PUBLICATIONS

MATHÉMATIQUES

D'ORSAY

Schémas en groupes finis sur un anneau de valuation discrète et systèmes de Honda associés

par

Jean ROUBAUD

91 - 01

Université de PARIS-SUD

Département de Mathématiques
Bâtiment 425
91405 ORSAY France

PUBLICATIONS

MATHÉMATIQUES

D'ORSAY

Schémas en groupes finis sur un anneau de valuation discrète et systèmes de Honda associés

par

Jean ROUBAUD

91 - 01

Université de PARIS-SUD

Département de Mathématiques
Bâtiment 425
91405 ORSAY France

Schémas en groupes finis sur un anneau de valuation discrète et systèmes de HONDA associés

by

Jean ROUBAUD

91 - 01

RÉSUMÉ : Soit R un anneau de valuation discrète complet, d'inégales caractéristiques, d'indice de ramification absolu e, de corps résiduel k parfait de caractéristique p. Soit α un entier tel que $\frac{e}{p-1} < \alpha \leq e$ et $\overline{R} = R/\pi^\alpha \cdot R$. On définit les systèmes de HONDA relatifs à $(R, \overline{R})$, puis les filtrations admissibles pour un tel système. A tout p-groupe fini $\mathcal{G}$ sur $\overline{R}$ on associe fonctoriellement un système de HONDA (sans filtration) et on montre que les p–groupes finis $\widetilde{\mathcal{G}}$ sur R tels que $\mathcal{G} = \widetilde{\mathcal{G}} \underset{\operatorname{Spec} R}{\times} \operatorname{Spec} \overline{R}$ correspondent bijectivement aux filtrations admissibles pour le système de HONDA associé à $\mathcal{G}$.

Lorsque $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \underset{\operatorname{Spec} k}{\times} \operatorname{Spec} \overline{R}$, avec $\mathcal{G}_0$ p–groupe fini sur k, on peut calculer précisément le système de HONDA associé à $\mathcal{G}$ et étudier l'existence d'une filtration admissible pour ce système. On montre, comme conséquence, que pour $p \geq 5$ et $e \geq 2$, tout p–groupe fini sur k peut être relevé sur R.

ABSTRACT : Let R be a complete discrete valuation ring, with unequal characteristics, absolute ramification index e, and perfect residue field k of characteristic p. Let α be an integer such that $\frac{e}{p-1} < \alpha \leq e$ and $\overline{R} = R/\pi^\alpha \cdot R$.

We define the HONDA systems relative to $(R, \overline{R})$, then, for such a system, define the permitted filtrations. To every finite p–group scheme $\mathcal{G}$ over $\overline{R}$ one attaches functorially such a HONDA system (without filtration) and we prove that the finite p–group schemes $\widetilde{\mathcal{G}}$ such that $\mathcal{G} = \widetilde{\mathcal{G}} \underset{\operatorname{Spec} R}{\times} \operatorname{Spec} \overline{R}$ correspond bijectively to the permitted filtrations for the HONDA system attached to $\mathcal{G}$.

When $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \underset{\operatorname{Spec} k}{\times} \operatorname{Spec} \overline{R}$, with $\mathcal{G}_0$ a finite p–group scheme over k, we can precisely calculate the system attached to $\mathcal{G}$ and then study the existence of a permitted filtration for this system. As a consequence we prove that, when $p \geq 5$ and $e \geq 2$, every finite p-group scheme over k can be lifted to R.

Mots-clés : Groupes p–divisibles, schémas en groupes finis, déformations.

Code matière AMS 1980 (version 1980) : 14 L 05, 14 L 20, 14 D 15.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Soit p un nombre premier, k un corps parfait de caractéristique p, $W = W(k)$ l'anneau de Witt construit sur k ; soit σ l'automorphisme de Frobenius de W ; pour tout W-module M et tout entier relatif i, on pose : $M^{\sigma^i} = W \underset{W}{\otimes} M$ où le morphisme $W \longrightarrow W$ de changement de base est σ^i ; si $u : M \longrightarrow N$ est un morphisme W-linéaire, on notera de même $u^{\sigma^i} : M^{\sigma^i} \longrightarrow N^{\sigma^i}$ l'application $id_W \otimes u$.

Soit R un anneau de valuation discrète complet, d'inégales caractéristiques, de corps résiduel k. Il existe alors un homormorphisme d'anneaux : $W \longrightarrow R$, faisant de R un W-module libre de rang fini e = indice de ramification absolu de R.

Soit α un entier supérieur ou égal à 1. On pose : $\overline{R} = R/\pi^\alpha R$, et pour tout R-module M (resp tout R-morphisme $u : M \longrightarrow N$), $\overline{M} = M \underset{R}{\otimes} \overline{R}$ et $\overline{u} = u \underset{R}{\otimes} id_{\overline{R}}$.

Si S est un schéma (resp. si A est un anneau) on appelle p-groupe fini sur S (resp sur A) un schéma en groupe fini commutatif et plat sur S (resp. sur Spec(A)), annulé par une puissance de p. De même un groupe p-divisible sur S (resp sur A) est un groupe de BARSOTTI-TATE sur S (resp sur Spec(A)).

Le but de ce travail est d'établir la classification à isomorphisme près des p-groupes finis sur R, soit $\widetilde{\mathcal{G}}$, au moyen de leur réduction sur $\overline{R}$: $\mathcal{G} = \widetilde{\mathcal{G}} \underset{\operatorname{Spec} R}{\times} \operatorname{Spec} \overline{R}$ et de la donnée d'une structure supplémentaire, à savoir un certain sous module L d'un R-module associé à $\mathcal{G}$, l'ensemble de ces données, qu'on appellera "système de HONDA", étant défini grâce à la théorie cristalline. Puis, de ce théorème de classification on déduit quelques conséquences, dont la réponse, au moins pour $p \geq 5$, à la question posée par OORT et MUMFORD (cf. [10]), à savoir : à quelle condition les groupes finis sur k se relèvent-ils sur R?

Nous montrons que pour k parfait, $p \geq 5$, **tout** groupe fini sur k se relève sur R, dès que $e \geq 2$.

Nous allons d'abord rappeler les étapes qui ont précédé le présent travail.

C'est à GROTHENDIECK qu'on doit la méthode fondamentale, qui consiste à associer à G, groupe p-divisible sur k, un cristal. Précisons : si S_0 est un schéma où p est localement nilpotent, et G un groupe p-divisible sur S_0, il existe une extension de faisceaux $fppf$: $0 \longrightarrow \underline{\omega}_G \longrightarrow \mathbb{E}(G) \longrightarrow G^* \longrightarrow 0$ où G^* est le dual de G, et $\underline{\omega}_G$ le groupe vectoriel défini par ω_G (module des différentielles invariantes de G), cette extension étant **universelle**, en ce sens que si $0 \longrightarrow V \longrightarrow H \longrightarrow G^* \longrightarrow 0$ est une extension de G^* par un groupe vectoriel V, alors il existe un unique morphisme linéaire $\underline{\omega}_G \xrightarrow{f} V$ tel que cette extension s'obtienne en "poussant" l'extension $\mathbb{E}(G)$ à l'aide de f. Soit alors $S_0 \hookrightarrow S$ une immersion fermée définie par un idéal muni de **puissances divisées nilpotentes** (par conséquent, un nilidéal). Il existe localement ([6], Exp. ILLUSIE) un relèvement $\widetilde{G}$ de G sur S, c'est à dire un groupe p-divisible $\widetilde{G}$ sur S tel que $G = \widetilde{G} \underset{S}{\times} S_0$.

GROTHENDIECK montre alors que $\mathbb{E}(\widetilde{G})$ ne dépend pas du relèvement $\widetilde{G}$ de G qu'on a choisi. On obtient ainsi un foncteur sur la catégorie des groupes p-divisibles sur S_0. On a une suite exacte : $0 \longrightarrow \omega_{\widetilde{G}} \longrightarrow \mathbb{E}(G)_{(S_0 \hookrightarrow S)} \longrightarrow \widetilde{G}^* \longrightarrow 0$, où $\mathbb{E}(G)_{(S_0,S)} = E(\widetilde{G})$

par définition. Le fait que $\mathbb{E}(G)$ est un cristal signifie essentiellement que si on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & S' \arrow[d, "f"] \\
S_0 \arrow[ur, hook] \arrow[r, hook] & S
\end{tikzcd}$$

où $S_0 \hookrightarrow S$ et $S_0 \hookrightarrow S'$ sont comme ci-dessus, si G est un groupe p-divisible sur S_0, $\widetilde{G}$ un relèvement de G sur S, alors $E(f^*\widetilde{G}) = f^*(E(\widetilde{G}))$.

Si on pose : $\mathbb{D}G_S = \mathbb{D}G_{(S_0,S)} = Lie(\mathbb{E}(G)_{(S_0,S)})$ on a donc une filtration de $\mathbb{D}G_{(S_0,S)}$ naturelle : $\omega_G \hookrightarrow \mathbb{D}G_{S_0}$ par un sous module localement facteur direct, et pour tout relèvement $\widetilde{G}$ de G sur S, une filtration $\omega_{\widetilde{G}} \hookrightarrow \mathbb{D}G_{S_0}$ telle que $\omega_{\widetilde{G}} \underset{\mathcal{O}_S}{\otimes} \mathcal{O}_{S_0}$ s'identifie au sous module ω_G de $\mathbb{D}G_{S_0} = \mathbb{D}G_S \underset{\mathcal{O}_S}{\otimes} \mathcal{O}_{S_0}$. Le théorème de GROTHENDIECK (rappelé en (I-B-1-b, 1$^{\text{ère}}$ partie) pour plus de précision), dit que : se donner un relèvement $\widetilde{G}$ de G équivaut à se donner un sous module Ω de $\mathbb{D}G_S$, localement facteur direct tel que $\Omega \underset{\mathcal{O}_S}{\otimes} \mathcal{O}_{S_0}$ s'identifie à ω_G dans $\mathbb{D}G_{S_0}$; il y a une équivalence de catégories qui à $\widetilde{G}$ associe $(G, \omega_{\widetilde{G}})$. Pour les démonstrations, on peut se référer à MESSING ([5]).

Lorsque $S_0 = \operatorname{Spec} \overline{R}$, $S = S_n = \operatorname{Spec}(R/\pi^{(n+1)\alpha}R)$ avec $\alpha > \frac{e}{p-1}$, $S_0 \hookrightarrow S_n$ est une immersion du genre précédent. Si on pose $\mathbb{D}G_R = \varprojlim_n \mathbb{D}G_{S_n}$ (= R-module libre de rang fini), on déduit du théorème de GROTHENDIECK par passage à la limite que le foncteur : $\widetilde{G} \longmapsto (G, \omega_{\widetilde{G}})$ est une équivalence de la catégorie des groupes p-divisibles sur R avec celle des couples (G, Ω) où G est un groupe p-divisible sur $\overline{R}$ et $\Omega \hookrightarrow \mathbb{D}G_R$ est un sous module facteur direct, tel que $\Omega \underset{R}{\otimes} \overline{R}$ s'identifie à $\omega_G \subset \mathbb{D}G_{\overline{R}}$.

L'étape suivante, dûe à BADRA ([1], [2]), consiste à passer des groupes p-divisibles aux p-groupes finis sur R. Pour cela, on dispose, au choix, de deux résultats. Celui qu'utilise BADRA, et qui est historiquement le premier, est dû à OORT ([9bis]); il peut s'énoncer ainsi : si R est un anneau local nœthérien complet à corps résiduel parfait et si $\mathcal{G}$ est un p-groupe fini sur R, alors il existe un groupe p-divisible G_0 sur R et un monomorphisme de schémas en groupes $\mathcal{G} \hookrightarrow G_0$. Le second résultat, dû à RAYNAUD ([4], Théorème 3.1.1) est le suivant : si R est un anneau local et $\mathcal{G}$ un p-groupe fini sur R, il existe un schéma abélien A_0 sur R et un monomorphisme de schémas en groupes : $\mathcal{G} \hookrightarrow A_0$.

Dans le premier cas, $\mathcal{G}$ apparaît comme le noyau de l'isogénie de groupes p-divisibles $G_0 \longrightarrow G_1 = G_0/\mathcal{G}$; dans le second, comme le noyau de l'isogénie de schémas abéliens $A_0 \longrightarrow A_1 = A_0/\mathcal{G}$; en passant aux groupes p-divisibles $G_i = \varinjlim_n(\operatorname{Ker}(A_i \xrightarrow{p^n} A_i))$ on retrouve $\mathcal{G}$ comme le noyau de l'isogénie $G_0 \longrightarrow G_1 = G_0/\mathcal{G}$.

Notons au passage que le résultat de RAYNAUD est plus général que celui de OORT (on ne suppose pas R nœthérien ni complet), plus précis (on obtient une situation algébrique (schémas abéliens)) et que sa démonstration ne fait pas appel à la théorie de la déformation.

Si Is_A est la catégorie des isogénies sur A et $\mathcal{F}_A$ celle des p-groupes finis, on dispose donc d'un foncteur essentiellement surjectif : $Is_A \longrightarrow \mathcal{F}_A$, qui n'est pas une équivalence de catégories. Nous rappelons au (I-B de la 1ère partie) comment BADRA remplace Is_A par une nouvelle catégorie $\mathcal{C}_A$ munie d'une équivalence de catégories : $\mathcal{C}_A \longrightarrow \mathcal{F}_A$, essentiellement en "rendant inversibles les quasi-isomorphismes de Is_A".

Ceci étant fait, à toute isogénie $G_0 \longrightarrow G_1$ sur $\overline{R}$ (resp. $\widetilde{G}_0 \longrightarrow \widetilde{G}_1$ sur R) on associe, par la méthode de GROTHENDIECK, un complexe $\mathbb{D}G_{1R} \longrightarrow \mathbb{D}G_{0R}$ muni d'une $\overline{R}$-filtration : $\omega_{G_1} \longrightarrow \omega_{G_0}$ (resp. d'une R-filtration : $\omega_{\tilde{G}_1} \longrightarrow \omega_{\tilde{G}_0}$) objets d'une catégorie $CF^1(R,\overline{R})$ (resp. $CF^1(R)$). Lorsqu'on passe de Is_R et $Is_{\overline{R}}$ à $\mathcal{C}_R$ et $\mathcal{C}_{\overline{R}}$, il faut de même passer aux catégories $DF^1(R,\overline{R})$ et $DF^1(R)$ obtenues en rendant inversibles les quasi-isomorphismes. Nous rappelons les définitions de ces catégories au (I,A,1) de la 1ère partie de ce travail.

On dispose alors d'un diagramme commutatif de foncteurs, où les foncteurs horizontaux sont les foncteurs de GROTHENDIECK, où la flèche verticale de gauche est le changement de base $R \longrightarrow \overline{R}$, et où la flèche verticale de droite est le foncteur de réduction de la filtration de R à $\overline{R}$.

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C}_R & \xrightarrow{\Gamma} & DF^1(R) \\
\rho \downarrow & & \downarrow \rho' \\
\mathcal{C}_{\overline{R}} & \xrightarrow{\overline{\Gamma}} & DF^1(R,\overline{R})
\end{array}$$

Le *Théorème de* BADRA que nous rappelons en (I-B-2) de la 1ère partie dit essentiellement que se donner une isogénie sur R, objet de $\mathcal{C}_R$, équivaut à se donner un triplet $(G.,(M.,\Omega.),\eta)$, où $G.$ est une isogénie sur $\overline{R}$, objet de $\mathcal{C}_{\overline{R}}$, où $(M.,\Omega.)$ est un complexe filtré objet de $DF^1(R)$ et où η est un isomorphisme dans $DF^1(R,\overline{R})$ de $\overline{\Gamma}(G.)$ sur $\rho'((M.,\Omega.)) = (M.,\Omega. \underset{R}{\otimes} \overline{R})$.

Autrement dit, relever l'isogénie $G.$ de $\overline{R}$ à R équivaut à se donner **dans la catégorie ad hoc** un relèvement de la filtration $\omega_{G.}$ de $\mathbb{D}G._{\overline{R}}$ en une filtration $\Omega.$ de $\mathbb{D}G._R$.

Du théorème précédent et des équivalences de catégories : $\mathcal{C}_R \longrightarrow \mathcal{F}_R$ et $\mathcal{C}_{\overline{R}} \longrightarrow \mathcal{F}_{\overline{R}}$, BADRA déduit un énoncé pour les groupes finis : si $\mathcal{G}$ est un p-groupe fini sur $\overline{R}$, $G.$ une isogénie dont $\mathcal{G}$ est le noyau, $(M.,\omega.)$ l'objet de $DF^1(R,\overline{R})$ associé à $G.$, alors, se donner un relèvement de $\mathcal{G}$ sur R équivaut à se donner un objet $(N.,\Omega.)$ de $DF^1(R)$ et un isomorphisme η dans $DF^1(R,\overline{R})$: $\eta : (N.,\Omega. \underset{R}{\otimes} \overline{R}) \xrightarrow{\sim} (M.,\omega.)$ (cf. l'énoncé précis en I-B-2).

Parvenu à ce point, on aimerait disposer d'un énoncé dans lequel les complexes filtrés sont remplacés par des modules filtrés, objets a priori plus maniables. Cet objectif est réalisé par BADRA dans le cas où $R = W$ et $\overline{R} = k$, c'est à dire : $e = \alpha = 1$ (et $p > 2$); (cf. [1], Ch. III, Th. 2.7). A tout p-groupe fini $\widetilde{\mathcal{G}}$ sur W, si on pose $\mathcal{G} = \widetilde{\mathcal{G}} \underset{\operatorname{Spec} W}{\times} \operatorname{Spec} k$, on associe un couple $(M, L_{\widetilde{G}})$ où $M = M(\mathcal{G})$ est le module de Dieudonné de $\mathcal{G}$ (au sens de FONTAINE, cf. plus loin) et où $L_{\widetilde{G}} \hookrightarrow M(\mathcal{G})$ est un certain sous module, le couple (M, L) vérifiant les propriétés qui en font un "système de HONDA fini" (au sens de FONTAINE). On obtient ainsi une équivalence de catégories entre p-groupes finis sur W et systèmes de HONDA finis. BADRA retrouve ainsi un résultat de FONTAINE ([3bis]).

Il faut alors noter que : 1) dans la démonstration de BADRA, le module de Dieudonné au sens de FONTAINE $M(\mathcal{G})$ peut être partout remplacé par le module de Dieudonné cristallin $(\mathbb{D}\mathcal{G}_W)^{\sigma^{-1}}$ qui lui est isomorphe, d'après ([4], Th. 4.2.14); ce faisant, le sous-module $L_{\widetilde{G}}$ est en fait défini par voie cristalline.

2) La démonstration de BADRA ne s'appuie pas sur la classification générale qu'il a obtenue au moyen de complexes filtrés, mais mêle à nouveau groupes p-divisibles ou finis et modules filtrés.

Dans le I de la 1ère partie de ce travail, nous nous proposons de

1) Définir une notion de système de HONDA, libre ou fini, avec ou sans filtration et ce, pour e et α quelconques. Un système de HONDA sera un système $M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{v} M$ de deux R-morphismes tels que $v \circ f = \pi^\alpha.id_M$, $f \circ v = \pi^\alpha.id_{M'}$ (π = uniformisante de R). Il sera dit **libre** de rang h si M et M' sont des R-modules libres de rang h, et **fini** s'il s'obtient comme quotient d'un système libre $M_0 \xrightarrow{f_0} M'_0 \xrightarrow{v_0} M_0$ par un sous système libre $M_1 \xrightarrow{f_1} M'_1 \xrightarrow{v_1} M_1$ **de même rang.**

Si $M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{v} M$ est un système de HONDA fini, une **filtration** de ce système est la donnée d'un sous R-module L de M' tel que :

i) L'application canonique : $\frac{L}{\pi^\alpha.L} \longrightarrow \frac{M'}{Imf}$ est un isomorphisme;

ii) $L \cap \operatorname{Ker} v = \{0\}$.

On retrouve, quand $e = \alpha = 1$ la définition des systèmes de HONDA selon FONTAINE, ou plutôt une catégorie contenant ceux-ci.

Il convient de noter que si $M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{v} M$ est un système de HONDA fini, M et M' ont nécessairement la même longueur sur R, mais ne sont pas toujours R-isomorphes

Dans l'usage que nous en ferons, un cas intéressant (celui du système de HONDA fini associé au groupe α_p = noyau de Frobenius dans le groupe additif) fournira précisément un exemple où M et M' ne sont pas isomorphes.

2) Définir des équivalences de catégories : a) entre la catégorie $DF^1(R, \overline{R})$ des complexes de R-modules filtrés sur $\overline{R}$ et système finis de HONDA. b) entre la catégorie $DF^1(R)$ des complexes de R-modules filtrés et celle des systèmes finis de HONDA filtrés.

C'est ce dernier point qui est l'élément clé de ce travail; il faut remarquer (et on le signale dans le texte aux points concernés) que la démonstration de ces équivalences reprend et généralise celles de BADRA quand il traite le cas $e = \alpha = 1$, en les débarassant des groupes qui dans notre exposé réapparaîtront ensuite.

3) On peut alors traduire le théorème de classification de BADRA en remplaçant les catégories de complexes filtrés par celles des systèmes de HONDA finis, lorsque e est quelconque et $\alpha > \frac{e}{p-1}$. (I-B-2-c) : Relever un p-groupe fini $\mathcal{G}$ de $\overline{R}$ à R c'est se donner une filtration L du système de HONDA fini associé à $\mathcal{G}$.

Au II de la 1ère partie, on retrouve les "modules de Dieudonné" en un sens généralisé, alors qu'on les avait précédemment laissés de côté.

Si $\mathcal{D}$ est l'anneau séparé complété pour la topologie p-adique de l'enveloppe à puissances divisées de l'idéal de $W[T]$ définissant le quotient $\overline{R} \simeq k[T]/_{(T^\alpha)}$, on sait d'après ([4], Th. 1.2.7) qu'à tout cristal en modules on peut associer un $\mathcal{D}$-module $\mathcal{M}$, séparé et complet pour la topologie p-adique ($\mathcal{M}$ = valeur du cristal sur l'épaississement $(\overline{R}, \mathcal{D})$.

Si le cristal est associé à un groupe p-divisible G sur $\overline{R}$, on dispose de plus de deux $\mathcal{D}$-morphismes : $\mathcal{M}^\sigma \xrightarrow{F} \mathcal{M} \xrightarrow{V} \mathcal{M}^\sigma$ induits par le Frobenius et le Verschiebung de G. (Ici, $\mathcal{M}^\sigma = \mathcal{D} \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{M}$ où $\sigma : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ est le Frobenius, qui n'est plus un automorphisme, ni même fidèlement plat). On peut alors considérer que $(\mathcal{M}, \mathcal{M}^\sigma, V, F)$ est un "module de Dieudonné" associé à G ; on a $V \circ F = p.id_{\mathcal{M}^\sigma}$ et $F \circ V = p.id_{\mathcal{M}}$; G étant p-divisible, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}^\sigma$ sont libres de rang fini sur $\mathcal{D}$, égal à la hauteur de G.

En utilisant deux résultats, l'un de BERTHELOT-BREEN- MESSING ([4] - Proposition 4.3.10) et un résultat de BERTHELOT- MESSING ([4-bis], démonstration du Lemme 4.1.4), on peut alors exprimer le système de HONDA libre (M, M', v, f) de G à l'aide de $(\mathcal{M}, V, F)$; (en fait : $M = R \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \cdot \mathcal{M}$, mais la description de M' est moins évidente). (cf. : II-2, *Lemme* 4).

On peut alors passer aux groupes finis; cependant, en général, la "description" du système de HONDA fini (M, M', v, f) associé à un groupe fini $\mathcal{G}$ sur $\overline{R}$ en termes de modules de Dieudonné, n'est guère explicite (on l'obtient grâce à une présentation de $\mathcal{G}$ par une isogénie). Il y a un cas où elle l'est tout à fait, c'est celui où $\mathcal{G}$ est **constant** sur $\overline{R}$, c'est à dire, où $\mathcal{G}$ est de la forme $\mathcal{G}_0 \underset{\operatorname{Spec} k}{\times} \operatorname{Spec} \overline{R}$, avec $\mathcal{G}_0$ fini sur k ; ($\operatorname{Spec} k \hookrightarrow \operatorname{Spec} \overline{R}$ étant la section évidente de $\operatorname{Spec} \overline{R} \longrightarrow \operatorname{Spec} k$). On montre dans ce cas que le système de HONDA de $\mathcal{G}$ se calcule à partir seulement du module de Dieudonné de $\mathcal{G}_0$ (cf. le II-3)-c).

La **Deuxième partie** de ce travail consiste en l'étude détaillée du cas des groupes constants.

Au I, on commence par donner une description des modules de Dieudonné finis en termes de l'action de F et de V. On étudie aussi la possibilité de construire ces modules de façon générale de sorte qu'ils aient certains invariants numériques fixés.

Au II, on utilise le I pour obtenir la structure des systèmes de HONDA des groupes finis constants sur $\overline{R}$. Un cas éclairant est celui de $\alpha_{p,\overline{R}}$ noyau de l'élévation à la puissance p dans le groupe additif (II-1-h).

Enfin, au III, on étudie la question du relèvement de $\overline{R}$ à R des groupes constants, c'est à dire l'existence d'une filtration L de (M, M', v, f) ayant les propriétés requises.

Le résultat principal est que si $\frac{e}{p-1} < \alpha \leq \frac{e}{2}$, **tout** p-groupe fini constant sur $\overline{R}$ se relève sur R (III-2 *Proposition* 3), avec pour conséquence le fait que si $p \geq 5$ et $e \geq 2$, **tout** p-groupe fini sur k se relève sur R, comme on l'a dit au début de l'Introduction.

En complément (voir l'Appendice I), on étudie le cas des immersions définies par des puissances divisées **non nilpotentes**. On obtient par exemple que si $p \geq 3$ et si e est **pair**, tout p-groupe fini sur k se relève sur R, et aussi des théorèmes de classification analogues aux précédents à condition d'imposer à $\mathcal{G}$ la condition d'être connexe (ou, par dualité, unipotent).

Du point de vue de la méthode : les cristaux que nous utilisons, ainsi que leurs propriétés sont ceux définis par BERTHELOT-BREEN-MESSING dans [4]. Grâce à BERTHELOT-MESSING ([4bis]) ceux-ci sont isomorphes à ceux définis par GROTHENDIECK (la démonstration n'est pas formelle), et le Théorème de GROTHENDIECK est donc vrai dans ce cadre.

Bien que notre exposé en soit logiquement indépendant (sauf le *Corollaire* 1) il nous faut le situer par rapport aux travaux de FONTAINE ([3], [3bis]) sur la classification des groupes p-divisibles ou finis sur un anneau de valuation discrète; la notion de départ, celle de système de HONDA libre, lui est dûe dans le cas où $e = \alpha = 1$, c'est à dire dans le cas où $R = W$, $\overline{R} = k$; elle est alors presque analogue à celle de couple (M, L) où M est un module de Dieudonné libre de rang fini sur W et L un sous module de M, vérifiant les conditions : L est facteur direct dans M et $\frac{L}{pL} \xrightarrow{\sim} \frac{M}{Im\ F}$. Si $\widetilde{G}$ est un groupe p-divisible sur W, $G = \widetilde{G} \underset{\mathrm{Spec}\, W}{\times} \mathrm{Spec}\, k$, $M = \mathrm{Hom}_{k-gr}(G, C\widehat{W}_k)$ est le module de Dieudonné associé à G; (CW_k = groupe des covecteurs de Witt sur k). $L \subset M$ est défini en termes de "vrais logarithmes" de $\widetilde{G}$.

D'après ([4], Th. 4.2.14) le module M ainsi défini est relié au cristal de G par l'existence d'un isomorphisme de modules de Dieudonné : $M^{\sigma} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}G_W$.

FONTAINE montre dans [3] que les couples (M, L) classifient les groupes p-divisibles sur W à isomorphisme près.

Lorsque $e > 1$, à tout module de Dieudonné M, FONTAINE associe ([3], Ch. IV, § 2) un R-module M_R. Si $\widetilde{G}$ est p-divisible sur R et $G = \widetilde{G} \underset{\mathrm{Spec}\, R}{\times} \mathrm{Spec}\, k$, $M = M(G)$, il définit un sous R-module $L_{\widetilde{G}}$ de M_R, qui vérifie certaines conditions. En général le couple $(M(G), L_{\widetilde{G}})$ permet de reconstituer $\widetilde{G}$ à des groupes de torsion près, groupes qui sont annulés par une puissance de p **ne dépendant que de** e ([3], Ch. IV, Prop. 4.9).

Lorsque $e < p - 1$; le couple $(M(G), L_{\widetilde{G}})$ redonne $\widetilde{G}$ à **isomorphisme près**. Au langage près, ce couple doit vérifier des conditions équivalentes au fait que si $M = M(G)$, le système $(M(G) \underset{W}{\otimes} R, M_R, v, f, L_{\widetilde{G}})$ est un système de HONDA libre et filtré, dans le cas $e < p - 1$ et $\alpha = 1$. En fait, ce qui est considéré par FONTAINE, au lieu du système $R \underset{W}{\otimes} M \xrightarrow{f} M_R \xrightarrow{v} R \underset{W}{\otimes} M$, c'est une filtration $M[1]$ de M_R, qui est dans notre langage l'image de f.

Le module M^R que nous définissons au (II-3-c) de la 1ère partie, est au langage près, le module M_R de FONTAINE quand $e < p - 1$. En fait ce module est défini par FONTAINE comme la limite inductive d'un certain diagramme de R-modules, et c'est une de nos motivations de départ que de comprendre la signification de ce diagramme, dans l'étude des groupes finis sur R quand $e < p-1$ **et** $\alpha = 1$, c'est à dire $\overline{R} = k$.

Enfin, on a énoncé dans l'**Appendice II** ce qu'il est possible de sauver de la 1$^{\text{ère}}$ partie en fait de classification des groupes finis à l'aide d'un système de HONDA, lorsqu'au lieu de R, anneau de valuation discrète et $\overline{R} = R/\pi^{\alpha}.R$, on considère un anneau **local** R et $\overline{R} = R/a{\cdot}R$, où R et a vérifient certaines conditions. Il suffit de préciser alors la notion de filtration admissible d'un système de HONDA pour obtenir un théorème de classification analogue à celui où R est de valuation discrète.

Première partie
p-groupes finis sur un anneau de valuation discrète

I — Classification

A — Structures linéaires utiles

Soit R un anneau de valuation discrète, π une uniformisante de R, α un entier supérieur ou égal à 1. On pose : $\overline{R} = R/\pi^{\alpha}R$ et pour tout R-module M (resp. tout R-morphisme u) on note $\overline{M}$ (resp. $\overline{u}$) le $\overline{R}$-module (resp. le $\overline{R}$-morphisme) $M \underset{R}{\otimes} \overline{R}$ (resp. $u \underset{R}{\otimes} \overline{R}$). Dans cette partie A, aucune autre restriction n'est faite sur R.

1) Rappels de [1] et [2]

a– Modules libres filtrés

Soit $LF(R)$ (resp. $LF(R,\overline{R})$) la catégorie dont les objets sont les couples (M,Ω) (resp. (M,ω)) où M est un R-module libre de rang fini et Ω (resp. ω) est un sous module facteur direct de M (resp. de $\overline{M}$) et dont les flèches $(M,\Omega) \xrightarrow{u} (N,\Lambda)$ (resp. $(M,\omega) \xrightarrow{u} (N,\lambda)$) sont les R-morphismes $u : M \longrightarrow N$ tels que $u(\Omega) \subset \Lambda$(resp. $\overline{u}(\omega) \subset \lambda$). On appelle $LF(R)$ (resp. $LF(R,\overline{R})$) : la catégorie des R-modules libres filtrés (resp. des R-modules libres, $\overline{R}$-filtrés) ou encore des modules libres filtrés sur R (resp. sur $(R,\overline{R})$). Ce sont des catégories additives.

b– Complexes de longueur 1 de modules libres filtrés

Soit $CF^1(R)$ (resp. $CF^1(R,\overline{R})$) la catégorie dont les objets sont les complexes de longueur 1 : $(M_1,\Omega_1) \xrightarrow{d} (M_0,\Omega_0)$ (resp. $(M_1,\omega_1) \xrightarrow{d} (M_0,\omega_0)$) notés : $(M.,\Omega.)$ (resp. $(M.,\omega.)$) d'objets de $LF(R)$ (resp. de $LF(R,\overline{R})$) tels que : $rg_R M_0 = rg_R M_1$, $d : M_1 \longrightarrow M_0$ est **injectif** et $rg_R\Omega_0 = rg_R\Omega_1$ (resp. $rg_{\overline{R}}\omega_0 = rg_{\overline{R}}\omega_1$), et dont les morphismes $u = (u_1,u_0) : (M.,\Omega.) \longrightarrow (N.,\Lambda.)$ (resp. $(M.,\omega.) \longrightarrow (N.,\lambda.)$) sont les couples de morphismes (u_1,u_0) de $LF(R)$ (resp. de $LF(R,\overline{R})$) rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
(M_1,\Omega_1) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "u_1"] & (M_0,\Omega_0) \arrow[d, "u_0"] \\
(N_1,\Lambda_1) \arrow[r, "\delta"] & (N_0,\Lambda_0)
\end{tikzcd}$$

(resp. $\cdots$).

c– Homotopies

Soient $(M_1,\Omega_1) \xrightarrow{d} (M_0,\Omega_0)$ et $(N_1,\Lambda_1) \xrightarrow{\delta} (N_0,\Lambda_0)$, (resp. $(M_1,\omega_1) \xrightarrow{d} (M_0,\omega_0)$ et $(N_1,\lambda_1) \xrightarrow{\delta} (N_0,\lambda_0)$) des objets de $LF(R)$, (resp. de $LF(R,\overline{R})$) et soient u et u' : $(M.,\Omega.) \rightrightarrows (N.,\Lambda.)$, (resp. $(M.,\omega.) \rightrightarrows (N.,\lambda.)$) deux flèches de $CF^1(R)$, (resp. de

$CF^1(R,\overline{R})$). On dit que u et u' sont homotopes s'il existe une homotopie de u et u', c'est à dire un morphisme $h : (M_0,\Omega_0) \longrightarrow (N_1,\Lambda_1)$, (resp. $(M_0,\omega_0) \longrightarrow (N_1,\lambda_1)$) de $LF(R)$, (resp. de $LF(R,\overline{R})$) tel que : $u'_1 - u_1 = h \circ d$ et $u'_0 - u_0 = \delta \circ h$.

d– Quasi-isomorphismes

Soit $s = (s_1,s_0) : (M.,\Omega.) \longrightarrow (N.,\Lambda.)$, (resp. $(M.,\omega.) \longrightarrow (N.,\lambda.)$) une flèche de $CF^1(R)$, (resp. de $CF^1(R,\overline{R})$). Alors s induit des morphismes de complexes ordinaires : $M. \longrightarrow N.$, et $\Omega. \longrightarrow \Lambda.$, $\frac{M.}{\Omega.} \longrightarrow \frac{N.}{\Lambda.}$, (resp. et $\omega. \longrightarrow \lambda.$, $\frac{\overline{M.}}{\omega.} \longrightarrow \frac{\overline{N.}}{\lambda.}$). On dit que s est un quasi-isomorphisme si ces derniers morphismes induisent des isomorphismes sur l'homologie de ces complexes.

Remarque : Si s et s' sont homotopes, s est un quasi-isomorphisme si et seulement si s' l'est aussi.

e– Réduction de R à $\overline{R}$

Si à (M,Ω), objet de $LF(R)$ on associe (M,ω), objet de $LF(R,\overline{R})$, avec $\omega = \Omega \underset{R}{\otimes} \overline{R}$, on obtient, avec la définition évidente pour les flèches, un foncteur $LF(R) \longrightarrow LF(R,\overline{R})$, dit : foncteur de réduction de la filtration, qui induit un foncteur : $CF^1(R) \longrightarrow CF^1(R,\overline{R})$, lequel transforme homotopies en homotopies et quasi-isomorphismes en quasi-isomorphismes.

f– Catégories de fractions $DF^1(R)$ et $DF^1(R,\overline{R})$

Soit $CF^1(R)$/homotopie, (resp. $CF^1(R,\overline{R})$/homotopie) la catégorie dont les objets sont ceux de $CF^1(R)$, (resp. de $CF^1(R,\overline{R})$) et dont les flèches sont les classes d'équivalence modulo la relation d'homotopie de flèches de $CF^1(R)$, (resp. de $CF^1(R,\overline{R})$). D'après la remarque du d– on peut définir dans ces catégories les quasi-isomorphismes comme les classes d'homotopie des quasi-isomorphismes de $CF^1(R)$, (resp. de $CF^1(R,\overline{R})$). Soit $DF^1(R)$, (resp. $DF^1(R,\overline{R})$) la catégorie obtenue en rendant inversibles les quasi-isomorphismes de $CF^1(R)$/homotopie, (resp. de $CF^1(R,\overline{R})$/homotopie). Cette catégorie a les mêmes objets que $CF^1(R)$, (resp. $CF^1(R,\overline{R})$).

Quant aux flèches de cette catégorie, les arguments de ([1], Ch. I) prouvent qu'elles peuvent être décrites en termes de **fractions** à dénominateurs les quasi-isomorphismes dont la famille vérifie les conditions requises.

g– Foncteurs de réduction de la filtration

Ce qu'il est dit en e– prouve que le foncteur $CF^1(R) \longrightarrow CF^1(R,\overline{R})$ de réduction de la filtration induit un foncteur : $DF^1(R) \longrightarrow DF^1(R,\overline{R})$ et un diagramme commutatif de foncteurs ci-dessous, où les foncteurs horizontaux sont les foncteurs canoniques de localisation. Ces foncteurs sont des foncteurs additifs.

$$\begin{array}{ccc} CF^1(R) & \longrightarrow & DF^1(R) \\ \downarrow & & \downarrow \\ CF^1(R,\overline{R}) & \longrightarrow & DF^1(R,\overline{R}) \end{array}$$

Remarque : Les catégories de complexes $CF^1(R)$, $CF^1(R,\overline{R})$ et les catégories $DF^1(R)$ et $DF^1(R,\overline{R})$ sont des sous catégories pleines des catégories étudiées en [1], où les complexes sont considérés sans restriction sur le rang ni sur l'injectivité de $M_1 \longrightarrow M_0$. Tout d'abord, les démonstrations de [1] s'appliquent aux sous catégories que nous utilisons. Ensuite, comme on le verra plus loin, $DF^1(R)$ et $DF^1(R,\overline{R})$ s'interprètent en termes de **systèmes de HONDA finis**. De plus ces sous catégories sont les seules utiles pour le problème de la classification des p-groupes finis.

2) Systèmes de HONDA libres

La notion, présentée ici, de système de HONDA libre, diffère de celle définie en ([3]) bien qu'elle s'en inspire. D'une part, nous ne supposons pas que $\alpha = 1$; d'autre part les R-modules qui interviennent ne sont pas pourvus a priori d'une W-structure (où W = anneau de Witt construit sur le corps résiduel de R, supposé parfait de caractéristique positive).

a– Systèmes de HONDA libres

Soit $LH(R,\overline{R})$ la catégorie dont les objets sont les triplets (M, M', v) où M et M' sont **libres de même rang fini sur** R et où $v : M' \longrightarrow M$ est un R-morphisme **injectif** tel que $\operatorname{Coker} v$ soit annulé par π^α et **libre sur** $\overline{R}$, et dont les morphismes $u : (M, M', v) \longrightarrow (N, N', w)$ sont les R-morphismes $u : M \longrightarrow N$ tels que $u(\operatorname{Im}(v)) \subset \operatorname{Im}(w)$.

Lorsque (M, M', v) est un tel objet, on définit $f : M \longrightarrow M'$, le R-morphisme unique tel que $v \circ f = \pi^\alpha \cdot id_M$ (et $f \circ v = \pi^\alpha \cdot id_{M'}$). Alors $\operatorname{Coker}(f)$ est aussi libre sur $\overline{R}$.

b– Systèmes de HONDA libres et filtrés

Soit $LH(R)$ la catégorie dont les objets sont les quadruplets (M, M', v, L) où (M, M', v) est objet de $LH(R,\overline{R})$ et où $L \hookrightarrow M'$ est un sous R-module vérifiant la condition suivante :

Le $\overline{R}$ morphisme composé $\overline{L} \longrightarrow \overline{M}' \twoheadrightarrow \operatorname{Coker} f$ est un **isomorphisme.**

(En particulier, $\overline{L} \hookrightarrow \overline{M}'$, d'où, L est facteur direct dans M'). Les flèches $u : (M, M', v, L) \longrightarrow (N, N', w, \Lambda)$ sont les flèches $(M, M', v) \longrightarrow (N, N', w)$ de $LH(R,\overline{R})$ telles que $u \circ v(L) \subset w(\Lambda)$.

c– Equivalences de catégories : $LF(R,\overline{R}) \longrightarrow LH(R,\overline{R})$ et $LF(R) \longrightarrow LH(R)$. Soit (M,ω), (resp. (M,Ω)) un objet de $LF(R,\overline{R})$ (resp. de $LF(R)$). On pose : $M' = \operatorname{Ker}(M \twoheadrightarrow \overline{M} \twoheadrightarrow \frac{\overline{M}}{\omega})$, (resp. $\operatorname{Ker}(M \twoheadrightarrow \overline{M} \twoheadrightarrow \frac{\overline{M}}{\overline{\Omega}})$) et $v : M' \hookrightarrow M$ l'injection canonique, (resp. et $L = v^{-1}(\Omega)$; en fait Ω est contenu dans M'). Alors (M,M',v), (resp.(M,M',v,L) est un objet de $LH(R,\overline{R})$, (resp. de $LH(R)$(*)). Définition évidente pour les flèches. On obtient ainsi des foncteurs : $LF(R,\overline{R}) \longrightarrow LH(R,\overline{R})$ et $LF(R) \longrightarrow LH(R)$.

A l'inverse : soit (M,M',v), (resp. (M,M',v,L)) un objet de $LH(R,\overline{R})$, (resp. de $LH(R)$). On pose : $\omega = \operatorname{Im}(M' \overset{v}{\hookrightarrow} M \twoheadrightarrow \overline{M})$ (resp. $\Omega = v(L)$). Il est clair que ω est facteur direct dans $\overline{M}$. Il faut vérifier que Ω est facteur direct dans M. Or on a :

$$\Omega \cap \pi^{\alpha} \cdot M = v(L) \cap v(\operatorname{Im} f) = v(L \cap \operatorname{Im} f) = v(\pi^{\alpha} \cdot L) = \pi^{\alpha} \cdot v(L) = \pi^{\alpha} \cdot \Omega.$$

Comme M est libre, la relation : $\Omega\cap\pi^{\alpha}\cdot M = \pi^{\alpha}\cdot\Omega$ et la théorie des diviseurs élémentaires impliquent que Ω est facteur direct dans M.

L'action des foncteurs sur les flèches est l'action évidente et il est clair que les foncteurs $LF(R,\overline{R}) \underset{\longrightarrow}{\longleftarrow} LH(R,\overline{R})$ (resp. $LF(R) \underset{\longrightarrow}{\longleftarrow} LH(R)$) sont des équivalences quasi inverses l'une de l'autre.

3) Systèmes de Honda finis

a– Soit $S(R,\overline{R})$ la catégorie dont les objets sont les quadruplets (M,M',v,f), où M et M' sont des R-modules **de longueur finie** et $v : M' \longrightarrow M$ et $f : M \longrightarrow M'$ des applications R-linéaires telles que :

$$v \circ f = \pi^{\alpha} \cdot id_M \quad \text{et} \quad f \circ v = \pi^{\alpha} \cdot id_{M'},$$

et dont les morphismes $(u,u') : (M,M',v,f) \longrightarrow (N,N',w,g)$ sont les couples : $u : M \longrightarrow N$, $u' : M' \longrightarrow N'$ d'applications R-linéaires telles que :

$$g \circ u = u' \circ f \quad \text{et} \quad w \circ u' = u \circ v.$$

b– Le foncteur : $CF^1(R,\overline{R}) \longrightarrow S(R,\overline{R})$

A un objet de $CF^1(R,\overline{R}) : (M_1,\omega_1) \longrightarrow (M_0,\omega_0)$ on associe d'abord le morphisme : $(M_1,M_1',v_1) \longrightarrow (M_0,M_0',v_0)$ au moyen du foncteur étudié en 2)-c). Remarquons qu'alors M_1 et M_0 (resp. $\operatorname{Coker} v_0$ et $\operatorname{Coker} v_1$) ont même rang sur R (resp. sur $\overline{R}$) et que $M_1 \longrightarrow M_0$ et $M_1' \longrightarrow M_0'$ sont injectifs; on pose : $M = \operatorname{Coker}(M_1 \hookrightarrow M_0)$, $M' = \operatorname{Coker}(M_1' \hookrightarrow M_0')$, v le morphisme induit par v_0 et v_1 et f celui induit par f_0 et

(*) Preuve de : (M,M',v,L) est objet de $LH(R)$: il est clair que (M,M',v) est objet de $LH(R,\overline{R})$; reste à prouver que L vérifie les conditions requises, or : $M' = \Omega + \pi^{\alpha} \cdot M \hookrightarrow M$. Donc : $\frac{M'}{\operatorname{Im} f} \overset{v}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} \frac{v(M')}{\pi^{\alpha}\cdot M} \overset{\sim}{\longrightarrow} \omega = \frac{\Omega}{\pi^{\alpha}\cdot\Omega} \overset{v}{\underset{\sim}{\longleftarrow}} \frac{L}{\pi^{\alpha}\cdot L}$: cqfd.

f_1 (rappelons que f_0 et f_1 sont déterminées par v_0 et v_1). Il est clair que (M, M', v, f) est objet de $S(R, \overline{R})$; de plus :

$$M \text{ et } M' \text{ ont même longeur sur } R.$$

A un morphisme $\psi = (\psi_1, \psi_0) : (M., \omega.) \longrightarrow (N., \lambda.)$ on associe d'abord des flèches correspondantes de complexes de $LH(R, \overline{R})$, puis en passant au conoyau, une flèche : $(M, M', v, f) \longrightarrow (N, N', w, g)$ de $S(R, \overline{R})$.

c– Systèmes de Honda finis

Soit $FH(R, \overline{R})$ la sous catégorie pleine de $S(R, \overline{R})$ dont les objets sont isomorphes à l'image par le foncteur précédent d'un objet de $CF^1(R, \overline{R})$. On obtient ainsi un foncteur $CF^1(R, \overline{R}) \longrightarrow FH(R, \overline{R})$, essentiellement surjectif sur les objets.

Les objets de $FH(R, \overline{R})$ sont dits : **systèmes de Honda finis** sur $(R, \overline{R})$.

d) Systèmes de Honda finis et filtrés

Soit $FH(R)$ la catégorie dont les objets sont les quintuplets : (M, M', v, f, L) où (M, M', v, f) est objet de la catégorie $FH(R, \overline{R})$ et où $L \hookrightarrow M'$ est un sous R-module vérifiant les condtions :

i) l'application composée induite : $\overline{L} \longrightarrow \overline{M}' \twoheadrightarrow \operatorname{Coker} f$ est un isomorphisme;

ii) $L \cap \operatorname{Ker} v = \{0\}$

et dont les flèches $(u, u') : (M, M', v, f, L) \longrightarrow (N, N', w, g, \Lambda)$ sont les flèches (u, u') : $(M, M', v, f) \longrightarrow (N, N', w, g)$ de $FH(R, \overline{R})$ telles que :

$$u'(L) \subset \Lambda.$$

Les objets de cette catégorie sont dits : **systèmes de Honda finis filtrés** sur R.

On dispose évidemment du **foncteur d'oubli** de la filtration : $FH(R) \xrightarrow{\omega} FH(R, \overline{R})$ qui à (M, M', v, f, L) associe (M, M', v, f).

e– Le foncteur : $CF^1(R) \longrightarrow FH(R)$

A un objet : $(M_1, \Omega_1) \longrightarrow (M_0, \Omega_0)$ de $CF^1(R)$ on associe d'abord par le foncteur $LF(R) \longrightarrow LH(R)$, un morphisme : $(M_1, M'_1, v_1, L_1) \longrightarrow (M_0, M'_0, v_0, L_0)$ de $LH(R)$. On pose ensuite : $M = \operatorname{Coker}(M_1 \hookrightarrow M_0)$, $M' = \operatorname{Coker}(M'_1 \hookrightarrow M'_0)$, $L = \operatorname{Coker}(L_1 \hookrightarrow L_0)$, et $v : M' \longrightarrow M$, $f : M \longrightarrow M'$ les applications induites par v_0, v_1 et f_0, f_1. Il faut prouver que (M, M', v, f, L) est un objet de $FH(R)$. Il est d'abord clair que (M, M', v, f) est l'objet de $FH(R, \overline{R})$, image de $(M., \omega.)$ par le foncteur $CF^1(R, \overline{R}) \longrightarrow FH(R, \overline{R})$, où on pose : $\omega_i = \overline{\Omega}_i$; $(i = 0, 1)$. Reste à prouver le :

Lemme 1. —

α) *l'application canonique* $j : L \longrightarrow M'$ *est injective,*

β) *le composé :* $\overline{L} \longrightarrow \overline{M}' \longrightarrow \operatorname{Coker} f$ *est un isomorphisme,*

γ) $(\operatorname{Ker} v) \cap L = \{0\}$.

Ce *Lemme* et la démonstration de ses points α) et γ) sont directement inspirés de ([1], III$^{\text{ième}}$ partie, Corollaire 2.3), où il est prouvé pour $\alpha = e = 1$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} R = W(k) \\ \overline{R} = k. \end{cases}$$

Démonstration :

α) On a un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_1' \arrow[r] & M_0' \arrow[r] & M' \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & L_1 \arrow[r] \arrow[u, hook] & L_0 \arrow[r] \arrow[u, hook] & L \arrow[r] \arrow[u, "j"] & 0
\end{tikzcd}$$

d'où la suite exacte du serpent :

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} j \longrightarrow \frac{M_1'}{L_1} \longrightarrow \frac{M_0'}{L_0} \longrightarrow \frac{M'}{L} \longrightarrow 0.$$

Or $\operatorname{Ker} j \hookrightarrow L$ est de torsion et $\frac{M_1'}{L_1}$ est libre sur R. Donc $\operatorname{Ker} j = 0$ et on a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \frac{M_1'}{L_1} \longrightarrow \frac{M_0'}{L_0} \longrightarrow \frac{M'}{L} \longrightarrow 0$$

β) Prouvons que $\overline{L} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Coker} f$.

On a un diagramme commutatif, à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Coker} f_1 \arrow[r] & \operatorname{Coker} f_0 \arrow[r] & \operatorname{Coker} f \arrow[r] & 0 \\
\overline{L}_1 \arrow[r] \arrow[u, "\wr"', "(3)"] & \overline{L}_0 \arrow[r] \arrow[u, "\wr"', "(2)"] & \overline{L} \arrow[r] \arrow[u, "(1)"] & 0
\end{tikzcd}$$

où les deux flèches (3) et (2) sont des isomorphismes : donc (1) est aussi un isomorphisme.

γ) Soit $j_i : L_i \hookrightarrow M_i^!$ $(i = 0, 1)$ l'inclusion. On a vu en (2)-c) que $v_i \circ j_i(L_i)$ est facteur direct dans M_i. On a alors un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] & M_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & L_1 \arrow[r] \arrow[u, hook, "v_1 \circ j_1"'] & L_0 \arrow[r] \arrow[u, hook, "v_0 \circ j_0"'] & L \arrow[r] \arrow[u, "v \circ j"'] & 0
\end{tikzcd}$$

d'où la suite exacte du serpent :

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} v \circ j \longrightarrow \operatorname{Coker}\ v_1 \circ j_1 \longrightarrow \operatorname{Coker}\ v_0 \circ j_0 \longrightarrow \operatorname{Coker}\ v \circ j \longrightarrow 0$$

Or : $\operatorname{Ker} v \circ j$ est de torsion et Coker $v_1 \circ j_1$ est sans torsion. Donc $\operatorname{Ker} v \circ j = 0$. $\diamond$

Remarque : Le diagramme ci-dessus (démonstration du point β)) s'insère dans le diagramme commutatif à lignes exactes ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[dr, phantom, "(8)"] & \operatorname{Ker} \pi_M^\alpha \arrow[r] \arrow[dr, phantom, "(7)"] & \overline{M}_1 \arrow[r] \arrow[dr, phantom, "(6)"] & \overline{M}_0 \arrow[r] \arrow[dr, phantom, "(5)"] & \overline{M} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} f \arrow[r] \arrow[u] & \operatorname{Coker}\ f_1 \arrow[r] \arrow[u] & \operatorname{Coker}\ f_0 \arrow[r] \arrow[u] & \operatorname{Coker}\ f \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} \pi_{M'}^\alpha \arrow[r] \arrow[u, "\varphi"'] \arrow[uu, bend left] \arrow[dr, phantom, "(4)"] & \overline{M}'_1 \arrow[r] \arrow[u, two heads] \arrow[uu, bend left] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & \overline{M}'_0 \arrow[r] \arrow[u, two heads] \arrow[uu, bend left] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & \overline{M}' \arrow[r] \arrow[u] \arrow[uu, bend left] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} \pi_L^\alpha \arrow[r] \arrow[u] \arrow[uu, bend right] & \overline{L}_1 \arrow[r] \arrow[u] \arrow[uu, bend right] & \overline{L}_0 \arrow[r] \arrow[u] \arrow[uu, bend right] & \overline{L} \arrow[r] \arrow[u] \arrow[uu, bend right] & 0
\end{tikzcd}$$

où les $1^{\text{ère}}$, $3^{\text{ème}}$, $4^{\text{ème}}$ lignes proviennent de la suite exacte des $Tor_i^R(?, \overline{R})$ appliquée aux suites exactes :

$$\begin{aligned}
0 &\longrightarrow M_1 \longrightarrow M_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0, \\
0 &\longrightarrow M'_1 \longrightarrow M'_0 \longrightarrow M' \longrightarrow 0, \\
0 &\longrightarrow L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow L \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

et où la $2^{\text{ème}}$ ligne est la suite exacte du serpent associée au diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & M'_1 & \longrightarrow & M'_0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\uparrow{\scriptstyle f_1} & & \Big\uparrow{\scriptstyle f_0} & & \Big\uparrow{\scriptstyle f} & & \\
0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & M_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

On vient de voir que la flèche composée (1) est un isomorphisme; il en est donc de même de (4). D'autre part, les flèches (5), (6) et (7) sont induites par v, v_0, v_1 ; (8) s'identifie donc à $\breve{v}$: $\operatorname{Ker}\pi^\alpha_{M'} \longrightarrow \operatorname{Ker}\pi^\alpha_M$ induite par v.

Comme (4) est bijective, l'application canonique : $\operatorname{Ker}\pi^\alpha_{M'} \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Ker} f$ est **surjective**. Comme $\operatorname{Ker}\pi^\alpha_{M'} \xrightarrow{(8)} \operatorname{Ker}^\alpha_M$ est induite par v, φ surjective signifie :

$$\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Im}\ v.$$

Enfin, $\overline{M}' \twoheadrightarrow \operatorname{Coker}\ \overline{f}$ est scindée ($\overline{M}' = \operatorname{Im}\ \overline{f} \oplus \overline{L}$). Comme Coker f_0 et Coker f_1 sont libres sur $\overline{R}$, on en déduit aisément que φ, qui est surjective, **est aussi scindée**, c'est à dire

$$\operatorname{Ker}\pi^\alpha_{M'} = \operatorname{Ker}\pi^\alpha_L \oplus \operatorname{Ker} v$$

On dispose donc d'un diagramme commutatif de foncteurs additifs où les foncteurs horizontaux viennent d'être définis, où le foncteur vertical de gauche est le foncteur de **réduction** de la filtration, et le foncteur vertical de droite est le foncteur **d'oubli** de la filtration.

$$\begin{array}{ccc}
CF^1(R) & \longrightarrow & FH(R) \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \omega} \\
CF^1(R,\overline{R}) & \longrightarrow & FH(R,\overline{R})
\end{array}$$

4) Suites exactes associées aux objets précédents

a– Soit $(M.,\omega.)$ un objet de $CF^1(R,\overline{R})$, c'est à dire une application linéaire :

$d : M_1 \hookrightarrow M_0$ injective et un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\frac{\overline{M}_1}{\omega_1} \arrow[r] & \frac{\overline{M}_0}{\omega_0} \\
\overline{M}_1 \arrow[r, "\overline{d}"] \arrow[u, two heads] & \overline{M}_0 \arrow[u, two heads] \\
\omega_1 \arrow[r] \arrow[u, hook] & \omega_0 \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Si on pose :

$$n = \operatorname{Ker}(\omega_1 \longrightarrow \omega_0), \qquad \omega = \operatorname{Coker}(\omega_1 \longrightarrow \omega_0)$$
$$\ell = \operatorname{Ker}\left(\frac{\overline{M}_1}{\omega_1} \longrightarrow \frac{\overline{M}_0}{\omega_0}\right), \quad \nu = \operatorname{Coker}\left(\frac{\overline{M}_1}{\omega_1} \longrightarrow \frac{\overline{M}_0}{\omega_0}\right)$$
$$M = \operatorname{Coker}\ d, \quad \overline{M} = \operatorname{Coker}(\overline{M}_1 \longrightarrow \overline{M}_0) = \overline{R} \underset{R}{\otimes} (\operatorname{Coker}\ d)$$

et si on note que $\operatorname{Ker}(\overline{M}_1 \longrightarrow \overline{M}_0) \simeq Tor_1^R(M, \overline{R}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ker} \pi_M^\alpha$, on a la suite exacte du serpent, fonctorielle par rapport à $(M., \omega.)$:

$$0 \longrightarrow n \longrightarrow \operatorname{Ker} \pi_M^\alpha \longrightarrow \ell \longrightarrow \omega \longrightarrow \overline{M} \longrightarrow \nu \longrightarrow 0.$$

b– Soit (M, M', v, f) un objet de $S(R, \overline{R})$. On a alors des suites exactes (de $\overline{R}$-modules) :

$i)$ $\quad 0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f \longrightarrow \operatorname{Ker} \pi_M^\alpha \xrightarrow{f} \operatorname{Ker} v \longrightarrow \operatorname{Coker}\ f \xrightarrow{v} \overline{M} \longrightarrow \operatorname{Coker}\ v \longrightarrow 0$

et

$ii)$ $\quad 0 \longrightarrow \operatorname{Ker} v \longrightarrow \operatorname{Ker} \pi_{M'}^\alpha \xrightarrow{v} \operatorname{Ker} f \longrightarrow \operatorname{Coker}\ v \xrightarrow{f} \overline{M}' \longrightarrow \operatorname{Coker}\ f \longrightarrow 0.$

De plus, si (M, M', v, f) est l'objet de $FH(R, \overline{R})$ associé ((3)-c)) à l'objet $(M., \omega.)$ de $CF^1(R, \overline{R})$ alors les suites exactes du a) et du b)-i sont canoniquement isomorphes, en utilisant les isomorphismes :

$$\operatorname{Coker}\ f_i \overset{v_i}{\xrightarrow{\sim}} \omega_i, \quad \operatorname{Coker}\ v_i \xrightarrow{\sim} \frac{\overline{M}_i}{\omega_i} \qquad (i = 0, 1).$$

c– Soit $(M.,\Omega.)$ un objet de $CF^1(R)$ et (M,M',v,f,L) l'objet qui lui correspond par le foncteur $CF^1(R) \longrightarrow FH(R)$.

Soit $M = \text{Coker}(M_1 \hookrightarrow M_0)$ et $\Omega = \text{Coker}(\Omega_1 \hookrightarrow \Omega_0)$. On a une suite exacte $0 \longrightarrow \Omega \longrightarrow M \longrightarrow \frac{M}{\Omega} \longrightarrow 0$ de R-modules.

Si (M_i, M_i', v_i, L_i) est l'objet de $LH(R)$ correspondant à (M_i,Ω_i) $(i = 0,1)$ on a des isomorphismes : $L_i \xrightarrow{\sim} \Omega_i$ induits par v_i et aussi des isomorphismes : $\frac{M_i}{\Omega_i} \xrightarrow{\sim} \frac{M_i'}{L_i}$, ces derniers provenant des isomorphismes :

$$\frac{M_i'}{L_i} = \frac{L_i + \text{Im } f_i}{L_i} \xrightarrow{\sim} \frac{\text{Im } f_i}{L_i \cap \text{Im } f_i} = \frac{\text{Im } f_i}{\pi_\cdot^\alpha L_i} = \frac{\text{Im } f_i}{f_i(v_i(L_i))} \overset{f_i}{\underset{\sim}{\longleftarrow}} \frac{M_i}{v_i(L_i)} = \frac{M_i}{\Omega_i},$$

d'où il résulte les isomorphismes fonctoriels :

$$L \xrightarrow{\sim} \Omega \quad \text{et} \quad \frac{M'}{L} \xrightarrow{\sim} \frac{M}{\Omega}$$

5) Les foncteurs $DF^1(R,\overline{R}) \xrightarrow{\overline{\Phi}} FH(R,\overline{R})$ et $DF^1(R) \xrightarrow{\Phi} FH(R)$.

a– Soient $(M.,\omega.) \underset{\psi_2}{\overset{\psi_1}{\rightrightarrows}} (N.,\lambda.)$ (resp.$(M.,\Omega.) \underset{\psi_2}{\overset{\psi_1}{\rightrightarrows}} (N.,\Lambda.)$) deux flèches de $CF^1(R,\overline{R})$ (resp. de $CF^1(R)$) et soient $(M,M',v,f) \underset{u_2}{\overset{u_1}{\rightrightarrows}} (N,N',w,g)$ (resp. $(M,M',v,f,L) \underset{u_2}{\overset{u_1}{\rightrightarrows}} (N,N',w,g,\Lambda)$) les flèches correspondantes de $FH(R,\overline{R})$ (resp. de $FH(R)$). Il est clair que si ψ_1 et ψ_2 sont homotopes, alors u_1 et u_2 sont égales.

Par conséquent : le foncteur $CF^1(R,\overline{R}) \longrightarrow FH(R,\overline{R})$ (resp. $CF^1(R) \longrightarrow FH(R)$) se factorise en $CF^1(R,\overline{R})/_{\text{homotopie}} \longrightarrow FH(R,\overline{R})$ (resp. $CF^1(R)/_{\text{homotopie}} \longrightarrow FH(R)$).

b– Soit $(M.,\omega.) \xrightarrow{\psi} (N.,\lambda.)$ (resp. $(M.,\Omega.) \xrightarrow{\psi} (N.,\Lambda.)$) une flèche de $CF^1(R,\overline{R})$ (resp. de $CF^1(R)$) et $(M,M',v,f) \xrightarrow{u} (N,N',w,g)$, (resp. $(M,M',v,f,L) \xrightarrow{u} (N,N',w,g,\Lambda)$) la flèche correspondante de $FH(R,\overline{R})$ (resp. de $FH(R)$).

Alors, ψ est un quasi isomorphisme si et seulement si u est un isomorphisme.

En effet, il suffit d'utiliser les suites exactes isomorphes définies en 7)-a) et en 7)-b)-i) associées aux objets (M,M',v,f) et $(M.,\omega.)$ d'une part et (N,N',w,g) et $(N.,\lambda.)$ d'autre part et les flèches entre ces suites exactes qui se déduisent des flèches données (resp. et d'utiliser les isomorphismes 7)-c) : $L \xrightarrow{\sim} \Omega$, $\frac{M'}{L} \simeq \frac{M}{\Omega}$ et les analogues pour $(N.,\Lambda.)$).

c– Il résulte de a– et b– qu'il existe des foncteurs $\overline{\Phi}$ et Φ et un diagramme commutatif de foncteurs additifs :

$$\begin{array}{ccc}
DF^1(R) & \xrightarrow{\Phi} & FH(R) \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow \omega \\
DF^1(R,\overline{R}) & \xrightarrow{\overline{\Phi}} & FH(R,\overline{R})
\end{array}$$

où le foncteur vertical de gauche (resp. de droite) est la réduction (resp. l'oubli) de la filtration.

6) Les foncteurs $\overline{\Phi}$ et Φ sont fidèles.

C'est la réciproque du point 5)a– ci-dessus : si $\psi : (M.,\omega.) \longrightarrow (N.,\lambda.)$ (resp. $(M.,\Omega.) \longrightarrow (N.,\Lambda.)$) est une flèche de $CF^1(R,\overline{R})$ (resp. de $CF^1(R)$) dont l'image dans $FH(R,\overline{R})$ (resp. dans $FH(R)$) est nulle, alors il faut prouver que ψ est homotope à zéro. Or on a des diagrammes commutatifs à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & M_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
& & \psi_1 \Big\downarrow & & \psi_0 \Big\downarrow & & u \Big\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & N_1 & \longrightarrow & N_0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & M'_1 & \longrightarrow & M'_0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & 0 \\
& & \psi'_1 \Big\downarrow & & \psi'_0 \Big\downarrow & & u' \Big\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & N'_1 & \longrightarrow & N'_0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Si u et u' sont nuls : il existe $h : M_0 \longrightarrow N_1$ et $h' : M'_0 \longrightarrow N'_1$, laissant commuter ces diagrammes. On vérifie aisément que ces données permettent de définir : $(M_0,\omega_0) \xrightarrow{h} (N_1,\lambda_1)$ (resp. $(M_0,\Omega_0) \xrightarrow{h} (N_1,\Lambda_1)$) qui réalise l'homotopie cherchée.

7) Les foncteurs $\overline{\Phi}$ et Φ sont pleinement fidèles.

En vertu de la description (cf. [1]) des morphismes de $DF^1(R,\overline{R})$ et $DF^1(R)$, il s'agit de montrer : soient $(M.,\omega.)$ et $(N.,\lambda.)$, (resp. $(M.,\Omega.)$ et $(N.,\Lambda.)$) deux objets de $CF^1(R,\overline{R})$ (resp. de $CF^1(R)$) et (M,M',v,f) et (N,N',w,g) (resp. (M,M',v,f,L)

et $(N,N',w,g,\Lambda))$ les objets correspondants de $FH(R,\overline{R})$ (resp. $FH(R)$) et soit $(M,M',v,f) \underset{\psi}{\longrightarrow} (N,N',w,g)$ (resp.$(M,M',v,f,L) \underset{\psi}{\longrightarrow} (N,N',w,g,\Lambda)$) une flèche de $FH(R,\overline{R})$ (resp. de $FH(R)$), alors il existe des morphismes : $(M.,\omega.) \underset{\varphi.}{\longrightarrow} (P.,\sigma.) \underset{s.}{\longleftarrow} (N.,\lambda.)$, (resp. $(M.,\Omega.) \underset{\varphi.}{\longrightarrow} (P.,\Sigma.) \underset{s.}{\longleftarrow} (N.,\Lambda.)$) de $CF^1(R,\overline{R})$, (resp. de $CF^1(R)$) où $s.$ est un quasi-isomorphisme, tels que si φ et s sont les images de $\varphi.$ et $s.$ dans $FH(R,\overline{R})$, (resp. $FH(R)$) alors : $\psi = s^{-1} \circ \varphi$.

On définit d'abord une flèche $(P_1,P_1',y_1) \longrightarrow (P_0,P_0',y_0)$, (resp.$(P_1,P_1',y_1,Q_1) \longrightarrow (P_0,P_0',y_0,Q_0)$) de $LH(R,\overline{R})$, (resp. de $LH(R)$) définissant un objet $(P.,\sigma.)$, (resp. $(P.,\Sigma.)$) de $CF^1(R,\overline{R})$, (resp. de $CF^1(R)$) et des flèches $\varphi.$ et $s.$ comme cherché.

Soient (M_i,M_i',v_i) et (N_i,N_i',w_i), (resp.(M_i,M_i',v_i,L_i) et (N_i,N_i',w_i,S_i)) les objets de $LH(R,\overline{R})$, (resp. de $LH(R)$) correspondant à (M_i,ω_i) et (N_i,λ_i), (resp. à (M_i,Ω_i) et (N_i,Λ_i)), pour $i=0,1$. On pose : $P_0 = M_0 \times N_0$, $P_0' = M_0' \times N_0'$, $y_0 = v_0 \times w_0 : P_0' \longrightarrow P_0$ (resp. et $Q_0 = L_0 \times S_0$). Soit $u : P_0 \longrightarrow N$ l'application surjective qui vaut $\psi \circ \mu$ sur le 1[er] facteur et ν sur le 2[ème], où $\mu : M_0 \twoheadrightarrow M$ et $\nu : N_0 \twoheadrightarrow N$ sont les applications canoniques.

On définit de même : $u' : P_0' \longrightarrow N'$ et $u'' = Q_0 \longrightarrow \Lambda$; ($u'' = u'$ restreint à Q_0). On pose :

$$P_1 = \mathrm{Ker}(P_0 \overset{u}{\twoheadrightarrow} N), P_1' = \mathrm{Ker}(P_0' \overset{u'}{\twoheadrightarrow} N'),$$

y_1 induit par y_0, (resp. et $Q_1 = \mathrm{Ker}(Q_0 \overset{u''}{\twoheadrightarrow} \Lambda)$). Soit $h_0 : P_0 \hookrightarrow P_0'$ telle que $h_0 \circ y_0 = \pi^{\alpha}_{P_0}$. Il est clair que (P_0,P_0',y_0), (resp. (P_0,P_0',y_0,Q_0)) est objet de $LH(R,\overline{R})$, (resp. de $LH(R)$) correspondant à l'objet $(P_0,\omega_0\times\lambda_0)$, (resp. $(P_0,\Omega_0\times\Lambda_0)$) de $LF(R,\overline{R})$), (resp. de $LF(R)$).

Soit : $s_0 : N_0 \hookrightarrow M_0 \times N_0$ et $s_0' : N_0' \hookrightarrow M_0' \times N_0'$ les applications canoniques $x \longmapsto (0,x)$, (resp. et $s_0'' : S_0 \hookrightarrow L_0 \times S_0 = s'_{0|S_0}$), et $s_1 : N_1 \hookrightarrow P_1$, $s_1' : N_1' \hookrightarrow P_1'$, $s_1'' : S_1 \hookrightarrow Q_1$ induits par s_0, s_0', s_0''.

On dispose alors d'un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$
(*)\qquad
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & P'_1 \arrow[rr] \arrow[dl, "y_1"'] & & M'_0 \times N'_0 \arrow[rr, "u'"] \arrow[dl, "y_0"'] & & N' \arrow[r] \arrow[dl, "v"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_1 \arrow[rr] & & M_0 \times N_0 \arrow[rr, "u"] & & N \arrow[r] & 0 & \\
 & 0 \arrow[r] & N'_1 \arrow[rr] \arrow[dl, "w_1"] \arrow[uu, hook, "s'_1"] & & N'_0 \arrow[rr, "\nu'"] \arrow[dl, "w_0"] \arrow[uu, hook, "s'_0"] & & N' \arrow[r] \arrow[dl, "v"'] \arrow[uu, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[rr] \arrow[uu, hook, "s_1"] & & N_0 \arrow[rr, "\nu"] \arrow[uu, hook, "s_0"] & & N \arrow[r] \arrow[uu, equal] & 0 &
\end{tikzcd}
$$

(resp. et d'un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$
(**)\qquad
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r] & \Lambda \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & S_1 \arrow[r] \arrow[u, hook, "s''_1"] & S_0 \arrow[r] \arrow[u, hook, "s''_0"] & \Lambda \arrow[r] \arrow[u, equal] & 0)
\end{tikzcd}
$$

On va prouver que (P_1, P'_1, y_1) (resp. (P_1, P'_1, y_1, Q_1) est un objet de $LH(R, \overline{R})$, (resp. de $LH(R)$), c'est-à-dire :Coker$(P'_1 \overset{y_1}{\hookrightarrow} P_1)$ est libre sur $\overline{R}$, (resp. et $Q_1 \hookrightarrow P'_1$ induit un isomorphisme : $\overline{Q}_1 \longrightarrow \mathrm{Coker}\, h_1$), (où $h_1 : P_1 \hookrightarrow P'_1$ est tel que : $h_1 \circ y_1 = \pi^{\alpha}_{P_1}$). D'après le diagramme $(*)$ ci-dessus :

1) $\mathrm{Coker}\, s'_0 \longrightarrow \mathrm{Coker}\, s_0$ s'identifie à $v_0 : M'_0 \hookrightarrow M_0$;

2) le morphisme : $\mathrm{Coker}\, s'_1 \longrightarrow \mathrm{Coker}\, s_1$ s'identifie à $\mathrm{Coker}\, s'_0 \longrightarrow \mathrm{Coker}\, s_0$, donc à v_0.

3) on a un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "s_1"] & P_1 \arrow[r] & \mathrm{Coker}\, s_1 \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & N'_1 \arrow[r, "s'_1"] \arrow[u, hook, "w_1"] & P'_1 \arrow[r] \arrow[u, hook, "y_1"] & \mathrm{Coker}\, s'_1 \arrow[r] \arrow[u, hook] & 0
\end{tikzcd}
$$

qui grâce aux identifications précédentes et à la suite exacte du serpent, fournit une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \operatorname{Coker} w_1 \longrightarrow \operatorname{Coker} y_1 \longrightarrow \operatorname{Coker} v_0 \longrightarrow 0;$$

comme $\operatorname{Coker} w_1$ et $\operatorname{Coker} v_0$ sont libres sur $\overline{R}$, il en est de même de $\operatorname{Coker} y_1$.

Du diagramme (**) ci-dessus on déduit un isomorphisme : $\operatorname{Coker} s_1'' \xrightarrow{\sim} \operatorname{Coker} s_0''$; comme $\operatorname{Coker} s_0'' = L_0$ par construction, on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow S_1 \longrightarrow Q_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow 0$$

et un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S_1 \arrow[r] \arrow[d, hook] & Q_1 \arrow[r] \arrow[d, hook] & L_0 \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1' \arrow[r] & P_1' \arrow[r] & M_0' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Comme L_0 et M_0' sont libres sur R on en déduit un diagramme commutatif à lignes exactes de $\overline{R}$-modules :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \overline{S}_1 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dd, bend right, "(3)"'] & \overline{Q}_1 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dd, bend right, "(2)"'] & \overline{L}_0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dd, bend right, "(1)"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \overline{N}_1' \arrow[r] \arrow[d] & \overline{P}_1' \arrow[r] \arrow[d] & \overline{M}_0' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Coker} g_1 \arrow[r] & \operatorname{Coker} h_1 \arrow[r] & \operatorname{Coker} f_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dans lequel les flèches composées verticales (1) et (3) sont des isomorphismes; (2) est donc un isomorphisme; $Q_1 \hookrightarrow P_1'$ a donc les propriétés voulues.

On dispose donc d'une flèche : $(P_1, P_1', y_1) \longrightarrow (P_0, P_0', y_0)$ de $LH(R, \overline{R})$ (resp. $(P_1, P_1', y_1, Q_1) \longrightarrow (P_0, P_0', y_0, Q_0)$ de $LH(R)$). D'où une flèche :

$$(P_1, \sigma_1) \longrightarrow (P_0, \sigma_0) \text{ de } LF(R, \overline{R}), \ (\text{resp.} (P_1, \Sigma_1) \longrightarrow (P_0, \Sigma_0) \text{ de } LF(R)).$$

Reste à voir que c'est un objet de $CF^1(R, \overline{R})$, (resp. de $CF^1(R)$), c'est-à-dire que P_1 et P_0 ont même rang sur R, ainsi que σ_1 et σ_0 sur $\overline{R}$, (resp. ainsi que Σ_1 et Σ_0), puisque par hypothèse $P_1 \longrightarrow P_0$ est injectif.

Or $\mathrm{Coker}(P_1 \hookrightarrow P_0) = N$ est de torsion, donc P_1 et P_0 sont de même rang. D'autre part : $\sigma_0 = \omega_0 \times \lambda_0$ et on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Coker}\, w_1 \longrightarrow \mathrm{Coker}\, y_1 \longrightarrow \mathrm{Coker}\, v_0 \longrightarrow 0$$

et pour des raisons analogues, une suite exacte déjà vue :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Coker}\, g_1 \longrightarrow \mathrm{Coker}\, h_1 \longrightarrow \mathrm{Coker}\, f_0 \longrightarrow 0$$

donc : $rg_{\overline{R}}\sigma_1 \overset{\text{déf}}{=} rg_{\overline{R}}\ \mathrm{Coker}\, h_1 = rg_{\overline{R}}\mathrm{Coker}\, g_1 + rg_{\overline{R}}\ \mathrm{Coker}\, f_0 = rg_{\overline{R}}\lambda_1 + rg_{\overline{R}}\omega_0 = rg_{\overline{R}}\lambda_0 + rg_{\overline{R}}\omega_0 = rg_{\overline{R}}\sigma_0$. (resp. et $rg_R\Sigma_1 = rg_{\overline{R}}\sigma_1 = rg_{\overline{R}}\sigma_0 = rg_R\Sigma_0$).

Il est enfin clair que $s. = (s_1, s_0) : (N., \lambda) \longrightarrow (P., \sigma.)$ (resp. $s. : (N., \Lambda.) \longrightarrow (P., \Sigma.)$) est une flèche de $CF^1(R, \overline{R})$ (resp. de $CF^1(R)$) dont l'image dans $FH(R, \overline{R})$, (resp. dans $FH(R)$) n'est autre que l'identité de (N, N', w, g), (resp. de (N, N', w, g, Λ)). En vertu du point 8.b, $s.$ est un **quasi-isomorphisme.**

Définissons $\varphi_0 : (M_0, \omega_0) \longrightarrow (P_0, \sigma_0)$ (resp. $\varphi_0 : (M_0, \Omega_0) \longrightarrow (P_0, \Sigma_0)$) comme l'application canonique sur le 1[er] facteur; il est clair que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
P_0 = M_0 \times N_0 & \xrightarrow{\ u\ } & N \\
\uparrow{\scriptstyle \varphi_0} & & \uparrow{\scriptstyle \psi} \\
M_0 & \xrightarrow[\ \mu\ ]{} & M
\end{array}$$

commute, par définition de u. On en déduit par restriction $\varphi_1 : (M_1, \omega_1) \longrightarrow (P_1, \sigma_1)$, (resp. $(M_1, \Omega_1) \longrightarrow (P_1, \Sigma_1)$) objet de $CF^1(R, \overline{R})$, (resp. de $CF^1(R)$) dont l'image dans $FH(R, \overline{R})$, (resp. $FH(R)$) est ψ.

Le couple $(s., \varphi.)$ vérifie les conditions voulues.

Remarque : La définition de l'objet $(P., \omega.)$ est directemement prise dans ([1], III, démonstration du *Théorème* 2.7); la démonstration, plus longue, est adaptée à la situation plus générale ici envisagée et est débarassée des groupes p-divisibles et s'appuie sur les notions de système de HONDA libres, qui dans le cas de [1] ne sont autres que les modules de Dieudonné libres usuels.

8) Les foncteurs $\overline{\Phi}$ et Φ sont des équivalences de catégories.

Comme $\overline{\Phi}$ est essentiellement surjectif par définition de $FH(R, \overline{R})$, il reste à prouver la même propriété pour Φ. Cela va être l'objet des deux *Lemmes* suivants.

a– Soit $(M., \omega.) = (M_1, \omega_1) \longrightarrow (M_0, \omega_0)$ un objet de $CF^1(R, \overline{R})$. Il lui correspond la flèche :

$$(M_1, M_1', v_1) \longrightarrow (M_0, M_0', v_0)$$

de $LH(R, \overline{R})$, puis en prenant le conoyau, l'objet (M, M', v, f) de $FH(R, \overline{R})$. Soit $u' : M_0' \twoheadrightarrow M'$ l'application canonique. On suppose donné $L \hookrightarrow M'$ tel que (M, M', v, f, L) soit objet de $FH(R)$.

Lemme 2. — *Sous ces conditions, il existe* $L_0 \hookrightarrow M'_0$ *tel que :* (M_0, M'_0, v_0, L_0) *soit un objet de* $LH(R)$ *et* $u'(L_0) = L$

Démonstration : On dispose d'un diagramme commutatif à colonnes exactes :

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] \\
 & 0 \arrow[dd] & \operatorname{Ker} f \arrow[dd] \\
0 \arrow[dd] & & \\
 & M'_1 \arrow[r, two heads] \arrow[dd] & \operatorname{Coker} f_1 \arrow[dd] \\
M'_1 \arrow[ur, equal] \arrow[urr, two heads] \arrow[dd] & & \\
 & M'_0 \arrow[r, two heads] \arrow[dd, "u'"] & \operatorname{Coker} f_0 \arrow[dd] \\
N \arrow[ur, hook] \arrow[urr] \arrow[dd] & & \\
 & M' \arrow[r, two heads] \arrow[dd] & \operatorname{Coker} f \arrow[dd] \\
L \arrow[ur, hook] \arrow[urr, two heads] \arrow[dd] & & \\
 & 0 & 0 \\
0 & &
\end{tikzcd}
$$

où N est l'image réciproque de L par $u' : M'_0 \twoheadrightarrow M'$.

Les applications composées : $L \longrightarrow \operatorname{Coker} f$ et $M'_1 \longrightarrow \operatorname{Coker} f_1$ étant surjectives par hypothèse, une simple chasse au diagramme prouve que le composé : $N \hookrightarrow M'_0 \twoheadrightarrow \operatorname{Coker} f_0$ est également surjectif. Remarquons que N est libre de même rang que M'_0. $\operatorname{Coker} f_0$ est libre sur $\overline{R}$; relevons dans N une base sur $\overline{R}$ de $\operatorname{Coker} f_0$ de façon à engendrer ainsi un sous module L_0 de N, qui est libre, tel que le composé

$L_0 \hookrightarrow N \twoheadrightarrow \operatorname{Coker} f_0$ est surjectif, donc $\overline{L_0} \longrightarrow \operatorname{Coker} f_0$ aussi ; comme le rang de L_0 sur R est au plus égal au rang de $\operatorname{Coker} f_0$ sur $\overline{R}$, on a un isomorphisme : $\overline{L_0} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Coker} f_0$; donc (M_0, M_0', v_0, L_0) est objet de $LH(R)$.

D'autre part on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
L_0 \arrow[r, hook] \arrow[dr] \arrow[rrr, bend left, two heads] & N \arrow[r, hook] \arrow[d] & M_0' \arrow[r, two heads] \arrow[d, "u'"] & \operatorname{Coker} f_0 \arrow[d] \\
 & L \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend right, "\sim"'] & M' \arrow[r, two heads] & \operatorname{Coker} f
\end{tikzcd}$$

où la flèche composée horizontale du haut (resp. du bas) est surjective (resp. bijective). On en conclut que $u'(L_0) = L$.

b– Sous les hypothèses de a– supposons donné $L_0 \hookrightarrow M_0'$ vérifiant les conclusions du *Lemme 2*. Posons alors : $L_1 = \operatorname{Ker}(L_0 \twoheadrightarrow L) \hookrightarrow M_1'$.

LEMME 3. — *Alors : (M_1, M_1', v_1, L_1) est objet de $LH(R)$.*

Remarque : Les Lemmes 2 et 3 sont énoncés et démontrés dans [1] pour $\alpha = e = 1$, c'est-à-dire pour $R =$ anneau de Witt de k, et $\overline{R} = k$.

Démonstration : Posons $\Omega_i = v_i(L_i) \hookrightarrow M_i$, et $\Omega = v(L)$. Comme le composé : $L \hookrightarrow M' \xrightarrow{v} M$ est injectif par hypothèse, on a un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] & M_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega_1 \arrow[r] \arrow[u, hook] & \Omega_0 \arrow[r] \arrow[u, hook] & \Omega \arrow[r] \arrow[u, hook] & 0
\end{tikzcd}$$

d'où une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \frac{M_1}{\Omega_1} \longrightarrow \frac{M_0}{\Omega_0} \longrightarrow \frac{M}{\Omega} \longrightarrow 0.$$

Comme (M_0, Ω_0) est l'objet de $LF(R)$ correspondant à (M_0, M_0', v_0, L_0), $\frac{M_0}{\Omega_0}$ est sans torsion, donc $\frac{M_1}{\Omega_1}$ aussi.

D'autre part, on a des morphismes :

$$\frac{M_1}{\Omega_1} = \frac{M_1}{v_1(L_1)} \twoheadrightarrow \frac{M_1}{v_1(M_1')} = \frac{\overline{M}_1}{\omega_1}.$$

D'où : $\frac{\overline{M_1}}{\overline{\Omega}_1} \twoheadrightarrow \frac{\overline{M_1}}{\omega_1}$ ce qui prouve que $\overline{\Omega}_1 \hookrightarrow \omega_1$. Mais :

$$rg_{\overline{R}}\overline{\Omega}_1 = rg_R\Omega_1 = rg_R L_1 = rg_R L_0 = rg_{\overline{R}}\omega_0 = rg_{\overline{R}}\omega_1.$$

Donc $\overline{\Omega}_1 = \omega_1$, ce qui prouve que $L_1 = v_1^{-1}(\Omega_1)$ a les propriétés voulues. Il est alors clair que $(M_1, \Omega_1) \longrightarrow (M_0, \Omega_0)$ correspond par l'équivalence $LF(R) \longrightarrow LH(R)$ à la flèche : $(M_1, M_1', v_1, L_1) \longrightarrow (M_0, M_0', v_0, L_0)$; alors $(M., \Omega.)$ est un objet de $CF^1(R)$ dont la réduction dans $CF^1(R, \overline{R})$ est $(M., \omega.)$ et dont l'image dans $FH(R)$ est (M, M', v, f, L), ce qui prouve que Φ est essentiellement surjectif.

Cela signifie aussi que relever la filtration $\omega.$ de $\overline{M}.$ en une filtration $\Omega.$ de $M.$, équivaut à se donner une filtration $L \hookrightarrow M'$ telle que (M, M', v, f, L) soit objet de $FH(R)$.

9) *Remarque* : Si à l'objet $(M., \Omega.)$ de $CF^1(R)$ on associe le couple (M, Ω) où $M = \text{Coker}(M_1 \hookrightarrow M_0)$, $\Omega = \text{Coker}(\Omega_1 \hookrightarrow \Omega_0)$, alors M est un module de longueur finie sur R et $\Omega \hookrightarrow M$. Si $F(R)$ est la catégorie dont les objets sont les couples (M, Ω) ayant ces propriétés et dont les flèches sont les applications R-linéaires respectant les sous modules donnés, on a donc un foncteur $CF^1(R) \longrightarrow F(R)$ dont on montre facilement qu'il induit une **équivalence de catégories** $DF^1(R) \longrightarrow F(R)$; on peut décrire les objets de $DF^1(R)$ en termes de modules filtrés. En revanche, une telle identification **n'est pas possible** pour $DF^1(R, \overline{R})$. C'est ce qui justifie l'introduction des systèmes de HONDA.

B — Classification des p-groupes finis à l'aide des systèmes de HONDA

1) Rappels

a– Isogénies (cf. [1])

Soit R un anneau local. Soit $\mathcal{I}_R$ la catégorie dont les objets sont les **isogénies** : $G. = G_0 \stackrel{d}{\twoheadrightarrow} G_1$ de groupes p-divisibles sur R et les flèches $u = (u_0, u_1) : G. \longrightarrow H.$ sont les diagrammes commutatifs de morphismes de groupes :

$$\begin{tikzcd} G_0 \arrow[r, two heads, "d"] \arrow[d, "u_0"] & G_1 \arrow[d, "u_1"] \\ H_0 \arrow[r, two heads, "\delta"] & H_1 \end{tikzcd}$$

On appelle $\mathcal{I}_R$ la catégorie des isogénies sur R.

On dit que u est un **quasi isomorphisme** s'il induit un isomorphisme : $\operatorname{Ker} d \longrightarrow \operatorname{Ker} \delta$ (rappelons que $\operatorname{Ker} d$ et $\operatorname{Ker} \delta$ sont des p-groupes finis et plats sur R).

Deux morphismes $u = (u_0, u_1)$ et $u' = (u'_0, u'_1) : G. \longrightarrow H.$ sont dits **homotopes** s'il existe $h : G_1 \longrightarrow H_0$ tel que : $h \circ d = u'_0 - u_0$ et $\delta \circ h = u'_1 - u_1$. Soit $\mathcal{F}_R$ la catégorie dont les objets sont les p-groupes commutatifs, finis et plats sur R et les flèches les morphismes de groupes. On dispose évidemment d'un foncteur : $\mathcal{I}_R \longrightarrow \mathcal{F}_R$, qui à une isogénie associe son noyau. Ce foncteur est essentiellement surjectif : d'après OORT ([9 bis]), ou RAYNAUD ([4], Théorème 3.1.1) si $\mathcal{G}$ est p-groupe fini et plat sur R, il existe un monomorphisme de schémas en groupes sur $R : \mathcal{G} \hookrightarrow G_0$, où G_0 est p-divisible. $\mathcal{G}$ est donc le noyau de l'isogénie $G_0 \longrightarrow G_1 = G_0/\mathcal{G}$. Cependant, le foncteur $\mathcal{I}_R \longrightarrow \mathcal{F}_R$ n'est pas une équivalence de catégories : deux isogénies ayant des noyaux isomorphes ne sont pas en général isomorphes dans $\mathcal{I}_R$.

Si $\mathcal{I}'_R$ désigne la catégorie dont les objets sont les isogénies et dont les morphismes sont ceux de $\mathcal{I}_R$, modulo la relation d'équivalence définie par l'homotopie, alors le foncteur $\mathcal{I}_R \longrightarrow \mathcal{F}_R$ se factorise naturellement en : $\mathcal{I}_R \xrightarrow{can} \mathcal{I}'_R \longrightarrow \mathcal{F}_R$, car il est évident que deux morphismes $u.$ et $v. : G. \longrightarrow H.$ de $\mathcal{I}_R$ induisent le même morphisme sur les noyaux si et seulement si $u.$ et $v.$ sont homotopes. La notion de quasi-isomorphisme se transporte immédiatement à $\mathcal{I}'_R$. Enfin, soit $\mathcal{C}_R$ la catégorie obtenue à partir de $\mathcal{I}'_R$ **en rendant inversibles les quasi-isomorphismes.**

Par définition, le foncteur $\mathcal{I}'_R \longrightarrow \mathcal{F}_R$ se factorise en $\mathcal{I}'_R \xrightarrow{can} \mathcal{C}_R \xrightarrow{\nu} \mathcal{F}_R$. Il est démontré par BADRA en ([1], *Théorème* 1.14) :

THÉORÈME. —

1) *$\mathcal{C}_R$ a pour objets ceux de $\mathcal{I}'_R$ et ses flèches se décrivent en termes de calcul de fractions à partir de celles de $\mathcal{I}'_R$, avec les quasi-isomorphismes pour dénominateurs.*

2) $\nu : \mathcal{C}_R \longrightarrow \mathcal{F}_R$ *est une équivalence de catégories.*

Si $\overline{R}$ est un quotient de R on définit de même $\mathcal{I}_{\overline{R}}$, $\mathcal{I}'_{\overline{R}}$, $\mathcal{C}_{\overline{R}}$, $\mathcal{F}_{\overline{R}}$ et un diagramme commutatif de foncteurs :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_R & \xrightarrow{\nu} & \mathcal{F}_R \\ \rho \big\downarrow & & \big\downarrow \tau \\ \mathcal{C}_{\overline{R}} & \xrightarrow{\overline{\nu}} & \mathcal{F}_{\overline{R}} \end{array}$$

dont les flèches horizontales sont des équivalences et les flèches verticales sont les foncteurs de changement de base par $R \longrightarrow \overline{R}$.

b– Groupes p-divisibles et cristaux. Le Théorème de GROTHENDIECK

Soit R un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques, de corps résiduel k de caractéristique p, π une uniformisante de R, e l'indice de ramification absolu de R ; soit α un entier strictement supérieur à $\frac{e}{p-1}$. L'idéal $\pi^\alpha \cdot R$ de R est alors muni de puissances divisées, **vérifiant une condition de nilpotence**. Soit $\overline{R} = R/\pi^\alpha \cdot R$. Il est défini en ([4bis]) le site nilpotent cristallin $N\,\mathrm{CRIS}(\mathrm{Spec}\,\overline{R}/_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}_p}, p \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{Z}_p}, \gamma = can)$ dont l'épaississement $(\mathrm{Spec}\,\overline{R} \hookrightarrow \mathrm{Spec}\,R/_{\pi^{n\alpha}R})$ est objet pour tout entier $n \geq 1$.

Soit G un groupe p-divisible sur $\overline{R}$. Par ([4], Théorème 3.3.3) il est associé à G un cristal en modules sur le site précédent, noté $\mathbb{D}G$.

Soit $\mathbb{D}G_{R_n}$ la valeur de $\mathbb{D}G$ en l'épaississement $(\mathrm{Spec}\,\overline{R} \hookrightarrow \mathrm{Spec}\,R/_{\pi^{n\alpha}R})$ et soit $\mathbb{D}G_R = \varprojlim_n \mathbb{D}G_{R_n}$ qu'on appelle "valeur de $\mathbb{D}G$ en l'épaississement $(\mathrm{Spec}\,\overline{R} \hookrightarrow \mathrm{Spec}\,R)$". Alors : $\mathbb{D}G_{\overline{R}} = \mathbb{D}G_R \underset{R}{\otimes} \overline{R}$, où $\mathbb{D}G_{\overline{R}}$ = valeur de $\mathbb{D}G$ sur l'épaississement trivial $(\mathrm{Spec}\,\overline{R} \hookrightarrow \mathrm{Spec}\,\overline{R})$; $\mathbb{D}G_R$ est libre de rang fini sur R. Grâce à ([4], Cor. 3.3.5) on dispose d'une suite exacte de $\overline{R}$-modules libres :

$$0 \longrightarrow \omega_G \longrightarrow \mathbb{D}G_{\overline{R}} \longrightarrow \mathrm{Lie}\,G^* \longrightarrow 0$$

(où G^* = dual de G et ω_G = module des différentielles invariantes de G).

On a ainsi un objet $(\mathbb{D}G_R, \omega_G)$ de $LH(R, \overline{R})$.

D'autre part : si $\widetilde{G}$ est un groupe p-divisible sur R et si $G = \widetilde{G} \underset{\mathrm{Spec}\,R}{\times} \mathrm{Spec}\,\overline{R}$, on dispose d'une suite exacte de R-modules libres :

$$0 \longrightarrow \omega_{\widetilde{G}} \longrightarrow \mathbb{D}G_R \longrightarrow \mathrm{Lie}\,\widetilde{G}^* \longrightarrow 0,$$

et donc d'un objet $(\mathbb{D}G_R, \omega_{\widetilde{G}})$ de $LH(R)$ dont l'image dans $LH(R, \overline{R})$ est précisément $(\mathbb{D}G_R, \omega_G)$.

Soit $U(R,\overline{R})$ la catégorie dont les objets sont les couples (G,Ω), où G est un groupe p-divisible sur $\overline{R}$ et $\Omega \hookrightarrow \mathbb{D}G_R$ est tel que $(\mathbb{D}G_R,\Omega)$ soit un objet de $LH(R)$ dont la réduction dans $LH(R,\overline{R})$ est $(\mathbb{D}G_R,\omega_G)$ et les flèches $f : (G,\Omega) \longrightarrow (H,\Lambda)$ sont les morphismes de groupes $f : G \longrightarrow H$ tels que $\mathbb{D}f_R(\Lambda) \subset \Omega$. On a alors :

THÉORÈME (GROTHENDIECK) (cf. [5]-V-Théorème 1.6). — *Le foncteur* $\widetilde{G} \longmapsto (G = \widetilde{G} \underset{R}{\times} \overline{R}, \omega_{\widetilde{G}})$ *est une équivalence de la catégorie des groupes p-divisibles sur R avec* $U(R,\overline{R})$ *définie ci-dessus.*

Remarques :

1) Ce théorème dont la démonstration est l'objet principal de [5] est énoncé pour des épaississements plus généraux que $(\operatorname{Spec}\overline{R} \hookrightarrow \operatorname{Spec} R)$.

2) Le cristal défini par GROTHENDIECK (cf. [5]) est en fait isomorphe, d'après ([4 bis]) à celui défini en [4] comme le faisceau $\mathcal{E}xt^1_{S/\Sigma}(\underline{G},\mathcal{O}_{S/\Sigma})$ sur le site cristallin.

c– Isogénies et complexes filtrés

A toute isogénie $G.$, objet de $\mathcal{I}_{\overline{R}}$, (resp. $\widetilde{G}.$ objet de $\mathcal{I}_R$) on peut donc associer un objet $(\mathbb{D}G._R,\omega_{G.})$ de $CF^1(R,\overline{R})$, (resp.$(\mathbb{D}G._R,\omega_{\widetilde{G}.})$ de $CF^1(R)$, en posant $G. = \widetilde{G}. \underset{R}{\times} \overline{R}$). D'où un foncteur $\mathcal{I}_{\overline{R}} \longrightarrow CF^1(R,\overline{R})$, (resp.$\mathcal{I}_R \longrightarrow CF^1(R)$) lequel transforme homotopies en homotopies, quasi-isomorphismes en quasi-isomorphismes. D'où un foncteur : $\mathcal{C}_{\overline{R}} \xrightarrow{\overline{\Gamma}} DF^1(R,\overline{R})$, (resp. : $\mathcal{C}_R \xrightarrow{\Gamma} DF^1(R)$) et un diagramme commutatif de foncteurs :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_R & \xrightarrow{\Gamma} & DF^1(R) \\ \Big\downarrow \rho & & \Big\downarrow \rho' \\ \mathcal{C}_{\overline{R}} & \xrightarrow{\overline{\Gamma}} & DF^1(R,\overline{R}) \end{array}$$

dans lequel ρ est le foncteur de changement de base, et ρ' le foncteur de réduction de R à $\overline{R}$ de la filtration d'un complexe.

2) Le théorème de BADRA

a– Résolutions des groupes finis

Soit $\widetilde{\mathcal{G}}$ un p-groupe fini sur R. Il existe un couple $(\widetilde{G}.,\widetilde{\varphi})$, où $\widetilde{G}.$ est une isogénie et $\widetilde{\varphi} : \widetilde{\mathcal{G}} \xrightarrow{\sim} \nu(\widetilde{G}.)$ est un isomorphisme de $\widetilde{\mathcal{G}}$ avec le noyau de $\widetilde{G}.$. On appelle $(\widetilde{G}.,\widetilde{\varphi})$ une **résolution** de $\widetilde{\mathcal{G}}$. Si $\widetilde{\mathcal{G}}$ et $\widetilde{\mathcal{G}}'$ ont des résolutions $(\widetilde{G}.,\widetilde{\varphi})$ et $(\widetilde{G}'_.,\widetilde{\varphi}')$ et si $\widetilde{u} : \widetilde{\mathcal{G}} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{G}}'$ est un morphisme de groupes, il existe un unique morphisme de $\mathcal{C}_R$: $\widetilde{v}. : \widetilde{G}. \longrightarrow \widetilde{G}'_.$ tel que $\nu(\widetilde{v}.) \circ \widetilde{\varphi} = \widetilde{\varphi}' \circ \widetilde{u}$. En particulier, si $\widetilde{\mathcal{G}} = \widetilde{\mathcal{G}}'$ et $\widetilde{u} = id_{\widetilde{\mathcal{G}}}$, il existe un et un seul

isomorphisme dans $\mathcal{C}_R : \widetilde{G}. \xrightarrow{\widetilde{v}.} \widetilde{G}'.$ tel que $\nu(\widetilde{v}.) \circ \widetilde{\varphi} = \widetilde{\varphi}'$. Un choix d'une résolution étant fait pour chaque p-groupe fini sur R, on dispose d'un foncteur $\mathcal{F}_R \xrightarrow{q} \mathcal{C}_R$, obtenu par oubli de $\widetilde{\varphi}$, qui est un **quasi-inverse** de l'équivalence naturelle $\nu : \mathcal{C}_R \longrightarrow \mathcal{F}_R$; à des choix différents de résolutions, correspondent des foncteurs $\mathcal{F}_R \longrightarrow \mathcal{C}_R$ **canoniquement isomorphes.**

On peut choisir aussi une résolution de tout p-groupe fini sur $\overline{R}$, auquel correspond un foncteur $\mathcal{F}_{\overline{R}} \xrightarrow{\overline{q}} \mathcal{C}_{\overline{R}}$, quasi-inverse de $\overline{\nu}$.

Ces foncteurs q et $\overline{q}$ commutent à **isomorphisme canonique près** avec les foncteurs de changement de base $\mathcal{F}_R \longrightarrow \mathcal{F}_{\overline{R}}$ et $\mathcal{C}_R \longrightarrow \mathcal{C}_{\overline{R}}$.

En composant q (resp. $\overline{q}$) avec $\Phi : \mathcal{C}_R \longrightarrow DF^1(R)$, (resp. avec $\overline{\Phi} : \mathcal{C}_{\overline{R}} \longrightarrow DF^1(R,\overline{R})$) on obtient un foncteur C (resp. $\overline{C}$) qui à un groupe fini sur R (resp. sur $\overline{R}$) associe le système de HONDA image de la résolution choisie pour le groupe.

Comme précédemment, C et $\overline{C}$ commutent **à isomorphisme canonique près** avec les foncteurs $\mathcal{F}_R \longrightarrow \mathcal{F}_{\overline{R}}$ et $DF^1(R) \xrightarrow{\omega} DF^1(R,\overline{R})$, ce dernier étant le foncteur d'oubli de la filtration. De plus, si on change de résolutions sur R et $\overline{R}$, les isomorphismes de foncteurs précédents commutent avec ceux provenant du changement de résolutions.

b– Ces choix étant faits, BADRA définit en [1] une catégorie $\mathcal{D} = \mathcal{D}(R,\overline{R})$ qui a pour **objets** les triplets : $(\mathcal{G},(M.,\Omega.),\xi)$, où $\mathcal{G}$ est un groupe fini sur $\overline{R}$, où $(M.,\Omega.)$ est un objet de $DF^1(R)$ et où $\xi : \overline{C}(\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \rho'(M.,\Omega.)$ est un isomorphisme de $DF^1(R,\overline{R})$, et qui a pour **flèches** :

$$(\mathcal{G},(M.,\Omega.),\xi) \longrightarrow (\mathcal{G}',(M'.,\Omega'.),\xi')$$

les couples $(u,v.)$, où $u : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'$ est un morphisme de $\overline{R}$-groupes, où $v. : (M'.,\Omega'.) \longrightarrow (M.,\Omega.)$ est une flèche de $DF^1(R)$, tels que $\rho'(v.) \circ \xi = \xi' \circ u$.

BADRA définit alors un foncteur : $\lambda : \mathcal{F}_R \longrightarrow \mathcal{D}(R,\overline{R})$ qui à un groupe $\widetilde{\mathcal{G}}$ sur R associe $(\mathcal{G},(M.,\Omega.),\xi_{\widetilde{\mathcal{G}}})$, où $\mathcal{G} = \widetilde{\mathcal{G}} \underset{R}{\times} \overline{R}$, où $(M.,\Omega.) = C(\widetilde{\mathcal{G}})$ et où $\xi_{\widetilde{\mathcal{G}}}$ est l'isomorphisme canonique de $\overline{C}(\mathcal{G})$ vers $\rho'(C(\widetilde{\mathcal{G}}))$. (Le complexe associé à la réduction de $\widetilde{\mathcal{G}}$ est canoniquement isomorphe à la réduction du complexe associé à $\widetilde{\mathcal{G}}$) ; à la flèche $\widetilde{u} : \widetilde{\mathcal{G}} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{G}}'$, λ associe $(u,v.)$ avec $u = \widetilde{u} \underset{R}{\times} \overline{R}$ et $v. = \rho'(C(\widetilde{u}))$. On a alors le :

THÉORÈME (BADRA, [1], II-4.5). — *Le foncteur $\lambda : \mathcal{F}_R \longrightarrow \mathcal{D}(R,\overline{R})$ qui à un p-groupe fini $\widetilde{\mathcal{G}}$ associe $(\widetilde{\mathcal{G}} \underset{R}{\times} \overline{R}, C(\widetilde{\mathcal{G}}),\xi_{\widetilde{\mathcal{G}}})$ est une équivalence de catégories ($C(\widetilde{\mathcal{G}})$ est le complexe filtré associé à la résolution choisie de $\widetilde{\mathcal{G}}$).*

3) Groupes finis et systèmes de HONDA

Soit $H = \Phi \circ C$ le composé de $C : \mathcal{F}_R \longrightarrow DF^1(R)$ avec l'équivalence : $DF^1(R) \xrightarrow{\Phi} FH(R)$ et $\overline{H} = \overline{\Phi} \circ \overline{C} : \mathcal{F}_{\overline{R}} \longrightarrow FH(R,\overline{R})$; $H(\widetilde{\mathcal{G}})$ est le système de HONDA fini et filtré associé à la résolution choisie de $\widetilde{\mathcal{G}}$; de même pour $\overline{H}(\mathcal{G})$ ($\mathcal{G}$ = groupe sur $\overline{R}$). On a un carré de foncteurs, commutatif à **isomorphisme canonique** près, dans lequel ω est le foncteur d'oubli de la filtration et τ le foncteur de changement de base.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_R & \xrightarrow{H} & FH(R) \\ \Big\downarrow \tau & & \Big\downarrow \omega \\ \mathcal{F}_{\overline{R}} & \xrightarrow{\overline{H}} & FH(R,\overline{R}) \end{array}$$

Soit $\mathcal{L} = \mathcal{L}(R,\overline{R})$ la catégorie qui a pour objets les couples $(\mathcal{G},\Lambda)$ où $\mathcal{G}$ est un groupe fini sur $\overline{R}$ et Λ une filtration admissible, au sens de la *Définition* suivante, de $\overline{H}(\mathcal{G})$, le système de HONDA associé à la résolution de $\mathcal{G}$.

DÉFINITION. — *Soit (M,M',v,f) un objet de $FH(R,\overline{R})$. Un sous R-module Λ de M' définit une* **filtration admissible** *de (M,M',v,f) si (M,M',v,f,L) est un objet de $FH(R)$.*

Les flèches $(\mathcal{G},\Lambda) \longrightarrow (\mathcal{G}',\Lambda')$ de $\mathcal{L}$ sont les morphismes $u : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'$ de $\overline{R}$-groupes tels que l'image de Λ' par $\overline{H}(u)$ soit contenue dans Λ.

Il existe alors un foncteur $\mathcal{E} : \mathcal{F}_R \longrightarrow \mathcal{L}(R,\overline{R})$ qui à $\widetilde{\mathcal{G}}$, groupe fini sur R associe $(\mathcal{G},\Lambda_{\widetilde{\mathcal{G}}})$ avec $\mathcal{G} = \widetilde{\mathcal{G}} \underset{R}{\times} \overline{R}$, $\Lambda_{\widetilde{\mathcal{G}}}$ étant défini comme suit : Les systèmes de HONDA $\overline{H}(\mathcal{G})$ associé à une résolution de $\mathcal{G}$ et $\omega(H(\widetilde{\mathcal{G}}))$ associé à une résolution de $\widetilde{\mathcal{G}}$ sont canoniquement isomorphes ; $\Lambda_{\widetilde{\mathcal{G}}}$ est l'image réciproque dans $\overline{H}(\mathcal{G})$ de la filtration admissible canonique de $H(\widetilde{\mathcal{G}})$ par cet isomorphisme.

Le *Théorème* de BADRA se traduit en le :

THÉORÈME 1. — *Le foncteur $\mathcal{E} : \mathcal{F}_R \longrightarrow \mathcal{L}(R,\overline{R})$ qui au p-groupe fini $\widetilde{\mathcal{G}}$ sur R associe $(\widetilde{\mathcal{G}} \underset{R}{\times} \overline{R},\Lambda_{\widetilde{\mathcal{G}}})$ est une* **équivalence de catégories**. *En particulier, si $\mathcal{G}$ est un p-groupe fini sur $\overline{R}$, $\mathcal{G}$ se relève sur R si et seulement si il existe une* **filtration admissible** *sur le système de* HONDA *fini associé à une résolution quelconque de $\mathcal{G}$.*

Remarque : Si on change de résolutions, on construit avec le nouveau choix une catégorie $\mathcal{L}'$, une équivalence $\mathcal{E}' : \mathcal{F}_R \longrightarrow \mathcal{L}'(R,\overline{R})$ et un isomorphisme canonique $\mu : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}'$ tel que $\mu \circ \mathcal{E} = \mathcal{E}'$.

4) Compatibilité avec la dualité

Il existe des foncteurs de dualité (contravariants), soit D, sur les catégories des p-groupes finis ou des groupes p-divisibles sur R, et donc aussi sur $\mathcal{C}_R$, comme on le vérifie aisément. On a de même des foncteurs $\overline{D}$ sur $\overline{R}$. D et $\overline{D}$ commutent aux foncteurs de changement de base $R \longrightarrow \overline{R}$.

Sur la catégorie des R-modules de longueur finie, on dispose du foncteur de dualité $M \longmapsto D(M) = \mathrm{Hom}_R(M, K/R)$; ($K$ =corps des fractions de R).

Définissons la dualité des systèmes de HONDA finis :

Soit (M, M', v, f) (resp.(M, M', v, f, L)) un objet de $FH(R, \overline{R})$, (resp. de $FH(R)$). On pose : $D(M, M', v, f) = (D(M), D(M'), D(f), D(v))$ (resp. $D(M, M', v, f, L) = (D(M), D(M'), D(f), D(v), D(M'/L))$). On a en effet la suite exacte :

$$0 \longrightarrow D(M'/L) \longrightarrow D(M') \longrightarrow D(L) \longrightarrow 0.$$

On vérifie aisément que ce sont bien des objets des catégories concernées. La dualité pour les flèches est définie de la façon évidente.

On peut alors définir la dualité sur la catégorie $\mathcal{L}(R, \overline{R})$: à l'objet $(\mathcal{G}, \Lambda)$ elle associe $D(\mathcal{G}, \Lambda) = (\overline{D}(\mathcal{G}), \Lambda')$; si $(M, M', v, f) = \overline{H}(\mathcal{G})$, alors (M, M', v, f, Λ) est un objet de $FH(R)$; il existe un isomorphisme canonique de $D(M, M', v, f)$ vers $\overline{H}(\overline{D}(\mathcal{G}))$; Λ' est l'image de $D(M'/\Lambda)$ par cet isomorphisme.

On a ainsi un foncteur $D : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ (contravariant) tel que :

$$D \circ \mathcal{E} = \mathcal{E} \circ D \quad \text{et} \quad D \circ D = id_{\mathcal{L}}$$

5) Compatibilité au changement de base

Soit $R \longrightarrow S$ une extension **finie et plate** d'anneaux de valuation discrète. On pose $\overline{S} = S \underset{R}{\otimes} \overline{R} = S/\pi^\alpha S$. On choisit des résolutions sur R, $\overline{R}$, S, $\overline{S}$; on a alors des équivalences : $\mathcal{E}_R : \mathcal{F}_R \longrightarrow \mathcal{L}(R, \overline{R})$ et $\mathcal{E}_S : \mathcal{F}_S \longrightarrow \mathcal{L}(S, \overline{S})$. On a des foncteurs de changement de base évidents : $FH(R) \longrightarrow FH(S)$, (resp. $FH(R, \overline{R}) \longrightarrow FH(S, \overline{S})$, notés $S \underset{R}{\otimes} ?$.

Si $(\mathcal{G}, \Lambda)$ est un objet de $\mathcal{L}(R, \overline{R})$ on lui associe l'objet $(\mathcal{G} \underset{\overline{R}}{\otimes} \overline{S}, \Lambda')$ de $\mathcal{L}(S, \overline{S})$, Λ' étant défini comme suit : Si $(M, M', v, f) = \overline{H}_R(\mathcal{G})$, alors, $S \underset{R}{\otimes} (M, M', v, f)$ et $\overline{H}_{\overline{S}}(\mathcal{G} \underset{\overline{R}}{\times} \overline{S})$ sont canoniquement isomorphes; Λ' est l'image de $S \underset{R}{\otimes} \Lambda$ par cet isomorphisme. D'où un foncteur : $\mathcal{L}(R, \overline{R}) \longrightarrow \mathcal{L}(S, \overline{S})$ qui commute aux foncteurs $\mathcal{E}_R$, $\mathcal{E}_S$ et de changement de base $\mathcal{F}_R \longrightarrow \mathcal{F}_S$.

Remarques :

a– Quand $\alpha = e = 1$, c'est-à-dire $R = W$ et $\overline{R} = k$ et quand on prend $\pi^\alpha = p$, le cas particulier correspondant du *Théorème* 1 est démontré par BADRA en ([1], Ch. III, Th. 2.7); mais la démonstration qu'il donne ne se déduit pas directement de son Théorème rappelé ci-dessus en 2)-c; en effet il ne dispose pas de la notion générale de système de HONDA. Pour lui, à la suite de FONTAINE ([3]), l'existence du système de HONDA pour un groupe fini ou p-divisible sur k est liée à l'existence du foncteur défini sur ces groupes : $F = \mathrm{Hom}_{k-gr}(?, CW_k)$, CW_k étant le foncteur des covecteurs de Witt. Dans ce cas, le système de HONDA (M, M', v, f) tel que nous le définissons s'identifie à $(F(G)^\sigma, F(G), V, F)$ où $V : F(G) \longrightarrow F(G)^\sigma$ et $F : F(G)^\sigma \longrightarrow F(G)$ sont le Verschiebung et le Frobenius, grâce à l'isomorphisme $F(G)^\sigma \longrightarrow M(G)$, prouvé en ([4], 4.2.14).

En fait, dans le cas $\alpha = e = 1$, on peut remplacer, dans la démonstration de BADRA le système $(F(G)^\sigma, F(G), V, F)$ par $(M(G), M(G)^{\sigma^{-1}}, V, F)$ partout où il se présente, le Frobenius σ de k ou de W étant un isomorphisme.

Nous généralisons cette description, lorsque $\frac{e}{p-1} < \alpha \leq e$ (e étant quelconque) pour les groupes **constants** sur $\overline{R}$, (cf. II-3-C ci-dessous).

b– La démonstration du *Théorème* de BADRA prouve en fait que si $\mathcal{G}$ est un p-groupe fini sur $\overline{R}$, noyau d'une isogénie $G_0 \longrightarrow G_1$, alors, pour relever $\mathcal{G}$ sur R, il est non seulement suffisant, mais aussi **nécessaire** de relever l'isogénie $G_0 \longrightarrow G_1$.

6) Exactitude des foncteur : $\mathcal{F}_{\overline{R}} \longrightarrow FH(R, \overline{R})$ et $\mathcal{F}_R \longrightarrow FH(R)$.

Il s'agit de prouver que si $0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0$ (resp. $0 \longrightarrow \widetilde{\mathcal{E}} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{F}} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{G}} \longrightarrow 0$) est une suite exacte de p-groupes finis sur $\overline{R}$ (resp. sur R), sa transformée par le foncteur $\mathcal{F}_{\overline{R}} \longrightarrow FH(R, \overline{R})$ (resp. $\mathcal{F}_R \longrightarrow FH(R)$) est exacte, c'est-à-dire que si cette suite est $0 \longrightarrow (M, M', v, f) \longrightarrow (N, N', w, g) \longrightarrow (P, P', x, h) \longrightarrow 0$,

$$(\text{resp. } 0 \longrightarrow (M, M', v, f, L) \longrightarrow (N, N', w, g, \Lambda) \longrightarrow (P, P', x, h, \Theta) \longrightarrow 0),$$

alors les suites $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$, $0 \longrightarrow M' \longrightarrow N' \longrightarrow P' \longrightarrow 0$, (resp. et $0 \longrightarrow L \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \Theta \longrightarrow 0$) sont exactes. Concernant $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$: c'est une propriété du cristal des p-groupes finis, R étant sans p-torsion; concernant $0 \longrightarrow L \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \Theta \longrightarrow 0$, on a déjà vu que cette suite s'identifie à la suite $0 \longrightarrow \omega_{\widetilde{\mathcal{G}}} \longrightarrow \omega_{\widetilde{\mathcal{F}}} \longrightarrow \omega_{\widetilde{\mathcal{E}}} \longrightarrow 0$ qui est exacte (R étant sans p-torsion).

Il reste à établir l'assertion concernant $0 \longrightarrow M' \longrightarrow N' \longrightarrow P' \longrightarrow 0$.

a– Soit A un anneau local; on sait, grâce à RAYNAUD ([4], 3.1.1) que si $\mathcal{G}$ est un p-groupe fini et plat sur A, il existe un groupe p-divisible G sur A et un monomorphisme $\mathcal{G} \hookrightarrow G$. De ce fait, on peut déduire que si $0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0$ est une suite exacte de p-groupes finis et plats sur A, cette suite peut s'insérer dans un diagramme comme ci-dessous,

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & E_0 \arrow[r] \arrow[d] & F_0 \arrow[r] \arrow[d] & G_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & E_1 \arrow[r] \arrow[d] & F_1 \arrow[r] \arrow[d] & G_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

qui est commutatif et à lignes et colonnes exactes et où $E_0 \longrightarrow E_1, F_0 \longrightarrow F_1, G_0 \longrightarrow G_1$, sont des isogénies de groupes p-divisibles.

b– Soit $A = \overline{R}$; considérons un diagramme comme le précédent. A la suite exacte $0 \longrightarrow E_i \longrightarrow F_i \longrightarrow G_i \longrightarrow 0$ $(i = 0, 1)$ de groupes p-divisibles, il correspond une suite $0 \longrightarrow (M_i, \mu_i) \longrightarrow (N_i, \nu_i) \longrightarrow (P_i, \omega_i) \longrightarrow 0$ dont les termes sont objets de $LF(R, \overline{R})$, exacte en ce sens qu'on a un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_i \arrow[r] \arrow[d, two heads] & N_i \arrow[r] \arrow[d, two heads] & P_i \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 0 \\
0 \arrow[r] & \overline{M}_i \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \overline{N}_i \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \overline{P}_i \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 0 \\
0 \arrow[r] & \frac{\overline{M}_i}{\mu_i} \arrow[r] & \frac{\overline{N}_i}{\nu_i} \arrow[r] & \frac{\overline{P}_i}{\omega_i} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

La suite exacte du serpent associée à ce diagramme s'écrit alors :

$$0 \longrightarrow M_i' \longrightarrow N_i' \longrightarrow P_i' \longrightarrow 0$$

où (M_i, M_i', v_i), (N_i, N_i', w_i), (P_i, P_i', x_i) est le système libre de HONDA correspondant à

$$(M_i, \mu_i),\ (N_i, \nu_i),\ (P_i, \omega_i).$$

On en déduit le diagramme commutatif à lignes exactes ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_1' \arrow[r] \arrow[d, hook] & N_1' \arrow[r] \arrow[d, hook] & P_1' \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_0' \arrow[r] & N_0' \arrow[r] & P_0' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dont la suite exacte du serpent associée n'est autre que la suite exacte $0 \longrightarrow M' \longrightarrow N' \longrightarrow P' \longrightarrow 0$ demandée.

c– Indépendance du choix des présentations

On l'a dit en 2), le foncteur $\mathcal{F}_{\overline{R}} \longrightarrow FH(R, \overline{R})$ dépend du **choix** d'une équivalence : $\mathcal{F}_{\overline{R}} \longrightarrow \mathcal{C}_{\overline{R}}$ quasi inverse de $\mathcal{C}_{\overline{R}} \longrightarrow \mathcal{F}_{\overline{R}}$, c'est-à-dire du choix d'une résolution d'un groupe fini par une isogénie ; mais deux telles résolutions d'un même groupe fini sont isomorphes dans $\mathcal{C}_{\overline{R}}$ (et l'isomorphisme est unique, s'il induit l'identité du groupe fini considéré).

On déduit alors aisément du b– l'exactitude des foncteurs $\mathcal{F}_{\overline{R}} \longrightarrow FH(R, \overline{R})$ et $\mathcal{F}_R \longrightarrow FH(R)$, quelque soient les choix faits.

II — Utilisation de la structure de cristal de Dieudonné

Au cours du I — on a utilisé l'existence d'un cristal $\mathbb{D}G$ (resp. $\mathbb{D}\mathcal{G}$) associé à un groupe p-divisible G (resp. un p-groupe fini $\mathcal{G}$) sur $\overline{R}$, et sa valeur $\mathbb{D}G_R$ (resp. $\mathbb{D}\mathcal{G}_R$) sur l'épaississement $(\overline{R}, R)$, ainsi que la filtration par le module des différentielles. Ceci n'épuise pas la structure du cristal. De plus lorsque $\overline{R}$ est de caractéristique p (i.e. $\alpha \leq e$), G (resp. $\mathcal{G}$) est muni de deux morphismes F et V, qui agissent par fonctorialité sur le cristal de G (resp. $\mathcal{G}$). C'est cet ensemble de données qu'on va utiliser pour décrire autant que possible le système de HONDA libre (resp. fini) associé à G (resp. à $\mathcal{G}$).

1) On suppose désormais que k est **parfait** et que $\frac{e}{p-1} \leq \alpha \leq e$.

Soit $W = W(k) =$ anneau de Witt construit sur k. Il existe alors un et un seul morphisme surjectif : $W[T] \longrightarrow R$, qui à T associe π, de noyau un polynôme d'Eisenstein. Alors, le composé $W[T] \twoheadrightarrow R \twoheadrightarrow \overline{R}$ admet pour noyau l'idéal engendré par p et T^α, car $\overline{R}$ est isomorphe à $k[T]/(T^\alpha)$.

Soit $\mathcal{D}$ (noté $\widehat{\mathcal{D}}$ dans [4]) le séparé-complété pour la topologie p-adique de l'enveloppe à puissances divisées de l'idéal (p, T^α) de $W[T]$. D'après ([4] *Lemme* 2.2.11), $\mathcal{D}$ peut être décrit comme le sous-anneau de $K[[T]]$ ($K =$ le corps des fractions de W) des séries formelles pouvant s'écrire :

$$\sum_{n\geq 0} a_n \cdot \frac{T^n}{[\frac{n}{\alpha}]!}$$

où $[m] =$ partie entière de m, et où : $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, et $\forall n \geq 0$, $a_n \in W$.

En particulier : a) $\mathcal{D}$ est sans p-torsion.

b) il existe un morphisme surjectif $\mathcal{D} \twoheadrightarrow R$, qui à $\frac{T^n}{[\frac{n}{\alpha}]!}$ associe $\frac{\pi^n}{[\frac{n}{\alpha}]!}$.

c) le noyau du morphisme composé $\mathcal{D} \longrightarrow R \longrightarrow \overline{R}$ est l'idéal à puissances divisées, séparé complété pour la topologie p-adique de l'idéal engendré par p et les $\frac{T^{\alpha m}}{m!}$ $(m \geq 1)$ dans l'enveloppe à $P \cdot D \cdot$ de (p, T^α) dans $W[T]$.

d) $\mathcal{D}$ est muni de la dérivation ∂ induite par la dérivation $T^n \longmapsto n \cdot T^{n-1}$ de $K[[T]]$.

e) $\mathcal{D}$ est muni du morphisme de Frobenius :

$$\sigma : \sum_{n\geq 0} a_n \frac{T^n}{[\frac{n}{\alpha}]!} \longmapsto \sum_{n\geq 0} a_n^\sigma \frac{T^{pn}}{[\frac{n}{\alpha}]!}.$$

On sait alors ([4] *Théorème* 1.2.7) que la donnée d'un cristal en $\mathcal{O}_{\overline{R}/W}$-module sur $\mathrm{CRIS}(\overline{R}/W, p \cdot W, \gamma = can)$ **équivaut** à la donnée d'un $\mathcal{D}$-module $\mathcal{M}$, séparé et complet pour la topologie p-adique, muni d'un endomorphisme additif ∇ tel que :

i) $\forall a \in \mathcal{D}, \forall m \in \mathcal{M}$ on a :

$$\nabla(am) = \partial(a) \cdot m + a \cdot \nabla(m).$$

ii) Pour tout $n \geq 0$, pour tout $m \in \mathcal{M}$, il existe $q \geq 0$ tel que $\nabla^q(m) \in p^n \cdot \mathcal{M}$, où $\nabla^q =$ itéré q fois de ∇.

On dit que ∇ est une connexion (intégrable) et topologiquement quasi-nilpotente sur $\mathcal{M}$. A un cristal $\mathbb{E}$ en modules, on associe sa "valeur" $\mathcal{M} = \mathbb{E}_{(\overline{R},\mathcal{D})}$, notée $\mathbb{E}_{\mathcal{D}}$ qui par définition est : $\varprojlim_{n} \mathbb{E}_{(\overline{R},\mathcal{D}_n)}$, où $\mathcal{D}_n = \mathcal{D}/p^n\mathcal{D}$.

Alors : $\mathbb{E}_R = \mathbb{E}_{(\overline{R},R)} = R \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{M}$ et $\mathbb{E}_{\overline{R}} = \mathbb{E}_{(\overline{R},\overline{R})} = \overline{R} \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{M}$, ou encore $\mathbb{E}_R = \mathcal{M}/J \cdot \mathcal{M}$ et $\mathbb{E}_{\overline{R}} = \mathcal{M}/I \cdot \mathcal{M}$ si $J = \operatorname{Ker}(\mathcal{D} \longrightarrow \overline{R})$ et $I = \operatorname{Ker}(\mathcal{D} \longrightarrow R)$.

2) Le cas des groupes p-divisibles sur $\overline{R}$

a– Soit G un tel groupe; le cristal $\mathbb{D}G$ associé ([4] Théorème 3.3.3) est libre de rang fini, ce qui signifie que $\mathcal{M} = \mathbb{D}G_{\mathcal{D}}$ est un $\mathcal{D}$-module libre de rang fini égal à la hauteur de G ([4] *Théorème* 3.3.10). De plus, l'existence de morphismes $F : G \longrightarrow G^\sigma$ et $V : G^\sigma \longrightarrow G$ tels que : $V \circ F = id_G$, $F \circ V = id_{G^\sigma}$ entraîne l'existence de $\mathcal{D}$-morphismes : $F : \mathcal{M}^\sigma \longrightarrow \mathcal{M}$ et $V : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}^\sigma$, où $\mathcal{M}^\sigma$ se déduit de $\mathcal{M}$ par l'extension des scalaires $\sigma : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$. On dit que $(\mathcal{M}, F, V)$ est un cristal de Dieudonné (libre). De plus, si ω_G est le module des différentielles invariantes de G, il existe une $\overline{R}$ injection canonique : $\omega_G \hookrightarrow \mathbb{D}G_{\overline{R}} \simeq \overline{R} \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{M}$, faisant de ω_G un facteur direct de $\mathbb{D}G_{\overline{R}}$ ([4] *Théorème* 3.3.5). A ce système $(\mathcal{M}, \omega_G)$ est naturellement associé l'objet (M, ω) de $LF(R, \overline{R})$ obtenu en posant : $M = R \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{M} = \mathbb{D}G_R$, qu'on a rencontré au I-B. Nous nous proposons de décrire l'objet (M, M', v) de $LH(R, \overline{R})$ associé à (M, ω) en termes de la structure de cristal de Dieudonné $(\mathcal{M}, V, F)$.

b– Soit $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}/p\mathcal{D}$. Alors $\mathcal{D}_1$ s'identifie ([4] 1.2.5) à l'enveloppe à puissances divisées de l'idéal (T^α) de $k[T]$. On a alors le diagramme commutatif ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}_1 \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "can"'] & \mathcal{D}_1 \arrow[d, "can"] \\ \overline{R} \arrow[r, "\sigma"'] \arrow[ur, "\phi"] & \overline{R} \end{tikzcd}$$

dans lequel σ désigne les Frobenius absolus, où $\mathcal{D}_1 \xrightarrow{can} \overline{R}$ se déduit de $\mathcal{D} \longrightarrow \overline{R}$, et où ϕ est tel que $\phi \circ can = \sigma$ et $can \circ \phi = \sigma$, et doit son existence au fait que le noyau de $\mathcal{D}_1 \longrightarrow \overline{R}$ étant muni de puissances divisées, les éléments de ce noyau ont une puissance $p^{\text{ième}}$ nulle.

Il résulte de la démonstration de ([4-bis], lemme 4.1.4) que ϕ est **fidèlement plat**; grâce à quoi nous pourrons faire la description annoncée en a– :

On dispose d'un morphisme σ-linéaire $\varphi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}^\sigma = \mathcal{D}_\sigma \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{M}$ qui à m associe $1 \otimes m$, et du morphisme $V : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}^\sigma$ (qui est $\mathcal{D}$-linéaire).

LEMME 4. —

i) $\varphi^{-1}(V\mathcal{M})$ *est un sous* $\mathcal{D}$*-module de* $\mathcal{M}$*, contenant* $I\cdot\mathcal{M}$ ($I = \mathrm{Ker} : \mathcal{D} \longrightarrow \overline{R}$).

ii) l'image canonique $\frac{\varphi^{-1}(V\mathcal{M})}{J\cdot\mathcal{M}}$ *de* $\varphi^{-1}(V\mathcal{M})$ *dans* $M = \mathcal{M}/J\mathcal{M} = R \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{M} = \mathbb{D}G_R$*, n'est autre que le sous* R*-module* M' *de* M *tel que* $(M,\, M',\, v = incl : M' \hookrightarrow M)$ *soit l'objet de* $LH(R, \overline{R})$ *associé à* G.

Démonstration : Soit S_1 un schéma de caractéristique p (pour nous, S_1 sera égal à $\mathrm{Spec}\,\mathcal{D}_1$), et soit G_1 un groupe p-divisible sur S_1. Soit $\mathcal{M}_1 = \mathbb{D}G_{1(S_1,S_1)}$ = valeur sur l'épaississement $(S_1, S_1) \in N\,\mathrm{CRIS}(S_1/\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},\, 0,\, can)$ du cristal de G_1. D'après ([4], *Proposition* 4.3.10) il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\frac{\mathcal{M}_1}{F\mathcal{M}_1^\sigma} \arrow[r, "\psi", "\sim"'] \arrow[d, "V"] & \omega_{G_1^\sigma} \arrow[dl, hook] \\
\mathcal{M}_1^\sigma &
\end{tikzcd}$$

En particulier :

$$\omega_{G_1^\sigma} = \mathrm{Im}(V : \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_1^\sigma).$$

Si on part d'un groupe p-divisible G sur $\overline{R}$, il existe un relèvement G_1 de G sur $\mathcal{D}_1$, car le noyau de $\mathcal{D}_1 \longrightarrow \overline{R}$ est un nilidéal.

D'après le diagramme commutatif du début du b– on a donc : $G_1^\sigma \simeq \phi^* G$, et par conséquent :

$$\phi^*\omega_G = \omega_{G_1^\sigma} = \mathrm{Im}(\mathcal{M}_1 \xrightarrow{V} \mathcal{M}_1^\sigma),$$

et aussi :

$$\phi^*\overline{M} = \phi^*\mathbb{D}G_{\overline{R}} = \mathcal{M}_1^\sigma$$

et aussi :

$$\phi^*\left(\frac{\overline{M}}{\omega_G}\right) \simeq \frac{\mathcal{M}_1^\sigma}{V\mathcal{M}_1}.$$

Comme ϕ est fidèlement plat, l'application :

$$x \longmapsto 1 \otimes x : \frac{\overline{M}}{\omega_G} \longrightarrow \mathcal{D}_1 \underset{\overline{R}}{\otimes} \frac{\overline{M}}{\omega_G} \simeq \frac{\mathcal{M}_1^\sigma}{V\mathcal{M}}, \text{ où } \overline{R} \longrightarrow \mathcal{D}_1 = \phi$$

est **injective** et elle prend place dans le diagramme commutatif ci-dessous :

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{M} \arrow[r, hook, "\varphi=1\otimes?"] \arrow[dl] \arrow[d, twoheadrightarrow] & \mathcal{M}^\sigma \arrow[r, twoheadrightarrow] \arrow[d, twoheadrightarrow] & \frac{\mathcal{M}^\sigma}{V\mathcal{M}} \arrow[d, equal] \\
M = \frac{\mathcal{M}}{J\mathcal{M}} \arrow[dr] & \mathcal{M}_1 \arrow[r, "1\otimes?"] \arrow[d, twoheadrightarrow] & \mathcal{M}_1^\sigma \arrow[r, twoheadrightarrow] & \frac{\mathcal{M}_1^\sigma}{V\mathcal{M}_1} \\
 & \overline{M} \arrow[ur, hook] \arrow[dr] & & \\
 & & \frac{\overline{M}}{\omega_G} \arrow[uur, hook] &
\end{tikzcd}
$$

Il est alors clair que le noyau M' de $M \twoheadrightarrow \overline{M} \twoheadrightarrow \frac{\overline{M}}{\omega_G}$ = le noyau de $M \twoheadrightarrow \overline{M} \twoheadrightarrow \frac{\overline{M}}{\omega_G} \hookrightarrow \frac{\mathcal{M}_1^\sigma}{V\mathcal{M}_1}$, c'est-à-dire, l'image canonique dans M du noyau de $\mathcal{M} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{M}^\sigma \twoheadrightarrow \frac{\mathcal{M}^\sigma}{V\mathcal{M}}$, à savoir $\varphi^{-1}(V\mathcal{M})/J\mathcal{M}$, ce qui prouve i) et ii).

c– Un cas particulier : $G = H^\sigma$

Soit H un groupe p-divisible sur $\overline{R}$ et $G = H^\sigma$. Soit $(\mathcal{N}, V, F)$ le cristal de Dieudonné de H. On va calculer le système de Honda libre (M, M', v) de G en termes de $(\mathcal{N}, V, F)$.

Plus généralement soit $\mathcal{N}$ un $\mathcal{D}$-module et $F : \mathcal{N}^\sigma \longrightarrow \mathcal{N}$, $V : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}^\sigma$ des $\mathcal{D}$-morphismes tels que $F \circ V = p \cdot id_{\mathcal{N}}$, $V \circ F = p \cdot id_{\mathcal{N}^\sigma}$.

Au système $(\mathcal{N}, V, F)$ on associe le diagramme $\Delta_{\mathcal{N}}$:

$$\begin{tikzcd}
 & R \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{N} \arrow[dl, "\pi^{\alpha}"'] \arrow[dr, "id \otimes V"] & \\
R \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{N} & & R \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{N}^{\sigma} \\
 & R \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{N}^{\sigma} \arrow[ul, "id \otimes F"] \arrow[ur, "\frac{p}{\pi^{\alpha}}"'] &
\end{tikzcd}$$

On pose alors : $\mathcal{N}_R = \varinjlim \Delta_{\mathcal{N}}$, qui est un R-module, muni de deux R-morphismes : $v : \mathcal{N}_R \longrightarrow R \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{N}^{\sigma}$ et $f : R \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{N}^{\sigma} \longrightarrow \mathcal{N}_R$ définis comme suit : f est le morphisme canonique du terme $R \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{N}^{\sigma}$ (à droite du diagramme $\Delta_{\mathcal{N}}$) dans la limite inductive; v est défini par ses valeurs : $id \otimes V$ sur $R \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{N}$, et π^{α} sur $R \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{N}^{\sigma}$ sur les termes de gauche et de droite du diagramme. On a :

$$v \circ f = \pi^{\alpha} \cdot id_{R \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{N}} \text{ et } f \circ v = \pi^{\alpha} \cdot id_{\mathcal{N}_R}$$

Revenant à la situation envisagée, où $\mathcal{M} = \mathbb{D}G_{\mathcal{D}} = \mathbb{D}H^{\sigma}_{\mathcal{D}} = \mathcal{N}^{\sigma}$ (et donc $M = \mathbb{D}G_R = R \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{N}^{\sigma}$), il est clair que Im v est égal au sous module $R \underset{\mathcal{D}}{\otimes} V\mathcal{N} + \pi^{\alpha} \cdot R \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{N}^{\sigma}$ de $R \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{N}^{\sigma} = R \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{M} = M$ c'est-à-dire au sous module : $R \underset{\mathcal{D}}{\otimes} V\mathcal{N} + \pi^{\alpha} \cdot M$.

D'après l'argument rappelé au début de la démonstration du *Lemme* 4, si H_1 est un relèvement de H sur $\mathcal{D}_1$ (et si on pose $G_1 = H_1^{\sigma}$), on a alors : $\omega_{G_1} = \omega_{H_1^{\sigma}} = V\mathcal{N}_1 = V\mathcal{N}/_{p\mathcal{N}}$. Alors :

$$(R \underset{\mathcal{D}}{\otimes} V\mathcal{N} + \pi^{\alpha} \cdot M)/_{\pi^{\alpha} \cdot M} = \omega_{H^{\sigma}} = \omega_G$$

et par conséquent :

$$\mathrm{Im}(v : \mathcal{N}_R \longrightarrow R \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{N}^{\sigma} = M) = M'.$$

On va démontrer que $v : \mathcal{N}_R \longrightarrow R \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{N}^{\sigma}$ est injective. $R \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{N}^{\sigma}$ est libre sur R, de rang h = hauteur de G. Comme $\mathrm{Im}(v)$ est aussi libre de rang h, il suffit de prouver que h est aussi le nombre d'éléments d'un système minimal de générateurs de $\mathcal{N}_R$. On obtient alors que v est injective et $\mathcal{N}_R$ libre de rang h. Soit alors $\beta = \inf(\alpha, e - \alpha)$. Appliquons

$\frac{R}{\pi^\beta R} \underset{R}{\otimes} ?$ au diagramme $\Delta_{\mathcal{N}}$ ci-dessus. Alors : $\frac{R}{\pi^\beta R} \underset{R}{\otimes} \mathcal{N}_R = \varinjlim\left(\frac{R}{\pi^\beta R} \underset{R}{\otimes} \Delta_{\mathcal{N}}\right)$. Deux cas se présentent :

i) $\beta = 0$, c'est-à-dire $\alpha = e$. Alors dans le diagramme $\Delta_{\mathcal{N}}$, la multiplication par $\frac{p}{\pi^\alpha}$ est un isomorphisme. Par définition de la $\varinjlim$, l'application canonique du terme $R \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{N}$ dans $\mathcal{N}_R$ est un isomorphisme et la démonstration est finie.

ii) $\beta \geq 1$: le diagramme $\frac{R}{\pi^\beta R} \otimes \Delta_{\mathcal{N}}$ est alors égal à :

$$\begin{tikzcd}
& \frac{R}{\pi^\beta R} \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{N} \arrow[dl, "0"'] \arrow[dr, "id \otimes V"] & \\
\frac{R}{\pi^\beta R} \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{N} & & \frac{R}{\pi^\beta R} \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{N}^\sigma \\
& \frac{R}{\pi^\beta R} \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{N}^\sigma \arrow[ul, "id \otimes F"] \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

dont la limite inductive est :

$$\frac{R}{\pi^\beta R} \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \left(\frac{\mathcal{N}}{F\mathcal{N}^\sigma} \oplus \frac{\mathcal{N}^\sigma}{V\mathcal{N}}\right).$$

Si H_1 est un relèvement quelconque de H sur $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}/p\mathcal{D}$, alors on a vu que $\frac{\mathcal{N}^\sigma}{V\mathcal{N}} \simeq \frac{\mathcal{N}_1^\sigma}{V\mathcal{N}_1} = \frac{\mathcal{N}_1^\sigma}{\omega_{H_1^\sigma}}$ et $\frac{\mathcal{N}}{F\mathcal{N}^\sigma} \simeq \frac{\mathcal{N}_1}{F\mathcal{N}_1^\sigma} \overset{V}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} \omega_{H_1^\sigma}$. Donc $\frac{\mathcal{N}}{F\mathcal{N}^\sigma} \oplus \frac{\mathcal{N}^\sigma}{V\mathcal{N}}$ est isomorphe à $\mathcal{D}_1^h$ et $\frac{R}{\pi^\beta R} \underset{R}{\otimes} \mathcal{N}_R$ est isomorphe à $\left(\frac{R}{\pi^\beta R}\right)^h$; c.q.f.d. Au bout du compte on a donc démontré le :

Lemme 5. — *Soit H un groupe p-divisible sur $\overline{R}$ et $G = H^\sigma$. Si $(\mathcal{N}, V, F)$ est le cristal de* Dieudonné *de H, le système de* Honda *libre associé à G s'identifie à $(R \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{N}^\sigma, \mathcal{N}_R, v)$ où $v : \mathcal{N}_R \longrightarrow R \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{N}^\sigma = \mathbb{D}G_R$ est le morphisme défini ci-dessus.*

d– Un cas particulier du précédent : les groupes **constants**

Pour nous, "constant" signifie "constant en tant que déformation" : d'après l'hypothèse faite $(\alpha \leq e)$, $\overline{R} = R/\pi^\alpha R$ est une k-algèbre; il existe un morphisme $k \hookrightarrow \overline{R}$, qui composé avec l'application canonique $\overline{R} \twoheadrightarrow k$ donne l'identité de k. Soit G un foncteur en groupe sur $\operatorname{Spec}\overline{R}$; on dit que G est **constant** s'il existe un isomorphisme de foncteurs en groupes :

$$G \xrightarrow{\sim} \left(G \underset{\operatorname{Spec}\overline{R}}{\times} \operatorname{Spec} k\right) \underset{\operatorname{Spec} k}{\times} \operatorname{Spec}\overline{R}.$$

Un groupe p-divisible G (resp. un p-groupe fini $\mathcal{G}$) sur $\overline{R}$ est donc constant s'il existe un groupe p-divisible $\widehat{G}$ (resp. un p-groupe fini $\widehat{\mathcal{G}}$) sur k tel que G (resp. $\mathcal{G}$) soit isomorphe à $\widehat{G} \underset{\operatorname{Spec} k}{\times} \operatorname{Spec}\overline{R}$ (resp. à $\widehat{\mathcal{G}} \underset{\operatorname{Spec} k}{\times} \operatorname{Spec}\overline{R}$). Un tel groupe p-divisible G est alors de la forme H^{σ} avec $H = \widehat{G}^{\sigma^{-1}} \underset{\operatorname{Spec} k}{\times} \operatorname{Spec}\overline{R}$ (le Frobenius $\sigma : k \longrightarrow k$ étant un isomorphisme, à la différence de celui de $\overline{R}$ en général).

Soit $\widehat{G}$ un groupe p-divisible; on a un morphisme naturel :

$$(\operatorname{Spec}\overline{R} \hookrightarrow \operatorname{Spec}\mathcal{D}_n) \longrightarrow (\operatorname{Spec} k \hookrightarrow \operatorname{Spec} W_n)$$

d'objets du site $N\,\mathrm{CRIS}(\operatorname{Spec} k/_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}_p}, (p), can)$ pour tout entier $n \geq 1$, où on a posé $\mathcal{D}_n = \mathcal{D}/p^n\mathcal{D}$ et $W_n = W/p^nW$. Ce dont on déduit un isomorphisme canonique :

$$\mathbb{D}G_{(\overline{R},\mathcal{D})} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}\widehat{G}_{(k,W)} \underset{W}{\otimes} \mathcal{D},$$

si on pose $G = \widehat{G} \underset{\operatorname{Spec} k}{\times} \operatorname{Spec}\overline{R}$, et cet isomorphisme commute aux morphismes V et F, étant fonctoriel par rapport à $\widehat{G}$. On a donc :

$$\mathbb{D}G_{(\overline{R},\overline{R})} \simeq \mathbb{D}\widehat{G}_{(\overline{R},\mathcal{D})} \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \overline{R} = \mathbb{D}\widehat{G}_{(k,W)} \underset{W}{\otimes} \overline{R} = \mathbb{D}\widehat{G}_{(k,W)} \underset{W}{\otimes} k \underset{k}{\otimes} \overline{R} = \mathbb{D}\widehat{G}_{(k,k)} \underset{k}{\otimes} \overline{R}.$$

De plus, le sous-module ω_G de $\mathbb{D}G_{\overline{R}}$ s'identifie au sous-module $\omega_{\widehat{G}} \underset{k}{\otimes} \overline{R}$ de $\mathbb{D}\widehat{G}_k \underset{k}{\otimes} \overline{R}$. Remarquons que les propriétés analogues sont vraies dans le cas d'un p-groupe fini.

Soit $\widehat{M} = \mathbb{D}\widehat{G}_W$, $\mathcal{M} = \mathbb{D}G_{\mathcal{D}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D} \underset{W}{\otimes} \widehat{M}$; si on pose :

$$H = \operatorname{Spec}\overline{R} \underset{\operatorname{Spec} k}{\times} \widehat{G}^{\sigma^{-1}},$$

on a, d'après le c– : $M' \hookrightarrow M = R \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{M} = R \underset{W}{\otimes} \widehat{M}$ s'identifie au sous-module $R \underset{W}{\otimes} V(\widehat{M}^{\sigma^{-1}}) + \pi^{\alpha} \cdot M$, et encore, à la limite inductive du diagramme $\Delta_{\mathcal{N}}$ où

$\mathcal{N} = \mathcal{D} \underset{W}{\otimes} \widehat{M}^{\sigma^{-1}}$; dans ce cas : $\Delta_{\mathcal{N}} =$

$$\begin{tikzcd} & R \underset{W}{\otimes} \widehat{M}^{\sigma^{-1}} \arrow[dl, "\pi^{\alpha}"'] \arrow[dr, "id \otimes V"] & \\ R \underset{W}{\otimes} \widehat{M}^{\sigma^{-1}} & & R \underset{W}{\otimes} \widehat{M} \\ & R \underset{W}{\otimes} \widehat{M} \arrow[ul, "id \otimes F"] \arrow[ur, "p/\pi^{\alpha}"'] & \end{tikzcd}$$

et nous noterons sa limite inductive

$$\mathcal{N}_R : \varinjlim \Delta_{\mathcal{N}} = \widehat{M}^R,$$

car elle ne dépend que de $(\widehat{M}, V, F)$.

3) Les p-groupes finis sur $\overline{R}$

a– Soit $G_0 \twoheadrightarrow G_1$ une isogénie de groupes p-divisibles sur $\overline{R}$ et $\mathcal{G}$ son noyau. On a alors la suite exacte, $\mathcal{D}$ étant sans p-torsion :

$$0 \longrightarrow \mathbb{D}G_{1\mathcal{D}} \longrightarrow \mathbb{D}G_{0\mathcal{D}} \longrightarrow \mathbb{D}\mathcal{G}_{\mathcal{D}} \longrightarrow 0$$

de $\mathcal{D}$-modules, où les morphismes commutent aux morphismes V et F de G_0, G_1, $\mathcal{G}$. Soit $\mathcal{M}_i = \mathbb{D}G_{i\mathcal{D}}$, $M_i = R \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{M}_i = \mathbb{D}G_{iR}$. Soit $\mathcal{M} = \mathbb{D}\mathcal{G}_{\mathcal{D}}$ et $M = R \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{M} = \mathbb{D}\mathcal{G}_R$. On a donc la suite exacte : $0 \longrightarrow \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0$ d'où la suite exacte $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ (R étant aussi sans p-torsion). D'après le 2) le système libre de HONDA associé à G_i est isomorphe à $(M_i, \frac{\varphi_i^{-1}(V\mathcal{M}_i)}{J \cdot \mathcal{M}_i}, v_i = \text{inclusion})$. Par définition (I-B), le système fini de HONDA associé à l'isogénie $G_0 \twoheadrightarrow G_1$ est (M, M', v, f) où $M = \mathbb{D}\mathcal{G}_R$ et où M' est défini par la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \frac{\varphi_1^{-1}(V\mathcal{M}_1)}{J \cdot \mathcal{M}_1} \longrightarrow \frac{\varphi_0^{-1}(V\mathcal{M}_0)}{J \cdot \mathcal{M}_0} \longrightarrow M' \longrightarrow 0$$

et où v et f se déduisent de v_i et f_i.

b– Le cas $\mathcal{G} = \mathcal{H}^\sigma$

Soit $\mathcal{H}$ un p-groupe fini sur $\overline{R}$ et $\mathcal{G} = \mathcal{H}^\sigma$. Soit $H_0 \twoheadrightarrow H_1$ une isogénie de groupes p-divisibles dont $\mathcal{H}$ est le noyau, et soit $G_0 = H_0^\sigma$, $G_1 = H_1^\sigma$ et $G_0 \twoheadrightarrow G_1$ l'isogénie qui s'en déduit, de noyau $\mathcal{G}$. Posons : $\mathcal{N}_i = \mathbb{D}H_{i\mathcal{D}}, \mathcal{N} = \mathbb{D}\mathcal{H}_{\mathcal{D}}$. On a vu au 2)-c) que le système libre de HONDA associé à G_i est isomorphe à $(R \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{N}_i^\sigma,\ \mathcal{N}_{iR},\ v_i)$ où $\mathcal{N}_{iR} = \varinjlim \Delta_{\mathcal{N}_i}$.

Le conoyau est donc isomorphe à $(R \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{N}^\sigma, M', v, f)$ où M' est le conoyau de $\mathcal{N}_{1R} \longrightarrow \mathcal{N}_{0R}$. Mais le produit tensoriel et les limites inductives sont exacts à droite. Ce dernier conoyau est donc isomorphe à $\mathcal{N}_R$ et le système fini à $(M, \mathcal{N}_R, v, f)$ où v, f ont été définis en 2)-c) pour tout système $(\mathcal{N}, V, F)$.

Remarque : On constate que pour tout groupe fini $\mathcal{G} = \mathcal{H}^\sigma$, le système de HONDA fini associé à $\mathcal{G}$ ne dépend que du cristal de Dieudonné $(\mathcal{N}, V, F)$ associé à $\mathcal{H}$.

L'auteur de ces lignes ignore si pour un groupe fini $\mathcal{G}$ quelconque, son système de HONDA (M, M', v, f) peut se décrire en termes du module de Dieudonné $(\mathcal{M}, V, F)$ de $\mathcal{G}$ seulement.

c– Les groupes finis constants

Soit $\widehat{\mathcal{G}}$ un p-groupe fini sur k et $\mathcal{G} = \widehat{\mathcal{G}} \underset{\mathrm{Spec}\, k}{\times} \mathrm{Spec}\, \overline{R}$. D'après le point b– précédent et le point 2)-d), le système fini de HONDA (M, M', v, f) associé à $\mathcal{G}$ est défini par : $M = R \underset{W}{\otimes} \widehat{M}$, où $\widehat{M} = \mathbb{D}\widehat{\mathcal{G}}_W$, M' = la limite inductive du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & R \underset{W}{\otimes} \widehat{M}^{\sigma^{-1}} \arrow[dl, "\pi^\alpha"'] \arrow[dr, "id \otimes V"] & \\
R \underset{W}{\otimes} \widehat{M}^{\sigma^{-1}} & & R \underset{W}{\otimes} \widehat{M} \\
 & R \underset{W}{\otimes} \widehat{M} \arrow[ul, "id \otimes F"] \arrow[ur, "p/\pi^\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

qu'on note encore $\widehat{M}^R$, muni des applications v et f canoniques.

Remarques :

1) Ce cas contient celui où $\overline{R} = k$ (tous les groupes sont constants) c'est-à-dire $\alpha = 1$, ce qui implique $e < p - 1$.

2) Si t est le plus petit des entiers n tels que $p^n \geq \alpha$: Alors pour **tout** p-groupe fini $\mathcal{G}$ sur $\overline{R}$, $\mathcal{G}^{\sigma^t}$ est constant. En effet : $\sigma^t : \overline{R} \longrightarrow \overline{R}$ se factorise en : $\overline{R} \twoheadrightarrow k \xrightarrow{\sigma^t} k \hookrightarrow \overline{R}$.

3) Dans le calcul de M' associé à un groupe fini $\mathcal{G}$ sur $\overline{R}$, on a supposé pour simplifier, $\alpha \leq e$, c'est-à-dire $p = 0$ dans $\overline{R}$. Mais si $\alpha > e$, le cristal de $\mathcal{G}$ ne dépend que de la réduction de $\mathcal{G}$ sur R/pR; on est ramené au cas précédent (cf. [4]).

d– Le cas $e < p-1$, $\alpha = 1$.

On a alors $\overline{R} = k$ et **tout** groupe sur $\overline{R}$ est constant. Si $\mathcal{G}$ est un p-groupe fini sur k, il est caractérisé par son module de Dieudonné cristallin (M, V, F), où $M = \mathbb{D}\mathcal{G}_{(k,W)}$. En effet :

i) il existe un isomorphisme fonctoriel de W-modules, commutant à l'action de V et F, soit :

$$\mathcal{E} : M(\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}\mathcal{G}_{(k,W)},$$

où $M(\mathcal{G}) = \mathrm{Hom}_{k-gr}(\mathcal{G}, CW_k)$ est le module associé à $\mathcal{G}$ par FONTAINE (cf. [4], Théorème 4.2.14 pour l'existence de l'isomorphisme $\mathcal{E}$).

ii) $\mathcal{G} \longmapsto M(\mathcal{G})$ est une antiéquivalence de la catégorie des p-groupes finis sur k avec celle des modules de Dieudonné finis sur k (cf. [3bis]).

Alors le *Théorème* 1 et les considérations précédentes se traduisent comme suit :

COROLLAIRE 1. — *Si $e < p-1$, il existe une équivalence :*

$$\widetilde{\mathcal{G}} \longmapsto (\mathbb{D}(\widetilde{\mathcal{G}} \underset{\mathrm{Spec}\, R}{\times} \mathrm{Spec}\, k)_{(k,W)}, L)$$

de la catégorie des p-groupes finis sur R, avec celle des couples (M, L), où M est un module de Dieudonné fini sur k, et L est une filtration admissible (I,B,2)-c) du système $(R \otimes M, M^R, v, f)$ associé à $\mathcal{G} = \widetilde{\mathcal{G}} \underset{\mathrm{Spec}\, R}{\times} \mathrm{Spec}\, k$.

Deuxième partie : Etude des groupes finis constants sur $\overline{R}$

Rappelons que ce sont les groupes de la forme $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \underset{\operatorname{Spec} k}{\times} \operatorname{Spec} \overline{R}$; leur cristal et leur système de Honda fini s'obtiennent à partir de la connaissance du module de Dieudonné de $\mathcal{G}_0$ comme on l'a vu en ($1^{\text{ère}}$ partie, II, 3)-c).

On va donc étudier d'abord la structure des modules de Dieudonné (finis) puis en déduire les systèmes de Honda de $\mathcal{G}$, et étudier l'existence de relèvements de $\mathcal{G}$ sur R.

I — Modules de Dieudonné finis sur k

Soit k un corps parfait de caractéristique $p > 0$, $W = W(k)$ l'anneau de Witt de k. Soit σ l'automorphisme de Frobenius de W. Pour tout W-module M et tout $i \in \mathbb{Z}$, on pose : $M^{\sigma^i} = W_{\sigma^i} \underset{W}{\otimes} M$, où W est considéré comme W-module, via σ^i ; on pose : $lg\ M =$ longueur du W-module M.

On appelle : **Module de Dieudonné** sur k un triplet : (M, V, F), où M est un W module, $M \xrightarrow{F} M^{\sigma^{-1}}$ et $M^{\sigma^{-1}} \xrightarrow{V} M$ des applications W-linéaires telles que $V \circ F = p \cdot id_M$, $F \circ V = p \cdot id_{M^{\sigma^{-1}}}$.

Les morphismes $(M, V, F) \longrightarrow (M', V', F')$ sont les applications W-linéaires $u : M \longrightarrow M'$ telles que $u^{\sigma^{-1}} \circ F = F' \circ u$ et $u \circ V' = V \circ u^{\sigma^{-1}}$.

On dit que (M, V, F) est **fini** si M est de **longueur finie** sur W, c'est-à-dire si M est de type fini et annulé par une puissance de p. Ce sont les seuls qu'on étudiera dans le I.

1) Soit (M, V, F) un module de Dieudonné fini, annulé par p^n.

Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ on pose : $M_i = p^{i-1} \cdot \operatorname{Ker} p^i_M$; on a : $M_{i+1} \subset M_i$ et cette inclusion est un morphisme de modules de Dieudonné ; en fait M_i est isomorphe, via la multiplication par p^{i-1}, à $\operatorname{Ker} p^i_M / \operatorname{Ker} p^{i-1}_M$, l'inclusion $M_{i+1} \hookrightarrow M_i$ étant induite par la multiplication par p : $\operatorname{Ker} p^{i+1} / \operatorname{Ker} p^i \longrightarrow \operatorname{Ker} p^i / \operatorname{Ker} p^{i-1}$. Les M_i sont des modules de Dieudonné, annulés par p, c'est-à-dire des k-espaces vectoriels.

Pour **toute** suite $M_1 \supset M_2 \supset \cdots \supset M_n \supset \{0\}$ de modules de Dieudonné où on note $M_i = (M_i, V_i, F_i)$, de longueurs finies et **annulés par** p, on pose : $h_i = \dim_k M_i$; $d'_i = \dim_k(\operatorname{Ker} M_i^{\sigma^{-1}} \xrightarrow{V_i} M_i)$; $d''_i = \dim_k(\operatorname{Ker} M_i \xrightarrow{F_i} M_i^{\sigma^{-1}})$; $\delta_i = \dim_k\left(\frac{\operatorname{Ker} V_i}{\operatorname{Im} F_i}\right) = \dim_k\left(\frac{\operatorname{Ker} F_i}{\operatorname{Im} V_i}\right)$. On a :

$$\delta_i = d'_i + d''_i - h_i$$

et

$$0 \leq d'_i,\ d''_i \leq h_i \leq d'_i + d''_i ;$$

$$h_i \geq h_{i+1} ; d'_i \geq d'_{i+1} ; d''_i \geq d''_{i+1}.$$

Soit $M_1 \supset M_2 \supset \cdots \supset M_n$; une telle suite **est associée** à un module de Dieudonné (M, V, F) si on l'obtient par le procédé ci-dessus à partir de M, c'est-à-dire, en posant : $M_i = p^{i-1} \cdot \operatorname{Ker} p^i_M$ (alors $p^n \cdot M = 0$).

LEMME 6. — *Soit $M_1 \supset M_2 \supset \cdots \supset M_n$ une suite associée à un module $M = (M, V, F)$; alors, pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, on a :*

$$(*) \qquad \operatorname{Ker} F_{i+1} \subset \operatorname{Im} V_i \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker} V_{i+1} \subset \operatorname{Im} F_i$$

$$(**) \qquad h_i - d'_i - d''_{i+1} \geq 0 \quad \text{et} \quad h_i - d''_i - d'_{i+1} \geq 0$$

Démonstration : Soit $x \in M_{i+1} = p^i \cdot \operatorname{Ker} p_M^{i+1}$; $x = p^i \cdot y$ avec $p^{i+1} \cdot y = 0$. Si $Fx = 0$, on a : $x = V(F \cdot p^{i-1} y)$ et $Fx = F \cdot p^i y = 0$. Donc $p^{i-1} \cdot Fy \in M_i$ et $x \in \operatorname{Im} V_i$. De même : $\operatorname{Ker} V_{i+1} \subset \operatorname{Im} F_i$. Comme $\dim \operatorname{Ker} F_{i+1} = d''_{i+1}$, $\dim \operatorname{Im} V_i = \dim M_i - \dim \operatorname{Ker} V_i = h_i - d'_i$, on en tire : $h_i - d'_i - d''_{i+1} \geq 0$. On prouve de même l'autre relation.

Questions :

a– Etant donné un module de Dieudonné (M, V, F), quelle est sa structure, en termes de l'action de F, V ?

b– Etant donnée une suite $M_1 \supset \cdots \supset M_n$ de modules de Dieudonné annulés par p, vérifiant (*), provient-elle d'un module (M, V, F) ?

c– Etant donnés des nombres h_i, d'_i, d''_i, ($i \in \{1, \cdots, n\}$), vérifiant les inégalités "évidentes", précédant le *Lemme* 6, ainsi que les inégalités (**) du *Lemme* 6, existe-t-il une suite $M_1 \supset M_2 \supset \cdots \supset M_n$, vérifiant les conditions (*) du *Lemme* 6, et à laquelle les nombres h_i, d'_i, d''_i sont associés :

On verra que la réponse aux questions b– et c– est positive, et qu'on peut aussi répondre effectivement à la question a– ce qui nous sera utile pour la suite.

2) Les modules de Dieudonné finis, annulés par p.

C'est donc un triplet (M, V, F), où M est un k vectoriel de dimension finie et F, V des application k-linéaires : $M \xrightarrow{F} M^{\sigma^{-1}} \xrightarrow{V} M$, telles que $F \circ V$ et $V \circ F$ sont nulles. La suite associée à (M, V, F) est alors $M_1 = M$.

Choisissons :

$$\begin{aligned}
T &: \text{ un supplémentaire de } \operatorname{Ker} F \quad \text{dans } M, \\
T' &: \text{ un supplémentaire de } \operatorname{Ker} V \quad \text{dans } M^{\sigma^{-1}}, \\
S &: \text{ un supplémentaire de } \operatorname{Im} V \quad \text{dans } \operatorname{Ker} F, \\
S' &: \text{ un supplémentaire de } \operatorname{Im} F \quad \text{dans } \operatorname{Ker} V.
\end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{array}{ll}
M = T \oplus VT' \oplus S; & M^{\sigma^{-1}} = FT \oplus T' \oplus S'; \\
\operatorname{Ker} F = VT' \oplus S; & \operatorname{Ker} V = FT \oplus S'; \\
\operatorname{Im} V = VT'; & \operatorname{Im} F = FT.
\end{array}$$

Ce sont ces relations qu'il s'agit de généraliser à un module de Dieudonné de longueur finie quelconque.

3) Soit $M_1 \supset M_2 \supset \cdots \supset M_n$ une suite décroissante de modules de Dieudonné annulés par p et vérifiant les conditions (*) du *Lemme* 6.

Lemme 7. — *Pour tout* $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ *on a :*

a- $\operatorname{Im} V_i \cap M_{i+1} = \operatorname{Ker} F_{i+1}$ *et* $\operatorname{Im} F_i \cap M_{i+1}^{\sigma^{-1}} = \operatorname{Ker} V_{i+1}$.

b- $\operatorname{Ker} F_i \cap (\operatorname{Im} V_i + M_{i+1}) = \operatorname{Im} V_i$ *et* $\operatorname{Ker} V_i \cap (\operatorname{Im} F_i + M_{i+1}^{\sigma^{-1}}) = \operatorname{Im} F_i$.

Démonstration :

a- $\operatorname{Ker} F_{i+1} \subset \operatorname{Im} V_i$ d'après l'hypothèse (*), d'où $\operatorname{Ker} F_{i+1} \subset \operatorname{Im} V_i \cap M_{i+1}$. L'inégalité contraire vient de ce que $F_i \circ V_i = 0$.

b- Comme $\operatorname{Im} V_i \subset \operatorname{Ker} F_i$, on a : $\operatorname{Ker} F_i \cap (\operatorname{Im} V_i + M_{i+1}) = \operatorname{Im} V_i + \operatorname{Ker} F_i \cap M_{i+1} = \operatorname{Im} V_i + \operatorname{Ker} F_{i+1} = \operatorname{Im} V_i$, d'après (*). On montre de même les autres relations.

4) Soit $M_1 \supset M_2 \cdots \supset M_n$ une suite de modules de Dieudonné annulés par p et vérifiant (*) (resp. et provenant d'un module de Dieudonné M tel que $p^n \cdot M = 0$). Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ soit F_i' = le composé : $M_i \xrightarrow{F_i} M_i^{\sigma^{-1}} \twoheadrightarrow \frac{M_i^{\sigma^{-1}}}{M_{i+1}^{\sigma^{-1}}}$ et V_i' le composé : $M_i^{\sigma^{-1}} \xrightarrow{V_i} M_i \twoheadrightarrow \frac{M_i}{M_{i+1}}$. Pour tout i, on choisit :

- $\overline{T}_i$ (resp. T_i) un supplémentaire de $\operatorname{Ker} F_i'$ dans M_i, (resp. un sous-module de M, libre sur $\frac{W}{p^i \cdot W}$, tel que $p^{i-1} \cdot T_i$ soit un supplémentaire de $\operatorname{Ker} F_i'$ dans M_i).
- $\overline{T}_i'$ (resp. T_i') un supplémentaire de $\operatorname{Ker} V_i'$ dans $M_i^{\sigma^{-1}}$, (resp. un sous-module de $M^{\sigma^{-1}}$, libre sur $\frac{W}{p^i \cdot W}$, tel que $p^{i-1} \cdot T_i'$ soit un supplémentaire de $\operatorname{Ker} V_i'$ dans $M_i^{\sigma^{-1}}$).

Lemme 8. — *Sous ces conditions, pour tout i, on a :*

$$\operatorname{Im} V_i = \operatorname{Ker} F_{i+1} \oplus V\overline{T}_i', \quad (\text{resp.} \operatorname{Im} V_i = \operatorname{Ker} F_{i+1} \oplus p^{i-1} \cdot VT_i),$$

et de même,

$$\operatorname{Im} F_i = \operatorname{Ker} V_{i+1} \oplus F\overline{T}_i, \quad (\text{resp.} \operatorname{Im} F_i = \operatorname{Ker} V_{i+1} \oplus p^{i-1} \cdot FT_i').$$

Démonstration : Soit $x \in M_i^{\sigma^{-1}}$, de sorte que $Vx \in \operatorname{Im} V_i$. Par définition de $\overline{T}_i'$, il existe $u \in \operatorname{Ker} V_i'$ et $t \in \overline{T}_i'$ tels que $x = u + t$, d'où $Vx = Vu + Vt$. Or, par définition de V_i', $Vu \in M_{i+1}$; de plus $Vt \in VT_i'$; d'où : $\operatorname{Im} V_i = \operatorname{Ker} F_{i+1} + V\overline{T}_i'$. Cette somme est directe : si $Vt \in \operatorname{Ker} F_{i+1}$ et $t \in \overline{T}_i'$, alors $Vt \in M_{i+1}$ c'est-à-dire, $t \in \operatorname{Ker} V_i' \cap \overline{T}_i' = \{0\}$.

L'assertion respée s'en déduit alors en prenant $\overline{T}_i' = p^{i-1} \cdot T_i$.

5) Sous les hypothèses de 4), choisissons de plus : pour tout $i \in \{2, \ldots, n\}$, $\overline{S}_i'' \subset M_{i-1}$ tel que $F\overline{S}_i'' \oplus \operatorname{Im} F_i = \operatorname{Ker} V_i$, (resp. S_i', sous-module de $M^{\sigma^{-1}}$, libre sur $\frac{W}{p^i \cdot W}$, tel que $p^{i-1} \cdot S_i' \oplus \operatorname{Im} F_i = \operatorname{Ker} V_i$) et tel que $F_{|\overline{S}_i''}$ soit injectif, et $\overline{S}_i''' \subset M_{i-1}^{\sigma^{-1}}$ tel que $V\overline{S}_i''' \oplus \operatorname{Im} V_i = \operatorname{Ker} F_i$, (resp. S_i, sous-module de M, libre sur $\frac{W}{p^i \cdot W}$ et tel que $p^{i-1} \cdot S_i \oplus \operatorname{Im} V_i = \operatorname{Ker} F_i$), et tel que $V_{|\overline{S}_i'''}$ soit injectif. ($\overline{S}_i''$ et $\overline{S}_i'''$ existent en raison des conditions (*)).

LEMME 9. — *Sous ces conditions, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, on a :*

$$\operatorname{Ker} F_i' = (\operatorname{Ker} F_i + M_{i+1}) \oplus \overline{S}''_{i+1}, \quad (\text{resp.} \operatorname{Ker} F_i' = (\operatorname{Ker} F_i + M_{i+1}) \oplus p^{i-1} \cdot VS'_{i+1});$$

et de même :

$$\operatorname{Ker} V_i' = (\operatorname{Ker} V_i + M_{i+1}^{\sigma^{-1}}) \oplus \overline{S}'''_{i+1}, \quad (\text{resp.} \operatorname{Ker} V_i' = (\operatorname{Ker} V_i + M_{i+1}^{\sigma^{-1}}) \oplus p^{i-1} \cdot FS_{i+1}).$$

Démonstration : Il est clair que $\operatorname{Ker} F_i + M_{i+1} \subset \operatorname{Ker} F_i'$; d'autre part, comme $F(\overline{S}''_{i+1})$ est par définition contenu dans $\operatorname{Ker} V_{i+1} \subset M_{i+1}^{\sigma^{-1}}$, on a $F_i'(\overline{S}''_{i+1}) = 0$. A l'inverse, soit $x \in M_i$ tel que $F_i'x = 0$, c'est-à-dire : $F_i x \in M_{i+1}^{\sigma^{-1}}$. Alors, $F_i x \in M_{i+1}^{\sigma^{-1}} \cap \operatorname{Im} F_i \subset \operatorname{Ker} V_{i+1} = \operatorname{Im} F_{i+1} \oplus F\overline{S}''_{i+1}$. Donc $F_i x = F_{i+1}u + Fs$, avec $u \in M_{i+1}$ et $s \in \overline{S}''_{i+1}$. Donc : $x = u + s + z$, avec $z \in \operatorname{Ker} F_i$. On a donc :

$$\operatorname{Ker} F_i' = \operatorname{Ker} F_i + M_{i+1} + \overline{S}''_{i+1}.$$

Supposons que $s \in \overline{S}''_{i+1}$ et $s = x + y$ avec $x \in \operatorname{Ker} F_i$ et $y \in M_{i+1}$. Alors : $Fs = Fy$; alors $Fy \in \operatorname{Im} F_{i+1}$ et $Fs \in F\overline{S}''_{i+1}$; donc $Fs = 0 = Fy$. Comme on a supposé $F_{|\overline{S}''_{i+1}}$ injectif, on a $s = 0$, donc $\operatorname{Ker} F_i' = (\operatorname{Ker} F_i + M_{i+1}) \oplus \overline{S}''_{i+1}$.

L'assertion respée se montre en posant alors : $\overline{S}''_i = p^{i-2} \cdot VS_i'$. En effet, $F(p^{i-2} \cdot VS_i') = p^{i-2} \cdot FVS_i' = p^{i-1} \cdot S_i'$ a les propriétés requises.

6) Sous les hypothèses de 4) et 5), posons, pour $i \in \{2, \dots, n\}$:

$$\begin{array}{rll} & \overline{S}_i = V\overline{S}'''_i, & (\text{resp.} \, \overline{S}'''_i = p^{i-2} \cdot FS_i \text{ et } \overline{S}_i = V\overline{S}'''_i = p^{i-1} \cdot S_i) \\ \textit{et} & \overline{S}'_i = F\overline{S}''_i, & (\text{resp.} \, \overline{S}''_i = p^{i-2} \cdot VS'_i \text{ et } \overline{S}'_i = F\overline{S}''_i = p^{i-1} \cdot S'_i). \end{array}$$

Alors, pour $i \in \{2, \dots, n\}$ on a : $\operatorname{Ker} F_i = \overline{S}_i \oplus \operatorname{Im} V_i$ et $\operatorname{Ker} V_i = \overline{S}'_i \oplus \operatorname{Im} F_i$. Pour compléter, choisissons $\overline{S}_1$ et $\overline{S}'_1$ tels que : $\operatorname{Ker} F_1 = \overline{S}_1 \oplus \operatorname{Im} V_1$ et $\operatorname{Ker} V_1 = \overline{S}'_1 \oplus \operatorname{Im} F_1$.

On a alors, pour $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ les diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} F_{i+1} \arrow[r, hook, "V\overline{T}'_i"] \arrow[d, hook] & \operatorname{Im} V_i \arrow[r, hook, "\overline{S}_i"] \arrow[d, hook] & \operatorname{Ker} F_i \arrow[d, hook] & & \\
M_{i+1} \arrow[r, hook, "V\overline{T}'_i", "h_i - d'_i - d''_{i+1}"'] & M_{i+1} + \operatorname{Im} V_i \arrow[r, hook, "\overline{S}_i", "\delta_i"'] & M_{i+1} + \operatorname{Ker} F_i \arrow[r, hook, "\overline{S}''_{i+1}", "\delta_{i+1}"'] & \operatorname{Ker} F'_i \arrow[r, hook, "\overline{T}_i", "h_i - d''_i - d'_{i+1}"'] & M_i
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} V_{i+1} \arrow[r, hook, "F\overline{T}_i"] \arrow[d, hook] & \operatorname{Im} F_i \arrow[r, hook, "\overline{S}'_i"] \arrow[d, hook] & \operatorname{Ker} V_i \arrow[d, hook] & & \\
M_{i+1}^{\sigma^{-1}} \arrow[r, hook, "F\overline{T}_i", "h_i - d''_i - d'_{i+1}"'] & M_{i+1}^{\sigma^{-1}} + \operatorname{Im} F_i \arrow[r, hook, "\overline{S}'_i", "\delta_i"'] & M_{i+1}^{\sigma^{-1}} + \operatorname{Ker} V_i \arrow[r, hook, "\overline{S}'''_{i+1}", "\delta_{i+1}"'] & \operatorname{Ker} V'_i \arrow[r, hook, "\overline{T}'_i", "h_i - d'_i - d''_{i+1}"'] & M_i^{\sigma^{-1}}
\end{tikzcd}$$

Dans ces diagrammes :

a) les flèches sont les inclusions naturelles;

b) les carrés sont cartésiens, comme il résulte du *Lemme* 7;

c) on a indiqué au-dessus de chaque inclusion horizontale un supplémentaire de l'inclus, et, au-dessous, la dimension de ce supplémentaire; il résulte de b– qu'un supplémentaire de $\operatorname{Im} F_i$ dans $\operatorname{Ker} V_{i+1}$ est aussi un supplémentaire de $M_{i+1}^{\sigma^{-1}}$ dans $M_{i+1}^{\sigma^{-1}} + \operatorname{Im} F_i$, etc...

Lemme 10. — *Sous les conditions précédentes, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ on a :*

a– $\quad M_i = M_{i+1} \oplus \overline{T}_i \oplus \overline{S}''_{i+1} \oplus \overline{S}_i \oplus V\overline{T}'_i,$
$\quad\quad$ (resp. $M_i = M_{i+1} \oplus p^{i-1} \cdot T_i \oplus p^{i-1} \cdot VS'_{i+1} \oplus p^{i-1} \cdot S_i \oplus p^{i-1} VT'_i$)

et $\quad M_i^{\sigma^{-1}} = M_{i+1}^{\sigma^{-1}} \oplus \overline{T}'_i \oplus \overline{S}'''_{i+1} \oplus \overline{S}'_i \oplus F\overline{T}_i,$
$\quad\quad$ (resp. $M_i^{\sigma^{-1}} = M_{i+1}^{\sigma^{-1}} \oplus p^{i-1} \cdot T'_i \oplus p^{i-1} \cdot FS_{i+1} \oplus p^{i-1} \cdot S'_i \oplus p^{i-1} FT_i$)

b– $\quad \operatorname{Ker} F_i = \operatorname{Ker} F_{i+1} \oplus \overline{S}_i \oplus V\overline{T}'_i$, (resp. $\operatorname{Ker} F_i = \operatorname{Ker} F_{i+1} \oplus p^{i-1} \cdot S_i \oplus p^{i-1} \cdot VT'_i$)

$\quad \operatorname{Ker} V_i = \operatorname{Ker} V_{i+1} \oplus \overline{S}'_i \oplus F\overline{T}_i$, (resp. $\operatorname{Ker} V_i = \operatorname{Ker} V_{i+1} \oplus p^{i-1} \cdot S'_i \oplus p^{i-1} \cdot FT_i$)

c– $\quad \operatorname{Im} V_i = \operatorname{Im} V_{i+1} \oplus \overline{S}_{i+1} \oplus V\overline{T}'_i$, (resp. $\operatorname{Im} V_i = \operatorname{Im} V_{i+1} \oplus p^i \cdot S_{i+1} \oplus p^{i-1} \cdot VT'_i$)

$\quad \operatorname{Im} F_i = \operatorname{Im} F_{i+1} \oplus \overline{S}'_{i+1} \oplus F\overline{T}_i$, (resp. $\operatorname{Im} F_i = \operatorname{Im} F_{i+1} \oplus p^i \cdot S'_{i+1} \oplus p^{i-1} \cdot FT_i$)

Démonstration : a– découle directement des diagrammes ci-dessus, ainsi que b– dont on déduit c–.

Les assertions respées s'obtiennent alors en choisissant, comme il est dit plus haut, $\overline{T}_i = p^{i-1} T_i$, $\overline{S}''_i = p^{i-2} \cdot VS'_i$ d'où $\overline{S}'_i = p^{i-1} \cdot S_i$, etc...

D'après les diagrammes ci-dessus, un supplémentaire de $\operatorname{Ker} F_{i+1}$ dans M_{i+1} (resp. de $\operatorname{Ker} V_{i+1}$ dans $M_{i+1}^{\sigma^{-1}}$) est aussi un supplémentaire de $\operatorname{Ker} F_i$ (resp. de $\operatorname{Ker} V_i$) dans $M_{i+1} + \operatorname{Ker} F_i$ (resp. dans $M_{i+1}^{\sigma^{-1}} + \operatorname{Ker} V_i$), les carrés intervenant dans les diagrammes étant cartésiens. Comme $M_{n+1} = 0$ (resp. $M_{n+1}^{\sigma^{-1}} = 0$), on a : $F_n = F'_n$ (resp. $V_n = V'_n$)

d'où : $M_n = \operatorname{Ker} F_n \oplus \overline{T}_n$ (resp. $M_n^{\sigma^{-1}} = \operatorname{Ker} V_n \oplus \overline{T}'_n$). On en conclut par récurrence :

$$M_i = \operatorname{Ker} F_i \oplus \overline{T}_i \oplus \bigoplus_{j=i+1}^{n} (\overline{S}''_j \oplus \overline{T}_j),$$

$$\Big(\text{resp. } M_i = \operatorname{Ker} F_i \oplus p^{i-1} \cdot T_i \oplus \bigoplus_{j=i+1}^{n} (p^{j-2} \cdot VS'_j \oplus p^{j-1} \cdot T_j)\Big).$$

$$M_i^{\sigma^{-1}} = \operatorname{Ker} V_i \oplus \overline{T}'_i \oplus \bigoplus_{j=i+1}^{n} (\overline{S}'''_j \oplus \overline{T}'_j),$$

$$\Big(\text{resp. } M_i^{\sigma^{-1}} = \operatorname{Ker} V_i \oplus p^{i-1} \cdot T'_i \oplus \bigoplus_{j=i+1}^{n} (p^{j-2} \cdot FS_j \oplus p^{j-1} \cdot T'_j)\Big).$$

On a aussi :

$$\operatorname{Ker} F_n = \operatorname{Im} V_n \oplus V\overline{S}'''_n = \operatorname{Im} V_n \oplus \overline{S}_n;\ \operatorname{Im} V_n = V\overline{T}'_n;$$

$$\operatorname{Ker} V_n = \operatorname{Im} F_n \oplus F\overline{S}''_n = \operatorname{Im} F_n \oplus \overline{S}'_n;\ \operatorname{Im} F_n = F\overline{T}_n.$$

Du *Lemme* 10, on peut alors déduire immédiatement :

LEMME 11. — *On a alors : (en posant : $\overline{S}''_{n+1} = \{0\} = \overline{S}'''_{n+1}$) :*

a— $$M_1 = \bigoplus_{i=1}^{n} (\overline{S}_i \oplus \overline{T}_i \oplus V\overline{T}'_i \oplus \overline{S}''_{i+1}),$$

$$\Big(\text{resp.}\, M_1 = \bigoplus_{i=1}^{n} (p^{i-1} \cdot S_i \oplus p^{i-1} \cdot T_i \oplus p^{i-1} \cdot VT'_i \oplus p^{i-1} \cdot VS'_{i+1})\Big).$$

b— $$\operatorname{Ker} F_1 = \bigoplus_{i=1}^{n} (\overline{S}_i \oplus \{0\} \oplus V\overline{T}'_i \oplus \{0\}),$$

$$\Big(\text{resp.}\, \operatorname{Ker} F_1 = \bigoplus_{i=1}^{n} (p^{i-1} \cdot S_i \oplus \{0\} \oplus p^{i-1} \cdot VT'_i \oplus \{0\})\Big).$$

c— $$\operatorname{Im} V_1 = V\overline{T}'_1 \oplus \bigoplus_{i=2}^{n} (\overline{S}_i \oplus \{0\} \oplus V\overline{T}'_i \oplus \{0\}),$$

$$\Big(\text{resp.}\, \operatorname{Im} V_1 = VT'_1 \oplus \bigoplus_{i=2}^{n} (p^{i-1} \cdot S_i \oplus \{0\} \oplus p^{i-1} \cdot VT'_i \oplus \{0\})\Big).$$

a′— $$M_1^{\sigma^{-1}} = \bigoplus_{i=1}^{n} (\overline{S}'''_{i+1} \oplus F\overline{T}_i \oplus \overline{T}'_i \oplus \overline{S}'_i),$$

$$\Big(\text{resp.}\, M_1^{\sigma^{-1}} = \bigoplus_{i=1}^{n} (p^{i-1} \cdot FS_{i+1} \oplus p^{i-1} \cdot FT_i \oplus p^{i-1} \cdot T'_i \oplus p^{i-1} \cdot S'_i)\Big).$$

b′— $$\operatorname{Ker} V_1 = \bigoplus_{i=1}^{n} (\{0\} \oplus F\overline{T}_i \oplus \{0\} \oplus \overline{S}'_i),$$

$$\Big(\text{resp.}\, \operatorname{Ker} V_1 = \bigoplus_{i=1}^{n} (\{0\} \oplus p^{i-1} \cdot FT_i \oplus \{0\} \oplus p^{i-1} \cdot S'_i)\Big).$$

c′— $$\operatorname{Im} F_1 = F\overline{T}'_1 \oplus \bigoplus_{i=2}^{n} (\{0\} \oplus F\overline{T}_i \oplus \{0\} \oplus \overline{S}'_i),$$

$$\Big(\text{resp.}\, \operatorname{Im} F_1 = FT_1 \oplus \bigoplus_{i=2}^{n} (\{0\} \oplus p^{i-1} \cdot FT_i \oplus \{0\} \oplus p^{i-1} \cdot S'_i)\Big).$$

7) Structure des Modules de Dieudonné de longueur finie

Soit M un module de Dieudonné tel que $p^n \cdot M = \{0\}$. On choisit des modules T_i, T'_i, S_i, S'_i comme indiqué en 5).

PROPOSITION 1. — *Sous ces conditions on a :*

$$\text{a-}\quad M = \bigoplus_{i=1}^{n}(T_i \oplus VT_i' \oplus S_i \oplus VS_i'),$$

$$\text{b-}\quad \operatorname{Ker} F = \bigoplus_{i=1}^{n}(\{0\} \oplus p^{i-1}VT_i' \oplus p^{i-1}S_i \oplus \{0\}),$$

$$\text{c-}\quad \operatorname{Im} V = \bigoplus_{i=1}^{n}(pT_i \oplus VT_i' \oplus pS_i \oplus VS_i'),$$

$$\text{a}'\text{-}\quad M^{\sigma^{-1}} = \bigoplus_{i=1}^{n}(FT_i \oplus T_i' \oplus FS_i \oplus S_i'),$$

$$\text{b}'\text{-}\quad \operatorname{Ker} V = \bigoplus_{i=1}^{n}(p^{i-1}FT_i \oplus \{0\} \oplus \{0\} \oplus p^{i-1}S_i'),$$

$$\text{c}'\text{-}\quad \operatorname{Im} F = \bigoplus_{i=1}^{n}(FT_i \oplus pT_i' \oplus FS_i \oplus pS_i').$$

Démonstration : Par récurrence sur n.

i) Si $n = 1$: c'est le cas : $p \cdot M = 0$: c'est l'exemple étudié en 2).

ii) Supposons la propriété vraie quand $p^n \cdot M = 0$ et supposons que $p^{n+1} \cdot M = 0$. On pose alors : $\widehat{M} = p \cdot M$. Il est clair que si $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ on a : $\widehat{M}_i = M_{i+1}$. Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$ choisissons T_i, T_i', S_i, S_i' comme indiqué et posons, si $i \leq n$: $\widehat{T}_i = pT_{i+1}$, $\widehat{T}_i' = pT_{i+1}'$, $\widehat{S}_i = p \cdot S_{i+1}$, $\widehat{S}_i' = p \cdot S_{i+1}'$ qui sont des sous-modules de $\widehat{M}$ et $\widehat{M}^{\sigma^{-1}}$. On notera avec un signe^ce qui se rapporte à $\widehat{M}$ (ex. : $\widehat{F}$, $\widehat{V}$).

Il est clair que $p^{i-1} \cdot \widehat{S}_i = p^i \cdot S_{i+1}$ est un supplémentaire de $\operatorname{Im} \widehat{V}_i = \operatorname{Im} V_{i+1}$ dans $\operatorname{Ker} \widehat{F}_i = \operatorname{Ker} F_{i+1}$. De même il est clair que $p^{i-1} \cdot \widehat{T}_i = p^i \cdot T_{i+1}$ est un supplémentaire de $\operatorname{Ker}\left(M_{i+1} \xrightarrow{can} \frac{M_{i+1}}{M_{i+2}} \xrightarrow{F} \frac{M_{i+1}^{\sigma^{-1}}}{M_{i+2}^{\sigma^{-1}}}\right)$ dans M_{i+1} c'est-à-dire un supplémentaire de $\operatorname{Ker}\left(\widehat{M}_i \xrightarrow{can} \frac{\widehat{M}_i}{\widehat{M}_{i+1}} \xrightarrow{F} \frac{\widehat{M}_i^{\sigma^{-1}}}{\widehat{M}_{i+1}^{\sigma^{-1}}}\right)$ dans $\widehat{M}_i$.

Par conséquent, d'après l'hypothèse de récurrence : $\widehat{M}^{\sigma^{-1}} = \bigoplus_{i=1}^{n}(F\widehat{T}_i \oplus \widehat{T}_i' \oplus F\widehat{S}_i \oplus \widehat{S}_i')$. Appelons M' le sous-module : $\sum_{i=1}^{n+1}(FT_i + T_i' + FS_i + S_i')$ de $M^{\sigma^{-1}}$. On a donc : $p \cdot M' = \widehat{M}^{\sigma^{-1}} = p \cdot M^{\sigma^{-1}}$. Grâce au *Lemme* 11-a' on a : $M_1^{\sigma^{-1}} \hookrightarrow M'$, c'est-à-dire $\operatorname{Ker} p_{M^{\sigma^{-1}}} = \operatorname{Ker} p_{M'}$. Il en résulte que $M^{\sigma^{-1}} = M'$ et que la somme est directe dans la définition de M', ce qui achève de prouver a', (et de même a). Le point b– n'est que la répétition du *Lemme* 11-b.

Démontrons c– : D'après l'expression de $M^{\sigma^{-1}}$ trouvée en a'- on a :

$$\operatorname{Im} V = \sum_{i=1}^{n+1}(p \cdot T_i + VT_i' + p \cdot S_i + VS_i')$$

et cette somme est directe d'après l'expression de M. D'où le c-.

Remarque : Par définition, on a : $T_i \simeq \left(\frac{W}{p^iW}\right)^{h_i-d''_i-d'_{i+1}}$, $T'_i \simeq \left(\frac{W}{p^i.W}\right)^{h_i-d'_i-d''_{i+1}}$, $S_i \simeq \left(\frac{W}{p^iW}\right)^{\delta_i} \simeq S'_i$. Il est aisé de voir que : $FT_i \simeq \left(\frac{W}{p^iW}\right)^{h_i-d''_i-d'_{i+1}}$, $VT'_i \simeq \left(\frac{W}{p^i.W}\right)^{h_i-d'_i-d''_{i+1}}$, et $FS_i \simeq \left(\frac{W}{p^{i-1}W}\right)^{\delta_i} \simeq VS'_i$ (isomorphismes de W-modules).

8) Construction de modules de Dieudonné finis sur k

Les résultats de ce paragraphe ne seront pas utilisés dans la suite. Il apporte une réponse positive aux questions b) et c) posées en fin du paragraphe 1) (la question a) ayant été étudiée au paragraphe 7)).

a– Soient, pour $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, des entiers positifs ou nuls : h_i, d'_i, d''_i tels que les conditions "évidentes" suivantes soient satisfaites : $\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, on a : $h_i \geq h_{i+1}$, $d'_i \geq d'_{i+1}$, $d''_i \geq d''_{i+1}$, d'_i et $d''_i \leq h_i \leq d'_i + d''_i$, ainsi que les conditions :

$$(**) \qquad h_i - d'_i - d''_{i+1} \geq 0 \quad \text{et} \quad h_i - d''_i - d'_{i+1} \geq 0$$

On va montrer qu'il existe une suite $M_1 \supset M_2 \supset \cdots \supset M_n$ de modules de Dieudonné annulés par p, vérifiant la condition

$$(*) \qquad \forall i \leq n-1 : \operatorname{Ker} F_{i+1} \subset \operatorname{Im} V_i \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker} V_{i+1} \subset \operatorname{Im} F_i$$

et telle que, $\forall i$, $h_i = \dim M_i$, $d'_i = \dim \operatorname{Ker} V_i$, $d''_i = \dim \operatorname{Ker} F_i$. (On note F_i (resp. V_i) la restriction de l'opérateur $F = F_1$ (resp. $V = V_1$) à M_i (resp. $M_i^{\sigma^{-1}}$)).

α) Pour $i \in \{1, \dots, n\}$ soient $\overline{T}_i$(resp. $\overline{\Theta}_i$) des k-espaces vectoriels de dimension $h_i - d''_i - d'_{i+1}$ (resp. $h_i - d'_i - d''_{i+1}$) (c'est un entier ≥ 0, par (**)). (On pose $d'_{n+1} = d''_{n+1} = 0$).

Pour $i \geq 2$, soient $\overline{S}''_i$ et $\overline{\Sigma}'''_i$ des espaces de dimension $\delta_i = d'_i + d''_i - h_i$;

Pour $i = 1$, soit $\overline{S}_1$ un espace de dimension $\delta_1 = d'_1 + d''_1 - h_1$.

Soit M_1 la somme directe de tous ces espaces. On vérifie que $\dim M_1 = h_1$. Pour tout $i \geq 2$, on pose alors :

$$M_i = \overline{T}_i \oplus \overline{\Theta}_i \oplus \overline{\Sigma}'''_i \oplus \bigoplus_{j=i+1}^{n} (\overline{T}_j \oplus \overline{\Theta}_j \oplus \overline{\Sigma}'''_j \oplus \overline{S}''_{j+1});$$

on vérifie que M_i est un sous-espace de dimension h_i de M_1, et que :

$$M_i = M_{i+1} \oplus \overline{T}_i \oplus \overline{\Theta}_i \oplus \overline{\Sigma}'''_i \oplus \overline{S}''_{i+1};$$

par convention : $M_n = \overline{T}_n \oplus \overline{\Theta}_n \oplus \overline{\Sigma}'''_n$.

β) On dispose donc aussi de la suite : $M_1^{\sigma^{-1}} \supset \cdots \supset M_n^{\sigma^{-1}}$, avec $\dim M_i^{\sigma^{-1}} = h_i$. Par définition : $M_n = \overline{T}_n \oplus \overline{\Theta}_n \oplus \overline{\Sigma}_n'''$. Dans $M_n^{\sigma^{-1}}$, choisissons des sous espaces $\overline{T}'_n$, $\overline{\Theta}'_n$, $\overline{\Sigma}''_n$, de dimensions respectives $h_n - d'_n$, $h_n - d''_n$, δ_n et tels que $M_n^{\sigma^{-1}} = \overline{T}'_n \oplus \overline{\Theta}'_n \oplus \overline{\Sigma}''_n$; (ils existent car $h_n = h_n - d'_n + h_n - d''_n + \delta_n$). De même, pour tout $i \in \{2, \ldots, n-1\}$, choisissons dans $M_i^{\sigma^{-1}}$ des sous-espaces $\overline{T}'_i$, $\overline{\Theta}'_i$, $\overline{\Sigma}''_i$, $\overline{S}'''_{i+1}$ de dimensions respectives : $h_i - d'_i - d''_{i+1}$, $h_i - d''_i - d'_{i+1}$, δ_i et δ_{i+1}, et tels que : $M_i^{\sigma^{-1}} = M_{i+1}^{\sigma^{-1}} \oplus \overline{T}'_i \oplus \overline{\Theta}'_i \oplus \overline{\Sigma}''_i \oplus \overline{S}'''_{i+1}$; celà est possible car $h_i - h_{i+1} = \dim M_i^{\sigma^{-1}} - \dim M_{i+1}^{\sigma^{-1}} = h_i - d'_i - d''_{i+1} + h_i - d''_i - d'_{i+1} + \delta_i + \delta_{i+1}$. Enfin, pour $i = 1$: $M_1 = \overline{T}_1 \oplus \overline{\Theta}_1 \oplus \overline{S}_1 \oplus \overline{S}''_2 \oplus M_2$. Choisissons dans $M_1^{\sigma^{-1}}$ des sous-espaces : $\overline{T}'_1$, $\overline{\Theta}'_1$, $\overline{S}'''_2$, $\overline{S}'_1$ de dimensions respectives : $h_1 - d'_1 - d''_2$, $h_1 - d''_1 - d'_2$, δ_2, δ_1 et tels que $M_1^{\sigma^{-1}} = M_2^{\sigma^{-1}} \oplus \overline{T}_1 \oplus \overline{S}'''_2 \oplus \overline{S}'_1$; ces sous-espaces existent en raison des dimensions.

Définissons $F : M_1 \longrightarrow M_1^{\sigma^{-1}}$: F réalise un isomorphisme quelconque pour tout i, de $\overline{T}_i$ sur $\overline{\Theta}'_i$, de $\overline{S}''_i$ sur $\overline{\Sigma}''_i$ et est nul sur $\overline{\Theta}_i$, $\overline{\Sigma}'''_i$ et $\overline{S}_1$. De même : $V : M_1^{\sigma^{-1}} \longrightarrow M_1$ réalise un isomorphisme quelconque, pour tout i, de $\overline{T}'_i$ sur $\overline{\Theta}_i$, de $\overline{S}'''_i$ sur $\overline{\Sigma}'''_i$ et est nul sur $\overline{\Theta}'_i$, $\overline{\Sigma}''_i$, $\overline{S}'_1$.

Il est alors aisé de voir que $F \circ V = V \circ F = 0$, que $F(M_i) \subset M_i^{\sigma^{-1}}$, $V(M_i^{\sigma^{-1}}) \subset M_i$, que les dimensions des noyaux de F et V restreints à M_i et $M_i^{\sigma^{-1}}$ sont d''_i et d'_i, et que les conditions (*) sont vérifiées : en effet : $\operatorname{Im} V_i = \operatorname{Ker} F_{i+1} \oplus \overline{\Theta}_i$, $\operatorname{Im} F_i = \operatorname{Ker} V_{i+1} \oplus \overline{\Theta}'_i$ (où F_i, V_i sont les restrictions de F et V à M_i et $M_i^{\sigma^{-1}}$).

En fin de compte, on a répondu positivement à la question c– fin du paragraphe 1).

b– Soit $M_1 \supset M_2 \supset \cdots \supset M_n$ une suite décroissante de modules de Dieudonné annulés par p et de dimensions finies sur k, et vérifiant les conditions (*).

Prouvons que cette suite provient d'un module de Dieudonné M, de longueur finie, c'est-à-dire, tel que pour $i = 1, 2, \ldots, n$: $p^{i-1} \cdot \operatorname{Ker} p^i_M = M_i$. On suppose que M_n est non nul, de sorte que $p^n \cdot M = 0$ et $p^{n-1} \cdot M \neq 0$.

α) Par la théorie des modules de longueur finie sur un anneau principal, il existe un W-module M, de longueur finie, unique à isomorphisme près tel que la suite d'espaces vectoriels : $\operatorname{Ker} p_M \supset p \cdot \operatorname{Ker} p^2_M \supset \cdots \supset p^{i-1} \cdot \operatorname{Ker} p^i_M \supset \cdots \supset p^{n-1} \cdot \operatorname{Ker} p^n_M$, s'identifie à la suite (M_i); alors la suite des $p^{i-1} \cdot \operatorname{Ker} p^i_{M^{\sigma^{-1}}}$ s'identifie à la suite $(M_i^{\sigma^{-1}})$.

On se propose de munir M d'une structure de module de Dieudonné. Comme en 4) et 5) choisissons des sous-espaces $\overline{T}_i$ de M_i et $\overline{T}'_i$ de $M_i^{\sigma^{-1}}$, des sous-espaces $\overline{S}''_i$ de M_{i-1} et $\overline{S}'''_i$ de $M_{i-1}^{\sigma^{-1}}$ (pour $i \geq 2$), des sous-espaces $\overline{S}_1$ de M_1 et $\overline{S}'_1$ de $M_1^{\sigma^{-1}}$, vérifiant les propriétés requises en 4) et 5).

Posons alors : $\overline{S}_i = V\overline{S}'''_i$, $\overline{S}'_i = F\overline{S}''_i$; alors ces sous espaces vérifient les conclusions de la partie non respée des *Lemmes* 8 à 11 (la condition (*) garantit l'existence des sous-espaces $\overline{S}''_i$ et $\overline{S}'''_i$).

β) $\overline{T}_i$ et $V\overline{T}'_i$ (resp. $\overline{T}'_i$ et $F\overline{T}_i$) étant contenus dans $M_i = p^{i-1} \cdot \operatorname{Ker} p^i_M$ (resp. dans $M_i^{\sigma^{-1}} = p^{i-1} \cdot \operatorname{Ker} p^i_{M^{\sigma^{-1}}}$), il existe T_i et Θ_i (resp. T'_i et Θ'_i) dans M (resp. dans

$M^{\sigma^{-1}}$) tels que : $p^{i-1} \cdot T_i = \overline{T}_i$, $p^{i-1} \cdot \Theta_i = V\overline{T}'_i$, $p^{i-1} \cdot T'_i = \overline{T}'_i$, $p^{i-1} \cdot \Theta'_i = F\overline{T}_i$, et qui sont des $\frac{W}{p^i \cdot W}$ modules libres de rangs : $h_i - d''_i - d'_{i+1}$ et $h_i - d'_i - d''_{i+1}$ (resp. $h_i - d'_i - d''_{i+1}$ et $h_i - d''_i - d'_{i+1}$) (On pose $d''_{n+1} = d'_{n+1} = 0$).

De même, pour $i \geq 2$, comme $\overline{S}''_i \subset M_{i-1}$ (resp. $\overline{S}'''_i \subset M^{\sigma^{-1}}_{i-1}$) il existe $\Sigma_i \subset M$ (resp. $\Sigma'_i \subset M^{\sigma^{-1}}$) tels que $p^{i-2} \cdot \Sigma_i = \overline{S}''_i$ (resp. $p^{i-2} \cdot \Sigma'_i = \overline{S}'''_i$) libres sur $\frac{W}{p^{i-1} \cdot W}$ de rang δ_i. Posons aussi : $\Sigma_1 = \Sigma'_1 = 0$.

Enfin, pour $i \geq 2$ comme $\overline{S}_i = V\overline{S}'''_i \subset M_i$ (resp. $\overline{S}'_i = F\overline{S}''_i \subset M^{\sigma^{-1}}_i$), il existe $S_i \subset M$ (resp. $S'_i \subset M^{\sigma^{-1}}$), libres sur $\frac{W}{p^i \cdot W}$, de rang δ_i tels que $p^{i-1} \cdot S_i = \overline{S}_i$ et $p^{i-1} \cdot S'_i = \overline{S}'_i$. Posons aussi : $S_1 = \overline{S}_1$, $S'_1 = \overline{S}'_1$.

On a alors : $M = \bigoplus_{i=1}^{n} (T_i \oplus \Theta_i \oplus S_i \oplus \Sigma_i)$ et $M^{\sigma^{-1}} = \bigoplus_{i=1}^{n} (\Theta'_i \oplus T'_i \oplus S'_i \oplus \Sigma'_i)$: On vérifie d'abord que la longeur de $M = \sum_{i=1}^{n} h_i$ est égale à la somme des longueurs des modules figurant dans le membre de droite. On montre ensuite que la somme est directe en montrant que $\operatorname{Ker} p_M$ (resp. $\operatorname{Ker} p_{M^{\sigma^{-1}}}$) est la somme directe des noyaux de p dans les modules en question, ce qui n'est autre que les assertions a et a' du *Lemme* 11. En effet, $\operatorname{Ker} p_{T_i} = p^{i-1} \cdot T_i$, $\operatorname{Ker} p_{\Sigma_i} = p^{i-2} \cdot \Sigma_i$, etc...

γ) Définissons F et V :

On dispose d'isomorphismes $F : p^{i-1} \cdot T_i = \overline{T}_i \xrightarrow{\sim} F\overline{T}_i = p^{i-1} \cdot \Theta'_i$ et aussi $V : p^{i-1} \cdot T'_i = \overline{T}'_i \xrightarrow{\sim} V\overline{T}'_i = p^{i-1} \cdot \Theta_i$; comme T_i, Θ_i, T'_i, Θ'_i sont libres sur $\frac{W}{p^i \cdot W}$, on les relève sans peine en des isomorphismes $F : T_i \xrightarrow{\sim} \Theta'_i$ et $V : T'_i \xrightarrow{\sim} \Theta_i$. On pose ensuite : $F : \Theta_i \longrightarrow T'_i = p \cdot V^{-1}$ et $V : \Theta'_i \longrightarrow T_i = p \cdot F^{-1}$.

Pour tout W-module A, notons $\underline{\underline{p}}$ l'isomorphisme canonique : $A/_{\operatorname{Ker} p_A} \xrightarrow{\sim} p \cdot A$ induit par la multiplication par p dans A. Pour $i \geq 2$, on dispose d'isomorphismes $F : p^{i-2}\Sigma_i = \overline{S}''_i \xrightarrow{\sim} \overline{S}'_i = p^{i-1} \cdot S'_i$ et $V : p^{i-2} \cdot \Sigma'_i = \overline{S}'''_i \xrightarrow{\sim} \overline{S}_i = p^{i-1} \cdot S_i$, qu'on note $\overline{f}_i$ et $\overline{v}_i$ et qu'on relève en des isomorphismes $f_i : \Sigma_i \xrightarrow{\sim} p \cdot S'_i$ et $v_i : \Sigma'_i \xrightarrow{\sim} p \cdot S_i$. On définit alors $F : \Sigma_i \hookrightarrow S'_i$ comme le composé : $\Sigma_i \overset{f_i}{\xrightarrow{\sim}} pS'_i \overset{can}{\hookrightarrow} S'_i$ et $V : \Sigma'_i \hookrightarrow S_i$ comme le composé : $\Sigma'_i \overset{v_i}{\xrightarrow{\sim}} p \cdot S_i \overset{can}{\hookrightarrow} S_i$.

On définit $\quad F : S_i \twoheadrightarrow \Sigma'_i \quad$ comme le composé : $\quad S_i \overset{can}{\twoheadrightarrow} \frac{S_i}{p^{i-1} \cdot S_i} \overset{\underline{\underline{p}}}{\longrightarrow} pS_i \overset{v_i^{-1}}{\xrightarrow{\sim}} \Sigma'_i.$

et $\quad V : S'_i \twoheadrightarrow \Sigma_i \quad$ comme le composé : $\quad S'_i \overset{can}{\twoheadrightarrow} \frac{S'_i}{p^{i-1} \cdot S'_i} \overset{\underline{\underline{p}}}{\longrightarrow} pS'_i \overset{f_i^{-1}}{\xrightarrow{\sim}} \Sigma_i.$

Enfin F est nul sur S_1 et V est nul sur S'_1.

On vérifie aisément que $V \circ F = p \times id_M$, $F \circ V = p \times id_{M^{\sigma^{-1}}}$ et que la suite des $p^{i-1} \cdot \operatorname{Ker} p^i_M$ est isomorphe à la suite des M_i, comme suites de modules de Dieudonné.

II — Systèmes de HONDA des p-groupes finis constants sur $\overline{R}$.

Rappelons qu'il s'agit des groupes de la forme : $\mathcal{G} \underset{\operatorname{Spec} k}{\times} \operatorname{Spec} \overline{R}$, où $\mathcal{G}$ est un p-groupe fini sur k (comme $\alpha \leq e$, $\overline{R}$ est une k-algèbre). D'après la première partie, II, 3, c, leur système de HONDA est isomorphe à $(R \underset{W}{\otimes} M, M^R, v, f)$, dont on va rappeler la définition et étudier les propriétés.

1) Généralités

a– Pour tout W-module M, on pose : $R \otimes M = R \underset{W}{\otimes} M$, et $M^{\sigma^{-1}} = W_{\sigma^{-1}} \underset{W}{\otimes} M$, où W est vu comme W algèbre via σ^{-1} (σ = automorphisme de Frobenius de W).

Soit (M, V, F) un module de Dieudonné **quelconque** (non nécessairemnt fini). On lui associe le diagramme Δ^M ci-dessous :

$$
\begin{tikzcd}
 & R \otimes M^{\sigma^{-1}} \arrow[dl, "\pi^{\alpha}"'] \arrow[dr, "id \otimes V"] & \\
R \otimes M^{\sigma^{-1}} & & R \otimes M \\
 & R \otimes M \arrow[ul, "id \otimes F"] \arrow[ur, "p/\pi^{\alpha}"'] &
\end{tikzcd}
$$

On appelle M^R **sa limite inductive**; c'est-à-dire le **conoyau** de l'application :

$$
\begin{gathered}
R \otimes M^{\sigma^{-1}} \oplus R \otimes M \longrightarrow R \otimes M^{\sigma^{-1}} \oplus R \otimes M \\
(x, y) \longmapsto (\pi^{\alpha} x - (id \otimes F)(y), (id \otimes V)(x) - \frac{p}{\pi^{\alpha}} y).
\end{gathered}
$$

Se donner une application R-linéaire de M^R dans un R-module E, équivaut donc à se donner : (ε, β) où : $\varepsilon : R \otimes M^{\sigma^{-1}} \longrightarrow E$, $\beta : R \otimes M \longrightarrow E$ sont telles que : $\varepsilon \circ (id \otimes F) = \beta \circ \frac{p}{\pi^{\alpha}} id_{R \otimes M}$ et $\varepsilon \circ \pi^{\alpha}_{R \otimes M^{\sigma^{-1}}} = \beta \circ (id \otimes V)$.

On dispose alors d'applications R-linéaires :

$f_M : R \otimes M \to M^R$ = l'application canonique de $R \otimes M$ dans la limite inductive

$\theta_M : R \otimes M^{\sigma^{-1}} \to M^R$ = l'application canonique de $R \otimes M^{\sigma^{-1}}$ dans la limite inductive

$v_M : M^R \to R \otimes M$ définie par le couple (ε, β) : $\begin{cases} \varepsilon = id \otimes V : R \otimes M^{\sigma^{-1}} \to R \otimes M \\ \beta = \pi^{\alpha} : R \otimes M \to R \otimes M \end{cases}$

$\gamma_M : M^R \to R \otimes M^{\sigma^{-1}}$ définie par le couple (ε, β) : $\begin{cases} \varepsilon = \frac{p}{\pi^{\alpha}} : R \otimes M^{\sigma^{-1}} \to R \otimes M^{\sigma^{-1}} \\ \beta = id \otimes F : R \otimes M \to R \otimes M^{\sigma^{-1}} \end{cases}$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté on notera ces applications : f, θ, v, γ. Elles vérifient les relations :

$$\begin{aligned} v \circ f &= \pi^{\alpha}_{R\otimes M}, & f \circ v &= \pi^{\alpha}_{M^R}, \\ \gamma \circ \theta &= \tfrac{p}{\pi^{\alpha}}{}_{R\otimes M^{\sigma^{-1}}}, & \theta \circ \gamma &= \tfrac{p}{\pi^{\alpha}}{}_{M^R}, \\ v \circ \theta &= id \otimes V, & \gamma \circ f &= id \otimes F. \end{aligned}$$

ce que l'on représente par le diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} & R\otimes M^{\sigma^{-1}} \arrow[d, "\theta"] & \\ R\otimes M \arrow[r, "f"] & M^R \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\gamma"] & R\otimes M \\ & R\otimes M^{\sigma^{-1}} & \end{tikzcd}$$

Dans la situation envisagée, si $M = \mathbb{D}\mathcal{G}_{(k,W)}$ est le module de Dieudonné de $\mathcal{G}$ on a vu que le système fini de HONDA associé à $\mathcal{G} \underset{\text{Spec } k}{\times} \operatorname{Spec} \overline{R}$ est le système $(R\otimes M, M^R, v, f)$.

b– Le cas particulier $\overline{R} = R/_{p\cdot R}$ $(\alpha = e)$

Ce cas contient le cas $R = W$, $\overline{R} = k$, $(\alpha = e = 1)$.

Comme $\frac{p}{\pi^{\alpha}}$ est alors un élément inversible de R, il ressort des relations ci-dessus que θ est un isomorphisme : $R\otimes M^{\sigma^{-1}} \xrightarrow{\sim} M^R$, grâce auquel on identifie alors $(R\otimes M, M^R, v, f)$ à $(R\otimes M, R\otimes M^{\sigma^{-1}}, id\otimes V, id\otimes F)$. Si on suppose $R = W$, $\overline{R} = k$, on retrouve $(M, M^{\sigma^{-1}}, V, F)$ c'est-à-dire le module de Dieudonné (M, V, F).

Remarque : Hormis ce cas, $R\otimes M$ et M^R ne sont pas isomorphes comme R-modules en général (voir l'étude du cas $\mathcal{G} = \alpha_p$).

c– Rappelons qu'on a démontré dans la première partie, II, 2, c les faits suivants : Hormis le cas vu en b– ci-dessus $(\alpha = e)$, si on pose $\beta = \inf(\alpha, e-\alpha)$: On dispose d'un isomorphisme canonique :

$$\frac{R}{\pi^{\beta}R} \underset{R}{\otimes} M^R \simeq \left(\frac{M^{\sigma^{-1}}}{FM} \oplus \frac{M}{VM^{\sigma^{-1}}}\right) \underset{W}{\otimes} \frac{R}{\pi^{\beta}R},$$

ce dont on a déduit :

i) Si (M,V,F) est tel que M est **libre** de rang fini sur W, alors $v : M^R \longrightarrow R\otimes M$ est un isomorphisme de M^R sur le sous-module $R\otimes VM^{\sigma^{-1}} + \pi^\alpha \cdot R\otimes M$ de $R\otimes M$. En particulier :

$$rg_R M^R = rg_W M.$$

Ceci est la situation lorsque (M,V,F) est le cristal de Dieudonné d'un groupe p-divisible sur k.

ii) Si on a une suite exacte de modules de Dieudonné :

$$0 \longrightarrow (M_1,V_1,F_1) \longrightarrow (M_0,V_0,F_0) \longrightarrow (M,V,F) \longrightarrow 0,$$

où M_0 et M_1 sont **libres de même rang** sur W, (il existe une telle présentation pour **tout** module de Dieudonné fini (M,V,F)) alors on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow M_1^R \longrightarrow M_0^R \longrightarrow M^R \longrightarrow 0$$

(l'exactitude à droite est naturelle; l'exactitude à gauche vient de ce que M_1^R et M_0^R sont libres de même rang).

Remarque : Dans le cas hormis $(\alpha = e)$ ces propriétés i) et ii) sont évidemment vérifiées, d'après l'identification faite en b– de M^R et $R\otimes M^{\sigma^{-1}}$.

d– On a les isomorphismes évidents :

$$\operatorname{Coker} v \;= R\otimes M/R\otimes VM^{\sigma^{-1}} + \pi^\alpha R\otimes M \simeq \frac{R}{\pi^\alpha R}\otimes \frac{M}{VM^{\sigma^{-1}}} = \overline{R}\underset{k}{\otimes}\frac{M}{VM^{\sigma^{-1}}}$$

$$(\text{car } pM \subset VM^{\sigma^{-1}})$$

$$\operatorname{Coker}\gamma \;= R\otimes M^{\sigma^{-1}}/R\otimes FM + \frac{p}{\pi^\alpha}R\otimes M^{\sigma^{-1}} \simeq \frac{R}{\pi^{e-\alpha}R}\otimes\frac{M^{\sigma^{-1}}}{FM} = \frac{R}{\pi^{e-\alpha}\cdot R}\underset{k}{\otimes}\frac{M^{\sigma^{-1}}}{FM}$$

$$(\text{car } pM^{\sigma^{-1}} \subset FM).$$

Par définition de la limite inductive, on a aussi :

$$\operatorname{Coker} f \;\simeq R\otimes M^{\sigma^{-1}}/\pi^\alpha R\otimes M^{\sigma^{-1}} + R\otimes FM \simeq \overline{R}\underset{k}{\otimes}\frac{M^{\sigma^{-1}}}{FM},$$

$$\operatorname{Coker}\theta \;\simeq R\otimes M/\frac{p}{\pi^\alpha}R\otimes M + R\otimes VM^{\sigma^{-1}} \simeq \frac{R}{\pi^{e-\alpha}\cdot R}\underset{k}{\otimes}\frac{M}{VM^{\sigma^{-1}}}.$$

e– Pour toute suite exacte de modules de Dieudonné $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ avec M_0 et M_1 libres de même rang fini sur W, on dispose des deux diagrammes commutatifs à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_1^{\sigma^{-1}} \arrow[r] \arrow[d, hook, "V_1"'] & M_0^{\sigma^{-1}} \arrow[r] \arrow[d, hook, "V_0"'] & M^{\sigma^{-1}} \arrow[r] \arrow[d, "V"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] & M_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M_1^R & \longrightarrow & M_0^R & \longrightarrow & M^R & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle v_1}\big\downarrow & & {\scriptstyle v_0}\big\downarrow & & {\scriptstyle v}\big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & R \otimes M_1 & \longrightarrow & R \otimes M_0 & \longrightarrow & R \otimes M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

d'où des suites exactes du serpent : $0 \longrightarrow \operatorname{Ker} V \longrightarrow \operatorname{Coker} V_1 \longrightarrow \operatorname{Coker} V_0 \longrightarrow \operatorname{Coker} V \longrightarrow 0$ et $0 \longrightarrow \operatorname{Ker} v \longrightarrow \operatorname{Coker} v_1 \longrightarrow \operatorname{Coker} v_0 \longrightarrow \operatorname{Coker} v \longrightarrow 0$. Comme ce sont des k-vectoriels on en déduit un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \longrightarrow & \overline{R} \underset{k}{\otimes} \operatorname{Ker} V & \longrightarrow & \overline{R} \underset{k}{\otimes} \operatorname{Coker} V_1 & \longrightarrow & \overline{R} \underset{k}{\otimes} \operatorname{Coker} V_0 & \longrightarrow & \overline{R} \underset{k}{\otimes} \operatorname{Coker} V & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow (4) & & \downarrow (3) & & \downarrow (2) & & \downarrow (1) & \\ 0 \longrightarrow & \operatorname{Ker} v & \longrightarrow & \operatorname{Coker} v_1 & \longrightarrow & \operatorname{Coker} v_0 & \longrightarrow & \operatorname{Coker} v & \longrightarrow 0 \end{array}$$

dans lequel les 3 flèches verticales (1), (2), (3) sont les identifications vues en d– et donc des isomorphismes. Donc, (4) est un isomorphisme, autrement dit :

$$\overline{R} \underset{k}{\otimes} \operatorname{Ker} V \xrightarrow[\theta]{\sim} \operatorname{Ker} v.$$

Cette flèche d'ailleurs l'application évidente provenant de l'inclusion : $R \otimes \operatorname{Ker} V \hookrightarrow R \otimes M^{\sigma^{-1}}$. On a de même :

$$\frac{R}{\pi^{e-\alpha} R} \underset{k}{\otimes} \operatorname{Ker} F \xrightarrow[f]{\sim} \operatorname{Ker} \gamma.$$

N.B. Tout module de Dieudonné fini (M, V, F) admettant une présentation par des libres, ces résultats sont vrais pour tout module fini.

f– Considérons le composé : $R \otimes M \xrightarrow{\frac{p}{\pi^\alpha}} R \otimes M \xrightarrow{f} M^R$; il est égal au composé : $R \otimes M \xrightarrow{id \otimes F} R \otimes M^{\sigma^{-1}} \xrightarrow{\theta} M^R$ par définition de M^R; par conséquent, sa restriction à $R \otimes \operatorname{Ker} F$ est nulle, ou encore :

$$p/_{\pi^\alpha} \cdot R \otimes \operatorname{Ker} F \hookrightarrow \operatorname{Ker} f.$$

Si M est un module de Dieudonné fini, la démonstration du e– ci-dessus prouve que $\operatorname{Ker} v$ et $\operatorname{Coker} v$ ont même longueur sur R; par conséquent :

$$lg_R M^R = lg_R R \otimes M = e \times lg_W M.$$

Par conséquent : $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Coker} f$ ont même longueur : or $\operatorname{Coker} f \simeq \overline{R} \underset{k}{\otimes} \frac{M^{\sigma^{-1}}}{FM}$ a même longueur que $\overline{R} \underset{k}{\otimes} \operatorname{Ker} F \xrightarrow{\sim} \frac{\pi^{e-\alpha}\cdot R}{p\cdot R} \underset{k}{\otimes} \operatorname{Ker} F \subset \operatorname{Ker} f$. Donc pour un module de Dieudonné fini :

$$\frac{\pi^{e-\alpha}R}{p\cdot R} \underset{k}{\otimes} \operatorname{Ker} F = \pi^{e-\alpha}\cdot R \otimes \operatorname{Ker} F \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ker} f$$

et de même :

$$\frac{\pi^{\alpha}\cdot R}{p\cdot R} \underset{k}{\otimes} \operatorname{Ker} V = \pi^{\alpha}\cdot R \otimes \operatorname{Ker} V \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ker} \theta.$$

g– Exactitude du foncteur $M \longmapsto M^R$

Si $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0$ est une suite exacte de modules de Dieudonné de longueurs finies, l'exactitude à droite du produit tensoriel et des limites inductives (non filtrantes) implique l'exactitude de la suite : $M_1^R \longrightarrow M^R \longrightarrow M_2^R \longrightarrow 0$. Le résultat établi en f– sur les longueurs entraîne alors l'exactitude de la suite :

$$0 \longrightarrow M_1^R \longrightarrow M^R \longrightarrow M_2^R \longrightarrow 0.$$

h– **Un exemple** : le groupe $\alpha_{p,k}$, noyau de $(\mathbb{G}_{a,k} \xrightarrow[F]{x \longmapsto x^p} \mathbb{G}_{a,k})$

Il correspond à $M = k$, $F = 0$, $V = 0$. Le diagramme Δ^M :

$$\begin{tikzcd}
 & R\otimes M^{\sigma^{-1}} \arrow[dl, "\pi^{\alpha}"'] \arrow[dr, "0"] & \\
R\otimes M^{\sigma^{-1}} & & R\otimes M \\
 & R\otimes M \arrow[ul, "0"] \arrow[ur, "p/\pi^{\alpha}"'] &
\end{tikzcd}$$

admet pour limite inductive $M^R \simeq \frac{R}{\pi^{\alpha}R} \underset{k}{\otimes} k^{\sigma^{-1}} \oplus \frac{R}{\pi^{e-\alpha}R} \underset{k}{\otimes} k$. $M^R \simeq \frac{R}{\pi^{\alpha}\cdot R} \oplus \frac{R}{\pi^{e-\alpha}\cdot R}$; en particulier : M^R **et** $R\otimes M$ **ne sont pas isomorphes.**

$f : \frac{R}{pR} \simeq R\otimes M \longrightarrow M^R$ s'identifie à l'application canonique sur le facteur $\frac{R}{\pi^{e-\alpha}\cdot R}$

$\theta : \frac{R}{pR} \simeq R\otimes M^{\sigma^{-1}} \longrightarrow M^R$ s'identifie à l'application canonique sur le facteur $\frac{R}{\pi^{\alpha}R}$

$v : M^R = \frac{R}{\pi^\alpha R} \oplus \frac{R}{\pi^{e-\alpha} R} \to R \otimes M^{\sigma^{-1}} \simeq \frac{R}{p \cdot R}$, vaut 0 sur le 1$^{\text{er}}$ facteur, et π^α sur le 2$^{\text{ème}}$

$\gamma : M^R \longrightarrow R \otimes M \simeq \frac{R}{p \cdot R}$, vaut $\frac{p}{\pi^\alpha}$ sur le 1$^{\text{er}}$ facteur, et 0 sur le 2$^{\text{ème}}$

2) Le cas des modules annulés par p

Si $p \cdot M = 0$, $R \underset{W}{\otimes} M = \frac{R}{p \cdot R} \underset{k}{\otimes} M$, qu'on note $\frac{R}{p \cdot R} \otimes M$.

On pose : $\dim M = \dim_k(M)$.

Soit (M, V, F) un module de Dieudonné fini, annulé par p ; alors : $F \circ V = V \circ F = 0$. On pose : $h = \dim M$; $d' = \dim \operatorname{Ker} M^{\sigma^{-1}} \xrightarrow{V} M$, $d'' = \dim \operatorname{Ker} M \xrightarrow{F} M^{\sigma^{-1}}$ et $\delta = d' + d'' - h = \dim \frac{\operatorname{Ker} V}{\operatorname{Im} F} = \dim \frac{\operatorname{Ker} F}{\operatorname{Im} V}$.

Comme en I-2), choisissons T, T', S, S' tels que :

$$\begin{aligned} M &= \operatorname{Ker} F \oplus T, & M^{\sigma^{-1}} &= \operatorname{Ker} V \oplus T', \\ \operatorname{Ker} F &= \operatorname{Im} V \oplus S, & \operatorname{Ker} V &= \operatorname{Im} F \oplus S'; \\ \operatorname{Im} V &= VT', & \operatorname{Im} F &= FT. \end{aligned}$$

Alors, on a : $\dim T = \dim FT = h - d''$; $\dim T' = \dim VT' = h - d'$; $\dim S = \dim S' = \delta$.

a– Calcul de $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Im} \theta$.

On a : $R \otimes M = (R \otimes T) \oplus (R \otimes S) \oplus (R \otimes \operatorname{Im} V)$. On a vu en 1)-f- que $\operatorname{Ker} f = \pi^{e-\alpha} R \otimes \operatorname{Ker} F = (\pi^{e-\alpha} \cdot R \otimes S) \oplus (\pi^{e-\alpha} \cdot R \otimes \operatorname{Im} V)$. Il en résulte que

$$\operatorname{Im} f = f(R \otimes T) \oplus f(R \otimes S) \oplus f(R \otimes \operatorname{Im} V)$$

d'où :

$$\operatorname{Im} f \xrightarrow{\sim} \left(\frac{R}{p \cdot R}\right)^{h-d''} \oplus \left(\frac{R}{\pi^{e-\alpha} \cdot R}\right)^{\delta} \oplus \left(\frac{R}{\pi^{e-\alpha} \cdot R}\right)^{h-d'}$$

et de même :

$$\operatorname{Im} \theta = \theta(R \otimes T') \oplus \theta(R \otimes S') \oplus \theta(R \otimes \operatorname{Im} F)$$

d'où

$$\operatorname{Im} \theta \simeq \left(\frac{R}{p \cdot R}\right)^{h-d'} \oplus \left(\frac{R}{\pi^{\alpha} \cdot R}\right)^{\delta} \oplus \left(\frac{R}{\pi^{\alpha} \cdot R}\right)^{h-d''}$$

De plus, par définition de M^R :

$$f(R \otimes \operatorname{Im} V) = \pi^\alpha \cdot \operatorname{Im} \theta = \pi^\alpha \cdot \theta(R \otimes T');$$

et

$$\theta(R \otimes \operatorname{Im} F) = \pi^{e-\alpha} \cdot \operatorname{Im} f = \pi^{e-\alpha} \cdot f(R \otimes T).$$

b– Calcul de M^R quand $p \cdot M = 0$

Par définition de la limite inductive, $\operatorname{Im} f + \operatorname{Im}\theta = M^R$. D'où une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im}\theta \longrightarrow \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Im}\theta \xrightarrow{+} M^R \longrightarrow 0.$$

On a :

$$\begin{aligned} lg\ \operatorname{Im} f &= lg\ R\otimes M - lg\ \operatorname{Ker} f = eh - \alpha d'' \\ lg\ \operatorname{Im}\theta &= \lg R\otimes M^{\sigma^{-1}} - lg\ \operatorname{Ker}\theta = eh - (e-\alpha)d' \\ lg\ M^R &= eh. \end{aligned}$$

D'où : $lg(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im}\theta) = eh - (e-\alpha)d' - \alpha d''$.

D'autre part, d'après le a– $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im}\theta \supset \pi^{e-\alpha}\cdot \operatorname{Im} f \oplus \pi^{\alpha}\cdot \operatorname{Im}\theta$ dont la longeur vaut : $\alpha(h-d'') + (e-\alpha)(h-d') = lg(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im}\theta)$. D'où :

$$\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im}\theta = \pi^{e-\alpha}\cdot \operatorname{Im} f \oplus \pi^{\alpha} \operatorname{Im}\theta \simeq \Big(\frac{R}{\pi^{\alpha} R}\Big)^{h-d''} \oplus \Big(\frac{R}{\pi^{e-\alpha}\cdot R}\Big)^{h-d'}.$$

On en déduit également que $M^R = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im}\theta = (f(R\otimes T)\oplus f(R\otimes S)) + (\theta(R\otimes T')\oplus \theta(R\otimes S'))$. Mais d'après le calcul de $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im}\theta$, cette somme est **directe**. On a donc :

LEMME 12. — *Sous les hypothèses précédentes, on a :*

$$M^R \simeq f(R\otimes T)\oplus f(R\otimes S)\oplus \theta(R\otimes T')\oplus\theta(R\otimes S').$$

En particulier :

$$M^R \simeq \Big(\frac{R}{p\cdot R}\Big)^{h-\delta} \oplus \Big(\frac{R}{\pi^{\alpha}\cdot R}\oplus \frac{R}{\pi^{e-\alpha}\cdot R}\Big)^{\delta}.$$

Remarque : En particulier, si $\alpha \neq e$, M^R est **libre** sur $\frac{R}{p\cdot R}$ si et seulement si $\delta = 0$, c'est-à-dire : $\operatorname{Im} V = \operatorname{Ker} F$ (ou $\operatorname{Im} F = \operatorname{Ker} V$), c'est-à-dire encore : $M = \operatorname{Coker}(p : M_0 \longrightarrow M_0)$, où M_0 est un module de Dieudonné libre de rang fini sur W.

$$\begin{aligned} \text{On a aussi :}\quad \operatorname{Ker} v = \theta(R\otimes \operatorname{Ker} V) &= \theta(R\otimes \operatorname{Im} F)\oplus\theta(R\otimes S') \\ &= \pi^{e-\alpha}\cdot \operatorname{Im} f \oplus \theta(R\otimes S') \\ \text{et de même :}\quad \operatorname{Ker}\gamma = f(R\otimes \operatorname{Ker} F) &= \pi^{\alpha}\cdot \operatorname{Im}\theta \oplus f(R\otimes S). \end{aligned}$$

3) Calcul de M^R quand $p^n\cdot M = 0$

Rappelons que $M^R = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im}\theta$; d'après la *Proposition* 1 (I-7)), on a donc en choisissant des modules T_i, T'_i, S_i, S'_i comme indiqué en (I-5) :

$$\operatorname{Im} f = \sum_{i=1}^{n}\big(f(R\otimes T_i) + f(R\otimes VT'_i) + f(R\otimes S_i) + f(R\otimes VS'_i)\big) \quad \text{et}$$

$$\operatorname{Im}\theta = \sum_{i=1}^{n}\big(\theta(R\otimes FT_i) + \theta(R\otimes T'_i) + \theta(R\otimes FS_i) + \theta(R\otimes S'_i)\big)$$

Par définition de M^R, on a : $\frac{p}{\pi^\alpha} \circ f = \theta \circ (id \otimes F)$ et $\pi^\alpha \circ \theta = f \circ (id \otimes V)$, d'où : $M^R = \sum_{i=1}^{n} \big(f(R \otimes T_i) + \theta(R \otimes T_i') + f(R \otimes S_i) + \theta(R \otimes S_i')\big)$.

PROPOSITION 2. —

$$\begin{aligned}
a- \quad M^R &= \bigoplus_{i=1}^{n} \Big(f(R \otimes T_i) \oplus \theta(R \otimes T_i') \oplus f(R \otimes S_i) \oplus \theta(R \otimes S_i')\Big);\\
b- \quad \operatorname{Im} f &= \bigoplus_{i=1}^{n} \Big(f(R \otimes T_i) \oplus \pi^\alpha \cdot \theta(R \otimes T_i') \oplus f(R \otimes S_i) \oplus \pi^\alpha \cdot \theta(R \otimes S_i')\Big);\\
c- \quad \operatorname{Ker} v &= \bigoplus_{i=1}^{n} \Big(\pi^{ie-\alpha} \cdot f(R \otimes T_i) \oplus \{0\} \oplus \{0\} \oplus p^{i-1} \cdot \theta(R \otimes S_i')\Big).
\end{aligned}$$

Démonstration : b- Rappelons (1), f-) que $\operatorname{Ker} f = \pi^{e-\alpha} \cdot R \otimes \operatorname{Ker} F$. D'après la *Proposition* 1 (I, 7), b–) on a donc : $\operatorname{Ker} f = \bigoplus_{i=1}^{n} \Big(\{0\} \oplus \pi^{ie-\alpha} \cdot R \otimes VT_i' \oplus \pi^{ie-\alpha} \cdot R \otimes S_i \oplus \{0\}\Big)$. Donc, dans l'expression ci-dessus de $\operatorname{Im} f$, la somme est directe, d'où le b–.

On a de même : $\operatorname{Ker} \theta = \pi^\alpha \cdot R \otimes \operatorname{Ker} V$; d'où : $\operatorname{Ker} \theta = \bigoplus_{i=1}^{n} \Big(\pi^{ie-\alpha} \cdot R \otimes FT_i \oplus \{0\} \oplus \{0\} \oplus \pi^{ie-\alpha} \cdot R \otimes S_i'\Big)$ et donc $\operatorname{Im} \theta = \bigoplus_{i=1}^{n} \Big(\pi^{e-\alpha} \cdot f(R \otimes T_i) \oplus \theta(R \otimes T_i') \oplus \pi^{e-\alpha} \cdot f(R \otimes S_i) \oplus \theta(R \otimes S_i')\Big)$. Cette démonstration entraîne aussi, avec les notations de (I, 1)) :

$$\begin{aligned}
f(R \otimes T_i) &\simeq \Big(\frac{R}{p^i \cdot R}\Big)^{h_i - d_i'' - d_{i+1}'}, & \theta(R \otimes T_i') &\simeq \Big(\frac{R}{p^i R}\Big)^{h_i - d_i' - d_i''},\\
f(R \otimes S_i) &\simeq \Big(\frac{R}{\pi^{ie-\alpha} \cdot R}\Big)^{\delta_i}, & \theta(R \otimes S_i') &\simeq \Big(\frac{R}{\pi^{(i-1)e+\alpha} \cdot R}\Big)^{\delta_i}.
\end{aligned}$$

a– Il faut montrer que la somme est directe et pour celà, il suffit de regarder dans $\operatorname{Ker} p_{M^R}$, c'est-à-dire de se ramener au cas où $p \cdot M = 0$. Posons $M_1 = \operatorname{Ker} p_M$. Alors :

$$\operatorname{Ker} p_{M^R} \simeq M_1^R$$

d'après l'exactitude de $M \longmapsto M^R$ (1), g-).

D'après les *Lemme* 10-11 (I-6), 7)) et leurs conséquences, on a :

$$M_1 = \operatorname{Ker} F_1 \oplus T_1 \oplus \bigoplus_{i=2}^{n} (p^{i-1} \cdot T_i \oplus p^{i-2} \cdot VS_i'), \quad \operatorname{Ker} F_1 = \operatorname{Im} V_1 \oplus S_1;$$

$$M_1^{\sigma^{-1}} = \operatorname{Ker} V_1 \oplus T_1' \oplus \bigoplus_{i=2}^{n} (p^{i-1} \cdot T_i' \oplus p^{i-2} \cdot FS_i), \quad \operatorname{Ker} V_1 = \operatorname{Im} F_1 \oplus S_1';$$

Si on pose :

$$T = T_1 \oplus \bigoplus_{i=2}^{n} (p^{i-1} \cdot T_i \oplus p^{i-2} \cdot VS_i'), \qquad S = S_1,$$

$$T' = T_1' \oplus \bigoplus_{i=2}^{n} (p^{i-1} \cdot T_i' \oplus p^{i-2} \cdot FS_i), \qquad S' = S_1',$$

d'après le *Lemme* 12, on a : $M_1^R = f(R \otimes T) \oplus f(R \otimes S) \oplus \theta(R \otimes T') \oplus \theta(R \otimes S')$. Comme $\operatorname{Ker} f = \pi^{e-\alpha} \cdot R \otimes \operatorname{Ker} F_1$ et $\operatorname{Ker} \theta = \pi^{\alpha} \cdot R \otimes \operatorname{Ker} V_1$ (1), f–) et $T \cap \operatorname{Ker} F_1 = 0$, $T' \cap \operatorname{Ker} V_1 = 0$ par hypothèse, on a :

$$f(R \otimes T) = f(R \otimes T_1) \oplus \bigoplus_{i \geq 2} (p^{i-1} f(R \otimes T_i) \oplus p^{i-2} \cdot f(R \otimes VS_i')),$$

$$\theta(R \otimes T') = \theta(R \otimes T_1') \oplus \bigoplus_{i \geq 2} (p^{i-1} \cdot \theta(R \otimes T_i') \oplus p^{i-2} \cdot \theta(R \otimes FS_i)).$$

Comme $f(R \otimes VS_i') = \pi^{\alpha} \cdot \theta(R \otimes S_i')$ et $\theta(R \otimes FS_i) = \pi^{e-\alpha} \cdot f(R \otimes S_i)$ on a :

$$\begin{aligned} M_1^R = & \bigoplus_{i=1}^{n} (p^{i-1} \cdot f(R \otimes T_i) \oplus p^{i-1} \cdot \theta(R \otimes T_i')) \\ & \oplus f(R \otimes S_1) \oplus \bigoplus_{i \geq 2} p^{i-2} \cdot \pi^{e-\alpha} \cdot f(R \otimes S_i) \\ & \oplus \theta(R \otimes S_1') \oplus \bigoplus_{i \geq 2} p^{i-2} \cdot \pi^{\alpha} \cdot \theta(R \otimes S_i'), \end{aligned}$$

et ceci suffit à prouver que dans l'expression de M^R, la somme est directe.

c– On a $\operatorname{Ker} v = \theta(R \otimes \operatorname{Ker} V)$ (1), e–). D'après le *Lemme* 10, $\operatorname{Ker} V = \operatorname{Ker} V_1 = \bigoplus_{i=1}^{n} (p^{i-1} \cdot FT_i \oplus p^{i-1} \cdot S_i')$; d'où :

$$\operatorname{Ker} v = \sum_{i=1}^{n} p^{i-1} \cdot \theta(R \otimes FT_i) + p^{i-1} \cdot \theta(R \otimes S_i') = \sum_{i=1}^{n} p^{i-1} \cdot \pi^{e-\alpha} \cdot f(R \otimes T_i) + p^{i-1} \cdot \theta(R \otimes S_i'),$$

et la somme est directe d'après le a–.

III — Relèvement sur R des p-groupes finis **constants** sur $\overline{R}$

Soit $\mathcal{G}$ un tel groupe et M le module de Dieudonné de $\mathcal{G} \underset{\operatorname{Spec}\overline{R}}{\times} \operatorname{Spec} k$. Le système de HONDA fini de $\mathcal{G}$ est donc $(R \underset{W}{\otimes} M, M^R, v, f)$ (Première Partie, II, 3) c–). Il faut donc dire à quelles conditions il existe une filtration admissible pour ce système (Première Partie, I, B, 2), c–), c'est-à-dire un sous R-module L de M^R tel que :

i) le composé : $\frac{L}{\pi^\alpha L} \longrightarrow \frac{M^R}{\pi^\alpha \cdot M^R} \longrightarrow \frac{M^R}{\operatorname{Im} f}$ est un isomorphisme;

ii) $L \cap \operatorname{Ker} v = \{0\}$.

1) Sous-modules admissibles

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des entiers positifs ou nuls, avec α strictement positif. Soit : $B = \left(\frac{R}{\pi^\beta R}\right)^\delta$, $C = \left(\frac{R}{\pi^\gamma R}\right)^\delta$, $E = B \oplus C$, $E' = B \oplus \pi^\alpha \cdot C$, $E'' = \{0\} \oplus \operatorname{Ker} \pi^\alpha_C$. Etant donné le triplet (E, E', E''), par analogie avec les filtrations admissibles sur un système de HONDA fini, on est amené à dire qu'un sous R-module L de E est **admissible** pour (E, E', E'') si on a :

i) le composé : $\frac{L}{\pi^\alpha \cdot L} \longrightarrow \frac{E}{\pi^\alpha E} \longrightarrow \frac{E}{E'}$ est un isomorphisme;

ii) $E'' \cap L = \{0\}$.

LEMME 13. — *Soit (E, E', E'') comme ci-dessus.*

1) Si $\beta \geq \gamma \geq \alpha$, il existe L admissible pour (E, E', E'').

2) Si $\delta > 0$, et $\gamma > 0$, cette condition suffisante est aussi nécessaire.

Démonstration : On peut évidemment supposer $\delta > 0$. Etudions L supposé admissible.

a– Si $\gamma = 0$, $C = \{0\}$; $E = E'$; L doit être nul; réciproquement $L = \{0\}$ convient. Les assertions 1) et 2) du *Lemme* 13 sont donc vraies dans ce cas.

b– Supposons donc $\gamma > 0$.

On a : $\gamma \geq 1$, $\alpha \geq 1$; $\frac{E}{E'} \simeq \left(\frac{R}{\pi^{inf(\alpha,\gamma)} \cdot R}\right)^\delta$. Donc L peut être engendré par des éléments (b_j, c_j) où $b_j \in B$, $c_j \in C$ pour $j = 1, 2, \ldots, \delta$. Comme L vérifie la propriété i), on a : $L + E' = E$; par projection sur C parallèlement à B, on en déduit que $\{c_j\}_{j=1,\ldots,\delta}$ est un système de générateurs, et donc une **base** du $\frac{R}{\pi^\gamma \cdot R}$-module C.

A l'inverse si $\{c_j\}_{j=1,\ldots,\delta}$ est une telle base : $L + E' = L + B + \pi^\alpha C$ contient $B + C = E$. Donc $L \longrightarrow \frac{E}{E'}$ est surjectif, donc $\frac{L}{\pi^\alpha \cdot L} \longrightarrow \frac{E}{E'}$ aussi. Alors $L \cap E' = \operatorname{Ker}\left(L \longrightarrow \frac{E}{E'}\right) = \left\{ \sum\limits_j \lambda_j (b_j, c_j) | \Sigma \lambda_j \cdot c_j \in \pi^\alpha \cdot C \right\} = \pi^{inf(\alpha,\gamma)} \cdot L$. Donc $L \cap E' = \pi^\alpha \cdot L$ **si et seulement si** $\alpha \leq \gamma$.

c– On suppose donc : $\alpha \leq \gamma$

On a $\frac{L}{\pi^\alpha L} \xrightarrow{\sim} \frac{E}{E'}$, c'est-à-dire, la condition i). Etudions ii).

$$L \cap E'' = \left\{ \sum_j \lambda_j (b_j, c_j) | \sum_j \lambda_j b_j = 0 \text{ et } \sum_j \lambda_j c_j \in \operatorname{Ker} \pi^\alpha_C \right\}.$$

Mais on a : $\operatorname{Ker}\pi_C^\alpha = \pi^{\gamma-\alpha}\cdot C$. La condition $L\cap E'' = \{0\}$ est donc equivalente à : $\Big\{$pour tout $(\nu_j)_{j=1,\dots,\delta} \in R^\delta$, la condition : $\sum\limits_j \nu_j\cdot\pi^{\gamma-\alpha}\cdot b_j = 0$ implique : $\sum\limits_j \nu_j\cdot\pi^{\gamma-\alpha}\cdot c_j = 0$, c'est-à-dire : $\forall_j, \nu_j \in \pi^\alpha\cdot R\cdot\Big\}$.

Posons : $(\alpha+\beta-\gamma)_+ = \sup(0,\alpha+\beta-\gamma)$ et pour tout j : $\nu_j = \pi^{(\alpha+\beta-\gamma)_+}$. Alors avec ce choix des ν_j :$\sum\limits_j \nu_j\cdot\pi^{\gamma-\alpha}\cdot b_j = 0$.

Il faut donc : $(\alpha+\beta-\gamma)_+ \geq \alpha$; comme $\alpha\geq 1$, celà équivaut à $\beta\geq\gamma$.

d– Supposons donc $\alpha\leq\gamma\leq\beta$.

Dans ces conditions, comme $\alpha\leq\beta$, $\nu_j\in\pi^\alpha\cdot R$ pour tout j équivaut à : l'élément $(\nu_j \bmod \pi^\beta R)_{j=1,\dots,\delta}$ de B appartient à $\pi^\alpha\cdot B$. Soit $\varphi : B \longrightarrow B : (\nu_j \bmod \pi^\beta\cdot R) \longmapsto \sum\limits_j \nu_j\cdot\pi^{\gamma-\alpha}\cdot b_j$. La condition $L\cap E'' = \{0\}$ équivaut alors à : $\operatorname{Ker}\varphi \subset \pi^\alpha\cdot B$; cette condition est elle-même équivalente à : $\operatorname{Im}\varphi$ a un quotient isomorphe à $\frac{B}{\pi^\alpha B}$, et par dualité à : $\operatorname{Im}\varphi$ contient un sous-module isomorphe à $\frac{B}{\pi^\alpha B} \simeq \left(\frac{R}{\pi^\alpha R}\right)^\delta$. Le seul sous-module de B isomorphe à $\frac{B}{\pi^\alpha B}$ est $\pi^{\beta-\alpha}B$. D'autre part, $\operatorname{Im}\varphi = \pi^{\gamma-\alpha}\cdot B'$ où B' est le sous-module de B engendré par les b_j. La condition $L\cap E'' = \{0\}$ équivaut donc à : $\pi^{\gamma-\alpha}\cdot B' \supset \pi^{\beta-\alpha}\cdot B$, ou encore :

$$B' \supset \pi^{\beta-\gamma}\cdot B,$$

(d'après la relation $\alpha\leq\gamma\leq\beta$ et la théorie des diviseurs élémentaires) ce qu'il est toujours possible de réaliser.

2) Le cas $\frac{e}{p-1} < \alpha \leq \frac{e}{2}$. Relèvement des p-groupes finis de k à R

Ce cas comprend notamment celui où : $2\leq e < p-1$ et $\alpha = 1$, c'est-à-dire : $\overline{R} = k$.

La description du module M^R (*Proposition* 2) permet de voir qu'**il suffit**, pour trouver un sous-module L de M^R tel que $(R\otimes M, M^R, v, f, L)\in FH(R)$, de poser : $L = \bigoplus\limits_{i=1}^n (N_i\oplus L_i)$, où : $N_i = \theta(R\otimes T_i)$ et où L_i est un sous-module de $f(R\otimes S_i)\oplus\theta(R\otimes S_i') = E_i$ admissible pour (E_i, E_i', E_i''), où $E_i' = f(R\otimes S_i)\oplus\pi^\alpha\theta(R\otimes S_i')$ et $E_i'' = \{0\}\oplus p^{i-1}\cdot\theta(R\otimes S_i')$. On a vu au cours de la démonstration de la *Proposition* 2 que : $f(R\otimes S_i)\simeq\left(\frac{R}{\pi^{ie-\alpha}\cdot R}\right)^{\delta_i}$ et $\theta(R\otimes S_i')\simeq\left(\frac{R}{\pi^{(i-1)e+\alpha}R}\right)^{\delta_i}$. On est donc dans les conditions d'application du *Lemme* 13, avec $\beta_i = ie-\alpha$, $\gamma_i = (i-1)e+\alpha$; on a bien : $\alpha\leq\gamma_i\leq\beta_i$ (puisque $2\alpha\leq e$) pour $i = 1,2,\dots,n$. On obtient par conséquent :

PROPOSITION 3. — *Si on a :* $\frac{e}{p-1} < \alpha \leq \frac{e}{2}$, *alors tout p-groupe fini constant sur* $\overline{R} = R/\pi^\alpha\cdot R$ *se relève sur* R.

COROLLAIRE 2. — *Supposons* $p\geq 5$. *Alors, tout p-groupe fini sur* k *se relève sur* R, *dès que* $e\geq 2$.

En effet, pour un tel p, quelque soit l'indice de ramification $e \geq 2$, il existe $\alpha \geq 1$ tel que $\frac{e}{p-1} < \alpha \leq \frac{e}{2}$. Pour un tel α, posons $\overline{R} = R/\pi^\alpha \cdot R$. Si $\mathcal{G}$ est un p-groupe fini sur k, il se relève d'abord en le groupe constant $\mathcal{G} \underset{\operatorname{Spec} k}{\times} \operatorname{Spec} \overline{R}$ sur $\overline{R}$. Par la *Proposition* 2, celui-ci se relève en un p-groupe fini sur R.

Remarque : 1) Ce *Corollaire* est une réponse à la question posée par OORT et MUMFORD ([10]) à savoir, l'existence du relèvement des p-groupes finis de k à R, pour R anneau de valuation discrète complet, d'inégale caractéristique de corps résiduel k. En bref, si on suppose k **parfait**, de caractéristique $p \geq 5$, et R **ramifié**, un tel relèvement existe toujours. Dans loc. cit. OORT et MUMFORD, prouvent par une méthode tout à fait différente, que si R d'inégales caractéristiques est donné, il existe $R \longrightarrow R'$ fini (avec R' de valuation discrète et de même corps résiduel) et un relèvement du groupe sur R'. D'après les auteurs de l'article cité, leur méthode ne permet pas de majorer la ramification de R' sur R.

2) Supposons $p = 3$, $e = 2$ et $\alpha = 2$ (donc $2\alpha > e$). Le module M^R associé au groupe $\alpha_{p,\overline{R}}$ est alors isomorphe à $\frac{R}{\pi^{e-\alpha} \cdot R} \oplus \frac{R}{\pi^\alpha R}$; d'après le *Lemme* 13 il n'existe alors pas de filtration admissible dans M^R; par conséquent $\alpha_{p,\overline{R}}$ **ne se relève pas sur** R. Il est cependant bien connu que $\alpha_{p,k}$ **se relève de** k **à** R. (Voir la théorie des schémas en F-vectoriels de RAYNAUD).

L'hypothèse : $p \geq 5$, faite dans le *Corollaire* 2 nous semble donc liée à la méthode employée (voir aussi l'Appendice I).

3) Le cas $\frac{e}{2} < \alpha \leq e$. Etude de la platitude de $\operatorname{Ker} p$ dans un groupe fini sur R.

a–

LEMME 14. — *Soit $1 \leq \alpha \leq e$, (M, V, F) un module de Dieudonné fini sur k. On suppose qu'il existe L tel que $(R \otimes M, M^R, v, f, L) \in FH(R)$.*

Posons : $M_1 = \operatorname{Ker} p_M$, $L_1 = \operatorname{Ker} p_L = M_1^R \cap L$; $\widehat{M} = p \cdot M$, $\widehat{L} = p \cdot L$. Alors $(R \otimes M_1, M_1^R, v_1, f_1, L_1)$ et $(R \otimes \widehat{M}, \widehat{M}^R, \widehat{v}, \widehat{f}, \widehat{L})$ sont objets de $FH(R)$.

Démonstration : 1) Montrons les propriétés relatives à M_1, à savoir : i) $M_1^R = L_1 + \operatorname{Im} f_1$, ii) $L_1 \cap \operatorname{Im} f_1 = \pi^\alpha L_1$, iii) $L_1 \cap \operatorname{Ker} v_1 = \{0\}$.

La propriété iii) est évidente car $\operatorname{Ker} v_1 = \operatorname{Ker} v$ et $L \cap \operatorname{Ker} v = \{0\}$. Démontrons ii). Soit $\ell_1 = f(m_1)$ avec $\ell_1 \in L_1$, $m_1 \in R \otimes M_1$. Alors, il existe $\lambda \in L$ tel que $\ell_1 = \pi^\alpha \lambda = f(m_1)$. Donc $f \circ v(\lambda) = f(m_1)$; par conséquent : $v(\lambda) = m_1 + z_1$ où $f(z_1) = 0$. Donc $v(p \cdot \lambda) = 0$; donc $p \cdot \lambda = 0 : \lambda \in L_1$ et $\ell_1 \in \pi^\alpha \cdot L_1$.

Démontrons i). D'après ii) on a $\frac{L_1}{\pi^\alpha L_1} \hookrightarrow \frac{M_1^R}{\operatorname{Im} f_1}$. Il suffit de voir que ces deux modules ont même longueur.

Or : $\ell g \frac{L_1}{\pi^\alpha L_1} = \ell g \operatorname{Ker} \pi_{L_1}^\alpha = \ell g \operatorname{Ker} \pi_L^\alpha = \ell g \frac{L}{\pi^\alpha L} = \ell g \frac{M^R}{\operatorname{Im} f} = \ell g \operatorname{Ker} f = \ell g \operatorname{Ker} f_1 = \ell g \frac{M_1^R}{\operatorname{Im} f_1}$ (car $\operatorname{Ker} \pi_L^\alpha \hookrightarrow L_1$ et $\operatorname{Ker} f_1 = \operatorname{Ker} f$).

2) Montrons les propriétés relatives à $\widehat{M}$. Par exactitude de $M \longmapsto M^R$, on a : $(\widehat{M})^R = (p \cdot M)^R = p \cdot M^R$. Il est clair que $p \cdot M^R = pL + p \cdot \operatorname{Im} f$. En utilisant l'isomorphisme induit par la multiplication par p : $\frac{M}{M_1} \xrightarrow{\sim} pM$, il faut donc prouver : $\operatorname{Ker} \widehat{v} \cap \widehat{L} = \{0\}$, c'est-à-dire : $(L + M_1^R) \cap \operatorname{Ker} v o p = M_1^R$ et $\widehat{L} \cap \operatorname{Im} \widehat{f} = \pi^\alpha \cdot \widehat{L}$, c'est-à-dire : $(L + M_1^R) \cap (\operatorname{Im} f + M_1^R) = \pi^\alpha \cdot L + M_1^R$.

Or : si $\ell \in L$ et $m_1 \in M_1^R$ sont tels que $v(p(\ell + m_1)) = 0$, c'est-à-dire $v(p\ell) = 0$, on a : $p\ell = 0$, donc $\ell \in L_1$ et $\ell + m_1 \in M_1^R$, d'où la première assertion. D'autre part $(L + M_1^R) \cap (\operatorname{Im} f + M_1^R) = M_1^R + L \cap (\operatorname{Im} f + M_1^R)$; il faut donc prouver que $L \cap (\operatorname{Im} f + M_1^R) \subset \pi^\alpha \cdot L + M_1^R$; si $\ell = f(m) + z_1$ avec $p \cdot z_1 = 0$, d'après la partie 1) de la démonstration, il existe $m_1 \in M_1^R$, $\ell_1 \in L_1$ tels que $z_1 = \ell_1 + f(m_1)$; d'où $\ell - \ell_1 = f(m + m_1)$; donc $\ell - \ell_1 = \pi^\alpha \cdot \lambda$ avec $\lambda \in L$; donc $\ell = \ell_1 + \pi^\alpha \lambda \in M_1^R + \pi^\alpha \cdot L$.

PROPOSITION 4. — *Supposons $\frac{e}{2} < \alpha \leq e$ (par exemple $\alpha = e$ d'où $\overline{R} = R/p \cdot R$). Soit (M, V, F) un module de Dieudonné fini sur k, annulé par p^n, auquel on attache les nombres $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, comme en (I, 1)); ($\delta_i = \dim \frac{\operatorname{Ker} F_i}{\operatorname{Im} V_i}$). Alors , pour qu'il existe L tel que $(R \otimes M, M^R, v, f, L)$ soit un objet de $FH(R)$ il faut et il suffit que $\delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_n = 0$.*

Démonstration : 1) La condition est suffisante, on peut prendre alors $L = \bigoplus_{i=1}^{n} \theta(R \otimes T_i')$ avec les notations de la *Proposition* 2.

2) Pour montrer que la condition est nécessaire, on procède par récurrence sur n. En effet, en reprenant les notations du *Lemme* 14, $(R \otimes M_1, M_1^R, v_1, f_1, L_1)$ et $(R \otimes \widehat{M}, \widehat{M}^R, \widehat{v}, \widehat{f}, \widehat{L})$ sont objets de $FH(R)$; comme $\widehat{M} = p \cdot M$, on a $p^{i-1} \cdot \operatorname{Ker} p^i_{\widehat{M}} = p^i \cdot \operatorname{Ker} p^{i+1}_M$; les nombres associés à $\widehat{M}$ sont donc $\delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n$. On est ramené à prouver que $\delta_1 = 0$ c'est-à-dire, à étudier le cas où $p \cdot M = 0$.

D'après la *Remarque* située après le (I-A,3)) de la Première partie, si (N, N', v, f, L) est un objet de $FH(R)$, on a :

$$\operatorname{Im} v \supset \operatorname{Ker} f, \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker} \pi^\alpha_{N'} = \operatorname{Ker} \pi^\alpha_L \oplus \operatorname{Ker} v.$$

D'après le (1)-f) on a : $\operatorname{Ker} f = \pi^{e-\alpha} \cdot R \otimes \operatorname{Ker} F$; d'autre part, $\operatorname{Im} v = R \otimes \operatorname{Im} V + \pi^\alpha \cdot R \otimes M$. En utilisant la *Proposition* 1 dans le cas $n = 1$, on a :

$$R \otimes M = R \otimes T \oplus R \otimes VT' \oplus R \otimes S \text{ car } VS' = 0; \; R \otimes \operatorname{Ker} F = \{0\} \oplus R \otimes VT' \oplus S,$$
$$\text{donc } \operatorname{Ker} f = \{0\} \oplus \pi^{e-\alpha} R \otimes VT' \oplus \pi^{e-\alpha} . R \otimes S; \qquad R \otimes \operatorname{Im} V = \{0\} \oplus R \otimes VT' \oplus \{0\},$$
$$\text{donc } \operatorname{Im} v = \pi^\alpha . R \otimes T \oplus R \otimes VT' \oplus \pi^\alpha . R \otimes S.$$

Par conséquent $\operatorname{Im} v \supset \operatorname{Ker} f \iff \pi^\alpha \cdot R \otimes S \supset \pi^{e-\alpha} \cdot R \otimes S$. Comme $R \otimes S \simeq \left(\frac{R}{\pi^\alpha R}\right)^\delta$, si $2\alpha > e$, c'est-à-dire $\alpha > e - \alpha$, ceci n'est possible que si $\delta = 0$.

Remarques :

1) La fin de la démonstration précédente prouve que si $2\alpha \leq e$, la condition

$$\operatorname{Im} v \supset \operatorname{Ker} f,$$

nécessaire pour l'existence de L, est toujours satisfaite par un système de HONDA fini du type $(R \otimes M, M^R, v, f)$. Même dans ce cas, cette condition **n'est pas équivalente** à la condition

$$\operatorname{Im} f \supset \operatorname{Ker} v.$$

(Considérer le groupe $\alpha_{p,\overline{R}}$).

2) Si $\alpha = e = 1$, c'est-à-dire $R = W$, $\overline{R} = k$, *la Proposition* 4 signifie :

a– Si $p \cdot M = \{0\}$: $\mathcal{G}$ sur k, annulé par p, se relève sur W si et seulement si $\operatorname{Im} V = \operatorname{Ker} F$: c'est la condition bien connue.

b– Si $p^n \cdot M = 0$: un groupe fini $\mathcal{G}$ sur k, annulé par p^n, se relève sur W si et seulement si, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$, $\operatorname{Ker} p^i_{\mathcal{G}} / _{\operatorname{Ker} p^{i-1}_{\mathcal{G}}}$ se relève sur W.

3) On retrouve le fait, connu depuis ([9] OORT-TATE), que le groupe $\alpha_{p,\overline{R}}$ se relève sur R si $\alpha \leq \frac{e}{2}$ et ne se relève pas si $\frac{e}{2} < \alpha \leq e$.

b– D'après la *Remarque* située après le (I-A-3)) de la Première Partie, si $(R \otimes M, M^R, v, f, L) \in FH(R)$, alors :

$$\operatorname{Ker} \pi^\alpha_{M^R} = \operatorname{Ker} \pi^\alpha_L \oplus \operatorname{Ker} v.$$

LEMME 15. — *Soit* $1 \leq \alpha \leq e$, (M, V, F) *un module de Dieudonné fini sur* k. *On suppose qu'il existe* L *tel que* $(R \otimes M, M^R, v, f, L) \in FH(R)$.

On pose $\widetilde{M} = \frac{M}{p \cdot M}$, $\widetilde{L} = \frac{L + p \cdot M^R}{p \cdot M^R} \subset \frac{M^R}{p \cdot M^R} = \widetilde{M}^R, \widetilde{v}, \widetilde{f}$ *les applications induites par* v *et* f. *Alors :*

a– $(R \otimes \widetilde{M}, \widetilde{M}^R, \widetilde{v}, \widetilde{f}, \widetilde{L}) \in FH(R)$ *;*

b– $L \cap p \cdot M^R = p \cdot L$.

Démonstration : a- Il faut prouver :

i) $\widetilde{L} + \operatorname{Im} \widetilde{f} = \widetilde{M}^R$;

ii) $\widetilde{L} \cap \operatorname{Im} \widetilde{f} = \pi^\alpha \cdot \widetilde{L}$;

iii) $\widetilde{L} \cap \operatorname{Ker} \widetilde{v} = \{0\}$.

i) $\iff M^R = L + \operatorname{Im} f + p \cdot M^R$; or $M^R = L + \operatorname{Im} f$; i) est donc vérifié.

ii) $\iff (L + p \cdot M^R) \cap (\operatorname{Im} f + p \cdot M^R) = p \cdot M^R + \pi^\alpha L$, c'est-à-dire $p \cdot M^R + L \cap \operatorname{Im} f = p \cdot M^R + \pi^\alpha L$; or $L \cap \operatorname{Im} f = \pi^\alpha \cdot L$; ii) est donc vérifié ; on a donc $\frac{\widetilde{L}}{\pi^\alpha \cdot \widetilde{L}} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Coker} \widetilde{f}$.

Pour établir iii), remarquons d'abord que : $\operatorname{Ker} \pi^\alpha_{\widetilde{M}^R} = (\pi^{e-\alpha} \cdot M^R + \operatorname{Ker} \pi^\alpha_{M^R}) / p \cdot M^R$; $\operatorname{Ker} \widetilde{v} = (\pi^{e-\alpha} \cdot \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} v) / p \cdot M^R$; $\operatorname{Ker} \pi^\alpha_{\widetilde{L}} = (L \cap (\pi^{e-\alpha} \cdot M^R + \operatorname{Ker} \pi^\alpha_{M^R}) + p \cdot M^R) / p \cdot M^R$.

Remarquons aussi que $\operatorname{Ker}\pi^{\alpha}_{\widetilde{L}} \supset (\operatorname{Ker}\pi^{\alpha}_{L}+\pi^{e-\alpha}\cdot L+p\cdot M^R)/p\cdot M^R$. On a donc ; $\operatorname{Ker}\pi^{\alpha}_{\widetilde{M^R}} \supset \operatorname{Ker}\pi^{\alpha}_{\widetilde{L}}+\operatorname{Ker}\widetilde{v} \supset (\operatorname{Ker}^{\alpha}_{L}+\pi^{e-\alpha}\cdot L+p\cdot M^R+\pi^{e-\alpha}\cdot\operatorname{Im} f+\operatorname{Ker} v)/p\cdot M^R = (\operatorname{Ker}\pi^{\alpha}_{M^R}+\pi^{e-\alpha}\cdot M^R)/p\cdot M^R = \operatorname{Ker}\pi^{\alpha}_{\widetilde{M^R}}$ (d'après la *Remarque* citée avant l'énoncé du *Lemme* 15). D'où $\operatorname{Ker}\pi^{\alpha}_{\widetilde{M^R}} = \operatorname{Ker}\pi^{\alpha}_{\widetilde{L}}+\operatorname{Ker}\widetilde{v} = \Lambda+\operatorname{Ker}\widetilde{v}$, où $\Lambda = (\operatorname{Ker}\pi^{\alpha}_{L}+\pi^{e-\alpha}\cdot L+p\cdot M^R)/p\cdot M^R$. D'autre part : $\ell g\operatorname{Ker}\pi^{\alpha}_{\widetilde{M^R}} = \ell g\frac{\widetilde{M^R}}{\pi^{\alpha}\cdot\widetilde{M^R}} = \ell g\frac{M^R}{\pi^{\alpha}\cdot M^R} = \ell g\operatorname{Ker}\pi^{\alpha}_{M^R} = \ell g\operatorname{Ker}\pi^{\alpha}_{L} + \ell g\operatorname{Ker} v$ (d'après la *Remarque* sus-citée) $= \ell g\frac{L}{\pi^{\alpha}L} + \ell g\operatorname{Coker} v = \ell g\frac{\widetilde{L}}{\pi^{\alpha}\cdot\widetilde{L}} + \ell g\frac{\widetilde{M^R}}{\operatorname{Im}\widetilde{v}} = \ell g\operatorname{Ker}\pi^{\alpha}_{\widetilde{L}} + \ell g\operatorname{Ker}\widetilde{v}$. Par conséquent : $\operatorname{Ker}\pi^{\alpha}_{\widetilde{M^R}} = \operatorname{Ker}\pi^{\alpha}_{\widetilde{L}} \oplus \operatorname{Ker}\widetilde{v} = \Lambda \oplus \operatorname{Ker}\widetilde{v}$, ce dont il résulte :

1) $\widetilde{L}\cap\operatorname{Ker}\widetilde{v} = \{0\}$, c'est-à-dire, iii)

2) $\operatorname{Ker}\pi^{\alpha}_{\widetilde{L}} = \Lambda$, c'est-à-dire : $L\cap(\operatorname{Ker}\pi^{\alpha}_{M^R}+\pi^{e-\alpha}\cdot M^R)+p\cdot M^R = \operatorname{Ker}\pi^{\alpha}_{L}+\pi^{e-\alpha}\cdot L+p\cdot M^R$, ce qui équivaut à :

$$(\diamond)\qquad L\cap(\operatorname{Ker}\pi^{\alpha}_{M^R}+\pi^{e-\alpha}\cdot\operatorname{Im} f)\subset\operatorname{Ker}\pi^{\alpha}_{L}+\pi^{e-\alpha}\cdot L+p\operatorname{Im} f$$

(car $\pi^{e-\alpha}\cdot M^R = \pi^{e-\alpha}\cdot\operatorname{Im} f+\pi^{e-\alpha}\cdot L$).

On peut alors démontrer le b- : $L\cap p\cdot M^R = p\cdot L$; comme $M^R = L+\operatorname{Im} f$, il suffit de démontrer $L\cap p\cdot\operatorname{Im} f\subset p\cdot L$; comme $L\cap p\cdot\operatorname{Im} f\subset L\cap\operatorname{Im} f = \pi^{\alpha}L$, il suffit de démontrer :

$$\pi^{\alpha}\cdot L\cap p\cdot\operatorname{Im} f\subset p\cdot L.$$

Soit $\lambda_1\in L$ et $m\in R\otimes M$ tels que : $\ell = \pi^{\alpha}\cdot\lambda_1 = p\cdot f(m) = \pi^{\alpha}\cdot\frac{p}{\pi^{\alpha}}f(m)$; donc $\lambda_1 = \pi^{e-\alpha}f\left(\frac{p}{\pi^{e-\alpha}}m\right)+z_1$ avec $\pi^{\alpha}\cdot z_1 = 0$ On utilise la relation $(\diamond)$ prouvée à la fin de la démonstration de l'assertion a; il existe $\ell'_1,\ell''_1\in L$, $x_1\in R\otimes M_1$ tels que $\pi^{\alpha}\cdot\ell''_1 = 0$ et $\lambda_1 = \pi^{e-\alpha}\cdot\ell'_1+\ell''_1+pf(x_1)$; d'où : $\ell = \pi^e\ell'_1+\pi^{\alpha}\cdot pf(x_1)$.

On montre alors par **récurrence** : pour tout entier $m\geq 1$, il existe pour $1\leq k\leq m$ ℓ'_k et $\lambda_k\in L$, $\ell''_k\in\operatorname{Ker}\pi^{\alpha}_{L}$, $x_k\in R\otimes M$ tels que :

$$\lambda_k-\pi^{e-\alpha}\ell'_k-\ell''_k = pf(x_k)\text{ et }\ell = \pi^e(\ell'_1+\pi^{\alpha}\ell'_2+\cdots+\pi^{(k-1)\alpha}\ell'_k)+\pi^{k\alpha}\cdot p\cdot f(x_k).$$

Construisons les termes correspondants pour $k = m+1$: comme $\lambda_m-\pi^{e-\alpha}\cdot\ell'_m-\ell''_m\in L\cap\operatorname{Im} f = \pi^{\alpha}\cdot L$, il existe λ_{m+1} dans L tel que $\pi^{\alpha}\lambda_{m+1} = p\cdot f(x_m)$. Par la relation $(\diamond)$ on en déduit l'existence de ℓ'_{m+1},ℓ''_{m+1} et x_{m+1} tels que $\lambda_{m+1} = \pi^{e-\alpha}\ell'_{m+1}+\ell''_{m+1}+pf(x_{m+1})$. D'où

$$\begin{aligned}\ell &= \pi^e(\ell'_1+\cdots+\pi^{(m-1)\alpha}\cdot\ell'_m)+\pi^{m\alpha}f(x_m)\\ &= \pi^e(\ell'_1+\cdots+\pi^{(m-1)\alpha}\cdot\ell'_m)+\pi^{(m+1)\alpha}\lambda_{m+1}\\ &= \pi^e(\ell'_1+\cdots+\pi^{m\alpha}\ell'_{m+1})+\pi^{(m+1)\alpha}\cdot p\cdot f(x_{m+1}), c.q.f.d.\end{aligned}$$

On en conclut que pour tout entier m, $\ell\in p\cdot L+\pi^{m\alpha}\cdot p\cdot\operatorname{Im} f$. Donc $\ell\in p\cdot L$.

c– Cas de platitude de $\operatorname{Ker} p$ dans un p-groupe fini sur R

Soit $\mathcal{G}$ un p-groupe fini constant sur $\overline{R}$. Alors les faisceaux $fppf$: $\operatorname{Ker}(p_{\mathcal{G}})$, $\operatorname{Im}(p_{\mathcal{G}})$, $\operatorname{Coker}(p_{\mathcal{G}})$ sont finis et plats, puisque c'est vrai sur k. ($p_{\mathcal{G}}$ = multiplication par p dans $\mathcal{G}$).

Soit $\widetilde{\mathcal{G}}$ un p-groupe fini sur R; on suppose que $\mathcal{G} = \widetilde{\mathcal{G}} \underset{\operatorname{Spec} R}{\times} \operatorname{Spec} \overline{R}$ est constant. Si on appelle (M, V, F) le module de Dieudonné de $\widetilde{\mathcal{G}} \underset{\operatorname{Spec} R}{\times} \operatorname{Spec} k$, et L le sous-module de M^R correspondant au relèvement $\widetilde{\mathcal{G}}$ de $\mathcal{G}$ sur R, en appliquant les *Lemme* 14 et 15, avec les notations de ces lemmes, on a des objets de $FH(R)$: $(R \otimes M_1, M_1^R, v_1, f_1, L_1)$, $(p \cdot R \otimes M, p \cdot M^R, v, f, pL)$, $(\widetilde{R \otimes M}, \widetilde{M^R}, \widetilde{v}, \widetilde{f}, \widetilde{L})$, auxquels il correspond donc des groupes finis et plats sur R : $\widetilde{\mathcal{G}}'$, $\widetilde{\mathcal{G}}''$, $\widetilde{\mathcal{G}}'''$ et des morphismes : $\widetilde{\mathcal{G}}''' \longrightarrow \widetilde{\mathcal{G}}$, $\widetilde{\mathcal{G}} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{G}}''$, $\widetilde{\mathcal{G}}'' \longrightarrow \widetilde{\mathcal{G}}$, $\widetilde{\mathcal{G}} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{G}}'$, tels que :

Le composé : $\widetilde{\mathcal{G}} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{G}}'' \longrightarrow \widetilde{\mathcal{G}}$ est la multiplication par p;

Le composé : $\widetilde{\mathcal{G}}''' \longrightarrow \widetilde{\mathcal{G}} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{G}}''$ est nul, ainsi que le composé $\widetilde{\mathcal{G}}'' \longrightarrow \widetilde{\mathcal{G}} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{G}}'$; $\widetilde{\mathcal{G}}''' \longrightarrow \widetilde{\mathcal{G}}$ relève $\operatorname{Ker} p_{\mathcal{G}} \hookrightarrow \mathcal{G}$; $\widetilde{\mathcal{G}} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{G}}''$ relève $\mathcal{G} \longrightarrow \operatorname{Im} p_{\mathcal{G}}$; $\widetilde{\mathcal{G}}'' \longrightarrow \widetilde{\mathcal{G}}$ relève $\operatorname{Im} p_{\mathcal{G}} \hookrightarrow \mathcal{G}$; $\widetilde{\mathcal{G}} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{G}}''$ relève $\mathcal{G} \longrightarrow \operatorname{Coker} p_{\mathcal{G}}$, où $\operatorname{Ker} p_{\widetilde{\mathcal{G}}}$, $\operatorname{Im} p_{\widetilde{\mathcal{G}}}$ ($\simeq \operatorname{Coim} p_{\widetilde{\mathcal{G}}}$), $\operatorname{Coker} p_{\widetilde{\mathcal{G}}}$ sont le noyau, l'image et le conoyau **faisceautiques** de $p_{\widetilde{\mathcal{G}}}$ pour la topologie f.p.p.f. Alors comme $\widetilde{\mathcal{G}}''' \longrightarrow \widetilde{\mathcal{G}}$ et $\widetilde{\mathcal{G}}'' \longrightarrow \widetilde{\mathcal{G}}$ donnent des monomorphismes en réduction sur $\overline{R}$, ce sont des monomorphismes.

Comme $\widetilde{\mathcal{G}} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{G}}''$ et $\widetilde{\mathcal{G}} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{G}}'$ donnent des morphismes finis et plats en réduction, ils sont eux-mêmes finis et plats, (critère de platitude par fibre); en particulier ce sont des **épimorphismes** de faisceaux f.p.p.f.

Comme $\widetilde{\mathcal{G}} \xrightarrow{p} \widetilde{\mathcal{G}}$ est le composé $\widetilde{\mathcal{G}} \twoheadrightarrow \widetilde{\mathcal{G}}'' \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{G}}$, il en résulte que le faisceau $\operatorname{Im} p_{\widetilde{\mathcal{G}}}$ est représentable par $\widetilde{\mathcal{G}}''$; comme $\widetilde{\mathcal{G}} \twoheadrightarrow \widetilde{\mathcal{G}}''$ est plat, $\operatorname{Ker} p_{\widetilde{\mathcal{G}}}$ est fini et plat; comme $\widetilde{\mathcal{G}}'' = p \cdot \widetilde{\mathcal{G}}$ est fini et plat, $\operatorname{Coker} p_{\widetilde{\mathcal{G}}}$ est représentable par un groupe fini et plat. On dispose alors de morphismes évidents : $\widetilde{\mathcal{G}}''' \longrightarrow \operatorname{Ker} p_{\widetilde{\mathcal{G}}}$ et $\operatorname{Coker} p_{\widetilde{\mathcal{G}}} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{G}}'$ qui, sur $\overline{R}$, induisent des isomorphismes et qui sont donc eux-mêmes des isomorphismes. On a donc démontré :

COROLLAIRE 3. — *Soit $\frac{e}{p-1} < \alpha \leq e$ et $\widetilde{\mathcal{G}}$ un p-groupe fini sur R dont la réduction sur $\overline{R} = R/\pi^\alpha R$ est un groupe constant. Alors,* $\operatorname{Ker} p_{\widetilde{\mathcal{G}}}$, $\operatorname{Im} p_{\widetilde{\mathcal{G}}}$, $\operatorname{Coker} p_{\widetilde{\mathcal{G}}}$ *sont représentables par des p-groupes finis et plats.*

En particulier, si $e < p-1$, pour **tout** *p-groupe fini et plat $\widetilde{\mathcal{G}}$ sur R, les conclusions précédentes sont vraies.*

Le cas particulier où $e < p - 1$ vient de ce qu'en prenant $\alpha = 1$, et donc $\overline{R} = k$, alors tout groupe sur k est constant.

Remarques : 1) Sous les hypothèses du *Corollaire* 3, il résulte des conclusions du *Corollaire* que pour tout entier $i \geq 0$, $\operatorname{Ker} p^i_{\widetilde{\mathcal{G}}}$ est représentable par un groupe fini et plat.

2) Lorsque $e < p - 1$, le résultat ci-dessus peut aussi être considéré comme un cas particulier d'un résultat de RAYNAUD ([7], 3.3.5 i)).

3) Il semble à l'auteur que les conclusions du *Corollaire* 3 sont encore vraies pour un groupe $\widetilde{\mathcal{G}}$ sur R dont on suppose seulement que si $\mathcal{G}$ est sa réduction sur $\overline{R}$, alors $\operatorname{Ker} p_{\mathcal{G}}$ est fini et plat, **sans supposer $\mathcal{G}$ constant.** Il suffit de reprendre les *Lemmes* 14 et 15 sans changer essentiellement l'argumentation. Si (M, M', v, f) est le système de HONDA

de $\mathcal{G}$, on a en effet (exactitude du foncteur : $\mathcal{G} \longmapsto (M, M', v, f)$) :

$$\begin{array}{rll} \operatorname{Coker} p_{\mathcal{G}} & \text{a pour système de HONDA :} & (\operatorname{Ker} p_M, \operatorname{Ker} p_{M'}, v, f), \\ \operatorname{Im} p_{\mathcal{G}} & \text{a pour système de HONDA :} & (pM, p \cdot M', v, f), \\ \operatorname{Ker} p_{\mathcal{G}} & \text{a pour système de HONDA :} & (\frac{M}{pM}, \frac{M'}{pM'}, v, f). \end{array}$$

Appendice I : Le cas des puissances divisées **non nilpotentes**

Lorsque $\frac{e}{p-1}$ est entier et $\alpha = \frac{e}{p-1}$, l'idéal $\pi^\alpha \cdot R$ admet des puissances divisées canoniques. Mais les puissances divisées induites sur l'idéal $\pi^\alpha \cdot R/_{\pi^{n\alpha}\cdot R}$ de $R/\pi^{n\alpha} \cdot R$ (n entier ≥ 1) ne sont plus **nilpotentes** (à l'inverse du cas : $\alpha > \frac{e}{p-1}$). Pour obtenir un théorème de classification des p-groupes finis analogue au *Théorème* 1 il faut disposer d'un analogue du *Théorème* de GROTHENDIECK.

Dans la démonstration qu'en fait MESSING dans le cas nilpotent ([5], V), l'outil fondamental est la définition d'une exponentielle ([5], III).

Sous réserve de vérifier qu'une telle construction est encore possible dans le cas que nous considérons, à condition de supposer les groupes p-divisibles **connexes** sur $\overline{R}$, on peut associer à un tel groupe un cristal sur le site cristallin **non** nilpotent (à l'aide de l'extension universelle d'un groupe p-divisible par un groupe vectoriel) comme en ([5], IV), puis en appelant $\mathbb{D}G$ le cristal obtenu en prenant l'algèbre de Lie du précédent, établir comme en ([5], V) l'analogue du *Théorème* de GROTHENDIECK pour des groupes p-divisibles **connexes** (et par dualité, pour les groupes **unipotents**), ce qui justifie le § 1 ci-dessous, à la seule condition de vérifier que si $G. \longrightarrow H.$ est un quasi-isomorphisme entre isogénies sur $\overline{R}$, alors le morphisme de complexes filtrés : $(\mathbb{D}H._R, \omega_{H.}) \longrightarrow (\mathbb{D}G._R, \omega_{G.})$ est un quasi-isomorphisme, ce qui est formel.

Ceci admis, on peut dans le cas d'un groupe fini **connexe** et **constant** sur $\overline{R}$ passer du module de Dieudonné au système de HONDA (§ 2 ci-dessous) et obtenir (*Corollaire* 2^c) un théorème d'existence d'un relèvement pour un groupe fini quelconque de k à R, lorsque $p = 3$, dès que l'indice de ramification absolu e de R est **pair**.

1) Soit $\mathcal{F}_R^c$ la catégorie des p-groupes finis commutatifs **connexes** sur R, $\mathcal{C}_R^c$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}_R$, dont les objets sont les isogénies de groupes p-divisibles **connexes** sur R. On a encore l'équivalence $\nu : \mathcal{C}_R^c \longrightarrow \mathcal{F}_R^c$ qui à une isogénie associe son noyau.

Tout groupe fini connexe $\widetilde{\mathcal{G}}$ admet une résolution $(\widetilde{G}., \widetilde{\varphi})$ où $\widetilde{G}.$ est une isogénie de groupes p-divisibles connexes. Le choix d'une telle résolution pour chaque objet de $\mathcal{F}_R^c$ permet encore, par oubli de $\widetilde{\varphi}$ de définir un foncteur $q : \mathcal{F}_R^c \longrightarrow \mathcal{C}_R^c$, quasi-inverse de ν.

On a des définitions analogues sur $\overline{R}$, d'où un foncteur $\overline{q} : \mathcal{F}_{\overline{R}}^c \longrightarrow \mathcal{C}_{\overline{R}}^c$. En passant aux complexes, i.e. en composant avec le foncteur $\Gamma : \mathcal{C}_R^c \longrightarrow DF^1(R)$ (resp. $\overline{\Gamma} : \mathcal{C}_{\overline{R}}^c \xrightarrow{\overline{\Gamma}} DF^1(R, \overline{R})$), on obtient un foncteur $C : \mathcal{F}_R^c \longrightarrow DF^1(R)$ (resp. $\overline{C} : \mathcal{F}_{\overline{R}}^c \longrightarrow DF^1(R, \overline{R})$).

En composant avec l'équivalence $\Phi : DF^1(R) \longrightarrow FH(R)$ (resp. $\overline{\Phi} : DF^1(R, \overline{R}) \longrightarrow FH(R, \overline{R})$) on obtient un foncteur $H : \mathcal{F}_R^c \longrightarrow FH(R)$ (resp. $\overline{H} : \mathcal{F}_{\overline{R}}^c \longrightarrow FH(R, \overline{R})$). Comme en ($1^{\text{ère}}$ Partie, I-B-2)) on définit une catégorie $\mathcal{L}^c(R, \overline{R})$ des couples $(\mathcal{G}, \Lambda)$ avec $\mathcal{G}$ groupe fini connexe sur $\overline{R}$ et Λ, filtration **admissible** de $\overline{H}(\mathcal{G})$, ainsi qu'un foncteur $\varepsilon : \mathcal{F}_R^c \longrightarrow \mathcal{L}^c(R, \overline{R})$. On a alors l'analogue du *Théorème* 1 :

THÉORÈME 1^c. — *Si* $\alpha = \frac{e}{p-1}$ *est entier et* $\overline{R} = R/\pi^\alpha \cdot R$, *le foncteur* $\varepsilon : \mathcal{F}_R^c \longrightarrow \mathcal{L}^c(R, \overline{R})$ *est une* **équivalence de catégories**.

COROLLAIRE 1^c. — *Si $e = p-1$ et $\alpha = 1$ (c'est-à-dire $\overline{R} = k$), il existe une équivalence de catégories : $\widetilde{\mathcal{G}} \longmapsto (\mathbb{D}(\widetilde{\mathcal{G}} \underset{R}{\times} k)_{(k,W)}, \Lambda_{\widetilde{\mathcal{G}}})$ de la catégorie $\mathcal{F}_R^c$ avec celle des couples (M, Λ), où M est un module de Dieudonné de longueur finie connexe (c'est-à-dire, F nilpotent sur M) et Λ définit une filtration* **admissible** *du système de* HONDA *fini $(R \underset{W}{\otimes} M, M^R, v, f)$ (notations de la Première Partie, II, 3)-c).*

2) Existence de relèvements de groupes finis de k à R

De l'étude de la Deuxième Partie, on déduit alors l'analogue de la *Proposition* 3 :

PROPOSITION 3^c. — *Si p est supérieur ou égal à 3, et si $\alpha = \frac{e}{p-1}$ est entier, si $\overline{R} = R/\pi^\alpha \cdot R$, tout p-groupe fini* **constant** *et* **connexe** *sur $\overline{R}$ se relève sur R.*

En effet, sous ces conditions, $\frac{e}{p-1} = \alpha \leq \frac{e}{2}$.

COROLLAIRE 2^c. — *Quand $p = 3$,* **tout** *p-groupe fini sur k se relève en un p-groupe fini sur R, dès que e est* **pair** *(Ex : $e = 2 = p-1$).*

En effet si $\mathcal{G}$ est un p-groupe fini sur k, $\mathcal{G}$ est isomorphe à un produit $\mathcal{G}^c \times \mathcal{G}^{et}$ avec $\mathcal{G}^c$ connexe et $\mathcal{G}^{et}$ étale; ce dernier se relève de façon unique en $\widetilde{\mathcal{G}}^{et}$ étale sur R.

Comme $\frac{e}{p-1} = \frac{e}{2}$, on peut appliquer la *Proposition* 3, avec $\alpha = \frac{e}{2}$ au groupe $\mathcal{G}^c$, qui se relève ainsi en $\widetilde{\mathcal{G}}^c$ (de façon non unique). On a donc trouvé un groupe $\widetilde{\mathcal{G}} = \widetilde{\mathcal{G}}^c \times \widetilde{\mathcal{G}}^{et}$ relevant $\mathcal{G}$.

COROLLAIRE 3^c. — *Si $\alpha = \frac{e}{p-1}$ est entier, soit $\overline{R} = R/\pi^\alpha \cdot R$ et soit $\widetilde{\mathcal{G}}$ un p-groupe fini connexe sur R. Soit $\mathcal{G} = \widetilde{\mathcal{G}} \underset{R}{\times} \overline{R}$.*

Si $\operatorname{Ker} p_{\mathcal{G}}$ *est plat sur $\overline{R}$, il en est de même de* $\operatorname{Ker} p_{\widetilde{\mathcal{G}}}$ *sur R, (ainsi que de* $\operatorname{Im} p_{\widetilde{\mathcal{G}}}$, $\operatorname{Coker} p_{\widetilde{\mathcal{G}}}$).

Si $e = p-1$, ces conclusions sont donc vraies pour **tout** *p-groupe fini connexe sur R.*

Appendice II : Classification des p-groupes finis sur un anneau local

On se propose d'étendre le *Théorème* 1 (Première Partie, I-B-3-a) à d'autres anneaux locaux que ceux envisagés précédemment.

Soit R un anneau local, a un élément de l'idéal maximal de R, $\overline{R} = R/aR$. Pour tout R-module M, on pose : $\overline{M} = \overline{R} \underset{R}{\otimes} M = M/aM$. Soit p un nombre premier.

1) On suppose p nilpotent dans $\overline{R}$ et que l'idéal $a \cdot R$ est muni de puissances divisées telles que, sur l'idéal aR/a^nR de R/a^nR, les puissances divisées induites par celles de aR soient nilpotentes pour tout entier n positif. On suppose aussi que R est séparé et complet pour la topologie aR-adique.

Si G est un groupe p-divisible sur $\overline{R}$, $\mathbb{D}G$ son cristal sur le site NCRIS $(\operatorname{Spec} \overline{R}/ \operatorname{Spec} \mathbb{Z}_p)$ et $\mathbb{D}G_{R_n}$ la valeur de ce cristal sur l'objet $(\operatorname{Spec} R/_{a^nR} \hookrightarrow \operatorname{Spec} R)$ de ce site, et $\mathbb{D}G_R = \varprojlim_n \mathbb{D}G_{R_n}$, alors $\mathbb{D}G_R$ est un R-module libre de rang fini sur R. Le théorème de GROTHENDIECK classifiant les relèvements de G sur R en termes de filtrations admissibles de $\mathbb{D}G_R$ est encore vrai dans ce cas.

2) On veut pouvoir étudier le cas où R **n'est pas noethérien**; la théorie développée par BADRA est encore vraie, à condition de prouver le *Lemme* suivant ;dans le cas où R est noethérien, il est prouvé en ([1], II, 3.1 et 3.3) :

LEMME 1. — *Soit R un anneau local, I un idéal de R, tel que R soit séparé pour la topologie I-adique, et p nilpotent sur $\overline{R} = R/I$. Soit $\widetilde{u} : \widetilde{G} \longrightarrow \widetilde{H}$ un morphisme de groupes p-divisibles sur R, et soit $u = \widetilde{u} \underset{R}{\times} \overline{R} : G \longrightarrow H$.*

Alors si u est une isogénie, $\widetilde{u}$ est une isogénie (i.e. un épimorphisme f.p.p.f. à noyau fini et plat).

Voir la démonstration au § 4 ci-dessous.

De même que dans le cas de valuation discrète, pour énoncer le *Théorème* de BADRA et afin de pouvoir passer ensuite aux systèmes de HONDA, nous utiliserons une catégorie de complexes de modules filtrés plus particuliers que dans [1]. $LF(R)$ et $LF(R,\overline{R})$ sont les catégories de modules filtrés définis de la même façon qu'en (Première Partie, I-A-1)). On suppose que R est **sans p-torsion** (donc **sans a-torsion**). $CF^1(R)$ est la catégorie des complexes : $(M_1,\Omega_1) \xrightarrow{d} (M_0,\Omega_0)$ d'objets de $LF(R)$ tels que : $rg_R M_0 = rg_R M_1$, $rg_R\Omega_0 = rg_R\Omega_1$, d est injectif, vérifiant de plus la condition : $\operatorname{Coker}(M_1 \overset{d}{\hookrightarrow} M_0)$ et $\operatorname{Coker}(\Omega_1 \overset{d}{\hookrightarrow} \Omega_0)$ sont de **a-torsion**. $CF^1(R,\overline{R})$ est la catégorie des complexes : $(M_1,\omega_1) \xrightarrow{d} (M_0,\omega_0)$ d'objets de $LF(R,\overline{R})$ tels que : $rg_R M_0 = rg_R M_1$, $rg_{\overline{R}}\omega_0 = rg_{\overline{R}}\omega_1$, $d : M_1 \longrightarrow M_0$ est injectif, et $\operatorname{Coker}(M_1 \overset{d}{\hookrightarrow} M_0)$ est de a-torsion.

Les morphismes, les homotopies, les quasi isomorphismes sont définis de la façon habituelle. On en déduit des catégories $DF^1(R)$ et $DF^1(R,\overline{R})$ par localisation.

Le *Théorème* de BADRA se démontre avec ces catégories comme avec celles utilisées à l'origine par BADRA (pour lequel les complexes ne vérifient pas de conditions de rang, d'injectivité, ou de a-torsion), et il peut s'énoncer comme en (Première Partie, I-B-2),c-). Il peut être utile de remarquer que dans les démonstrations de son théorème, BADRA se sert implicitement du résultat suivant, vrai même si R n'est pas nœthérien, et dont la démonstration consiste en une utilisation répétée du *Lemme* de NAKAYAMA :

LEMME 2. — *Soit R un anneau local, I un idéal de R, contenu dans l'idéal maximal, M un R-module libre de rang fini, $\omega \hookrightarrow \overline{M}$ un sous-$\overline{R}$-module de $\overline{M}$ (où on a posé : $\overline{M} = M \underset{R}{\otimes} \overline{R}$ avec $\overline{R} = R/I$), supposé facteur direct de $\overline{M}$. Alors : si $\{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_r\}$ est une $\overline{R}$-base quelconque de ω, et si $\{e_1, \ldots, e_r\}$ est une famille quelconque d'éléments de M, relevant les $\overline{e}_i$, le sous-module Ω de M engendré par les e_i est un facteur direct de R (relevant ω), et admet pour base : $\{e_1, \ldots, e_r\}$.*

3) Les catégories $LH(R)$ et $LH(R,\overline{R})$ de systèmes **libres** de HONDA sont définies comme en (Première Partie, I-A-2)-a et b), en remplaçant π^α par a. Il est aisé de vérifier qu'on a encore les **équivalences** de catégories : $LF(R) \longrightarrow LH(R)$ et $LF(R,\overline{R}) \longrightarrow LH(R,\overline{R})$. (On utilise pour celà le critère : si M est de présentation finie sur R, pour que M soit libre sur R, il faut et il suffit que $M \underset{R}{\otimes} \overline{R}$ soit libre sur $\overline{R}$ et que $Tor_1^R(M,\overline{R}) = 0$).

a- On définit encore la catégorie $S(R,\overline{R})$ dont les objets sont les (M, M', v, f) où M, M' sont des R-modules, $M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{v} M$ des R-homomorphismes tels que $v \circ f = a_M$, $f \circ v = a_{M'}$; les flèches étant évidentes. A tout complexe $(M_1, \omega_1) \longrightarrow (M_0, \omega_0)$, objet de $CF^1(R,\overline{R})$, on associe d'abord un complexe d'objets de $LH(R,\overline{R})$: $(M_1, M_1', v_1) \longrightarrow (M_0, M_0', v_0)$ au moyen du foncteur $LF(R,\overline{R}) \longrightarrow LH(R,\overline{R})$; à ce complexe on associe son **conoyau** (M, M', v, f) qui est un objet de $S(R,\overline{R})$. Le foncteur $CF^1(R,\overline{R}) \longrightarrow S(R,\overline{R})$ se factorise en $CF^1(R,\overline{R}) \xrightarrow{can} DF^1(R,\overline{R}) \xrightarrow{\Gamma} S(R,\overline{R})$.

On appelle $FH(R,\overline{R})$ la sous-catégorie pleine de $S(R,\overline{R})$ dont les objets sont isomorphes à l'image par ce foncteur d'un objet de $CF^1(R,\overline{R})$ et on a une **équivalence de catégories** : $DF^1(R,\overline{R}) \longrightarrow FH(R,\overline{R})$. Remarquons que si (M, M', v, f) est un objet de $FH(R,\overline{R})$, alors M et M' sont des R-modules de présentation finie, de a-torsion et de dimension projective sur R inférieure ou égale à 1.

b- Soit (M, M', v, f) un objet de $FH(R,\overline{R})$. Un sous-module L de M' définit une **filtration admissible** de (M, M', v, f) s'il vérifie les conditions suivantes :

o) L est de présentation finie et L et $\frac{M'}{L}$ sont de dimension projective ≤ 1 sur R.

i) Le composé : $\overline{L} \longrightarrow \overline{M'} \longrightarrow \operatorname{Coker} f$ est un isomorphisme.

ii) Le composé : $\operatorname{Ker} a_L \hookrightarrow \operatorname{Ker} a_{M'} \xrightarrow{v} \operatorname{Ker} f$ est un isomorphisme.

Remarque : Dans le cas où R est de valuation discrète, ou si $\overline{R}$ est artinien, les conditions o) et ii) sont satisfaites dès que la condition i) l'est, ainsi que la condition plus faible que ii) qu'on avait alors imposée : $\operatorname{Ker} v \cap L = \{0\}$.

On appelle alors $FH(R)$ la catégorie dont les objets sont les (M, M', v, f, L), où

(M, M', v, f) est objet de $FH(R, \overline{R})$ et L une filtration **admissible** de cet objet, et dont les flèches sont les flèches de $FH(R, \overline{R})$ respectant les filtrations.

Alors, si $(M_1, \Omega_1) \longrightarrow (M_0, \Omega_0)$ est un objet de $CF^1(R)$, il lui correspond un complexe $(M_1, M_1', v_1, L_1) \longrightarrow (M_0, M_0', v_0, L_0)$ d'objets de $LH(R)$, dont le conoyau (M, M', v, f, L) est un objet de $FH(R)$ (on montre que $L = L_0/L_1$ a les propriétés voulues).

Il y a alors un foncteur $CF^1(R) \longrightarrow FH(R)$ qui se factorise en $CF^1(R) \longrightarrow DF^1(R) \xrightarrow{\Gamma} FH(R)$ et on montre encore que $DF^1(R) \longrightarrow FH(R)$ est une **équivalence** de catégories; (grâce à la condition ii) renforcée, on obtient la surjectivité essentielle).

On peut alors traduire le Théorème de BADRA en termes de systèmes de HONDA, et on a ainsi un énoncé analogue à celui de (Première Partie, I-B-3), *Théorème* 1).

c– Exemples : (L'exemple i) est **nœthérien**, au contraire des exemples ii) et iii)). On peut prendre pour (R, a) les couples suivants :

i) $R = W[[T]]$, $a = p$;

ii) $R = \mathcal{D}$, $a = p$ (l'anneau considéré en (Première Partie, II);

iii) Si R_0 est de valuation discrète et vérifie les conditions de la Première Partie, I, si K_0 est son corps des fractions, $\overline{K}_0$ une clôture algébrique de K, C le séparé complété de $\overline{K}_0$ et si $\overline{R}_0$ est la fermeture intégrale de R_0 dans $\overline{K}_0$, R le séparé complété de $\overline{R}_0$ on peut prendre (R, a), où a est un élément de l'idéal maximal de R tel que $1 \geq v_p(a) > \frac{1}{p-1}$; ($v_p$ = valuation de R, normalisée par $v_p(p) = 1$).

4) Démonstration du *Lemme* 1

a–

LEMME 3. — *Soit R un anneau local, I un idéal de R, tel que R soit séparé pour la topologie I-adique. Pour tout $n \geq 0$, on pose : $R_n = R/I^{n+1}$. Soit $\widetilde{u} : \widetilde{G} \longrightarrow \widetilde{H}$ un morphisme de groupes p-divisibles sur R. On suppose que pour tout $n \geq 0$, le morphisme déduit de u : $u_n : G_n = \widetilde{G} \underset{R}{\times} R_n \longrightarrow H_n = \widetilde{H} \underset{R}{\times} R_n$, est une isogénie; alors, $\widetilde{u}$ est une isogénie.*

Démonstration : Soit $\widetilde{K}$ le noyau de $\widetilde{u}$, et pour tout n, $K_n = \widetilde{K} \underset{R}{\times} R_n = \operatorname{Ker} u_n$. Pour tout groupe p-divisible G, on note $G(i)$ le noyau de la multiplication par p^i dans G. Sachant que chaque K_n est fini et plat, on veut prouver que $\widetilde{K}$ est fini et plat. Comme $K_0 = \widetilde{K} \underset{R}{\times} R/I$ est fini, plat et commutatif, il est de rang p^{i_0}, il est donc (Théorème de DELIGNE) annulé par p^{i_0}, autrement dit : $K_0 \hookrightarrow G_0(i_0)$. De même K_n est fini et plat; son rang sur R_n et aussi p^{i_0}; donc $K_n \subset G_n(i_0)$. Autrement dit, pour tout n, $\operatorname{Ker} u_n = \operatorname{Ker} G_n(i) \xrightarrow{u_n} G_n(i)$, pour tout $i \geq i_0$. Posons : $\widetilde{K}(i) = \operatorname{Ker}(\widetilde{G}(i) \xrightarrow{\widetilde{u}} \widetilde{H}(i))$; alors : $\widetilde{K} = \varinjlim_{i \geq i_0} \widetilde{K}(i)$.

Montrons d'abord que, pour $i \geq i_0$, $\widetilde{K}(i)$ est fini et plat. Il est fini car son algèbre affine est quotient de celle de $\widetilde{G}(i)$ qui est finie par définition des groupes p-divisibles. D'autre part, pour tout n, $K_n(i)$ est fini et plat, c'est-à-dire, R étant local, fini et libre (c'est le critère de NAKAYAMA si l'algèbre de $K_n(i)$ est de présentation finie; mais cette dernière propriété est satisfaite, d'après un résultat de RAYNAUD et GRUSON ([12] Th. 3.4.1 et Cor. 3.4.2)). Il existe donc un R_0-isomorphisme $\varphi_0 : R_0^\alpha \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(K_0(i)) = \mathcal{O}(\widetilde{K}(i))_0$. On relève φ_0 de façon quelconque en un R-morphisme $\varphi : R^\alpha \longrightarrow \mathcal{O}(\widetilde{K}(i))$ qui est surjectif, en appliquant le Lemme de NAKAYAMA à son conoyau. La réduction de φ sur R_n, $\varphi_n : R_n^\alpha \twoheadrightarrow \mathcal{O}(\widetilde{K}(i))_n$ est un isomorphisme, puisque par hypothèse $K(i)_n = K_n$, libre de rang α sur R_n. Le noyau de φ est donc contenu dans $(I^{n+1})^\alpha$ pour tout n; R étant séparé, ce noyau est nul, φ est un isomorphisme c'est-à-dire : $\widetilde{K}(i)$ est fini libre pour tout $i \geq i_0$.

Enfin, $\widetilde{K} = \varinjlim_{i \geq i_0} \widetilde{K}(i)$ et pour tout n, $K_n = K_n(i_0)$, c'est-à-dire, l'inclusion $K_n(i_0) \hookrightarrow K_n(i)$ est un isomorphisme pour $i \geq i_0$; on en déduit aisément que l'inclusion $\widetilde{K}(i_0) \hookrightarrow \widetilde{K}(i)$ est un isomorphisme, les groupes étant finis libres; donc $\widetilde{K} = \widetilde{K}(i_0)$ est fini et libre.

Comme u_0 est un isogénie, G_0 et H_0 sont de même hauteur; $\widetilde{G}$ et $\widetilde{H}$ le sont donc aussi; le noyau de $\widetilde{u}$ étant fini est libre, $\widetilde{G}/\widetilde{K}$ est un groupe p-divisible, de même hauteur que $\widetilde{H}$ qui le contient; il est donc égal à $\widetilde{H}$; ou encore : $\widetilde{G} \xrightarrow{\widetilde{u}} \widetilde{H}$ est un épimorphisme (cf. [1], Ch. II, Prop. 1.2); $\widetilde{u}$ est donc une isogénie.

Il reste à prouver que si $\widetilde{u}$ vérifie les hypothèses du *Lemme* 1, alors il vérifie celles du *Lemme* 3.

Pour celà, on peut supposer, d'abord que $I^2 = 0$, puis que $p \cdot I = 0$, en remplaçant I par pI, $p^2 \cdot I, \ldots, p^\alpha \cdot I = 0$, pour α assez grand, p étant nilpotent sur R/I, donc sur R. Alors, d'après l'argument de MESSING ([5] Ch. V, Lemme 2.3.4), il existe sur l'idéal I des puissances divisées nilpotentes. On pose $\overline{R} = R/I$. Nous reprenons en b- ci-dessous l'argumentation de [1] qui permet de conclure si R est nœthérien. En c- nous la complétons dans le cas général.

b– Il existe une isogénie $v : H \longrightarrow G$ telle que $u \circ v = p^n \cdot id_H$ et $v \circ u = p^n \cdot id_G$ pour un certain entier n. D'où un morphisme de R-modules libres : $\mathbb{D}G_R \xrightarrow{\mathbb{D}v_R} \mathbb{D}H_R$. Comme p^m est nul sur $\overline{R}$ pour m assez grand, quitte à changer n et v, on peut supposer que $\mathbb{D}v_R$ respecte les filtrations $\Omega_{\widetilde{G}} \hookrightarrow \mathbb{D}G_R$ et $\Omega_{\widetilde{H}} \hookrightarrow \mathbb{D}H_R$. D'après le *Théorème* de GROTHENDIECK, il existe un morphisme $\widetilde{v} : \widetilde{H} \longrightarrow \widetilde{G}$ relevant v. Comme $v \circ u = p^n$, et $u \circ v = p^n$, on a aussi $\widetilde{v} \circ \widetilde{u} = p^n \cdot id_{\widetilde{G}}$ et $\widetilde{u} \circ \widetilde{v} = p^n \cdot id_{\widetilde{H}}$.

Il en résulte que $\widetilde{v}$ et $\widetilde{u}$ sont des épimorphismes f.p.p.f., dont les noyaux sont finis et annulés par p^n. Il reste à prouver que ces noyaux sont plats sur R. Soit $\widetilde{K} = \operatorname{Ker} \widetilde{u}$. On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \widetilde{G}(n) \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{u}"'] & \widetilde{G} \arrow[r, "p^n"] \arrow[d, "\widetilde{u}"'] & \widetilde{G} \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{u}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \widetilde{H}(n) \arrow[r] & \widetilde{H} \arrow[r, "p^n"] & \widetilde{H} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dont les lignes sont exactes.

(On a posé : $G(i) = \operatorname{Ker} p_G^i$ pour tout entier i et tout groupe p-divisible G). La suite exacte du serpent associée à ce diagramme est :

$$0 \longrightarrow \widetilde{K} \xrightarrow{\sim} \widetilde{K} \xrightarrow{p^n=0} \widetilde{K} \longrightarrow (\operatorname{Coker}(\widetilde{G}(n) \xrightarrow{\widetilde{u}} \widetilde{H}(n)) \longrightarrow 0.$$

Donc le faisceau f.p.p.f. $\operatorname{Coker}(\widetilde{G}(n) \xrightarrow{\widetilde{u}} \widetilde{H}(n))$ est isomorphe à $\widetilde{K}$. On a donc une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \widetilde{K} \longrightarrow \widetilde{G}(n) \longrightarrow \widetilde{H}(n) \longrightarrow \widetilde{K} \longrightarrow 0,$$

et en particulier un épimorphisme f.p.p.f. $\widetilde{H}(n) \longrightarrow \widetilde{K}$. $\widetilde{H}(n)$ est fini (localement) libre sur R, et $\widetilde{K}$ est fini.

Par hypothèse : $K = \widetilde{K} \underset{R}{\times} \overline{R}$ est fini localement libre sur $\overline{R}$; le morphisme $H(n) \longrightarrow K$ est donc fini localement libre; par conséquent, $\widetilde{H}(n) \underset{R}{\times} k \longrightarrow \widetilde{K} \underset{R}{\times} k$ est fini localement libre. Si R est nœthérien, ou si $\widetilde{K}$ est de présentation finie sur R, on en déduit, par le critère de platitude par fibres, que $\widetilde{K}$ est libre sur R.

c– Dans le cas général

Soit A (resp. B) la R-algèbre affine du groupe $\widetilde{K}$ (resp. $\widetilde{H}(n)$) et $A \longrightarrow B$ le R-morphisme correspondant au morphisme de R-groupes : $\widetilde{H}(n) \longrightarrow \widetilde{K}$. Soit $\overline{A} \longrightarrow \overline{B}$ le $\overline{R}$-morphisme qui se déduit de $A \longrightarrow B$ par le changement de base : $R \longrightarrow \overline{R}$. Par hypothèse, $\overline{A} \longrightarrow \overline{B}$ est fini localement libre. Montrons que $\overline{A}$ est facteur direct du $\overline{A}$-module $\overline{B}$, ou encore, que le $\overline{A}$-module $\overline{B}/\overline{A}$ est fini et localement libre; pour celà, on peut supposer que $\overline{A}$ est un anneau **local** d'idéal maximal $\mathcal{M}$; $\overline{B}/\overline{A}$ est un $\overline{R}$-module de présentation finie; d'après (Bourbaki, Algèbre Commutative, ch. II, § 3, n° 2, *Corollaire* 2), il suffit de prouver que : $Tor_1^{\overline{A}}(\overline{B}/_{\overline{A}}, \overline{A}/_{\mathcal{M}}) = 0$. Or, de la suite exacte de $\overline{A}$-modules $0 \longrightarrow \overline{A} \longrightarrow \overline{B} \longrightarrow \overline{B}/\overline{A} \longrightarrow 0$, on déduit la suite exacte :

$$0 = Tor_1^{\overline{A}}(\overline{B}, \overline{A}/_{\mathcal{M}}) \to Tor_1^{\overline{A}}(\overline{B}/\overline{A}, \overline{A}/_{\mathcal{M}}) \to \overline{A}/_{\mathcal{M}} \to \overline{B}/_{\mathcal{M}\overline{B}} \to \overline{B}/_{\overline{A}} \underset{\overline{A}}{\otimes} \overline{A}/_{\mathcal{M}} \to 0.$$

Comme $\overline{A}/\mathcal{M}$ est un corps, $\overline{A}/\mathcal{M} \longrightarrow \overline{B}/_{\mathcal{M}\overline{B}}$ est injectif; donc $Tor_1^{\overline{A}}(\overline{B}/\overline{A}, \overline{A}/\mathcal{M})$ est bien nul; $\overline{A}$ est facteur direct de $\overline{B}$ comme $\overline{A}$-module, et a fortiori, comme $\overline{R}$-module.

Si $\{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_r\}$ est une base du $\overline{R}$-module $\overline{A}$ et qu'on relève chaque $\overline{e}_i$ en un élément e_i de A, on est dans la situation du *Lemme* 3 ci-dessous, conséquence comme le *Lemme* 2 du Lemme de NAKAYAMA :

LEMME 4. — *Soit $N \xrightarrow{u} M$ un R-morphisme; on suppose M libre de type fini sur R, et N de type fini. On suppose que $\overline{u} : \overline{N} \longrightarrow \overline{M}$ déduit de u par le changement de base $R \longrightarrow \overline{R}$, est injectif et identifie $\overline{N}$ à un facteur direct de $\overline{M}$. Alors, si $\{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_r\}$ est une base de $\overline{N}$ et si e_i relève $\overline{e}_i$ dans N pour tout $i = 1, \ldots, r$, on a : u est injectif, et identifie N à un facteur direct de M, de base $\{e_1, \ldots, e_r\}$.*

Par conséquent : $A \longrightarrow B$ est injectif, A est facteur direct de B comme R-module et admet pour base $\{e_1, \ldots, e_r\}$. $\widetilde{K}$ est donc libre sur R; $\widetilde{G} \longrightarrow \widetilde{H}$ est donc bien une isogénie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Badra. — *Déformations des p-groupes finis commutatifs sur un corps parfait et filtration de Hodge*, Thèse de $3^{\text{ème}}$ cycle, Université de Rennes, 1979.

[2] A. Badra. — *Déformations des p-groupes finis commutatifs sur un corps parfait et filtration de Hodge*, C.R.A.S. t. 291, 1980.

[3] J.-M. Fontaine. — *Groupes p-divisibles sur les corps locaux*, Astérisque n° 47-78, 1977.

[3bis] J.-M. Fontaine. — *Sur la construction du module de Dieudonné d'un groupe formel*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 280, 1975.

[4] P. Berthelot, L. Breen, W. Messing. — *Théorie de Dieudonné cirstalline II*, Lecture Notes N° 930, 1982.

[4bis] P. Berthelot, W. Messing. — *Théorie de Dieudonné cristalline III : Théorèmes d'équivalence et de pleine fidélité*, Volume en l'honneur de Grothendieck- Birkhaüser, 1990-91.

[5] W. Messing. — *The crystals associated to Barsotti-Tate groups, with applications to abelian schemes*, Lecture Notes in Math., n° 264, Springer Verlag, 1972.

[6] L. Szpiro. — *Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : La conjecture de Mordell*, Astérisque n° 127, 1987.

[7] M. Raynaud. — *p-torsion du schéma de Picard*, Astérisque n° 64, 1979.

[8] J.-M. Fontaine. — *Groupes finis commutatifs sur les vecteurs de Witt*. — C.R. Acad. Sc. Paris, 280, 1975.

[9] F. Oort et J. Tate. — *Groups Schemes of prime order*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., $4^{\text{ème}}$ Série, t. 3, 1970.

[9bis] F. Oort. — *Embeddings of finite group schemes into abelian schemes*, Seminar in algebraic geometry, N.S.F., Bowdoin College, Ed. by J. Lubin, 1967.

[10] F. Oort, D. Mumford. — *Deformations and liftings of finite commutative groups schemes*, Inv. Math. 5, 1968.

[11] M. Raynaud. — *Schémas en groupes de type* $(p,\ldots,p)$, Bulletin de la S.M.F., 102, 1974.

[12] M. Raynaud et L. Gruson. — *Critère de platitude et de projectivité; Techniques de platification d'un module*, Inv. Math. 13, 1971.

Jean ROUBAUD
URA D0752 du C.N.R.S.
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
Université de Paris-Sud
91405 ORSAY CEDEX