQUES

I. HYPOTHESES GÉNÉRALES ET ÉQUATIONS À L'INTÉRIEUR.

1°) Propriétés mécaniques de la glace.

La glace est assimilée à un matériau incompressible et isotrope. On suppose de plus sa densité ρ constante. L'équation de continuité est alors automatiquement vérifiée.

2°) Equations de l'équilibre :

On écrit les équations de l'équilibre sous la forme

$$(1) \quad \rho \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j \right] + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho X_i \quad i = 1, 2, 3$$

où X_i représente la composante selon l'axe x_i de la résultante des forces d'origine extérieure par unité de masse. Les σ_{ij} sont les opposées des composantes du tenseur des contraintes $[\tau_{ij}]$ (on compte donc positivement les compressions, et $[\sigma_{ij}] = -[\tau_{ij}]$), et les u_i les composantes du champ de vitesse $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$.

On notera $[\varepsilon_{ij}]$ le tenseur des vitesses de déformation, de composantes

$$(2) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

3°) Loi de comportement.

Introduisant la pression hydrostatique

$$(3) \quad p = \frac{1}{3} \sum_i \sigma_{ii}$$

on définit le déviateur des contraintes $[\sigma'_{ij}]$ par

$$(4) \quad \sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - p \delta_{ij}.$$

On suppose, en glaciologie, la loi de comportement linéaire ; les hypothèses d'isotropie et d'incompressibilité conduisent alors à une relation de la forme

$$(5) \quad [\sigma'_{ij}] = -2\eta [\dot{\varepsilon}_{ij}].$$

Admettant de plus que, à température donnée, la viscosité η n'est fonction que du second invariant de l'un ou l'autre des tenseurs (critère de Von Mises généralisé), on obtient alors, à partir de (5), une nouvelle expression pour la viscosité :

$$(6) \quad \eta = \frac{\tau}{\dot{\gamma}}$$

où τ désigne la cission efficace

$$\tau = \sqrt{-I'_2} \quad \text{avec} \quad -I'_2 = \frac{1}{2} \left[\sum_i (\sigma_{ii} - p)^2 + \sum_{i \neq j} \sigma_{ij}^2 \right]$$

et $\dot{\gamma}$ représente la vitesse de cisaillement efficace

$$\dot{\gamma} = 2 \sqrt{-J'_2} \quad \text{avec} \quad -J'_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \dot{\epsilon}_{ij}^2.$$

4°) Loi de déformation.

Comme il est d'usage en glaciologie, la loi de déformation admise ici sera la loi de fluage non linéaire de Glen. Nous l'écrivons généralement sous la forme

$$(7) \quad \dot{\gamma} = B_{\theta,n} \tau^n \quad \text{avec}$$

$$(8) \quad B_{\theta,n} = B_n e^{-k_n \theta};$$

B_n et k_n désignent des constantes positives ne dépendant que de l'exposant n choisi et θ la température (supposée exprimée en degrés Celsius, c'est-à-dire voisine de 0). Si l'on remplace θ par la température absolue T , il faut prendre (8) sous la forme $B'_n e^{-\frac{k'_n}{T}}$.

Il peut aussi être intéressant de considérer des lois polynomiales de la forme

$$(9) \quad \dot{\gamma} = \sum_{n \in \mathcal{N}} B_{\theta,n} \tau^n$$

où \mathcal{N} désigne un ensemble fini d'exposants. Ce cas sera examiné au Chap. 2 § VI.

Remarque : on retrouve comme cas limites de (7) le corps visqueux newtonien ($n=1$) et la plasticité idéale (n infini). Dans le pratique l'exposant n , souvent égal à 3, est toujours strictement compris entre 1 et $+\infty$.

5°) Le problème des vitesses.

La loi de déformation (7) permet de réécrire la viscosité (6) sous la forme

$$(10) \quad \eta = B_{\theta,n}^{-\frac{1}{n}} \dot{\gamma}^{\frac{1}{n} - 1}$$

et la loi de comportement (5) devient

$$(11) \quad [\sigma'_{ij}] = -2 B_{\theta,n}^{-\frac{1}{n}} \dot{\gamma}(\vec{u})^{\frac{1}{n} - 1} [\dot{\epsilon}'_{ij}] \quad \text{avec}$$

$$(12) \quad \dot{\gamma}(\vec{u}) = \left[2 \sum_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 + \sum_{i < j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Les relations (3) (4) (11) permettent alors d'éliminer les contraintes dans

les équations de l'équilibre (1) pour obtenir le problème des vitesses sous la forme

$$(13) \quad \begin{cases} \rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} \right] - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[B_{\theta, n}^{-\frac{1}{n}} \dot{\gamma}(\vec{u})^{\frac{1}{n}-1} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} + \vec{\nabla} u_j \right) \right] + \vec{\nabla} p = \rho \vec{g} , \\ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 , \end{cases}$$

$\dot{\gamma}(\vec{u})$ étant donné par (12), p désignant la pression hydrostatique et \vec{g} l'accélération de la pesanteur.

Remarques :

a) Si la loi de déformation est supposée polynomiale (forme (9)), elle ne permet plus d'exprimer la viscosité en fonction de la vitesse seule. Nous verrons au Chap. 2 § VI que l'on peut cependant, par dualisation du problème des contraintes, poser un problème variationnel pour la vitesse.

b) On retrouve, dans l'hypothèse du corps visqueux newtonien ($n = 1$) à température constante, les habituelles équations de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} \right] - \eta \Delta \vec{u} + \vec{\nabla} p = \rho \vec{g} \\ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 . \end{cases}$$

c) L'écoulement des glaciers est assez lent pour que l'on puisse négliger le terme quadratique $\sum u_j \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j}$ dans (13). Pour les valeurs de n couramment admises par les glaciologues ($n \gg 3$), la dérivée $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$ est, elle aussi, négligeable devant le terme

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\dot{\gamma}(\vec{u})^{\frac{1}{n}-1} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} + \vec{\nabla} u_j \right) \right] \text{ qui est d'ordre } \frac{1}{n} .$$

On suivra donc ici l'usage des glaciologues, qui, supposant les mouvements très lents, négligent les forces d'inertie. On posera dans toute la suite le problème des vitesses sous la forme simplifiée

$$(14) \quad \begin{cases} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[B_{\theta, n}^{-\frac{1}{n}} \dot{\gamma}(\vec{u})^{\frac{1}{n}-1} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} + \vec{\nabla} u_j \right) \right] + \vec{\nabla} p = \rho \vec{g} \\ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \end{cases}$$

où $\dot{\gamma}(\vec{u})$ est toujours donné par (12).

Des vitesses et de la pression hydrostatique, on peut déduire le champ de contraintes par les relations (11) et (4).

6°) Equation de la chaleur.

La situation est différente selon le type de glacier considéré. On se limitera aux deux cas suivants :

a) Glacier tempéré : il n'y a pas de transfert de chaleur. La température reste constamment égale à 0°C et l'équation de la chaleur se réduit donc à

$$(15) \quad \theta = 0 .$$

Le problème des vitesses (14) est, en conséquence, indépendant de la température.

b) Glacier froid : la chaleur peut être transférée soit par conduction, soit par convection. L'énergie transformée en chaleur par unité de volume et unité de temps est égale à

$$(16) \quad \sum_{i,j} \sigma'_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = - \dot{\gamma} \tau .$$

Notant K la conductibilité de la glace et C sa chaleur spécifique, l'équation de la chaleur s'écrit :

$$(17) \quad C\rho \frac{\partial \theta}{\partial t} = K \Delta \theta - C\rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \theta + \dot{\gamma} \tau .$$

Les relations (6) et (10) permettent de calculer τ en fonction de $\dot{\gamma}$ pour obtenir

$$(18) \quad \tau = B_{\theta,n}^{-\frac{1}{n}} \dot{\gamma}^{\frac{1}{n}} = B_n^{-\frac{1}{n}} e^{-\frac{k_n \theta}{n}} \dot{\gamma}^{\frac{1}{n}} .$$

Notant alors $h = \frac{K}{C\rho}$ la diffusivité de la glace, l'équation (17) devient dans

le cas stationnaire :

$$(19) \quad -h \Delta \theta + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \theta - \frac{B_n^{-\frac{1}{n}}}{C\rho} \exp\left(-\frac{k_n \theta}{n}\right) \dot{\gamma}(\vec{u})^{\frac{1}{n}+1} = 0 .$$

On doit donc, pour les glaciers froids, résoudre globalement le système couplé (14) (19).

II. LES CONDITIONS AUX LIMITES.1°) Conditions en surface.

On considère, en tout point de la surface du glacier, un repère orthonormé direct $(\vec{s}, \vec{t}, \vec{v})$ lié au glacier ; \vec{v} est un vecteur unitaire normal à la surface, \vec{s} et \vec{t} deux vecteurs unitaires orthogonaux du plan tangent. Dans ce repère on écrit le tenseur $[\sigma_{ij}]$ sous la forme

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_s & \sigma_{st} & \sigma_{sv} \\ \sigma_{st} & \sigma_t & \sigma_{tv} \\ \sigma_{sv} & \sigma_{tv} & \sigma_v \end{bmatrix}$$

Sur un plan tangent à la surface ne s'exercent aucunes contraintes de cisaillement (le "frottement" est nul) et la contrainte normale (qu'on appellera aussi la "pression normale") est égale à la pression atmosphérique notée H . On obtient ainsi les conditions aux limites en surface

$$(20) \quad \sigma_{sv} = \sigma_{tv} = 0$$

$$(21) \quad \sigma_v = H.$$

La composante normale de la vitesse en surface, $\vec{u} \cdot \vec{v}$, étant généralement faible, on pourra remplacer la condition (21) par

$$(22) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{en surface.}$$

Notons que cette hypothèse simplificatrice n'est nullement essentielle pour les résultats ultérieurs.

Pour un glacier froid la température en surface est supposée égale à la température extérieure

$$(23) \quad \theta = \theta_0 \quad \theta_0 \text{ connu.}$$

2°) Conditions à la limite du lit rocheux.

a) Glacier froid : on suppose la vitesse de glissement nulle au fond,

c'est-à-dire

$$(24) \quad \vec{u} = 0 \quad \text{au fond.}$$

On fait sur la température l'hypothèse

$$(25) \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = G_0 \quad \text{gradient géothermique.}$$

b) Glacier tempéré : il semble par contre peu réaliste de supposer qu'il n'y a pas de glissement dans ce cas. L'hypothèse de non décollement de la glace fournit une première relation :

$$(26) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{au fond.}$$

à laquelle il faut adjoindre une loi de frottement au fond. Les deux hypothèses les plus fréquemment avancées par les glaciologues sont :

- d'une part la loi de frottement solide de Coulomb en présence d'une pression interstitielle proposée par Lliboutry [2]. Le frottement f est alors supposé de la forme

$$(27) \quad f = C_0 N ,$$

où C_0 est une constante et N la valeur moyenne de la différence entre la pression de la glace et la pression de l'eau dans les cavités.

- d'autre part la loi de Weertman, qui s'apparente à une loi de frottement visqueux, et lie le frottement sur le lit à la vitesse de glissement au fond par la relation

$$(28) \quad f = C_1 |\vec{u}|^{\frac{2}{n+1}}$$

où C_1 est une constante et n l'exposant de la loi de Glen (7).

Remarque.

La détermination de la loi de frottement au fond est un problème extrêmement délicat, qui, de l'avis des glaciologues, est loin d'être résolu de manière satisfaisante. Les difficultés pratiques d'évaluation, soit de N (si l'on veut prendre en compte l'hypothèse (27)), soit de C_1 (si l'on envisage de travailler avec la loi de Weertman (28)), nous conduiront à poser le problème en termes d'identification : nous ne conserverons au fond que la seule condition aux limites (26) et nous chercherons à déterminer le frottement sur le lit rocheux en utilisant des données supplémentaires en surface.

III. CONCLUSION.

Il apparaît ainsi deux grandes familles de problèmes :

1°) Etude des équations du milieu.

a) Glacier tempéré : la température θ étant donnée par (15), on cherche à résoudre le problème des vitesses (14) (indépendant de θ) avec les conditions aux limites (20), (21) ou (22), (26), (27) ou (28).

b) Glacier froid : la vitesse et la température sont données par le système couplé (14) (19) avec les conditions aux limites (20), (21) ou (22), (23) (24) (25).

2°) Problèmes inverses

Les contraintes sont données en surface par les relations (20) et (21).

Si l'on mesure en outre les vitesses en surface, on obtient donc des informations surabondantes sur la surface à l'air libre. Ceci permet alors de se poser divers problèmes d'identification. Par exemple :

P1 : la géométrie du glacier étant connue, identifier la loi de frottement au fond.

P2 : la loi de frottement au fond étant donnée, trouver l'épaisseur du glacier, c'est-à-dire identifier le lit rocheux.

P3 : connaissant la géométrie du glacier et admettant la loi de Coulomb (27) au fond, identifier l'exposant n de la loi de Glen (7).

Les chapitres suivants concernent les glaciers tempérés. On y étudie les équations du milieu pour les glaciers de vallée à écoulement parallèle, et pour les nappes de glace. On y donne également divers résultats concernant les problèmes P1 et P2. Le cas des glaciers froids fera l'objet d'une publication ultérieure.

CHAPITRE 2 - ECOULEMENTS UNIDIMENSIONNELS

I. POSITION DU PROBLEME.

On considère dans ce chapitre l'écoulement permanent parallèle de la glace le long d'un canal régulier cylindrique d'axe Ox_1 , de section droite Ω (située dans le plan (x_2, x_3)). La surface libre de la glace, σ_0 , est le plan $x_3 = 0$ qui fait avec l'horizontale un angle α . La hauteur maximale de la section droite est notée a , et h_w désigne la distance du niveau piezométrique à la surface. On suppose que le mouvement permanent se fait parallèlement à l'axe Ox_1 avec la vitesse u_1 . Le champ de vitesses est donc de la forme $\vec{u} = (u_1, 0, 0)$.

Les équations (1.14) et (1.11) fournissent alors les relations :

$$(1) \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 \quad (2) \quad \sigma_{ii} = p \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (3) \quad \sigma_{23} = 0$$

$$(4) \quad \sigma_{1j} = -B \frac{1}{n} \dot{\gamma}^{\frac{1}{n}-1} \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \quad j = 2, 3$$

et l'expression (1.12) de $\dot{\gamma}$ se réduit à

$$(5) \quad \dot{\gamma}(u_1) = \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Les inconnues du problème sont donc toutes indépendantes de la variable x_1 .

La troisième équation de l'équilibre (1.1) permet de calculer la pression hydrostatique. Elle s'écrit en effet

$$(6) \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = \rho g \cos \alpha$$

ce qui, joint à la condition aux limites (1.21) : $\sigma_{33} = H$ (pression atmosphérique) pour $x_3 = 0$ donne :

$$(7) \quad p = H + (\rho g \cos \alpha)x_3$$

Il ne reste donc plus que les trois inconnues u_1 , σ_{12} et σ_{13} .

Pour simplifier les équations, nous introduisons les variables réduites :

$$X_j = \frac{x_j}{a} \quad j = 2, 3$$

$$H_w = \frac{h_w}{a}$$

$$u = \frac{u_1}{a B (\rho g a \sin \alpha)^n}$$

$$T_j = - \frac{\sigma_{1j}}{\rho g a \sin \alpha} \quad j = 2, 3$$

et les notations :

$$\vec{T} = (T_2, T_3)$$

$$\vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$$

L'équation de l'équilibre (1.1) pour $i = 1$ s'écrit alors

$$(8) \quad \frac{\partial T_2}{\partial X_2} + \frac{\partial T_3}{\partial X_3} = -1$$

et la loi de comportement (1.11) fournit la relation

$$(9) \quad \vec{\nabla} u = |\vec{T}|^{n-1} \vec{T}$$

ce qui conduit à l'équation vérifiée à l'intérieur pour la vitesse u :

$$(10) \quad -\vec{\nabla} \cdot (|\vec{\nabla} u|^{\frac{1}{n}-1} \vec{\nabla} u) = 1 \quad \text{dans } \Omega .$$

La condition en surface (1.20) entraîne

$$(11) \quad T_3 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 .$$

Si l'on adopte pour condition de frottement au fond la loi de Coulomb sous la forme (1.27), on obtient sur le lit rocheux Γ_r la condition aux limites

$$(12) \quad -f = \vec{T} \cdot \vec{\nu} = -C_0 N / \rho g a \sin \alpha$$

où $\vec{\nu}$ est le vecteur unitaire normal à Γ_r et dirigé vers le lit. Dans le cas considéré ici (écoulement parallèle d'un glacier de vallée), l'évaluation de N conduit à expliciter f sous la forme :

$$(13) \quad f = \begin{cases} C X_3 & 0 \leq X_3 \leq H_w \\ C \left[\frac{\rho_w}{\rho} H_w - \frac{\rho_w - \rho}{\rho} X_3 \right] & H_w \leq X_3 \leq 1 \end{cases}$$

ρ_w désignant la densité de l'eau (et ρ toujours celle de la glace). La constante C sera déterminée en écrivant que le champ de contraintes est statiquement admissible, c'est-à-dire

$$(14) \quad \int_{\Gamma_r} f \, d\Gamma_r = \text{mes } \Omega$$

où $\text{mes } \Omega$ désigne la surface de la section droite Ω .

Si l'on choisit l'hypothèse de Weertman (1.28), on remplacera (12) par la condition

$$(15) \quad -f = \vec{T} \cdot \vec{\nu} = C_1 |u|^{\frac{2}{n+1}-1} u .$$

II. DETERMINATION DE LA VITESSE SOUS L'HYPOTHESE DE FROTTEMENT SOLIDE.

On suppose dans toute la suite Ω borné et sa frontière de classe C^2 par morceaux. On pose

$$(16) \quad p = 1 + \frac{1}{n} \quad 1 < p < 2.$$

Les relations (9), (10), (11), (12) permettent d'écrire le problème relatif à la vitesse :

$$(17) \quad \begin{cases} -\vec{\nabla} \cdot (|\vec{\nabla} u|^{p-2} \vec{\nabla} u) = 1 & \text{dans } \Omega \\ |\vec{\nabla} u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \nu} = \begin{cases} 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ -f & \text{sur } \Gamma_r \end{cases} \end{cases}$$

Inversant la relation (9), on peut calculer le champ de contraintes à partir de la vitesse par :

$$(19) \quad \vec{T} = |\vec{\nabla} u|^{p-2} \vec{\nabla} u.$$

Nous démontrons au théorème 1 ci-après l'existence de solutions du problème (17) (18) dans l'espace $W^{1,p}(\Omega)$. Avant cela, nous établissons quelques lemmes qui permettent de donner un sens aux conditions aux limites (18) lorsque $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Lemme 1.

Si Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^m dont la frontière Γ est de classe C^2 par morceaux, et si $\vec{v} \in E = \{\vec{v} \in [L^q(\Omega)]^m; \text{div } \vec{v} \in L^q(\Omega)\}$, $2 < q < +\infty$, on peut définir de manière unique la trace normale \mathcal{E}_v de \vec{v} sur Γ par

$$(20) \quad \begin{cases} \mathcal{E}_v \in W^{-\frac{1}{q}, q}(\Gamma) \\ \langle \mathcal{E}_v, \Phi/\Gamma \rangle = \int_{\Omega} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \Phi \, d\Omega + \int_{\Omega} \text{div } \vec{v} \, \Phi \, d\Omega \quad \forall \Phi \in W^{1, q'}(\Omega), \quad q' = \frac{q}{q-1} \end{cases}$$

L'application \mathcal{E} est linéaire continue de E dans $W^{-\frac{1}{q}, q}(\Gamma)$ et sa restriction à $[C^1(\bar{\Omega})]^m$ (qui est un sous espace dense de E) coïncide avec la trace normale au sens usuel : $\mathcal{E}_v = \vec{v} \cdot \vec{\nu} \quad \forall \vec{v} \in [C^1(\bar{\Omega})]^m$.

Démonstration. Soit φ donné dans $W^{\frac{1}{q}, q'}(\Gamma)$; par hypothèse $q' \leq 2$. On peut donc associer à φ un relèvement $\Phi \in W^{1, q'}(\Omega)$, vérifiant $\Phi/\Gamma = \varphi$ et tel que l'application $\varphi \rightarrow \Phi$ soit linéaire continue de $W^{\frac{1}{q}, q'}(\Gamma)$ dans $W^{1, q'}(\Omega)$

(cf. Grisvard [4]).

Pour \vec{v} et φ fixés la quantité $\int_{\Omega} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \Phi \, d\Omega + \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{v} \cdot \Phi \, d\Omega$ est indépendante du relèvement Φ choisi. En effet si Φ_1 est un autre relèvement, $(\Phi - \Phi_1) \in W_0^{1,q'}(\Omega)$ et le résultat est immédiat par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W_0^{1,q'}(\Omega)$.

L'application $\varphi \mapsto \int_{\Omega} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \Phi \, d\Omega + \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{v} \cdot \Phi \, d\Omega$ est donc une forme linéaire continue sur $W_0^{1,q'}(\Gamma)$ et l'on peut écrire la formule de Stokes :

$$\int_{\Omega} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \Phi \, d\Omega + \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{v} \cdot \Phi \, d\Omega = \langle \mathcal{E} \vec{v}, \varphi \rangle_{\Gamma} \quad \text{avec} \\ \mathcal{E} \vec{v} \in W_0^{1,q'}(\Gamma).$$

Le relèvement $\varphi \mapsto \Phi$ pouvant être choisi linéaire continu il est facile de voir que l'application trace normale \mathcal{E} est linéaire continue, de E muni de la norme du graphe dans $W_0^{-1,q'}(\Gamma)$. Soit maintenant $\vec{v} \in [C^1(\bar{\Omega})]^m$:

$$\langle \mathcal{E} \vec{v}, \Phi /_{\Gamma} \rangle = \int_{\Omega} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \Phi \, d\Omega + \operatorname{div} \vec{v} \cdot \Phi \, d\Omega) \, d\Omega + \int_{\Gamma} \vec{v} \cdot \vec{\nu} \Phi /_{\Gamma} \, d\Gamma \quad \forall \Phi \in C^1(\bar{\Omega}).$$

Or les traces des fonctions de $C^1(\bar{\Omega})$ forment un sous espace dense de $W_0^{1,q'}(\Gamma)$

et l'égalité a donc lieu pour tout $\Phi \in W_0^{1,q'}(\Omega)$. Il s'ensuit que $\mathcal{E} \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{\nu}$

$\forall \vec{v} \in [C^1(\bar{\Omega})]^m$. Remarquons enfin que $[C^1(\bar{\Omega})]^m$ étant dense dans E , \mathcal{E} est donc définie par (20) de manière unique.

Lemme 2.

Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et si $f \in W^{-\frac{1}{p'},p'}(\Gamma_r)$ les conditions aux limites (18) ont un sens dans $W^{-\frac{1}{p'},p'}(\Gamma_0 \cup \Gamma_r)$.

Démonstration. Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ alors $|\vec{\nabla} u|^{p-2} \vec{\nabla} u \in [L^{p'}(\Omega)]^2$ et on peut donc appliquer le lemme 1. car $p' > 2$.

Remarques.

- Si f est donné par (13), f est a fortiori dans $W^{-\frac{1}{p'},p'}(\Gamma_r)$.
- Si $f \in W^{-\frac{1}{p'},p'}(\Gamma_r)$ et si \tilde{f} désigne le prolongement de f par zéro ($\tilde{f} = f$ sur Γ_r et 0 sur Γ_0), alors $\tilde{f} \in W^{-\frac{1}{p'},p'}(\Gamma_0)$.

Le problème des vitesses sera donc posé sous la forme plus précise :

Problème \mathcal{P} : trouver $u \in W^{1,p}(\Omega)$ solution de (16) (17) (18).

On montre facilement que le problème \mathcal{P} est équivalent au problème variationnel.

$$(21) \quad \begin{cases} \text{trouver } u \in W^{1,p}(\Omega) \text{ vérifiant :} \\ \int_{\Omega} |\vec{\nabla} u|^{p-2} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega - \int_{\Omega} v \, d\Omega - \langle f, v \rangle_{\Gamma_R} \end{cases} \quad \forall v \in W^{1,p}(\Omega) .$$

Introduisant l'énergie potentielle du système définie par :

$$(22) \quad \mathcal{E}(v) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |v|^p \, d\Omega - \int_{\Omega} v \, d\Omega + \langle f, v \rangle_{\Gamma_R} ,$$

(21) apparaît comme l'équation d'Euler du problème de minimisation

$$(23) \quad \begin{array}{l} \text{Min} \\ v \in W^{1,p}(\Omega) \end{array} \mathcal{E}(v) .$$

On retrouve ainsi le 1er théorème de l'énergie potentielle :

THEOREME 1.

Soit f donné dans $W^{-\frac{1}{p'}, p'}(\Gamma_R)$. Résoudre le problème \mathcal{P} revient à minimiser sur $W^{1,p}(\Omega)$ l'énergie potentielle \mathcal{E} du système.

On peut alors établir le résultat d'existence et d'unicité suivant :

THEOREME 2.

Si de plus f vérifie (14) le problème \mathcal{P} admet une solution u , unique à une constante additive près.

Démonstration. L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ contenant les constantes, l'hypothèse (14) $\langle f, 1 \rangle = \text{mes } \Omega$, est bien une condition nécessaire à l'existence d'un minimum pour le problème (23).

Cette hypothèse permet en outre de définir dans l'espace $W^{1,p}(\Omega)/\mathbb{R}$ (quotient de $W^{1,p}(\Omega)$ par les constantes) une fonctionnelle J en posant :

$$J(\dot{v}) = \mathcal{E}(v) \quad \forall v \in \dot{v} ;$$

J est alors strictement convexe, continue et coercive et l'on obtient ainsi

l'existence et l'unicité de $\dot{u} \in W^{1,p}(\Omega)/\mathbb{R}$ minimisant J .

Alors tout $u \in \dot{u}$ est solution de (23) et donc du problème \mathcal{P} .

Remarques.

Il apparaît ainsi que, pour déterminer de manière unique la vitesse, il est indispensable de se donner une information supplémentaire provenant des mesures physiques. Ce peut être par exemple la vitesse au centre en surface si le champ des

vitesse est continu ou le débit.

Par contre, le champ de contraintes \vec{T} , lié à la vitesse par la relation (19), est toujours uniquement déterminé dans $[L^{p'}(\Omega)]^2$.

III. DETERMINATION DE LA VITESSE SOUS L'HYPOTHESE DE WEERTMAN.

On peut également étudier le problème des vitesses sous l'hypothèse de la loi de frottement de Weertman (1.28).

Il se pose alors sous la forme

Problème \mathcal{P}' : trouver $u \in W^{1,p}(\Omega)$ solution de

$$\begin{aligned} (24) \quad & \left\{ \begin{array}{l} -\vec{\nabla} \cdot (|\vec{\nabla} u|^{p-2} \vec{\nabla} u) = 1 \quad \text{dans } \Omega, \\ |\vec{\nabla} u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \\ |\vec{\nabla} u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \nu} + c_1 |u|^{\pi-2} u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_R, \end{array} \right. \\ (25) \quad & \\ (26) \quad & \end{aligned}$$

où l'on a toujours :

$$(15) \quad p = 1 + \frac{1}{n}$$

et où π est donné par

$$(27) \quad \pi = 1 + \frac{2}{n+1},$$

c_1 étant une constante strictement positive.

On voit facilement au moyen du théorème de Sobolev que la condition aux limites (26) a un sens car :

$$(28) \quad W^{\frac{1}{p'}, p}(\Gamma_R) \subset L^{q_0}(\Gamma_R) \quad \text{avec}$$

$$(29) \quad \begin{cases} q_0 = 1 + \frac{2}{n-1} & \text{si } n > 1 \quad (\text{i.e. } p < 2) \\ q_0 \text{ fini quelconque} & \text{si } n = 1 \quad (\text{i.e. } p = 2) \end{cases}$$

Donc si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $u|_{\Gamma_R} \in L^{\pi}(\Gamma_R)$.

Alors $|u|^{\pi-2} u \in L^{\pi'}(\Gamma_R) \subset W^{-\frac{1}{p'}, p'}(\Gamma_R)$, $\pi' = \frac{n+3}{2}$, $p' = n+1$, de sorte que

(26) a un sens dans $W^{-\frac{1}{p'}, p'}(\Gamma_R)$.

Remarque

On a donc toujours $\pi < q_0$ et il en résulte que

$$(30) \quad W^{1,p}(\Gamma_r) \subset L^\pi(\Gamma_r) \quad \text{l'injection étant compacte.}$$

Notant alors $\xi'(v)$ l'énergie potentielle du système sous l'hypothèse de Weertman, définie par :

$$(31) \quad \xi'(v) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla v|^p \, d\Omega + \frac{C_1}{\pi} \int_{\Gamma_r} |v|^\pi \, d\Gamma - \int_{\Omega} v \, d\Omega$$

on démontre les théorèmes 1' et 2' analogues aux théorèmes 1 et 2.

THEOREME 1'.

Résoudre le problème (\mathcal{P}') revient à minimiser sur $W^{1,p}(\Omega)$ l'énergie potentielle ξ' du système.

THEOREME 2'.

Le problème (\mathcal{P}') admet une solution u' unique.

Remarque 2.

. Avec la condition de Weertman le problème des vitesses est coercif sur $W^{1,p}(\Omega)$ et l'on définit la vitesse u' de manière unique.

. L'étude faite pour les deux lois de frottement envisagées est très semblable. Pour éviter les redites on supposera dans toute la suite de ce chapitre que la loi de frottement est celle de Coulomb [cf.(1.27)]. Par contre au chapitre suivant (chapitre 3), l'hypothèse de base sera la loi de Weertman.

IV. DUALISATION DU PROBLEME DE LA VITESSE. ETUDE DES CONTRAINTES.

Nous allons maintenant, mettre en évidence la dualité entre les deux principes variationnels régissant le champ des vitesses et le champ des contraintes.

1°) Rappels sur la dualité au sens de Fenchel-Rockafellar.

On rappelle ici le cadre d'Ekeland-Temam [5] :

- V et Y sont des espaces de Banach réflexifs, V^* et Y^* leurs espaces duaux.

- A est un opérateur linéaire continu de V dans Y A^* son adjoint.

- F (resp. G) est une fonction convexe s.c.i. de V (resp. Y) dans

$\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, non identique à $+\infty$.

- F^* (resp. G^*) désigne la fonction convexe conjuguée de F (resp. G).

Elle est s.c.i. et non identique à $+\infty$.

A partir du problème d'optimisation \mathcal{P} (dit problème primal)

$$(\mathcal{P}) \quad \inf_{u \in V} \{F(u) + G(\Lambda u)\}$$

on définit un problème \mathcal{P}^* dual de \mathcal{P} au sens de Fenchel-Rockafellar

$$(\mathcal{P}^*) \quad \sup_{q^* \in Y^*} \{-F^*(-\Lambda^* q^*) - G^*(q^*)\}.$$

Les relations entre le problème primal \mathcal{P} et le problème dual \mathcal{P}^* sont les suivantes :

a) $\sup \mathcal{P}^* \leq \inf \mathcal{P}$

b) S'il existe $u_0 \in V$ tel que $F(u_0) < +\infty$, $G(\Lambda u_0) < +\infty$ G continue en Λu_0 , alors

- $\inf \mathcal{P} = \sup \mathcal{P}^*$

- \mathcal{P}^* admet au moins une solution \bar{p}^* .

c) Relations d'extrémalité :

$\bar{q}^* \in Y^*$ est solution de \mathcal{P}^* et $\bar{u} \in V$ est solution de \mathcal{P} si et seulement si

$$F(\bar{u}) + F^*(-\Lambda^* \bar{q}^*) = - \langle \Lambda^* \bar{q}^*, \bar{u} \rangle \quad \text{et}$$

$$G(\Lambda \bar{u}) + G^*(\bar{q}^*) = \langle \bar{q}^*, \Lambda \bar{u} \rangle.$$

Si Y est un produit $Y = \prod_{i=1}^m Y_i$, $Y^* = \prod_{i=1}^m Y_i^*$ les espaces Y_i et Y_i^* étant en dualité, et si la fonction G se décompose sous la forme

$$G(q) = \sum_{i=1}^m G_i(q_i) \quad G_i \in \overline{\mathbb{R}}^{Y_i} \quad \text{on a}$$

$$G^*(q^*) = \sum_{i=1}^m G_i^*(q_i^*) \quad \forall q^* = (q_1^*, \dots, q_m^*) \in Y^*$$

où G_i^* est la fonction conjuguée de G_i .

Dans ce cas la seconde relation d'extrémalité du c) se décompose en les m relations :

$$G_i(\Lambda_i \bar{u}) + G_i^*(\bar{q}_i^*) = \langle \bar{q}_i^*, \Lambda_i \bar{u} \rangle \quad \forall i = 1, \dots, m$$

où $\Lambda_i \bar{u}$ est la $i^{\text{ème}}$ composante de $\Lambda \bar{u}$.

2°) Dualisation du problème (21).

On applique le 1°) ci-dessus avec

$$(32) \quad V = W^{1,p}(\Omega) \quad Y = [L^p(\Omega)]^2 \quad \Lambda = \vec{\nabla}$$

$$F(u) = - \int_{\Omega} u \, d\Omega + \langle f, u \rangle_{\Gamma_r}$$

$$(33) \quad G(q) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |q|^p \, dx .$$

Alors :

$$F^*(\Lambda^* q^*) = \begin{cases} 0 & \text{si } \operatorname{div} q^* = -1 ; q^* \cdot \nu = -\tilde{f} \text{ sur } \Gamma \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\tilde{f} = f$ sur Γ_r et 0 sur Γ_o , et

$$G^*(q^*) = \frac{1}{p'} \int_{\Omega} |q^*|^{p'} \, dx \quad p' = \frac{p}{p-1} .$$

Le problème \mathcal{P} est alors exactement le problème (21) ci-dessus.

Définissant le convexe K de $[L^{p'}(\Omega)]^2$ par

$$(34) \quad K = \left\{ q^* \in [L^{p'}(\Omega)]^2 ; \operatorname{div} q^* = -1, \begin{array}{l} q^* \cdot \nu = 0 \text{ sur } \Gamma_o \\ q^* \cdot \nu = -f \text{ sur } \Gamma_r \end{array} \right\}$$

ce qui a un sens d'après le lemme 1, le problème \mathcal{P}^* s'écrit

$$\sup_{q^* \in K} \left\{ - \frac{1}{p'} \int_{\Omega} |q^*|^{p'} \, d\Omega \right\}$$

et les relations d'extrémalité donnent :

$$q^* = |\nabla u|^{p-2} \nabla u$$

q^* représente donc le champ des contraintes. D'où le

THEOREME 3. (2^{ème} théorème de l'énergie potentielle).

L'ensemble K des contraintes admissibles étant défini par (34), le champ des contraintes réalise le minimum sur K de l'énergie complémentaire.

$$(35) \quad E(\vec{q}) = \frac{1}{p'} \int_{\Omega} |\vec{q}(x)|^{p'} \, d\Omega .$$

Corollaire 1.

Si Ω est borné et sa frontière de classe C^2 par morceaux, si f est donné dans $W^{1,p'}(\Gamma_r)$ vérifiant (14), alors il existe un champ de contraintes unique $\vec{T} \in K$ et une vitesse (unique à une constante additive près) $u \in W^{1,p}(\Omega)$ solutions du problème posé.

L'ensemble des couples (u, \vec{T}) coïncide avec l'ensemble des points-selle
dans $W^{1,p}(\Omega) \times (L^{p'}(\Omega))^2$ du lagrangien

$$(36) \quad \mathcal{L}(v, \vec{q}) = \int_{\Omega} \vec{q} \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega - \int_{\Omega} v \, d\Omega + \int_{\Gamma_r} f v \, d\Gamma_r - \frac{1}{p'} \int_{\Omega} |\vec{q}|^{p'} \, d\Omega .$$

Remarques.

1°) On a mis en évidence sur cet exemple la dualité classique en mécanique entre principe de l'énergie et principe de l'énergie complémentaire (Moreau [6] Duvaut-Lions [7] Germain [8]).

2°) On peut démontrer directement l'équivalence entre le problème aux limites relatif aux contraintes et le problème de minimisation (35) (cf. § VI ci-après).

V. FONCTION DE COURANT.

A partir de la relation (8), on introduit de manière classique une fonction de courant $\psi \in W^{1,p'}(\Omega)$ définie par

$$(37) \quad -\frac{\partial \psi}{\partial x_2} = T_3 + \frac{x_3}{2} \quad , \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_3} = T_2 + \frac{x_2}{2} .$$

Faisons sur le frottement f l'hypothèse supplémentaire (vérifiée si f est donnée par (13))

$$(38) \quad f \in L^{p'}(\Gamma_r) .$$

Alors si l'on désigne par \tilde{f} le prolongement de f par 0, ($\tilde{f} \in L^{p'}(\Gamma)$, $\tilde{f} = f$ sur Γ_r et 0 sur Γ_0) et par $\tau = (\tau_2, \tau_3)$ le vecteur unitaire de la tangente à Γ , on a la relation :

$$-\tilde{f} = T_2 \tau_3 - T_3 \tau_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \tau_3 - \frac{x_2}{2} \tau_3 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \tau_2 + \frac{x_3}{2} \tau_2 ,$$

d'où

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = -\tilde{f} + \frac{x_2}{2} \tau_3 - \frac{x_3}{2} \tau_2 \quad \text{sur } \Gamma$$

Γ_0 étant un ouvert connexe non vide de Γ , il existe une seule primitive g de $-\tilde{f} + \frac{x_2}{2} \tau_3 - \frac{x_3}{2} \tau_2$ qui s'annule sur Γ_0 (car sur Γ_0 $x_3 = 0$ et $\tau_3 = 0$, donc $\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = 0$). On obtient donc pour ψ la condition aux limites

$$(39) \quad \psi = g \text{ sur } \Gamma \text{ avec } g/\Gamma_0 = 0$$

et les relations (37) et (39) définissant une fonction univoque (même si Ω n'est pas simplement connexe).

De (9) on déduit l'équation vérifiée à l'intérieur par ψ :

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} \left[n \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \frac{x_3}{2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_3} - \frac{x_2}{2} \right)^2 \right] + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \frac{x_3}{2} \right)^2 + n \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_3} - \frac{x_2}{2} \right)^2 \right] + \\ + 2(n-1) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \partial x_3} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \frac{x_3}{2} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_3} - \frac{x_2}{2} \right) = 0. \end{array} \right.$$

Déterminer le champ des contraintes revient donc à trouver la fonction de courant $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$ solution du problème elliptique (40) (39).

Il résulte du corollaire 1 que ψ existe et est unique. La formulation en termes de fonction de courant du problème présente un grand intérêt numérique (Reynaud [9]), l'exposant n de la loi de Glen intervenant comme coefficient dans (40) et non pas en tant qu'exposant comme dans le problème des vitesses (22) (où $p = 1 + \frac{1}{n}$).

VI. CAS D'UNE LOI DE DÉFORMATION POLYNOMIALE.

1°) Résolution du problème des contraintes.

Nous avons jusqu'ici considéré la loi de déformation (1.7) qui liait la vitesse de cisaillement efficace $\dot{\gamma}$ à la cission efficace τ par la relation

$$\dot{\gamma} = B_n \tau^n.$$

En inversant cette relation, on exprimait la viscosité $\eta = \frac{\tau}{\dot{\gamma}}$ en fonction de $\dot{\gamma}$ seul ce qui permettait d'éliminer les contraintes pour obtenir ainsi un problème relatif aux seules vitesses.

On considère maintenant une loi polynomiale de la forme :

$$(41) \quad \dot{\gamma} = \sum_{n \in \mathcal{N}} B_n \tau^n$$

\mathcal{N} désignant un ensemble fini d'exposants avec $\mathcal{N} \subset]1, +\infty[$. On ne peut plus alors éliminer aussi aisément la variable τ dans la viscosité (notons cependant que (41) est facile à inverser numériquement). On est alors conduit à faire disparaître les vitesses pour mettre en évidence le problème des contraintes. Nous verrons comment la dualité permet dans ce cas de poser un problème pour les vitesses.

Des relations (1.6) et (41) on tire

$$(42) \quad \frac{1}{\eta} = \sum_{n \in \mathcal{N}} B_n \tau^{n-1}$$

et la loi de comportement (1.5) devient alors

$$(43) \quad 2[\dot{\varepsilon}_{ij}] = - \left(\sum_{n \in \mathcal{N}} B_n \tau^{n-1} \right) [\sigma'_{ij}]$$

avec

$$(44) \quad \tau^2 = \frac{1}{2} \left[\sum_i (\sigma_{ii} - p)^2 + \sum_{i \neq j} \sigma_{ij}^2 \right]$$

soit en tenant compte de (2) et (3)

$$(45) \quad \tau^2 = \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2$$

(45) joint à (43) permet d'écrire (en passant aux variables réduites) :

$$(46) \quad \vec{\nabla} u = \left(\sum_{n \in \mathcal{N}} B_n |\vec{T}|^{n-1} \right) \vec{T} .$$

Le problème des contraintes est donc :

$$(47) \quad \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\left(\sum_{n \in \mathcal{N}} B_n |\vec{T}|^{n-1} \right) T_2 \right] - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\left(\sum_{n \in \mathcal{N}} B_n |\vec{T}|^{n-1} \right) T_3 \right] = 0$$

$$(48) \quad \operatorname{div} \vec{T} = -1$$

avec les conditions aux limites inchangées

$$(11) \quad \vec{T} \cdot \vec{\nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0$$

$$(12) \quad \vec{T} \cdot \vec{\nu} = -f \quad \text{sur } \Gamma_r .$$

Posant $\mathcal{V} = \{ \phi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^2 ; \operatorname{div} \phi = 0 \}$ et multipliant (47) par une fonction test dans \mathcal{V} on obtient :

$$(49) \quad \int_{\Omega} \left(\sum_{n \in \mathcal{N}} B_n |\vec{T}|^{n-1} \right) \vec{T} \cdot \vec{\phi} = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{V} .$$

Si l'on note :

$$(50) \quad N = \max_{n \in \mathcal{N}} n , \quad 1 < N < +\infty ,$$

et si l'on admet un instant le

Lemme 3. $\forall q, 2 < q < +\infty ,$

$\mathcal{V} = \{ \phi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^2 , \operatorname{div} \phi = 0 \}$ est dense dans

$H = \{ \phi \in [L^q(\Omega)]^2 ; \operatorname{div} \phi = 0 ; \vec{\phi} \cdot \vec{\nu} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \} ,$

alors le problème des contraintes :

"Trouver $\vec{T} \in [L^{N+1}(\Omega)]^2$ solution de (47) (48) (11) (12)" est équivalent au problème variationnel :

"Trouver $\vec{T} \in \hat{K} = \{ \vec{T} \in [L^{N+1}(\Omega)]^2 ; \operatorname{div} \vec{T} = -1 ; \vec{T} \cdot \vec{\nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_0 , \vec{T} \cdot \vec{\nu} = -f \text{ sur } \Gamma_r \}$

vérifiant :

$$(51) \quad \int_{\Omega} \left(\sum_{n \in \mathcal{D}^p} B_n |\vec{T}|^{n-1} \right) \vec{T} \cdot \vec{\psi} = 0 \quad \forall \psi \in \hat{K}_0 \quad " \quad \text{où}$$

$$\hat{K}_0 = \{ \vec{\psi} \in [L^{N+1}(\Omega)]^2 ; \operatorname{div} \vec{\psi} = 0 ; \vec{\psi} \cdot \vec{\nu} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}$$

et l'on peut démontrer :

Lemme 4.

L'ensemble des contraintes admissibles \hat{K} étant défini par

$$(52) \quad \hat{K} = \{ \vec{T} \in [L^{N+1}(\Omega)]^2 ; \operatorname{div} \vec{T} = -1 ; \vec{T} \cdot \vec{\nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \vec{T} \cdot \vec{\nu} = -f \text{ sur } \Gamma_r \}$$

le champ des contraintes réalise le minimum sur \hat{K} de l'énergie complémentaire

$$(53) \quad \hat{E}(\vec{T}) = \sum_{n \in \mathcal{D}^p} \frac{B_n}{n+1} \int_{\Omega} |\vec{T}|^{n+1} d\Omega .$$

Démonstration. Il est immédiat que (51) est bien l'équation d'Euler du problème de minimisation de (53) sur \hat{K} .

THEOREME 4.

Si $f \in W^{-\frac{1}{N+1}, N+1}(\Gamma_r)$ et vérifie l'hypothèse (14), le champ de contraintes existe et est unique dans \hat{K} .

Démonstration. (53) est une fonctionnelle strictement convexe, continue et coercive sur $[L^{N+1}(\Omega)]^2$, et \hat{K} est un convexe fermé de $[L^{N+1}(\Omega)]^2$. \hat{K} est non vide sous l'hypothèse (14) car il contient l'élément $\vec{q} = \vec{\nabla} \theta$ où θ est la solution dans $W^{1, N+1}(\Omega)$ du problème de Neuman

$$\begin{cases} -\Delta \theta = 1 \text{ sur } \Gamma \\ \frac{\partial \theta}{\partial \nu} = \begin{cases} 0 \text{ sur } \Gamma_0 \\ -f \text{ sur } \Gamma_r \end{cases} \end{cases} .$$

Démonstration du lemme 3. Nous suivons la démonstration de Temam [10]

dans le cas $q = 2$.

Notant $\bar{\mathcal{V}}$ l'adhérence de \mathcal{V} dans $[L^q(\Omega)]^2$ et

$$\bar{\mathcal{V}}^\perp = \{ \psi \in [L^{q'}(\Omega)]^2 ; \langle \psi, v \rangle = 0 \quad \forall v \in \bar{\mathcal{V}} \} .$$

Nous démontrons tout d'abord le

Lemme 5.

$$(54) \quad \bar{\mathcal{V}}^\perp = \{ \psi \in [L^{q'}(\Omega)]^2 ; \psi = \operatorname{grad} p, \quad p \in W^{1, q'}(\Omega) \} .$$

Démonstration de (54).

(i) Si ϕ appartient à l'espace défini par le second membre de (54),

alors pour tout $\varphi \in \mathcal{V}$

$$\langle \phi, \varphi \rangle = \langle \text{grad } p, \varphi \rangle = - \langle p, \text{div } \varphi \rangle = 0$$

donc $\phi \in \bar{\mathcal{V}}^\perp$.

(ii) Soit maintenant ϕ un élément de $\bar{\mathcal{V}}^\perp$. Alors

$$\langle \phi, v \rangle = 0 \quad \forall v \in \mathcal{V}$$

et l'on démontre au moyen d'un résultat de de Rham (cf. Lions [11] et une démonstration plus détaillée dans Temam [10]) que ceci est une condition nécessaire et suffisante pour que ϕ soit le gradient d'une distribution p (pour Ω ouvert quelconque). Or sous l'hypothèse Ω ouvert borné lipschitzien les conditions $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\text{grad } p \in [L^{q'}(\Omega)]^2$ suffisent à assurer que $p \in W^{1,q'}(\Omega)$ ($q' \geq 2$): en effet tout ouvert borné lipschitzien peut être recouvert par un nombre fini d'ouverts $\{\sigma_j\}_{j \in J}$ tels que $\forall j \in J$ $\sigma_j \cap \Omega$ soit étoilé par rapport à l'un de ses points. Et pour un ouvert étoilé la propriété résulte de Deny-Lions [12] ainsi que l'inégalité :

$$\|p\|_{L^{q'}(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C(\Omega) \|\text{grad } p\|_{[L^{q'}(\Omega)]^2}$$

Revenant alors à la démonstration du lemme 3 nous allons déduire de (54) que

$\bar{\mathcal{V}} = H$, et tout d'abord

(iii) $\mathcal{V} \subset H$.

Soit $v \in \bar{\mathcal{V}}$. Il existe une suite $\{\varphi_m\}$ de fonctions de \mathcal{V} convergeant vers v dans $[L^q(\Omega)]^2$ fort. Puisque $\text{div } \varphi_m = 0$ m , on déduit que $\text{div } v = 0$.

On peut alors, d'après le lemme 1, définir la trace normale $\vec{v} \cdot \vec{\nu}$ de v comme élément de $W^{-\frac{1}{q},q}(\Gamma)$ et par continuité de l'application trace on déduit de

$\varphi_m = 0$ sur Γ , $\vec{v} \cdot \vec{\nu} = 0$ sur Γ . L'inclusion est donc démontrée.

(iv) $\bar{\mathcal{V}}^\perp \subset H = \{\phi \in [L^{q'}(\Omega)]^2 \mid \langle \phi, v \rangle = 0 \quad \forall v \in H\}$.

Soit en effet $\phi \in \bar{\mathcal{V}}^\perp$. D'après le lemme 5 $\phi = \text{grad } p$, $p \in W^{1,q'}(\Omega)$ et d'après

le lemme 1 on peut, pour tout, $v \in [L^{q'}(\Omega)]^2$ avec $\operatorname{div} v \in L^q(\Omega)$, écrire la formule de Stokes :

$$\langle \phi, v \rangle = \int_{\Omega} \operatorname{grad} p \cdot v = - \int_{\Omega} p \operatorname{div} v + \langle p, \vec{\nu} \cdot \vec{\nu} \rangle_{\Gamma}.$$

Par conséquent $\langle \phi, v \rangle = 0 \quad \forall v \in H$. D'où l'inclusion cherchée.

Il résulte de (iii) et (iv) que $\vec{v}^{\perp} = H^{\perp}$.

Le lemme 3 est donc démontré.

Corollaire 2.

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^m de frontière Γ de classe C^2 par morceaux.

Soit q un réel, $2 < q < +\infty$, et $q' = q/q-1$. Si H désigne l'espace

$$H = \{ \phi \in [L^q(\Omega)]^m ; \operatorname{div} \phi = 0 \text{ dans } \Omega ; \vec{\phi} \cdot \vec{\nu} = 0 \text{ sur } \Gamma \}$$

son orthogonal H^{\perp} est l'espace

$$H^{\perp} = \{ \phi \in [L^{q'}(\Omega)]^m ; \exists p \in W^{1,q'}(\Omega), \phi = \vec{\nabla} p \}.$$

2°) Dualisation et problème des vitesses.

Nous allons nous placer dans le cadre du § III 1°) ci-dessus et plus spécialement de la remarque finale. Le problème des contraintes défini par (52) (53) sera pris comme problème primal.

On pose

$$V = [L^{N+1}(\Omega)]^2, \quad Y = \prod_{n \in \mathcal{N}} Y_n, \quad V^* = [L^{1+\frac{1}{N}}(\Omega)]$$

$$Y_n = [L^{n+1}(\Omega)]^2 \quad \forall n \in \mathcal{N}, \quad Y_n^* = [L^{1+\frac{1}{n}}(\Omega)]^2$$

$$\Lambda_n = i_n \text{ injection canonique de } V \text{ dans } Y_n$$

$$\Lambda : V \rightarrow Y, \text{ de composantes } \Lambda_n \quad n \in \mathcal{N}.$$

On peut réécrire le problème (52) (53) sous la forme

$$(P) \quad \inf_{T \in V} \{ F(T) + \sum_{n \in \mathcal{N}} G_n(\Lambda_n T) \}$$

avec $F(T) = \chi_{\hat{K}}$ fonction indicatrice de l'ensemble \hat{K} défini par (52).

$$G_n(p_n) = \frac{B_n}{n+1} \int_{\Omega} |p_n|^{n+1} d\Omega.$$

La fonction conjuguée de F est alors donnée par

$$(55) \quad F^*(\Lambda^* p^*) = \sup_{T \in K} \langle \Lambda^* p^*, T \rangle \quad \text{ou encore}$$

$$F^*(\Lambda^*p^*) = \text{Sup}_{T \in \hat{K}} \sum_{n \in \mathcal{N}} \langle i_n^* p_n^*, T \rangle.$$

Si $\hat{K}_0 = \{ \vec{q} \in V ; \text{div } \vec{q} = 0 ; \vec{q} \cdot \vec{\nu} = 0 \text{ sur } \Gamma \}$ et si T_0 est quelconque (non nul) dans \hat{K}_0 , pour tout $T_1 \in \hat{K}$ $(T_1 + \lambda T_0) \in \hat{K} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Pour que le Sup ne soit pas infini dans (55) il faut donc

$$(56) \quad \langle \sum_{n \in \mathcal{N}} i_n^* p_n^*, T_0 \rangle = 0 \quad \forall T_0 \in \hat{K}_0$$

ce qui d'après le corollaire 2 est équivalent à

$$(57) \quad \exists \varphi^* \in W^{1, 1 + \frac{1}{N}}(\Omega) ; \sum_{n \in \mathcal{N}} i_n^* \hat{p}_n^* = \varphi^*.$$

Montrons que la condition (56) est suffisante : soit donc T quelconque dans \hat{K} .

Utilisant successivement (57) et le lemme 1 il vient :

$$\begin{aligned} \langle \sum_{n \in \mathcal{N}} i_n^* p_n^*, T \rangle &= \langle \text{grad } \varphi^*, T \rangle \\ &= - \int_{\Omega} \varphi^* \text{div } T + \int_{\Gamma} \varphi^* \vec{T} \cdot \vec{\nu} \, d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} \varphi^* \, d\Omega - \langle f, \varphi^* \rangle_{\Gamma_r}. \end{aligned}$$

La condition (56) est donc aussi suffisante pour que le Sup soit fini et :

$$(58) \quad F^*(\Lambda^*p^*) = \begin{cases} \int_{\Omega} \varphi^* \, d\Omega - \langle f, \varphi^* \rangle & \text{si (57) est vraie,} \\ + \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Enfin

$$(59) \quad G_n^*(p_n^*) = \frac{B_n^*}{\alpha_n^*} \int_{\Omega} |p_n^*|^{\alpha_n^*} \, d\Omega \quad \begin{aligned} B_n^* &= (B_n)^{-\frac{1}{n}} \\ \alpha_n^* &= 1 + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

On peut donc écrire le problème dual du problème \mathcal{P} :

$$(\mathcal{P}^*) \quad \text{Sup}_{p^* \in Y^*} \{ - F^*(-\Lambda^*p^*) - G^*(p^*) \}$$

soit en explicitant

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}^*) \quad \text{Sup}_{p^* \in K^*} & \left[\int_{\Omega} \varphi^* \, d\Omega - \langle f, \varphi^* \rangle_{\Gamma_r} - \sum_{n \in \mathcal{N}} \frac{B_n^*}{\alpha_n^*} \int_{\Omega} |p_n^*|^{\alpha_n^*} \, d\Omega \right] \\ K^* &= \{ p^* \in \prod_{n \in \mathcal{N}} [L^{1 + \frac{1}{n}}(\Omega)]^2 ; \exists \varphi^* \in W^{1 + \frac{1}{N}}(\Omega) \sum_{n \in \mathcal{N}} p_n^* = \nabla \varphi^* \}. \end{aligned}$$

Lorsque $\mathcal{N} = \{N\}$, le problème (\mathcal{P}^*) peut se réécrire sous la forme

$$(60) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in W^{1 + \frac{1}{N}}(\Omega) \text{ réalisant} \\ \text{Min}_{u \in W^{1 + \frac{1}{N}}(\Omega)} \left[\frac{B_N^{-\frac{1}{N}}}{1 + \frac{1}{N}} \int_{\Omega} |\nabla u|^{1 + \frac{1}{N}} \, d\Omega - \int_{\Omega} u \, d\Omega + \langle f, u \rangle_{\Gamma_r} \right] \end{cases}$$

car dans ce cas $K^* = \{ \nabla \varphi^*, \varphi^* \in W^{1+\frac{1}{N}} \}$.

On retrouve donc exactement le problème des vitesses (23).

On va montrer que dans le cas où \mathcal{N} contient plus d'un élément φ^* représente aussi la vitesse et que (\mathcal{P}^*) est donc bien une formulation variationnelle du problème des vitesses.

Les relations d'extrémalité s'écrivent :

$$G_n(\Lambda_n T) + G_n^*(p_n^*) = \langle p_n^*, \Lambda_n T \rangle \quad \forall n \in \mathcal{N}$$

soit :

$$\frac{B_n}{n+1} \int_{\Omega} |T|^{n+1} d\Omega + \frac{B_n}{1+\frac{1}{n}} \int_{\Omega} |p_n^*|^{1+\frac{1}{n}} d\Omega = \int_{\Omega} p_n^* T d\Omega$$

ce qui est équivalent à

$$(61) \quad p_n^* = B_n |\vec{T}|^{n-1} T, \quad \forall n \in \mathcal{N},$$

et par sommation en n on trouve la relation

$$(62) \quad \vec{\nabla} \varphi^* = \left(\sum_{n \in \mathcal{N}} B_n |\vec{T}|^{n-1} \right) \vec{T},$$

φ^* représente donc la vitesse u cherchée (comparer à (46)).

Remarque.

Il résultait directement de la formulation variationnelle (51) et du corollaire 2 que le champ des contraintes \vec{T} pouvait être caractérisé par :

$$(63) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{T} \in [L^{N+1}(\Omega)]^2, \text{ div } \vec{T} = -1, \vec{T} \cdot \vec{\nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \vec{T} \cdot \vec{\nu} = -f \text{ sur } \Gamma_r \\ \text{et il existe un élément } u \text{ de } W^{1+\frac{1}{N}}(\Omega) \text{ tel que} \\ \sum_{n \in \mathcal{N}} B_n |\vec{T}|^{n-1} \vec{T} = \vec{\nabla} u, \end{array} \right.$$

toutefois (51) seul n'impliquait pas que cet élément u soit solution d'un problème variationnel.

VII. IDENTIFICATION DU FROTTEMENT SUR LE LIT ROCHEUX.1°) Position du problème.

On suppose ici le frottement f inconnu sur Γ_r , par contre le débit $d = \int_{\Omega} u \, d\Omega$ et la distribution de vitesse en surface u_d ont été mesurés; on se pose alors le problème de déterminer f .

L'ensemble des frottements admissibles sera défini par

$$(64) \quad F_{ad} = \left\{ w \in L^{\pi'}(\Gamma_r), \quad \|w\|_{L^{\pi'}(\Gamma_r)} \leq \gamma_0, \quad \int_{\Gamma_r} w \, d\Gamma_r = \text{mes } \Omega, \quad w \geq 0 \text{ pp sur } \Gamma_r \right\},$$

avec π donné par (27) et $\pi' = \frac{\pi}{\pi-1} = \frac{n+3}{2}$;

dans (61) γ_0 est une constante positive vérifiant

$$(65) \quad \gamma_0 \geq (\text{mes } \Omega) (\text{mes } \Gamma_r)^{-\frac{1}{\pi}}.$$

Il résulte de la remarque 1 du § III que :

$$(66) \quad F_{ad} \text{ est un convexe compact de } W^{-\frac{1}{p'}, p'}(\Gamma_r)$$

de plus l'hypothèse (65) entraîne que F_{ad} n'est pas vide : il est aisé de constater qu'il contient en effet la fonction $w = \frac{\text{mes } \Omega}{\text{mes } \Gamma_r}$.

A tout $w \in F_{ad}$ on peut donc d'après le § II associer un unique élément $u_w \in W^{1,p}(\Omega)$ défini comme solution du problème aux limites :

$$(67) \quad \begin{cases} -\vec{\nabla} \cdot (|\vec{\nabla} u_w|^{p-2} \vec{\nabla} u_w) = 1 \end{cases}$$

$$(68) \quad \begin{cases} |\vec{\nabla} u_w|^{p-2} \frac{\partial u_w}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \end{cases}$$

$$(69) \quad \begin{cases} |\vec{\nabla} u_w|^{p-2} \frac{\partial u_w}{\partial \nu} = -w \quad \text{sur } \Gamma_r \end{cases}$$

$$(70) \quad \int_{\Omega} u_w \, d\Omega = d.$$

Un contrôle optimal $w_{opt} = f$ s'obtiendra alors comme solution (si elle existe) du problème

$$(71) \quad \text{Min}_{w \in F_{ad}} \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_0} |u_w - u_d|^{\pi} \, d\Gamma.$$

Remarques.

1) On aurait pu aussi imposer la vitesse moyenne en surface et faire rentrer la contrainte (70) dans le critère. La résolution numérique du problème est alors un peu plus délicate.

2) On peut interpréter physiquement la condition contenue dans F_{ad} :

$$(72) \quad \|w\|_{L^{\pi'}(\Gamma_r)} \leq \gamma_0.$$

En effet si l'hypothèse de Weertman est vraie, le frottement w et la vitesse u_w au fond sont liés par une relation de la forme

$$(73) \quad |u_w| = C|w|^{\frac{n+1}{2}}$$

Or (72) est équivalent à

$$(74) \quad \int_{\Gamma_r} (w)^{1+\frac{n+1}{2}} d\Gamma_r \leq \gamma_0^{\pi'}$$

et prenant en compte (73), (74) devient

$$\int_{\Gamma_r} w u_w d\Gamma_r \leq \gamma_0^{\pi'}.$$

Imposer (72) revient donc à limiter supérieurement, en moyenne, le produit du frottement par la vitesse de glissement sur le lit, ce qui est tout à fait raisonnable.

2°) Existence d'un contrôle optimal.

Nous allons démontrer la continuité de l'état par rapport au contrôle.

L'existence d'un contrôle optimal résultera alors directement de la compacité de F_{ad} .

Soient donc w et $w+h$ deux contrôles de F_{ad} , u_w et u_{w+h} les vitesses associées.

D'après le § III les champs de contraintes correspondant T_w et T_{w+h} définis par

$$(75) \quad \begin{cases} T_w = |\nabla u_w|^{p-2} \nabla u_w \\ T_{w+h} = |\nabla u_{w+h}|^{p-2} \nabla u_{w+h} \end{cases}$$

sont caractérisés par

$$(76) \quad \begin{cases} T_w \in K_w \\ \int_{\Omega} |\vec{T}_w|^{p'-2} \vec{T}_w \cdot \vec{\phi} d\Omega = 0 \end{cases} \quad \forall \phi \in K_0$$

$$(77) \quad \begin{cases} T_{w+h} \in K_{w+h} \\ \int_{\Omega} |\vec{T}_{w+h}|^{p'-2} \vec{T}_{w+h} \cdot \vec{\phi} d\Omega = 0 \end{cases} \quad \forall \phi \in K_0$$

où $K_f = \{ \vec{T} \in [L^{p'}(\Omega)]^2 ; \operatorname{div} \vec{T} = -1 ; \vec{T} \cdot \vec{\nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \vec{T} \cdot \vec{\nu} = -f \text{ sur } \Gamma_r \}$
 et $K_0 = \{ \vec{T} \in [L^{p'}(\Omega)]^2 ; \operatorname{div} \vec{T} = -1 ; \vec{T} \cdot \vec{\nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \cup \Gamma_r \}$.

Lemme 6.

Il existe un opérateur de relèvement linéaire continu de $\{ h \in W^{-\frac{1}{p'}, p'}(\Gamma_r) ; \langle h, 1 \rangle_{\Gamma_r} = 0 \}$
dans $\{ \vec{H} \in [L^{p'}(\Omega)]^2 ; \operatorname{div} \vec{H} = 0 ; \vec{H} \cdot \vec{\nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \vec{H} \cdot \vec{\nu} = h \text{ sur } \Gamma_r \}$.

Démonstration. L'on note y la solution dans $W^{1, p'}(\Omega)$ du problème de Neuman

$$(78) \quad \begin{cases} -\Delta y = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} = \begin{cases} 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ h & \text{sur } \Gamma_r \end{cases} \\ \int_{\Omega} y \, dx = 0 \end{cases}$$

L'hypothèse $\langle h, 1 \rangle_{\Gamma_r} = 0$ et la condition $\int_{\Omega} y \, dx = 0$ assurent l'existence et l'unicité de y dans $W^{1, p'}(\Omega)$ et on peut trouver une constante C ne dépendant que de Ω telle que :

$$\| \vec{\nabla} y \|_{[L^{p'}(\Omega)]^2} \leq C \| h \|_{W^{-\frac{1}{p'}, p'}(\Gamma_r)}$$

Posant alors $\vec{H} = \vec{\nabla} y$ on obtient le lemme.

Soient maintenant w et $w+h$ deux contrôles de F_{ad} . Alors h vérifie les hypothèses du lemme 6. On peut donc lui associer son relèvement $\vec{H} \in [L^{p'}(\Omega)]^2$ et

$$(79) \quad \vec{T}_{w+h} - \vec{T}_w + \vec{H} \in K_0.$$

En écrivant (77) et (76) avec $\psi = T_{w+h} - T_w + H$ et en soustrayant il vient :

$$(80) \quad \int_{\Omega} (|\vec{T}_{w+h}|^{p'-2} \vec{T}_{w+h} - |\vec{T}_w|^{p'-2} \vec{T}_w) (\vec{T}_{w+h} - \vec{T}_w + \vec{H}) \, dx = 0.$$

Rappelons ici deux lemmes techniques :

Lemme 7. Glowinski Marocco [17]

Si $q \geq 2$ il existe une constante $\alpha = \alpha(q) > 0$ telle que

$$(|z|^{q-2} z - |y|^{q-2} y, z-y)_{\mathbb{R}^2} \geq \alpha |z-y|^q \quad \forall y, z \in \mathbb{R}^2.$$

Lemme 8. Glowinski Marocco [17]

Si $q \geq 2$ il existe une constante $\beta = \beta(q) > 0$ telle que

$$(|z|^{q-2} z - |y|^{q-2} y) \leq \beta |z-y| (|z| + |y|)^{q-2} \quad \forall y, z \in \mathbb{R}^2 .$$

Démonstration. Evidente en appliquant la formule des accroissements finis à la fonction $f(z) = |z|^{q-2} z$.

L'exposant p' étant toujours supérieur ou égal à 2 on déduit de (80) et des lemmes 7 et 8

$$\alpha \|T_{w+h} - T_w\|_{[L^{p'}(\Omega)]^2}^{p'} \leq \beta \left[\int_{\Omega} |T_{w+h} - T_w|^p (|T_{w+h}| + |T_w|)^{p(p'-2)} dx \right] \|H\|_{[L^{p'}(\Omega)]^2}$$

et par inégalité de Hölder

$$(81) \quad \alpha \|T_{w+h} - T_w\|_{[L^{p'}(\Omega)]^2}^{p'-1} \leq \beta \| |T_{w+h}| + |T_w| \|_{[L^{p'}(\Omega)]^2}^{p'-2} \|H\|_{[L^{p'}(\Omega)]^2}$$

Ecrivant maintenant (77) avec $\psi = T_{w+h} - T_w + H$ on obtient

$$\|\vec{T}_{w+h}\|_{[L^{p'}(\Omega)]^2}^{p'} = \int_{\Omega} |\vec{T}_{w+h}|^{p'-2} \vec{T}_{w+h} (\vec{T}_w - \vec{H}) dx .$$

D'où

$$(82) \quad \|T_{w+h}\|_{[L^{p'}(\Omega)]^2} \leq \|T_w\|_{[L^{p'}(\Omega)]^2} + \|H\|_{[L^{p'}(\Omega)]^2}$$

et de (81) et (82) on déduit finalement

$$(83) \quad \|T_{w+h} - T_w\|_{[L^{p'}(\Omega)]^2}^{p'-1} \leq \frac{\beta}{\alpha} [2 \|T_w\| + \|H\|]^{p'-2} \|H\|$$

ce qui avec le lemme 6 prouve la continuité de T_w par rapport à w et fournit la relation

$$(84) \quad \|T_{w+h} - T_w\|_{[L^{p'}(\Omega)]^2}^{p'-1} \leq C \left[\|T_w\|_{[L^{p'}(\Omega)]^2} + \|h\|_{W^{-\frac{1}{p'}, p'}(\Gamma_r)} \right]^{p'-2} \|h\|_{W^{-\frac{1}{p'}, p'}(\Gamma_r)}$$

THEOREME 5.

La vitesse u_w dépend de manière continue du frottement w admissible imposé

sur le lit rocheux. Plus précisément on a l'inégalité :

$$(85) \quad \|u_{w+h} - u_w\|_{W^{1, p}(\Omega)} \leq C \left(\|u_w\|_{W^{1, p}(\Omega)}^{p-1} + \|h\|_{W^{-\frac{1}{p'}, p'}(\Gamma_r)} \right)^{\frac{(2-p)p}{p-1}} \|h\|_{W^{-\frac{1}{p'}, p'}(\Gamma_r)}^{p-1}$$

Démonstration. Elle découle de (84) et de l'analogue dans le cas

$1 < q \leq 2$ du lemme 7.

Lemme 9. [18]

Si $1 < q \leq 2$ il existe une constante $\alpha' = \alpha'(q) > 0$ telle que

$$\alpha' |z-y|^2 \leq (|z| + |y|)^{2-q} (|z|^{q-2} z - |y|^{q-2} y, z-y)_{\mathbb{R}^2} \quad \forall y, z \in \mathbb{R}^2.$$

On en déduit

$$\alpha' \|\nabla u_{w+h} - \nabla u_w\|_{[L^p(\Omega)]^2}^2 \leq (\|\nabla u_{w+h}\|_{L^p} + \|\nabla u_w\|_{L^p})^{2-p} \int_{\Omega} (|\vec{\nabla} u_{w+h}|^{p-2} \vec{\nabla} u_{w+h} - |\vec{\nabla} u_w|^{p-2} \vec{\nabla} u_w) (\vec{\nabla} u_{w+h} - \vec{\nabla} u_w)$$

soit en utilisant (75) et l'inégalité de Hölder

$$\alpha' \|\nabla u_{w+h} - \nabla u_w\|_{L^p} \leq (\|T_{w+h}\|_{L^{p'}}^{p'-1} + \|T_w\|_{L^{p'}}^{p'-1})^{2-p} \|T_{w+h} - T_w\|_{L^{p'}}$$

On se sert alors de (82) (84) et du lemme 6 pour obtenir :

$$\begin{aligned} \|\nabla u_{w+h} - \nabla u_w\|_{L^p} &\leq C (\|T_w\|_{L^{p'}} + \|h\|_{W^{\frac{1}{p'}, p'}(\Gamma_r)})^{p'-1} + \|T_w\|_{L^{p'}}^{p'-1} \\ &\quad (\|T_w\|_{L^{p'}} + \|h\|_{W^{\frac{1}{p'}, p'}(\Gamma_r)})^{\frac{p'-2}{p'-1}} \|h\|_{W^{\frac{1}{p'}, p'}(\Gamma_r)} \\ &\leq C (\|T_w\| + \|h\|)^{\frac{p'}{p} - \frac{1}{p'-1}} \|h\|^{\frac{1}{p'-1}}. \end{aligned}$$

Soit finalement l'inégalité (85), en utilisant l'inégalité de Poincaré généralisée

(Nečas [14]) :

$$(86) \quad \|v\|_{L^p(\Omega)} \leq C (\|\nabla v\|_{[L^p(\Omega)]^2} + |\int_{\Omega} v(x) dx|) \quad \forall v \in W^{1,p}(\Omega).$$

On peut maintenant facilement établir le théorème d'existence pour le contrôle optimal.

THEOREME 6.

Il existe un contrôle optimal $w_{opt} \in F_{ad}$ solution du problème (67) (68) (69)

(70) (71).

Démonstration. L'ensemble des contrôles admissibles étant compact dans

$W^{\frac{1}{p'}, p'}(\Gamma_r)$ il suffit de montrer que l'application $w \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_o} |u_w - u_d|^\pi d\Gamma$

est continue sur F_{ad} . Or elle apparaît comme la composée des applications

$w \mapsto u_w$ qui est continue de F_{ad} dans $W^{1,p}(\Omega)$ d'après le théorème 6

$u_w \mapsto u_{w/\Gamma_0}$ application trace continue de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^q(\Gamma_0)$, $\forall q \geq q_0$
défini par (29)

$u_{w/\Gamma_0} \mapsto \|u_{w/\Gamma_0} - u_d\|_{L^\pi(\Gamma_0)}^\pi$ qui est évidemment continue de $L^\pi(\Gamma_0)$ dans \mathbb{R} .

Le théorème 7 est donc démontré.

Corollaire 3.

Le résultat d'existence du théorème 6 reste valable en remplaçant le critère

(71) par

$$\text{Min}_{w \in F_{ad}} \frac{1}{q} \int_{\Gamma_0} |u_w - u_d|^q d\Gamma.$$

q ayant une valeur quelconque $\leq q_0$ défini par (29). (En particulier pour $n \leq 3$ on peut prendre un critère quadratique).

Corollaire 4.

On peut également remplacer dans la définition de F_{ad} l'espace $L^{\pi'}(\Gamma_r)$ par n'importe quel espace $L^{q'}(\Gamma_r)$ avec $q' > \frac{n+1}{2} = q'_0$.

Remarque.

Si $p = 2$, le contrôle optimal du théorème 7 est unique : soient en effet w_1 et w_2 deux solutions du problème de contrôle, u_1 et u_2 les états associés. Posons $u_\theta = (1-\theta)u_1 + \theta u_2$ $0 \leq \theta \leq 1$

$$\int_{\Gamma_0} |u_\theta - u_d|^2 \leq (1-\theta) \int_{\Gamma_0} |u_1 - u_d|^2 + \theta \int_{\Gamma_0} |u_2 - u_d|^2,$$

l'égalité n'ayant lieu que si $u_{1/\Gamma_0} = u_{2/\Gamma_0}$. On a donc obligatoirement

$(u_1 - u_2)_{/\Gamma_0} = 0$ de sorte que $u_1 - u_2$ est solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta(u_1 - u_2) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u_1 - u_2 = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ \frac{\partial}{\partial \nu}(u_1 - u_2) = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases}$$

et l'on déduit immédiatement du théorème de Holmgren (Mizohata [13]) que $u_1 - u_2 = 0$.

Or $w_1 - w_2 = -\frac{\partial}{\partial \nu}(u_1 - u_2)$ sur Γ_r . D'où $w_1 = w_2$.



VIII. APPROXIMATION PAR ELEMENTS FINIS DU PROBLEME DES VITESSES.

On suppose le débit d donné non nul, et f dans $L^{\infty}(\Gamma_r)$. Posant

$$V_d = \{u \in W^{1,p}(\Omega), \int_{\Omega} u \, d\Omega = d\}$$

le problème des vitesses peut s'écrire

Trouver $u \in V$ vérifiant :

$$(87) \quad \int_{\Omega} |\vec{\nabla} u|^{p-2} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega = \int_{\Omega} v \, d\Omega - \int_{\Gamma_r} f v \, d\Gamma_r \quad \forall v \in V$$

ou encore

$$(88) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ réalisant} \\ \text{Min}_{v \in V} \mathcal{E}(v) \\ \mathcal{E}(v) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla v|^p \, d\Omega - \int_{\Omega} v \, d\Omega + \int_{\Gamma_r} f v \, d\Gamma_r \end{array} \right.$$

On suppose le domaine Ω polygonal (hypothèse non essentielle) et l'on introduit une triangulation \mathcal{C}_h finie de Ω vérifiant les hypothèses habituelles

(Ciarlet-Raviart [15], Strang-Fix [16]) :

$$(89) \quad T \subset \bar{\Omega} \quad \forall T \in \mathcal{C}_h$$

$$(90) \quad \bigcup_{T \in \mathcal{C}_h} T = \bar{\Omega},$$

$$(91) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Deux éléments de la triangulation} \\ \quad - \text{ sont disjoints} \\ \quad - \text{ ou ont un côté entier en commun} \\ \quad - \text{ ou n'ont qu'un sommet commun,} \end{array} \right.$$

h désignant la longueur maximale des côtés des éléments de \mathcal{C}_h on doit imposer en outre la condition :

$$(92) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } \theta_0 > 0 \text{ minorant uniformément en } h \text{ les angles des} \\ \text{triangles de } \mathcal{C}_h. \end{array} \right.$$

Notant P_1 l'espace des polynômes de degré ≤ 1 , on introduit l'espace approché

$$V_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) ; v_h|_T \in P_1 \quad \forall T \in \mathcal{C}_h\} \subset W^{1,p}(\Omega)$$

et l'on pose

$$V_h^d = \{v_h \in V_h, \int_{\Omega} v_h \, d\Omega = d\} \subset V_d.$$

La solution approchée est alors définie comme la solution u_h du problème (en dimension finie)

$$(93) \quad \begin{cases} u_h \in V_h \\ \mathcal{E}(u_h) \leq \mathcal{E}(v_h) \end{cases} \quad \forall v_h \in V_h$$

vérifiant

$$(94) \quad \int_{\Omega} u_h \, d\Omega = d ;$$

V_h étant un sous-espace fermé de V , on a bien existence et unicité de u_h .

THEOREME 8.

Sous les hypothèses (89) (90) (91), la solution u_h du problème (93) (94) converge dans $W^{1,p}(\Omega)$ fort, vers la solution u du problème des vitesses (88).

Démonstration. Une formulation équivalente du problème (93) (94) est :

$$(95) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h^d \text{ vérifiant} \\ \int_{\Omega} |\vec{\nabla} u_h|^{p-2} \vec{\nabla} u_h \cdot \vec{\nabla} v_h \, d\Omega = \int_{\Omega} v_h \, d\Omega - \int_{\Gamma_r} f v_h \, d\Gamma \end{cases} \quad \forall v_h \in V_h .$$

Remplaçant v_h par u_h dans (95) on obtient

$$\int_{\Omega} |\vec{\nabla} u_h|^p \, d\Omega \leq d + \|f\|_{L^{\pi'}(\Gamma_r)} \|u_h\|_{L^{\pi}(\Gamma_r)}$$

et la continuité de l'application trace sur Γ_r jointe à l'inégalité de Poincaré

(86) entraîne :

$$(96) \quad \|u_h\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p \leq C [d + d^p + \|f\|_{L^{\pi'}(\Gamma_r)} \|u_h\|_{W^{1,p}(\Omega)}]$$

(96) est une inégalité de la forme

$$\begin{aligned} x^p &\leq \alpha x + \beta && \text{avec } \alpha, \beta, x > 0 \quad \text{et } p > 1 \\ \text{si } x &\leq 1 && \text{alors } x^{p-1} \leq 1 \\ \text{si } x &\geq 1 && x^{p-1} \leq \alpha + \frac{\beta}{x} \leq \alpha + \beta \end{aligned}$$

donc on a toujours

$$(97) \quad \|u_h\|_{W^{1,p}(\Omega)}^{p-1} \leq C' [d + d^p + \|f\|_{L^{\pi'}(\Gamma_r)}]$$

la constante C' ne dépendant que de Ω .

On peut donc extraire de la suite $\{u_h\}$ une sous-suite $\{u_{h_i}\}$ telle que :

$$(98) \quad \begin{cases} u_{h_i} \rightarrow u^* & W^{1,p}(\Omega) \text{ faible, } L^p(\Omega) \text{ fort et p.p.} \\ u_{h_i}/\Gamma_r \rightarrow u^*/\Gamma_r & L^p(\Gamma_r) \text{ fort.} \end{cases}$$

Soit alors $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$, et $\pi_h \varphi$ son interpolée définie par

$$(99) \quad \begin{cases} \pi_h \varphi \in V_h \\ \pi_h \varphi(P) = \varphi(P) & \forall P \text{ sommet de } \mathcal{C}_h \end{cases}$$

Il est classique que $\pi_h \varphi \rightarrow \varphi$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ fort.

Ecrivant (93) avec $v_h = \pi_h \varphi$ on déduit facilement

$$(100) \quad \mathcal{E}(u^*) \leq \mathcal{E}(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$$

et par densité de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ et continuité de \mathcal{E} c'est encore vrai pour tout φ dans $W^{1,p}(\Omega)$. D'autre part, il résulte immédiatement de (94) que

$$\int_{\Omega} u^* d\Omega = d.$$

On en déduit donc que $u^* = u$ solution de (88) et qu'il y a convergence de la suite u_h tout entière.

Reste à montrer la convergence forte.

Il résulte de la démonstration de convergence faible que $\mathcal{E}(u_h) \rightarrow \mathcal{E}(u)$

et donc que

$$(101) \quad \|\nabla u_h\|_{[L^p(\Omega)]^2} \rightarrow \|\nabla u\|_{[L^p(\Omega)]^2}.$$

L'espace $L^p(\Omega)$ étant uniformément convexe, (101) et la convergence faible de ∇u_h vers ∇u montrent que

$$\nabla u_h \rightarrow \nabla u \quad [L^p(\Omega)]^2 \text{ fort}$$

et avec (98) ceci entraîne le résultat cherché.

Remarque.

On pourrait à l'aide des résultats de régularité de Simon [19], comme dans Glowinski-Marrocco [17], [18], des estimations de l'erreur

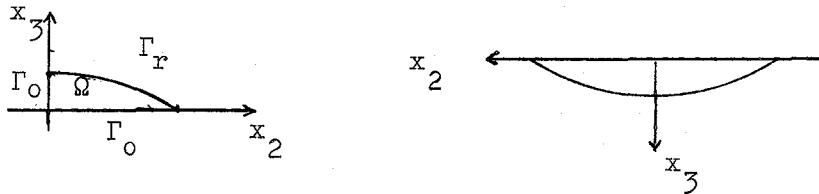
$$\|u_h - u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

IX. DETERMINATION NUMERIQUE DU CHAMP DE VITESSE DU GLACIER DE L'ATHABASCA.

Nous avons déterminé numériquement le champ de vitesses dans une section du glacier de l'Athabasca, sur lequel on dispose d'un grand nombre de mesures expérimentales, et d'une étude numérique effectuée par L. Reynaud [9].

1°) Le problème continu.

La section étudiée est assimilée, en coordonnées réduites (voir Chap. 2, § I) au domaine compris entre l'axe $x_3 = 0$ et la parabole d'équation :
 $x_3 = 1 - \frac{x_2^2}{4}$. Du fait de la symétrie on prendra



pour Ω l'intérieur de la demi-parabole. Γ_0 sera formé des deux segments portés par les axes et Γ_r désignera l'arc de parabole. On fait sur Γ_r l'hypothèse de frottement solide de Coulomb (13) et l'on prend f de la forme

$$(102) \quad f = \begin{cases} C_w x_3 & 0 \leq x_3 \leq H_w \\ C_w [(1+\delta)H_w - \delta x_3] & H_w \leq x_3 \leq 1 \end{cases}$$

avec $\delta = \frac{\rho_w}{\rho} - 1 = 0.12$. Mais l'imprécision sur H_w est grande. On calculera donc la solution pour différentes valeurs de H_w de manière à déterminer un champ de vitesses s'ajustant au mieux avec les mesures physiques. La constante C_w de (102), qui dépend de la valeur de H_w , sera calculée par la relation :

$$(103) \quad \int_{\Gamma_r} f \, d\Gamma = \frac{4}{3}.$$

L'exposant n de la loi de Glen (9) est pris égal à 3 ce qui donne pour p la valeur

$$(104) \quad p = \frac{4}{3}$$

et conduit au problème

$$(105) \quad \text{Min}_{u \in W^{1, \frac{4}{3}}(\Omega)} \left[\frac{3}{4} \int_{\Omega} |\nabla u|^{\frac{4}{3}} \, d\Omega - \int_{\Omega} u \, d\Omega + \int_{\Gamma_r} f u \, d\Gamma \right].$$

La vitesse réelle u_1 se déduit de la solution u du problème (105) par la relation

$$(106) \quad u_1 = u[a B(\rho g a \sin \alpha)^n]$$

Pour obtenir u_1 en mètres par an (ma^{-1}) les valeurs des constantes sont pour le glacier de l'Athabasca $\alpha = 3^\circ 30'$, $a = 310 \text{ m}$, $B = 0.17$, $\rho g = 0.087$.

2°) Le problème discret.

On discrétise, comme il est indiqué au § VIII, le problème (105) sous la forme (93). On est donc ramené à résoudre le problème (en dimension finie) (93). Pour cela nous avons tout d'abord essayé la méthode classique de surrelaxation. Mais cette méthode, qui donne de bons résultats pour $p > 1.5$, s'est révélée inopérante ici, la valeur de p considérée étant trop petite : $p = 1.33$. Nous avons alors adopté, une variante d'une méthode de pénalisation-dualité utilisée dans un cas voisin par Glowinski-Marrocco [17] et inspirée de Hesténès [20]. Le principe de la méthode est le suivant : on introduit la contrainte supplémentaire $\vec{w}_h = \vec{\nabla} v_h$, ce qui permet de découpler la partie linéaire et la partie non linéaire. On pénalise cette contrainte $w_h - \nabla v_h = 0$ puis on lui associe un multiplicateur de Lagrange (variable duale). On montre alors que le Lagrangien ainsi obtenu admet un point selle qui fournit la solution u_h cherchée et le champ de contraintes $T_h = |\nabla u_h|^{p-2} \nabla u_h$. Plus précisément on utilise la propriété mise en évidence Chap. 2, § VI 2°) (équivalence entre le problème \mathcal{P}^* et le problème (60)) : le problème (106) est équivalent au problème :

$$(107) \quad \begin{aligned} & \text{Minimiser sur } W^{1,p}(\Omega) \times [L^p(\Omega)]^2 \text{ la fonctionnelle} \\ e(v,w) &= \frac{1}{p} \int_{\Omega} |w|^p \, d\Omega - \int_{\Omega} v \, d\Omega + \int_{\Gamma_r} f v \, d\Gamma \end{aligned}$$

sous la contrainte $w = \nabla v$.

Introduisant alors l'espace w_h des fonctions constantes sur les triangles de \mathcal{T}_h

$$w_h = \{w_h ; w_h|_T \in \mathbb{R}^2 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}$$

il est immédiat que le problème discrétisé (93) est équivalent au problème de

minimiser sur $V_h \times W_h$ la fonctionnelle $e(v,w)$ sous la même contrainte :

$w = \nabla v$. On pénalise la contrainte sous la forme :

$$(108) \quad e_\varepsilon(v,w) = e(v,w) + \frac{1}{2\varepsilon} \|\nabla v - w\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2$$

et l'on introduit le lagrangien défini sur $(V_h \times W_h) \times W_h$

$$(109) \quad \mathcal{L}_\varepsilon(v,w ; q) = \int_\Omega \vec{q} \cdot (\nabla u - \vec{w}) d\Omega - \int_\Omega v d\Omega + \int_{\Gamma_r} f v d\Gamma \\ + \frac{1}{p} \int_\Omega |w|^p d\Omega + \frac{1}{2\varepsilon} \int_\Omega |\nabla v - w|^2 d\Omega$$

Nous allons démontrer la

PROPOSITION.

L'ensemble des points selle du lagrangien \mathcal{L}_ε est indépendant de ε et coïncide avec l'ensemble des triplets $(u_h, \nabla u_h ; |\nabla u_h|^{p-2} \nabla u_h)$ lorsque u_h décrit l'ensemble des solutions de (93). \mathcal{L}_ε possède donc un point selle unique à une constante additive près.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que, pour q fixé, \mathcal{L} est strictement convexe par rapport au couple (v,w) dans l'espace $V_h/\mathbb{R} \times W_h$ (où V_h/\mathbb{R} désigne l'espace quotient de V_h par les constantes).

Les points-selle $(\bar{u}, \bar{w} ; \bar{q})$ de (109) sont caractérisés par les relations

$$(110) \quad \begin{cases} (\bar{u}, \bar{w} ; \bar{q}) \in V_h \times W_h \times W_h \\ \int_\Omega |\bar{w}|^{p-2} \bar{w} w_h d\Omega + \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega (\bar{w} - \nabla \bar{u})(w_h - \nabla v_h) d\Omega \\ = \int_\Omega v_h d\Omega - \int_\Gamma f v_h d\Gamma + \int_\Omega \bar{q}(w_h - \nabla v_h) d\Omega \quad \forall (v_h, w_h) \in V_h \times W_h \end{cases}$$

et

$$(111) \quad \nabla \bar{u} = \bar{w} .$$

Il est alors immédiat que, si u_h est une solution du problème (93), le triplet $(u_h, \nabla u_h ; |\nabla u_h|^{p-2} \nabla u_h)$ vérifie (110) (111) et est donc un point-selle de \mathcal{L}_ε .

D'autre part, reportant (111) dans (110), si u_h est une solution de (93) on obtient la relation :

$$\int_\Omega |\nabla \bar{u}|^{p-2} \nabla \bar{u} w_h d\Omega - \int_\Omega |\nabla u_h|^{p-2} \nabla u_h \nabla v_h = \int_\Omega \bar{q}(w_h - \nabla v_h) \quad \forall (v_h, w_h) \in V_h \times W_h$$

et l'on en déduit facilement

$$\bar{q} = |\nabla \bar{u}|^{p-2} \nabla \bar{u} = |\nabla u_h|^{p-2} \nabla u_h .$$

Les points selle sont donc tous de la forme $(\bar{u}, \nabla \bar{u} ; |\nabla u_h|^{p-2} \nabla u_h)$ et la remarque de stricte convexité faite au début entraîne $\bar{u} = u_h$ à une constante additive près.

Notons que \bar{q} représente alors le champ de contraintes.

3°) Résolution numérique du problème discret.

On applique l'algorithme d'Uzawa au lagrangien \mathcal{L}_ε . Partant de q^0 donné, on détermine donc les suites u^n, w^n, q^n de la manière suivante

$$(112) \quad q^0 \text{ donné dans } w_h$$

$$(113) \quad \begin{cases} (u^n, w^n) \in V_h \times W_h \\ \mathcal{L}_\varepsilon(u^n, w^n ; q^n) \leq \mathcal{L}_\varepsilon(v_h, w_h ; q^n) \quad \forall (v_h, w_h) \in V_h \times W_h \end{cases}$$

$$(114) \quad q^{n+1} = q^n - \lambda(w^n - \nabla u^n).$$

On démontre comme dans Glowinski-Marrocco [17][18] la convergence de cet algorithme pour $0 < \lambda < \frac{2}{\varepsilon}$.

Il est facile de voir à partir de (110) que la résolution de (113) est équivalente à celle des deux équations couplées :

$$(115) \quad \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \nabla u^n \nabla v_h \, d\Omega = \int_{\Omega} \left(\frac{w^n}{\varepsilon} - q^n \right) \nabla v_h \, d\Omega + \int_{\Omega} v_h \, d\Omega - \int_{\Gamma_r} f v_h \, d\Gamma \\ \nabla v_h \in V_h \end{cases}$$

$$(116) \quad \int_{\Omega} |w^n|^{p-2} w^n w_h \, d\Omega + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} (w^n - \nabla u^n) w_h \, d\Omega = \int_{\Omega} q^n w_h \, d\Omega \quad \forall w_h \in W_h .$$

On a, en fait, choisi de découpler les deux équations (115) et (116) en remplaçant dans (115) w^n par w^{n-1} . Cette variante simplifiée de l'algorithme d'Uzawa considérée dans Glowinski-Marrocco [17][18], converge sur tous les exemples au moins aussi bien que le procédé habituel, et souvent mieux. Elle s'écrit :

$$(117) \quad q^0 = (0,0) \quad w^0 = (0,0).$$

Puis pour $n \geq 0$

$$(118) \quad \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \nabla u^{n+1} \nabla u_h \, d\Omega = \int_{\Omega} \left(\frac{w^n}{\varepsilon} - q^n \right) \nabla u_h \, d\Omega + \int_{\Omega} v_h \, d\Omega - \int_{\Gamma_r} f v_h \, d\Gamma \quad \forall v_h \in V_h$$

$$(119) \quad \int_{\Omega} |w^{n+1}|^{p-2} w^{n+1} w_h \, d\Omega + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} (w^{n+1} - \nabla u^{n+1}) w_h \, d\Omega = \int_{\Omega} q^n w_h \, d\Omega \quad \forall w_h \in W_h$$

$$(120) \quad q^{n+1} = q^n - \lambda (w^{n+1} - \nabla u^{n+1});$$

(118) est un système linéaire de N équations à N inconnues (N désignant le nombre de noeuds de la triangulation). On la résoud par méthode de surrelaxation avec paramètre optimal ω_{opt} .

La résolution de (119) revient sur chaque triangle T à trouver la solution d'un système non linéaire de 2 équations à 2 inconnues. Mais on se ramène facilement à ne résoudre qu'une seule équation non linéaire : (119) est équivalente à

$$(121) \quad \begin{cases} |w^{n+1}|^{p-2} w_2 + \frac{1}{\varepsilon} w_2 = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_2} + q_2^n \\ |w^{n+1}|^{p-2} w_3 + \frac{1}{\varepsilon} w_3 = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_3} + q_3^n \end{cases}$$

en posant $w^{n+1} = (w_2, w_3)$ $q^n = (q_2^n, q_3^n)$. On déduit facilement de (120)

$$(122) \quad w_i = \frac{\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_i} + q_i^n}{|w^{n+1}|^{p-2} + \frac{1}{\varepsilon}} \quad i = 2, 3$$

d'où l'équation

$$(123) \quad \begin{cases} |w^{n+1}|^{p-1} + \frac{1}{\varepsilon} |w^{n+1}| - R(q^n, u^{n+1}) = 0 \\ R(q^n, u^{n+1}) = \left[\left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_2} + q_2^n \right)^2 + \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_3} + q_3^n \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \end{cases}$$

(123) est une équation de la forme $F(y) = 0$, où F est une fonction concave croissante. On la résout sans difficultés par la méthode de Newton. Puis les formules (122) donnent immédiatement w^{n+1} à partir du $|w^{n+1}|$ ainsi calculé.

4°) Choix des paramètres.

La résolution de (118) par méthode de surrelaxation a nécessité la détermination effective sur l'ordinateur du paramètre optimal ω_{opt} . On a utilisé la méthode décrite par Varga [21] et retenu la valeur $\omega_{opt} = 1.93$ (valeur approchée par excès).

La détermination d'un paramètre optimal pour la pénalisation ε_{opt} s'est avérée beaucoup plus délicate. On s'est contenté finalement d'une valeur moyenne assurant une convergence correcte : $\varepsilon = 0.5$.

Il reste enfin à préciser le paramètre λ de l'algorithme d'Uzawa (équation (120)). Pour assurer la convergence cette valeur doit être comprise entre 0 et $\frac{2}{\varepsilon}$. Dans la pratique, on s'est aperçu que les trop grandes valeurs de λ semblaient favoriser les oscillations sur la solution u^n . On a donc choisi λ un peu inférieur à $\frac{1}{\varepsilon}$: $\lambda = 1.9$.

5°) Tests d'arrêt.

Les tests d'arrêt sont effectués sur u_h^n . On continuera les itérations de l'algorithme d'Uzawa jusqu'à remplir la condition

$$(124) \quad T_{n+1} = \frac{\sum_{i=1}^N |u_i^{n+1} - u_i^n|}{\sum_{i=1}^N |u_i^{n+1}|} < 10^{-4},$$

u_i^n désignant la valeur de u^n au $i^{\text{ème}}$ noeud de la triangulation.

A l'intérieur de chaque itération en n , il faut résoudre le système linéaire (118) par surrelaxation et les NT équations non linéaires (123) par la méthode de Newton (NT désigne le nombre de triangles de \mathcal{T}_h).

On a choisi, pour arrêter les itérations de la méthode de relaxation un test variable, qui permet d'effectuer, aux différentes étapes de la méthode d'Uzawa, un nombre d'itérations à peu près constant dans la relaxation : on pose $u_i^{n,0} = u_i^n \quad \forall i = 1 \dots N$. A partir de $u^{n,0}$ on définit les itérés successifs de la relaxation $u^{n,k}$, et l'on arrête les itérations dès que

$$(125) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sum_{i=1}^N |u_i^{n,k+1} - u_i^{n,k}|}{\sum_{i=1}^N |u_i^{n,k+1}|} < \alpha_n \\ \text{où } \alpha_n = \min(\alpha_{n-1}, \frac{T_n}{10}) \end{array} \right.$$

Alors $u^{n+1} = u^{n,k+1}$

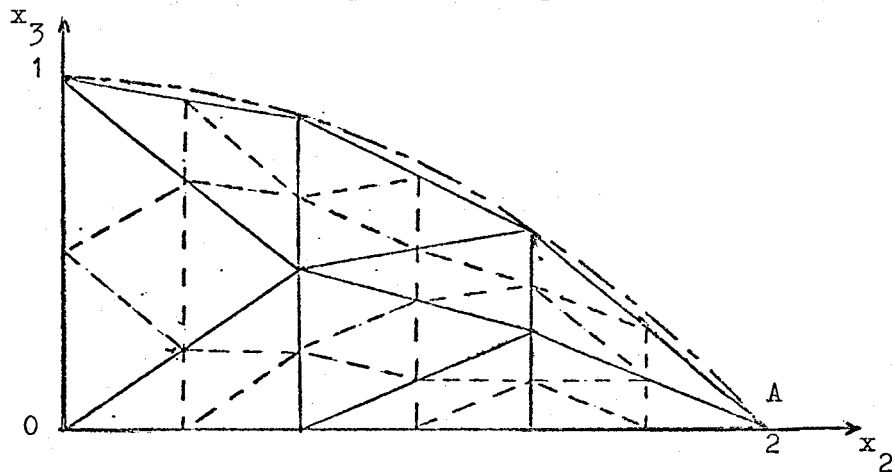
Pour la méthode de Newton appliquée à (123) on définit de même, à partir de $w_T^{n,0} = w_T^n$ les itérés successifs $w_T^{n,k}$ et l'on arrête les itérations sur chaque triangle T dès que :

$$(126) \quad \frac{w_T^{n,k+1} - w_T^{n,k}}{w_T^{n,k+1}} < 10^{-5} .$$

On pose alors $w_T^{n+1} = w_T^{n,k+1}$.

6°) Triangulation.

La triangulation se fait automatiquement à partir d'un petit nombre de triangles recouvrant Ω et assez réguliers (Marrocco-Bourgat). En prenant le milieu de chaque côté des triangle de base, le programme les divise automatiquement en 4 triangles semblables, puis en 16, en 64, etc... . Dans le cas présent la triangulation de départ est composée des 9 triangles ci-dessous :



On a dans un premier temps arrêté la division automatique à 144 triangles (87 noeuds) ; on a ainsi effectué les premiers calculs et déterminé ϵ .

Puis l'on a raffiné une nouvelle fois la triangulation et calculé les résultats définitifs avec 576 triangles (317 noeuds dont 261 intérieurs).

7°) Résultats numériques.

On a donc effectué plusieurs calculs de u , correspondant à différentes valeurs de la hauteur piezométrique H_w intervenant dans l'expression (102) du frottement. Pour la commodité des calculs, H_w a toujours été choisi comme étant l'ordonnée d'un noeud frontière. On a ainsi testé les valeurs 0.142,

0.212, 0.282. Pour obtenir les vitesses pour les autres valeurs de H_w intéressant les glaciologues, on a changé les coordonnées d'un point de la triangulation. Ces valeurs de H_w sont 0.13 (valeur théorique estimée par les glaciologues), 0.33 (valeur calculée par L. Reynaud [9]), 0.216 (valeur obtenue par nos calculs). A chacune des valeurs de H_w correspond par la formule (103) une valeur de la constante C_w .

On a d'autre part imposé, pour avoir l'unicité des solutions, une vitesse nulle au point A de coordonnées (2,0). En ce point, où s'effectue le raccord entre le lit rocheux et la surface à l'air libre, la vitesse attendue est, pour des raisons physiques, petite. En fait l'imprécision des calculs au voisinage du point A entraîne l'apparition de quelques vitesses légèrement négatives en un petit nombre de points voisins de A.

On obtient le tableau de résultats suivant :

H_w	C_w	vitesse au centre en surface ma^{-1}	vitesse au centre au fond ma^{-1}	vitesse moyenne en surface ma^{-1}	vitesse moyenne sur la section ma^{-1}	débit $lm^3 a^{-1}$	nombre d'itérations	temps machine IBM 360
0.142	7.688	162.11	159.95	114.44			39	3° 15"
0.212	3.985	54.83	48.55	37.06			27	1° 56"
0.282	2.741	30.13	21.19	19.49			23	1° 45"
0.130	9.128	221.56	220.16	157.29			45	3° 22"
0.330	2.280	22.04	11.60	13.88	14.73	3.78	22	2° 05"
0.216	3.887	52.82	46.36	35.61	41.46	10.63	30	2° 57"
valeurs expérimentales		52.		36.	41.	10.9		

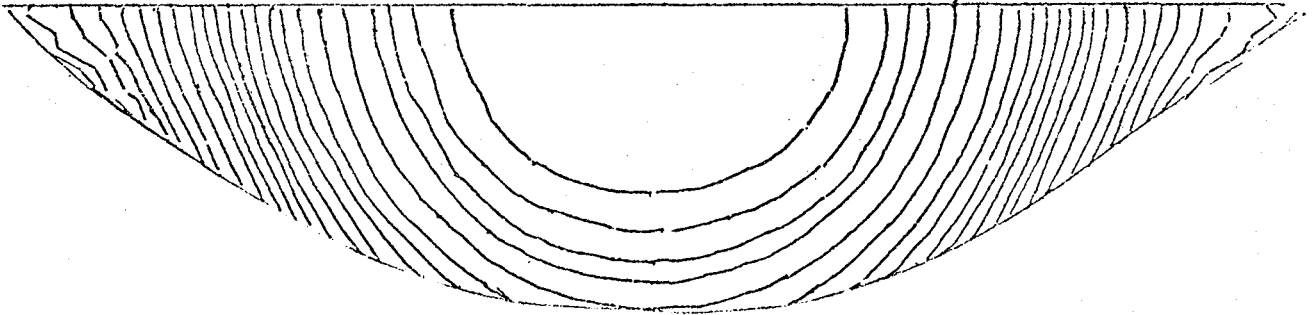
On pourrait préférer, au lieu de la condition $u(A) = 0$, imposer la vitesse au

centre en surface, ou le débit. Les valeurs obtenues ne sont pas sensiblement différentes. Par exemple, si k est une constante, en changeant u en $u+k$, le débit d devient $d + k \text{ mes } \Omega$. Si donc d est le débit calculé sous l'hypothèse $u(A) = 0$ et d_{exp} le débit mesuré, on en déduit la valeur de k : $k = \frac{d_{\text{exp}} - d}{\text{mes } \Omega}$, et le point A a alors la vitesse k . Pour la valeur $H_w = 0.216$ on trouve $d_{\text{exp}} - d = 275 \cdot 10^3 \text{ m}^3 \text{ a}^{-1}$ et comme $\text{mes } \Omega = \frac{8}{3} (310)^2 \text{ m}^2$ on obtient donc $u(A) = k = 1.07 \text{ ma}^{-1}$. Avec cette condition la valeur $H_w = 0.216$ reste une valeur acceptable. Finalement on est donc conduit à adopter la valeur $H_w = 0.216$. Les résultats obtenus sont alors convenablement ajustés avec les mesures expérimentales. Notons que cette valeur de H_w est à mi-chemin entre celle prévue initialement ($H_w = 0.13$) et celle calculée par L. Reynaud ($H_w = 0.33$) [9]. Par contre le champ de vitesses à l'intérieur coïncide bien avec les données des glaciologues.

On peut comparer les résultats calculés aux résultats expérimentaux dans le tableau ci-dessous :

	vitesse au centre en surface	vitesse moyenne en surface	vitesse moyenne de la section	débit
valeurs expérimentales	52 ma^{-1}	36 ma^{-1}	41 ma^{-1}	$10.9 \text{ hm}^3 \text{ a}^{-1}$
valeurs calculées avec $u(A) = 0$	52.82	35.61	41.46	10.63
erreur relative	$\frac{1.6}{100}$	$\frac{1.2}{100}$	$\frac{1.1}{100}$	$\frac{3}{100}$
valeurs calculées avec $u(A) = 1.07$	53.9	36.7	42.5	10.9
erreur relative	$\frac{4}{100}$	$\frac{2}{100}$	$\frac{4}{100}$	0

Nous donnons enfin les courbes d'égale vitesse à l'intérieur de la section. Leur allure est tout à fait semblable à celle des courbes obtenues par L. Reynaud [9] lors de ses essais.



En conclusion, l'on retrouve ainsi d'une manière satisfaisante les résultats expérimentaux donnés par les glaciologues. De plus l'algorithme utilisé fournit conjointement le champ des contraintes si nécessaire.

Remarque.

La méthode de pénalisation-dualité utilisée s'adapte sans difficulté au cas d'une loi de déformation polynomiale envisagée au § VI, la seule difficulté supplémentaire est de résoudre une équation algébrique du type $G(y) = 0$, avec G monotone, analogue discret de (62).

CHAPITRE 3 - PROBLEMES BIDIMENSIONNELS

Nous étudions ici le mouvement d'une nappe de glace. Nous supposons que l'écoulement se fait parallèlement à un plan vertical et que l'on peut donc se ramener à un problème plan.

I. MISE EN EQUATIONS.

1°) Position du problème.

On suppose la pente de la surface du glacier, son épaisseur, la température, la vitesse et les contraintes indépendantes de x_2 . On en déduit :

$$(1) \quad u_2 = 0$$

$$(2) \quad \sigma_{12} = \sigma_{32} = 0 \quad \sigma_{22} = \frac{1}{2} (\sigma_{11} + \sigma_{33}).$$

Le problème (1.14) relatif au champ de vitesses devient dans ce cas un problème plan :

$$(3) \quad \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_i} \left[B_{\theta,n}^{-\frac{1}{n}} \gamma(\vec{u})^{\frac{1}{n}-1} \cdot 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right] - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[B_{\theta,n}^{-\frac{1}{n}} \gamma(\vec{u})^{\frac{1}{n}-1} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \\ \quad + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho X_i \quad i \in \{1,3\} \quad j \neq i \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \end{cases}$$

avec

$$(4) \quad \gamma(\vec{u}) = \left[2 \sum_{i \in \{1,3\}} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Nous notons dans la suite $\vec{u} = (u,w)$ le champ de vitesses et (x,y,z) le repère de références fixé : l'axe Oz est vertical descendant, l'axe Ox horizontal avec $(\vec{Ox}, \vec{Oz}) = \frac{\pi}{2}$. L'écoulement se fait parallèlement au plan Oxz. L'orientation du bord de la section plane Ω du glacier est choisie pour que le vecteur unitaire de la normale $\vec{\nu}$ soit dirigé vers l'extérieur du glacier, et α désigne alors l'angle de la tangente \vec{t} avec Ox. Cette section plane Ω est supposée comprise entre les verticales Γ' et Γ'' d'équations $x = 0$ et $x = L$, et les deux courbes Γ_0 et Γ_r d'équations $z = r_0(x)$ (la surface à l'air libre) et $z = r(x)$ (le lit rocheux). Le problème posé

correspond alors à l'écoulement d'une nappe de glace dans une région limitée par deux plans verticaux. Γ_0 , Γ' et Γ'' sont connus. On cherchera éventuellement à identifier Γ_r .

2°) Conditions aux limites.

On suppose le glacier tempéré. Les conditions aux limites sont celles données au chapitre 1. Il faut donc calculer le frottement \mathcal{F} et la pression normale \mathcal{N} en fonction des vitesses et de la pression hydrostatique. On obtient les relations :

$$(5) \quad \mathcal{F} = B_n^{-\frac{1}{n}} \gamma(\vec{u}) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \sin 2\alpha - \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \cos 2\alpha \right]$$

$$(6) \quad \mathcal{N} - p = B_n^{-\frac{1}{n}} \gamma(\vec{u}) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \cos 2\alpha + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \sin 2\alpha \right].$$

La condition en surface (1.20) et la loi de Weertman (1.28) s'écrivent alors :

$$(7) \quad \mathcal{F} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0$$

$$(8) \quad \mathcal{F} = C_2 \left[\vec{u} \cdot \vec{t} \right]^{\frac{1-n}{n+1}} \vec{u} \cdot \vec{t} \quad \text{sur} \quad \Gamma_r,$$

avec C_2 constante strictement positive. Les conditions (1.22) et (1.26) restent inchangées. On écrit donc :

$$(9) \quad \vec{u} \cdot \vec{\nu} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0 \cup \Gamma_r.$$

Sur les deux bords verticaux Γ' et Γ'' on suppose avoir pu, au moyen de mesures, se donner le frottement et la pression normale. D'où les conditions :

$$(10) \quad \mathcal{F} = f \quad \text{donné sur} \quad \Gamma' \cup \Gamma''$$

$$(11) \quad \mathcal{N} = N \quad \text{donné sur} \quad \Gamma' \cup \Gamma''.$$

On peut maintenant préciser le problème des vitesses.

II. LE PROBLEME DES VITESSES.

Multiplions (3) par une fonction test $\vec{\Phi} = (\varphi, \psi)$, $\vec{\Phi} \in [\mathcal{D}(\bar{\Omega})]^2$, $\text{div} \vec{\Phi} = 0$, et intégrons par parties. Il vient :

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} B_n^{-\frac{1}{n}} \gamma(\vec{u})^{\frac{1}{n}-1} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right] d\Omega \\ - \int_{\Gamma} B_n^{-\frac{1}{n}} \gamma(\vec{u})^{\frac{1}{n}-1} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) (\varphi \cos(\nu, x) - \psi \cos(\nu, z)) + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) (\varphi \cos(\nu, z) + \psi \cos(\nu, x)) \right] d\Gamma \\ + \int_{\Gamma} p \vec{\Phi} \cdot \vec{\nu} d\Gamma = \rho \int_{\Omega} \vec{g} \cdot \vec{\Phi} d\Omega, \end{array} \right.$$

$\vec{g} = (0, g)$ désignant l'accélération de la pesanteur. On établit facilement le lemme technique :

Lemme 1.

$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $\forall \beta$

$$\begin{aligned} & a(c \sin \beta + d \cos \beta) + b(-c \cos \beta + d \sin \beta) = \\ & = (a \sin 2\beta - b \cos 2\beta)(c \cos \beta + d \sin \beta) + (a \cos 2\beta + b \sin 2\beta)(-c \sin \beta + d \cos \beta). \end{aligned}$$

Utilisant alors le lemme 1 et les égalités (5) et (6) on voit que le terme de bord peut se réécrire sous la forme :

$$\int_{\Gamma} \mathcal{F} \vec{\Phi} \cdot \vec{t} d\Gamma + \int_{\Gamma} (\mathcal{N} - p) \vec{\Phi} \cdot \vec{\nu} d\Gamma + \int_{\Gamma} p \vec{\Phi} \cdot \vec{\nu} d\Gamma.$$

La pression hydrostatique disparaît donc, et, compte tenu des conditions au bord (7) (8) (10) (11), on arrive enfin à la formulation définitive du problème des vitesses : posant comme au chapitre 2

$$(13) \quad p = 1 + \frac{1}{n} \qquad (14) \quad \pi = 1 + \frac{2}{n+1} \quad (\pi > p)$$

on se propose de

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \vec{u} \in V = \{ \vec{u} \in [W^{1,p}(\Omega)]^2, \operatorname{div} \vec{u} = 0, \vec{u} \cdot \vec{\nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \cup \Gamma_r \} \\ \text{solution de :} \\ B_n^{1-p} \int_{\Omega} |\vec{\gamma}(\vec{u})|^{p-2} \vec{\gamma}(\vec{u}) \cdot \vec{\gamma}(\vec{\Phi}) d\Omega + c_2 \int_{\Gamma_r} |\vec{u}|^{\pi-2} \vec{u} \cdot \vec{\Phi} d\Gamma = \\ \rho \int_{\Omega} \vec{g} \cdot \vec{\Phi} d\Omega - \int_{\Gamma' \cup \Gamma''} f \vec{\Phi} \cdot \vec{t} d\Gamma - \int_{\Gamma' \cup \Gamma''} N \vec{\Phi} \cdot \vec{\nu} d\Gamma \quad \forall \vec{\Phi} \in V \end{array} \right.$$

$$(16) \quad \vec{\gamma}(\vec{u}) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right).$$

Remarque.

Comme nous l'avons déjà remarqué au chapitre 2 § III, (Remarque 1), il résulte du théorème de Sobolev que si p et π sont donnés respectivement

par (13) et (14)

$$W^{\frac{1}{p'}, p}(\Gamma) \xrightarrow{\text{compacte}} L^{\pi}(\Gamma) \quad \forall n \quad 1 \leq n < +\infty$$

de sorte que l'intégrale $\int_{\Gamma} |\vec{u}|^{\pi-2} \vec{u} \vec{\Phi} d\Gamma$ est bien définie pour \vec{u} et $\Phi \in [W^{1, p}(\Omega)]^2$.

Comme au chapitre 2, on va tout d'abord montrer que, pour $\vec{u} \in V$, les conditions aux limites (7) (8) (10) (11) ont un sens. Pour cela on doit établir les lemmes suivants:

Lemme 2.

Si Ω est un ouvert borné, lipschitzien, alors $\forall q$ avec $1 < q < +\infty$,

$C^1(\bar{\Omega})$ est dense dans

$$(17) \quad H^q(\gamma^*, \Omega) = \{v \in [L^q(\Omega)]^2 ; \gamma^* v \in [L^q(\Omega)]^2\},$$

$$(18) \quad \gamma^* = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}$$

muni de la norme du graphe.

Démonstration. On adapte sans difficulté la démonstration du lemme 4.1 p. 335 de Duvaut-Lions [7].

Lemme 3.

Pour tout $v \in H^q(\gamma^*, \Omega)$ on peut définir une trace unique $\mathcal{C}v \in [W^{\frac{1}{q}, q}(\Gamma)]^2$,

$2 < q < +\infty$, par

$$(19) \quad \langle \mathcal{C}v, \Phi/\Gamma \rangle = \int_{\Omega} \vec{\gamma}^* v \cdot \vec{\Phi} d\Omega + \int_{\Omega} \vec{v} \cdot \vec{\gamma} \Phi d\Omega \quad \forall \Phi \in [W^{1, q}(\Omega)]^2$$

l'application \mathcal{C} étant linéaire continue dans les espaces indiqués.

De plus si $\vec{v} \in [C^1(\bar{\Omega})]^2$, $\mathcal{C}\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{\nu}, \vec{v} \cdot \vec{t})$.

Démonstration. Il suffit de reprendre la démonstration du lemme 2.1.

L'unicité de la trace résulte du lemme de densité ci-dessus.

Lemme 4.

Toute solution $(\vec{u}, p) \in [W^{1, p}(\Omega)]^2 \times W^{1, p'}(\Omega)$ du problème (3) (4) (7) (8) (9) (10) (11) est solution du problème (15).

Démonstration. Si $\vec{u} \in [W^{1,p}(\Omega)]^2$ alors

$$(20) \quad v = |\gamma(u)|^{p-2} \gamma(u) \in [L^{p'}(\Omega)]^2$$

avec $p' = \frac{p}{p-1}$, de sorte que (3) peut s'écrire, ($p' > 2$)

$$(21) \quad -\gamma^*(v) + \vec{\nabla} p = \rho \vec{g}.$$

Si $p \in W^{1,p'}(\Omega)$ il en résulte que $v \in H^{p'}(\gamma^*, \Omega)$ et les lemmes 3 et 2.1 permettent de justifier les intégrations par parties pour obtenir (15).

Réciproquement si \vec{u} est solution de (15) on peut écrire (15) avec

$$\vec{\Phi} \in \mathcal{V} = \{\Phi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^2; \operatorname{div} \vec{\Phi} = 0\} \text{ et obtenir :}$$

$$(22) \quad \langle \gamma^*(v) + \rho \vec{g}, \Phi \rangle = 0 \quad \forall \Phi \in \mathcal{V}$$

cù $\gamma^*(v)$ est défini par (20) et (18). Il en résulte que :

$$(23) \quad \gamma^*(v) + \rho \vec{g} = -\vec{\nabla} p \quad \text{avec } p \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

Si $u \in [W^{1,p}(\Omega)]^2$, sans régularité supplémentaire, $\gamma^*(v)$ n'est pas dans $[L^{p'}(\Omega)]^2$, de sorte que (23) n'entraîne pas l'appartenance de $\vec{\nabla} p$ à

$[L^{p'}(\Omega)]^2$. Il nous manque donc l'information " $p \in W^{1,p'}(\Omega)$ " pour pouvoir justifier, autrement que formellement, les conditions aux limites (7) (8) (10) (11).

On peut, comme au chapitre 2, calculer l'énergie potentielle totale du système.

On obtient :

$$(24) \quad \begin{cases} \mathcal{E}(\vec{u}) = \frac{R^{1-p}}{p} \int_{\Omega} \left| \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right|^{\frac{p}{2}} d\Omega \\ + \frac{c_2}{\pi} \int_{\Gamma_r} |\vec{u}|^{\pi} d\Gamma - \rho \int_{\Omega} \vec{g} \cdot \vec{u} d\Omega + \int_{\Gamma' \cup \Gamma''} (f \vec{u} \cdot \vec{t} + N \vec{u} \cdot \vec{v}) d\Gamma. \end{cases}$$

Le 1^{er} théorème de l'énergie potentielle s'énonce alors :

THEOREME 1.

Si Ω est borné et sa frontière de classe C^2 par morceaux, si f et N sont donnés dans $W^{-\frac{1}{p'}, p'}(\Gamma_r)$, résoudre le problème des vitesses (15) revient à minimiser sur \mathcal{V} l'énergie potentielle totale du système (24).

THEOREME 2.

Si Ω est un ouvert borné dont la frontière, de classe C^2 par morceaux, a pour seules singularités des "coins" d'angle inférieur à $\inf(\frac{\pi}{2} p, \pi)$, le problème des vitesses (15) possède une solution $\vec{u} \in V$.

Démonstration. On va montrer l'existence d'une solution pour le problème de minimisation de (24). Or $\xi(\vec{u})$ est à l'évidence une fonctionnelle convexe et continue sur $[W^{1,p}(\Omega)]^2$; V est de plus un convexe fermé et non vide de $[W^{1,p}(\Omega)]^2$. Il suffit donc d'établir la coercivité de ξ pour assurer l'existence d'une solution. Cela se démontre au moyen d'une inégalité de Korn dans les espaces $L^p(\Omega)$ et fait l'objet des lemmes ci-après.

Lemme 5.

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^m ($m \leq 3$) de frontière de classe C^2 . Pour tout $\ell \in L^{q'}(\Omega)$, $1 < q' < +\infty$, il existe $h = (h_0, h_1, \dots, h_m) \in [W_0^{1,q'}(\Omega)]^{m+1}$ et une constante $C(\Omega)$ ne dépendant que de Ω telles que :

$$(25) \quad \ell = h_0 - \sum_{i=1}^m \frac{\partial h_i}{\partial x_i}$$

$$(26) \quad \|h\|_{[W_0^{1,q'}(\Omega)]^{m+1}} \leq C(\Omega) \|\ell\|_{L^{q'}(\Omega)}$$

Si $m = 2$ le résultat est encore valable lorsque la frontière de Ω est de classe C^2 par morceaux sans posséder d'autres singularités que des coins d'angle inférieur à $\inf(\frac{\pi}{2} q, \pi)$, où $q = \frac{q'}{q'-1}$.

Démonstration. Soit $\ell \in L^{q'}(\Omega)$ et $\{\varphi_n\}$ une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\varphi_n \rightarrow \ell$ $L^{q'}(\Omega)$.

Soit Φ_0 une fonction fixée de $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\int_{\Omega} \Phi_0(x) dx = 1$. Alors φ_n se décompose sous la forme :

$$(27) \quad \begin{cases} \varphi_n = \lambda_n \Phi_0 - \chi_n \\ \lambda_n = \int_{\Omega} \varphi_n(x) dx \\ \chi_n \in \mathcal{E}(\Omega) \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} \chi_n(x) dx = 0. \end{cases}$$

Lorsque la frontière de Ω est de classe C^2 on sait construire, au moins en

dimension inférieure ou égale à 3, une suite de vecteurs g_n vérifiant :

$$(28) \quad \begin{cases} g_n \in [W_0^{1,q'}(\Omega)]^m, & \operatorname{div} g_n = \chi_n \\ \|g_n\|_{[W_0^{1,q'}(\Omega)]^m} \leq C(\Omega) \|\chi_n\|_{L^{q'}(\Omega)} \end{cases}$$

(cf. par exemple TEMAM [10] et la bibliographie de ce travail) et

$$(29) \quad \varphi_n = \lambda_n \Phi_0 - \operatorname{div} g_n .$$

On déduit facilement de (27), (28) et de la convergence de φ_n dans $L^{q'}(\Omega)$, que $\lambda_n \Phi_0$ (resp. g_n) est une suite de Cauchy dans $W_0^{1,q'}(\Omega)$ (resp. $[W_0^{1,q'}(\Omega)]^m$) et que :

$$(30) \quad \begin{cases} \|\lambda_n \Phi_0\|_{W_0^{1,q'}(\Omega)} \leq C' \|\varphi_n\|_{L^{q'}(\Omega)} \\ \|g_n\|_{[W_0^{1,q'}(\Omega)]^m} \leq C'' \|\varphi_n\|_{L^{q'}(\Omega)} \end{cases}$$

où C' et C'' ne dépendent que de Ω (et de la fonction fixe Φ_0 choisie).

Par passage à la limite dans (29) et (30) on obtient ainsi les résultats (25) et (26) dans le cas Ω régulier. Lorsque la frontière possède des "coins", la difficulté réside dans la construction de g_n vérifiant (28). En dimension 2 ceci se ramène classiquement au problème de la régularité $W^{2,q'}(\Omega)$ d'un problème de Neuman, et d'un problème biharmonique.

On construit tout d'abord $a_n \in [W^{1,q'}(\Omega)]^2$ vérifiant $\operatorname{div} a_n = \chi_n$ comme gradient de la solution θ_n du problème de Neuman. :

$$\begin{cases} \Delta \theta_n = \chi_n \\ \frac{\partial \theta_n}{\partial \nu} / \Gamma = 0 . \end{cases}$$

La condition nécessaire $\theta \in W^{2,q'}(\Omega)$ implique sur les angles φ des coins de Ω la condition $\varphi \leq \frac{\pi}{2} q$ (cf. Mériqot [22]).

Puis on construit $b_n \in [W^{1,q'}(\Omega)]^2$ vérifiant $\operatorname{div} b_n = 0$ comme rotationnel d'une fonction de courant ψ_n solution du problème biharmonique :

$$\begin{cases} \Delta^2 \psi_n = 0 \\ \psi_n / \Gamma = 0 \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial \nu} / \Gamma = -\vec{a}_n \cdot \vec{\tau} / \Gamma \end{cases} \quad \vec{\tau} \text{ vecteur unitaire tangent à } \Gamma .$$

Et, pour avoir ϕ_n dans $[W^{2,q}(\Omega)]^2$, il suffit de vérifier la condition $\varphi \leq \pi$ ([22]). Alors $g_n = a_n + b_n$ est solution de (28).

Ceci achève la démonstration du lemme 5.

Lemme 6.

Sous les hypothèses du lemme 5 l'espace $X = \{u \in W^{-1,q}(\Omega) ; \vec{\nabla} u \in [W^{-1,q}(\Omega)]^m\}$ muni de la norme du graphe coïncide avec $L^q(\Omega)$ algébriquement et topologiquement.

Démonstration. On sait que $L^q(\Omega) \hookrightarrow X$ avec injection continue.

Soit $\ell \in L^{q'}(\Omega)$, $q' = \frac{q}{q-1}$. On lui associe par le lemme 5 une décomposition

$$(31) \quad \ell = \ell_0 - \operatorname{div} h$$

où $(\ell_0, h) \in [W_0^{1,q'}(\Omega)]^{m+1}$ vérifie l'inégalité (26). On pose pour u fixé dans X

$$(32) \quad \varphi_u(\ell) = \langle h, \nabla u \rangle + \langle \ell_0, u \rangle$$

i) $\varphi_u(\ell)$ ne dépend que de ℓ et non de la décomposition (31) choisie pour ℓ .

En effet si l'on considère deux décompositions de ℓ , leur différence vérifie $(\ell_0 - \operatorname{div} h) = 0$, de sorte que $\operatorname{div} h \in W_0^{1,q'}(\Omega)$ (et $h \in [W_0^{1,q'}(\Omega)]^m$). On en déduit alors par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W_0^{1,q'}(\Omega)$ que

$$\langle h, \nabla u \rangle = - \langle \operatorname{div} h, u \rangle \quad \text{ce qui entraîne}$$

$$\langle h, \nabla u \rangle + \langle \ell_0, u \rangle = 0 \quad \text{d'où le résultat.}$$

ii) Il résulte de la définition (32) que

$$|\varphi_u(\ell)| \leq \|h\|_{[W_0^{1,q'}(\Omega)]^m} \|\nabla u\|_{[W^{-1,q}(\Omega)]^m} + \|\ell_0\|_{W_0^{1,q'}(\Omega)} \|u\|_{W^{-1,q}(\Omega)}$$

et d'après l'inégalité (26) on a donc

$$(33) \quad |\varphi_u(\ell)| \leq C \|u\|_X \|\ell\|_{L^{q'}(\Omega)}$$

où C ne dépend que de Ω .

La linéarité de φ_u se déduisant immédiatement de (32) et du i),

(33) entraîne donc que φ_u est une forme linéaire continue sur $L^{q'}(\Omega)$, i.e.

$$(34) \quad \varphi_u \in L^q(\Omega).$$

iii) Si $u \in L^q(\Omega)$ alors $\varphi_u = u$.

En effet si $l \in \mathcal{D}(\Omega)$ une décomposition (31) possible est $l_0 = l$ et $h = 0$. (32) s'écrit alors :

$$\langle \varphi_u - u, l \rangle = 0 \quad \forall l \in \mathcal{D}(\Omega),$$

ce qui démontre le résultat.

iv) On note φ l'application de X dans $L^q(\Omega)$: $u \mapsto \varphi_u$.

Il résulte de (33) que φ est linéaire continue de X dans $L^q(\Omega)$,

et iii) montre que φ est surjective ; φ est de plus injective car si $\varphi_u = 0$ il suffit d'écrire (32) avec $l = l_0 \in W_0^{1,q'}(\Omega)$ pour en déduire que $u=0$. L'application φ est donc un isomorphisme d'après le théorème du graphe fermé.

Le lemme 6 est donc démontré.

Lemme 7.

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 dont la frontière, de classe C^2 par morceaux, a pour seules singularités des "coins" d'angle inférieur à $\inf(\frac{\pi}{2} p, \pi)$. On pose :

$$(35) \quad \chi = \{u \in [L^p(\Omega)]^2 ; \gamma(u) \in [L^p(\Omega)]^2, \operatorname{div} u \in L^p(\Omega)\}$$

$$(36) \quad \|v\|_{\chi}^p = \|u\|_{[L^p(\Omega)]^2}^p + \|\gamma(u)\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\operatorname{div} u\|_{L^p(\Omega)}^p.$$

Alors $\chi = W^{1,p}(\Omega)$ algébriquement et topologiquement.

Démonstration. χ est évidemment un espace de Banach pour la norme (36)

et il est évident que

$$(37) \quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \chi \quad \text{avec injection continue.}$$

Soit maintenant $u \in \chi$; u étant dans $[L^p(\Omega)]^2$, toutes les dérivées premières de ses composantes sont dans $W^{-1,p}(\Omega)$ (mais on ne peut pas déduire directement de $\gamma(u) \in [L^p(\Omega)]^2$ et $\operatorname{div} u \in L^p(\Omega)$ qu'elles sont toutes dans $L^p(\Omega)$).

On voit facilement de plus que toutes les dérivées secondes de u sont dans $W^{-1,p}(\Omega)$. Appliquant alors le lemme 6 aux dérivées premières de u , on en déduit qu'elles sont dans $L^p(\Omega)$ ce qui prouve l'égalité algébrique $\chi = W^{1,p}(\Omega)$.

Le théorème du graphe fermé permet une fois encore, avec (37), de conclure à l'égalité topologique.

Lemme 8.

On note $V_{\text{div}} = \{u \in [W^{1,p}(\Omega)]^2 ; \text{div } u = 0\}$. Si $u \in V_{\text{div}}$, il existe une constante C ne dépendant que de Ω telle que

$$(38) \quad \int_{\Omega} |\gamma(u)|^p \, d\Omega + \int_{\Omega} |u|^p \, d\Omega \geq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p .$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du lemme 7.

Lemme 9.

On définit l'ensemble \mathfrak{R} des déplacements rigides par

$$(39) \quad \mathfrak{R} = \{v ; v = (az+b, -ax+c) \quad a, b, c \in \mathbb{R}\} .$$

Alors si $u \in V_{\text{div}}$ on a :

$$(40) \quad |\gamma(u)| = 0 \text{ pp} \iff u \in \mathfrak{R} .$$

Démonstration. Les égalités $|\gamma(u)| = 0$ et $\text{div } u = 0$ pp entraînent $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ donc $u = \theta_1(z)$ et $w = \theta_2(x)$. De plus $\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$. En conséquence $\theta_1'(z) = -\theta_2'(x) = a \in \mathbb{R}$. D'où le résultat.

Lemme 10.

Soit S une partie de classe C^2 de $\partial\Omega$, de mesure strictement positive.

Il existe une constante $\alpha > 0$ telle que pour tout $u \in [W^{1,p}(\Omega)]^2$

$$(41) \quad \int_{\Omega} |\gamma(\vec{u})|^p \, d\Omega + \int_{\Omega} |\text{div } \vec{u}|^p \, d\Omega + \int_S |\vec{u}|^{\pi} \, d\Gamma \geq \alpha \inf(1, \|\vec{u}\|_{[L^p(\Omega)]^2}^{\pi-p}) \|\vec{u}\|_{[L^p(\Omega)]^2}^p$$

Démonstration. Si $\|\vec{u}\|_{[L^p(\Omega)]^2} = 0$, l'inégalité est évidente.

Sinon remplaçant \vec{u} par $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|_{[L^p(\Omega)]^2}} = \vec{w}$ on est conduit à distinguer les cas

$\|\vec{u}\|_{[L^p(\Omega)]^2} \leq 1$ et $\|\vec{u}\|_{[L^p(\Omega)]^2} \geq 1$. Rappelons que $\pi > p$.

i) Lorsque $\|\vec{u}\|_{[L^p(\Omega)]^2} \geq 1$, on divise (41) par $\|\vec{u}\|_{[L^p(\Omega)]^2}^p$ et on minore $\|\vec{u}\|_{[L^p(\Omega)]^2}^{\pi-p}$ par 1. On est alors ramené à montrer qu'il existe une

constante $\alpha_1 > 0$ telle que :

$$(42) \quad \int_{\Omega} |\gamma(\vec{w})|^p d\Omega + \int_{\Omega} |\operatorname{div} \vec{w}|^p d\Omega + \int_S |\vec{w}|^{\pi} d\Gamma \geq \alpha_1 > 0$$

$$\forall \vec{w} \in [W^{1,p}(\Omega)]^2, \quad \|\vec{w}\|_{[L^p(\Omega)]^2} = 1.$$

On raisonne par l'absurde : sinon il existe une suite

$$\{\vec{w}_m\} \in [W^{1,p}(\Omega)]^2; \quad \|\vec{w}_m\|_{[L^p(\Omega)]^2} = 1, \text{ telle que :}$$

$$(43) \quad \int_{\Omega} |\gamma(\vec{w}_m)|^p d\Omega + \int_{\Omega} |\operatorname{div} \vec{w}_m|^p d\Omega + \int_S |\vec{w}_m|^{\pi} d\Gamma \rightarrow 0.$$

Par le lemme 7 ceci entraîne

$$\|\vec{w}_m\|_{[W^{1,p}(\Omega)]^2} \leq \text{Constante},$$

donc il existe une sous-suite $\{\vec{w}_{m'}\}$ telle que

$$\vec{w}_{m'} \rightarrow w \text{ dans } [W^{1,p}(\Omega)]^2 \text{ faible et } [L^p(\Omega)]^2 \text{ fort,}$$

$$\text{et} \quad \vec{w}_{m'}/S \rightarrow w/S \text{ dans } [L^{\pi}(S)]^2 \text{ fort}$$

par compacité de l'injection de $W^{\frac{1}{p},p}(S)$ dans $L^{\pi}(S)$.

De la propriété (43) on déduit par passage à la lim inf que

$$|\gamma(\vec{w})| = 0, \quad \operatorname{div} w = 0 \quad \text{et} \quad w/S = 0.$$

Donc $\vec{w} \in V_{\operatorname{div}}$, $\vec{w} \in \mathfrak{R}$ par le lemme 9, et $w/S = 0$. Or on voit facilement

sur la définition (39) que tout élément de \mathfrak{R} s'annulant sur une partie du

bord de mesure non nulle ne peut être qu'identiquement nul. Il en résulte donc

que $\vec{w} = 0$. Et ceci est incompatible avec les résultats connus sur la suite $\vec{w}_{m'}$,

$$\|\vec{w}_{m'}\|_{[L^p(\Omega)]^2} = 1 \quad \text{et} \quad \vec{w}_{m'} \rightarrow w \quad [L^p(\Omega)]^2 \text{ fort.}$$

On a donc montré l'existence d'une constante $\alpha_1 > 0$ telle que

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall u \in [W^{1,p}(\Omega)]^2 \text{ avec } \|\vec{u}\|_{[L^p(\Omega)]^2} \geq 1 \\ \int_{\Omega} |\gamma(u)|^p d\Omega + \int_{\Omega} |\operatorname{div} u|^p d\Omega + \int_S |u|^{\pi} d\Gamma \geq \alpha_1 \|u\|_{[L^p(\Omega)]^2}^p. \end{array} \right.$$

ii) Examinons maintenant le cas $\|\vec{u}\|_{[L^p(\Omega)]^2} \leq 1$ $\vec{u} \neq 0$.

Démontrer (41) dans ce cas revient, en divisant par $\|\vec{u}\|_{[L^p(\Omega)]^2}^{\pi}$ à

montrer qu'il existe une constante $\alpha_2 > 0$ telle que

$$\int_{\Omega} |\gamma(\vec{w})|^p d\Omega + \int_{\Omega} |\operatorname{div} \vec{w}|^p d\Omega + \int_S |\vec{w}|^{\pi} d\Gamma \geq \alpha_2 > 0$$

$$\forall \vec{w} \in [W^{1,p}(\Omega)]^2 \text{ avec } \|\vec{w}\|_{[L^p(\Omega)]^2} = 1 .$$

On est ramené au cas i) et on établit donc le résultat :

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{] une constante } \alpha_2 > 0 \text{ telle que} \\ \forall \vec{u} \in [W^{1,p}(\Omega)]^2 \text{ avec } \|\vec{u}\|_{[L^p(\Omega)]^2} \leq 1 \\ \int_{\Omega} |\gamma(u)|^p d\Omega + \int_{\Omega} |\operatorname{div} u|^p d\Omega + \int_S |u|^{\pi} d\Gamma \geq \alpha_2 \|\vec{u}\|_{[L^p(\Omega)]^2}^{\pi} \end{array} \right.$$

(41) résulte alors de (44) et (45) avec $\alpha = \inf(\alpha_1, \alpha_2)$.

Lemme 11. (coercivité de $\mathcal{E}(\vec{u})$).

Il existe une constante $\beta > 0$ telle que, pour tout \vec{u} dans $[W^{1,p}(\Omega)]^2$

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} |\gamma(\vec{u})|^p d\Omega + \int_{\Omega} |\operatorname{div} \vec{u}|^p d\Omega + \int_{\Gamma_r} |\vec{u}|^{\pi} d\Gamma \geq \\ \geq \beta [\inf(\|\vec{u}\|_{[L^p(\Omega)]^2}^p, \|\vec{u}\|_{[L^p(\Omega)]^2}^{\pi}) + \|\vec{\nabla} \vec{u}\|_{[L^p(\Omega)]^4}^p] . \end{array} \right.$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des lemmes 10 et 7.

(On a noté $\|\vec{\nabla} \vec{u}\|_{[L^p(\Omega)]^4}^p$ la somme des normes dans $L^p(\Omega)$ des dérivées premières des deux composantes de \vec{u}).

On établit ainsi la coercivité de $\mathcal{E}(\vec{u})$ ce qui termine la démonstration du théorème 2.

THEOREME 3. (Unicité)

Il existe u, unique minimisant sur V l'énergie potentielle (24).

Démonstration. Posons

$$(47) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_1(\vec{u}) = \frac{B_n^{1-p}}{p} \int_{\Omega} |\gamma(\vec{u})|^p d\Omega \\ \mathcal{E}_2(\vec{u}) = \frac{C_2}{\pi} \int_{\Gamma_r} |\vec{u}|^{\pi} d\Gamma . \end{array} \right.$$

Alors $\mathcal{E}(\vec{u}) = \mathcal{E}_1(\vec{u}) + \mathcal{E}_2(\vec{u}) + \mathcal{L}(\vec{u})$ où \mathcal{L} est une fonction linéaire de \vec{u} .

\mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 étant deux fonctions convexes, \mathcal{E} est une fonction convexe. Pour démontrer l'unicité il suffit de montrer que \mathcal{E} est strictement convexe. Or

$$(48) \quad \xi_1((1-\theta)u + \theta v) \leq (1-\theta) \xi_1(u) + \theta \xi_1(v)$$

avec égalité si et seulement si $\vec{\gamma}(\vec{u}) = \vec{\gamma}(\vec{v})$

$$(49) \quad \xi_2((1-\theta)u + \theta v) \leq (1-\theta) \xi_2(u) + \theta \xi_2(v)$$

avec égalité si et seulement si $\vec{u}/\Gamma_R = \vec{v}/\Gamma_R$ pp.

L'égalité dans l'inéquation

$$\xi((1-\theta)u + \theta v) \leq (1-\theta) \xi(u) + \theta \xi(v)$$

pourra être obtenue si et seulement si il y a égalité à la fois dans (48)

et (49). Or on déduit de (48) d'après le lemme 9 que $(\vec{u} - \vec{v}) \in \mathcal{R}$, et avec

$(\vec{u} - \vec{v}) = 0$ pp sur Γ_R ceci entraîne, comme on l'a déjà vu, $(\vec{u} - \vec{v}) = 0$ pp

dans Ω . ξ est donc strictement convexe.

Remarques :

Les conditions aux limites $\vec{u} \cdot \vec{\nu} = 0$ sur Γ_0 et Γ_R n'ont joué aucun rôle dans la démonstration d'existence et d'unicité. Ceci permet par exemple de traiter le cas où l'épaisseur du glacier est variable et où l'on n'a donc plus $\vec{u} \cdot \vec{\nu} = 0$ sur Γ_0 .

Les conditions aux limites imposées sur Γ' et Γ'' peuvent de même être remplacées par la mesure de la vitesse sur les deux sections.

On pourrait, enfin, étudier comme au chapitre 2, le même problème en remplaçant la loi de frottement de Weertman (1.28) par la loi de Coulomb (1.27). On obtiendrait une solution dans les mêmes espaces, définie à une constante additive près, si les données sur $\Gamma_0 \cup \Gamma' \cup \Gamma''$ portent toutes sur le frottement et la pression normale, ou unique si l'on se donne la vitesse sur une partie du bord.

La borne à imposer sur les angles des coins de la frontière n'est pas gênante dans les applications : par exemple dans le cas usuel $p = \frac{4}{3}$ la limite trouvée est $\frac{2\pi}{3}$, ce qui suffit en pratique puisqu'on dispose du libre choix des coupures arbitraires Γ' et Γ'' effectuées dans la nappe de glace, et que, bien sûr, la nappe s'écoule "dans le sens de la pente".

III. DUALISATION DU MODELE DE LA VITESSE. ETUDE DES CONTRAINTES.

On se place à nouveau dans le cadre rappelé au chapitre 2 § IV.

Le problème des vitesses "Minimiser sur V l'énergie potentielle (24)" (problème primal) peut se réécrire sous la forme :

$$(P) \quad \text{Inf}_{u \in [W^{1,p}(\Omega)]^2} \{F(u) + G_1(\Lambda_1 u) + G_2(\Lambda_2 u)\} \quad \text{avec}$$

$$(50) \quad F(u) = -\rho \int_{\Omega} \vec{g} \cdot \vec{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma' \cup \Gamma''} \vec{h} \cdot \vec{u} \, d\Gamma + \chi_V$$

où χ_V est la fonction indicatrice du sous-espace V de $[W^{1,p}(\Omega)]^2$ et

$$(51) \quad \vec{h} = f \vec{t} + N \vec{v}$$

$$(52) \quad \Lambda_1 = \gamma = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$(53) \quad \Lambda_2 = \text{opérateur de trace sur } \Gamma_r \quad \Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2)$$

$$(54) \quad Y_1 = [L^p(\Omega)]^2 \quad Y_2 = [L^\pi(\Gamma_r)]^2 \quad Y = Y_1 \times Y_2$$

$$(55) \quad G_1(\vec{\Phi}_1) = \frac{B_n^{1-p}}{p} \int_{\Omega} |\vec{\Phi}_1|^p \, d\Omega$$

$$(56) \quad G_2(\vec{\Phi}_2) = \frac{C_2}{\pi} \int_{\Gamma_r} |\vec{\Phi}_2|^\pi \, d\Gamma.$$

Avec ces notations

$$F^*(\Lambda^* \vec{\Phi}^*) = \sup_{\vec{u} \in V} \{ \langle \Lambda_1^* \vec{\Phi}_1^* + \rho \vec{g}, \vec{u} \rangle + \int_{\Gamma_r} \vec{\Phi}_2^* \cdot \vec{u} \, d\Gamma - \int_{\Gamma' \cup \Gamma''} \vec{h} \cdot \vec{u} \, d\Gamma \}$$

donc en notant (\mathcal{H}) la condition

$$(\mathcal{H}) \quad \langle \Lambda_1^* \vec{\Phi}_1^* + \rho \vec{g}, \vec{u} \rangle + \int_{\Gamma_r} \vec{\Phi}_2^* \cdot \vec{u} \, d\Gamma - \int_{\Gamma' \cup \Gamma''} \vec{h} \cdot \vec{u} \, d\Gamma = 0 \quad \forall \vec{u} \in V,$$

il vient :

$$(57) \quad F^*(\Lambda^* \vec{\Phi}^*) = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{\Phi}^* \text{ vérifie } (\mathcal{H}) \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$(58) \quad G_1^*(\vec{\Phi}_1^*) = \frac{B_n}{p'} \int_{\Omega} |\vec{\Phi}_1^*|^{p'} \, d\Omega \quad p' = \frac{p}{p-1}$$

$$(59) \quad C_2^*(\Phi_2^*) = \frac{C_2^*}{\pi^1} \int_{\Gamma_R} |\Phi_2^*|^{\pi^1} d\Gamma \quad \pi^1 = \frac{\pi}{\pi-1} \quad C_2^* = (C_2) \frac{1}{\pi-1}.$$

Le problème dual du problème (P) s'écrit alors

$$(P^*) \quad \sup_{\substack{\Phi_1^* \in [L^{p^1}(\Omega)]^2 \\ \Phi_2^* \in [L^{\pi^1}(\Gamma_R)]^2 \\ -(\Phi_1^*, \Phi_2^*) \in (\mathcal{K})}} \left[-\frac{B_n}{p^1} \int_{\Omega} |\vec{\Phi}_1^*|^{p^1} d\Omega - \frac{(C_2)}{\pi^1} \int_{\Gamma_R} |\Phi_2^*|^{\pi^1} d\Gamma \right].$$

Il reste maintenant à préciser la signification de l'hypothèse (K). On peut réécrire (K) sous la forme :

$$(60) \quad \int_{\Omega} \vec{\Phi}_1^* \cdot \vec{\gamma}(\vec{u}) d\Omega + \int_{\Omega} \rho \vec{g} \cdot \vec{u} d\Omega + \int_{\Gamma_R} \vec{u} \cdot \vec{\Phi}_2^* d\Gamma - \int_{\Gamma' \cup \Gamma''} \vec{h} \cdot \vec{u} d\Gamma = 0 \quad \forall \vec{u} \in V.$$

Si l'on prend dans (60) $\vec{u} \in \mathcal{V} = \{\vec{v} \in [\mathcal{D}(\Omega)]^2; \text{div } \vec{v} = 0\}$ on en déduit comme au lemme 4 qu'il existe une distribution $p_0 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que

$$(61) \quad \gamma^*(\vec{\Phi}_1^*) + \rho \vec{g} = -\vec{\nabla} p_0$$

où γ^* est défini par (18).

$\vec{\Phi}_1^*$ vérifie donc les équations générales de l'équilibre (1.1) écrites au début du chapitre 1.

Pour retrouver les conditions de frottement et de pression normale au bord, la situation est analogue à celle du lemme 4 : il faut, pour pouvoir justifier les intégrations par parties, savoir que $\vec{\Phi}_1^*$ appartient à l'espace $H^{p^1}(\gamma^*, \Omega)$ défini en (17) ; ce qui est vrai si l'on peut déduire de (60) un résultat de "régularité" supplémentaire sur p_0 : $p_0 \in W^{1,p^1}(\Omega)$.

THEOREME 4.

Le problème dual (P*) admet une solution unique

$$\vec{\Phi}^* = (\vec{\Phi}_1^*, \vec{\Phi}_2^*) \in [L^{p^1}(\Omega)]^2 \times [L^{\pi^1}(\Gamma_R)]^2.$$

Démonstration. On vérifie facilement sur le problème primal (P) les conditions suffisantes rappelées au chapitre 2 § IV, (b).

THEOREME 5.

Si $\vec{\Phi}^* = (\vec{\Phi}_1^*, \vec{\Phi}_2^*)$ désigne la solution du problème dual (P*), alors $\vec{\Phi}_1^*$ représente le champ des contraintes et $\vec{\Phi}_2^*$ le frottement sur le lit rocheux.

Démonstration. On va écrire les relations d'extrémalité liant $\vec{\Phi}^*$ à la solution \vec{u} du problème primal (problème des vitesses) :

$$G_i(\Lambda_i u) + G_i^*(\Phi_i^*) = \langle \Phi_i^*, \Lambda_i u \rangle \quad \forall i = 1, 2.$$

Pour $i = 1$ on obtient

$$\frac{B_n^{1-p}}{p} \int_{\Omega} |\vec{\gamma}(u)|^p d\Omega + \frac{B_n}{p'} \int_{\Omega} |\vec{\Phi}_1^*|^{p'} d\Omega = \int_{\Omega} \vec{\gamma}(u) \cdot \vec{\Phi}_1^* d\Omega$$

qui n'est autre que la loi de fluage non linéaire de Glen :

$$(62) \quad \vec{\Phi}_1^* = B_n^{1-p} |\vec{\gamma}(u)|^{p-2} \vec{\gamma}(u) \quad \text{dans } \Omega.$$

Pour $i = 2$ la relation d'extrémalité :

$$\frac{C_2}{\pi} \int_{\Gamma_r} |\vec{u}|^{\pi} d\Gamma + \frac{C_2^{\frac{\pi-1}{\pi}}}{\pi'} \int_{\Gamma_r} |\vec{\Phi}_2^*|^{\pi'} d\Gamma = \int_{\Gamma_r} \vec{u} \cdot \vec{\Phi}_2^* d\Gamma$$

donne l'égalité :

$$(63) \quad \vec{\Phi}_2^* = C_2 |\vec{u}|^{\pi-2} \vec{u} \quad \text{sur } \Gamma_r$$

qui est exactement la condition (8) de la loi de Weertman (puisque $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ sur Γ_r).

THEOREME 6 (2^{ème} théorème de l'énergie potentielle).

Parmi tous les champs statiquement admissibles (i.e. vérifiant (\mathcal{K})), le champ des contraintes est celui qui minimise l'énergie complémentaire

$$(64) \quad E(\Phi_1, \Phi_2) = \frac{B_n}{p'} \int_{\Omega} |\Phi_1|^{p'} d\Omega + \frac{(C_2)^{\frac{\pi-1}{\pi}}}{\pi'} \int_{\Gamma_r} |\Phi_2|^{\pi'} d\Gamma.$$

Démonstration. C'est une conséquence des théorèmes 4 et 5 et de la formulation du problème (\mathcal{P}^*) .

IV. IDENTIFICATION DU LIT ROCHEUX.

1°) Position du problème.

On suppose maintenant que le lit rocheux Γ_r est inconnu, Γ' , Γ'' et Γ_0 restant fixés.

On dispose par contre de mesures physiques permettant de connaître :

- la répartition de vitesses en surface : $\vec{u}/\Gamma_0 = \vec{z}_d$

$$- \text{ le débit du glacier : } \int_{\Gamma'} \vec{u} \cdot \vec{v} \, d\Gamma = - \int_{\Gamma''} \vec{u} \cdot \vec{v} \, d\Gamma = d .$$

On cherche l'équation du lit rocheux Γ_r sous la forme paramétrique $z = r(x)$. L'hypothèse essentielle est donc que le lit rocheux ne possède pas de portions verticales. On supposera de plus que le rocher n'affleure pas en surface, et que la pente et la courbure du lit restent bornées, hypothèses raisonnables si l'on veut pouvoir conserver les conditions aux limites adoptées sur Γ_r (pas de décollement de la glace, et loi de Weertman).

On définit donc l'ensemble des paramétrages admissibles par

$$(65) \quad \begin{cases} \mathcal{U} = \{r \in W^{2,\infty}(0,1) \mid \|r\|_{W^{2,\infty}(0,1)} \leq \eta_1, r(x) \geq r_0(x) + \eta_2 \text{ pp}\} \\ \eta_1, \eta_2 \text{ donnés} \\ \mathcal{U}_{ad} = \{r \in W^{3,\infty}(0,1) \cap \mathcal{U}, \text{Sup} \left| \frac{\partial^3 r}{\partial x^3} \right| \leq \eta_0\} \text{ avec } \eta_0 \text{ donné} \end{cases}$$

où $z = r_0(x)$ est le paramétrage de la surface à l'air libre Γ_0 ($r_0 \in \mathcal{U}_{ad}$).

On note Ω_r le domaine (variable) limité par $\Gamma_0 \cup \Gamma' \cup \Gamma_r \cup \Gamma''$

Remarques.

- \mathcal{U}_{ad} est un compact de $W^{2,\infty}(0,1)$.
- De plus \mathcal{U}_{ad} est inclus dans $C^2(0,1)$, de sorte que, si r et $r_0 \in \mathcal{U}_{ad}$, la frontière de Ω_r , $\partial\Omega_r = \Gamma_0 \cup \Gamma' \cup \Gamma_r \cup \Gamma''$ est de classe C^2 par morceaux.
- On peut en fait au prix de nombreuses complications techniques affaiblir les hypothèses de régularité sur le fond et prendre pour \mathcal{U}_{ad} un compact de $W^{1,\infty}(0,1)$. Le problème d'identification du lit rocheux se pose alors sous la forme suivante :

$$(66) \quad \text{Min}_{r \in \mathcal{U}_{ad}} \int_{\Gamma_0} |\vec{u}_r - \vec{z}_d|^q \, d\Gamma$$

Dans (66), $q = \frac{p}{2-p}$ si $p \neq 2$ et $q = 2$ si $p = 2$, \vec{z}_d est donné dans

$[L^q(\Gamma_0)]^2$ et \vec{u}_r est la solution du problème :

$$(67) \quad \text{Min}_{\vec{u} \in V_r} \left\{ \frac{B^{1-p}}{p} \int_{\Omega_r} |\vec{\gamma}(\vec{u})|^p \, d\Omega + \frac{C_2}{\pi} \int_{\Gamma_r} |\vec{u}|^\pi \, d\Gamma - \rho \int_{\Omega_r} \vec{g} \cdot \vec{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma' \cup \Gamma''} \vec{h} \cdot \vec{u} \, d\Gamma \right\}$$

avec

$$(68) \quad V_r = \{ \vec{u} \in [W^{1,p}(\Omega_r)]^2 ; \text{div } \vec{u} = 0 ; \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \cup \Gamma_r ; \int_{\Gamma'} \vec{u} \cdot \vec{v} \, d\Gamma = d \} .$$

Une forme équivalente au problème (67) est :

$$(69) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{"Trouver } \vec{u}_r \in V_r \text{ tel que :} \\ B^{1-p} \int_{\Omega_r} |\vec{\gamma}(\vec{u}_r)|^{p-2} \vec{\gamma}(\vec{u}_r) \cdot \vec{\gamma}(\vec{\Phi}) d\Omega + c_2 \int_{\Gamma_r} |\vec{u}_r|^{p-2} \vec{u}_r \cdot \vec{\Phi} d\Gamma = \\ = \rho \int_{\Omega_r} \vec{g} \cdot \vec{\Phi} d\Omega - \int_{\Gamma' \cup \Gamma''} \vec{h} \cdot \vec{\Phi} d\Gamma \quad \forall \vec{\Phi} \in V^0 \text{ "} \end{array} \right.$$

avec

$$(70) \quad V_r^0 = \{ \vec{u} \in [W^{1,p}(\Omega_r)]^2 ; \operatorname{div} \vec{u} = 0, \vec{u} \cdot \vec{\nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \cup \Gamma_r, \int_{\Gamma'} \vec{u} \cdot \vec{\nu} d\Gamma = 0 \}.$$

Il est évident d'après le § II que les problèmes équivalents (67) et (69) admettent une solution unique pour r fixé dans \mathcal{U}_{ad} .

2°) Formulation du problème dans un domaine fixe.

On va maintenant par changement de variables envoyer l'ouvert Ω_r sur le carré $]0,1[\times]0,1[$.

On transforme alors par ce changement de variables, non pas directement le champ de vitesses, mais la fonction de courant qui lui est associé. La nouvelle fonction de courant ainsi obtenue détermine un nouveau champ de vitesses sur le carré $]0,1[\times]0,1[$, champ qui aura conservé la propriété fondamentale d'être à divergence nulle.

Soit donc $\vec{\Phi} = (\varphi, \psi)$ quelconque dans l'espace V_r . On peut lui associer une fonction de courant $\theta \in W^{2,p}(\Omega_r)$ par

$$(71) \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = \varphi \quad - \frac{\partial \theta}{\partial x} = \psi$$

Les conditions $\vec{\Phi} \cdot \vec{\nu} = 0$ sur $\Gamma_0 \cup \Gamma_r$ sont équivalentes à $\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = 0$ sur $\Gamma_0 \cup \Gamma_r$ donc

$$(72) \quad \theta = c^{te} \text{ sur } \Gamma_0 \cup \Gamma_r$$

Choisissant par exemple $\theta = 0$ sur Γ_0 , la fonction θ ainsi déterminée est univoque.

Par changement de variables

$$(73) \quad \tilde{z} = \frac{z - r_0(x)}{r(x) - r_0(x)} \quad \tilde{x} = x$$

le domaine Ω_r devient en axes (\tilde{x}, \tilde{z}) le carré

$$(74) \quad \tilde{\Omega} =]0,1[\times]0,1[$$

les bords $\Gamma_0, \Gamma_r, \Gamma', \Gamma''$ devenant respectivement les côtés $\tilde{\Gamma}_0$ d'équation $\tilde{z} = 0$, $\tilde{\Gamma}_r$ d'équation : $\tilde{z} = 1$, $\tilde{\Gamma}'$ d'équation : $\tilde{x} = 0$ et $\tilde{\Gamma}''$ d'équation $\tilde{x} = 1$.

On obtient en inversant (73)

$$(75) \quad z = r_0(x) + \tilde{z}[r(x) - r_0(x)]$$

et le jacobien \tilde{J} de la transformation vaut

$$(76) \quad \tilde{J} = \frac{1}{r(x) - r_0(x)}$$

On pose $\tilde{\theta}(\tilde{x}, \tilde{z}) = \theta(x, z)$ soit

$$(77) \quad \tilde{\theta}(\tilde{x}, \tilde{z}) = \theta(\tilde{x}, r_0 + \tilde{z}(r - r_0)) \quad \text{puis}$$

$$(78) \quad \tilde{\varphi} = \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{z}} \quad \tilde{\psi} = - \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{x}}$$

$$(79) \quad \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{z}}(\tilde{x}, \tilde{z}) = [r - r_0] \frac{\partial \theta}{\partial z}(\tilde{x}, r_0(\tilde{x}) + \tilde{z}[r(\tilde{x}) - r_0(\tilde{x})])$$

$$(80) \quad \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{z}) = \frac{\partial \theta}{\partial x}(\tilde{x}, r_0(\tilde{x}) + \tilde{z}[r(\tilde{x}) - r_0(\tilde{x})]) + \\ + [r'_0 + \tilde{z}[r' - r'_0]] \frac{\partial \theta}{\partial z}(\tilde{x}, r_0(\tilde{x}) + \tilde{z}[r(\tilde{x}) - r_0(\tilde{x})]).$$

On peut ainsi établir le lemme :

Lemme 12.

Soit $\tilde{\Omega} =]0, 1[\times]0, 1[$

$$\tilde{V} = \{v \in [W^{1,p}(\tilde{\Omega})]^2 ; \operatorname{div} v = 0, \vec{v} \cdot \vec{\nu} = 0 \text{ sur } \tilde{\Gamma}_0 \cup \tilde{\Gamma}_1, \int_{\tilde{\Omega}} \vec{v} \cdot \vec{\nu} \, d\Gamma = d\}$$

$$V_r = \{v \in [W^{1,p}(\Omega_r)]^2 ; \operatorname{div} v = 0, \vec{v} \cdot \vec{\nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \cup \Gamma_r, \int_{\Gamma'} \vec{v} \cdot \vec{\nu} \, d\Gamma = d\}.$$

Pour tout $r \in \mathcal{U}$ on peut définir un isomorphisme R_r de V_r sur \tilde{V} , les normes de R_r et R_r^{-1} étant bornées indépendamment de $r, r \in \mathcal{U}$.

$$(81) \quad \|R_r\| \leq C' \quad \|R_r^{-1}\| \leq C' \quad \forall r \in \mathcal{U}.$$

Démonstration. Soit r fixé $\vec{\Phi} = (\varphi, \psi)$ quelconque dans V_r .

On pose (comparer à (79) (80)),

$$(82) \quad \tilde{\varphi}(\tilde{x}, \tilde{z}) = (r(\tilde{x}) - r_0(\tilde{x})) \varphi(\tilde{x}, r_0(\tilde{x}) + \tilde{z}[r(\tilde{x}) - r_0(\tilde{x})])$$

$$(83) \quad \tilde{\psi}(\tilde{x}, \tilde{z}) = \psi(\tilde{x}, r_0 + \tilde{z}(r - r_0)) - [r'_0 + \tilde{z}(r' - r'_0)] \varphi(\tilde{x}, r_0 + \tilde{z}(r - r_0))$$

Alors en inversant les formules

$$(84) \quad \varphi(x, z) = \frac{1}{r-r_0} \tilde{\varphi}\left(x, \frac{z-r_0}{r-r_0}\right)$$

$$(85) \quad \psi(x, z) = \tilde{\psi}\left(x, \frac{z-r_0}{r-r_0}\right) + \frac{1}{(r-r_0)^2} (r'_0 r - r_0 r' + z(r'-r'_0)) \tilde{\varphi}\left(x, \frac{z-r_0}{r-r_0}\right)$$

et il est facile de vérifier que pour $r \in \mathcal{U}$, il y a équivalence entre l'appartenance de $\vec{\Phi} = (\varphi, \psi)$ à $[L^p(\Omega_r)]^2$ et celle de $\vec{\tilde{\Phi}} = (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ à $[L^p(\tilde{\Omega})]^2$.

Calculons maintenant les dérivées. Il vient :

$$(86) \quad \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{z}) = (r'(x) - r'_0(x))\varphi(x, z) + (r-r_0) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, z) \\ + (rr'_0 - r_0 r' + z(r'-r'_0)) \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, z)$$

$$(87) \quad \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{z}}(\tilde{x}, \tilde{z}) = (r-r_0)^2 \frac{\partial \psi}{\partial z}(x, z)$$

$$(88) \quad \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{z}) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, z) + \frac{rr'_0 - r_0 r' + z(r'-r'_0)}{r-r_0} \left[\frac{\partial \psi}{\partial z}(x, z) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, z) \right] \\ - \left[\frac{rr'_0 - r_0 r' + z(r'-r'_0)}{r-r_0} \right]^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, z) - \frac{rr''_0 - r_0 r'' + z(r''-r''_0)}{r-r_0} \varphi(x, z)$$

$$(89) \quad \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{z}}(\tilde{x}, \tilde{z}) = (r-r_0) \frac{\partial \psi}{\partial z}(x, z) - (r'-r'_0)\varphi(x, z) - (rr'_0 - r_0 r' + z(r'-r'_0)) \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, z)$$

et les formules inverses s'écrivent :

$$(90) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, z) = - \frac{r'-r'_0}{(r-r_0)^2} \tilde{\varphi}(\tilde{x}, \tilde{z}) + \frac{1}{r-r_0} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{z}) - \frac{(r'_0 + \tilde{z}(r'-r'_0))}{(r-r_0)^2} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{z}}(\tilde{x}, \tilde{z})$$

$$(91) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, z) = \frac{1}{(r-r_0)^2} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{z}}(\tilde{x}, \tilde{z})$$

$$(92) \quad \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, z) = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{z}) - \frac{r'_0 + \tilde{z}(r'-r'_0)}{r-r_0} \left[\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{z}}(\tilde{x}, \tilde{z}) - \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{z}) \right] \\ - \left[\frac{r'_0 + \tilde{z}(r'-r'_0)}{r-r_0} \right]^2 \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{z}}(\tilde{x}, \tilde{z}) + \left[\frac{r''_0 + \tilde{z}(r''-r''_0)}{r-r_0} - \frac{2(r'-r'_0)(r'_0 + \tilde{z}(r'-r'_0))}{(r-r_0)^2} \right] \tilde{\varphi}(\tilde{x}, \tilde{z})$$

$$(93) \quad \frac{\partial \psi}{\partial z}(x, z) = \frac{1}{r-r_0} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{z}}(\tilde{x}, \tilde{z}) + \frac{r'-r'_0}{(r-r_0)^2} \tilde{\varphi}(\tilde{x}, \tilde{z}) + \frac{r'_0 + \tilde{z}(r'-r'_0)}{(r-r_0)^2} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{z}}(\tilde{x}, \tilde{z}).$$

Sous l'hypothèse $r \in \mathcal{U}$, il y a bien équivalence entre l'appartenance de $\vec{\Phi}$ à $W^{1,p}(\Omega_r)$ et l'appartenance de $\vec{\tilde{\Phi}}$ à $W^{1,p}(\tilde{\Omega})$.

D'autre part

$$(94) \quad \operatorname{div} \vec{\Phi} = \frac{1}{r-r_0} \operatorname{div} \vec{\tilde{\Phi}},$$

donc si $r \in \mathcal{U}_{\text{ad}}$ $\operatorname{div} \vec{\Phi} = 0 \iff \operatorname{div} \vec{\tilde{\Phi}} = 0$.

De plus :

$$(95) \quad \vec{\Phi} \cdot \vec{\nu} /_{\Gamma_1} = \sqrt{1+r'^2} \vec{\Phi} \cdot \vec{\nu} /_{\Gamma_r}$$

$$(96) \quad \vec{\Phi} \cdot \vec{\nu} /_{\Gamma_0} = \sqrt{1+r'_0{}^2} \vec{\Phi} \cdot \vec{\nu} /_{\Gamma_0} ,$$

d'où l'équivalence entre

$$\vec{\Phi} \cdot \vec{\nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \cup \Gamma_r \text{ et } \vec{\tilde{\Phi}} \cdot \vec{\nu} = 0 \text{ sur } \tilde{\Gamma}_0 \cup \tilde{\Gamma}_1 .$$

Enfin :

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Gamma}'} \vec{\tilde{\Phi}} \cdot \vec{\nu} \, d\Gamma &= - \int_0^1 \tilde{\varphi}(0, \tilde{z}) \, d\tilde{z} = - \int_0^1 \varphi(0, z) (r(0) - r_0(0)) \, dz \\ &= - \int_{r_0(0)}^{r(0)} \varphi(0, z) \, dz = \int_{\Gamma'} \vec{\Phi} \cdot \vec{\nu} \, d\Gamma . \text{ Donc} \end{aligned}$$

$$(97) \quad \int_{\tilde{\Gamma}'} \vec{\tilde{\Phi}} \cdot \vec{\nu} \, d\Gamma = \int_{\Gamma'} \vec{\Phi} \cdot \vec{\nu} \, d\Gamma .$$

L'isomorphisme R_r défini par

$$R_r(\vec{\Phi}) = \vec{\tilde{\Phi}} , \quad \vec{\tilde{\Phi}} \text{ donné par (82) (83) répond donc à la question.}$$

3°) Résultats d'existence pour le problème d'identification.

Nous allons maintenant établir le théorème

THEOREME 7.

Il existe $\bar{r} \in \mathcal{U}_{ad}$ solution du problème (66) (67).

Démonstration. Soit $\{r_{im}\}$ une suite minimisante pour le problème (66).

\mathcal{U}_{ad} étant compact dans $W^{2,\infty}(0,1)$, on peut extraire de la suite $\{r_{im}\}$ une sous-suite $\{r_n\}$ fortement convergente dans $W^{2,\infty}(0,1)$, i.e. :

$$(98) \quad \exists \bar{r} \in \mathcal{U}_{ad} \mid r_n \rightarrow \bar{r} \text{ } W^{2,\infty}(0,1) \text{ fort.}$$

Pour tout n , on note u_n la solution dans V_{r_n} du problème (68) associé à r_n , $u_{\bar{r}}$ la solution associée à \bar{r} .

Nous allons tout d'abord montrer la proposition :

Proposition 1. (coercivité uniforme en n).

Il existe deux constantes $C(\bar{r})$ et $\chi(\bar{r})$ indépendantes de n telles que :

ou bien $\|\vec{u}_n\|_{[W^{1,p}(\Omega_{r_n})]}^2 \leq C'(\bar{r})$

ou bien

$$(99) \quad \int_{\Omega_{r_n}} |\gamma(\vec{u}_n)|^p d\Omega + \int_{\Gamma_{r_n}} |\vec{u}_n|^\pi d\Gamma \geq \chi(\bar{r}) \|\vec{u}_n\|_{[W^{1,p}(\Omega_{r_n})]}^2$$

Démonstration de la proposition 1. Elle résulte directement de deux lemmes :

Lemme 13.

Il existe une constante $C(\bar{r})$ ne dépendant que de \bar{r} telle que pour toute suite $\{r_n\}$ convergeant vers \bar{r} dans $W^{2,\infty}(0,1)$ fort, on ait :

$$(100) \quad \int_{\Omega_{r_n}} |\gamma(u)|^p d\Omega + \int_{\Omega_{r_n}} |u|^p d\Omega \geq C(\bar{r}) \|u\|_{[W^{1,p}(\Omega_{r_n})]}^p \quad \forall u \in V_{r_n}.$$

Lemme 14.

Il existe deux constantes $C'(\bar{r})$ et $C''(\bar{r})$ ne dépendant que de \bar{r} , telles que,
pour toute suite $\{r_n\}$ convergeant vers \bar{r} dans $W^{2,\infty}(0,1)$ fort, les solutions
 u_n des problèmes (68) associés à $\{r_n\}$ vérifient pour n assez grand l'une
des deux inégalités suivantes :

$$(101) \quad \|u_n\|_{W^{1,p}(\Omega_{r_n})} \leq C'(\bar{r})$$

$$(102) \quad \int_{\Omega_{r_n}} |\gamma(u_n)|^p d\Omega + \int_{\Gamma_{r_n}} |u_n|^\pi d\Gamma \geq C''(\bar{r}) \|u_n\|_{L^p(\Omega_{r_n})}^p$$

Avant de démontrer les lemmes 13 et 14, on doit encore établir un lemme technique :

Lemme 15.

Quel que soit $p > 0$, il existe une constante K_p ne dépendant que de p telle que $\forall (y,z) \in \mathbb{R}^2$

$$(103) \quad ||z|^p - |y|^p| \leq K_p (|z|^{p-2} z + |y|^{p-2} y, z-y).$$

Démonstration. Si y ou z est nul, ou si $|y| = |z|$ (103) est trivial

pour $K_p \geq 1$. Sinon on pose :

$$\Phi(y,z) = \frac{(|z|^{p-2} z + |y|^{p-2} y, z-y)}{||z|^p - |y|^p|} = \frac{|N|}{|D|}$$

et l'on fait l'hypothèse $|y| \neq |z|$ et $y \neq 0$.

A cause de l'homogénéité, et par changement d'axe éventuel on peut supposer $y = (1,0)$.

On a les propriétés

$$\text{i) } \lim_{|z| \rightarrow +\infty} \Phi(y,z) = 1$$

$$\text{ii) } \Phi(y,z) > 0 \quad \forall y, z \quad y \neq z$$

$$\text{iii) } \text{On va montrer que } \liminf_{z \rightarrow y} \Phi(y,z) > 0.$$

(103) découle immédiatement de (i) (ii) (iii).

Montrons donc (iii) :

On pose $z = (1 + \rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ $y = (1,0)$.

$$\text{Alors } |z| = \sqrt{1 + 2\rho \cos \theta + \rho^2} \quad (z - y) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$

et l'on en déduit :

$$N = (1 + 2\rho \cos \theta + \rho^2)^{\frac{p}{2}} - (1 + 2\rho \cos \theta + \rho^2)^{\frac{p}{2}-1} (1 + \rho \cos \theta) + \rho \cos \theta$$

$$D = (1 + 2\rho \cos \theta + \rho^2)^{\frac{p}{2}} - 1.$$

Par développements limités à l'ordre 2 (pour $\rho \rightarrow 0$)

$$N = 1 + \frac{p}{2} (2\rho \cos \theta) - (1 + \rho \cos \theta) - \left(\frac{p}{2} - 1\right) 2\rho \cos \theta + \rho \cos \theta + \varepsilon_1(\rho, \theta).$$

Soit

$$N = 2\rho \cos \theta + \varepsilon_1(\rho, \theta)$$

$$D = \frac{p}{2} (2\rho \cos \theta) + \varepsilon_2(\rho, \theta).$$

$$\text{Donc } \Phi(y,z) \rightarrow \frac{2}{p} \text{ quand } z \rightarrow y$$

C.Q.F.D.

Démonstration du lemme 13. D'après le lemme 8, il existe une constante C fixée (dépendant de \bar{r}) telle que

$$(104) \quad \int_{\Omega_{\bar{r}}} |\gamma(u)|^p d\Omega + \int_{\Omega} |u|^p d\Omega \geq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega_{\bar{r}})}^p \quad \forall u \in \tilde{V}_{\bar{r}}$$

Appliquant l'isomorphisme $R_{\bar{r}}$ du lemme 12, on en déduit l'existence d'une

constante β ne dépendant que de \bar{r} telle que :

$$(105) \quad \int_{\tilde{\Omega}} |\tilde{\gamma}_{\bar{r}}(\tilde{u})|^p [\bar{r} - r_0] d\tilde{\Omega} + \int_{\tilde{\Omega}} |\tilde{u}|^p d\tilde{\Omega} \geq \beta \|\tilde{u}\|_{W^{1,p}(\tilde{\Omega})}^p \quad \forall \tilde{u} \in \tilde{V},$$

$\tilde{\gamma}_{\bar{r}}$ étant défini de la manière suivante :

$$(106) \quad \tilde{\gamma}_{\bar{r}}(\tilde{u}) = \begin{cases} -2 \frac{r' - r'_0}{(r-r_0)^2} \tilde{u} + \frac{1}{r-r_0} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} \right) - 2 \frac{r'_0 + \tilde{z}(r'-r'_0)}{(r-r_0)^2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \\ \left[\frac{r''_0 + \tilde{z}(r''-r''_0)}{r-r_0} - \frac{2(r'-r'_0)(r'_0 + \tilde{z}(r'-r'_0))}{(r-r_0)^2} \right] \tilde{u} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} + \\ + \frac{1}{(r-r_0)^2} [1 - (r'_0 + \tilde{z}(r'-r'_0))^2] \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} + \frac{r'_0 + \tilde{z}(r'-r'_0)}{r-r_0} \left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} \right]. \end{cases}$$

Posant

$$(107) \quad D_{\bar{r}}(\tilde{u}) = \int_{\tilde{\Omega}} |\tilde{\gamma}_{\bar{r}}(\tilde{u})|^P (r-r_0) d\tilde{\Omega},$$

on peut écrire :

$$D_{\bar{r}}(\tilde{u}) - D_{r_n}(\tilde{u}) = \int_{\tilde{\Omega}} [|\tilde{\gamma}_{\bar{r}}(\tilde{u})|^P - |\tilde{\gamma}_{r_n}(\tilde{u})|^P] [\bar{r}-r_0] d\tilde{\Omega} + \int_{\tilde{\Omega}} |\tilde{\gamma}_{r_n}(\tilde{u})|^P [\bar{r}-r_n] d\tilde{\Omega}.$$

On voit facilement sur l'expression (106) de $\tilde{\gamma}_{\bar{r}}(\tilde{u})$ que

$$(108) \quad \|\tilde{\gamma}_{\bar{r}}(\tilde{u}) - \tilde{\gamma}_{r_n}(\tilde{u})\|_{[L^P(\tilde{\Omega})]^2} \leq O(\|r_n - \bar{r}\|_{W^{2,\infty}(0,L)}) \|\tilde{u}\|_{W^{1,P}(\tilde{\Omega})}$$

où $O(\|r_n - \bar{r}\|_{W^{2,\infty}(0,L)})$ est indépendant de \tilde{u} .

On déduit alors de (108) et du lemme 15 que :

$$(109) \quad |D_{\bar{r}}(\tilde{u}) - D_{r_n}(\tilde{u})| \leq O(\|r_n - \bar{r}\|_{W^{2,\infty}(0,L)}) \|\tilde{u}\|_{W^{1,P}(\tilde{\Omega})}^P$$

et pour n assez grand (105) et (109) entraînent que :

$$\forall \tilde{u} \in \tilde{V}, \forall \{r_n\} : r_n \rightarrow \bar{r} \text{ } W^{2,\infty}(0,L) \text{ fort,}$$

$$(110) \quad \int_{\tilde{\Omega}} |\tilde{\gamma}_{r_n}(\tilde{u})|^P [r_n - r_0] d\tilde{\Omega} + \int_{\tilde{\Omega}} |\tilde{u}|^P d\tilde{\Omega} \geq \frac{P}{2} \|\tilde{u}\|_{W^{1,P}(\tilde{\Omega})}^P$$

Appliquant alors l'isomorphisme $R_{r_n}^{-1}$ à cet élément \tilde{u} quelconque dans \tilde{V} ,

on en déduit aisément le lemme 13.

Démonstration du lemme 14. On procède comme dans la démonstration du lemme

0. Supposons (102) non vraie. :

$$\text{Alors } \int_{\Omega_{r_n}} |\gamma(u_n)|^P d\Omega + \int_{\Gamma_{r_n}} |u_n|^p d\Gamma \rightarrow 0.$$

i) Faisons un instant l'hypothèse que, pour n assez grand,

$$\|u_n\|_{[L^P(\Omega_{r_n})]^2} \leq 1 \quad \forall n.$$

Le lemme 13 entraîne alors l'inégalité (101).

ii) De même si pour n assez grand on a

$\|u_n\|_{[L^p(\Omega_{r_n})]}^2 \geq 1 \quad \forall n$, on aura démontré (102) si on démontre que

$$(111) \quad \int_{\Omega_{r_n}} |\gamma(w_n)|^p d\Omega + \int_{\Gamma_{r_n}} |w_n|^\pi d\Gamma \geq C''(\bar{r}) \quad \text{avec}$$

$$(112) \quad w_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{L^p}}$$

Si (111) n'est pas vrai w_n vérifie

$$(113) \quad \begin{cases} \|w_n\|_{[L^p(\Omega_{r_n})]}^2 = 1 \\ \int_{\Omega_{r_n}} |\gamma(w_n)|^p d\Omega + \int_{\Gamma_{r_n}} |w_n|^\pi d\Gamma \rightarrow 0. \end{cases}$$

Par le lemme 13 on obtient donc

$$(114) \quad \|w_n\|_{W^{1,p}(\Omega_{r_n})} \leq C^{te} \text{ indépendante de } n$$

d'où grâce au lemme 12

$$(115) \quad \|R_{r_n} w_n\|_{W^{1,p}(\tilde{\Omega})} \leq C^{te} \text{ indépendante de } n$$

et donc, à une extraction de sous-suite près,

$$(116) \quad \begin{cases} R_{r_n} w_n \rightarrow \tilde{w} \text{ dans } [W^{1,p}(\tilde{\Omega})]^2 \text{ faible,} \\ [L^p(\tilde{\Omega})]^2 \text{ fort, pp,} \\ R_{r_n} w_n / \tilde{r} \rightarrow \tilde{w} / \tilde{r}_1 \text{ dans } [L^\pi(\tilde{\Gamma}_1)]^2 \text{ fort.} \end{cases}$$

(113) s'écrit sous forme équivalente, avec les notations (106) (107) de la démonstration du lemme 13,

$$(117) \quad D_{r_n}(R_{r_n} w_n) + \int_0^1 \left| \frac{1+r_n'}{r_n-r_0} \right|^\pi |R_{r_n} w_n / \tilde{r}|^\pi \sqrt{1+r_n'^2} d\tilde{x} \rightarrow 0$$

et de (109) résulte que

$$(118) \quad \liminf D_{r_n}(R_{r_n} w_n) = \liminf D_{\tilde{r}}(R_{r_n} w_n) \geq D_{\tilde{r}}(\tilde{w}).$$

Par passage à la lim inf dans (117) on obtient donc

$$(119) \quad D_{\tilde{r}}(\tilde{w}) + \int_0^1 \left| \frac{1+\tilde{r}'}{\tilde{r}-r_0} \right|^\pi |\tilde{w} / \tilde{r}_1|^\pi \sqrt{1+\tilde{r}'^2} d\tilde{x} = 0.$$

Soit en posant

$$(120) \quad w = R_{\bar{r}}^{-1} \tilde{w}$$

$$(121) \quad \int_{\Omega_{\bar{r}}} |\gamma(w)|^p d\Omega + \int_{\Gamma_{\bar{r}}} |w|^\pi d\Gamma = 0.$$

On en conclut, comme au lemme (10), que

$$(122) \quad w = 0 \text{ d'où}$$

$$(123) \quad \tilde{w} = 0 \text{ ..}$$

Or par (116), $\|R_{r_n} w_n\|_{[L^p(\tilde{\Omega})]^2} \rightarrow \|\tilde{w}\|_{[L^p(\tilde{\Omega})]^2}$, ce qui implique :

$$(124) \quad \|R_{r_n} w_n\|_{[L^p(\tilde{\Omega})]^2} \rightarrow 0 \text{ ..}$$

w_n étant lié à $R_{r_n} w_n$ par les formules (84)(85) il résulte de (124) que

$$(125) \quad \|w_n\|_{[L^p(\Omega_{r_n})]^2} \rightarrow 0$$

ce qui contredit (113). (102) est donc démontré dans ce cas.

iii) Si maintenant, pour tout $n_0 > 0$, $\exists n_1 > n_0$ avec $\|u_{n_1}\|_{L^p} \leq 1$ et $n_2 > n_0$ avec $\|u_{n_2}\|_{L^p} \geq 1$, on peut décomposer la suite $\{u_n\}$ en deux sous-suites, l'une vérifiant les hypothèses du point i) et l'autre celles du point ii). La démonstration du lemme 14 est donc complète. On poursuit la démonstration du théorème 7 avec la

Proposition 2.

Si $\vec{h} = f\vec{t} + N\vec{v}$ avec f et $N \in L^{\pi'}(\Gamma' \cup \Gamma'')$ il existe une constante K' telle que $\forall r \in \mathcal{U}$ et $\forall \vec{u} \in V_r$

$$(126) \quad \left| \int_{\Gamma' \cup \Gamma''} \vec{h} \cdot \vec{u} d\Gamma \right| \leq K' \left(\|f\|_{L^{\pi'}(\Gamma' \cup \Gamma'')} + \|N\|_{L^{\pi'}(\Gamma' \cup \Gamma'')} \right) \|\vec{u}\|_{[W^{1,p}(\Omega_r)]}.$$

Démonstration. On repart des formules (84) et (85). Il est alors facile de calculer le membre de gauche de (126) en passant à \tilde{V} et d'obtenir

$$(127) \quad \left| \int_{\Gamma'} N \vec{u} \cdot \vec{v} d\Gamma \right| \leq \frac{1}{h, \pi'} \|N\|_{L^{\pi'}(\Gamma')} \|(R_r \vec{u})_1\|_{L^{\pi}(\tilde{\Gamma}')}.$$

$$(128) \quad \left| \int_{\Gamma'} f \vec{u} \cdot \vec{t} d\Gamma \right| \leq \frac{1}{h, \pi'} \|f\|_{L^{\pi'}(\Gamma')} [h' \|(R_r \vec{u})_2\|_{L^{\pi}(\tilde{\Gamma}')} + [|r'_0(0)| + |r'(0) - r'_0(0)|] \|(R_r \vec{u})_1\|_{L^{\pi}(\tilde{\Gamma}')}]$$

où $h^i = r(0) - r_0(0)$ est indépendant de r et $(R_r \vec{u})_i$ désigne la $i^{\text{ème}}$ composante de $R_r \vec{u}$ $i = 1, 2$.

Par continuité de la trace dans $W^{2,\infty}(0,L)$ on obtient :

$$|r^i(0) - r_0^i(0)| \leq C_0 \|r - r_0\|_{W^{2,\infty}(0,L)} \quad C_0 \text{ indep. de } r.$$

Soit

$$(129) \quad |r^i(0) - r_0^i(0)| \leq C_0^i \text{ indep. de } r \text{ si } r \in \mathcal{U}.$$

D'autre part par continuité de la trace de $W^{1,p}(\tilde{\Omega})$ dans $L^\pi(\tilde{\Gamma}' \cup \tilde{\Gamma}'')$ il vient :

$$\|R_r \vec{u}\|_{L^\pi(\tilde{\Gamma}' \cup \tilde{\Gamma}'')} \leq C_1 \|R_r \vec{u}\|_{W^{1,p}(\tilde{\Omega})}$$

(C_1 indépendant de r), d'où par le lemme 12 :

$$(130) \quad \|R_r \vec{u}\|_{L^\pi(\tilde{\Gamma}' \cup \tilde{\Gamma}'')} \leq C_1 C^i \|\vec{u}\|_{W^{1,p}(\Omega_r)}$$

La proposition 2 découle alors de (127), (128) (et leurs analogues sur Γ'') et (129) (130).

Proposition 3.

Il existe une constante K'' telle que $\forall r \in \mathcal{U}$ et $\forall \vec{u} \in [W^{1,p}(\Omega_r)]^2$ on ait :

$$(131) \quad \left| \int_{\Omega_r} \rho g \vec{z} \cdot \vec{u} \, d\Omega \right| \leq K'' \rho g \|\vec{u}\|_{[W^{1,p}(\Omega_r)]^2}.$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que si $r \in \mathcal{U}$ la norme de r dans $L^\infty(0,L)$ est bornée et donc que $\text{mes } \Omega_r$ est bornée indépendamment de r .

Proposition 4.

Il existe une constante K''' telle que $\forall r \in \mathcal{U}$ et $\forall \vec{u}$ et $\vec{v} \in [W^{1,p}(\Omega_r)]^2$ avec $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} = 0$ sur Γ_r ,

$$(132) \quad \left| \int_{\Gamma_r} |\vec{u}|^{\pi-2} \vec{u} \cdot \vec{v} \, d\Gamma \right| \leq K''' \|\vec{u}\|_{[W^{1,p}(\Omega_r)]^2}^{\pi-1} \|\vec{v}\|_{[W^{1,p}(\Omega_r)]^2}.$$

Démonstration. On applique (84) et (85) avec $\tilde{z} = 1$. Il vient :

$$|\vec{u}|^2 = |u_1|^2 + |u_2|^2 = \frac{1}{|r-r_0|^2} |\tilde{u}_1|^2 + |\tilde{u}_2 + \frac{r'}{r-r_0} \tilde{u}_1|^2$$

soit :

$$|\vec{u}|^2 \leq \sup(2, \frac{1+2r'^2}{|r-r_0|^2}) |\vec{u}|^2.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_r} |\vec{u}|^{\pi-2} \vec{u} \cdot \vec{v} \, d\Gamma \right| &= \left| \int_0^1 |\vec{u}|^{\pi-2} \vec{u} \cdot \vec{v} \sqrt{1 + [r'(x)]^2} \, dx \right| \\ &\leq C \int_0^1 |\vec{u}|^{\pi-1} |\vec{v}| \, d\tilde{x} \leq C \|\vec{u}\|_{L^\pi(\tilde{\Gamma}_1)}^{\pi-1} \|\vec{v}\|_{L^\pi(\tilde{\Gamma}_1)}. \end{aligned}$$

La constante C ne dépend plus de r , si $r \in \mathcal{U}$. Par continuité de l'application trace de $W^{1,p}(\tilde{\Omega})$ dans $L^\pi(\tilde{\Gamma}_1)$ le résultat cherché suit.

Proposition 5.

Il existe une constante $K(\bar{r}, d)$ telle que

$$(133) \quad \|\vec{u}_n\|_{W^{1,p}(\Omega_{r_n})} \leq K(\bar{r}, d).$$

Démonstration. La condition de débit contenue dans les espaces V_r oblige tout d'abord à montrer un lemme de relèvement.

Lemme 16.

Il existe une fonction $\vec{D} \in [W^{1,p}(\tilde{\Omega})]^2$ telle que $\operatorname{div} \vec{D} = 0$ p.p. dans $\tilde{\Omega}$, $\vec{D} \cdot \vec{v} = 0$ sur $\tilde{\Gamma}_0 \cup \tilde{\Gamma}_1$, $\int_{\tilde{\Gamma}'} \vec{D} \cdot \vec{v} = d$, et :

$$(134) \quad \|\vec{D}\|_{[W^{1,p}(\tilde{\Omega})]^2} \leq K^0 d, \quad K^0 = \text{constante.}$$

Démonstration. On introduit sur $\partial\tilde{\Omega}$ la fonction \hat{d} de classe C^1 définie par :

$$\hat{d} = \begin{cases} 0 & \text{sur } \tilde{\Gamma}_0 \cup \tilde{\Gamma}_1 \\ 30 \, d\tilde{z}^2 (1-\tilde{z})^2 & \text{sur } \tilde{\Gamma}' \\ -30 \, d\tilde{z}^2 (1-\tilde{z})^2 & \text{sur } \tilde{\Gamma}'' \end{cases}$$

Alors le problème de Newman sur le carré $\tilde{\Omega} =]01[\times]01[$

$$\begin{cases} -\Delta\theta = 0 & \text{dans } \tilde{\Omega} \\ \frac{\partial\theta}{\partial\nu} = \hat{d} & \text{sur } \partial\tilde{\Omega} \end{cases}$$

admet une solution $\theta \in W^{2,p}(\tilde{\Omega})$ (cf. Mériqot [22])

avec $\|\theta\|_{\frac{W^{2,p}(\tilde{\Omega})}{\mathbb{R}}} \leq K^0 \|\hat{d}\|_{L^p(\partial\tilde{\Omega})}$. Posant $\vec{D} = \vec{V} \theta$ le lemme suit (et $\vec{D} \in \tilde{V}$),

si l'on remarque que $\int_0^1 \tilde{z}^2 (1-\tilde{z})^2 \, d\tilde{z} = \frac{1}{30}$.

On reprend alors la caractérisation (69) de \vec{u}_n avec $\vec{\Phi} = \vec{u}_n - R_{r_n}^{-1} \vec{D}$.

C'est loisible car, d'après le lemme 12, $R_{r_n}^{-1} \vec{D} \in V_{r_n}$ (puisque $\vec{D} \in \tilde{V}$), et donc $\vec{u}_n - R_{r_n}^{-1} \vec{D} \in V_r^0$.

Il vient :

$$(135) \quad \left\{ \begin{aligned} B^{1-p} \int_{\Omega_{r_n}} |\gamma(\vec{u}_n)|^p d\Omega + C_2 \int_{\Gamma_{r_n}} |\vec{u}_n|^\pi d\Gamma &= B^{1-p} \int_{\Omega_{r_n}} |\gamma(\vec{u}_n)|^{p-2} \gamma(\vec{u}_n) \gamma(R_{r_n}^{-1} \vec{D}) d\Omega \\ + C_2 \int_{\Gamma_{r_n}} |\vec{u}_n|^{\pi-2} \vec{u}_n R_{r_n}^{-1} \vec{D} d\Gamma + \rho \int_{\Omega_{r_n}} \vec{g}(\vec{u}_n - R_{r_n}^{-1} \vec{D}) d\Omega &- \int_{\Gamma \cup \Gamma''} \vec{h}(\vec{u}_n - R_{r_n}^{-1} \vec{D}) d\Omega \end{aligned} \right.$$

On applique maintenant les propositions 1, 2, 3, 4 en remarquant que (134)

joint au lemme 12 implique

$$(136) \quad \left\| R_{r_n}^{-1} \vec{D} \right\|_{[W^{1,p}(\Omega_{r_n})]}^2 \leq C'' K^0 d.$$

On en déduit :

$$(137) \quad \left\{ \begin{aligned} \|u_n\|_{[W^{1,p}(\Omega_{r_n})]}^p &\leq K_1 d \|u_n\|_{[W^{1,p}(\Omega_{r_n})]}^{p-1} + K_2 d \|u_n\|_{[W^{1,p}(\Omega_{r_n})]}^{\pi-1} \\ &+ K_3 \|u_n\|_{[W^{1,p}(\Omega_{r_n})]}^2 + K_4 d. \end{aligned} \right.$$

C'est une inégalité de la forme :

$$x^p \leq \alpha x^{p-1} + \beta x^{\pi-1} + \gamma x + d$$

avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ et $x > 0$.

Rappelons que $1 < p \leq \pi \leq 2$.

Si $x \leq 1$ (133) est démontré.

Si $x \geq 1$, comme $(p-1)$ et $(\pi-1)$ sont ≤ 1

$$x^{p-1} \leq x \quad \text{et} \quad x^{\pi-1} \leq x, \quad \text{d'où}$$

$$x^{p-1} \leq \alpha + \beta + \gamma + d$$

et l'on obtient bien (133) dans ce cas aussi.

Corollaire.

Il existe une constante $\tilde{K}(r, d)$ telle que

$$(138) \quad \|R_{r_n} u_n\|_{W^{1,p}(\tilde{\Omega})} \leq \tilde{K}(\bar{r}, d).$$

Démonstration. C'est immédiat par le lemme 12. On obtient

$$\tilde{K}(\bar{r}, d) = C'' K(\bar{r}, d).$$

Proposition 6.

$$R_{r_n} u_n \rightarrow R_{\bar{r}} u_{\bar{r}} \text{ dans } [W^{1,p}(\tilde{\Omega})]^2 \text{ fort.}$$

Démonstration. D'après (138) on peut extraire de $R_{r_n} u_n$ une sous-suite

(toujours notée $R_{r_n} u_n$) telle que

$$(139) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{r_n} u_n \rightarrow u^* \text{ dans } W^{1,p}(\tilde{\Omega}) \text{ faible, } L^p(\tilde{\Omega}) \text{ fort, pp,} \\ R_{r_n} u_n / \tilde{\Gamma}_1 \rightarrow u^* / \tilde{\Gamma}_1 \text{ dans } L^\pi(\tilde{\Gamma}_1) \text{ fort (par compacité de l'injection de} \\ \quad \quad \quad \frac{1}{W^{1,p}(\tilde{\Gamma}_1)} \text{ dans } L^\pi(\tilde{\Gamma}_1)) \\ \text{et } u^* \in \tilde{V}. \end{array} \right.$$

Le passage à la limite est semblable à celui du lemme 14. On pose

$$(140) \quad \Gamma_{r_n}(R_n v) = \int_{\Gamma_{r_n}} |\vec{v}|^\pi d\Gamma$$

et d'après le calcul fait à la proposition 4

$$(141) \quad \Gamma_{r_n}(R_n v) = \int_0^1 \left| \frac{[(R_n v)_1(\tilde{x}, 1)]^2}{(r_n - r_0)^2} + |(R_n v)_2(\tilde{x}, 1) + \frac{r_n^1}{r_n - r_0} (R_n v)_1(\tilde{x}, 1)|^2 \right|^{\pi/2} \sqrt{1 + r_n'^2} d\tilde{x}$$

\vec{u}_n est solution du problème (68). Donc $R_n u_n$ vérifie (avec les notations

(106) (107))

$$(142) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{B^{1-p}}{p} D_{r_n}(R_n u_n) + \frac{C_2}{\pi} \Gamma_{r_n}(R_n u_n) + F_{r_n}(R_n u_n) \leq \frac{B^{1-p}}{p} D_{r_n}(\tilde{v}) + \frac{C_2}{\pi} \Gamma_{r_n}(\tilde{v}) + \tilde{F}_{r_n}(\tilde{v}) \\ \forall \tilde{v} \in \tilde{V} \end{array} \right.$$

où

$$(143) \quad F_{r_n}(\tilde{v}) = \int_{\tilde{\Gamma}_1} \{ N(r_0(0) + h'\tilde{z}) \tilde{v}_1(0, \tilde{z}) + f(r_0(0) + h'\tilde{z}) [h' \tilde{v}_2(0, \tilde{z}) + \tilde{v}_1(0, \tilde{z}) (r_0'(0) + \tilde{z}(r_n'(0) - r_0'(0))] \} d\tilde{z} \\ + \int_{\tilde{\Gamma}''} (\text{analogue}) d\tilde{z} - \int_{\tilde{\Omega}} \rho g [(r_n - r) \tilde{v}_2(\tilde{x}, \tilde{z}) + (r_0 + \tilde{z}(r_n' - r_0')) \tilde{v}_1(\tilde{x}, \tilde{z})] d\tilde{z}$$

et l'on a posé

$$h' = r_n(0) - r_0(0) \quad (\text{quantité indépendante de } n).$$

De (109) et (138) résulte que :

$$(144) \quad \liminf D_{r_n}(R_n u_n) = \liminf D_{\bar{r}}(R_{\bar{r}} u_{\bar{r}})$$

et d'après (139), avec la semi-continuité inférieure :

$$(145) \quad \liminf D_{r_n}(R_n u_n) \geq D_{\bar{r}}(u^*).$$

D'autre part (139) permet de passer à la limite dans les expressions (141)

et (143) pour obtenir :

$$(146) \quad \Gamma_{r_n}(R_n u_n) \rightarrow \Gamma_{\bar{r}}(u^*)$$

$$(147) \quad F_{r_n}(R_n u_n) \rightarrow F_{\bar{r}}(u^*).$$

Passant à la \liminf dans (142) on établit ainsi, pour la limite $u^* \in \tilde{V}$,

l'inégalité :

$$(148) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{B^{1-p}}{p} D_{\bar{r}}(u^*) + \frac{C_2}{\pi} \Gamma_{\bar{r}}(u^*) + F_{\bar{r}}(u^*) \leq \frac{B^{1-p}}{p} D_{\bar{r}}(\tilde{v}) + \frac{C_2}{\pi} \Gamma_{\bar{r}}(\tilde{v}) + F_{\bar{r}}(\tilde{v}) \\ \forall \tilde{v} \in \tilde{V} \end{array} \right.$$

et par l'isomorphisme $R_{\bar{r}}^{-1} u^*$ il en résulte que $R_{\bar{r}}^{-1} u^* \in V_{\bar{r}}$ et vérifie :

$$(149) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{B^{1-p}}{p} \int_{\Omega_{\bar{r}}} |\gamma(R_{\bar{r}}^{-1} u^*)|^p d\Omega + \frac{C_2}{\pi} \int_{\Gamma_{\bar{r}}} |R_{\bar{r}}^{-1}(u^*)|^\pi d\Gamma - \rho \int_{\Omega_{\bar{r}}} \vec{g} \cdot R_{\bar{r}}^{-1} u^* d\Omega \\ + \int_{\Gamma' \cup \Gamma''} \vec{h} \cdot R_{\bar{r}}^{-1} u^* d\Gamma \leq \frac{B^{1-p}}{p} \int_{\Omega_{\bar{r}}} |\gamma(v)|^p d\Omega + \frac{C_2}{\pi} \int_{\Gamma_{\bar{r}}} |\vec{v}|^\pi d\Gamma \\ - \rho \int_{\Omega_{\bar{r}}} \vec{g} \cdot \vec{v} d\Omega + \int_{\Gamma' \cup \Gamma''} \vec{h} \cdot \vec{v} d\Gamma \quad \forall v \in V_{\bar{r}}. \end{array} \right.$$

L'unicité de la solution du problème (149) entraîne alors :

$$R_{\bar{r}}^{-1} u^* = u_{\bar{r}}.$$

Soit encore sous forme équivalente

$$(150) \quad u^* = R_{\bar{r}} u_{\bar{r}}.$$

Il était donc inutile d'extraire une sous-suite de la suite minimisante de départ, car (150) prouve la convergence faible de la suite toute entière.

On va maintenant établir le résultat de convergence forte :

Il résulte du passage à la limite ci-dessus que :

$$D_{r_n}(R_n u_n) \rightarrow D_{\bar{r}}(R_{\bar{r}} u_{\bar{r}})$$

et par (109) on obtient donc

$$(151) \quad D_{\bar{r}}(R_n u_n) \rightarrow D_{\bar{r}}(R_{\bar{r}} u_{\bar{r}}).$$

La norme dans $L^p(\tilde{\Omega})$ étant uniformément convexe il en résulte :

$$(152) \quad |\tilde{\gamma}_{\mathbb{F}}(R_n u_n)| \rightarrow |\tilde{\gamma}_{\mathbb{F}}(R_{\mathbb{F}} u_{\mathbb{F}})| \text{ dans } L^p(\tilde{\Omega}) \text{ fort}$$

soit encore

$$(153) \quad |\gamma(R_{\mathbb{F}}^{-1} R_n u_n)| \rightarrow |\gamma(u_{\mathbb{F}})| \text{ dans } L^p(\Omega_{\mathbb{F}}) \text{ fort.}$$

Avec le lemme 2.9 on en déduit :

$$(154) \quad \gamma(R_{\mathbb{F}}^{-1} R_n u_n) \rightarrow \gamma(u_{\mathbb{F}}) \text{ dans } [L^p(\Omega_{\mathbb{F}})]^2 \text{ fort.}$$

Comme d'autre part il résulte de (139) et de la continuité de $R_{\mathbb{F}}^{-1}$ comme opérateur de $[L^p(\tilde{\Omega})]^2$ dans $[L^p(\Omega_{\mathbb{F}})]^2$ que

$$(155) \quad R_{\mathbb{F}}^{-1} R_n u_n \rightarrow u_{\mathbb{F}} \text{ dans } [L^p(\Omega_{\mathbb{F}})]^2 \text{ fort}$$

le lemme 8 entraîne

$$(156) \quad R_{\mathbb{F}}^{-1} R_n u_n \rightarrow u_{\mathbb{F}} \text{ dans } [W^{1,p}(\Omega_{\mathbb{F}})]^2 \text{ fort}$$

d'où le résultat cherché grâce à la continuité de $R_{\mathbb{F}}$ comme opérateur de $[W^{1,p}(\Omega_{\mathbb{F}})]^2$ dans $[W^{1,p}(\tilde{\Omega})]^2$.

Il ne reste plus maintenant, pour terminer la démonstration du théorème 7, qu'à montrer que

$$\int_{\Gamma_0} |\vec{u}_{R_n} - \vec{z}_d|^q d\Gamma \rightarrow \int_{\Gamma_0} |\vec{u}_{\mathbb{F}} - \vec{z}_d|^q d\Gamma$$

ce qui est évident en repassant dans \tilde{V} :

On obtient en effet pour $\int_{\Gamma} |\vec{u}_n - \vec{z}_d|^q d\Gamma$ une expression analogue à (141) dans laquelle la proposition 6 permet de passer à la lim inf.

On peut encore énoncer le résultat sous la forme suivante :

THEOREME 8.

Toute suite minimisante du problème (67) qui converge dans $W^{2,\infty}(0,L)$ fort, converge vers une solution du problème (67) (68), les images des états correspondants convergeant dans $[W^{1,p}(\tilde{\Omega})]^2$ fort vers l'image de l'état optimal.

THEOREME 9.

Les résultats des théorèmes 7 et 8 restent valables si on supprime la condition de débit dans la définition (68) de l'état.

Démonstration. On remplace donc le problème de minimisation sur V_r par le problème analogue de minimisation sur

$$W_r = \{ \vec{u} \in [W^{1,p}(\Omega_r)]^2 ; \operatorname{div} \vec{u} = 0 ; \vec{u} \cdot \vec{\nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \cup \Gamma_r \}.$$

Il est facile de voir que la démonstration du théorème 7 s'adapte telle quelle, avec de plus une simplification de la démonstration de la proposition 5.

Proposition 7.

L'application $r \rightarrow R_r u_r$ est continue de \mathcal{U}_{ad} dans $[W^{1,p}(\tilde{\Omega})]^2$ (que l'on détermine l'état u_r en imposant ou non une condition de débit).

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition 6 et du théorème 9.

Remarques.

1°) Il résulte du théorème 9 qu'il existe un contrôle optimal \bar{r} solution du problème

$$(157) \quad \operatorname{Min}_{r \in \mathcal{U}_{ad}} \left[\int_{\Gamma_0} |\vec{u}_r - \vec{z}_d|^q d\Gamma + \left| \int_{\Gamma'} \vec{u}_r \cdot \vec{\nu} d\Gamma - d \right| \right]$$

\vec{u}_r étant donné par

$$(158) \quad \operatorname{Min}_{\vec{u} \in W_r} \left\{ \frac{B^{1-p}}{p} \int_{\Omega_r} |\vec{\gamma}(\vec{u})|^p d\Omega + \frac{C_2}{\pi} \int_{\Gamma_r} |\vec{u}|^\pi d\Gamma - \rho \int_{\Omega} \vec{g} \cdot \vec{u} d\Omega + \int_{\Gamma' \cup \Gamma''} \vec{h} \cdot \vec{u} d\Gamma \right\}$$

c'est-à-dire du problème obtenu en mettant la condition de débit dans le critère au lieu de l'imposer à l'état.

2°) L'unicité semble peu probable dans les problèmes (67) (68) ou (157) (158). Mais on ne possède pas de contre-exemple. On n'a pas non plus de résultat non trivial reliant les solutions des 2 problèmes. (Evidemment si $\vec{u}_{\bar{r}}$ annule le critère (157) \bar{r} est solution du problème (67) !)

3°) On peut rajouter dans W_r n'importe quelle condition pourvu qu'il reste un cône de sommet 0. Ceci permet d'imposer par exemple au champ de vitesses des conditions du type :

$$\vec{u}_r \cdot \vec{\nu} \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma'$$

ou
$$\vec{u}_r \cdot \vec{x} \leq 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega_r$$

traduisant que l'écoulement se fait "dans le sens de la pente".

4°) On peut remplacer \mathcal{U}_{ad} par tout sous ensemble non vide de \mathcal{U} , compact dans $W^{2,\infty}(0,L)$.

5°) On peut remplacer dans le critère (66) q par n'importe quel r avec $r \geq q$ (en particulier $r = \pi$).

6°) Les démonstrations précédentes semblent indiquer que pour la résolution effective il vaut probablement mieux poser les problèmes en terme de fonction de courant. L'étude numérique des équations considérées dans ce chapitre fera l'objet d'une publication ultérieure.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. LLIBOUTRY. Traité de Glaciologie.
- [2] L. LLIBOUTRY. General theory of subglacial cavitation and sliding of temperate glaciers. Journal of glaciology vol. 7 n° 49 p. 21-58, 1968.
- [3] M.C. PELISSIER, L. REYNAUD. Etude d'un modèle mathématique d'écoulement du glacier. C.R.A.S. t. 279, septembre 1974.
- [4] P. GRISVARD. Commutativité de deux foncteurs d'interpolation et applications. J. Math. Pures et Appliquées vol. 45 (1966) p. 143-290.
- [5] I. EKELAND, R. TEMAM. Analyse convexe et problèmes variationnels. Dunod, Gauthier-Villars Paris 1974.
- [6] J.J. MOREAU. Communication aux Journées d'Analyse Convexe. S^t Pierre de Chartreuse 1974.
- [7] G. DUVAUT, J.L. LIONS. Les inéquations en mécanique et en physique. Dunod, Paris 1972.
- [8] P. GERMAIN. Mécanique des milieux continus. Masson, Paris 1962.
- [9] I. REYNAUD. Flow of a valley glacier with a solid friction law. Journal of glaciology vol. 12 n° 65, 1973 p. 251-258.
- [10] R. TEMAM. On the theory and numerical analysis of the Navier Stokes equations (cours à l'université de Maryland) Publications mathématiques d'Orsay n° 90.
- [11] J.L. LIONS. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod, Gauthier-Villars Paris 1969.
- [12] J. DENY, J.L. LIONS. Les espaces du type de Beppo Levi. Ann. Inst. Fourier 5 (1953-54) p. 305-370.
- [13] S. MIZOHATA. Lectures on the Cauchy problem. Tata Institute of Fundamental research. Bombay 1965.
- [14] J. NECAS. Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques. Masson, Paris 1967.
- [15] P.G. CIARLET, P. A. RAVIART. General Lagrange and Hermite interpolation in \mathbb{R}^n . Arch. for rational Mechanics and Analysis 46, 1972.
- [16] F. STRANG, G. FIX. An analysis of the finite element method. Prentice Hall 1973.
- [17] R. GLOWINSKI, A. MARROCCO. Sur l'approximation par éléments finis d'ordre 1... d'une classe de problèmes de Dirichlet non linéaires. C.R.A.S. t. 278 Série A p. 1649 (1974).

- [18] R. GLOWINSKI, A. MARROCCO. Sur l'approximation, par éléments finis d'ordre un, et la résolution, par pénalisation-dualité, d'une classe de problèmes de Dirichlet non linéaires. Article à paraître dans la Revue Française d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.
- [19] J. SIMON. Existence et propriétés de solutions d'équations fortement non linéaires. (A paraître)
- [20] M. HESTENES. Multiplier and Gradient methods. J. of Optimization Theory and Applications, vol. 4, n° 5, 1969, p. 303-320.
- [21] R. VARGA. Matrix Iterative Analysis. Prentice Hall 1962.
- [22] M. MERIGOT. Solutions en normes L^p des problèmes elliptiques dans les polygones plans. Thèse Nice 1974.

