

PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

N° 77-76

SEMINAIRE

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES NON LINEAIRES

SÉRIE D'EXPOSÉS SUR : BIFURCATION ET APPLICATIONS FREDHOLM

Université de Paris-Sud
Département de Mathématique

Bât. 425

91405 **ORSAY** France

PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

N° 77-76

SEMINAIRE

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES NON LINEAIRES

SÉRIE D'EXPOSÉS SUR : BIFURCATION ET APPLICATIONS FREDHOLM

Université de Paris-Sud
Département de Mathématique

Bât. 425

91405 **ORSAY** France

On a rassemblé dans ce volume le texte d'une série d'exposés faits au printemps 1976 dans le cadre du Séminaire "EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES NON LINEAIRES" dirigé par R. TEMAM et L. TARTAR, ainsi que l'exposé de la deuxième thèse de J. MOSSINO.

Ces exposés sont :

- | | | | |
|--------|---------------|---|---|
| n° 1 - | J.C. SAUT | : | Opérateurs et applications Fredholm. |
| n° 2 - | A. LICHNEWSKY | : | Méthode de Lyapunov-Schmidt. |
| n° 3 - | A. LICHNEWSKY | : | Quelques applications du degré topologique à des équations elliptiques non linéaires. |
| n° 4 - | J.C. SAUT | : | Valeurs et points singuliers d'une application Fredholm de type $(1, 1)$. |
| n° 5 - | A. LICHNEWSKY | : | Une démonstration du lemme de Morse. |
| n° 6 - | B. SCHEURER | : | Bifurcation pour des valeurs propres doubles. |
| n° 7 - | J. MOSSINO | : | Le déploiement des singularités. |
| n° 8 - | B. SCHEURER | : | Applications du théorème de Malgrange aux problèmes de bifurcation multi-paramètres. |
| n° 9 - | B. SCHEURER | : | Bifurcation pour des opérateurs de Fredholm d'indice 0. |

Appendice.

Exposé n° 1

OPERATEURS ET APPLICATIONS FREDHOLM

par

J.C. SAUT

--:-

§ 1. GENERALITES.

Ce paragraphe s'inspire largement de Palais [8].

DEFINITION 1.1. Soient X, Y deux Banach ; $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ ⁽¹⁾ est appelé opérateur Fredholm si

(i) $\ker T$ est de dimension finie.

(ii) $\text{Coker } T = Y/T(X)$ est de dimension finie.

On dira que T est Fredholm de type (p, q) si $\ker T$ (resp. $\text{Coker } T$) est p -dimensionnel (resp. q -dimensionnel).

Nous noterons $F(X, Y)$ l'ensemble des opérateurs Fredholm de X dans Y .

(1) Espace des opérateurs linéaires continus de X dans Y .

DEFINITION 1.2. On définit la fonction indice, $\text{ind} : F(X, Y) \rightarrow \mathbb{Z}$ par

$$\text{ind}(T) = \dim \ker T - \dim \text{Coker } T.$$

THEOREME 1.3. Soient X, Y deux Banach et $T \in F(X, Y)$. Alors $T(X)$ est fermé dans Y , $T^* \in F(Y^*, X^*)$ (1), et $\text{Ind}(T^*) = -\text{Ind } T$.

Preuve. On a la factorisation canonique :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ & \searrow h & \nearrow S \\ & & X/\ker T \end{array} \quad \text{où } S \text{ est injective.}$$

On peut supposer T injective car S est Fredholm, injective, et

$S(X/\ker T) = T(X)$. Soit W un supplémentaire algébrique de $T(X)$ dans Y .

Alors $\dim W < +\infty$ puisque T est de codimension finie et W est un Banach.

Soit $\bar{T} : X \oplus W \rightarrow Y$, $\bar{T}(x, w) = Tx + w$. \bar{T} est linéaire, continue et bijective, donc un isomorphisme topologique d'après le théorème de Banach (2).

Puisque X est fermé dans $X \oplus W$, $T(X) = \bar{T}(X)$ est fermé dans Y .

Les autres assertions résultent du fait bien connu que si $T \in \mathcal{L}(X, Y)$

a une image fermée, alors $\ker T^* = (\text{Coker } T)^*$ et $(\ker T)^* = \text{Coker } T^*$. ■

THEOREME 1.4. Soient X, Y deux Banach, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Supposons qu'il existe $S, S' \in \mathcal{L}(Y, X)$ tels que $ST - \text{Id}_X \in K(X, X)$ (3) et

$TS' - \text{Id}_Y \in K(Y, Y)$. Alors $T \in F(X, Y)$.

Réciproquement, si $T \in F(X, Y)$, il existe $S \in \mathcal{L}(Y, X)$ tel que $ST - \text{Id}_X$

(1) X^* = dual de X , T^* = adjoint de T .

(2) Soient X, Y Banach, et $T : X \rightarrow Y$ linéaire bijective continue. Alors T est un isomorphisme.

(3) $K(X, Y)$ désignera l'espace des opérateurs (linéaires) compacts $X \rightarrow Y$.

et $TS - \text{Id}_Y$ soient de rang fini (et donc compacts).

Autrement dit, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ est Fredholm si et seulement si T est inversible modulo les opérateurs compacts.

Preuve. On a le

LEMME 1.5. Soit X un Banach, $K \in K(X, X)$ et $T = I - K$. Alors $T \in F(X, X)$.

Démonstration du lemme 1.5.

Soit $V = \ker T$ et $B_V =$ boule unité de V . Alors $K(B_V) = B_V$; donc B_V est relativement compacte, donc V est de dimension finie, donc admet un supplémentaire topologique : $X = V \oplus W$. Il suffit alors de montrer que $(T|_W)^{-1}$ est borné (car alors $T(X)$ est un Banach puisque homéomorphe à W , et est donc fermé dans Y).

Supposons le contraire ; il existerait alors une suite $w_n \in W$, $\|w_n\| = 1$, $Tw_n \rightarrow 0$; on peut supposer que $K(w_n) \rightarrow x \in X$. Alors $w_n - K(w_n) = Tw_n \rightarrow 0$, donc $w_n \rightarrow x$, et $x \in W$. Mais $Tx = \lim Tw_n = 0$, donc $x \in V = \ker T$, i.e. $x \in V \cap W = \{0\}$; absurde puisque $\|x\| = \lim \|w_n\| = 1$.

Enfin $(X/T(X))^* = \ker T^*$ (puisque $T(X)$ est fermé) = $\ker(I - K^*)$.

Mais $K^* \in K(X^*, X^*)$ et d'après ci-dessus, $\dim(X/T(X))^* < +\infty$, donc

$\dim(X/T(X)) < +\infty$. ■

Preuve du théorème 1.4. On a $\ker T \subset \ker ST$ et $\dim(\ker ST) < +\infty$ d'après le lemme 1.5. De même, $TS'(Y)$ est un sous-espace fermé et de codimension finie de X , et puisque $T(X) \supset TS'(Y)$, $T(X)$ est fermé et de codimension finie dans

Y (on a utilisé : X Banach, $S \subset T$ sous-espaces, S fermé dans X et de codimension finie dans $X \Rightarrow T$ est fermé et de codimension finie).

Réciproquement : Si $T \in F(X, Y)$, il existe 2 supplémentaires topologiques V et W de $\ker T$ et $T(X)$ respectivement.

Alors $T|_V : V \rightarrow T(X)$ est une bijection et $(T|_V)^{-1}$ est continue d'après le théorème de Banach. Prolongeons $(T|_V)^{-1}$ en $S : Y \rightarrow X$ continue, par 0 sur W .

$$\text{Alors } (ST - \text{Id}_X)(X) = -\text{Proj}_{\ker T}(X), \quad (TS - \text{Id}_Y)(Y) = -\text{Proj}_W(Y). \quad \blacksquare$$

COROLLAIRE 1.6. Si $T \in F(X, Y)$ et $K \in K(X, Y)$, alors $T + K \in F(X, Y)$.

Preuve. D'après le théorème 1.4, il existe $S \in \mathcal{L}(Y, X)$ tel que $ST - \text{Id}_X \in K(X, Y)$ et $TS - \text{Id}_Y \in K(Y, X)$. Alors $S(T+K) - \text{Id}_X = (ST - \text{Id}_X) + SK$ et $(T+K)S - \text{Id}_Y = (TS - \text{Id}_Y) + KS$ sont compacts (composés d'un opérateur compact et d'un opérateur borné). ■

COROLLAIRE 1.7. $F(X, Y)$ est ouvert dans $\mathcal{L}(X, Y)$.

Preuve. Soit $T \in F(X, Y)$. Choisissons d'après le théorème 1.4, $S \in \mathcal{L}(Y, X)$ tel que $ST - \text{Id}_X = K \in K(X, X)$ et $TS - \text{Id}_Y = K' \in K(Y, Y)$. On va montrer que si $T' \in \mathcal{L}(X, Y)$ et si $\|T - T'\|_\infty < \|S\|_\infty^{-1}$ alors $T' \in F(X, Y)$.

Soit $A = T - T'$. Alors $\|SA\|_\infty < 1$; $\text{Id}_X - SA$ est donc inversible dans $\mathcal{L}(X, X)$. Posons $B = (\text{Id}_X - SA)^{-1}$. Alors $ST' = ST - SA = K + (\text{Id}_X - SA)$ et, posant $S' = BS$, $S'T' = BST' = BK + \text{Id}_X$, ou $S'T' - \text{Id}_X = BK$. De même, $\text{Id}_Y - AS$ a un inverse C dans $\mathcal{L}(Y, Y)$ et si $S'' = SC$, alors $T'S = TS - AS = K' + (\text{Id}_Y - AS)$, de sorte que $T'S'' = T'SC = K'C + \text{Id}_Y$, soit $T'S'' - \text{Id}_Y = K'C$. Mais $BK \in K(X, X)$,

$K' \subset K(Y, Y)$ (composé d'un compact et d'un borné), donc $T' \in F(X, Y)$ par le théorème 1.4. ■

COROLLAIRE 1.8. Soient X, Y, Z des Banach, $T_1 \in F(X, Y)$, $T_2 \in F(Y, Z)$.

Alors $T = T_2 T_1 \in F(X, Z)$.

Preuve. On choisit d'après le théorème 1.4, $S_1 \in \mathcal{L}(Y, X)$, $S_2 \in \mathcal{L}(Z, Y)$ tels que

$K_1 = S_1 T_1 - \text{Id}_X$, $K_2 = T_1 S_1 - \text{Id}_Y$, $K_3 = S_2 T_2 - \text{Id}_Y$, $K_4 = T_2 S_2 - \text{Id}_Z$ soient compacts.

Posons $S = S_1 S_2$. Alors $ST = S_1 (S_2 T_2) T_1 = S_1 (K_3 + \text{Id}_Y) T_1 = S_1 K_3 T_1 + S_1 T_1 =$

$= S_1 K_3 T_1 + K_1 + \text{Id}_X$ soit $ST - \text{Id}_X = S_1 K_3 T_1 + K_1$. Mais $S_1 K_3 T_1 + K_1$ est compact,

de même que $TS - \text{Id}_X = T_2 K_2 S_2 + K_4$, d'où le résultat. ■

THEOREME 1.8. Soient X, Y, Z des Banach ; $T \in F(X, Y)$, $S \in F(Y, X)$.

Alors $\text{Ind}(ST) = \text{Ind } S + \text{Ind } T$.

Preuve. $ST \in F(X, Z)$ d'après le corollaire 1.8. On a la suite exacte

$$0 \rightarrow \ker T \rightarrow \ker ST \xrightarrow{T} \ker S \cap \text{Im } T \rightarrow 0$$

d'où $\dim \ker ST = \dim \ker T + \dim(\ker S \cap \text{Im } T)$ ce qui s'écrit :

$$(1.1) \quad \dim \ker ST = \dim \ker T + \dim \ker S - \dim(\ker S / \ker S \cap \text{Im } T).$$

De la suite exacte $0 \rightarrow \text{Im } S / \text{Im } ST \rightarrow Z / \text{Im } ST \rightarrow Z / \text{Im } S \rightarrow 0$ on tire

$$(1.2) \quad \dim \text{Coker } ST = \dim \text{Coker } S + \dim(\text{Im } S / \text{Im } ST).$$

De la suite exacte $0 \rightarrow \text{Im } T + \ker S \rightarrow Y \xrightarrow{\tilde{S}} \text{Im } S / \text{Im } ST \rightarrow 0$, on déduit

$\text{Im } S / \text{Im } ST \cong Y / (\text{Im } T + \ker S) \cong (Y / \text{Im } T) / ((\text{Im } T + \ker S) / \text{Im } T)$ d'où, avec (1.2)

$$(1.3) \quad \dim \text{Coker } ST = \dim \text{Coker } S + \dim \text{Coker } T - \dim((\text{Im } T + \ker S) / \text{Im } T)$$

et d'après (1.1), (1.3) il vient :

$$(1.4) \quad \text{Ind } ST = \text{Ind } S + \text{Ind } T + \dim((\text{Im } T + \ker S)/\text{Im } T) - \dim(\ker S/\ker S \cap \text{Im } T).$$

Mais la suite $0 \rightarrow \ker S \cap \text{Im } T \rightarrow \ker S \rightarrow (\text{Im } T + \ker S)/\text{Im } T \rightarrow 0$ est exacte, de sorte que $\dim \ker S/\ker S \cap \text{Im } T = \dim(\text{Im } T + \ker S/\text{Im } T)$, ce qui achève la preuve avec (1.4). ■

THEOREME 1.9. Soient X, Y des Banach. L'application $\text{ind} : F(X, Y) \rightarrow \mathbb{Z}$ est continue, donc constante sur chaque composante connexe de $F(X, Y)$.

Preuve. Soit $T \in F(X, Y)$. Il suffit de montrer que $\text{Ind } S = \text{Ind } T$ pour S assez près de T . Soient V et W deux supplémentaires topologiques de $\ker T$, $T(X)$ respectivement : $X = \ker T \oplus V$, $Y = T(X) \oplus W$.

Soit $S \in \mathcal{L}(X, Y)$. Considérons $\varphi : V \oplus W \rightarrow Y$ donnée par $\varphi(v, w) = Sv + w$. Si $S = T$, φ est une bijection et donc un homéomorphisme de $V \oplus W$ sur Y (d'après le théorème de Banach).

Mais $\text{Iso}(V \oplus W, Y)$ est ouvert dans $\mathcal{L}(V \oplus W, Y)$; donc $S \in \text{Iso}(V \oplus W, Y)$ pour $\|S - T\|_\infty$ assez petit. Un S vérifiant cette condition est un isomorphisme topologique de V sur un sous-espace fermé $S(V)$ de Y et $\text{Codim } S(V) = \dim W = \dim \text{Coker } T$. Puisque S est injectif sur V , on peut écrire $X = \ker S \oplus Z \oplus V$ et alors S est injectif sur $Z \oplus V$, donc $S(Z) \cap S(V) = \{0\}$ et $\dim S(Z) = \dim Z$. Alors $Y = W' \oplus S(Z) \oplus S(V)$ et $\dim \text{Coker } S = \dim W' = \text{Codim } S(V) - \dim S(Z) = \dim \text{Coker } T - \dim Z$. Par ailleurs, $\dim \ker S + \dim Z = \text{Codim } V = \dim \ker T$. Donc

$$\text{Ind } S = \dim \ker S - \dim \text{Coker } S = \dim \ker T - \dim \text{Coker } T = \text{ind } T. \quad \blacksquare$$

COROLLAIRE 1.10. Si $T \in F(X, Y)$ et $K \in K(X, Y)$, alors $\text{Ind}(T+K) = \text{Ind } T$.

Preuve. D'après le corollaire 1.6, on sait déjà que $T + K(X, Y) \subset F(X, Y)$. Puisque $K(X, Y)$ est un sous-espace de $\mathcal{L}(X, Y)$, il est connexe d'où le corollaire. ■

COROLLAIRE 1.11. Soient X, Y des Banach. L'application

$$F(X, Y) \rightarrow \mathbb{Z}$$

$T \mapsto \dim \ker T$ est semi-continue supérieurement.

Démonstration. Soit $T \in F(X, Y)$; il suffit de montrer que $\dim \ker S \leq \dim \ker T$ pour tout $S \in F(X, Y)$ assez près de T .

Or (cf. démonstration du théorème 1.9), on a $\dim \ker S + \dim Z = \dim \ker T$, d'où le résultat. ■

COROLLAIRE 1.12. Soient X, Y des Banach ; soit $F_q(X, Y)$ l'ensemble des opérateurs Fredholm d'indice q . Alors $F_q(X, Y)$ est ouvert dans $\mathcal{L}(E, F)$.

Preuve. Résulte immédiatement du corollaire 1.7 et du théorème 1.9. ■

§ 2. THEOREME DE SARD-SMALE: APPLICATIONS.

Le début de ce paragraphe s'inspire assez largement de Smale [9]. Nous allons d'abord étendre la notion d'opérateurs Fredholm à des applications entre variétés différentiables modelées sur des espaces de Banach (que l'on appellera simplement variétés différentiables) (cf. [2], [7]).

Nous supposerons nos variétés connexes et à base dénombrable d'ouverts (en particulier, elles seront des espaces de Lindelöf : de tout recouvrement ouvert, on peut extraire un sous-recouvrement dénombrable).

DEFINITION 2.1. Soient X, Y deux variétés différentiables et $f: X \rightarrow Y$ de classe C^1 . On dit que f est une application Fredholm si la dérivée $Df(x): T_x(X) \rightarrow T_{f(x)}(Y)$ est un opérateur Fredholm pour tout $x \in X$.

L'indice de f , noté $\text{ind } f$, est (connexité de X et continuité de $x \mapsto \text{ind } Df(x)$, cf. théorème 1.9) la valeur commune de $\text{ind } Df(x)$, $x \in X$.

DEFINITION 2.2. Soit $f: X \rightarrow Y$ de classe C^1 ; $x \in X$ est un point régulier de f si $Df(x): T_x(X) \rightarrow T_{f(x)}(Y)$ est surjectif, et est un point singulier, ou point critique, sinon. On notera C l'ensemble des points critiques de f .

Les images par f des points singuliers sont les valeurs singulières, ou valeurs critiques de f ; les autres points de Y sont appelés valeurs régulières.

Nous noterons R_f l'ensemble des valeurs régulières de f ; si $A \subset X$, on pose $R_f|A = Y - f(A \cap C)$. Si $U \subset X$ est ouvert, $R_f|U = R_f|U$.

Remarquons enfin que si $y \in Y$ et $y \notin f(X)$, alors $y \in R_f$.

LEMME 2.3. Si $f: X \rightarrow Y$ est une application Fredholm, l'ensemble C des points singuliers de f est fermé.

Preuve. Montrons que l'ensemble des points réguliers est ouvert; cela résulte immédiatement de ce que $\text{Ind } Df(x)$ est constant et du fait que $x \mapsto \dim \ker Df(x)$ est s.c.s. (cf. corollaire 1.11)

LEMME 2.4. Si $f: X \rightarrow Y$ est une application Fredholm propre (i.e. l'image réciproque de tout compact est compacte), alors l'ensemble R_f des valeurs régulières de f est ouvert.

Démonstration. Supposons R_f non ouvert ; il existe alors $y \in R_f$ et $z_n = f(x_n)$, x_n points singuliers de f , tels que $z_n \rightarrow y$. Soit $K = \{z_1, z_2, \dots, z_n, \dots, y\}$. Puisque f est propre $f^{-1}(K)$ est compact. Il existe alors une sous-suite $x_n \rightarrow x$, et x est un point singulier d'après le lemme 2.3. Donc $f(x_n) \rightarrow f(x)$ et $f(x) = y$, ce qui contredit le fait que y est une valeur régulière. ■

On rappelle le

THEOREME 2.5. (Sard). Soit U un ouvert de \mathbb{R}^p et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$, de classe C^s , $s > \text{Max}(p-q, 0)$. Alors l'ensemble des valeurs critiques de f est de mesure nulle.

Pour une démonstration, cf. par exemple [6]. ■

Rappelons enfin qu'une partie A d'un espace topologique X est rare si $\overset{\circ}{A} = \emptyset$, maigre si elle est réunion dénombrable d'ensembles rares.

Un espace topologique est un espace de Baire si aucun ouvert non vide n'est maigre, ou de manière équivalente, si toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense. Tout espace métrisable complet est de Baire.

Dans un espace de Baire X , un sous-ensemble A est dit résiduel s'il est intersection dénombrable d'ouverts denses (i.e. si son complémentaire est maigre).

Dans un espace de Baire, une propriété vraie sur un ensemble résiduel (i.e. sauf sur un ensemble maigre) sera dite générique, ou vraie presque partout. ■

Le théorème suivant généralise le théorème de Sard en dimension infinie :

THEOREME 2.6. (Smale). Soient X, Y deux variétés différentielles et $f : X \rightarrow Y$, de classe C^q et Fredholm avec $q > \text{Max}(\text{ind } f, 0)$.

Alors l'ensemble des valeurs régulières de f est un résiduel de Y .

Remarque 2.7. L'hypothèse f Fredholm est essentielle : il y a des exemples de fonctionnelle C^∞ sur un Hilbert réel et dont l'ensemble des valeurs critiques possède un point intérieur (Kupka). ■

Avant de montrer le théorème 2.6, donnons deux corollaires importants :

COROLLAIRE 2.8. Si $f : X \rightarrow Y$ est Fredholm d'indice < 0 , son image est d'intérieur vide.

Démonstration. En effet, un opérateur Fredholm d'indice < 0 ne peut être surjectif. Donc tous les x de X sont singuliers et l'ensemble des valeurs singulières de f coïncide avec $f(X)$. ■

COROLLAIRE 2.9. Soit $f : X \rightarrow Y$ de classe C^q , Fredholm avec $q > \text{Max}(\text{Ind } f, 0)$.

Alors pour presque tout $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ est soit vide, soit une sous-variété de X de dimension l'indice de f .

Démonstration. D'après le théorème 2.6, pour presque tout $y \in Y$, y est une valeur régulière. Supposons $f^{-1}(y) \neq \emptyset$. Alors pour tout $x \in f^{-1}(y)$, f est une submersion en x ($Df(x)$ est surjective car y est une valeur régulière et son noyau admet un supplémentaire topologique puisque f est Fredholm). On sait alors (cf. par exemple [2] p. 52 ou [7]) que $f^{-1}(y)$ est une sous-variété de X . Sa

dimension est celle du noyau de $Df(x)$, à savoir $\text{Ind } f$, puisque $Df(x)$ est surjective.

Démonstration du théorème 2.6. Il suffit de montrer que tout $x \in X$ possède un voisinage \mathcal{V} tel que $R_f|_{\mathcal{V}}$ soit ouvert et dense. En effet, puisque X est de Lindelöf, on pourra trouver un recouvrement ouvert dénombrable de X par de tels \mathcal{V}_n et le résultat suivra puisque $R_f = \bigcap_n R_f|_{\mathcal{V}_n}$.

Montrons d'abord le

LEMME 2.10. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application Fredholm. Alors f est localement propre, i.e. pour tout $x \in X$, il existe un voisinage \mathcal{N} de x tel que $f|_{\mathcal{N}}$ soit propre.

Preuve du lemme 2.10. La propriété étant locale, on se ramène au cas $f : U \rightarrow E'$, U ouvert de E , E et E' Banach.

Soit $x_0 \in U$; posons $A = Df(x_0) : E \rightarrow E'$. Puisque A est de Fredholm, $\ker A$ et $\text{Im } A$ admettent un supplémentaire topologique : $E = E_1 \oplus \ker A$, $E' = \text{Im } A \oplus F_2$. Soient P, Q (resp. P', Q') les projections correspondantes. Soit $x_0 = (p_0, q_0)$ $p_0 \in E_1$, $q_0 \in \ker A$. Soit $A_0 = P' \circ A|_{E_1} : E_1 \rightarrow \text{Im } A$. A_0 est clairement un isomorphisme linéaire d'après le théorème de Banach. D'après Lang ([7] Ch. I § 5) il existe des voisinages $V_1 \subset E_1$, $V_2 \subset \ker A$, $V \subset U$ de p_0 , q_0 , x_0 respectivement et un difféomorphisme, $h : V_1 \times V_2 \rightarrow V$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 V_1 \times V_2 & \xrightarrow{h} & V & \xrightarrow{f} & E' & \xrightarrow{P'} & \text{Im } A \\
 & & \searrow P & & & & \nearrow A_0 \\
 & & & & V_1 & &
 \end{array}$$

On voit alors en particulier, que $\forall q \in V_2$, $f|_{h(V_1 \times \{q\})}$ est un homéomorphisme sur son image.

Soit M un voisinage compact de q_0 contenu dans V_2 (c'est possible puisque $\dim \ker A < \infty$). Soit $N = h|_{V_2}(M)$.

Soit maintenant $f(x_i) = y_i \rightarrow y$, $x_i = (p_i, q_i) \in h|_{V_1}(V_1) \times N$. Il suffit évidemment de montrer que l'on peut extraire des x_i une sous-suite convergente. Puisque \bar{N} est compact, on peut supposer que $q_i \rightarrow h(q)$, $q \in M$ et puisque $f(p_i, q) \rightarrow y$, on peut supposer que $q_i = h(q)$.

Mais $f|_{h(V_1 \times \{q\})}$ est un homéomorphisme, donc $p_i \rightarrow p$, ce qui montre le lemme (avec $\eta = h|_{V_1}(V_1) \times N$, où $\bar{V}_1 \subset V_1$). ■

Nous allons maintenant montrer que tout $x \in X$ possède un voisinage ouvert V tel que $R_f|_V$ est dense.

On se ramène encore au cas $f : U \rightarrow E'$, $U \subset E$. Soit $x_0 \in U$. Nous reprenons les notations de la démonstration du lemme 2.10. Il est clair que $R_f|_V = R_{fh}|_{V_1 \times V_2}$. Par ailleurs, la commutativité du diagramme montre que

$$(fh)^{-1}(y_1, y_2) \subset A_0^{-1}(y_1) \times V_2.$$

On en déduit que (y_1, y_2) est une valeur régulière de $f \circ h$ si et seulement si y_2 est une valeur régulière de $\varphi_{x_1} : V_2 \rightarrow F_2$ où $x_1 = A_0^{-1}(y_1)$ et $\varphi_{x_1}(x_2) = Q' \circ f \circ h(x_1, x_2)$.

En vertu des hypothèses du théorème 2.6, φ_{x_1} vérifie les hypothèses du théorème de Sard. Donc $R_{fh}|_{V_1 \times V_2} \cap (\{y_1\} \times F_2)$ est dense dans $\{y_1\} \times F_2$, $\forall y_1 \in A_0(V_1)$; il en résulte que $R_{fh}|_{V_1 \times V_2}$ est dense dans E' .

Fin de la démonstration. D'après le lemme 2.10, on peut choisir un voisinage η de x_0 tel que $\overline{\eta} \subset V$ et que $f|_{\overline{\eta}}$ soit propre. D'après le lemme 2.3, l'ensemble C des points critiques de f est fermé dans X , donc $f(\overline{\eta} \cap C)$ est fermé puisqu'une application propre est fermée, Donc $R_f|_{\overline{\eta}} = E' \setminus f(\overline{\eta} \cap C)$ est ouvert.

Puisque $R_f|_V \subset R_f|_{\overline{\eta}}$, ce dernier ensemble est également dense, ce qui achève la preuve du théorème 2.6. ■

Application. Etude de l'ensemble des solutions stationnaires des équations de Navier-Stokes.

Nous nous proposons ici de retrouver un résultat de Temam-Foias ([4], [5]) sur la finitude générique des solutions stationnaires des équations de Navier-Stokes.

En vue d'autres applications éventuelles (systèmes elliptiques non-linéaires par exemple), nous donnons d'abord une conséquence du théorème de Sard-Smale.

THEOREME 2.11. Soient X un Banach et A un opérateur linéaire fermé, de domaine $D(A)$; soit B un opérateur non linéaire tel que $D(B) \supset D(A)$.

Pour $u \in D(A)$, posons $F(u) = Au + B(u)$. On suppose :

- (i) A est Fredholm d'indice nul de $D(A)$ dans X .⁽¹⁾
- (ii) B est C^1 et compact de $D(A)$ dans X
- (iii) F^{-1} transforme les bornés de X en bornés de $D(A)$.

Il existe alors un ouvert dense R_F de X tel que pour tout $y \in R_F$, $F^{-1}(y)$ soit vide ou fini.

(1) $D(A)$ est muni de la norme du graphe.

De plus, $\text{card } F^{-1}(y)$ est constant sur chaque composante connexe de R_F .

Preuve. B étant compact, sa dérivée est compacte de $D(A)$ dans X (cf. par ex. Krasnosel'skii [11]). D'après le corollaire 1.10, F est donc une application Fredholm $D(A) \longrightarrow X$, d'indice nul.

Soit R_F l'ensemble des valeurs régulières de F . D'après le théorème de Sard-Smale, R_F est dense dans X .

Pour montrer que R_F est ouvert, il suffit d'après le lemme 2.4, de prouver que F est propre.

Soit donc K un compact de X . Alors $F^{-1}(K)$ est fermé borné dans $D(A)$ d'après (iii). Puisque A est Fredholm d'indice nul, il s'écrit $A = A_0 + T_0$ où A_0 est un isomorphisme de $D(A)$ sur X et T_0 est compact (et même de rang fini).

D'après (ii), $(T_0 + B)(F^{-1}(K))$ est relativement compact dans X , de même que $K' = K + (T_0 + B)(F^{-1}(K))$.

Donc $A^{-1}(K')$ est relativement compact et $F^{-1}(K) \subset A_0^{-1}(K')$ est compact.

Les dernières assertions du théorème 2.11 résulteront du

LEMME 2.13. Soient X, Y des Banach, $f : X \longrightarrow Y$, de classe C^1 , propre,

Fredholm d'indice nul.

Soit $N(y)$ le cardinal de $f^{-1}(y)$.

Alors $N(y)$ est fini et localement constant sur R_f .

Preuve du lemme 2.13. $N(y)$ est évidemment fini sur R_f puisque pour $y = f(x)$, x régulier $f^{-1}(y)$ est compact (f propre), et discret ($Df(x)$ est un isomorphisme puisque f est d'indice nul, et f est difféomorphisme local au voisinage de x).

Montrons que $N(y)$ est localement constant. C'est clair si $y \notin f(X)$ puisque $f(X)$ est fermée (f est propre, donc fermée). Si $y_0 \in R_f$ et $y_0 \in f(X)$, alors $f^{-1}(y_0) = \{x_1, \dots, x_p\}$, x_i points réguliers, et il existe des voisinages ouverts deux à deux disjoints $U_i(x_i)$, $i = 1, \dots, p$, et $U(y_0)$, tels que $f|_{U_i(x_i)}$ soit un difféomorphisme de $U_i(x_i)$ sur $U(y_0)$, $i = 1, \dots, p$. Soit $V(y_0) = U(y_0) \setminus f(X \setminus \bigcup_{i=1}^p U_i(x_i))$; $V(y_0)$ est ouvert puisque f est fermée et pour tout $y \in V(y_0)$, $N(y) = N(y_0)$. ■

Nous rappelons maintenant quelques notations et faits bien connus sur les équations de Navier-Stokes (cf. [10], [4]).

Soit Ω un ouvert borné de \mathbf{R}^n , $n = 2, 3$, de frontière $\partial\Omega$ de classe C^4 . Posons $\mathcal{V} = \{u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{D}(\Omega)^n, \operatorname{div} u = 0\}$, H (resp. V) = adhérence de \mathcal{V} dans $L^2(\Omega)^n$ (resp. $H^1(\Omega)^n$).

Notons P la projection orthogonale de $L^2(\Omega)^n$ sur H . Pour $u \in D_H(A) = H^2(\Omega)^n \cap V$, soit $Au = -P \Delta u$ (A est l'extension de Friedrichs de $-\Delta|_{\mathcal{V}}$). A est un opérateur auto-adjoint, positif, d'inverse compact. D'après Cattabriga [3], il existe $C_1(\Omega) > 0$ telle que

$$C_1^{-1} \|u\|_{H^2(\Omega)^n} \leq |Au| \leq C_1 \|u\|_{H^2(\Omega)^n} \quad (1)$$

(1) Nous noterons $|\cdot|$ et (\cdot, \cdot) la norme et le produit scalaire dans H , $\|\cdot\|$ la norme dans V .

Pour $u, v \in V$, posons $B(u, v) = P[(u \cdot \text{grad})v] = P\left[\sum_{j,k=1}^n u_j \frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right]$. On sait (cf. [4] par ex.) que $B(V, D(A)) \subset H$.

Le problème de Navier-Stokes stationnaire est alors le suivant :

Etant donnés $f \in H$ et $\nu > 0$, trouver $u \in V$ tel que :

$$(2.1) \quad \nu Au + B(u, u) = f.$$

Posons $S(f, \nu) = \{u \in V ; u \text{ solution de (2.1)}\}$. Alors (cf. [10]),

$S(f, \nu) \neq \emptyset$ et $S(f, \nu) \subset D(A)$.

THEOREME 2.14. (Foias-Temam). Soit $\nu > 0$; il existe un ouvert dense 0 de H , tel que $\text{card } S(f, \nu)$ soit fini (non nul) sur 0 et constant sur chaque composante connexe de 0 .

Preuve. On définit une application $F : D(A) \rightarrow H$ par $F(u) = \nu Au + B(u, u)$.

F est Fredholm d'indice nul. En effet, A est Fredholm d'indice nul (c'est un isomorphisme de $D(A)$ sur H , cf. [10]), et la dérivée de B est compacte puisque B est compact. Ce dernier point résulte évidemment du

LEMME 2.15. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ borné, $n = 2, 3$ et $s \geq 3/2$. L'application $u \mapsto u \frac{\partial u}{\partial x_i}$ est compacte de $H^s(\Omega)$ dans $H^{s-2}(\Omega)$.

Preuve du lemme 2.15. Il suffit de montrer le cas le plus défavorable $n = 3$,

$s = \frac{3}{2}$. On a alors d'après le théorème de plongement de Sobolev, $u, v \in L^p(\Omega)$,

$\forall p, 2 \leq p < \infty$ et $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^3(\Omega)$. D'où par Hölder, $\left|u \frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{L^q} \leq |u|_{L^p}^{1/p} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{L^3}^{1/3}$

où $q = \frac{3p}{p+3}$. Soit q' tel que $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.

Alors $H^r(\Omega) \subset L^{q'}(\Omega)$ où $r = \frac{6-p}{2p}$. D'où $L^q(\Omega) \subset H^{-r}(\Omega)$. Choisissons

p de telle façon que $\frac{p-6}{2p} > -\frac{1}{2}$, i.e. $p > 3$. On a alors l'injection compacte $H^{-r}(\Omega) \subset H^{-1/2}(\Omega)$ et le lemme est démontré. ■

Fin de la démonstration. L'application F vérifie donc les hypothèses (i), (ii) du théorème 2.11. L'hypothèse (iii) est vérifiée d'après un résultat de régularité classique (cf. [10] ou la démonstration du lemme 2.17).

Le théorème 2.14 résulte alors du théorème 2.11. ■

Un renseignement sur $S(f, \nu)$ quand $f \in H \setminus 0$ est fourni par le résultat suivant, basé sur le fait que A est auto-adjoint positif d'inverse compact (et qui peut se généraliser à d'autres systèmes elliptiques non linéaires) :

PROPOSITION 2.16 (Foias-Temam [4]). Pour tout $f \in H$, $S(f, \nu)$ est homéomorphe à un compact de \mathbb{R}^m , pour un m assez grand.

Esquisse de la démonstration (pour les détails cf. [4]).

Notons w_1, \dots, w_m, \dots une base orthonormale de H formée de vecteurs propres de A ; soit P_m la projection de H sur l'espace engendré par w_1, \dots, w_m . On a alors :

LEMME 2.17. Il existe $C_1(\Omega, n) > 0$ tel que si

$$(m+1)^{2/m} \geq C_1 \frac{|f|^4}{\nu^8}, \text{ alors } P_m|_{S(f, \nu)} \text{ est une bijection.}$$

Démonstration. (cf. [4]). On montre d'abord, utilisant des estimations fines sur A et B que

$$(2.2) \quad |Au| \leq C_2 \frac{|f|}{\nu} \left(1 + \frac{|f|^2}{\nu^4}\right),$$

i.e. que $S(f, \nu)$ est borné dans $D(A)$.

Soient alors $u, v \in S(f, \nu)$, et posons $w = u - v$. Prenant le produit scalaire dans H de $F(u) - F(v)$ avec $Q_m w$ ($Q_m = I - P_m$), on obtient, en posant

$$b(u, v, w) = \int_{\Omega} \left(\sum_{j,k=1}^m u_j \frac{\partial v_k}{\partial x_j} w_k \right) dx :$$

$$\nu \|Q_m w\|^2 = -b(u, u, Q_m w) + b(v, v, Q_m w) = -b(u, w, Q_m w) - b(w, v, Q_m w)$$

$$= +b(u, Q_m w, P_m w) + b(P_m w, Q_m w, v) + b(Q_m w, v, Q_m w).$$

En utilisant encore les estimations de [4] et (2.2), on obtient :

$$(2.3) \quad \nu \|Q_m w\|^2 \leq C \frac{|f|}{\nu} \left(1 + \frac{|f|^2}{\nu^4}\right)^{3/4} \|Q_m w\| |P_m w| + C_4 \frac{|f|}{\nu} \|Q_m w\|^{3/2} |Q_m w|^{1/2}.$$

Notons λ_m la m^e valeur propre de A , $A w_m = \lambda_m w_m$. On montre facilement, par les techniques d'Agmon [1], que

$$(2.4) \quad \lambda_m \geq C_2(\Omega) m^{2/n} \quad (C_2(\Omega) > 0 \text{ ne dépendant que de } \Omega).$$

Maintenant, pour tout $u \in H$, on a $u = \sum_{j=1}^{\infty} (u, w_j) w_j$. Rappelons (cf. [4]) que $D(A^{1/2}) = V$ et $\|u\| = |A^{1/2} u| \quad \forall u \in V$. Donc,

$$\begin{aligned} \|Q_m w\| &= |A^{1/2} Q_m w| = \left| \sum_{j=m+1}^{\infty} \lambda_j^{1/2} (w, w_j) w_j \right| \\ &= \left[\sum_{j=m+1}^{\infty} \lambda_j (w, w_j)^2 \right]^{1/2} \\ &\geq \lambda_{m+1}^{1/2} \left[\sum_{j=m+1}^{\infty} (w, w_j)^2 \right]^{1/2} = \lambda_{m+1}^{1/2} |Q_m w| \end{aligned}$$

puisque $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{m+1} \leq \dots$

On a donc montré :

$$(2.5) \quad |Q_m w| \leq \frac{1}{\lambda_{m+1}^{1/2}} \|Q_m w\|, \quad \forall w \in V.$$

Il vient alors avec (2.3), l'inégalité de Cauchy et (2.5) :

$$\nu \|Q_m w\|^2 \leq \frac{\nu}{2} \|Q_m w\|^2 + C' \frac{|f|^2}{\nu^3} \left(1 + \frac{|f|^2}{\nu^4}\right)^{3/2} |P_m w|^2 + \frac{C_4}{\lambda_{m+1}^{1/2}} \frac{|f|}{\nu} \|Q_m w\|^2.$$

Soit :

$$\left(\frac{\nu}{2} - C_4 \frac{|f|}{\nu \lambda^{m+1}}\right) \|Q_m w\|^2 \leq C'' \frac{|f|^2}{\nu^3} \left(1 + \frac{|f|^2}{\nu^4}\right)^{3/2} |P_m w|^2,$$

d'où avec (2.4) :

$$\left(\frac{\nu}{2} - \frac{C_4 |f|}{\nu C_2^{1/4} (m+1)^{1/2n}}\right) \|Q_m(u-v)\|^2 \leq C'' \frac{|f|^2}{\nu^3} \left(1 + \frac{|f|^2}{\nu^4}\right)^{3/2} |P_m(u-v)|^2$$

ce qui prouve que P_m est injective sur $S(f, \nu)$ pourvu que

$$\frac{\nu}{2} - \frac{C_4 |f|}{\nu C_2^{1/4} (m+1)^{1/2n}} > 0, \text{ i.e. } (m+1)^{2/n} > C_1 \frac{|f|^4}{\nu^8}$$

où $C_1 = \frac{2^4 C_4^4}{C_2}$. ■

Fin de la démonstration de la proposition 2.16.

F étant propre, $S(f, \nu)$ est compact dans $D(A)$. Pour m assez grand il résulte du lemme 2.17 que $P_m|_{S(f, \nu)}$ est bijectif, donc $P_m|_{S(f, \nu)}^{-1}$ est continu, et la proposition 2.16 en résulte. ■

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. AGMON. Lectures on elliptic boundary value problems, Van Nostrand, New York 1965.
- [2] BOURBAKI. Variétés différentiables et analytiques, fascicule des résultats, § 1.7, Paris, Hermann 1967.
- [3] L. CATTABRIGA. Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 31, (1961), p. 308-340.
- [4] C. FOIAS, R. TEMAM. On the stationary statistical solutions of the Navier-Stokes equations and turbulence. Publications Mathématiques d'Orsay n° 120-75-28 (1975).
- [5] C. FOIAS, R. TEMAM. Sur certaines propriétés génériques des équations de Navier-Stokes. C.R. Ac. Sc. Paris, Série A, 280, 1975, p. 563-565.
- [6] M. GOLUBITSKY, V. GUILLEMIN. Stable mappings and their singularities. Springer Verlag, 1973.
- [7] S. LANG. Introduction aux variétés différentiables. Paris, Dunod 1967.
- [8] R. PALAIS. Exposé n° 7, "Seminar on Atiyah-Singer index theorem", Princeton, 1965.
- [9] S. SMALE. An infinite dimensional version of Sard's theorem. Amer. J. Math. 87 (1965), p. 861-866.
- [10] R. TEMAM. On the theory and numerical analysis of the Navier-Stokes equations, livre à paraître, North Holland, 1976.
- [11] M.A. KRASNOSEL'SKII. Topological methods in the theory of non linear integral equations. MacMillan, New York, 1964.

Exposé n° 2

METHODE DE LYAPUNOV-SCHMIDT

par

A. LICHNEWSKY

-:-

Le problème que nous envisageons dans ce paragraphe peut être formulé de la manière suivante :

(1) Etant donné une application d'un voisinage du point x_0 de l'espace de Banach X dans un espace de Banach Y , étudier "qualitativement" l'ensemble des solutions de l'équation :

(2) $f(x) = 0.$

D'un point de vue pratique nous ferons souvent intervenir un paramètre λ , pris dans un espace de dimension finie Λ et, une application $\tilde{f} : X \times \Lambda \rightarrow Y$ étant donnée, nous étudierons la multiapplication :

(3) $\lambda \rightarrow \tilde{f}^{-1}(\cdot, \lambda) \in \mathcal{P}(X).$

Dans le cas d'une application \tilde{f} suffisamment régulière (p -fois différentiable $p \geq 1$) et Fredholm, nous montrerons que des méthodes de Géométrie différentielle

permettent d'élucider ces questions du point de vue local, dans les cas simples. Dans les cas plus généraux, la vérification des hypothèses requises pour appliquer ces méthodes présente de grandes difficultés. Notre présentation permet cependant d'étudier systematiquement un certain nombre de situations particulières traitées par divers auteurs. Nous insisterons surtout sur cet aspect du travail ainsi que sur le fait que les méthodes de Géométrie différentielle s'introduisent "naturellement" dans ce contexte.

Cet exposé, qui voudrait être une introduction à l'étude du phénomène de bifurcation, s'inspire largement de L. NIRENBERG [9]; D.H. SATTINGER [11], V. GUILLEMIN et M. GOLUBITSKY [5].

§ 1. POINTS REGULIERS DE f ; CONSEQUENCES DU THEOREME DES FONCTIONS IMPLICITES.

Le théorème des fonctions implicites, sous ses diverses formes nous servira d'abord d'outil pour étudier la structure locale des ensembles

$$(4) \quad f^{-1}(0) ; \tilde{f}^{-1}(0) \quad \text{ou} \quad \{x \mid \tilde{f}(x, \lambda) = 0\}$$

au voisinage de points réguliers où (4) est une variété (modélée sur \mathbb{R}^n ou sur un espace de Banach dans les cas qui nous concernent).

Par la suite, ce résultat sera utilisé pour développer des méthodes d'analyse plus "sophistiquées" ; nous l'énonçons tout d'abord dans le cadre des espaces de Banach suivant J. DIEUDONNE [4, chap. X].

THEOREME 1. Soient E, F et G trois espaces de Banach et f une appli-

cation continûment différentiable d'un voisinage de $(x_0, y_0) \in E \times F$ dans G telle que $f(x_0, y_0) = 0$. Supposons en outre que la différentielle $[D_F f](x_0, y_0)$ soit inversible (i.e. un homéomorphisme).

Il existe alors un voisinage connexe de x_0 dans $E : \mathfrak{u}_{x_0}$ et une applica-
tion continue unique de \mathfrak{u} dans $F : x \rightarrow y(x)$ telle que

$$\begin{cases} f(x, y(x)) = 0 & \text{pour tout } x \text{ dans } \mathfrak{u} \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

En outre, $y(\cdot)$ est continûment différentiable dans \mathfrak{u} et sa différentielle est
donnée par :

$$(5) \quad [D_E y(\cdot)] = - \{D_F f(x, y(x))\}^{-1} \circ \{D_E f(x, y(x))\}.$$

La preuve est une conséquence directe de l'existence d'un point fixe pour les contractions strictes d'un espace de Banach. ■

Le résultat suivant précise l'allure d'une fonction différentiable au voisinage d'un point à un difféomorphisme près ; nous l'utiliserons à plusieurs reprises (cf. R. ABRAHAM et J. ROBBIN [1]).

THEOREME 2. Soient E et F deux espaces de Banach, f une applica-
tion C^p ($p \geq 1$) d'un ouvert de E dans F . Supposons que pour le point x dans
le domaine de définition de f , l'image et le noyau de la différentielle $Df(x)$ soient
fermés et admettent un complémentaire fermé.

Il existe alors des espaces de Banach E_1, E_2 et F_1 , des voisinages ou-
verts U de x dans E et V de $f(x)$ dans F , et des applications $C^p : \alpha : U \rightarrow E_1 \times E_2$,

$\beta : V \rightarrow F_1 \times E_1$ tels que :

(i) $\alpha(x) = (0,0) \in E_1 \times E_2$; U est inclus dans le domaine de définition de f et α est un C^p -difféomorphisme de U sur le produit des boules unités de E_1 et E_2 ⁽¹⁾.

(ii) $\beta(f(x)) = (0,0) \in F_1 \times E_1$; $f(U) \subset V$; β est un C^p -difféomorphisme sur un ouvert de $F_1 \times E_1$.

(iii) Dans les coordonnées ainsi introduites, f a la représentation locale :

$$\beta \circ f \circ \alpha^{-1} : \alpha(U) \rightarrow \beta(V) \text{ avec}$$

$$\beta \circ f \circ \alpha^{-1}(e_1, e_2) = (\eta(e_1, e_2), e_1) \in F_1 \times E_1$$

$$\text{où } D_{\eta}(0,0) = 0.$$

Remarque. On obtient ainsi le schéma commutatif :

$$(6) \quad \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ E_1 \times E_2 & \xrightarrow{\beta \circ f \circ \alpha^{-1}} & F_1 \times E_1 \end{array}$$

Preuve. Nous pouvons choisir pour E_2 le noyau de $Df(x)$, pour E_1 son complémentaire fermé. Si F_1 est un complémentaire fermé de l'image de $Df(x)$, le théorème du graphe fermé assure que F est isomorphe à $F_1 \times E_1$.

Nous pouvons supposer, sans perte de généralité que $x = (0,0)$ et $f(x) = (0,0)$.

L'application f s'écrit aussi

$$\begin{cases} f : E_1 \times E_2 \longrightarrow F_1 \times E_1 \\ f : (e_1, e_2) \longrightarrow (g(e_1, e_2), h(e_1, e_2)). \end{cases}$$

(1) notées respectivement B_1 et B_2 .

D'après le choix des sous-espaces E_1 , E_2 et F_1 , $Dg(0,0) = 0$ et Dh est surjective, de noyau E_2 ; considérons l'application k , définie sur le même domaine que f par

$$k : E \rightarrow E : k(e_1, e_2) = (h(e_1, e_2), e_2).$$

Il est clair que $Dk(0,0)$ est un isomorphisme et il existe, d'après le théorème 1 un voisinage U de x , dans lequel l'application k est inversible, d'inverse α^{-1} . On a alors $h \circ \alpha^{-1}(e_1, e_2) = e_1$, on prend pour β l'identité sur un voisinage de $(0,0)$ dans $F_1 \times E_1$. ■

Remarque. (i) Nous utiliserons ce résultat dans certains cas avec

$$F_1 = \{0\}.$$

(ii) En dimension finie, il est possible de donner des représentations locales de f plus précises au voisinage d'un point x de E si le rang de $Df(x)$ est constant dans ce voisinage cf. J. DIEUDONNE [4, chap. X]. Le résultat ci-dessus ne fait aucune hypothèse de ce type. ■

§ 1.2. APPLICATIONS : LE CAS "SANS BIFURCATION".

De manière précise, nous formulons le problème évoqué au (3) de l'introduction de la façon suivante :

(7) Soient X et Y deux espaces de Banach, Λ un espace de dimension finie ⁽¹⁾ et \tilde{f} une application C^p ($p \geq 1$) de $X \times \Lambda$ dans Y . Un point (x_0, λ_0) de $X \times \Lambda$ étant donné tel que $\tilde{f}(x_0, \lambda_0) = 0$, étudier, au voisinage de ce point, l'application

$$\lambda \rightarrow \tilde{f}^{-1}(\cdot, \lambda) \in \mathcal{R}(x)$$

(1) Ceci est le cas dans les applications et permet quelques simplifications de l'exposé. ■

1^{er} cas : Existence d'une famille de solutions.

Supposons que, en (x_0, λ_0) la différentielle de l'application $\tilde{D}f : X \times \Lambda \rightarrow Y$ soit surjective et admette un noyau de dimension finie k . D'après le Théorème 2 il existe un espace de Banach E et des difféomorphismes α et β définis au voisinage de (x_0, λ_0) (resp. 0) tels que :

$$\begin{array}{ccc} X \times \Lambda & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ E \times \mathbb{R}^k & \xrightarrow{\beta \circ f \circ \alpha^{-1}} & Y \end{array} .$$

L'application $\beta \circ f \circ \alpha^{-1}$ de $E \times \mathbb{R}^k$ dans Y est de la forme

$$(e, r) \in E \times \mathbb{R}^k \rightarrow e.$$

Dans un voisinage de (x_0, λ_0) l'ensemble des solutions de $\tilde{f}(x, \lambda) = 0$ est donc l'image réciproque par α de la boule unité de \mathbb{R}^k ; (cf. Th. 2 p. 3) il s'agit, en particulier, d'une variété de dimension k . ■

Un cas particulier de cette situation dans lequel le rôle de paramètre de Λ apparaît clairement est celui où la différentielle $D_x \tilde{f} : X \rightarrow Y$ est un homéomorphisme. Le théorème des fonctions implicites (Thm 1) montre qu'il existe une application $C^p : \lambda \rightarrow x(\lambda)$ d'un voisinage U de λ_0 dans X telle que l'ensemble des solutions (x, λ) de $f(x, \lambda) = 0$ soit l'image de U par

$$\lambda \in U \rightarrow (x(\lambda), \lambda) \in X \times \Lambda. \quad \blacksquare$$

Remarque. La différentielle de l'application $\lambda \rightarrow x(\lambda)$ est donnée par la formule (5) et permet d'étudier plus en détail l'ensemble des solutions. ■

§ 2. METHODE DE LYAPUNOV-SCHMIDT.

Nous allons maintenant faire jouer des rôles différents aux espaces X et Λ qui interviennent dans la formulation du problème (7) au paragraphe 1.2.

En considérant le problème (7) résolu lorsque la différentielle $D_x f(x_0, \lambda_0)$ est un homéomorphisme, nous allons nous ramener à un problème du même type, dans des espaces de dimension finie lorsque $D_x f(x_0, \lambda_0)$ est simplement un opérateur de Fredholm.

DEFINITION. Soient E et F deux espaces de Banach et T un opérateur linéaire continu de E dans F . Nous dirons que T est un opérateur de Fredholm si

- (i) $\ker T$ est de dimension finie
- (ii) $\text{coker } T = F/\text{Im}(T)$ est de dimension finie.

Nous renvoyons à l'exposé n° 1 pour une étude des opérateurs de Fredholm (cf. aussi le S.A.S.I.T. [10]).

Pour toute la suite de cet exposé, nous faisons donc l'hypothèse suivante :

HYPOTHESE. La différentielle $D_x f(x_0, y_0)$ est un opérateur de Fredholm.

Nous noterons $X_1 = \ker D_x f(x_0, \lambda_0)$; $\dim X_1 < +\infty$ et

$Y_1 = [D_x f(x_0, \lambda_0)](X)$. Nous avons la factorisation canonique de l'opérateur

$D_x f(x_0, \lambda_0)$ suivant la décomposition des espaces X et Y :

$$X = X_1 \oplus X_2 ; \quad Y = Y_1 \oplus Y_2 ; \quad \dim Y_2 < +\infty ;$$

et en notant Q la projection $Y \rightarrow Y_1$ parallèlement à Y_2 :

$$(8) \quad D_x f(x_0, \lambda_0) = Q D_x f(x_0, \lambda_0) + (I - Q) D_x f(x_0, \lambda_0).$$

L'équation $f(x, \lambda) = 0$ est équivalente au système :

$$(9) \quad \begin{cases} Qf(x, \lambda) = 0 \\ (I-Q)f(x, \lambda) = 0. \end{cases}$$

En décomposant X suivant la somme directe $X_1 \oplus X_2$ nous parvenons finalement au système

$$(9 \text{ bis}) \quad \begin{cases} Qf(x_1+x_2, \lambda) = 0 \\ (I-Q)f(x_1+x_2, \lambda) = 0. \end{cases}$$

Nous pouvons remarquer que, d'après le choix des décompositions des espaces X et Y

$$(10) \quad (D_{x_2} [Q \circ f(x_1+x_2, \lambda)])(\lambda_0, x_0)$$

est bijective et continue et par conséquent un homéomorphisme (Thm. du graphe fermé). Les théorèmes 1 et 2 ci-dessus impliquent qu'il existe un voisinage U de $(x_{0,1}, \lambda_0)$ dans $X_1 \times \Lambda$ et une application $C^p(x_1, \lambda) \rightarrow u(x_1, \lambda)$ de U dans X_2 tels que l'ensemble des solutions de (9 bis, 1) dans un voisinage de (x_0, λ_0) soit donné par $(x_1, \lambda) \in U$, $x_2 = u(x_1, \lambda)$ et que $x_{0,2} = u(x_{0,1}, \lambda_0)$.

La résolution locale du système (9 bis) est ainsi ramenée à la résolution de l'équation :

$$(11) \quad (I-Q)f(x_1+u(x_1, \lambda), \lambda) = 0. \quad \blacksquare$$

au voisinage de $(x_{0,1}, \lambda_0)$ dans $X_1 \times \Lambda$.

L'équation (11) est appelée équation de Bifurcation. Il faut remarquer que l'application $(x_1, \lambda) \in X_1 \times \Lambda \rightarrow Y_2 : (I-Q)f(x_1+u(x_1, \lambda), \lambda)$ est de classe C^p et est définie entre deux espaces de dimension finie.

Le procédé qui consiste à se ramener au problème de l'étude des solutions de (11) est la méthode de Lyapunov-Schmidt. Nous utiliserons systématiquement les notations de ce paragraphe par la suite. ■

Le théorème 1 fournit aussi la différentielle de l'application u en $(x_{0,1}, \lambda_0)$ et l'on a :

$$(12) \quad \begin{cases} D_{x_1} u|_{(x_{0,1}, \lambda_0)} = - [D_{x_2} f]^{-1} [D_{x_1} Qf] = 0 \\ D_{\lambda} u|_{(x_{0,1}, \lambda_0)} = - [D_{x_2} f]^{-1} \circ Q \circ D_{\lambda} f . \end{cases}$$

Remarque. Supposons que $Y_1 = Y$, c'est-à-dire que l'opérateur $D_x f(x_0, \lambda_0)$ soit surjectif ; l'équation (11) dégénère et devient automatiquement satisfaite.

Dans cette situation, il existe pour chaque λ voisin de λ_0 une variété de dimension $\dim X_1$ de solutions du problème paramétré par x_1 décrivant un voisinage de $x_{0,1}$ dans X_1 . Ces solutions sont :

$$(13) \quad x_1 + u(x_1, \lambda) \quad (x_1, \lambda) \text{ dans un voisinage de } (x_{0,1}, \lambda_0).$$

Ceci ne constitue pas un cas de bifurcation au sens où nous l'entendons. Les formules (12) permettent de poursuivre et de détailler plus l'étude de (13). ■

§ 2.1. ETUDE DE LA BIFURCATION SUR UN CAS PARTICULIER SIMPLE.

Nous nous sommes ramenés, au paragraphe précédent à l'étude de l'ensemble des zéros d'une application de $R^{\dim \Lambda + \dim X_1}$ dans $R^{\dim Y_2}$. Les cas $\dim X_1$ ou $\dim Y_2 = 0$ ayant été étudiés ci-dessus, la situation la plus simple que nous puissions envisager est

$$(14) \quad \text{codim } Y_1 = \dim Y_2 = 1, \quad \dim X_1 = d < +\infty ;$$

notre problème est l'étude locale de l'ensemble des zéros d'une fonction de classe C^p de $R^{d+\dim \Lambda}$ dans R :

$$(15) \quad (x_1, \lambda) \rightarrow (I-Q)f(x_1 + u(x_1, \lambda), \lambda).$$

En dehors de cas simples où les résultats du § 1 sont directement applicables, l'étude de ce problème fait appel à des méthodes de Géométrie différentielle.

Dans ce paragraphe nous montrons comment le Lemme de Morse (cf. J. MILNOR [8]) permet de résoudre ce problème dans certaines situations assez simples au voisinage d'un point critique non dégénéré de (15). Ce problème sera repris dans l'exposé n° 8 dans une situation plus délicate. ■

En notant Y^* le dual d'un espace de Banach Y et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le crochet de dualité Y^*, Y on peut poser

$$Y_1 = \{y \in Y, \langle y^*, y \rangle = 0\} \quad \text{où } y^* \in Y^*$$

et l'équation de bifurcation (11) s'écrit aussi

$$(16) \quad \langle y^*, f(x_1 + u(x_1, \lambda), \lambda) \rangle = 0$$

ce que nous noterons, afin de simplifier l'écriture :

$$(17) \quad y^* f(x_1 + u(x_1, \lambda), \lambda) = 0 \quad (x_1 \in X_1, \lambda \in \Lambda).$$

On a, par hypothèse (choix des décompositions de X et Y)

$$D_{x_1} [y^* f(x_1 + u(x_1, \lambda), \lambda)] \Big|_{x_0, 1, \lambda_0} = 0.$$

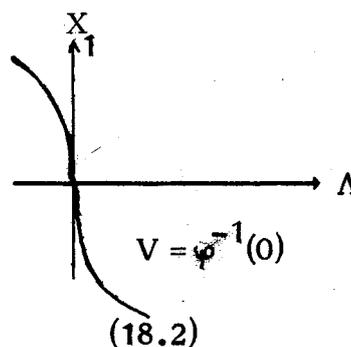
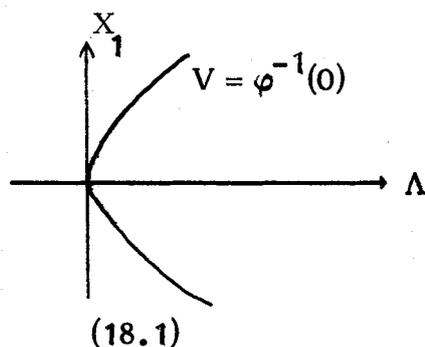
Posons $\varphi(x_1, \lambda) = y^* f(x_1 + u(x_1, \lambda), \lambda)$, nous voulons étudier $\varphi^{-1}(0)$ au voisinage de $(x_0, 1, \lambda_0)$. ■

1^{er} cas : L'application φ est une submersion.

Supposons que la restriction de φ a un voisinage \mathcal{U} de $(x_{0,1}, \lambda_0)$ soit une submersion ; il résulte alors de l'application du théorème des fonctions implicites qu'il existe dans $X_1 \times \Lambda$ une variété V de codimension 1 telle que :

$$V \cap \mathcal{U} = \varphi^{-1}(0) \cap \mathcal{U}$$

(cf. V. GUILLEMIN et M. GOLUBITSKY [5, § I.2].) Le point (x_0, λ_0) n'apparaît donc pas comme un point de bifurcation, cependant en particulierisant le rôle des paramètres nous voyons que la projection dans l'espace Λ de tels points peut limiter la zone d'existence de certaines solutions, cf. D.D. JOSEPH [6], D.H. SATTINGER [11]. Dans le cas $\dim \Lambda = \dim X_1 = 1$ nous pouvons avoir pour $\varphi^{-1}(0)$ les ensembles :



Dans la pratique, il peut être intéressant de distinguer la situation (18.1) :

"apparition d'un doublet de solution lorsque λ franchit la valeur λ_0 " ; ceci est possible grâce à l'étude des dérivées successives de φ que l'on obtient à partir des formules (12).

2^e cas : $(x_{0,1}, \lambda_0)$ est un point critique non dégénéré de φ .

Supposer que φ n'est pas une submersion en $(x_{0,1}, \lambda_0)$ revient à supposer

que $D_\lambda [y^* f(x_1 + u(x_1, \lambda), \lambda)]|_{0,0} = 0$ soit aussi, avec (12), que $[y^* D_\lambda f](x_0, \lambda_0) = 0$.

Pour étudier la structure de l'ensemble des zéros de φ au voisinage de $(x_{0,1}, \lambda_0)$ qui est un point critique et un zéro de φ , nous allons chercher un système de coordonnées locales (y_1, \dots, y_m) dans un voisinage de $(x_{0,1}, \lambda_0)$ tel que, dans les nouvelles variables $(y_i)_{i=1, \dots, m}$ φ ait une expression polynomiale. Si ceci est possible, (cf. exposé n° 8, V. GUILLEMIN et M. GOLUBITSKY [5]), l'étude de l'ensemble des zéros de φ dans les nouvelles coordonnées est immédiate, et il reste à interpréter le résultat dans les coordonnées initiales en tenant compte du rôle particulier du paramètre $\lambda \in \Lambda$. Nous étudions ci-dessous la situation la plus simple dans cette voie et nous faisons l'hypothèse que $(x_{0,1}, \lambda_0)$ est un point critique non dégénéré de φ .

En faisant des hypothèses de régularité convenables sur φ , c'est-à-dire sur f , nous pouvons appliquer le :

(cf. J.T. SCHWARTZ [12], L. NIRENBERG [9], J. MILNOR [8]).

THEOREME 3 (Lemme de Morse). Soit z un point critique de la fonction $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ non dégénéré (i.e. où la hessienne de φ est une forme non dégénérée).
Il existe un système de coordonnées locales (y^1, \dots, y^n) dans un voisinage u de z tel que

$$(i) \quad y^i(z) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$(ii) \quad \varphi = \varphi(p) + \sum_{i=1}^n \epsilon_i (y^i)^2$$

où $\epsilon_i = \pm 1$.

Remarque. Le nombre de ϵ_i égaux à $+1$ (resp. -1) est invariant par changement de coordonnées ; il s'agit de la signature de la hessienne de φ en z . ■

Nous donnerons dans l'exposé n° une démonstration de ce résultat ; il nous permet une discussion de l'existence de solutions au voisinage de $(x_{0,1}, \lambda_0)$. Si la hessienne de φ en $(x_{0,1}, \lambda_0)$ est définie $(x_{0,1}, \lambda_0)$ est zéro isolé de φ ; si cette forme est non-définie $\varphi^{-1}(0) \cap u$ est homéomorphe à l'intersection d'une conique dégénérée et d'un voisinage de son sommet ; il faut remarquer qu'à un difféomorphisme près, cette conique dégénérée est elle-même caractérisée par la signature de la hessienne de φ en $(x_{0,1}, \lambda_0)$. Nous énonçons ceci sous la forme du

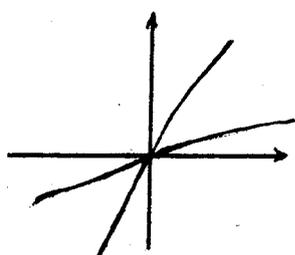
COROLLAIRE 1. Supposons que la hessienne de l'application

$\varphi = y^* f(x_1 + u(x_1, \lambda), \lambda)$ soit non dégénérée et non-définie en $(x_{0,1}, \lambda_0)$ point critique de φ ; il existe un voisinage de $(x_{0,1}, \lambda_0)$ dans $(X_1 \times \Lambda)$: u est un difféomorphisme faisant passer des coordonnées (x_1, λ) dans u aux coordonnées (y^1, \dots, y^m) - $m = \dim \Lambda + \dim X_1$ - tel que, dans le nouveau repère, l'ensemble des zéros de φ soit la conique dégénérée d'équation :

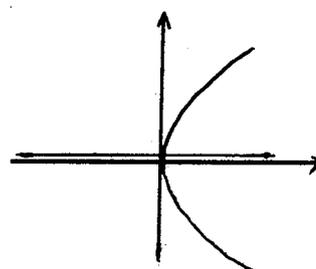
$$0 = (y^1)^2 + \dots + (y^k)^2 - (y^{k+1})^2 \dots - (y^m)^2$$

(k est donné par la signature de la hessienne de φ). ■

Dans le cas $\dim \Lambda = \dim X_1 = 1$ ceci fournit les bifurcations classiques de diagrammes :



(19.1)



(19.2)

par exemple. L'étude de l'aspect précis des branches peut être entreprise en calculant le changement de variables effectué plus haut et la courbure des branches ; ceci peut être d'une grande importance pratique cf. D.H. SATTINGER [11], D.D. JOSEPH [6]. Notons enfin que ceci est le premier cas de bifurcation que nous recontrons dans cette étude. Le résultat suivant permet l'étude de la bifurcation dans le problème de BENARD (par exemple), et est une conséquence du corollaire 1 ci-dessus.

THEOREME 4 (cf. CRANDALL et P. RABINOWITZ [3]).

Soit $f(x, \lambda)$ une fonction C^p ($p \geq 2$) et de Fredholm, d'un voisinage de $(0, \lambda_0) \in X \times \mathbb{R}$ dans Y ⁽¹⁾ avec $f(0, \lambda_0) = 0$. On suppose

- (i) $f_\lambda(0, \lambda_0) = 0$
- (ii) $\ker f_x(0, \lambda_0) = X_1$; $\dim X_1 = 1$; $X_1 = \mathbb{R} x_0$
- (iii) $\text{Im } f_x(0, \lambda_0) = Y_1$; $\text{codim } Y_1 = 1$
- (iv) $f_{\lambda\lambda}(0, \lambda_0) \in Y_1$ et $f_{\lambda x}(0, \lambda_0) x_0 \notin Y_1$.

Alors $(0, \lambda_0)$ est un point de bifurcation de f ; l'ensemble des solutions de $f(x, \lambda)$ voisines de $(0, \lambda_0)$ est formé de deux courbes C^{p-2} : Γ_1 et Γ_2 qui se croisent seulement en $(0, \lambda_0)$. Si $p > 2$ on a de plus :

- (i) Γ_1 est tangente à l'axe des λ en $(0, \lambda_0)$ et peut être paramétrée
par λ
- (ii) Γ_2 peut être paramétrée par le paramètre réel s de la façon suivante

$$\Gamma_2 : (s x_0 + x_2(s), \lambda(s))$$

où $x_2 = \frac{\partial}{\partial s} x_2 = 0$ en $s = 0$; $\lambda(0) = \lambda_0$

(1) X et Y sont deux espaces de Banach.

La démonstration que nous donnons à présent de ce résultat est celle de L. NIRENBERG [9].

Preuve. Supposons $\lambda_0 = 0$; soient $\hat{X} = X \times R$ et $f(x, \lambda) = f(\hat{x})$. On a alors $f_{\hat{x}}(0) = f_x(0, 0) \oplus f_{\lambda}(0, 0)$ de façon évidente. Les hypothèses (i) et (ii) impliquent que le noyau de $f_{\hat{x}}(0)$ est engendré par les vecteurs de $\hat{X} : (x_0, 1)$ et $(0, 1)$ et est donc de dimension 2. Il existe un vecteur $y^* \neq 0 \in Y^*$ tel que

$$Y_1 = \{y \mid y \in Y, \langle y^*, y \rangle = 0\}.$$

En reprenant les notations utilisées ci-dessus nous écrivons l'équation de bifurcation : (cf. (8), (9), (11), (16)) : ⁽¹⁾

$$(20) \quad \varphi(\hat{x}_1) = y^* f(\hat{x}_1 + \hat{x}_2(\hat{x}_1)) = 0.$$

Il nous faut montrer que la fonction φ satisfait aux hypothèses du Théorème 3 et de son corollaire 1. Il nous faut prouver que la hessienne de φ en 0 est non-dégénérée et non-définie ; l'hypothèse (iii) entraînant immédiatement que 0 est point critique de φ . La hessienne de φ est la forme bilinéaire définie sur $\hat{X}_1 \times \hat{X}_1$ de matrice, (dans la base ci-dessus) :

$$(21) \quad \begin{pmatrix} y^* f_{x_0 x_0}(0, 0) & y^* f_{x_0 \lambda}(0, 0) \\ y^* f_{x_0 \lambda}(0, 0) & y^* f_{\lambda \lambda}(0, 0) \end{pmatrix}$$

(On aboutit à cette forme particulièrement simple par l'utilisation réitérée des formules (12)).

L'hypothèse (iv) fait que $y^* f_{\lambda \lambda}(0, 0) = 0$ et que $y^* f_{x_0 \lambda}(0, 0) \neq 0$ si bien que la matrice (20), de déterminant strictement négatif est à la fois non-dégénérée

(1) Le lecteur fera sans difficultés les modifications dues au fait que nous ne distinguons pas ici le rôle du paramètre : $\hat{X} = X \oplus \Lambda$.

et non-définie. La première partie du théorème est conséquence du Corollaire 1.

La dernière assertion du théorème 4 résulte de ce que, si $p > 2$ les courbes

Γ_1 et Γ_2 sont C^1 et que leurs vecteurs tangents v_i en $(0,0)$ sont isotropes pour la forme (21). ■

3^e cas : Remarques sur le cas "général".

Si nous continuons à examiner, cas par cas, les comportements possibles pour φ au voisinage de $(x_{0,1}, \lambda_0)$, nous obtiendrons une infinité de situations à étudier (par exemple : φ polynôme homogène en (x_1, λ) de degré 3, 4, ...). Il nous faudra ensuite envisager les fonctions φ dont le comportement (structure de l'ensemble des zéros) n'est pas caractérisé à partir de leur k -jet en $(x_{0,1}, \lambda_0)$ pour aucun k fini.

Deux concepts permettent d'écartier les cas réellement pathologiques, au moins pour un temps, il s'agit de la généricité et de la stabilité. ■

a) Généricité. Le problème (1) - (2), (3), (4) est posé pour une fonction f appartenant à un espace de Baire (par exemple : $C^p(X \times \Lambda; Y)$, $C^\infty(X \times \Lambda; Y)$...) nous dirons donc qu'un cas se présente de façon générique s'il a lieu pour tout f dans un G_δ -dense de cet espace de Baire. On peut aussi travailler sur l'espace de Baire des fonctions f qui correspondent à des problèmes voisins de (1) - (2) ayant un sens (physique, ...) dans le cadre d'une application particulière. Une telle optique est celle de J.H. ALBERT [2], A.M. MICHELETTI [7] dans un problème lié à l'étude de la factorisation (8).

On peut aussi, bien que l'interprétation en termes du problème initial ne soit pas aussi évidente, dire qu'une situation est générique si elle a lieu pour un G_δ -dense de fonctions φ intervenant dans l'équation de bifurcation (11), (17). Ce point de vue est adopté dans l'exposé n° 8, et permet d'éviter des équations de bifurcation "pathologiques". ■

b) Stabilité. Faisons l'hypothèse ⁽¹⁾ que de petites perturbations du problème initial (1) - (2), (3), (4) conduisent à de petites perturbations de l'équation de bifurcation (17). (Des exemples simples montrent que ceci n'est pas toujours vrai). Dans ce contexte les fonctions φ (17) - (12) telles que l'aspect qualitatif (nombre de branches, intersection de ces branches ...) soit conservé par la perturbation de (17) sont particulièrement importantes ; dans le cadre du § 2.1 il est possible de les caractériser à l'aide des résultats suivants ⁽²⁾.

(cf. V. GUILLEMIN et M. GOLUBITSKY [5]).

DEFINITION 1. Soit f une fonction C^∞ d'une variété compacte sans bord X dans R ; f est une fonction de Morse si tous les points critiques de f sont non dégénérés.

DEFINITION 2. Soient f et f' deux fonctions de $C^\infty(X, R)$, nous dirons

- ⁽¹⁾ La vérification concrète d'une telle hypothèse est possible dans certains cas pratiques, elle fait appel à l'étude de la perturbation du spectre de l'opérateur $D_X f$.
- ⁽²⁾ Nous énonçons ces résultats dans le cadre d'une variété C^∞ compacte sans bord. Pour les appliquer soit B une boule de centre $(x_0, 1, \lambda_0)$ dans $R^{\dim X_1 + \dim \Lambda}$, on suppose $\varphi \in C^\infty(\bar{B})$ et on prolonge φ à $S^{\dim \Lambda + \dim X_1}$.

que f est équivalente à f' s'il existe deux difféomorphismes $g : X \rightarrow X$,
 $h : R \rightarrow R$ tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & R \\ g \downarrow & & \downarrow h \\ X & \xrightarrow{f'} & R \end{array}$$

DEFINITION 3. Soit $f \in C^\infty(X, R)$ f est stable si et seulement s'il existe un voisinage de f dans $C^\infty(X, R)$ formé de fonctions équivalentes à f .

Nous avons la caractérisation.

THEOREME 5. Soit $f \in C^\infty(X, R)$ où X est une variété C^∞ compacte sans bord. Alors f est stable si et seulement si f est une fonction de Morse dont toutes les valeurs critiques sont distinctes. De plus les fonctions de Morse forment un ouvert dense de $C^\infty(X, R)$.

Remarque. Si $f \sim f'$ on a

$$f^{-1}(0) = g^{-1} \circ (f')^{-1}(h^{-1}(0))$$

et par conséquent il existe un difféomorphisme de X qui fait correspondre aux zéros de f ceux de $f' - h^{-1}(0)$. Qualitativement la situation est donc la même (nombre de branches ...).

Nous pouvons donc conclure de ceci que la discussion du § 2.1 (cas 1 et 2) traite complètement le problème initial lorsque l'équation de bifurcation fait intervenir une fonction φ stable et très régulière. Dans le cadre général du § 2, lorsque la dimension de Y_2 est supérieure à 1 d'autres situations sont à envisager, même en se limitant au cas des "équations de bifurcation" stables.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. ABRAHAM, J. ROBBIN. Transversal mappings and flows. W.A. Benjamin, New York, 1967.
- [2] J.H. ALBERT. Nodal and critical sets for eigenfunctions of elliptic operators. Proc. Symp. Pure Math. (A.M.S.), 23, (1973).
- [3] H.G. CRANDALL, P.H. RABINOWITZ. Bifurcation from simple eigenvalues. J. Funct. Anal. 8, (1971).
- [4] J. DIEUDONNE. Eléments d'analyse. Gauthier-Villars Paris.
- [5] M. GOLUBITSKY, V. GUILLEMIN. Stable mappings and their singularities. Springer, Berlin, Grad. texts in Math. n° 14, (1973).
- [6] D. D. JOSEPH. Stability of convection in containers of arbitrary shape. J. Fluid Mech. 47, (1971).
- [7] A.M. MICHELETTI. Perturbazione dello spettro dell'operatore di Laplace, in relazione ad una variazione del campo. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 26, (1972).
- [8] J. MILNOR. Morse theory. Annals of Math. Studies, Princeton U. press n° 51, (1963).
- [9] L. NIRENBERG. Topics in Nonlinear Functional Analysis. Courant Inst. New York (1974).
- [10] R.S. PALAIS. Seminar on the Atiyah-Singer index theorem. Annals of Math. Studies, Princeton U. Press n° 57, (1965).
- [11] D.H. SATTINGER. Topics in stability and bifurcation theory. Springer Berlin Lect. Notes in Math. N° 309, (1973).
- [12] J.T. SCHWARTZ. Non-linear functional analysis. Gordon & Breach, New York, (1969).

Exposé n° 3

QUELQUES APPLICATIONS DU DEGRE TOPOLOGIQUE
A DES EQUATIONS ELLIPTIQUES NON LINEAIRES

par

A. LICHNEWSKY

Dans cet exposé, qui s'inspire largement de L. NIRENBERG [5], nous donnons plusieurs exemples d'applications du degré topologique à l'existence de solutions de problèmes aux limites elliptiques. La méthode de factorisation d'un opérateur de Fredholm, déjà utilisée dans l'exposé n° 2, nous permet de retrouver ici un résultat de LANDESMAN et LAZER [3]. ■

§ 1. CADRE ET NOTATIONS.

Soit Ω un ouvert borné et connexe de \mathbb{R}^n dont le bord $\partial\Omega$ est une variété C^∞ ; Ω étant, localement, situé d'un même côté de $\partial\Omega$.

On note P un opérateur différentiel elliptique à coefficients $C^\infty(\bar{\Omega})$:

$$(1) \quad P = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) \frac{\partial}{\partial x^\alpha} .$$

Afin de pouvoir formuler le problème aux limites, on se donne une famille $(B_j)_{j=1}^m$ d'opérateurs différentiels à coefficients C^∞ définis sur $\partial\Omega$ d'ordre strictement inférieur à $2m$. Etant donné des fonctions f et g_j ($j = 1, \dots, m$) appartenant respectivement à $C^\infty(\bar{\Omega})$ et $C^\infty(\partial\Omega)$, nous considérons le problème aux limites :

$$(2) \quad Pu = f \text{ dans } \Omega \quad B_j u = g_j \text{ sur } \partial\Omega \quad (j = 1, \dots, m) .$$

Nous nous restreindrons ici au cas de conditions aux limites homogènes : $g_j = 0$ ($j = 1, \dots, m$) et nous dirons, avec L. Nirenberg, que le problème (2) est bien posé si les conditions (3) ci-dessous sont satisfaites (\dagger)

- (3)
- (a) $\ker P \subset C^\infty(\bar{\Omega})$; $\dim \ker P = \nu < +\infty$
 - (b) Il existe deux espaces de Banach X et Y tels que P soit continu et Fredholm de X dans Y (ceci signifie que P a une image fermée dans Y de codimension finie ν^*).

Les conditions précises, portant sur P et les B_j , qui font que le problème (2) est bien posé sont complètement explicitées dans J.L. Lions et Magenes [4], Agmon, Douglis et L. Nirenberg [1], L. Hormander [2]. ■

§ 2. UNE EQUATION ELLIPTIQUE NON LINEAIRE.

Supposons le problème aux limites (2) bien posé au sens de (3). Soit g une fonction $C^\infty(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^{\ell})$ (\ddagger) ; nous étudions ici le problème aux limites non linéaire :

(\dagger) Afin de simplifier les notations, nous notons aussi P l'opérateur (1) opérant sur un espace de fonctions satisfaisant aux conditions aux limites.

(\ddagger) Nous notons ℓ le nombre de multi-indices β $0 \leq |\beta| \leq 2m - 1$.

$$(4) \quad Pu = g(x, u, \dots, \partial^\beta u) \text{ dans } \Omega ; \quad Bu = 0 \text{ sur } \partial\Omega \quad (|\beta| \leq 2m-1)$$

Nous faisons l'hypothèse suivante sur g :

(5) Il existe des constantes $\gamma < 1$ et $M > 0$ telles que :

$$|g(x, u, \dots, \partial^\beta u)| \leq M \left(1 + \sum_{|\beta| \leq 2m-1} |\partial^\beta u| \right)^\gamma$$

Dans ce paragraphe, nous supposons aussi que P est d'indice $\nu - \nu^*$ nul et que $\ker P = \{0\}$ si bien que P^{-1} existe. En posant $g(x, u, \dots, \partial^\beta u) = G[u]$, nous pouvons écrire (4) sous la forme :

$$(4\text{bis}) \quad u - P^{-1}G[u] = 0 .$$

Nous allons maintenant prouver le :

THEOREME 1. Sous les hypothèses ci-dessus, le problème (4) admet au moins une solution dans $C^\infty(\bar{\Omega})$.

Preuve : La démonstration repose sur l'utilisation de la théorie du degré de Leray-Schander dans l'espace de Banach $X = \{u \in C^{2m-1}(\bar{\Omega}), Bu = 0 \text{ sur } \partial\Omega \ (j=1, \dots, m)\}$.

(a) Une estimation à priori : Soit $p > n$ fixé et soit u une solution de (4) dans $W^{2m,p}$; alors, en utilisant une estimation à priori classique sur l'opérateur linéaire, il vient :

$$\begin{aligned} \|u\|_{2m,p} &\leq C \|G[u]\|_{0,p} \leq CM \left\{ \int_{\Omega} \left(1 + \sum_{|\beta| \leq 2m-1} |\partial^\beta u| \right)^{p\gamma} dx \right\}^{1/p} \\ &\leq C'M \left\{ \left(\int_{\Omega} (1 + \sum |\partial^\beta u|^p) dx \right)^\gamma (\text{mes } \Omega)^{1-\gamma} \right\}^{1/p} \\ &\leq C''M \|u\|_{2m-1,p}^\gamma \end{aligned}$$

Comme $\gamma < 1$, ceci implique que :

$$(6) \quad \|u\|_{2m,p} \leq C_1$$

et, avec le théorème de Sobolev ($p > n$) :

$$(7) \quad \|u\|_{C^{2m-1}(\bar{\Omega})} \leq C_2 .$$

(b) Fin de la démonstration :

Soit B la boule de $X = C^{2m-1}(\bar{\Omega})$: $B = \{ u \mid \|u\|_{C^{2m-1}} \leq C_2 + 1 \}$.

On définit l'application Φ de X dans lui-même par $\Phi(u) = u - P^{-1}G[u]$; du fait de l'estimation (7), Φ n'a pas de zéro sur ∂B . L'application $u \rightarrow G[u]$ est bornée de $C^{2m-1}(\bar{\Omega})$ dans $L^p(\Omega)$ (+); il s'ensuit (cf. [4], [1]) que l'application $P^{-1}G[.]$ est bornée de X dans $W^{2m,p}(\Omega)$ et donc compacte de X dans lui-même. Il est aisé de vérifier la continuité de cette application. Les conditions requises pour appliquer la théorie de Leray-Schauder sont vérifiées et, de plus, le degré de l'application $\Phi : \bar{B} \rightarrow X$ est défini en 0. Il nous reste à prouver que $\deg(\Omega, \Phi, 0) \neq 0$; pour cela, nous introduisons la famille d'applications $\Phi_t : u \rightarrow u - tP^{-1}G[u]$ $t \in [0, 1]$. Du fait de l'estimation (7), les applications Φ_t n'ont pas de zéros sur ∂B et $\deg(\Omega, \Phi_t, 0)$ est indépendant de t . En particulier :

$$\deg(\Omega, \Phi, 0) = \deg(\Omega, \Phi_1, 0) = \deg(\Omega, \Phi_0, 0) = \deg(\Omega, \text{Id}, 0) = 1 .$$

Ce degré n'étant pas nul, Φ admet un zéro au moins dans B , la régularité C^∞ de cette solution de (4) est établie ensuite de manière classique. ■

(+) Nous utilisons le fait que Ω est borné.

§ 3. PERTURBATIONS FAIBLEMENT NON LINEAIRES D'OPERATEURS LINEAIRES.

Nous étudions ici un exemple de problème de "valeur propre" non-linéaire.

Plus précisément, nous supposons ici que le problème aux limites (2) est bien posé au sens de (3), mais que l'opérateur P est d'index nul ($\nu = \nu^*$) et de noyau $\ker P \neq \{0\}$. La factorisation des opérateurs Fredholm joue ici aussi un rôle essentiel.

§ 3.1. Cadre abstrait.

Soient X et Y deux espaces de Banach et A un opérateur linéaire continu de X dans Y qui est Fredholm d'index nul. Nous décomposons X et Y de la façon suivante :

(i) $X_1 = \ker A$ est de dimension $d < +\infty$

(ii) $AX = Y_1$ est fermé dans Y de codimension $d^* = d$.

On pose :

$$X = X_1 \oplus X_2 \quad Y = Y_1 \oplus Y_2 = QY + (I - Q)Y$$

où on a noté Q le projecteur de Y sur $Y_1 = AX$ parallèlement à Y_2 . Comme X_1 et Y_2 ont la même dimension d , il existe un isomorphisme linéaire Λ de X_1 sur Y_2 .

Nous avons maintenant le résultat suivant :

THEOREME 2. Soit K une application compacte non-linéaire de X dans Y telle qu'il existe des constantes R_0 et ϵ satisfaisant :

$$(8) \quad \|QK(x)\|_Y = o(\|x\|) \text{ uniformément pour } \|x\| \rightarrow \infty$$

$$(9) \quad (I - Q)K(x_1 + x_2) \neq 0 \quad \text{pour } x_1 \in X_1 \quad \text{et} \quad \|x_1\| \geq R_0$$

$$x_2 \in X_2 \quad \|x_2\| \leq \epsilon \|x_1\|$$

$$(10) \quad \text{L'application } \Lambda^{-1}(I - Q)K(x_1) \text{ a un degré } \deg(\Lambda^{-1}(I - Q)K, \partial B_{R_0}, 0) \neq 0 \quad (\dagger)$$

Alors, pour tout $y_0 \in Y_1$, il existe une solution au moins de :

$$(11) \quad Ax + Kx = y_0$$

Preuve : (a) Posons $K_0 = K - y_0$; une solution de (11) est solution de

$Ax + K_0x = 0$. On vérifie immédiatement que K_0 satisfait aux conditions (8) - (9) - (10).

(On remarque que $y_0 \in Y_1$ entraîne $(I - Q)y_0 = 0$). Ceci nous ramène au cas $y_0 = 0$;

nous décomposons l'équation (11) dans le système équivalent :

$$(12) \quad A(x_2) + QK(x_1 + x_2) = 0 \quad x_1 \in X_1 ; \quad x_2 \in X_2$$

$$(13) \quad (I - Q)K(x_1 + x_2) = 0 .$$

On pose $z = A(x_2) = A(x)$ et on a alors :

$$(14) \quad \begin{aligned} Z + QK(x_1 + A^{-1}(z)) &= 0 \\ (I - Q)K(x_1 + A^{-1}(z)) &= 0 . \end{aligned}$$

Notons $y_2 = \Lambda x_1$, ce qui donne le système

$$(15) \quad \begin{aligned} 0 &= Z + QK(\Lambda^{-1}y_2 + A^{-1}(z)) \in Y_1 \\ 0 &= (I - Q)K(\Lambda^{-1}y_2 + A^{-1}(z)) \in Y_2 \end{aligned}$$

Les termes de droite de ce système représentent une application de Y dans Y de la forme $I + C$ où C est l'opérateur compact $C(z + y_2) = K(\Lambda^{-1}y_2 + A^{-1}z) - y_2$.

Nous allons maintenant montrer que le degré de Leray-Schauder de cette application

(†) Nous notons B_{R_0} la boule de X_1 de rayon R_0 pour la norme induite par la norme sur X .

est bien défini et non nul dans une boule $B_R = \{y \mid \|y\| \leq R\}$ assez grande.

(b) Supposons que $I + C$ ait un zéro sur ∂B_R ; il vient :

$\|z\| \leq 0(\|y_2\| + \|z\|)$ du fait de (15-1) et de (8), et donc $\|z\| = 0(\|y_2\|)$. L'opérateur Λ étant un isomorphisme et A^{-1} étant continu de Y_1 dans X_2 : $\|A^{-1}(z)\| = 0(\|\Lambda^{-1}y_2\|)$.

et (9) montre que l'équation (15-2) ne peut être satisfaite si R est assez grand.

Le même argument montre que l'homotopie $t \in [0, 1]$, $t \rightarrow F_t$:

$$Y_1 \oplus Y_2 \rightarrow Y_1 \oplus Y_2$$

$$z + y_2 \rightarrow (z + tQK(\Lambda^{-1}y_2 + A^{-1}z)) + ((I - Q)K(\Lambda^{-1}y_2 + tA^{-1}z))$$

induit une homotopie de ∂B_R dans $Y - \{0\}$. Le degré $\deg(F_t, \partial B_R, 0)$ est invariant lorsque t décrit $[0, 1]$.

Lorsque $t = 0$, F_0 est une application produit :

$$F_0 : z + y_2 \rightarrow z + (I - Q)K(\Lambda^{-1}y_2)$$

dont le degré est donc le produit des degrés des deux facteurs, soit aussi le degré de l'application de y_2 dans lui-même : $(I - Q)K\Lambda^{-1}$. L'hypothèse (5) et le fait que Λ soit un isomorphisme linéaire impliquent que ce degré est non nul. Finalement, l'application $F_1 = I + C$, introduite en (15), possède au moins un zéro dans B_R , pour un R choisi assez grand.

Ceci achève la démonstration du théorème. ■

§ 3.2. Un cas particulier important.

LEMME 1. Supposons que l'espace de dimension finie Y_2 ait un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. La condition (10) sera vérifiée lorsque :

$$(16) \quad \langle (I - Q)K(x_1), \Lambda x_1 \rangle \neq 0 \quad \text{pour tout } x \in \partial B_{R_0} \quad (R_0 > 0) \quad \blacksquare$$

Preuve : L'application de X_1 dans lui-même $\Lambda^t \Lambda$ est un isomorphisme de degré 1 en 0 ; la formule permettant le calcul du degré des applications composées implique que :

$$\begin{aligned} \deg(\Lambda^{-1}(I - Q)K, \partial B_{R_0}, 0) &= \deg((\Lambda^t \Lambda)^{-1}(I - Q)K, \partial B_{R_0}, 0) \\ &= \deg(\Lambda^t(I - Q)K, \partial B_{R_0}, 0) . \end{aligned}$$

Maintenant, en notant aussi $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire sur X_1 , nous avons :

$$\langle \Lambda^t(I - Q)K(x_1), x_1 \rangle = \langle (I - Q)K(x_1), \Lambda x_1 \rangle \neq 0 \text{ sur } \partial B_{R_0} .$$

On vérifie que ceci implique que $\Lambda^t(I - Q)K$ est homotope à $\pm I^{(+)}$ dans $X_1 - \{0\}$.

Si, par exemple, le signe de la ligne (17) est > 0 , nous avons l'homotopie ($\mu \in [0, 1]$)

$$\mu \rightarrow (1 - \mu)I + \mu \Lambda^t(I - Q)K \quad \text{et}$$

$$(18) \quad \langle [(1 - \mu)I + \mu \Lambda^t(I - Q)K]x_1, x_1 \rangle = (1 - \mu)\|x_1\|^2 + \mu \langle \Lambda^t(I - Q)K(x_1), x_1 \rangle > 0$$

montre que l'application ne s'annule sur ∂B_R pour aucune valeur du paramètre μ .

Lorsque la ligne (17) a un signe négatif, on procède de même avec $-I$. ■

§ 3.3. Une application.

Nous montrons à présent, sur un cas particulier, que le théorème 2 ci-dessus permet de résoudre des problèmes de résonance non-linéaires tels que ceux envisagés par E. LANDESMAN et A. LAZER [3]. On trouvera dans L. NIRENBERG [5] et [6] des généralisations de ces résultats utilisant les mêmes techniques que le théorème 2.

Soient f une fonction de $C^1(\bar{\Omega})$ et g une fonction de $C(\bar{R})$ ayant les limites $g(\pm\infty)$ lorsque $x \rightarrow \pm\infty$ et telle que $g(-\infty) < g(x) < g(+\infty)$. Soit, d'autre part, λ_1 une valeur propre simple du problème :

(+) I représente l'identité.

$$(19) \quad \begin{aligned} -\Delta u + \lambda_1 u &= 0 && \text{dans } \Omega \\ u &= 0 && \text{sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

Notons w une fonction propre associée. Nous étudions le problème :

$$(20) \quad \begin{aligned} -\Delta u + \lambda_1 u &= f - g(u) && \text{dans } \Omega \\ u &= 0 && \text{sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

Pour nous ramener aux notations du paragraphe 3.2, posons :

$$X = \{u \mid u \in W^{2,p}(\Omega), u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}, \quad p > n \quad \text{et} \quad Y = L^p(\Omega);$$

l'opérateur A est $-\Delta + \lambda_1 I$ et l'opérateur non-linéaire K est l'opérateur compact de X dans Y : $u \mapsto g(u) - f$. Le noyau X_1 est l'espace de dimension 1 engendré par w . \square

Nous commençons par établir une condition nécessaire pour que le problème admette une solution. A cet effet, nous tirons de (20) :

$$\int_{\Omega} (f - g(u))w \, dx = \int_{\Omega} (-\Delta u + \lambda_1 u)w \, dx = \int_{\Omega} u(-\Delta w + \lambda_1 w) \, dx = 0$$

car le laplacien est autoadjoint dans $L^2(\Omega)$. De $\int_{\Omega} (f - g(u))w \, dx = 0$, nous déduisons :

$$(21) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} f w \, dx &< g(+\infty) \int_{w>0} w \, dx + g(-\infty) \int_{w<0} w \, dx \\ \int_{\Omega} f w \, dx &> g(+\infty) \int_{w<0} w \, dx + g(-\infty) \int_{w>0} w \, dx \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Nous pouvons à présent énoncer le résultat d'existence :

THEOREME 3. Supposons que Ω soit un ouvert borné de \mathbb{R}^n de classe C^3 , que f soit une fonction de $C^1(\bar{\Omega})$ et que la fonction g de $C(\bar{\mathbb{R}})$ admette les limites $g(\pm\infty)$ lorsque $g \rightarrow \pm\infty$ et soit telle que $g(-\infty) < g(x) < g(+\infty) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Supposons que λ_1 est une valeur propre simple du problème de Dirichlet (19) à laquelle correspond

le vecteur propre w . Une condition nécessaire et suffisante pour que (20) ait une solution est que les inégalités (21) soient vérifiées.

Preuve : La nécessité de (21) a été prouvée ci-dessus ; il nous faut simplement vérifier que les hypothèses du théorème 2 sont satisfaites pour achever la démonstration.

(i) Il résulte des hypothèses faites sur g et du fait que Ω est borné que l'image de l'opérateur K est bornée dans Y . ■

(ii) Les sous-espaces propres du laplacien correspondant à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux dans $L^2(\Omega)$ si bien que :

$$(22) \quad (I - Q)K(x_1 + x_2) = \frac{w}{\|w\|^2} \int_{\Omega} w \cdot (g(u_1 + u_2) - f) dx$$

$$\text{où} \quad x_1 = u_1 \in X_1 \quad u_1 = \theta w \quad \theta \in \mathbb{R}$$

$$x_2 = u_2 \in X_2$$

Il nous faut expliciter les constantes R_0 et ϵ telles que (9) ait lieu ; pour cela, nous utiliserons le fait que l'ensemble des zéros de w est de mesure nulle.

Posons :

$$(23) \quad 0 < \alpha = \min \left\{ \int_{\Omega} f w dx - g(+\infty) \int_{w < 0} w dx - g(-\infty) \int_{w > 0} w dx ; \right. \\ \left. g(+\infty) \int_{w > 0} w dx + g(-\infty) \int_{w < 0} w dx - \int_{\Omega} f w dx \right\} .$$

La fonction w est continue, soit u l'ouvert de Ω : $u = \{\xi \mid \xi \in \Omega, w(\xi) \neq 0\}$;

pour tout réel positif β donné, il est possible de trouver un fermé $V \subset u$ tel que

$$\text{mes}(\Omega - V) \leq \beta .$$

Nous prenons $\beta = \frac{\alpha}{8} \left(\|w\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot (g(+\infty) - g(-\infty)) \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \right)^{-1}$. Ceci étant, V est compact

et soit $\gamma = \min_{\xi \in V} |w(\xi)| > 0$; d'après le théorème de Sobolev, il existe $C_1 > 0$, tel que

$$|u_2|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1 |u_2|_X = C_1 |u_2|_{W^{2,p}(\Omega)}$$

et, comme $u_1 = \theta w$, $\theta \in \mathbb{R}$

$$\min_{\xi \in V} |u_1(\xi)| = |\theta| \gamma = \frac{|u_1|_X}{|w|_X} \cdot \gamma .$$

Si nous choisissons $\epsilon = 1/2 \cdot \gamma \cdot (C_1 |w|_X)^{-1}$ et si $|u_2|_X \leq \epsilon |u_1|_X$, nous

aurons aussi :

$$\begin{aligned} |u_2|_{L^\infty(\Omega)} &\leq C_1 |u_2|_X < \epsilon C_1 |u_1|_X = \epsilon C_1 \gamma^{-1} |w|_X \left\{ \min_{\xi \in V} |u_1(\xi)| \right\} \\ &\leq \frac{1}{2} \left\{ \min_{\xi \in V} |u_1(\xi)| \right\} \end{aligned}$$

et

$$(24) \quad \left\{ \min_{\xi \in V} |(u_1 + u_2)(\xi)| \right\} \geq \frac{1}{2} \left\{ \min_{\xi \in V} |u_1(\xi)| \right\} \geq \frac{\gamma}{2|w|_X} |u_1|_X .$$

La relation (24) fait que, pour R_0 assez grand et pour $|u_1|_X \geq R_0$, on a :

soit

$$(25) \quad g(+\infty) - \eta \leq g(u_1 + u_2)(\xi) \leq g(+\infty)$$

soit

$$(25') \quad g(-\infty) \leq g(u_1 + u_2)(\xi) \leq g(-\infty) + \eta$$

pour tout $\xi \in V$ et pour $\eta = \frac{\alpha}{8} |w|_{L^\infty(\Omega)}^{-1} \text{mes } \Omega^{-1}$.

Il est maintenant aisé de vérifier que l'hypothèse

$$(26) \quad |u_2|_X \leq \epsilon |u_1|_X \quad ; \quad |u_1|_X \geq R_0$$

entraîne (9), soit, avec (22) :

$$(27) \quad \int_{\Omega} w \cdot (g(u_1 + u_2) - f) dx \neq 0 .$$

Considérons le cas $u_1 = \theta w$ et $\theta > 0$; nous avons alors :

$$\left| \int_{\Omega} w \cdot (g(u_1 + u_2) - f) dx - \int_V w (g(u_1 + u_2) - f) dx \right| \leq \frac{\alpha}{8} \alpha$$

$$\left| \int_V w(g(u_1 + u_2) - f) dx - g(+\infty) \int_{V \cap \{w>0\}} w dx - g(-\infty) \int_{V \cap \{w<0\}} w dx - \int_V f w dx \right| \leq \frac{\alpha}{8} \alpha$$

$$\left| g(+\infty) \int_{V \cap \{w>0\}} w dx + g(-\infty) \int_{V \cap \{w<0\}} w dx - \int_V f w dx - g(+\infty) \int_{w>0} w dx - (g(-\infty) \int_{w<0} w dx - \int_{\Omega} f w dx) \right| \leq \frac{\alpha}{4} \alpha$$

En regroupant ces inégalités, (23) entraîne (27). Le traitement du cas $\theta < 0$ est similaire. ■

(iii) La vérification de la troisième hypothèse, du fait de (22) et du lemme 1, se ramène à la vérification de l'hypothèse (ii) lorsque, de surcroît $x_2 \equiv 0$. ■

Le théorème 3 est à présent une conséquence du théorème 2. ■

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. AGMON, A. DOUGLIS, L. NIRENBERG, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions
(I) Comm. Pure Appl. Math. 12 (1959), p. 623-727 ;
(II) id. 17 (1964), p. 35-92.
- [2] L. HORMANDER, Linear partial differential operators, Springer Berlin (1969).
- [3] E.H. LANDESMAN, A.C. LAZER, Non linear perturbations of linear elliptic boundary value problem at resonance, Jour. Math. Mech. 19 (1970), p. 609-623.
- [4] J.L. LIONS, E. MAGENES, Problèmes aux limites non homogènes et applications, Paris, Dunod (1968).
- [5] L. NIRENBERG, Topics in non linear functional analysis, Publ. Courant Inst. of Math. Sci., New-York (1974).
- [6] L. NIRENBERG, An application of generalized degree to a class of non linear problems, 3rd Colloq. Analyse Fonctionnelle Liège (1970) (Math. Vander. 1971, p. 57-74).

Exposé n° 4

VALEURS ET POINTS SINGULIERS D'UNE APPLICATION FREDHOLM DE

TYPE (1,1)

par

J.C. SAUT

-:-

Dans cet exposé, on montre, en suivant Ambrosetti-Prodi [1] (et l'exposé de ce travail dans Nirenberg [3]), que, sous certaines conditions de non-dégénérescence, l'ensemble des points singuliers d'une application Fredholm ϕ de type (1,1) est localement une variété de codimension 1. Si de plus f est propre, une version globale de ce résultat montre que l'ensemble des valeurs singulières est une variété de codimension 1, et permet de compter le nombre de solutions de $\phi(x) = y$. Ceci est appliqué à un problème non linéaire du type $\Delta U + f(U) = g$.

§ 1. RESULTATS ABSTRAITS.

DEFINITION 1.1. Soit X un Banach ; un sous-ensemble M de X est une C^k -variété de codimension 1, si pour tout $x_0 \in M$, il existe un voisinage

ouvert U de x_0 et une fonctionnelle Γ de classe C^k sur U telle que

(i) $\Gamma'(x_0) \neq 0$, (ii) $M \cap U = \{x \in U, \Gamma(x) = 0\}$.

PROPOSITION 1.2. Soit M une C^k -variété de codimension 1, fermée,
connexe dans le Banach X .

Alors $X \setminus M$ a au plus 2 composantes connexes.

Démonstration.

Supposons qu'il existe 3 ouverts non vides A_1, A_2, A_3 de $X \setminus M$, deux à deux disjoints, tels que $X \setminus M = A_1 \cup A_2 \cup A_3$; $X \setminus M$ étant ouvert, chaque A_i est aussi ouvert dans X .

Posons $B_i = \partial A_i$ ($i = 1, 2, 3$). Alors $B_i \neq \emptyset$ (sinon A_i serait ouvert et fermé dans X). On a aussi évidemment $B_i \subset M$.

Maintenant, pour tout $u_0 \in M$, il existe, d'après les propriétés de M , un voisinage ouvert U de u_0 tel que $U \cap (X \setminus M)$ ait exactement 2 composantes connexes; donc seuls deux des ensembles A_i peuvent avoir une intersection non vide avec U . Il en résulte que $U \cap M$ ne peut être contenu que dans au plus deux des B_i .

De plus, si $u_0 \in B_i$, alors une des deux composantes connexes de $U \cap (X \setminus M)$ est contenue dans A_i ; tout point de $U \cap M$ est alors un point frontière de A_i , i.e. appartient à B_i . Les B_i sont donc ouverts et fermés dans M . Puisque M est connexe, on a donc $M = B_i$, $i = 1, 2, 3$, mais ceci contredit le fait que tout point de M appartient à au plus deux des B_i . ■

THEOREME 1.2. Soient X, Y des Banach, Ω un ouvert de X et
 $\Phi : \Omega \rightarrow Y$ de classe C^k , $k \geq 2$; soit $x_0 \in \Omega$.

On suppose :

(i) $D\Phi(x_0)$ est Fredholm de type $(1, 1)$.

(ii) Soit $v_0 \in X$ engendrant $\ker D\Phi(x_0)$ et $\gamma_0 : Y \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$\text{Im } D\Phi(x_0) = \{z \in Y, \gamma_0(z) = 0\}$; alors la fonctionnelle linéaire sur X ,

$x \mapsto F(x) = \gamma_0(D^2\Phi(x_0)(v_0, x))$ n'est pas identiquement nulle.

Alors, dans un voisinage de x_0 , l'ensemble W des points singuliers de
 Φ est une C^{k-1} -variété de codimension 1 .

Si la condition (ii) est remplacée par :

(ii)' $\gamma_0(D^2\Phi(x_0)(v_0, v_0)) \neq 0$,

alors il existe un voisinage ouvert U de x_0 tel que $\Phi(W \cap U)$ soit une C^{k-1} -
variété de codimension 1 dans Y .

Démonstration.

On peut évidemment supposer que $x_0 = 0$. D'après le 1^{er} exposé (corollaire 1.11), $\ker D\Phi(x)$ est, au voisinage de $x = 0$, soit réduit à 0 , soit de dimension 1 . Dans ce dernier cas, on voit facilement que $\ker D\Phi(x)$ est engendré par un vecteur de la forme $v_0 + w(x)$ où $w(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$. En effet, posons $T_0 = D\Phi(0)$, $T = D\Phi(x)$, $S = T - T_0$. Soient X_2 un supplémentaire topologique de $\ker T_0$, Z un supplémentaire topologique de $\text{Im } T_0$, π et π' les projections associées sur $\text{Im } T_0$, Z respectivement. Soit v un vecteur engendrant $\ker T$. Alors $v = \lambda v_0 + w$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $w \in X_2$.

L'équation $Tv = 0$ équivaut à

$$(*) \quad \begin{cases} T_0 w + \pi S(\lambda v_0 + w) = 0 \\ \pi' S(\lambda v_0 + w) = 0 \end{cases}$$

T_0 étant un isomorphisme de X_2 sur $\text{Im } T_0$, il en est de même de $T_0 + \pi S$ pour S assez petit. Posons $A = (T_0 + \pi S)^{-1}$. La première équation de (*) est alors équivalente à $w + A\pi S(\lambda v_0) = 0$, ce qui montre que $\lambda \neq 0$. On peut alors supposer que $\lambda = 1$ et on obtient $\|w\| \leq \|A\| \|\pi\| \|S\| \|v_0\|$, d'où le résultat, puisque $S \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$.

Ceci étant rappelé, soit $z \in Z$ engendrant Z , choisi tel que $\gamma_0(z) = 1$.

Considérons l'équation

$$(1) \quad D\phi(x)(v_0 + w) + tz = 0, \quad w \in Z, t \in \mathbb{R}.$$

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe au voisinage de $x = 0$ des fonctions $w(x)$, $t(x)$, uniques, de classe C^{k-1} , telles que $w(0) = 0$, $t(0) = 0$ et vérifiant (1).

D'après ce qui précède, l'ensemble W des points critiques de ϕ est, au voisinage de 0 , constitué de l'ensemble $\{x \in \Omega \text{ voisin de } 0 ; D\phi(x)(v_0 + w(x)) = 0\}$ = (d'après (1)) $\{x \in \Omega \text{ voisin de } 0 ; t(x) = 0\}$ (c'est le cas où $\dim \ker D\phi(x) = 1$).

Calculons maintenant la dérivée de (1) par rapport à x en $x = 0$, et appliquons γ_0 . On trouve, puisque par hypothèse $\gamma_0 D\phi(0) = 0$ et $\gamma_0(z) = 1$:

$$\gamma_0(D^2\phi(0)(v_0, x) + t_x(0)x) = 0 \quad \forall x \in X.$$

D'après l'hypothèse (ii), la fonctionnelle linéaire $t_x(0)$ n'est pas identiquement nulle et donc, près de l'origine, W est une C^{k-1} variété de codimension 1.

Ceci montre la première partie du théorème.

Pour montrer la seconde, considérons l'application ψ , définie dans un voisinage U de l'origine par $\psi(x) = \phi(x) + \gamma_0(D\phi(x)(v_0+w(x)))z$.

D'après la construction de w , on a $\psi \equiv \phi$ sur $W \cap U$. Différentions ψ à l'origine :

$$D\psi(o)x = D\phi(o) + \gamma_0(D^2\phi(o)(v_0, x))z.$$

On voit facilement (écrire $x = \lambda v_0 + w$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $w \in X_2$) que $D\psi(o)$ est injective si et seulement si $\gamma_0(D^2\phi(x_0)(v_0, v_0)) \neq 0$, ce qui est la condition (ii)'. Comme $D\psi(o)$ est Fredholm d'indice nul (perturbation compacte de $D\phi(o)$), on voit d'après le théorème de Banach, que si (ii)' a lieu, $D\psi(o)$ est un isomorphisme de X sur Y et donc, d'après le théorème d'inversion locale, ψ est un C^{k-1} -difféomorphisme d'un voisinage de l'origine dans X sur un voisinage de $\phi(o)$ dans Y , et puisque au voisinage de o $\psi(W) = \phi(W)$, $\phi(W)$ est une C^{k-1} variété de codimension 1. ■

DEFINITION 1.3. Soit $\phi : \Omega \rightarrow Y$ de classe C^k , $k \geq 2$.

Un point singulier x_0 de ϕ est dit point singulier ordinaire s'il vérifie les conditions (i), (ii)' du théorème 1.2. ■

Si x_0 est un point singulier ordinaire, on peut calculer localement le nombre de solutions de l'équation $\phi(x) = y$:

THEOREME 1.4. Soient X, Y Banach, Ω ouvert de X , $\phi : \Omega \rightarrow Y$, de classe C^k , $k \geq 2$. Soit $x_0 \in \Omega$ un point singulier ordinaire. Soit $y_2 \in Y$ un vecteur transversal à $\phi(W)$ en $\phi(x_0) = y_0$. Alors il existe un voisinage U

de x_0 et $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon \neq 0$ tel que

(i) $\forall y \in]y_0, y_0 + \epsilon y_2]$, l'équation $\Phi(x) = y$ a exactement 2 solutions dans U .

(ii) $\forall y \in]y_0, y_0 - \epsilon y_2]$, l'équation $\Phi(x) = y$ n'a pas de solution dans U .

Preuve. Nous utiliserons les notations du théorème 1.2 avec $y_2 = z$; on peut supposer $\gamma_0(y_2) = 1$, $x_0 = 0$, $y_0 = \Phi(x_0) = 0$.

D'après le théorème 1.2, il existe un voisinage U de 0 tel que $\Phi(W \cap U)$ est une C^{k-1} variété de codimension 1.

Pour η réel et petit, soit $y = y_0 + \eta y_2 = \eta y_2$.

Nous allons résoudre l'équation $\Phi(x) = y$ par la méthode de Lyapounov-Schmidt (cf. exposé 2).

Posons $x = x_1 + x_2$, $x_1 = \lambda v \in X_1$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)

$$x_2 \in X_2.$$

L'équation est alors $\Phi(x_1 + x_2) = \eta y_2$. On résoud grâce au théorème des fonctions implicites x_2 en fonction de x_1 et on obtient l'équation de bifurcation (cf. exposé 2), qui est ici une équation scalaire :

$$(2) \quad F(\lambda) \equiv \gamma_0 \Phi(\lambda v + x_2(\lambda v)) = \eta \quad (\text{car } \gamma_0(y_2) = 1)$$

où l'inconnue est λ .

Remarquons maintenant que $\frac{dx_2}{dx_1}(0) = 0$. En effet, soit Q la projection $Y \rightarrow Y_1 = \text{Im } D\Phi(0)$.

On a $Q\Phi(x_1 + x_2(x_1)) = 0$, $x_2(0) = 0$, d'où en différentiant :

$$QD\Phi(0) \left(x_1 + \frac{dx_2}{dx_1}(0)x_1 \right) = 0.$$

Mais $x_1 \in \ker D\phi(o)$ et on en déduit $D\phi(o) \frac{dx_2}{dx_1}(o)x_1 = o$.

Mais $D\phi(o)|_{X_2}$ est un isomorphisme et $\frac{dx_2}{dx_1}(o)x_1 \in X_2$. Donc $\frac{dx_2}{dx_1}(o)x_1 = o$ et $\frac{dx_2}{dx_1}(o) = o$ comme annoncé.

On a alors $F'(o) = \gamma_o D\phi(o) (v + \frac{dx_2}{dx_1}(o)x_1) = o$.

Finalement, $F(o) = F'(o)$, $F''(o) = \gamma_o D^2\phi(o)(v, v) \neq o$. Ceci implique que l'équation de bifurcation (2) a, pour $o < |\eta|$ assez petit exactement 2 solutions pour $\eta \operatorname{sgn} F''(o) > o$ et aucune pour $\eta \operatorname{sgn} F''(o) < o$. ■

Voici une version globale de ces résultats.

THEOREME 1.5. Soient X, Y banach, $\phi : X \rightarrow Y$ de classe C^k , $k \geq 2$

Fredholm d'index o , vérifiant entre autre

(i) ϕ est propre (cf. exposé 1)

(ii) L'ensemble W des points singuliers de ϕ est non vide, connexe,

et est constitué uniquement de points singuliers ordinaires.

(iii) $\phi|_W$ est bijective.

Alors l'ensemble $M = \phi(W)$ des valeurs singulières de ϕ est une

C^{k-1} -variété de codimension 1 , fermée, connexe. De plus, l'ensemble

$R_\phi = Y \setminus M$ des valeurs régulières de ϕ a exactement 2 composantes connexes

A_1, A_2 telles que

a) si $y \in A_1$, $\phi^{-1}(y) = \emptyset$

b) si $y \in A_2$, $\phi^{-1}(y)$ consiste en 2 points.

Preuve. ϕ est continue et fermée (puisque propre), W est fermé (exposé 1,

lemme 2.3) donc $M = \phi(W)$ est connexe et fermé.

D'après l'hypothèse (ii) et le théorème 1.2, M est une C^{k-1} -variété de codimension 1.

D'après (i) et (iii), $\bar{\varphi}$ est un homéomorphisme de W sur M .

D'après la proposition 1.2, $Y \setminus M$ a au plus 2 composantes connexes.

D'après le lemme 2.13 du 1^{er} exposé, pour tout $y \in R_{\bar{\varphi}}$, le cardinal $N(y)$ de $\bar{\varphi}^{-1}(y)$ est fini et localement constant.

$N(y)$ est donc constant sur chaque composante connexe de $R_{\bar{\varphi}} = Y \setminus M$.

Remarquons que pour tout voisinage U de $x_0 \in W$, il existe un voisinage V de $y_0 = \bar{\varphi}(x_0)$ tel que $\bar{\varphi}^{-1}(V) \subset U$. En effet, il existerait sinon un voisinage U^* de x_0 et une suite x_n telle que $x_n \notin U^*$ et $\bar{\varphi}(x_n) \rightarrow y_0$; $\bar{\varphi}$ étant propre, on pourrait extraire une sous-suite x_{n_k} convergeant vers $x \notin U^*$ et vérifiant $\bar{\varphi}(x) = y_0$, ce qui contredit l'hypothèse (iii).

Par ailleurs, puisque x_0 est un point singulier ordinaire, on peut appliquer le théorème 1.4 pour calculer localement le nombre de solutions de $\bar{\varphi}(x) = y$ quand y appartient à un segment transversal à M en y_0 . Ce nombre est 2 ou 0, selon le côté de M où se trouve y et le théorème 1.5 est démontré. ■

§ 2. APPLICATION

Soit Ω un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^n de frontière $\partial\Omega$ régulière. On note $\|\cdot\|_k$ la norme usuelle sur $C^k(\bar{\Omega})$, k entier ≥ 0 , et $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ l'espace des fonctions de $C^k(\bar{\Omega})$ dont les k^e dérivées sont höldériennes d'ordre α ($0 < \alpha < 1$). C'est un Banach pour la norme

$$\|u\|_{k,\alpha} = \|u\|_k + \sup_{x \neq y} \frac{|D^k u(x) - D^k u(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

On pose $C_0^{k,\alpha}(\bar{\Omega}) = \{u \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}), u|_{\partial\Omega} = 0\}$.

Soient $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots$ la suite des valeurs propres du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{dans } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^3 vérifiant

(F 1) $f(0) = 0$

(F 2) $f'(t) \geq 0$ et $f''(0) > 0$

(F 3) $\lim_{t \rightarrow -\infty} f'(t) = \varrho'$ où $0 < \varrho' < \lambda_1$

(F 4) $\lim_{t \rightarrow +\infty} f'(t) = \varrho''$ où $\lambda_1 < \varrho'' < \lambda_2$.

Fixons-nous $0 < \alpha < 1$ et considérons le problème

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta u + f(u) = g & \text{dans } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

On a alors :

THEOREME 2.1. Il existe dans $C_0^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ une C^1 -variété M de codimension 1, fermée, connexe, telle que $C_0^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) \setminus M$ possède exactement 2 composantes connexes A_1, A_2 telles que

(i) si $g \in A_1$, (1) n'a pas de solution.

(ii) si $g \in A_2$, (1) a exactement 2 solutions dans $C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$

(iii) si $g \in M$, (1) a exactement 1 solution dans $C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Remarque. Le théorème 2.1 est dû à Ambrosetti-Prodi [1] ; dans [2] Berger

et Podolak donnent un résultat un peu plus précis (cf. aussi l'exposé qu'en

donne Nirenberg [3]). Nous donnons ci-dessous les grandes lignes de la démon-

tration d'Ambrosetti et Prodi.

Démonstration (pour les détails, se reporter à [1]).

Soit $\Phi : C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \rightarrow C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ définie par $\Phi(u) = \Delta u + f(u)$.

Φ est de classe C^2 et $D\Phi(u) : v \mapsto \Delta v + f'(u)v$.

La preuve résultera du théorème 1.5 et des 3 lemmes suivants

LEMME 2.2. Φ est propre, Fredholm d'indice nul.

LEMME 2.3. L'ensemble W des points singuliers de Φ est non vide, connexe, constitué uniquement de points singuliers ordinaires.

LEMME 2.4. $\Phi|_W$ est bijective.

Preuve du lemme 2.2. Φ est clairement Fredholm d'indice nul (sa dérivée est une perturbation compacte d'un isomorphisme puisque f' est bornée et l'injection $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \subset C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ est compacte).

Soit u_n une suite de $C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ telle que $\Phi(u_n) = \Delta u_n + f(u_n) = g_n$ converge dans $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$. Une estimation a priori obtenue grâce à (F 3), (F 4) montre que u_n est bornée dans $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ et donc que $\Delta u_n = g_n - f(u_n)$ est borné dans $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, donc que u_n est bornée dans $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$. On peut donc extraire des u_n une sous-suite convergeant dans $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$. L'équation montre qu'elle converge aussi dans $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$. ■

Preuve du lemme 2.3. Nous rappellerons d'abord les résultats bien connus sur les problèmes de valeur propre du type

$$(2) \quad \begin{cases} \Delta v + \mu \rho(x)v = 0 & \text{sur } \Omega \\ v|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

où ρ est une fonction mesurable bornée par 2 constantes positives :

PROPOSITION 2.5. (cf. Courant-Hilbert [4]).

1) Les valeurs propres de (2) sont positives et forment une suite non décroissante tendant vers $+\infty$:

$$0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \quad (\text{comptées suivant leur multiplicité}).$$

2) La première valeur propre μ_1 est simple (donc $\mu_1 < \mu_2$). La fonction propre associée ne s'annule pas dans Ω .

3) La $r^{\text{ème}}$ valeur propre μ_r est une fonction monotone non croissante de ρ . De plus, si $\rho_1(x) < \rho_2(x)$ p.p., alors, notant μ_r^1 (resp. μ_r^2) la $r^{\text{ème}}$ valeur propre relativement à $\rho = \rho_1$ (resp. $\rho = \rho_2$), on a $\mu_r^1 > \mu_r^2$.

4) Il existe un réel $p > 1$ tel que la $r^{\text{ème}}$ valeur propre μ_r dépende continûment de ρ dans la topologie de $L^p(\Omega)$. ■

Montrons maintenant que tous les points singuliers de Φ sont ordinaires :

$u_0 \in W$ est singulier si et seulement si le problème

$$(3) \quad \begin{cases} \Delta v + f'(u_0)v = 0 \\ v|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

a des solutions non triviales. Ceci équivaut au fait que $\mu = 1$ est une valeur propre de $\Delta v + \mu f'(u_0)v = 0$, $v|_{\partial\Omega} = 0$.

D'après la proposition 2.5 3) c'est la plus petite valeur propre puisque $0 < \ell' < f'(u_0(x)) < \ell''$ où $0 < \ell' < \lambda_1 < \ell'' < \lambda_2$.

Elle est donc simple (proposition 2.5 2)). Soit $v_0 \in C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ engendrant $\ker D\Phi(u_0)$. Alors $\text{Im } D\Phi(u_0) = \{g \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}), \int_{\Omega} g v_0 dx = 0\}$.

L'hypothèse (i) du théorème 1.2 est donc bien vérifiée. La fonctionnelle

γ_0 associée à $\text{Im } D\mathfrak{f}(u_0)$ est $z \mapsto \int_{\Omega} z(x) v_0(x) dx$. Par ailleurs, on a

$$D^2\mathfrak{f}(u_0)(v, w)(x) = f''(u_0(x))v(x)w(x).$$

En sorte que la condition (ii)' du théorème 1.2 s'écrit

$$\int_{\Omega} f''(u_0)v_0^3 dx \neq 0,$$

et ceci est vérifiée d'après (F 2) et la proposition 2.5 2) (v_0 est la première fonction propre de (3)).

Il nous reste à montrer que W est non vide et connexe. On va en fait montrer que W a une représentation cartésienne sur un sous-espace linéaire de $C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ de codimension 1 :

soit $s \in C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, $s(x) > 0$ dans Ω et soit Z un sous-espace linéaire de $C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ de codimension 1, tel que $s \notin Z$. Tout élément u de $C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ se représente donc, de manière unique, sous la forme $u = z + \nu s$, $\nu \in \mathbb{R}$, $z \in Z$.

Considérons le problème de valeur propre :

$$(4) \quad \begin{cases} \Delta v + \mu f'(z + \nu s)v = 0 & \text{dans } \Omega \\ v|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

$z \in Z$, fixé, $\nu \in \mathbb{R}$. Soit $\mu(\nu)$ la première valeur propre de (4). D'après la proposition 2.5 4), μ est une fonction continue de ν . Par (F 3) (F 4) et puisque $s(x) > 0$ dans Ω , on a pour tout $x \in \Omega$:

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow -\infty} f'(z(x) + \nu s(x)) &= \varrho' \\ \lim_{\nu \rightarrow +\infty} f'(z(x) + \nu s(x)) &= \varrho'' \end{aligned}$$

De plus, puisque $\varrho' < f'(t) < \varrho''$, on montre facilement que ces limites ont lieu aussi dans $L^p(\Omega)$ (pour tout p). Toujours d'après la proposition 2.5 4)

il s'ensuit que

$$\lim_{\nu \rightarrow -\infty} \mu(\nu) = \frac{\lambda_1}{\varrho^1} > 1$$

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \mu(\nu) = \frac{\lambda_1}{\varrho^{\text{II}}} < 1.$$

Il existe donc $\bar{\nu} \in \mathbb{R}$ tel que $\mu(\bar{\nu}) = 1$; $\bar{\nu}$ est unique puisque μ est strictement décroissante (proposition 2.5 3)).

On a donc montré que toute droite $\nu \mapsto z + \nu s$ coupe W en un point unique, et on voit aisément que ce point dépend continûment de z (W est une variété différentiable et les droites $\nu \mapsto \nu s$ sont transverses à W). ■

Preuve du lemme 2.4. Soit $u_0 \in W$, $\Phi(u_0) = g_0$. Supposons que $\Phi(u) = g_0$ a une autre solution \tilde{u} .

$$\text{Posons } w(x) = \begin{cases} \frac{f(\tilde{u}(x)) - f(u_0(x))}{\tilde{u}(x) - u_0(x)} & \text{si } \tilde{u}(x) \neq u_0(x) \\ f'(u_0(x)) & \text{si } \tilde{u}(x) = u_0(x). \end{cases}$$

Alors $\tilde{u} - u_0$ est une solution non triviale de

$$\begin{cases} \Delta v + \mu w v = 0 & \text{dans } \Omega \\ v|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

avec $\mu = 1$.

Puisque $\varrho^1 < w(x) < \varrho^{\text{II}} < \lambda_2$, on voit que $\tilde{u} - u_0$ est la première fonction propre de ce problème. D'après la proposition 4.5 2), $\tilde{u}(x) - u_0(x)$ a un signe constant sur Ω , et d'après (F 2) $w(x) > f'(u_0(x))$ sur Ω .

Par ailleurs, puisque $u_0 \in W$, le problème

$$\Delta v + \mu f'(u_0)v = 0 \quad \text{sur } \Omega$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0$$

a aussi $\mu = 1$ comme première valeur propre; ceci contredit la proposition 2.5, 3) et prouve le lemme 2.4. ■

REFERENCES

- [1] A. AMBROSETTI, G. PRODI : "On the inversion of some differentiable mappings with singularities between Banach spaces" *Anali di Mat.* 93 (1972), pp 231-246.
- [2] M.S. BERGER, E. POLODAK : "On the solutions of a nonlinear Dirichlet problem" *Indiana Math. J.* 24, vol. 9 (1975) pp 837-846.
- [3] L. NIRENBERG : "Topics in nonlinear functional analysis" *Courant Institute Lecture Notes* 1974.
- [4] R. COURANT, D. HILBERT : "Methods of mathematical physics". Vol. I et II, New York 1962.

Exposé n° 5 ⁽¹⁾

UNE DEMONSTRATION DU LEMME DE MORSE

par

A. LICHNEWSKY

Afin de compléter l'étude faite dans l'exposé n° 2 nous donnons ici une démonstration du lemme de Morse reposant sur l'utilisation du théorème des fonctions implicites, tirée de L. NIRENBERG [2] (cf. aussi L. HORMANDER [1]). Le lecteur trouvera des extensions en dimension infinie de ce résultat dans J.T. SCHWARTZ [4], R. PALAIS [3].

⁽¹⁾ La majeure partie de cet exposé a été insérée dans l'exposé n° 2.

§ 1. LE LEMME DE MORSE.

Soit f une fonction C^p ($p \geq 2$) de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} telle que $f(0) = 0$ et $\nabla f(0) = 0$; le résultat suivant permet de décrire la structure de l'ensemble des zéros de f au voisinage de l'origine.

THEOREME 1. (Lemme de Morse).

Supposons que f soit une application C^p ($p \geq 2$) de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} telle que

(i) $f(0) = 0 = \nabla f(0)$.

(ii) 0 est un point critique non dégénéré : la hessienne $f_{xx}(0)$ est inversible.

Il existe une application $\zeta \in C^{p-2}$ de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n , définie au voisinage de

l'origine telle que

(i) $\zeta(x) = x + o(|x|) \quad |x| \rightarrow 0$

(ii) $f(x) = \frac{1}{2} B(\zeta(x), \zeta(x))$ or on a noté B la hessienne de f en 0 .

COROLLAIRES.

(a) Lorsque $p \geq 3$, ζ est un changement de coordonnées C^{p-2} au voisinage de l'origine.

(b) Sous les hypothèses du théorème 1, il existe une application $\xi \in C^{p-2}$ de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n , définie au voisinage de l'origine telle que

(i) $\xi(x) = x + o(|x|) \quad |x| \rightarrow 0$

(ii) $f(x) = - \sum_{j=1}^{\lambda} (\xi_j(x))^2 + \sum_{j=\lambda+1}^n (\xi_j(x))^2 \quad (1)$

où λ est l'index de la hessienne de f en 0 .

Démonstration du Théorème 1.

Nous cherchons l'application ζ sous la forme :

(1) On note $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$.

$\zeta = R(x)X$ où R est une application C^{p-2} de \mathbb{R}^n dans l'espace $M_n(\mathbb{R})$

des matrices $n \times n$ à coefficients réels, telle que $R(0) = I$: identité. On doit avoir, d'après (ii) :

$$\frac{1}{2}(R_x^* B R_x X, X) = f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} (f(tx)) dt.$$

En intégrant par parties il vient :

$$f(x) = \int_0^1 (1-t) \{f_{xx}(tx)\} (x, x) dt = \left\{ \int_0^1 (1-t) f_{xx}(tx) dt \right\} (x, x) = \frac{1}{2} B_x(x, x).$$

On remarque que l'application $x \rightarrow B_x$ est une application C^{p-2} de \mathbb{R}^n dans l'espace des matrices symétriques. Le problème est finalement de déterminer $R(x)$ vérifiant :

$$(1) \quad \begin{cases} R(0) = I \\ R_x^* B R_x = B_x \end{cases}$$

A cet effet nous étudions maintenant l'application

$$(2) \quad \begin{cases} M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_{n, \text{sym}}(\mathbb{R}) & (1) \\ R \xrightarrow{\psi} R^* B R \end{cases}$$

au voisinage de $R = I$: identité. La dérivée de cette application en R est :

$$D\psi : S \rightarrow R^* B S + S^* B R.$$

en I , ceci est donc : $S \rightarrow B S + S^* B$.

On vérifie immédiatement que cette dernière application est surjective ; en effet, si σ est une matrice symétrique, posons $S = \frac{1}{2} B^{-1} \sigma$ et on obtient

$$B S + S^* B = \frac{1}{2} (B B^{-1} \sigma + \sigma B^{-1} B) = \sigma.$$

Par conséquent, l'application $\psi : (2)$ est une submersion en $R = I$ et possède un inverse ψ^{-1} au voisinage de l'identité. On peut prendre $R_x = \psi^{-1} B_x$ qui est une fonction

(1) On a noté $M_{n, \text{sym}}(\mathbb{R})$ l'espace des matrices symétriques $n \times n$ à coefficients réels.

C^{p-2} . Ceci achève la démonstration.

Démonstration des corollaires.

- (a) résulte du théorème des fonctions implicites.
 (b) résulte de la réduction des formes bilinéaires. ■

§ 2. UNE VARIANTE : LE CAS DE PARAMETRES.

THEOREME 2. Soit $F(x,y)$ une application C^p ($p \geq 2$) de $R^n \times R^d$ dans R , définie dans un voisinage de $(0,0)$ et vérifiant :

$$0 = F_x(0,0) ; F_{xx}(0,0) \text{ est une forme bilinéaire non dégénérée.}$$

Il existe une fonction de R^d dans $R^n : y \rightarrow \bar{x}(y)$, définie au voisinage de 0 , vérifiant :

$$\bar{x}(0) = 0, F_x(\bar{x}(y), y) = 0$$

ainsi qu'une fonction C^{p-2} de $R^n \times R^d$ dans $R^n : \zeta(x,y)$ définie dans un voisinage de $(0,0)$ telle que :

$$(3) \quad \zeta(x,y) = x - \bar{x}(y) + o(|x - \bar{x}(y)|) \text{ pour } (x,y) \rightarrow 0$$

et

$$(4) \quad F(x,y) = F(\bar{x}(y), y) + \frac{1}{2} \{ [F_{xx}(\bar{x}(y), y)] (\zeta, \zeta) \}.$$

COROLLAIRE. Faisons les hypothèses du théorème 2, et supposons, en outre $p \geq 3$ et que $F_{xx}(0,0)$ soit une forme bilinéaire non définie. Il existe des voisinages de 0 dans R^n et $R^d : \mathfrak{u}$ et \mathfrak{v} tels que, pour tout y dans \mathfrak{v} , l'équation

$$F(x,y) = 0$$

a pour solutions dans \mathfrak{u} une surface C^{p-2} de dimension $n-1$, possédant une singularité conique en $x = \bar{x}(y)$ lorsque

$$F(\bar{x}(y), y) = 0. \quad \blacksquare$$

Démonstration du théorème 2.

Le théorème des fonctions implicites fournit la fonction $y \rightarrow \bar{x}(y)$ telle que

$$\bar{x}(0) = 0 \quad \text{et} \quad F_x(\bar{x}(y), y) = 0.$$

En effet, le fait que la forme bilinéaire $F_{xx}(0,0)$ soit non dégénérée entraîne que la dérivée en 0 de $F_x : D_x \{F_x\}$ est bijective dans \mathbb{R}^n . En faisant le changement de variable $x \rightarrow x - \bar{x}(y)$ on se ramène à la démonstration du théorème 1. ■

Démonstration du corollaire.

Il suffit de remarquer, que, avec (3), ζ est, à y fixé, un changement de coordonnées C^1 au voisinage de $\bar{x}(y)$. ■

BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. HORMANDER. Fourier integral operators, I, Acta Math. 127 (1971) p. 79-183.
- [2] L. NIRENBERG. Topics in Nonlinear functional analysis. Publ. Courant Inst. Math. Sci. New York (1974).
- [3] R. PALAIS. The Morse Lemma for Banach spaces. Bull. A.M.S. 75 (1969) p. 968-971.
- [4] J.T. SCHWARTZ. Nonlinear functional analysis. (1969), Gordon & Breach, New York.

Exposé n° 6

BIFURCATION POUR DES VALEURS PROPRES DOUBLES

par

Bruno SCHEURER

-:-

Cet exposé s'inspire de MacLeod, Sattinger [3].

§ 1. INTRODUCTION ET HYPOTHESES

Soient X et Y deux espaces de Banach tels que $X \subset Y$. Considérons

l'équation :
$$F(x, \lambda) = 0 \quad (1)$$

où F est une application de $X \times \mathbb{R}$ dans Y . On suppose que $F(0,0) = 0$ et on cherche les solutions non nulles de (1) dans un voisinage de $(0,0)$. On se propose, dans cet exposé, d'étudier ce problème dans le cas particulier où l'opérateur linéarisé est un opérateur Fredholm d'indice 0 dont le noyau et le conoyau sont de dimension 2. Cette hypothèse vient naturellement "après" le cas d'un opérateur Fredholm d'indice 0 dont le noyau et le conoyau sont de dimension 1 examiné par Crandall-Rabinowitz dans [5] (cf. exposé 5).

Si F est assez régulière (de classe C^2 au moins) $F(x, \lambda)$ peut s'écrire, au voisinage de $(0,0)$, grâce à la formule de Taylor :

$$F(x, \lambda) = F_x(0,0)x + \lambda F_\lambda(0,0) + \frac{1}{2} F_{xx}(0,0)x^2 + \lambda F_{x\lambda}(0,0)x + \frac{1}{2} \lambda^2 F_{\lambda\lambda}(0,0) + o(\|x\|^2, |\lambda|^2).$$

Par analogie, on considère dans tout ce qui suit une application F de la forme :

$$F(x, \lambda) = L(\lambda)x + N(x, x) + R(x, \lambda)$$

- où :
- . N est une application bilinéaire de $X \times X$ dans Y , indépendante de λ .
 - . R est une application de $X \times \mathbb{R}$ dans Y homogène de degré 3 au moins en x .
 - . $L(\lambda)$ est un opérateur linéaire de X dans Y .

Précisons le cadre et les hypothèses faites sur l'opérateur $L(\lambda)$.

L'opérateur $L(\lambda)$ a la structure suivante :

$$L(\lambda)x = L_0 x + \lambda L_1 x + \lambda^2 L_2(\lambda)$$

où $\lambda \rightarrow L_2(\lambda)$ est de classe C^1 .

L'opérateur L_0 est un opérateur Fredholm d'indice 0 tel que :

$$X_1 = \ker L_0 = [\varphi_1, \varphi_2] \iff \dim X_1 = 2$$

$$Y_1 = \text{Im } L_0 = \{y \in Y \mid \langle \varphi_1^*, y \rangle = 0 \text{ et } \langle \varphi_2^*, y \rangle = 0\} \quad \varphi_1^*, \varphi_2^* \in Y^*$$

$$\iff \dim Y/Y_1 = \text{codim } Y_1 = 2.$$

(Une telle caractérisation de Y_1 est possible car $\text{Im } L_0$ est fermé).

On suppose que $X_1 \cap Y_1 = \{0\}$; on peut alors choisir φ_1^* et φ_2^* tels que :

$$\langle \varphi_i^*, \varphi_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Puisque $X \subset Y$, $Y^* \subset X^*$ donc φ_1^* et φ_2^* s'identifient à des éléments de X^* et

on peut définir le supplémentaire topologique de X_1 dans X par

$$X_2 = \{x \in X \mid \langle \varphi_1^*, x \rangle = 0 \text{ et } \langle \varphi_2^*, x \rangle = 0\}.$$

Soit Y_2 le supplémentaire topologique de Y_1 dans Y .

L'opérateur L_0 est alors un isomorphisme de X_2 sur Y_1 dont l'inverse

K_0 est un opérateur borné (théorème du graphe fermé). Dans la suite, on utilisera

les opérateurs de projection suivants :

$$P = \text{projection dans } X \text{ sur } X_1 : x \rightarrow Px = \langle \varphi_1^*, x \rangle \varphi_1 + \langle \varphi_2^*, x \rangle \varphi_2$$

$$Q = \text{projection dans } Y \text{ sur } Y_1 : y \rightarrow Qy = y - \langle \varphi_1^*, y \rangle \varphi_1 - \langle \varphi_2^*, y \rangle \varphi_2.$$

§ 2. STRUCTURE DES SOLUTIONS PRES DU POINT DE BIFURCATION.

La méthode Lyapounov Schmidt (cf. exposé 2) appliquée à l'équation :

$$L(\lambda)x + N(x, x) + R(x, \lambda) = 0 \quad (2)$$

permet de réduire le problème de bifurcation pour (2) à un système de deux équations (codimension de Y_1) à 3 inconnues $x_1 = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ identifié à X_1 et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On est donc ramené à l'étude des zéros d'une application régulière de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 . Il n'existe malheureusement pas d'analogue du lemme de Morse pour les applications de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 ce qui fait qu'on ne peut pas procéder comme dans l'exposé 5. On peut se ramener au théorème de Morse par projection ; c'est ce que fait Nirenberg [5] (Théorème 3.2.2), mais le résultat obtenu est très partiel.

On peut également utiliser le théorème de préparation de Malgrange (cf. exposé 8).

On va utiliser ici une méthode "classique" dans la lignée de celle utilisée par Rabinowitz et Sattinger [3] [4] [5]. Elle consiste à définir a priori une branche non triviale (i.e. une famille de fonctions non nulles à un paramètre λ) au voisinage du point de bifurcation (ici $(0,0)$) ; on vérifie alors à l'aide du théorème des fonctions implicites que cette branche est un ensemble de solutions de (2) (existence).

On montre alors, grâce à des estimations a priori, que toute solution non triviale est nécessairement sur cette branche (unicité).

A) Existence.

Considérons une branche non triviale de la forme :

$$x(\lambda) = \lambda[\alpha(\lambda)\varphi_1 + \beta(\lambda)\varphi_2] + \lambda^2\psi(\lambda) \text{ avec } \psi(\lambda) \in X_2 \quad (3)$$

et α, β fonctions de \mathbf{R} dans \mathbf{R} .

Montrons que la branche définie par (3), constitue, sous une hypothèse convenable, un ensemble de solutions de (2).

Pour cela substituons (3) dans (2) ; on obtient en regroupant les différents termes correspondant respectivement à X_1 et X_2 et après avoir divisé par λ^2 :

$$L_0\psi + L_1(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) + q(\alpha, \beta) + S(\lambda, \alpha, \beta, \psi) = 0 \quad (4)$$

où, par définition

$$\begin{aligned} q(\alpha, \beta) &= N(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) \\ &= \alpha^2 N(\varphi_1, \varphi_1) + \alpha\beta [N(\varphi_1, \varphi_2) + N(\varphi_2, \varphi_1)] + \beta^2 N(\varphi_2, \varphi_2) \\ S(\lambda, \alpha, \beta, \psi) &= \lambda \{ L_2(\lambda) + L_1\varphi + N(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2, \psi) + N(\psi, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) + R(\lambda, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 + \lambda\psi) \} \\ &\quad + \lambda^2 N(\psi, \psi). \end{aligned}$$

Remarques. 1. On n'a pas noté la dépendance de α, β, ψ en λ pour alléger.

2. N est bilinéaire donc homogène de degré 2 en x alors que R est homogène de degré 3 au moins, ce qui est utile pour l'obtention de (4).

L'équation (4) est équivalente au système (3) de trois équations obtenues en la projetant sur Y_1 puis sur Y_2 ($L_0\psi$ appartient à Y_1) :

$$\mathfrak{F}_1(\psi, \alpha, \beta, \lambda) \equiv L_0\psi + Q\{\alpha L_1\varphi_1 + \beta L_1\varphi_2 + q(\alpha, \beta) + S(\lambda, \alpha, \beta, \psi)\} = 0 \quad (5)$$

$$\mathfrak{F}_2(\psi, \alpha, \beta, \lambda) \equiv \langle L_1(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2), \varphi_1^* \rangle + \langle q(\alpha, \beta), \varphi_1^* \rangle + \langle S(\lambda, \alpha, \beta, \psi), \varphi_1^* \rangle = 0 \quad (6)$$

$$\mathfrak{F}_3(\psi, \alpha, \beta, \lambda) \equiv \langle L_1(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2), \varphi_2^* \rangle + \langle q(\alpha, \beta), \varphi_2^* \rangle + \langle S(\lambda, \alpha, \beta, \psi), \varphi_2^* \rangle = 0 \quad (7)$$

Dans ce qui suit, on posera :

$$M(\varphi_1, \varphi_2) = N(\varphi_1, \varphi_2) + N(\varphi_2, \varphi_1)$$

$$f_1(\alpha, \beta) = \langle L_1(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2), \varphi_1^* \rangle + \langle q(\alpha, \beta), \varphi_1^* \rangle$$

$$f_2(\alpha, \beta) = \langle L_1(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2), \varphi_2^* \rangle + \langle q(\alpha, \beta), \varphi_2^* \rangle.$$

Considérons alors l'application

$$\mathfrak{F} : (\psi, \alpha, \beta, \lambda) \in X_2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow (\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3) \in Y_1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Résoudre l'équation (2) équivaut à trouver les zéros de \mathfrak{F} , c'est-à-dire à résoudre le système (\mathfrak{F}).

L'équation (5), lorsque $\lambda = 0$, s'écrit compte-tenu de la définition de S :

$$L_0\psi + Q\{\alpha L_1\varphi_1 + \beta L_1\varphi_2 + q(\alpha, \beta)\} = 0 \quad (8)$$

équation qui sera résoluble, pour α, β donnés, en ψ appartenant à X_2 .

Soit $(\alpha_0, \beta_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que :

$$f_1(\alpha_0, \beta_0) = f_2(\alpha_0, \beta_0) = 0 \quad (9)$$

Si ψ_0 est l'élément de X_2 correspondant donné par (8), $(\psi_0, \alpha_0, \beta_0, 0)$ est alors solution de \mathfrak{F} ((9) équivaut à (6), (7) lorsque $\lambda = 0$).

A chaque valeur de λ suffisamment proche de 0 peut-on associer biunivoquement trois fonctions C^1 de λ , $\psi(\lambda)$, $\alpha(\lambda)$, $\beta(\lambda)$ telles que :

(i) $\mathfrak{F}(\psi(\lambda), \alpha(\lambda), \beta(\lambda), \lambda) = 0$ i.e. $u(\lambda)$ donné par (3) est solution de (2)

(ii) $\psi(0) = \psi_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0, \quad \beta(0) = \beta_0 \quad ?$

Une réponse affirmative à cette question est donnée par le théorème des fonctions implicites que l'on va appliquer à l'opérateur \mathfrak{F} . L'opérateur \mathfrak{F} est de classe C^1 d'après les hypothèses.

Calculons sa dérivée au sens de Frechet par rapport à (ψ, α, β) en $(\psi_0, \alpha_0, \beta_0, 0)$. D'après l'expression de S , les opérateurs $\frac{\partial S}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial S}{\partial \beta}$, $\frac{\partial S}{\partial \psi}$ sont identiquement nuls lorsque $\lambda = 0$, on a alors :

$$\begin{pmatrix} L_0 & Q\{L_1\varphi_1 + 2\alpha_0 N(\varphi_1, \varphi_1) + \beta_0 M(\varphi_1, \varphi_2)\} & Q\{L_1\varphi_2 + \alpha_0 M(\varphi_1, \varphi_2) + 2\beta_0 N(\varphi_2, \varphi_2)\} \\ 0 & \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_1}{\partial \beta} \\ 0 & \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_2}{\partial \beta} \end{pmatrix}$$

qui est l'expression de $D\mathcal{F}_{(\psi, \alpha, \beta)}(\psi_0, \alpha_0, \beta_0, 0)$, opérateur borné de $X_2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $Y_1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. On a vu que L_0 est un isomorphisme de X_2 sur Y_1 ,

$D\mathcal{F}_{(\psi, \alpha, \beta)}(\psi_0, \alpha_0, \beta_0, 0)$ admettra donc un inverse borné si et seulement si

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_2}{\partial \beta} \\ \frac{\partial f_1}{\partial \beta} & \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} \end{vmatrix}_{(\alpha_0, \beta_0)} \neq 0 \quad (10)$$

c'est-à-dire si les courbes $f_1(\alpha, \beta) = 0$ et $f_2(\alpha, \beta) = 0$ n'admettent pas de point d'intersection (α_0, β_0) qui soit point de tangence.

Nous pouvons ainsi définir autant de branches de solutions non triviales de la forme (3) que le système d'équations (9) admettra de solutions $(\alpha_0, \beta_0) \neq (0, 0)$.

Il y aura donc autant de branches que de points d'intersection des 2 coniques définies par (9). La condition (10) signifiant que ces deux coniques se coupent transversalement, le nombre de points d'intersection distincts de $(0, 0)$ est nécessairement 1 ou 3, ce qui donne donc lieu à 1 ou 3 branches de solutions non triviales de la forme (3).

B) Unicité.

L'unicité consiste à montrer que, si (x, λ) est une famille de solutions de (2) tendant vers $(0, 0)$, alors nécessairement x peut être représenté sous la forme (3) i.e. (x, λ) appartient à l'une des branches définies ci-dessus.

Considérons donc une suite (x_n, λ_n) de solutions tendant vers $(0, 0)$ quand $n \rightarrow +\infty$; alors on peut toujours écrire, en posant $\varphi_n = \|x_n\|^{-1} x_n$:

$$x_n = \|x_n\| \|x_n\|^{-1} x_n = \|x_n\| \{ \alpha_n \varphi_1 + \beta_n \varphi_2 + \psi_n \} = \epsilon_n \tilde{\varphi}_n \quad (11)$$

où $\alpha_n = \langle \varphi_1^*, \|x_n\|^{-1} x_n \rangle$, $\beta_n = \langle \varphi_2^*, \|x_n\|^{-1} x_n \rangle$

et $\psi_n = \|x_n\|^{-1} x_n - \alpha_n \varphi_1 - \beta_n \varphi_2$ est un élément de X_2 (on a décomposé $\|x_n\|^{-1} x_n$ selon X_1 et X_2).

La démonstration comprend alors deux étapes :

(i) On peut choisir $\epsilon_n = \lambda_n$ dans (11).

Ceci se justifie en vérifiant, sous des hypothèses convenablement introduites, que $\frac{\lambda_n}{\epsilon_n}$ et $\frac{\epsilon_n}{\lambda_n}$ sont bornés de façon indépendante de n . C'est ce qui est fait en (1) et (2).

(ii) On utilise la partie unicité du théorème des fonctions implicites après substitution de $x_n = \lambda_n \tilde{\varphi}_n$ dans (2). C'est ce qui est fait en (3).

(1) Compte tenu de l'expression de α_n et β_n ceux-ci sont bornés

($|\alpha_n| \leq \|\varphi_1^*\|$, $|\beta_n| \leq \|\varphi_2^*\|$) donc également ψ_n puisque $\|\tilde{\varphi}_n\| = 1$.

Ecrivons l'équation (2) sous la forme :

$$(L_0 + \lambda L_1)x + N(x, x) + H(\lambda, x) = 0 \quad (12)$$

où $H(\lambda, x) = \lambda^2 L_2(\lambda) + R(\lambda, x)$ et notons que d'après l'hypothèse sur $R(\lambda, x)$,

dans un voisinage de 0 de λ , pour x_n de la forme $x_n = \epsilon_n \bar{\phi}_n$:

$$\frac{1}{\epsilon_n} H(\lambda_n, x_n) = O(\lambda_n^2 + \epsilon_n^2) \quad (13)$$

En remplaçant $x_n = \epsilon_n \bar{\phi}_n$ dans (12), on obtient après division par ϵ_n :

$$L_0 \psi_n + \lambda_n (\alpha_n L_1 \varphi_1 + \beta_n L_1 \varphi_2) + \lambda_n L_1 \psi_n + \epsilon_n N(\bar{\phi}_n, \bar{\phi}_n) + \frac{1}{\epsilon_n} H(\lambda_n, x_n) = 0 \quad (14)$$

soit en projetant sur Y_1 , puis en appliquant l'opérateur borné K_0 inverse de L_0

$$\psi_n + K_0 Q \{ \lambda_n (\alpha_n L_1 \varphi_1 + \beta_n L_1 \varphi_2) + \lambda_n L_1 \psi_n + \epsilon_n N(\bar{\phi}_n, \bar{\phi}_n) + \frac{1}{\epsilon_n} H(\lambda_n, x_n) \} = 0.$$

Il en résulte, grâce à (13) et $\lim_{\lambda_n \rightarrow 0} \epsilon_n = \lim_{\lambda_n \rightarrow 0} \|x_n\| = 0$:

$$\|\psi_n\| = O(|\lambda_n| + \epsilon_n) \text{ dans un voisinage de } 0 \text{ de } \lambda_n \quad (15)$$

Donc $\lim_{\lambda_n \rightarrow 0} \psi_n = 0$, et comme $\|\bar{\phi}_n\| = 1$, α_n et β_n ne peuvent tendre simultanément vers 0 avec λ_n .

Projetons (14) sur Y_2 , on obtient, après avoir divisé par ϵ_n :

$$\frac{\lambda_n}{\epsilon_n} \{ \alpha_n \langle L_1 \varphi_1, \varphi_i^* \rangle + \beta_n \langle L_1 \varphi_2, \varphi_i^* \rangle + \langle L_1 \psi_n, \varphi_i^* \rangle \} + \langle N(\bar{\phi}_n, \bar{\phi}_n), \varphi_i^* \rangle + \frac{1}{2 \epsilon_n} \langle H(\lambda_n, x_n), \varphi_i^* \rangle = 0$$

$i = 1, 2 \quad (14 \text{ bis}).$

Mais $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \psi_n = 0$, α_n et β_n ne tendent pas simultanément vers 0 avec λ , et

(13) est satisfait. On suppose alors que :

$$\text{la matrice } \langle L_1 \varphi_i, \varphi_j^* \rangle \quad i, j = 1, 2 \text{ est non singulière,} \quad (16)$$

(en particulier $\alpha_n \langle L_1 \varphi_1, \varphi_i^* \rangle + \beta_n \langle L_1 \varphi_2, \varphi_i^* \rangle = 0, \quad i = 1, 2 \implies \alpha_n = \beta_n = 0$).

Cette hypothèse permet d'en déduire :

$$\frac{\lambda_n}{\epsilon_n} \text{ reste borné lorsque } n \longrightarrow +\infty \quad (17)$$

(2) Considérons toujours une famille (x_n, λ_n) de solutions tendant vers $(0, 0)$;

plus précisément soit (x_n, λ_n) une suite de solutions telles que :

$$\lambda_n \longrightarrow 0, \quad \epsilon_n = \|x_n\| \longrightarrow 0, \quad \text{quand } n \longrightarrow +\infty.$$

D'après le (1) $\alpha_n = \langle \varphi_1^*, \frac{x_n}{\|x_n\|} \rangle$ et $\beta_n = \langle \varphi_2^*, \frac{x_n}{\|x_n\|} \rangle$ sont bornés indépendamment de n ; il existe donc une sous-suite, encore notée n telles que

$$\alpha_n \longrightarrow \alpha_0, \quad \beta_n \longrightarrow \beta_0, \quad \text{quand } n \longrightarrow +\infty \quad (18)$$

Toujours d'après le (1), α_0 et β_0 ne peuvent être tous deux nuls. De même,

d'après (17) :

$$\frac{\lambda_n}{\epsilon_n} \longrightarrow g \quad \text{quand } n \longrightarrow +\infty \quad (19)$$

Enfin
$$\psi_n = \frac{x_n}{\|x_n\|} - \alpha_n \varphi_1 - \beta_n \varphi_2 \longrightarrow \psi_0 = 0 \quad \text{quand } n \longrightarrow +\infty. \quad (20)$$

Le système (14 bis) :

$$\frac{\lambda_n}{\epsilon_n} \left\{ \alpha_n \langle L_1 \varphi_1, \varphi_i^* \rangle + \beta_n \langle L_1 \varphi_2, \varphi_i^* \rangle + \langle L_1 \psi_n, \varphi_i^* \rangle \right\} + \langle N(\bar{\varphi}_n, \bar{\varphi}_n), \varphi_i^* \rangle + \frac{1}{\epsilon} \langle H(\lambda_n, x_n), \varphi_i^* \rangle = 0 \quad i=1,2,$$

s'écrit alors lorsque $n \longrightarrow +\infty$, compte tenu de (18), (19), (20) :

$$g \left\{ \alpha_0 \langle L_1 \varphi_1, \varphi_i^* \rangle + \beta_0 \langle L_1 \varphi_2, \varphi_i^* \rangle \right\} + \langle N(\bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_0), \varphi_i^* \rangle = 0, \quad i=1,2 \quad (21)$$

où
$$\bar{\varphi}_0 = \alpha_0 \varphi_1 + \beta_0 \varphi_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \varphi_1 + \beta_n \varphi_2 + \psi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\varphi}_n.$$

Mais $N(\bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_0) = q(\alpha_0, \beta_0)$, (21) s'écrit donc :

$$g \left\{ \alpha_0 \langle L_1 \varphi_1, \varphi_i^* \rangle + \beta_0 \langle L_1 \varphi_2, \varphi_i^* \rangle \right\} + \langle q(\alpha_0, \beta_0), \varphi_i^* \rangle = 0, \quad i=1,2 \quad (22)$$

Puisque α_0 et β_0 ne sont pas simultanément nuls, $g = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{\epsilon_n}$ sera non nul si

et seulement si les formes quadratiques

$$\langle q(\alpha, \beta), \varphi_1^* \rangle \quad \text{et} \quad \langle q(\alpha, \beta), \varphi_2^* \rangle \quad (23)$$

n'ont pas de facteurs communs (le facteur commun correspondant à l'origine $(0,0)$)

est exclu a priori puisque α_0, β_0 ne peuvent être simultanément nuls).

Sous cette dernière hypothèse g est alors non nul et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\epsilon_n}{\lambda_n} = \frac{1}{g};$$

$$\frac{\epsilon_n}{\lambda_n} \text{ reste borné lorsque } n \rightarrow +\infty. \quad (24)$$

(3) Grâce à (17) (24), quitte à normaliser $\frac{\alpha_n, \beta_n, \psi_n}{\lambda_n}$ par un scalaire, on peut donc prendre $\epsilon_n = \lambda_n$; c'est-à-dire prendre $g = 1$. Compte tenu de (15) nous pouvons donc en déduire que (11) a la forme suivante :

$$x_n = \lambda_n \{ \alpha_n \varphi_1 + \beta_n \varphi_2 \} + \lambda_n^2 \psi'_n \quad \text{où } \psi' \in X_0 \quad (25)$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$ i.e. $\lambda_n \rightarrow 0$.

De plus grâce à (22), $\alpha_0 = \lim_n \alpha_n$ et $\beta_0 = \lim_n \beta_n$ sont solutions de

$$f_i(\alpha, \beta) = 0 \quad i = 1, 2.$$

Substituons alors (25) dans (2) et effectuons en le même raisonnement qu'en A). La partie unicité du théorème des fonctions implicites permet de conclure que dans un voisinage suffisamment petit de $(\psi'_0, \alpha_0, \beta_0, 0)$, il existe un triplet (ψ, α, β) unique tel que $\mathfrak{F}(\psi, \alpha, \beta, \lambda) = 0$. (On utilise donc l'hypothèse (16)).
(1)
En particulier, toutes les suites $\alpha_n, \beta_n, \psi_n$ convergent (2) et :

$$\alpha_n = \alpha(\lambda), \beta_n = \beta(\lambda), \psi'_n = \psi(\lambda)$$

où $\alpha(\lambda), \beta(\lambda), \psi(\lambda)$ sont les fonctions définies dans le (1). ■

Résumons les résultats obtenus dans le :

THEOREME 1. Sous les hypothèses ci-dessus notamment (10), (16), (23), chaque solution (α_0, β_0) du système

$$f_1(\alpha, \beta) = 0, \quad f_2(\alpha, \beta) = 0$$

définit pour λ dans un voisinage de 0 une branche unique de solutions de (2) de la forme

$$x(\lambda) = \lambda [\alpha(\lambda) \varphi_1 + \beta(\lambda) \varphi_2] + r(\lambda) \quad \text{où } \alpha(0) = \alpha_0, \beta(0) = \beta_0 \text{ et } \|r(\lambda)\| = O(|\lambda|^2).$$

(1) On associe ainsi à chaque λ un unique triplet (ψ, α, β)

(2) Cela peut se vérifier par un raisonnement par l'absurde.

De plus toute solution non triviale (2) se trouve dans un voisinage de $x = 0$, $\lambda = 0$ sur une des branches définies ci-dessus dont le nombre est 1 ou 3.

§ 3. REMARQUES SUR LES HYPOTHESES (16), (23), (10).

Nous venons d'étudier le problème de bifurcation (2) lorsque

$$\dim \ker L_0 = \dim \text{Coker } L_0 = 2$$

qui est le cas venant naturellement après :

$$\dim \ker L_0 = \dim \text{Coker } L_0 = 1.$$

Ce dernier cas est étudié sous l'hypothèse :

$$L_1 \varphi_1 \notin \text{Im}(L_0 - \lambda_0 L_1)$$

où φ_1 engendre $\ker(L_0 - \lambda_0 L_1)$.

Rappelons (cf. exposé 5) que cette hypothèse signifie que λ_0 est une L_1 -simple valeur propre de L_0 . Autrement dit λ_0 est une L_1 -valeur propre de L_0 de multiplicité géométrique et algébrique 1, lorsque l'on prend $L_1 = I$:

$$\dim \ker(L_0 - \lambda_0 L_1) = \dim \ker(L_0 - \lambda_0 L_1)^2 = 1.$$

On peut toujours, ce qui a été fait ici, supposer $\lambda_0 = 0$. L'hypothèse ci-dessus devient :

$$L_1 \varphi_1 \notin \text{Im } L_0 \quad \text{où } \varphi_1 \text{ engendre } \ker L_0.$$

1) L'hypothèse (16) : la matrice

$$\langle L_1 \varphi_i, \varphi_j^* \rangle \quad i, j = 1, 2$$

est non singulière.

(Cf. page 1 pour la définition de φ_i^*, φ_j^*)

signifie de la même façon, que $\lambda_0 = 0$ est une L_1 valeur propre de L_0 de multiplicité géométrique et algébrique 2, lorsque l'on prend $L_1 = I$:

Autrement dit :

$$\ker(L_0 - \lambda_0 L_1) = \ker(L_0 - \lambda_0 L_1)^2$$

et
$$\dim \ker(L_0 - \lambda_0 L_1) = \dim \ker(L_0 - \lambda_0 L_1)^2 = 2.$$

La démonstration s'effectue comme dans le cas de multiplicité 1. Supposons l'hypothèse (16) satisfaite et raisonnons par l'absurde en supposant

$$\ker(L_0 - \lambda_0 L_1) \subset \ker(L_0 - \lambda_0 L_1)^2 \quad \text{au sens strict.}$$

Il existe donc x_1 tel que :

$$x_1 \in \ker(L_0 - \lambda_0 L_1)^2 \quad (26)$$

$$x_1 \notin \ker(L_0 - \lambda_0 L_1) \quad (27)$$

Posons $x^1 = (L_0 - \lambda_0 L_1)x_1$.

D'après (26) x^1 appartient à $\ker(L_0 - \lambda_0 L_1)$. Il existe donc α, β non simultanément nuls d'après (27) tels que :

$$x^1 = (L_0 - \lambda_0 L_1)x_1 = \alpha \varphi_1 + \beta \varphi_2 \quad (28)$$

Formons le produit de dualité de x^1 élément de $\text{Im}(L_0 - \lambda_0 L_1)$ avec $L_1^* \varphi_i^*$,

$i = 1, 2$ où L_1^* est l'adjoint de L_1 . D'après (28) il existe donc α, β non simultanément nuls tels que :

$$\alpha \langle L_1 \varphi_1, \varphi_i^* \rangle + \beta \langle L_1 \varphi_2, \varphi_i^* \rangle = 0 \quad i = 1, 2$$

ce qui contredit (16).

En résumé, on a les équivalences [Q désigne la projection sur

$\text{Im}(L_0 - \lambda_0 L_1)$]:

(16) $\Leftrightarrow (I-Q)L_1 \Big|_{\ker(L_0 - \lambda_0 L_1)}$ non singulière $\Leftrightarrow (I-Q)L_1$ admet un inverse de coker($L_0 - \lambda_0 L_1$) dans $\ker(L_0 - \lambda_0 L_1) \Leftrightarrow \ker(L_0 - \lambda_0 L_1) = \ker(L_0 - \lambda_0 L_1)^2$.

2) Examinons maintenant les hypothèses (23) et (10).

Pour cela soit η la Fréchet dérivée de l'application $x \rightarrow N(x, x)$ (qui est quadratique).

L'hypothèse (23) signifie qu'il existe $\gamma \neq 0$ et x_1 élément de $\ker(L_0 - \lambda_0 L_1)$ tel que :

$$(I-Q)N(x_1, x_1) + \gamma(I-Q)L_1 x_1 = 0 \quad (28)$$

(i.e. le problème aux valeurs propres généralisées admet une solution dans $\ker(L_0 - \lambda_0 L_1)$).

En effet d'après l'hypothèse (16), (28) peut encore s'écrire

$$\mathfrak{B}(I-Q)N(x_1, x_1) + \gamma x_1 = 0 \quad (29)$$

où est une matrice 2×2 inverse de $(I-Q)L_1$; (29) est un système de deux équations à deux inconnues. Il n'aura de solution que si le terme $\mathfrak{B}(I-Q)N(x_1, x_1)$ est non singulier, c'est-à-dire si $(I-Q)N(x_1, x_1)$ est non singulier. Mais :

$$\begin{aligned} (I-Q)N(x_1, x_1) &= (\langle N(x_1, x_1), \varphi_1^* \rangle, \langle N(x_1, x_1), \varphi_2^* \rangle) \\ &= (\langle q(\alpha, \beta), \varphi_1^* \rangle, \langle q(\alpha, \beta), \varphi_2^* \rangle) \end{aligned} \quad (30)$$

puisque x_1 appartient à $\ker(L_0 - \lambda_0 L_1)$ équivaut à $x_1 = \alpha \varphi_1 + \beta \varphi_2$.

Il en résulte que $(I-Q)N(x_1, x_1)$ sera non singulier si les formes quadratiques $\langle q(\alpha, \beta), \varphi_1^* \rangle$ et $\langle q(\alpha, \beta), \varphi_2^* \rangle$ n'ont pas de facteur commun.

De la même façon l'hypothèse (10) signifie que :

$$(I-Q)\eta + (I-Q)L_1 \Big|_{\ker(L_0 - \lambda_0 L_1)} \text{ est non singulier.} \quad (31)$$

En effet grâce à (30), (31) signifie que (cf. p. 3) :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_1}{\partial \beta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_2}{\partial \beta} \end{pmatrix}$$

est non singulière ce qui équivaut à $\frac{\partial f_1}{\partial \alpha} \frac{\partial f_2}{\partial \beta} - \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} \frac{\partial f_1}{\partial \beta} \neq 0$, soit (10).

Remarque. Les hypothèses (16), (23), (10) en tant qu'hypothèses sur des opérateurs de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 sont vraies "en général".

En particulier l'hypothèse (10) signifie que les 2 quadriques d'équations :

$$f_i(\alpha, \beta) \equiv \langle q(\alpha, \beta), \varphi_i^* \rangle + \alpha \langle L_1 \varphi_1, \varphi_i^* \rangle + \beta \langle L_1 \varphi_2, \varphi_i^* \rangle = 0, \quad i = 1, 2$$

se coupent transversalement.

§ 4. EXTENSION A DES VALEURS PROPRES DE MULTIPLICITE GEOMETRIQUE ET ALGEBRIQUE $n > 2$ POUR DES EQUATIONS AVEC NON LINEARITES DE DEGRE $k > 2$.

Considérons maintenant le problème de bifurcation (au voisinage de

$$(x_0, \lambda_0) = (0, 0) :$$

$$L(\lambda)x + N(x, \dots, x) + R(\lambda, x) = 0 \quad (32)$$

où N est une application k -linéaire de $\underbrace{X \times \dots \times X}_{k\text{-fois}}$ dans Y et $R(\lambda, x)$ est homogène de degré $k+1$ au moins en x .

L'opérateur linéaire $L(\lambda)$ est toujours de la forme :

$$L(\lambda)x = L_0 x + \lambda L_1 x + \lambda^2 L_2(\lambda)$$

mais L_0 est un opérateur Fredholm d'indice 0 tel que :

$$X_1 = \ker L_0 = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n]$$

$$Y_1 = \text{Im } L_0 = [\varphi_1^*, \varphi_2^*, \dots, \varphi_n^*]^\perp.$$

Nous pouvons alors énoncer un résultat généralisant le théorème 1, et présentant certaines analogies avec les résultats de l'exposé 7.

THEOREME 2. Hypothèses :

(1) La matrice $\langle L_1 \varphi_i, \varphi_j^* \rangle$ $i, j = 1, n$ est non singulière.

(2) Les n polynômes homogènes de degré k en $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$ définis par

$$q_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \langle N(\sum_1^n \alpha_i \varphi_i, \dots, \sum_1^n \alpha_i \varphi_i), \varphi_j^* \rangle \quad j = 1, n$$

n'ont pas de facteurs communs. (En particulier les hypersurfaces d'équations

$q_j(\alpha) = 0$ n'ont pas de points communs autre que l'origine). Soit

$$f_{j,\sigma}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sigma \langle L_1(\sum_1^n \alpha_i \varphi_i), \varphi_j^* \rangle + q_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

avec $\sigma = +1$ ou -1 . Supposons de plus que :

$$(3) \quad \det \left(\frac{\partial f_{j,\sigma}}{\partial \alpha_i} \right) \neq 0$$

(i.e. les hypersurfaces d'équations $f_{j,\sigma}(\alpha) = 0$ se coupent transversalement).

Alors chaque intersection des hypersurfaces $f_{j,\sigma}(\alpha) = 0$, $j = 1, n$

définit une branche solution de (32) telle que :

$$x(\epsilon) = \epsilon \left(\sum_1^n \alpha_i(\epsilon) \varphi_i \right) + \epsilon^k \psi(\epsilon)$$

$$\lambda(\epsilon) = \sigma \epsilon^{k-1}$$

avec $\langle \psi(\epsilon), \varphi_j^* \rangle = 0$ $j = 1, n$ $f_{j,\sigma}(\alpha_1(0), \dots, \alpha_n(0)) = 0$.

En particulier :

1) Si k est pair, on n'obtient pas de nouvelles branches en prenant

$\sigma = -1$ au lieu de $\sigma = +1$.

2) Si k est impair, une branche correspond à $\epsilon > 0$, l'autre à $\epsilon < 0$.

Chaque solution non triviale de (32) dans un voisinage de $(x, \lambda) = (0, 0)$ se trouve sur une de ces branches.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] V.M. KRASNOSELSKI. The projection method for the study of bifurcation of the zero solution of a non linear operator equation with multidimensional equation. Soviet Math. Dokl. Vol. 12 (1971) n° 3, p. 967-971.
- [2] L. NIRENBERG. Topics in non-linear functional analysis. Courant Institute, New York, 1974.
- [3] J.B. Mc LEOD, D.H. SATTINGER. Loss of stability and bifurcation at double eigenvalue. J. of Functional Analysis 14 (1973), p. 62-84.
- [4] P.H. RABINOWITZ. Some aspects of non linear eigenvalue problems. Rocky Mountain J. of Math. (1973), vol. 3 n° 2 p. 161-202.
- [5] P.H. RABINOWITZ, M.C. GRANDALL. Bifurcation from simple eigenvalues. J. Funct. Anal. 8 (1971), p. 321-340.

Exposé n° 7

LE DEPLOIEMENT DES SINGULARITES

par

J. MOSSINO

-:-

On suppose qu'un certain phénomène chimique (ou mécanique) est décrit par n paramètres (dits "internes"). Alors, soit $X \subset \mathbb{R}^n$ l'ensemble des paramètres admissibles et $U \subset \mathbb{R}^4$ un ouvert de l'espace temps (par exemple). Les composantes dans \mathbb{R}^4 sont les paramètres "externes".

A ce phénomène est associée une fonction potentiel que l'on supposera C^∞ :

$$V : X \times U \rightarrow \mathbb{R}.$$

Soit u_0 fixé dans U . L'équilibre du système correspond à un minimum de la fonction potentiel

$$V_{u_0} : X \rightarrow \mathbb{R},$$

c.à.d. à une valeur x_0 telle que $\frac{\partial V}{\partial X}(x_0, u_0) = 0$.

On suppose maintenant que les conditions externes varient un peu c.à.d. que u

varie un peu au voisinage de u_0 . On aimerait bien pouvoir déduire de l'étude locale de V_{u_0} au voisinage de x_0 , des renseignements sur l'allure de V au voisinage de (x_0, u_0) .

Cela relève de la théorie du déploiement des singularités des applications différentiables : la fonction V est un déploiement de V_{u_0} ; l'étude locale de V_{u_0} (au voisinage de x_0) fournit un certain déploiement privilégié de V_{u_0} , appelé le déploiement universel. Ce déploiement universel est privilégié au sens que tout déploiement de V_{u_0} peut se déduire du déploiement universel.

Le concept de déploiement est dû à Thom. Le résultat clé nécessitait une version C^∞ du théorème de préparation de Weierstrass ; Malgrange a démontré ce résultat et la démonstration a été simplifiée depuis par Mather.

L'idée de base est de localiser les fonctions en des "germes". Les germes auront la propriété d'être "à détermination finie" c.à.d. que l'on pourra ramener l'étude des germes (qui décrivent un e.v. de dimension infinie) à celle de leurs "jets" qui varient dans des e.v. de dimension finie.

On va décrire succinctement cette théorie. Cet exposé suit BROCKER [3] et ZEEMAN [6].

Une application qui va dans le sens indiqué ci-dessus a été faite par D.G. SCHAEFFER [5].

LES NOTATIONS ET LES PRELIMINAIRES.

$\mathcal{G}(n, p)$ désigne l'anneau des germes "différentiables" (c.à.d. C^∞) $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^p$.

(On rappelle qu'un tel germe est une classe d'équivalence pour la relation dans

$C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) : f \simeq g$ si f et g coïncident sur un voisinage de 0 . ■

$\mathfrak{m}(n, p)$ est son unique idéal maximal, constitué des germes f t.q. $f(0) = 0$. ■

Lorsque $p = 1$, on notera $\mathcal{G}(n)$ et $\mathfrak{m}(n)$ au lieu de $\mathcal{G}(n, 1)$ et $\mathfrak{m}(n, 1)$. ■

$\mathfrak{m}(n)^{k+1}$ (qui est l'ensemble des sommes finies de produits de $(k+1)$ éléments de $\mathfrak{m}(n)$) est aussi l'idéal de $\mathcal{G}(n)$ constitué des germes f qui s'annulent en 0 jusqu'à l'ordre k (c.à.d. $D^\alpha f(0) = 0 \quad \forall |\alpha| \leq k$). De plus cet idéal est engendré par les monômes de degré $(k+1)$. ■

$\mathcal{B}(n) \subset \mathfrak{m}(n, n)$ désigne le sous-ensemble des germes inversibles pour la loi de composition des applications. $\mathcal{B}(n)$ est un groupe pour cette loi. Les éléments de $\mathcal{B}(n)$ sont les changements de coordonnées locales

$$f \in \mathcal{B}(n) \iff f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \det Df(0) \neq 0. \quad \blacksquare$$

Enfin on définit l'application $j^k : f \in \mathcal{G}(n) \rightarrow j^k f \in \mathcal{G}(n)/\mathfrak{m}(n)^{k+1}$; $j^k f$ est appelé le "k-jet" de f : c'est le polynôme de Taylor à l'ordre k de f , à l'origine.

On notera souvent $\hat{\mathcal{G}}_k(n) = j^k \mathcal{G}(n) = \mathcal{G}(n)/\mathfrak{m}(n)^{k+1}$ et $\hat{\mathcal{B}}_k(n) = j^k \mathcal{B}(n)$.

LES OUTILS.

Un premier outil est le lemme de NAKAYAMA (très connu des algébristes !)

LEMME DE NAKAYAMA ([1] p. 19). Soit \mathcal{R} un anneau commutatif unitaire, qui a un unique idéal maximal \mathfrak{m} . Soit A un \mathcal{R} -module de type fini ⁽¹⁾. Alors

⁽¹⁾ c.à.d. qui a un nombre fini de générateurs, c.à.d. $\exists a_1, \dots, a_n \in A$ t.q.

$$\forall a \in A, \quad a = \sum_{i=1}^n r_i a_i \quad \text{où} \quad r_i \in \mathcal{R}.$$

$$\mathfrak{m}.A = A \Rightarrow A = 0.$$

Dans la suite on appliquera toujours ce lemme avec $\mathfrak{R} = \mathcal{O}(n)$ et $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(n)$.

COROLLAIRE. Avec les mêmes hypothèses, soient B, C , deux \mathfrak{R} -modules
t.q. $A, B \subset C$. Alors

$$A \subset B + \mathfrak{m}.A \Rightarrow A \subset B.$$

Un second outil moins anodin est le théorème de préparation de Malgrange, que nous donnons ici sous la forme algébrique que nous utiliserons. Pour une autre formulation du théorème de préparation, cf. l'exposé de B. SCHEURER.

Le théorème de préparation de Malgrange (dans la forme de Mather) :

Soit $f : (\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^p, 0)$ un germe différentiable. Il induit l'homomorphisme
d'anneaux :

$$f^* : \mathcal{O}(p) \rightarrow \mathcal{O}(n). \quad (2)$$

Soit A un $\mathcal{O}(n)$ -module de type fini. Alors A est un $\mathcal{O}(p)$ -module (via f^*) ⁽³⁾
de type fini s.si l'e.v. réel $A/f^*\mathfrak{m}(p).A$ est de dimension finie. Plus précisément
les éléments $\{a_1, \dots, a_k\}$ engendrent A comme $\mathcal{O}(p)$ -module (via f^*) s.si ils
représentent des générateurs de l'e.v. réel $A/f^*\mathfrak{m}(p).A$.

Cas particulier important : $A = \mathcal{O}(n)$. Dans ce cas si f_i désignent les germes
composantes de f

$$f^*\mathfrak{m}(p).\mathcal{O}(n) = \langle f_i \rangle_{\mathcal{O}(n)}$$

(2) Si $g \in \mathcal{O}(p)$, on note $f^*(g) = g \circ f$.

(3) $\mathcal{O}(p)$ opère sur A via f^* comme suit : $\mathcal{O}(p) \times A \rightarrow A$
 $(e, a) \rightarrow f^*(e) \times a$

(on note ainsi l'idéal de $\mathcal{G}(n)$ engendré par les germes f_i).

DEFINITION. Si l'e.v. réel $\mathcal{G}(n)/\langle f_i \rangle_{\mathcal{G}(n)}$ est de dimension finie, on dit que le germe f est fini.

§ 1. LES GERMES A DETERMINATION FINIE.

On définit une relation d'équivalence dans $\mathcal{G}(n)$ comme suit :

DEFINITION . Les germes f et $g \in \mathcal{G}(n)$ sont dits équivalents à droite

(on note $f \sim g$) ssi

$$(1) \quad \exists h \in \mathcal{O}(n) \quad \text{t.q.} \quad g = f \circ h.$$

Il s'agit bien d'une relation d'équivalence car $\mathcal{O}(n)$ est un groupe. La condition (1) signifie qu'il existe un changement de coordonnées locales qui met f et g sous la même forme.

DEFINITION. Un germe $f \in \mathcal{G}(n)$ est dit k -déterminé (ou k -suffisant) ssi

$$\forall g \in \mathcal{G}(n), \quad j^k g = j^k f \Rightarrow g \sim f.$$

S'il existe k tel que f soit k -déterminé, on dit que f est à détermination finie. ■

Quelques remarques et exemples :

- 1) f k -déterminé $\Rightarrow f$ $(k+1)$ -déterminé.
- 2) f k -déterminé et $f \sim g \Rightarrow g$ k -déterminé.
- 3) f k -déterminé $\Leftrightarrow j^k f$ k -déterminé.
- 4) f k -déterminé $\Leftrightarrow f - f(0)$ k -déterminé.

On peut donc se limiter à $f \in \mathfrak{M}(n)$.

5) f 1-déterminé $\Leftrightarrow Df(0) \neq 0$.

On peut donc se limiter au seul cas non trivial $f \in \mathfrak{M}(n)^2$. Un tel germe est appelé une singularité. Les résultats de ce paragraphe seront applicables également aux non-singularités, mais ils n'auront d'intérêt que pour les singularités.

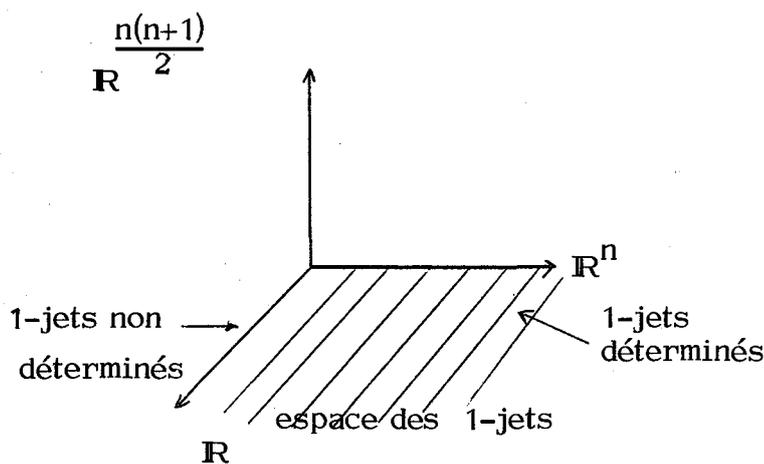
6) Si f n'est pas 1-déterminé, le lemme de Morse (cf. exposé n° 5) dit que

$$f \text{ 2-déterminé } \Leftrightarrow \det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (0) \right) \neq 0.$$

Ces exemples suggèrent que les jets non déterminés deviennent de plus en plus rares quand le degré du jet croît :

L'espace des 2-jets est $\hat{\mathfrak{J}}_2(n) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ (puisque

$$j^2 f(x) = f(0) + \sum_i f_i x_i + \sum_{i,j} f_{ij} x_i x_j \quad \text{où } f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} (0), \quad f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (0)).$$



L'ensemble des 2-jets non déterminés se projette nécessairement sur l'ensemble des 1-jets non déterminés, donc $\frac{n(n+1)}{2}$, il est inclus dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$, et il est donc maigre dans $\hat{\mathfrak{J}}_2(n)$.

Mais comme il est caractérisé par la relation supplémentaire $\det(f_{ij}) = 0$, il est même maigre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

On introduit maintenant l'idéal de $\mathfrak{J}(n)$, associé à un singularité $f \in \mathfrak{M}(n)^2$:

$$\Delta_f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle_{\mathfrak{J}(n)}$$

(si $f \in \mathfrak{M}(n) - \mathfrak{M}(n)^2$, $\Delta_f = \mathfrak{J}(n)$), et l'on montre que cet idéal est indépendant du

choix des coordonnées locales.

On a alors une condition suffisante pratique de k -détermination :

THEOREME 1. (dû à MATHER). Soit $f \in \mathcal{G}(n)$. On suppose que

$$(2) \quad \mathfrak{m}(n)^k \subset \mathfrak{m}(n) \Delta_f.$$

Alors f est k -déterminé.

Nous verrons plus loin la démonstration de ce théorème. ■

Dans la pratique pour savoir si un germe est k -déterminé on emploie toujours ce théorème.

Comment l'applique-t-on ? $\mathfrak{m}(n)^k$ est l'idéal de $\mathcal{G}(n)$ engendré par les monômes de degré k . Pour vérifier (2), il suffit de vérifier que tous les monômes de degré k sont dans $\mathfrak{m}(n) \Delta_f$.

Exemple : $n = 2$, $f(x,y) = x^3 - xy^2$ est 3-déterminé car
 $x^3, y^3, x^2y, xy^2 \in \mathfrak{m}(2) \Delta_f = \langle 3x^2 - y^2, xy \rangle_{\mathfrak{m}(2)}$. ■

Ce théorème est important pour le résultat mais aussi pour la démonstration qui est typique en topologie différentielle.

Preuve du théorème de Mather. Soit $g \in \mathcal{G}(n)$ t.q. $j^k g = j^k f$. On cherche $h \in \mathcal{G}(n)$ t.q. $g = f \circ h$. Pour cela f et g sont reliés par une famille paramétrée de germes $F_t : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x,t) = F_t(x) = (1-t)f(x) + tg(x).$$

On va montrer que

$$\forall t_0 \in \mathbb{R}, F_t \sim F_{t_0} \text{ pour } t \text{ "voisin" de } t_0.$$

Comme $[0, 1]$ est connexe compact, on aura bien $f \sim g$.

Soit t_0 fixé $\in \mathbb{R}$. On va chercher un germe

$$H : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, (0, t_0)) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

tel que (notant $H_t(x) = H(x, t)$) :

- (I) $H_{t_0} = \text{Id} \in \mathcal{B}(n)$ (ce qui assurera H_t inversible pour t voisin de t_0),
- (II) $H_t(0) = 0$ (ce qui assurera $H_t \in \mathcal{B}(n)$),
- (III) $F_t \circ H_t = F_{t_0}$ (ce qui assurera $F_t \sim F_{t_0}$) c.à.d.
 $F(H(x, t), t) = F(x, t_0)$.

Compte tenu de (I), la condition (III) peut être remplacée par la condition

équivalente $\frac{\partial}{\partial t} F(H(x, t), t) = 0$, c.à.d.

$$\text{- (III)' } \quad \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(H(x, t), t) \frac{\partial H_i}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial F}{\partial t}(H(x, t), t) = 0,$$

et l'on cherche un germe H qui vérifie (I), (II), (III)'.

Pour cela il suffit de trouver un germe

$$\xi : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, (0, t_0)) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

dont les composantes $\xi_i \in \mathfrak{M}(n) \mathcal{E}(n+1)$ (c.à.d. s'annulent pour $x = 0$), qui vérifie :

$$\sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(x, t) \xi_i(x, t) + \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) = 0.$$

(Il suffit de résoudre ensuite un système d'équations différentielles ordinaires pour trouver H). Ainsi, on a ramené la preuve à la vérification de

$$\frac{\partial F}{\partial t} \in \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\rangle \mathfrak{M}(n) \mathcal{E}(n+1) = \mathfrak{M}(n) \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\rangle \mathcal{E}(n+1).$$

$$\text{Or } \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [(1-t)f + tg] = g - f \in \mathfrak{M}(n)^{k+1}.$$

Donc il suffit de vérifier l'inclusion algébrique

$$\mathfrak{M}(n)^{k+1} \subset \mathfrak{M}(n) \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\rangle \mathcal{E}(n+1).$$

L'hypothèse (2) donne :

$$\mathfrak{m}(n)^k \mathcal{G}(n+1) \subset \mathfrak{m}(n) \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle \mathcal{G}(n+1) \subset \mathfrak{m}(n) \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\rangle \mathcal{G}(n+1) + \mathfrak{m}(n+1) \mathfrak{m}(n)^k \mathcal{G}(n+1)$$

$$\text{car } \mathfrak{m}(n) \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\rangle \mathcal{G}(n+1) = \mathfrak{m}(n) \left\langle t \frac{\partial}{\partial x_i} (g-f) \right\rangle \mathcal{G}(n+1) \subset \mathfrak{m}(n)^{k+1} \mathcal{G}(n+1)$$

$$\text{(puisque } \frac{\partial}{\partial x_i} (g-f) \in \mathfrak{m}(n)^k \subset \mathfrak{m}(n+1) \mathfrak{m}(n)^k \mathcal{G}(n+1)).$$

Il suffit maintenant d'appliquer le lemme de Nakayama sous la forme

$$A \subset B + \mathfrak{m}A \Rightarrow A \subset B$$

pour avoir le résultat. ■

Nous allons donner maintenant une condition nécessaire de k -détermination.

Pour cela on démontre un lemme qui nous sera également utile plus loin dans l'étude des déploiements k -transverses.

LEMME 1. Soient $f \in \mathcal{G}(n)$ et $\hat{f} \in \hat{\mathcal{G}}_k(n) = \mathcal{G}(n) / \mathfrak{m}(n)^{k+1}$ le k -jet de f . Notons
par $\hat{\mathcal{B}}_k(n)$ l'orbite de \hat{f} par l'action de la loi de composition

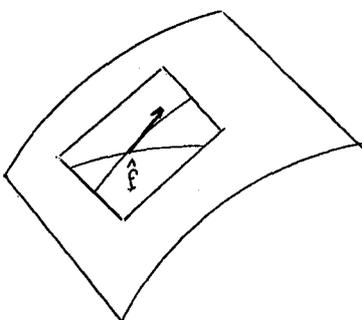
$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{G}}_k(n) \times \hat{\mathcal{B}}_k(n) &\longrightarrow \hat{\mathcal{G}}_k(n) \\ (\hat{f}(x), \hat{h}(x)) &\longrightarrow \hat{f} \circ \hat{h}(x) \quad \text{modulo } \mathfrak{m}(n)^{k+1}. \end{aligned}$$

Soit $T_{\hat{f}} \hat{\mathcal{B}}_k(n)$ l'espace tangent à cette orbite au point \hat{f} , considéré comme un
sous-espace de l'espace euclidien $\hat{\mathcal{G}}_k(n)$. Alors

$$T_{\hat{f}} \hat{\mathcal{B}}_k(n) = \mathfrak{m}(n) \Delta_f \quad \text{modulo } \mathfrak{m}(n)^{k+1}.$$

Idée de la preuve (simple). L'espace tangent est formé par les vecteurs vitesses

des lacets partant de \hat{f} , tracés sur $\hat{\mathcal{B}}_k(n)$. Ces lacets sont de la forme



$$t \rightarrow \hat{f} \circ \hat{\delta}_t$$

$$\text{où } \delta_t(x) = \delta(x, t)$$

$$\text{avec } \delta : (\mathbb{R}^{n+1}, 0) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\delta_0 = \text{Id} \quad , \quad \delta_t(0) = 0.$$

On calcule ces vecteurs vitesses : on obtient la forme indiquée. ■

On en déduit le théorème suivant :

THEOREME 2. Soit $f \in \mathcal{S}(n)$.

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}(n)^k \subset \mathfrak{m}(n) \Delta_f &\Rightarrow f \text{ k-déterminé} \\ &\Rightarrow \mathfrak{m}(n)^{k+1} \subset \mathfrak{m}(n) \Delta_f \end{aligned}$$

(et la première implication n'est pas une équivalence : il existe des contre-exemples !)

Démonstration. Il reste à montrer la 2^e implication, qui va résulter du lemme précédent.

Soit f k-déterminé, soit $U = \{\hat{g} \in \hat{\mathcal{S}}_{k+1}(n) \mid j^k \hat{g} = j^k f\}$, et soit $V = \hat{f} \hat{\mathcal{O}}_{k+1}(n)$.

Comme f est supposé k-déterminé, $U \subset V$. Donc $T_{\hat{f}}U \subset T_{\hat{f}}V$. Or $T_{\hat{f}}U = (n)^{k+1}$

modulo $(n)^{k+2}$ (puisque les éléments de $T_{\hat{f}}U$ sont les polynômes homogènes de degré $(k+1)$), et par le lemme précédent

$$T_{\hat{f}}V = \mathfrak{m}(n) \Delta_f \text{ modulo } \mathfrak{m}(n)^{k+2}.$$

Donc
$$\mathfrak{m}(n)^{k+1} \subset \mathfrak{m}(n) \Delta_f + \mathfrak{m}(n)^{k+2},$$

et par le lemme de Nakayama

$$\mathfrak{m}(n)^{k+1} \subset \mathfrak{m}(n) \Delta_f. \quad \blacksquare$$

Le théorème suivant donne des conditions nécessaires et suffisantes équivalentes de k-détermination.

THEOREME 3. Soit $f \in \mathcal{S}(n)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est à détermination finie,
- (ii) $\exists k$ tel que $\mathfrak{m}(n)^k \subset \mathfrak{m}(n) \Delta_f$,
- (iii) $\dim_{\mathbf{R}} \mathcal{S}(n) / \mathfrak{m}(n) \Delta_f < +\infty$,

$$(iv) \quad \dim_{\mathbf{R}} \mathcal{G}(n) / \Delta_f < +\infty,$$

c.à.d. (par définition) le germe Df est fini.

Démonstration. L'équivalence (i) \Leftrightarrow (ii) est claire.

$$(ii) \Rightarrow (iii) : \text{Supposons } \mathfrak{m}(n)^k \subset \mathfrak{m}(n) \Delta_f. \text{ Alors } \mathcal{G}(n) / \mathfrak{m}(n) \Delta_f \subset \mathcal{G}(n) / \mathfrak{m}(n)^k,$$

qui est de dimension finie.

$$(iii) \Rightarrow (ii) : \text{Supposons l'e.v. réel } \mathcal{G}(n) / \mathfrak{m}(n) \Delta_f \text{ de dimension finie } d. \text{ On}$$

obtient, en appliquant le lemme de Nakayama sous la forme $\mathfrak{m} \cdot A = 0 \Rightarrow A = 0$,

$$\exists \ell \leq d \text{ t.q. } 0 = \mathfrak{m}(n)^\ell A \subsetneq \mathfrak{m}(n)^{\ell-1} A \dots$$

$$\subsetneq \mathfrak{m}(n) A \subsetneq A = \mathcal{G}(n) / \mathfrak{m}(n) \Delta_f.$$

Donc $0 = \mathfrak{m}(n)^\ell / \mathfrak{m}(n) \Delta_f$, c.à.d.

$$\mathfrak{m}(n)^\ell \subset \mathfrak{m}(n) \Delta_f.$$

$$(iii) \Leftrightarrow (iv) : \text{il est clair que } \mathcal{G}(n) = \mathfrak{m}(n) \oplus \mathbf{R}, \text{ donc}$$

$$\mathfrak{m}(n) \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathcal{G}(n)} + \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathbf{R}} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathcal{G}(n)}. \text{ Par suite } \mathcal{G}(n) = (\mathcal{G}(n) / \Delta_f) + \mathfrak{m}(n) \Delta_f + \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathbf{R}}$$

et l'équivalence de (iii) et (iv) en résulte clairement. ■

Exemple : $n = 2$, $f(x,y) = x^2 y$ n'est pas à détermination finie. Sinon, il existerait

k tel que

$$\mathfrak{m}(2)^k \subset \mathfrak{m}(2) \langle xy, x^2 \rangle_{\mathcal{G}(2)};$$

en particulier, on aurait $y^k \subset \mathfrak{m}(2) \langle xy, x^2 \rangle_{\mathcal{G}(2)}$, donc y^k s'annulerait quand

$x = 0$, ce qui est impossible ! ■

§ II. LE DÉPLOIEMENT UNIVERSEL D'UNE SINGULARITÉ.

Dans tout ce paragraphe, η désignera une singularité donnée :

$$\eta(0) = 0, \quad D\eta(0) = 0 \quad \text{c.à.d.} \quad \eta \in \mathfrak{m}(n)^2.$$

Tous les déploiements considérés seront des déploiements de la même singularité η .

On plonge ce germe dans une famille à r paramètres de germes, de la façon suivante :

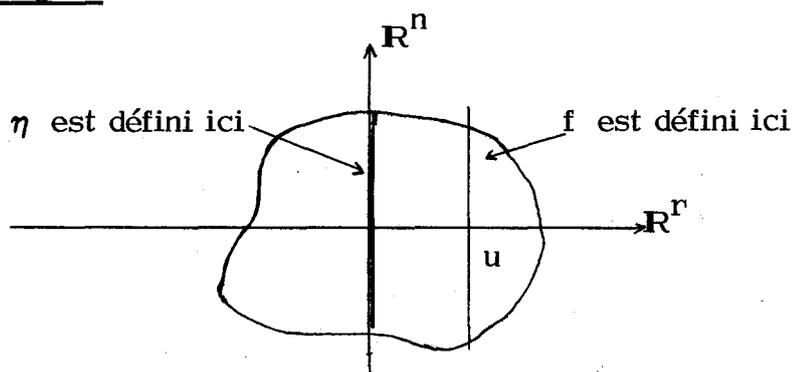
DEFINITION. Un déploiement à r paramètres de η est un germe $f \in \mathfrak{m}(m+r)$

tel que

$$f|_{\mathbb{R}^n \times \{0\}} = \eta.$$

Le déploiement sera noté (r, f) .

Sur une figure :



(En revenant sur l'introduction, $\eta = V_0$ et $f = V$).

■

On construit alors une catégorie des déploiements (de la même singularité η).

Les objets sont les déploiements et on va définir les morphismes.

DEFINITION. Soient (r, f) et (s, g) deux déploiements de η .

Un morphisme $(\varphi, \alpha) : (r, f) \rightarrow (s, g)$ consiste en

- un germe $\varphi \in \mathcal{G}(n+r, n+s)$ tel que

$$\varphi|_{\mathbb{R}^n \times \{0\}} = \text{Id},$$

φ étant fibré c.à.d. qu'il existe $U \in \mathfrak{M}(r, s)$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+r} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^{n+s} \\ \downarrow \Pi_r & & \downarrow \Pi_s \\ \mathbb{R}^r & \xrightarrow{U} & \mathbb{R}^s \end{array}$$

(c.à.d. que φ s'écrit : $\varphi(x, u) = (X(x, u), U(u))$ avec $X(x, 0) = x$ et $U(0) = 0$)

- un germe $\alpha \in \mathfrak{M}(r)$ tel que

$$(3) \quad f = g \circ \varphi + \alpha \circ \Pi_r.$$

Composition des morphismes.

Les morphismes se composent d'une façon évidente, et un morphisme est inversible ssi φ est inversible (et dans ce cas $r = s$ nécessairement). On dit alors que

(φ, α) est un isomorphisme (le morphisme inverse est $(\varphi^{-1}, -\alpha)$). En particulier

(Id, α) est un isomorphisme.

L'introduction du germe $\alpha \in \mathfrak{M}(r)$ autorise le germe sur la fibre au-dessus de u (cf. figure) à être modifié par une constante additive $\alpha(u)$, c.à.d.

$$f(x, u) \simeq f(x, u) + \alpha(u)$$

au sens : les objets (r, f) et $(r, f + \alpha)$ sont isomorphes dans la catégorie des déploiements de η . Cela sera utilisé dans la démonstration de l'équivalence des déploiements k -transverses ayant le même nombre de paramètres (théorème 4 de Mather).

■

Addition des déploiements.

Par définition

$$(r, f) + (s, g) = (r+s, f+g-\eta)$$

où $f+g-\eta$ est donné par

$$(f+g-\eta)(x, u, v) = f(x, u) + g(x, v) - \eta(x).$$

On appelle déploiement constant un déploiement (r, f) t.q.

$$f(x, u) = \eta(x).$$

Si (r, f) est constant

$$(r, f) + (s, g) = (r+s, g)$$

où, dans le membre de droite,

$$g(x, u, v) = g(x, v).$$

Exemple. Soit η une singularité et soient $(b_1, \dots, b_r) \in \mathfrak{M}(n)$. Alors

$$f(x, u) = \eta(x) + \sum_{i=1}^r b_i(x) u_i$$

est un déploiement de η , et il est clair que pour $s < r$

$$(s, \eta + \sum_{i=1}^s b_i u_i) + (1, \eta + b_{s+1} u_{s+1}) = (s+1, \eta + \sum_{i=1}^{s+1} b_i u_i).$$

■

La formule

$$(3) \quad f = g \circ \varphi + \alpha \circ \Pi_r$$

montre qu'on déploie (s, g) quelconque et un morphisme (φ, α) quelconque déterminent un déploiement (r, f) appelé le déploiement induit de (s, g) par le morphisme (φ, α) .

DEFINITION. Un déploiement (r, f) de η est appelé versel si tout déploiement de η est induit par (r, f) grâce à un morphisme convenable (c.à.d. $\forall (t, h)$

déploiement de η , $\exists (\varphi, \alpha) : (t, h) \rightarrow (r, f)$.

Un déploiement versel (r, f) avec r minimal (c.à.d. si $s < r$, (s, g) n'est pas versel) est appelé universel.

Il y a évidemment unicité du paramètre r de tous les déploiements universels possibles, et le théorème de Mather montrera qu'il y a unicité du déploiement universel à un isomorphisme près. Il s'agit donc bien d'un objet universel au sens des catégories.

Nous allons avoir besoin de la notion de codimension :

DEFINITION. Soit $\eta \in \mathfrak{m}(n)^2$. On définit la codimension de η par

$$\text{codim } \eta = \dim_{\mathbf{R}} \mathfrak{m}(n) / \Delta_{\eta}$$

(ce qui a un sens puisque : $\eta \in \mathfrak{m}(n)^2$ implique $\Delta_{\eta} \subset \mathfrak{m}(n)$).

Evidemment la codimension peut être infinie. Elle est liée à la détermination de la façon suivante

PROPOSITION 1 : (i) Soit $\eta \in \mathfrak{m}(n)^2$. La codimension de η est finie ssi η est à détermination finie.

(ii) $\text{codim } \eta = k \Rightarrow \eta$ est $(k+2)$ déterminé.

Démonstration. (i) Nous avons vu au paragraphe I que η est à détermination

finie ssi

$$\dim_{\mathbf{R}} \mathfrak{g}(n) / \Delta_{\eta} < +\infty .$$

Or

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}(n) &= \mathfrak{m}(n) + \mathbf{R} \\ &= \mathfrak{m}(n) / \Delta_{\eta} + \Delta_{\eta} + \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Il est donc clair que

$$\dim_{\mathbf{R}} \mathfrak{g}(n) / \Delta_{\eta} < +\infty \Leftrightarrow \dim_{\mathbf{R}} \mathfrak{m}(n) / \Delta_{\eta} < +\infty .$$

- (ii) Supposons : $\dim_{\mathbf{R}} \mathfrak{m}(n) / \Delta_{\eta} = k$. On pose $A = \mathfrak{m}(n) / \Delta_{\eta}$ et l'on obtient

en appliquant le lemme de Nakayama

$$\exists \ell \leq k \text{ t.q. } 0 = \mathfrak{m}(n)^{\ell} A \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{m}(n) A \subsetneq A.$$

Donc $\mathfrak{m}(n)^{\ell+1} \subset \Delta_{\eta}$, $\mathfrak{m}(n)^{\ell+2} \subset \mathfrak{m}(n) \Delta_{\eta}$, et par suite η est $(\ell+2)$ (donc $(k+2)$)-déterminé

grâce au théorème 1 de Mather. ■

Nous donnons maintenant l'énoncé du théorème de Mather, dont la démonstration est repoussée au paragraphe V.

THEOREME 4 (de MATHER). Une singularité $\eta \in \mathfrak{m}(n)^2$ admet un déploiement versel ssi elle est de codimension finie. De plus

- Deux déploiements versels ayant le même nombre de paramètres sont isomorphes.

- Tout déploiement versel est isomorphe à un déploiement

$$(r, f) + \text{déploiement constant,}$$

où (r, f) est universel.

- Si $b_1, \dots, b_r \in \mathfrak{m}(n)$ sont des représentants d'une base de $\mathfrak{m}(n) / \Delta_{\eta}$, alors le déploiement (r, f) de η défini par

$$f(x, u) = \eta(x) + \sum_{i=1}^r b_i(x) u_i$$

est universel.

(Preuve au paragraphe V). ■

Nous allons maintenant tirer de nombreuses conséquences de ce théorème.

D'abord deux remarques

- 1°) Si $q(x)$ est une forme quadratique non dégénérée sur \mathbf{R}^n , $\mathfrak{m}(n) / \Delta_q = \{0\}$,

donc $(0, q)$ est le déploiement universel de q .

- 2°) Si $\eta(x)$ admet le déploiement universel

$$\eta(x) + \delta(x, u)$$

et si $q(y)$ est une forme quadratique non dégénérée, $\eta(x) + q(y)$ admet le déploiement universel

$$\eta(x) + q(y) + \delta(x, u).$$

Ainsi quand on calcule le déploiement universel d'une singularité η , il est judicieux de transformer d'abord η , de façon à ce que le plus grand nombre possible de variables soient isolées dans une forme quadratique non dégénérée.

Nous allons exploiter cette remarque. ■

DEFINITION. Le corang d'une singularité $\eta \in \mathfrak{M}(n)^2$ est le corang de la matrice hessienne $\left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_i \partial x_j} (0) \right]$ c.à.d. de la forme quadratique donnée par le 2-jet de η . ■

On a alors le lemme suivant, qui est fondamental en vertu de la remarque précédente.

LEMME DE REDUCTION. Si $\eta \in \mathfrak{M}(n)^2$ est une singularité de corang $c \leq n-1$ (c.à.d. $j^2 \eta \neq 0$), alors η est équivalente à droite à un germe de la forme

$$\zeta(x_1, \dots, x_c) + q(x_{c+1}, \dots, x_n)$$

où $j^2 \zeta = 0$, et q est une forme quadratique non dégénérée.

Grâce à ce lemme on se ramène à chercher le déploiement universel d'une singularité de c variables, et de 2-jet nul, c.à.d. d'une singularité dans $\mathfrak{M}(c)^3$.

Idée de la preuve (facile). Elle découle de l'équivalence des déploiements universels de même nombre de paramètres (théorème de Mather) et du fait qu'une forme quadratique non dégénérée est 2-déterminée (lemme de Morse ou théorème 1 de Mather). ■

Le lemme de réduction donne une comparaison entre le corang et la codimension :

PROPOSITION 2. Soit $\eta \in \mathfrak{M}(n)^2$. Si corang $\eta = c$, alors

$$\text{codim } \eta \geq \frac{c(c+1)}{2} .$$

Donc corang $\eta \geq 3$ implique codim $\eta \geq 6$.

Idée de la preuve : On sait que la codimension est invariante par changement de coordonnées locales. On se ramène à η de la forme indiquée par le lemme de réduction. Alors

$$\text{codim } \eta = \dim_{\mathbf{R}} \frac{\mathfrak{m}(c)}{\Delta_{\zeta}} \geq \dim_{\mathbf{R}} \frac{j^2 \mathfrak{m}(c)}{j^2 \Delta_{\zeta}} .$$

■

On a alors une conséquence importante du lemme de réduction et de la proposition précédente :

Conséquence. Souvent on est intéressé par des déploiements ayant au plus quatre paramètres ($\text{codim } \eta \leq 4$) puisque l'espace des paramètres du déploiement a souvent la signification physique de l'espace-temps \mathbf{R}^4 (cf. introduction). Alors le corang de la singularité η est ≤ 2 par la proposition précédente, et, par le lemme de réduction, η s'écrit dans des coordonnées convenables

$$\eta(x, y) = \begin{cases} q(y) & \text{si corang } \eta = 0, \\ \zeta(x) + q(y) & \text{si corang } \eta = 1 \quad (x \in \mathbf{R}), \\ \zeta(x_1, x_2) + q(y) & \text{si corang } \eta = 2 \quad (x \in \mathbf{R}^2), \end{cases}$$

avec $j^2 \zeta = 0$.

On a vu que q n'affecte pas le déploiement universel, et on se ramène donc à chercher le déploiement universel, à quatre paramètres au plus, d'une singularité de une ou deux variables. On a vu qu'une telle singularité de codimension inférieure

à 4 est nécessairement 6-déterminée. Elle s'écrit donc dans des coordonnées convenables comme un polynôme de une ou deux variables, de degré inférieur à 6, et supérieur à 3 (elle est de 2-jet nul).

Nous allons maintenant écrire ces polynômes sous des formes canoniques (ou "normales"). Nous verrons qu'on distingue exactement 7 formes normales, et nous allons donner le déploiement de ces 7 singularités.

§ III. LES 7 CATASTROPHES ELEMENTAIRES DE THOM.

Les résultats qui précèdent nous amènent naturellement au théorème suivant de

Thom :

THEOREME 5, (la "règle de 7" de Thom). A l'addition près d'une forme quadratique non dégénérée en les autres variables et à la multiplication près par ± 1 , une singularité η de codimension comprise entre 1 et 4 est équivalente à droite à l'une des suivantes :

Codim	η	Déploiement universel	Nom
1	x^3	$x^3 + ux$	"Pli"
2	x^4	$x^4 - ux^2 + vx$	"Point-froce"
3	x^5	$x^5 + ux^3 + vx^2 + wx$	"Queue δ aronde"
	$x^3 + y^3$	$x^3 + y^3 + wxy - ux - vy$	Ombilic hyperbolique ou "crêt de vague"
	$x^3 - xy^2$	$x^3 - xy^2 + w(x^2 + y^2) - ux - vy$	Ombilic elliptique ou "poil"
4	x^6	$x^6 + tx^4 + ux^3 + vx^2 + wx$	"Papillon"
	$x^2y + y^4$	$x^2y + y^4 + wx^2 + ty^2 - ux - vy$	Ombilic parabolique ou "champignon"

Les sept singularités ont été baptisées ainsi par Thom parce qu'elles ont une interprétation morphologique.

Démonstration. La forme des déploiements universels découle du théorème 4

de Mather. Par exemple pour

$$\eta(x) = x^3,$$

$$\mathfrak{m}(1)/\Delta_\eta = \mathfrak{m}(1)/\langle x^2 \rangle_{\mathfrak{g}(1)} = \langle x \rangle_{\mathbf{R}},$$

et le déploiement universel de x^3 est donc

$$f(x,u) = x^3 + ux.$$

Il reste donc à montrer que les singularités de codimension comprise entre 1 et 4 ont nécessairement ces 7 formes.

Remarquons auparavant que si $\text{codim } \eta = 0$, $\text{corang } \eta = 0$, et, par le lemme de réduction, $\eta = q(y)$. Ce cas est exclu. Il reste à considérer les deux cas suivants :

1) Corang $\eta = 1$, auquel cas on se ramène (cf. plus haut) à $\eta = \eta(x)$ ($x \in \mathbf{R}$), $j^2 \eta = 0$ c.à.d. $\eta \in \mathfrak{m}(1)^3$.

2) Corang $\eta = 2$, auquel cas on se ramène à $\eta = \eta(x,y)$ ($x,y \in \mathbf{R}$), $j^2 \eta = 0$ c.à.d. $\eta \in \mathfrak{m}(2)^3$.

Dans les deux cas η est 6-déterminée donc s'écrit comme un polynôme de degré ≤ 6 et ≥ 3 car $j^2 \eta = 0$.

On examine les deux cas séparément

- 1) $\eta \in \mathfrak{m}(1)^3$: $\eta = a_k x^k + \text{termes de plus haut degré}$. A la multiplication près par ± 1 et à un changement de variables près $\eta = x^k + \text{termes de plus haut degré}$. Alors

$$j^k \eta = x^k \text{ est } k\text{-déterminé.}$$

Donc $\eta \sim x^k$, $3 \leq k \leq 6$. Cela donne le "pli", le "point-fronce", la "queue d'aronde" et le "papillon".

- 2) $\eta \in \mathfrak{M}(2)^3$:

Il est naturel de regarder $j^3\eta = P(x,y)$, où $P(x,y)$ est un polynôme homogène de degré 3 (puisque $j^2\eta = 0$). Il se décompose sur \mathbb{C} :

$$P(x,y) = (a_1x + b_1y)(a_2x + b_2y)(a_3x + b_3y).$$

Il y a alors quatre possibilités :

- A) Les trois vecteurs $(a_i, b_i) \in \mathbb{C}^2$ sont linéairement indépendants sur \mathbb{C} ,
- B) $P(x,y) = (a_1x + b_1y)(a_2x + b_2y)^2$ où les (a_i, b_i) sont réels,
- C) $P(x,y) = (ax + by)^3$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(a,b) \neq (0,0)$,
- D) $P(x,y) = 0$.

Examinons ces cas séparément.

. Cas A : Il se subdivise en deux cas que nous traitons successivement.

- A α) Supposons tous les (a_i, b_i) réels.

On choisit alors $a_1x + b_1y$ et $a_2x + b_2y$ comme nouvelles coordonnées locales :

$$P(x,y) \sim xy(ax + by) \quad \text{où} \quad (a,b) \neq (0,0).$$

Donc $j^3\eta = P(x,y) \sim x^3 - xy^2$ (par un nouveau changement de coordonnées locales) et ce dernier germe est 3-déterminé (cf. plus haut). Donc $\eta \sim x^3 - xy^2$. C'est l'ombilic elliptique ou "poil".

- A β) Si on n'est pas dans le cas A α , c'est que deux (a_i, b_i) sont complexes conjugués et l'autre est réel. Alors

$$\begin{aligned} P(x,y) &\sim (ax + by)(x^2 + y^2) \\ &\sim x^3 + y^3 \end{aligned}$$

(par des changements de coordonnées locales faciles à déterminer) et $x^3 + y^3$ est aussi 3-déterminé. Donc $\eta \sim x^3 + y^3$. C'est l'ombilic hyperbolique ou "crêt de vague".

. Cas B : $j^3 \eta = P(x,y) \sim x^2 y$.

Ici la situation se complique car $x^2 y$ n'est pas à détermination finie (cf. plus haut). On sait que

$$j^3 \eta \sim x^2 y \quad \text{et} \quad j^k \eta \sim \eta, \quad \forall k \geq 6,$$

puisque η est 6-déterminé donc k -déterminé pour $k \geq 6$. Donc pour $k \geq 6$, $j^k \eta \not\sim x^2 y$ (sinon $j^k \eta \sim x^2 y \sim \eta$ ce qui est impossible puisque η est à détermination finie, et non $x^2 y$). Soit alors k le plus grand possible tel que $j^k \eta \sim x^2 y$ ($k = 3, 4$ ou 5).

On se ramène à $j^k \eta = x^2 y$, par changement de coordonnées locales. Alors

$$j^{k+1} \eta = x^2 y + h(x,y), \quad \text{où } h \text{ est un}$$

polynôme homogène de degré $(k+1)$. On fait le changement de coordonnées locales :

$$\phi : (x,y) \longrightarrow (x+\phi, y+\psi)$$

où ϕ et ψ sont des polynômes homogènes de degré $k-1 \geq 2$. Maintenant

$$j^{k+1}(\eta \circ \phi) = x^2 y + x^2(\psi + \beta) + xy(2\phi + \alpha) + ay^{k+1}$$

où α et β sont des polynômes homogènes de degré $(k-1)$. Donc on peut se ramener par un bon choix de ϕ à

$$j^{k+1}(\eta \circ \phi) = x^2 y + ay^{k+1}, \quad \text{avec } a \neq 0$$

(sinon $j^{k+1}(\eta \circ \phi) = x^2 y$, $j^{k+1} \eta \sim x^2 y$, ce qui est exclu). Par changement de coordonnées locales

$$j^{k+1} \eta = x^2 y + ay^{k+1}, \quad \text{avec } a \neq 0.$$

On vérifie que $x^2 y + ay^{k+1}$ est $(k+1)$ -déterminé (par le premier théorème de Mather). Donc

$$\eta \sim x^2 y + ay^{k+1} \sim x^2 y \pm y^{k+1}.$$

Mais si $k \geq 4$, $\text{codim } \eta \geq 5$ (par le calcul de $\text{codim } \eta = \dim_{\mathbf{R}} \frac{\mathfrak{m}^{(2)}}{\Delta \eta}$). Donc nécessairement $k = 3$, $\eta \sim x^2 y \pm y^4$, et, à la multiplication près par -1 , $\eta \sim x^2 y + y^4$. C'est

l'ombilic parabolique ou "champignon".

Nous allons maintenant montrer que les cas C et D sont exclus.

. Cas C : $j^3 \eta = P(x,y) \sim x^3$ n'est pas à détermination finie (comme germe de deux variables (x,y)).

$j^4 \eta = x^3 + h$ où h est un polynôme homogène de degré 4. On a alors

$$\text{codim } \eta = \dim_{\mathbf{R}} \mathfrak{m}(2) / \Delta_{\eta} \geq \dim_{\mathbf{R}} j^3 \mathfrak{m}(2) / j^3 \Delta_{\eta}.$$

Or $\dim_{\mathbf{R}} j^3 \mathfrak{m}(2) = 9$,

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbf{R}} j^3 \Delta_{\eta} &= \dim_{\mathbf{R}} j^3 \langle x^2 + h_1, h_2 \rangle \\ &\leq 4 \quad (\text{car } h_1 \text{ et } h_2 \text{ sont de degré } \geq 3). \end{aligned}$$

Il suit $\text{codim } \eta \geq 5$, cas exclu.

. Cas D : $j^3 \eta = P(x,y) = 0$. Alors $\eta \in \mathfrak{m}(2)^4$,

$$\Delta_{\eta} \subset \mathfrak{m}(2)^3,$$

$$\text{codim } \eta = \dim_{\mathbf{R}} \mathfrak{m}(2) / \Delta_{\eta} \geq \dim_{\mathbf{R}} \mathfrak{m}(2) / \mathfrak{m}(2)^3 = 5,$$

cas exclu. ■

Avant de donner une idée de la démonstration du théorème 4 de Mather, nous faisons un retour sur l'introduction, en appliquant les résultats obtenus.

§ IV. RETOUR SUR L'INTRODUCTION.

Supposons pour simplifier $X = \mathbf{R}$, c.à.d.

$$V : \mathbf{R} \times U \rightarrow \mathbf{R}.$$

Quitte à changer d'origines, $x_0 = 0$, $u_0 = 0$, et

$$V(0,0) = \frac{\partial V}{\partial x}(0,0) = 0,$$

c.à.d. $V_{u_0} = V_0 \in \mathfrak{m}(1)^2$. Supposons maintenant que

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(0,0) = 0,$$

ce qui est le cas non trivial (si $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(0,0) \neq 0$, V_u est quadratique au voisinage de 0 pour u "petit") et que $\text{codim } V_0 (= \dim_{\mathbf{R}} \eta(1) / \langle V'_0 \rangle_{\mathcal{E}(1)}) = 2$. Alors, d'après le théorème 5 de Thom, $V_0 = x^4$ dans des coordonnées locales convenables. Le déploiement universel de cette singularité est $(2,f)$, où

$$f(x, u_1, u_2) = x^4 - u_1 x^2 + u_2 x.$$

Or V est un déploiement de V_0 . On a donc un morphisme

$$V \xrightarrow{(\phi, \alpha)} f$$

c.à.d. que :

$$\begin{aligned} V(x, u) &= f \circ \phi(x, u) + \alpha(u) \\ &= X^4 - U_1 X^2 + U_2 X + \alpha \end{aligned}$$

$$\text{où } \begin{cases} X = X(x, u) \text{ avec } X(x, 0) = x, \\ U_1 = U_1(u), \\ U_2 = U_2(u), \\ \alpha = \alpha(u). \end{cases}$$

Ainsi $\frac{\partial V}{\partial X}(x, u) = (4X^3 - 2U_1X + U_2) \frac{\partial X}{\partial x}(x, u)$. Comme $\frac{\partial X}{\partial x}(0, 0) = 1$, $\frac{\partial V}{\partial X}(x, u)$ n'est pas nul pour (x, u) "voisins" de $(0, 0)$. Ainsi

$$\frac{\partial V}{\partial X}(x, u) = 0 \iff 4X^3 - 2U_1X + U_2 = 0.$$

Suivant la position de (U_1, U_2) (c.à.d. de u) on a (au voisinage de zéro)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{soit 1 point critique triple (en zéro),} \\ \text{" 1 " " simple,} \\ \text{" 3 points critiques simples,} \\ \text{" 2 " " : 1 simple, 1 double.} \end{array} \right.$$

Sur la figure 1 on a tracé la surface d'équation

$$4X^3 - 2U_1X + U_2 = 0.$$

Sur la figure 2 on a tracé la courbe qui correspond à la nullité du discriminant de $4X^3 - 2U_1X + U_2$, et on a représenté l'allure locale de V suivant la position de (U_1, U_2) par rapport à cette courbe. On obtient ainsi toutes les "petites" déformations différentiables possibles de x^4 au voisinage de l'origine.

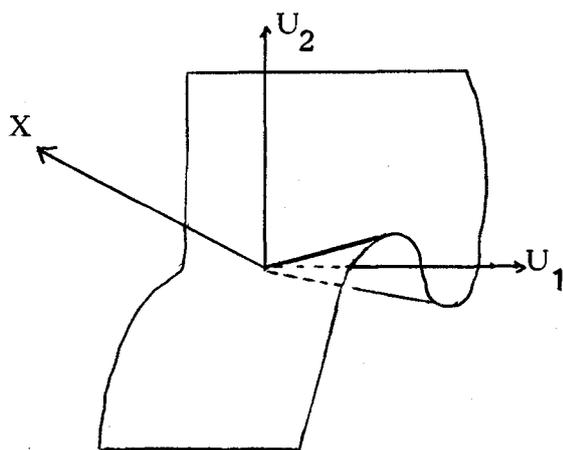


FIGURE 1

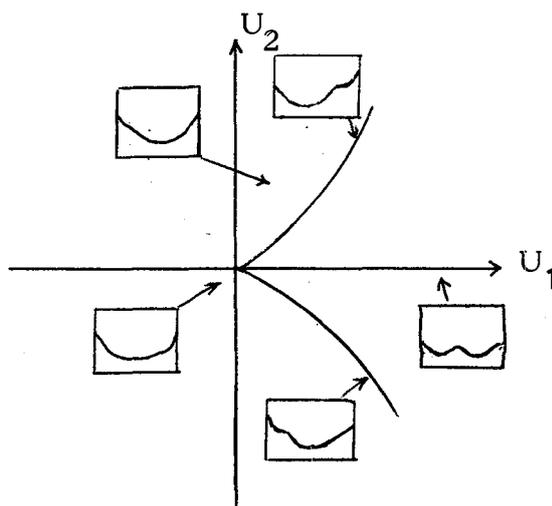


FIGURE 2

§ V. PREUVE DU THEOREME PRINCIPAL SUR LES DEPLOIEMENTS UNIVERSELS

(THEOREME 4 DE MATHER).

Soit η une singularité donnée ($\eta \in \mathfrak{m}(n)^2$) et (r, f) un déploiement de η .

On note $j_0^k f(x, u)$ le développement de Taylor à l'ordre k de f , par rapport à x , au point (x, u) , tronqué de son terme d'ordre zéro ($f(x, u)$), c.à.d.

$$j_0^k f(x, u) = \text{le } k\text{-jet de}$$

$$\phi_{x, u}(y) = f(x+y, u) - f(x, u).$$

Ainsi

$$j_0^k f : \mathbb{R}^{n+r} \rightarrow \mathfrak{m}(n) / \mathfrak{m}(n)^{k+1}.$$

■

DEFINITION. Le déploiement f est dit k -transverse si $j_0^k f$ est transverse à l'origine à l'orbite $\hat{\eta} \hat{\otimes}_k(n)$ de $\hat{\eta}$, où $\hat{\eta}$ est le k -jet de η ⁽⁴⁾. ■

La démonstration du théorème 4 de Mather établira le résultat supplémentaire :

THEOREME 6. "Versel = k transverse si η est k -déterminée".

Si η est une singularité k -déterminée, alors un déploiement de η est versel ssi il est k -transverse. ■

Tout reposera alors sur le lemme principal (qui sera le plus long à démontrer) :

Si η est k -déterminée, et si $(r, f), (r, g)$ sont deux déploiements k -transverses (= versels) alors $(r, f) \simeq (r, g)$. ■

Nous allons d'abord interpréter le concept de k -transversalité en employant une formule explicite. Nous pourrons ensuite en déduire le théorème 6 ci-dessus, puis le théorème 4 de Mather, à partir du lemme principal. Enfin tout le problème sera de démontrer le lemme principal. ■

La condition explicite de k -transversalité est la suivante :

PROPOSITION 3. f est un déploiement k -transverse de η ssi :

$$\mathfrak{m}(n) = \Delta_{\eta} + V_f + \mathfrak{m}(n)^{k+1},$$

où

$$V_f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial u_j} \Big|_{\mathbb{R}^n \times \{0\}} - \frac{\partial f}{\partial u_j}(0) \right\rangle_{\mathbb{R}} \quad (5)$$

(4) Cela signifie que $(D j_0^k f)(0) \mathbb{R}^{n+r} + T_{\hat{\eta}} \hat{\otimes}_k(n) = \mathfrak{m}(n) / \mathfrak{m}(n)^{k+1}$, où $(D j_0^k f)(0)$ désigne la valeur en 0 (= (0,0)) de la dérivée de (ou application tangente à) $j_0^k f$.

(5) On note ainsi l'e.v. réel engendré par les éléments entre crochets.

Idée de la démonstration. On utilise l'égalité algébrique démontrée au lemme 1,

$$\S I: \quad T_{\hat{\eta}} \hat{\mathcal{O}}_k(n) + \mathfrak{m}(n)^{k+1} = \mathfrak{m}(n) \Delta_{\eta} + \mathfrak{m}(n)^{k+1}.$$

Le terme $(D j_0^k f)(0) \mathbb{R}^{n+r}$ fait l'objet d'un calcul explicite. ■

COROLLAIRE 1. Si b_1, \dots, b_r est une base de l'e.v. réel $\mathfrak{m}(n)/(\Delta_{\eta} + \mathfrak{m}(n)^{k+1})$,
alors $\eta + \sum_{j=1}^r u_j b_j$ est k-transverse.

Idée de la démonstration. On vérifie la condition explicite. ■

Ainsi une singularité η quelconque admet un déploiement k-transverse, pour tout k, puisque

$$\mathfrak{m}(n)/(\Delta_{\eta} + \mathfrak{m}(n)^{k+1}) \subset \mathfrak{m}(n)/\mathfrak{m}(n)^{k+1}$$

et ce dernier espace est de dimension finie sur \mathbb{R} . ■

COROLLAIRE 2. Tout déploiement versel est k-transverse, pour tout k.

Idée de la démonstration. On montre que si (s, g) et (r, f) sont deux déploiements de la même singularité η , si (s, g) est k-transverse, et si l'on a un morphisme

$$(s, g) \xrightarrow{(\varphi, \alpha)} (r, f),$$

alors (r, f) est k-transverse (pour cela on utilise la condition explicite). Or il existe toujours un déploiement k-transverse. ■

Démonstration du théorème 6 ("versel = k-transverse si η est k-déterminée") :

il reste à montrer :

k-transverse \Rightarrow versel si η est k-déterminée.

Soit (r, f) k-transverse, et soit (s, g) un déploiement quelconque. On a le morphisme

évident
$$(r, f) \longrightarrow (s, g) + (r, f),$$

donc $(s, g) + (r, f)$ est k-transverse (par ce qu'on vient de voir). Or

$(s,g) + (r,f) \simeq (r,f) + \text{un déploiement constant}$

(par le lemme principal, qui exige η k -déterminée). Et $(r,f) + \text{dép}^t \text{ constant} \rightarrow (r,f)$

(par un morphisme évident). Finalement on a le morphisme composé

$$(s,g) \longrightarrow (s,g) + (r,f) \xrightarrow{\simeq} (r,f) + \text{constant} \longrightarrow (r,f)$$

c.à.d. que (r,f) est versel. ■

COROLLAIRE 3. Si (r,f) est un déploiement versel de η , alors $\text{codim } \eta \leq r$
(donc η est à détermination finie). De plus $\mathfrak{m}(n)^k \subset \Delta_\eta$, pour $k > r$.

Idée de la démonstration. Soit k quelconque (pour l'instant). On sait que (r,f) est k -transverse, donc

$$\mathfrak{m}(n) = \Delta_\eta + V_f + \mathfrak{m}(n)^{k+1}.$$

Par suite

$$\dim_{\mathbf{R}} \mathfrak{m}(n) / (\Delta_\eta + \mathfrak{m}(n)^{k+1}) \leq \dim_{\mathbf{R}} V_f \leq r.$$

En appliquant alors deux fois le lemme de Nakayama, on obtient

$$\mathfrak{m}(n)^k \subset \Delta_\eta \text{ pour } k > r.$$

Ainsi, pour $k > r$,

$$\mathfrak{m}(n) / \Delta_\eta = \mathfrak{m}(n) / (\Delta_\eta + \mathfrak{m}(n)^{k+1}),$$

d'où

$$\text{codim } \eta = \dim_{\mathbf{R}} \mathfrak{m}(n) / \Delta_\eta \leq r. \quad \blacksquare$$

Moyennant la démonstration du lemme principal, nous sommes maintenant en mesure de donner la

Preuve du théorème 4 de Mather :

.1) Si η admet un déploiement versel, η est de codimension finie par le corollaire 3. Réciproquement si $\text{codim } \eta = k < +\infty$, η est $(k+2)$ -déterminée, η admet un déploiement $(k+2)$ -transverse, donc versel.

.2) Si η admet 2 déploiements versels de même dimension, $\text{codim } \eta = k < +\infty$ (par le 1), η est $(k+2)$ -déterminée, les deux déploiements sont $(k+2)$ -transverses donc isomorphes par le lemme principal.

.3) Si $b_1, \dots, b_r \in \mathfrak{m}(n)$ sont des représentants d'une base de $\mathfrak{m}(n)/\Delta_\eta$, $\text{codim } \eta = r < +\infty$, donc η admet un déploiement versel (par le 1), et par le corollaire 3

$$\mathfrak{m}(n)/\Delta_\eta = \mathfrak{m}(n)/\Delta_{\eta + \mathfrak{m}(n)^{k+1}}$$

pour k assez grand. Alors b_1, \dots, b_r sont des représentants d'une base de

$\mathfrak{m}(n)/(\Delta_\eta + \mathfrak{m}(n)^{k+1})$, et, par le corollaire 1, $\eta + \sum_{j=1}^r u_j b_j$ est k -transverse, donc versel, et de paramètre minimum par le corollaire 3. Donc $\eta + \sum_{j=1}^r u_j b_j$ est universel.

Soit (r, f) ce déploiement.

.4) Maintenant si (s, g) est versel, $s \geq r$ puisque (r, f) est universel, et $(r, f) + \text{constant} = (s, f)$ est versel (on a un morphisme évident $(r, f) \rightarrow (s, f)$ et (r, f) est versel = k -transverse). Donc $(s, g) \simeq (s, f)$ par le lemme principal, soit $(s, g) \simeq (r, f) + \text{constant}$. ■

Nous allons maintenant donner une

Idée de la preuve du lemme principal.

Soit η une singularité k -déterminée et $(r, f), (r, g)$ deux déploiements k -transverses de η . Nous allons montrer que $(r, f) \simeq (r, g)$. Pour cela, on cherche une homotopie F_t de déploiements k -transverses reliant $F_0 = f$ à $F_1 = g$ tels que pour tout $t_0 \in [0, 1]$, $F_t \simeq F_{t_0}$ (au sens des déploiements) pour t voisin de t_0 . Comme $[0, 1]$ est connexe compact, cela suffira.

. 1^{ère} phase de la démonstration : recherche de l'homotopie F_t de déploiements k-transverses.

Les déploiements à r paramètres de η sont les germes de la forme $\eta + \delta$ où $\delta \in \mathfrak{M}(r) \mathfrak{S}(n+r)$. Il est clair que $V_{\eta+\delta} = V_\delta$. Donc, par la condition explicite de k-transversalité,

$$\text{"}\eta + \delta \text{ est k-transverse"} \iff \mathfrak{M}(n) = \Delta_\eta + V_\delta$$

(puisque η est k-déterminée, $\mathfrak{M}(n)^{k+1} \subset \mathfrak{M}(n) \Delta_\eta \subset \Delta_\eta$)

$$\iff \text{"}j^k V_\delta \text{ est transverse à } U = j^k \Delta_\eta \text{ dans } \mathfrak{M}(n) / \mathfrak{M}(n)^{k+1} \text{"}$$

On se ramène ainsi à travailler dans un e.v. de dimension finie.

On introduit alors l'application

$$\mathfrak{M}(r) \mathfrak{S}(n+r) \longrightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^r, \mathfrak{M}(n) / \mathfrak{M}(n)^{k+1}) \quad (\text{noté Hom})$$

qui à δ associe

$$h_\delta = (e_i \longrightarrow j^k \left(\frac{\partial \delta}{\partial u_i} \Big|_{\mathbb{R}^n \times \{0\}} - \frac{\partial \delta}{\partial u_i}(0) \right)).$$

Elle est surjective (il suffit de prendre pour δ un polynôme convenable). Et il est clair que $j^k V_\delta = h_\delta(\mathbb{R}^r)$.

Soit $A = \{h \in \text{Hom} \mid h(\mathbb{R}^r) \text{ n'est pas transverse à } U\}$. Alors

" $\eta + \delta$ est k-transverse" $\iff h_\delta \in \text{Hom} \setminus A$, et l'on vérifie que

$h \in A \iff$ "Un certain nombre ($N \geq 1$) de déterminants extraits de la matrice

$$[h_{ij}] \text{ sont nuls"}$$

Donc A est une variété de Hom, de codimension $N \geq 1$.

Si $\text{codim } A > 1$, $\text{Hom} \setminus A$ est connexe. Sinon, $\text{codim } A = 1$, $\text{Hom} - A$ a deux composantes connexes disjointes :

Région 1 : $\det > 0$

Région 2 : $\det < 0$

(A correspond à $\det = 0$).

Aux déploiements f et g k -transverses sont associés h_{δ_f} et h_{δ_g} dans $\text{Hom} - A$. On peut toujours se ramener au cas où h_{δ_f} et h_{δ_g} sont dans la même composante connexe de $\text{Hom} \setminus A$ (au besoin en remplaçant (r, f) par $(r, f \circ \varphi)$ où $\varphi \in \mathcal{B}(r)$ est une transformation qui change l'orientation ; il est clair que $(r, f) \simeq (r, f \circ \varphi)$ et que h_{δ_f} et $h_{\delta_{f \circ \varphi}}$ ne sont pas dans la même composante connexe de $\text{Hom} \setminus A$). Donc h_{δ_f} et h_{δ_g} peuvent être joints dans $\text{Hom} - A$ par un lacet linéaire par morceaux ; $\delta \rightarrow h_{\delta}$ étant surjective, ce lacet peut se relever en un lacet linéaire par morceaux dans $\mathfrak{M}(r) \cong \mathfrak{S}(n+r)$ et, sans perte de généralité, on peut supposer que ce dernier lacet est linéaire. On a alors un lacet linéaire de déploiements k -transverses :

$$F_t = (1-t)f + tg, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

2^{ème} phase de la démonstration.

Il reste à démontrer que le type d'isomorphisme de F_t en tant que déploiement est localement constant, c.à.d.

$$\forall t_0 \in [0, 1], \quad F_t \simeq F_{t_0} \text{ pour } t \text{ "voisin" de } t_0.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que

$$f|_{\{0\} \times \mathbb{R}^r} = g|_{\{0\} \times \mathbb{R}^r} = 0,$$

puisque cela revient à remplacer F_t par un déploiement isomorphe (on a vu que $(r, f) \simeq (r, f + \alpha)$ et un déploiement isomorphe à un déploiement k -transverse est k -transverse).

Maintenant la technique employée est tout à fait semblable à celle de la preuve du théorème 2 de Mather. En passant sur cette étape technique, disons que l'on se ramène à démontrer l'égalité algébrique :

$$(*) \quad \mathcal{E}(n+r+1) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\rangle \mathcal{E}(n+r+1) + \left\langle \frac{\partial F}{\partial u_j} \right\rangle \mathcal{E}(r+1) + \mathcal{E}(r+1).$$

Utilisant le fait que F_t est k -transverse et la caractérisation explicite des déploiements k -transverses, on obtient par le calcul

$$(**) \quad \mathcal{E}(n+r+1) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\rangle \mathcal{E}(n+r+1) + \left\langle \frac{\partial F}{\partial u_j} \right\rangle \mathcal{E}(r+1) + \mathcal{E}(r+1) + \mathfrak{m}(r+1) \mathcal{E}(n+r+1).$$

On a donc montré

$$(**) \quad C = A + B + \mathfrak{m}(r+1)C,$$

et l'on veut

$$(*) \quad C = A + B,$$

en posant

$$C = \mathcal{E}(n+r+1)$$

$$A = \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\rangle \mathcal{E}(n+r+1)$$

$$B = \left\langle \frac{\partial F}{\partial u_j} \right\rangle \mathcal{E}(r+1) + \mathcal{E}(r+1).$$

On peut calculer modulo A , c.à.d. montrer que

$$C = B + \mathfrak{m}(r+1)C \Rightarrow C = B.$$

Supposons donc $C = B + \mathfrak{m}(r+1)C$. Alors

$$C / \mathfrak{m}(r+1)C = B / \mathfrak{m}(r+1)C \subset B / \mathfrak{m}(r+1)B$$

(car $B \subset C$). Or B est un $\mathcal{E}(r+1)$ -module de type fini, engendré par exemple par

b_1, \dots, b_s , c.à.d. $B = \langle b_i \rangle_{\mathcal{E}(r+1)}$. Par suite, $B / \mathfrak{m}(r+1)B$ est l'e.v. réel engendré

par les projections de b_1, \dots, b_s . Ces projections engendrent donc aussi $C / \mathfrak{m}(r+1)C$.

Maintenant C est un $\mathcal{E}(n+r+1)$ -module de type fini. Soit

$f : (\mathbb{R}^{n+r+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{r+1}, 0)$, la projection. Elle induit $f^* : \mathcal{S}(r+1) \rightarrow \mathcal{S}(n+r+1)$, qui est en fait l'inclusion. Donc $C / \mathfrak{m}(r+1)C = C / f^*\mathfrak{m}(r+1)C$ est l'e.v. réel (de dimension finie) engendré par les projections de b_1, \dots, b_s . Par le théorème de préparation de Malgrange $\{b_1, \dots, b_s\}$ engendrent donc C comme $\mathcal{S}(r+1)$ -module via f^* , c.à.d.

$$\begin{aligned} C &= \left\{ \sum_{i=1}^s f^*(e_i) b_i \mid e_i \in \mathcal{S}(r+1) \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^s e_i b_i \mid e_i \in \mathcal{S}(r+1) \right\} = B. \end{aligned}$$

■

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ATIYAH M.F. and MACDONALD I.G. Notes on commutative algebra. Mathematical Institute, Oxford, 1966.
- [2] BOURBAKI. Algèbre commutative.
- [3] BROCKER T.H. Differentiable germs and catastrophes. London Mathematical Society, Lecture Notes Series, 17, Cambridge University Press.
- [4] GOLUBITSKY M. - GUILLEMIN V. Stable mappings and their singularities. Springer Verlag, 1973.
- [5] SCHAEFFER D.G. A regularity theorem for conservation laws. Advances in Mathematics 11, 368-386 (1973).
- [6] ZEEMAN . The classification of elementary catastrophes of codimension ≤ 5 , Structural stability, the theory of catastrophes and applications in the Sciences. Battelle Seattle Research center, 1975, Lecture Notes, Springer-Verlag.

Exposé n° 8

APPLICATIONS DU THEOREME DE MALGRANGE

AUX PROBLEMES DE BIFURCATION MULTI-PARAMETRES

par

Bruno SCHEURER

-:-

§ 1. INTRODUCTION.

On sait que la méthode de Lyapounov-Schmidt (cf. exposé n° 2) permet de ramener l'étude d'un problème de bifurcation à l'étude de l'application :

$$(1) \quad f : (x, \lambda) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow f(x, \lambda) \in \mathbb{R}^p,$$

dont on cherche la "forme" au voisinage de l'origine sachant que $f(0, 0) = 0$ [le choix de l'origine est une convention qui ne restreint pas la généralité].

Ici n est la dimension de l'espace des paramètres, m et p sont respectivement la dimension du noyau et du co-noyau d'un certain opérateur Fredholm.

Le problème de la détermination de $f^{-1}(0)$ suppose des hypothèses sur f :

on peut par exemple considérer les coefficients du développement de Taylor, jusqu'à un ordre k , de f au voisinage de l'origine. Même dans ce cadre le

problème (1) est trop général, l'application f pouvant être complètement "pathologique". Il faut donc introduire des hypothèses telles que, pour "presque toute" application f les vérifiant, le problème (1) admette une solution : la "forme" de $f^{-1}(0)$ soit caractérisable.

Dans cet exposé, nous montrons comment aborder la question dans le cas particulier où $m = p = 1$, ce qui permet de traiter, comme applications certains problèmes de bifurcation à 1 et surtout 2 paramètres. Nous nous inspirons de [1], mais les résultats fondamentaux ainsi que des références supplémentaires peuvent être trouvés dans Golubitsky-Guillemin [2], Wassermann [3].

§2. SINGULARITES DE FONCTIONS ET LEURS DEPLOIEMENTS.

A) Définitions et rappels.

Soit $g : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ et telle que $g(0) = 0$ (pour simplifier) on notera $g \in C^\infty(\mathbb{R}^q; \mathbb{R})$.

Dans le cas où le gradient dg de g en $x = 0$ vérifie $dg(0) \neq 0$ l'étude de $g^{-1}(0)$ est résolue complètement par le théorème des fonctions implicites.

DEFINITION 1. On appelle singularité de g le triplet (\mathbb{R}^q, x, g) avec $dg(x) = 0$.

Soient deux applications g_1 et g_2 de $C^\infty(\mathbb{R}^q, \mathbb{R})$ telles que $g_1(x) = g_2(x)$, pour $x \in \mathbb{R}^q$. On dira que g_1 et g_2 sont équivalentes en x à l'ordre k si, en x , leurs dérivées partielles d'ordre $\leq k$ sont égales.

DEFINITION 2. Un jet d'ordre k (ou un k -jet) est une classe d'équivalence dans $C^\infty(\mathbb{R}^q; \mathbb{R})$ pour la relation d'équivalence ci-dessus. On notera

$j^k g(x)$ la classe de g en x .

Prenant les valeurs des dérivées partielles d'ordre $\leq k$ en x , comme les coordonnées d'un k -jet, l'espace des k -jets devient un espace vectoriel que l'on notera $J^k(\mathbb{R}^q; \mathbb{R})$ (x varie dans \mathbb{R}^q).

Soit U un ouvert de $J^k(\mathbb{R}^q; \mathbb{R})$, définissons :

$$M^k(U) = \{g \in C^\infty(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}) \mid j^k g(\mathbb{R}^q) \subset U\}$$

(d'après ce qui précède $j^k g : x \rightarrow j^k g(x)$ est une application de \mathbb{R}^q dans $J^k(\mathbb{R}^q; \mathbb{R})$).

La preuve du résultat suivant peut être trouvée dans [2].

PROPOSITION. Pour la topologie (dite de Whitney) engendrée par la base formée des ensembles $M^k(U)$ pris pour tout k l'espace $C^\infty(\mathbb{R}^q; \mathbb{R})$ est de Baire.

DEFINITION 3. Une propriété \mathcal{P} est générique dans $C^\infty(\mathbb{R}^q; \mathbb{R})$ si l'ensemble des fonctions g de $C^\infty(\mathbb{R}^q; \mathbb{R})$ satisfaisant \mathcal{P} est ouvert et dense pour la topologie de Whitney.

B) Le théorème de Malgrange et le théorème de déploiement.

THEOREME 1 (Théorème de division de Mather).

Soit $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que :

$$F(t, 0) = g(t)t^k$$

où $g(0) \neq 0$ et g est une fonction de classe C^∞ définie dans un voisinage de 0 de \mathbb{R} .

Alors pour toute fonction $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ définie dans

un voisinage de 0 de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$, il existe des fonctions q et r de classe C^∞

satisfaisant :

$$(i) \quad G(t, x) = q(t, x) F(t, x) + r(t, x) \text{ dans un voisinage de } 0 \text{ de } \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n.$$

$$(ii) \quad r(t, x) = \sum_{i=0}^{k-1} r_i(x) t^i \text{ dans un voisinage de } 0 \text{ de } \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \text{ (les fonctions}$$

$r_i : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ sont de classe C^∞).

Remarque 1. L'hypothèse sur $F(t, 0)$ est parfois remplacée par l'hypothèse

$$\text{équivalente : } \frac{\partial^j}{\partial t^j} F(0, 0) = 0 \quad 0 \leq j \leq k-1$$

$$\text{et } \frac{\partial^k}{\partial t^k} F(0, 0) \neq 0.$$

En dépit de la simplicité de l'énoncé du Théorème 1, sa démonstration est longue et techniquement difficile. Nous renvoyons à [2].

Le théorème de Malgrange est une conséquence du théorème 1 ; sa démonstration directe est également fort complexe cf. [2].

THEOREME 2 (Théorème de Préparation de Malgrange).

Soit $F : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^∞ telle que :

$$F(t, 0) = g(t) t^k$$

où $g(0) \neq 0$ et g est une fonction de classe C^∞ définie dans un voisinage

de 0 de \mathbf{R} . Alors il existe une fonction $q : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^∞

et k fonctions $\lambda_i : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ $0 \leq i \leq k-1$ de classe C^∞ toutes définies

dans un voisinage de l'origine telles que :

$$(i) \quad q(t, x) F(t, x) = t^k + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i(x) t^i$$

$$(ii) \quad q(0, 0) \neq 0.$$

Remarque 2. Le théorème de Malgrange dit que l'étude des zéros de F équi-

vaut à l'étude des zéros de la fonction $t^k + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i(x) t^i$. On a "préparé" la fonc-

tion F .

Preuve : Choisissons $G(t, x) = t^k$ et appliquons le théorème 1. La conclusion

(i) s'obtient en prenant $\lambda_i = r_i$. Quant à la conclusion (ii) elle résulte de ce

que :

$$t^k = q(t, 0) F(t, 0) + r(t, 0) = q(t, 0) t^k g(t) + \sum_{i=0}^{k-1} r_i(0) t^i.$$

On en déduit $q(0, 0) g(0) = 1 \Rightarrow q(0, 0) \neq 0$. ■

Le théorème de Malgrange permet la démonstration du :

THEOREME 3. Soit $f : (x, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow f(x, \lambda) \in \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle

que : $f(x, 0) = Cx^k + O(|x|^{k+1}) \quad C \neq 0$.

Alors la propriété suivante est générique lorsque $n \geq k-1$:

$$\text{rang}(a_{ij}) = k-1$$

où la matrice $n \times k-1$ (a_{ij}) est obtenue par :

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_i}(x, 0) = \sum_{j=0}^{k-2} \frac{a_{ij}}{j!} x^j + O(|x|^{k-1}) \quad 1 \leq i \leq n.$$

De plus, lorsque f satisfait cette propriété, il existe un changement de varia-

ble régulier (difféomorphisme) défini au voisinage de l'origine :

$$\bar{\lambda}_i = \eta_i(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\bar{x} = \xi(x, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

tel que dans ces coordonnées f s'écrive sous la forme normale :

$$\bar{f}(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \bar{x}^k + \sum_{i=0}^{k-2} \bar{\lambda}_{i+1} \bar{x}^i.$$

Remarque 3. (1) L'hypothèse $f(x, 0) = Cx^k + O(|x|^{k+1})$ équivaut à $f(x, 0) = x^k g(x)$

avec $g(0) \neq 0$ ou à $\frac{\partial^j}{\partial x^j} f(0, 0) = 0 \quad 0 \leq j \leq k-1, \quad \frac{\partial^k}{\partial x^k} f(0, 0) \neq 0$.

(2) Le théorème 3, que nous admettrons, comprend deux parties :

a) l'énoncé d'une propriété générique.

b) la mise de f sous une forme "normale".

La partie a) utilise le théorème de transversalité de Thom [2]. La partie b) le Théorème 2. On pourra consulter Schaeffer [5] p. 375 et suivantes.

DEFINITION 4. Un déploiement est un couple (f, φ) , où $f : \mathbb{R}^{n+q} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\varphi : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\varphi(0) = d\varphi(0) = 0$, tel que $f|_{\mathbb{R}^q} = \varphi$. L'entier n est la dimension du déploiement.

Si l'on choisit $q = 1$, $\varphi(x) = f(x, 0)$, dans l'énoncé du Théorème 3, on obtient donc la forme, dans des coordonnées adéquates, du déploiement f de φ , sachant que φ est singulière à l'ordre k .

Remarque 4. On a supposé dans tout ce qui précède que f est de classe C^∞ .

Cela est restrictif dans les applications. Il existe néanmoins une version pour f de classe C^k du Théorème de Malgrange (pour k assez grand). (Lassalle [6]).

§3. APPLICATION A L'ETUDE DE L'EQUATION DE BIFURCATION.

Le Théorème 3, énoncé au §2, va permettre l'étude, au voisinage de l'origine, de l'équation de bifurcation

$$(2) \quad f(x, \lambda) = 0$$

dans le cas où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^∞ .

Une telle équation correspond au cas où le nombre de paramètres est n et où la dimension du noyau et du co-noyau d'un certain opérateur Fredholm [cf. exposé 2 sur la méthode de Lyapounov Schmidt] est un.

Le Théorème 3, permet, si une certaine hypothèse générique est satisfaite, d'écrire l'équation (2) sous la forme d'un polynôme dont les coefficients sont des fonctions réelles régulières de la variable $\lambda \in \mathbb{R}^n$. Le degré k de ce polynôme

est déterminé par l'ordre de dégénérescence de $\varphi(x)=f(x,0)$ et le coefficient d'ordre $k-1$ est nul.

L'étude de ce polynôme va permettre de compter les solutions de (2) au voisinage de l'origine ; en fait le nombre de solutions de (2), localement, ne dépendra que des coefficients de la forme normale de f .

Détaillons sur des exemples (n et k sont les entiers de l'énoncé du Théorème 3).

A) $n = 1, k = 1$.

On étudie donc $f(x,\lambda) = 0$ où $x \in \mathbb{R}$; $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour $C \neq 0$,

$$f(x,0) = Cx + O(|x|^2) \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x} f(0,0) \neq 0.$$

Dans ce cas le Théorème 3 n'est que le théorème des fonctions implicites

(le choix $n = 1$ ne joue aucun rôle) : il existe une fonction $x = x(\lambda)$ telle que $f(x(\lambda),\lambda) = 0$ au voisinage de $\lambda = 0$. On obtient donc une courbe de solutions de (2) paramétrée par λ : à chaque valeur de λ correspond un x unique tel que $f(x,\lambda) = 0$.

B) $n = 1, k = 2$.

On étudie donc $f(x,\lambda) = 0$ où $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour $C \neq 0$,

$$f(x,0) = Cx^2 + O(|x|^3) \Leftrightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(0,0) \neq 0.$$

On a bien $n \geq k-1$ et l'hypothèse générique prend la forme simple :

$$(3) \text{ pour } a \neq 0, \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} f(x,0) = a + O(|x|) \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \lambda} f(0,0) \neq 0.$$

Sous l'hypothèse (3), il existe donc, d'après le théorème 3 un changement de variable régulier, défini au voisinage de l'origine :

$$\bar{\lambda} = \eta(\lambda)$$

$$\bar{x} = \xi(x, \lambda)$$

tel que f s'écrive comme :

$$\bar{f}(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \bar{x}^2 + \bar{\lambda}.$$

Nous pouvons alors compter les zéros de f , suivant les valeurs de λ , par

l'intermédiaire du coefficient $\bar{\lambda}$:

$$\alpha) \quad \bar{\lambda} < 0 \Rightarrow \text{il existe deux zéros simples}$$

$$\beta) \quad \bar{\lambda} = 0 \Rightarrow \text{il existe un zéro double}$$

$$\gamma) \quad \bar{\lambda} > 0 \Rightarrow \text{il n'y a pas de zéro.}$$

Remarque 5. La conclusion obtenue, grâce au théorème 3, est qualitative ;

la valeur d'un zéro n'est pas calculable, l'expression de $\bar{\lambda}$, \bar{x} étant hors

d'atteinte en pratique. Par contre les quantités $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(0,0)$, $\frac{\partial \xi}{\partial \lambda}(0,0)$, $\frac{\partial \eta}{\partial \lambda}(0)$ sont

calculables, ce qui permet d'obtenir une approximation au 1^{er} ordre des zéros,

grâce à la formule de Taylor.

C) $n > 1$, $k = 2$.

On étudie donc $f(x, \lambda) = 0$, où $x \in \mathbf{R}$, $\lambda \in \mathbf{R}^n$ et pour $C \neq 0$,

$$f(x, 0) = Cx^2 + O(|x|^3) \Leftrightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(0,0) \neq 0.$$

On a bien $n \geq k-1$ et l'hypothèse générique, si l'on a :

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_i}(x, 0) = a_i + O(|x|) \quad 1 \leq i \leq n,$$

prend la forme :

$$(4) \quad \text{rang}(a_i)_{1 \leq i \leq n} = k-1 = 1, \text{ c'est-à-dire :}$$

il existe un indice i_0 , $1 \leq i_0 \leq n$, et un nombre $a_{i_0} \neq 0$ tels que :

$$(4 \text{ bis}) \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda_{i_0}}(x, 0) = a_{i_0} + O(|x|) \text{ i.e. } \frac{\partial f}{\partial \lambda_{i_0}}(0,0) \neq 0.$$

Sous l'hypothèse (4 bis), d'après le théorème 3, il existe un changement de variables régulier, défini au voisinage de l'origine :

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}_i &= \eta_i(\lambda_1, \dots, \lambda_n) & 1 \leq i \leq n \\ \bar{x} &= \xi(x, \lambda_1, \dots, \lambda_n)\end{aligned}$$

tel que f s'écrive comme :

$$\bar{f}(\bar{x}, \bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n) = \bar{x}^2 + \bar{\lambda}_1.$$

Le nombre de zéros de f , ne dépend donc que de $\bar{\lambda}_1$ et on a encore :

- α) $\bar{\lambda}_1 < 0 \Rightarrow$ il existe deux zéros simples
- β) $\bar{\lambda}_1 = 0 \Rightarrow$ il existe un zéro double
- γ) $\bar{\lambda}_1 > 0 \Rightarrow$ il n'y a pas de zéros.

D) $n \geq 2, k = 3$.

Les résultats précédents sont en fait classiques. (A) découle du Théorème des fonctions implicites, B) aurait pu s'obtenir grâce au Lemme de Morse cf. exposé 5). On examine donc l'ordre de dégénérescence suivant, ce qui nécessite pour obtenir une situation générique, de considérer un nombre de paramètres $n \geq k-1 = 2$.

On étudie donc $f(x, \lambda) = 0$ où, $x \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}^n, n \geq 2$ et pour $C \neq 0$,

$$f(x, 0) = Cx^3 + O(|x|^4) \text{ i.e. } \frac{\partial^3}{\partial x^3} f(0, 0) \neq 0.$$

On a évidemment $n \geq k-1$.

L'hypothèse générique, si l'on a :

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_i}(x, 0) = a_{i0} + a_{i1}x + O(|x|^2) \quad 1 \leq i \leq n,$$

prend la forme :

$$(5) \quad \text{rang} (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq 1}} = 2.$$

Dans le cas où $n = 2$, cette condition dit simplement que le déterminant de la matrice 2×2 $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 0 \leq j \leq 1}}$ est non nul.

Supposons (5) satisfait ; d'après le théorème 3, il existe un changement de variable régulier, défini au voisinage de l'origine :

$$\bar{\lambda}_i = \eta_i(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\bar{x} = \xi(x, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

tel que f s'écrive comme :

$$(6) \quad \bar{f}(\bar{x}, \bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n) = \bar{x}^3 + \bar{\lambda}_2 \bar{x} + \bar{\lambda}_1.$$

Nous pouvons alors compter les zéros de f , suivant les valeurs de λ , par l'intermédiaire des coefficients $\bar{\lambda}_1$ et $\bar{\lambda}_2$. Introduisons pour cela :

$$\gamma_1(\lambda) = -\bar{\lambda}_2$$

$$\gamma_2(\lambda) = 27\bar{\lambda}_1^2 + 4\bar{\lambda}_2^3$$

qui ne sont autres que les fonctions discriminantes pour le polynôme en \bar{x} (6).

Nous en déduisons :

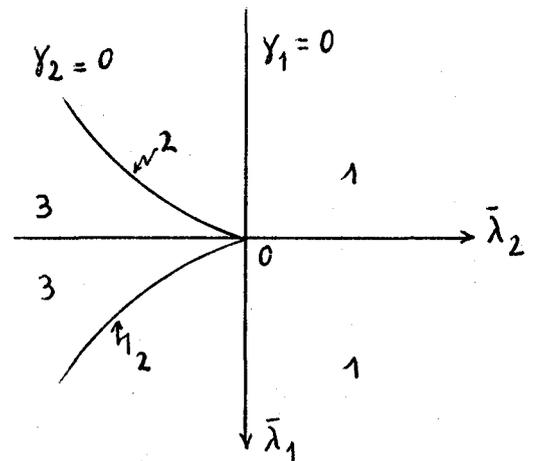
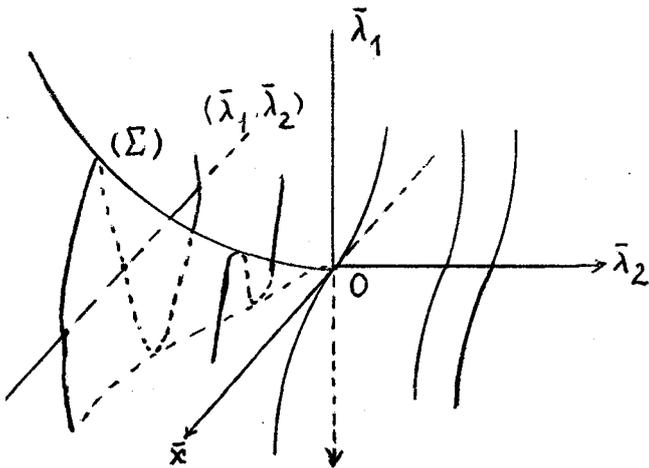
- α) $\gamma_1(\lambda) \leq 0 \Rightarrow$ il existe un zéro simple
- β) $\gamma_1(\lambda) \geq 0, \gamma_2(\lambda) > 0, \Rightarrow$ il existe un zéro simple
- γ) $\gamma_1(\lambda) > 0, \gamma_2(\lambda) = 0, \Rightarrow$ il existe un zéro simple et un zéro double
- δ) $\gamma_1(\lambda) \geq 0, \gamma_2(\lambda) < 0 \Rightarrow$ il existe trois zéros simples
- ε) $\gamma_1(\lambda) = 0, \gamma_2(\lambda) = 0 \Rightarrow$ il existe un zéro triple.

Ces résultats sont plus intuitifs si l'on représente la surface Σ d'équation

$$\bar{x}^3 + \bar{\lambda}_2 \bar{x} + \bar{\lambda}_1 = 0 \text{ et, dans le plan } \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \text{ les courbes } \gamma_1 = 0 \text{ et } \gamma_2 = 0.$$

A chaque "point" $(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2)$ correspond une droite parallèle à $0\bar{x}$ dont chaque point

d'intersection avec Σ est un zéro.



La courbe $\gamma_2 = 0$ est la projection sur le plan $(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2)$ du contour apparent de Σ .

Remarque 6. On retrouve ainsi le point cusp de Whitney cf. [2] pour la définition et les détails.

E) $n = 2, k > 3$.

Terminons ce paragraphe par l'étude d'un cas non générique, puisqu'ici $n \geq k-1$ n'est pas satisfait.

On étudie donc l'équation $f(x, \lambda_1, \lambda_2) = 0$ où $x \in \mathbb{R}, \lambda_i \in \mathbb{R} \quad i = 1, 2$, et :

$$(7) \quad f(x, 0) = Cx^k + O(|x|^{k+1}) \quad \text{avec } C \neq 0, k > 3.$$

Le théorème 3 ne s'applique pas. Il est cependant possible d'obtenir un résultat partiel grâce au théorème des fonctions implicites.

Considérons le système :

$$(8) \quad \begin{cases} f(x, \lambda_1, \lambda_2) = 0 \\ f_x(x, \lambda_1, \lambda_2) = 0 \end{cases}$$

que l'on étudie au voisinage de l'origine.

Cherchons à exprimer λ_1 et λ_2 comme fonctions de x ; formons

$$(9) \quad \begin{pmatrix} f_{\lambda_2}(0,0,0) & f_{x\lambda_2}(0,0,0) \\ f_{\lambda_1}(0,0,0) & f_{x\lambda_1}(0,0,0) \end{pmatrix}$$

le jacobien du système (8) par rapport à λ_1, λ_2 .

Supposons que les hypothèses suivantes sur la dépendance de f en λ_1 et λ_2 sont satisfaites :

$$(10) \quad \begin{aligned} f_{\lambda_2}(0,0,0) &\neq 0 & f_{\lambda_1}(0,0,0) &\equiv 0 \\ f_{x\lambda_1}(0,0,0) &\neq 0. \end{aligned}$$

Alors (on a fait tout ce qu'il fallait pour) le déterminant de (9) est non nul, le théorème des fonctions implicites s'applique et le système (8) admet une solution unique $\lambda_1 = \lambda_1(x)$, $\lambda_2 = \lambda_2(x)$ au voisinage de l'origine. Grâce à (10), on peut montrer que :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= C_1 x^{k-1} + O(|x|^k) \\ \lambda_2 &= C_2 x^k + O(|x|^{k+1}). \end{aligned}$$

La solution de (8) représente dans le plan (λ_1, λ_2) une courbe paramétrée par x et passant par l'origine, qui par construction est le lieu des zéros doubles de f . (Ces zéros ne peuvent être triples, à part l'origine car grâce à (7) $f_{xx}(x, \lambda_1(x), \lambda_2(x)) \sim Cx^{k-2} \neq 0$ si $x \neq 0$). Enfin lorsque (λ_1, λ_2) traverse cette courbe le nombre de zéros de f change.

§4. EXEMPLES.

Nous avons jusqu'ici raisonné uniquement sur l'équation de bifurcation (un problème en dimension finie) que l'on a résolue en faisant certaines hypothèses

de non dégénérescence. Il importe, dans les cas pratiques, de savoir comment se traduisent ces hypothèses sur le problème de bifurcation initial (un problème en dimension infinie). C'est ce que nous allons étudier sur deux exemples qui correspondront respectivement aux cas $n = 2, k = 2$ et $n = 2, k = 3$ (cf. §3).

Soient X, Y deux espaces de Banach et Ω un ouvert de X . On considère les deux opérateurs (pas nécessairement linéaires) B et C définis dans Ω et à valeurs dans Y ; on suppose que B et C appartiennent à $C^\infty(\Omega, Y)$. (Cette hypothèse peut être restrictive en pratique; cf. néanmoins la remarque 4 du §2).

On considère le problème de bifurcation :

$$(11) \quad F(x, \lambda, \mu) = x - \lambda B(x) - \mu C(x) = 0,$$

au voisinage de $(0, \lambda_0, 0)$, supposant que $B(o) = 0$ ($(0, \lambda, 0)$ est donc solution triviale).

Les hypothèses sur l'opérateur B sont les suivantes :

$$(H 1) \quad B(o) = 0$$

$$(H 2) \quad \text{il existe } \lambda_0 \neq 0 \text{ tel que } \lambda_0^{-1} \text{ soit valeur propre de } B_x(o)$$

$$\text{et } X_1 = \text{Ker}(I - \lambda_0 B_x(o)) = [w]$$

$$Y_1 = \text{Im}(I - \lambda_0 B_x(o)) = [w^*]^\perp \quad \text{où } w^* \in Y^* \text{ dual de } Y.$$

X_1 étant de dimension un, admet un supplémentaire topologique X_2 dans X et $X = X_1 \oplus X_2$. De même, Y_1 étant de codimension un, admet un supplémentaire topologique Y_2 dans Y et $Y = Y_1 \oplus Y_2$.

Appliquons la procédure de Lyapounov-Schmidt (cf. exposé n° 2) à l'équation (11); il vient en désignant par Q la projection sur Y_1 et par K l'inverse (borné) de $I - \lambda_0 B_x(o)$ comme opérateur de X_2 sur Y_1 :

$$(I - \lambda_0 B_X(o))x = [-F(x, \lambda, \mu) + (I - \lambda_0 B_X(o))x]$$

soit :

$$\begin{cases} (I - \lambda_0 B_X(o))x_2 = Q[-F(x, \lambda, \mu) + (I - \lambda_0 B_X(o))x] \\ (I - Q)F(x, \lambda, \mu) = 0 \end{cases}$$

(on décompose $x \in X$ en $x = x_1 + x_2$, où $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$)

ou :

$$(12 a) \quad x_2 = KQ[-F(x_1 + x_2, \lambda, \mu) + (I - \lambda_0 B_X(o))(x_1 + x_2)]$$

$$(12 b) \quad \langle w^*, F(x_1 + x_2, \lambda, \mu) \rangle = 0.$$

Par hypothèse, tout élément x_1 de X_1 s'écrit sous la forme :

$$x_1 = \alpha w \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Appliquant le théorème des fonctions implicites au voisinage de $(0, \lambda_0, 0)$ à

(12 a) on en déduit l'existence d'une unique fonction

$$x_2 : (\alpha, \lambda, \mu) \longrightarrow x_2(\alpha, \lambda, \mu)$$

telle que $x_2(0, \lambda_0, 0) = 0$, et solution de (12 a).

L'équation de bifurcation s'écrit donc :

$$(13) \quad f(\alpha, \lambda, \mu) = \langle w^*, F(x_1 + x_2(\alpha, \lambda, \mu), \lambda, \mu) \rangle = 0.$$

Nous sommes ramenés à une équation du type de celles du §3 avec α jouant

le rôle de $x \in \mathbb{R}$, que l'on va étudier au voisinage de $(\alpha, \lambda, \mu) = (0, \lambda_0, 0)$.

Pour cela il faut d'abord calculer (on ne considère que les cas génériques) :

$$\frac{\partial^k}{\partial \alpha^k} f(\alpha, \lambda, \mu) \Big|_{(0, \lambda_0, 0)} \quad k \leq 3.$$

De l'équation (12 a) on déduit par différentiation :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} x_2(\alpha, \lambda, \mu) \Big|_{(0, \lambda_0, 0)} = KQ[-(I - \lambda_0 B_X(o))(w + \frac{\partial}{\partial \alpha} x_2) + (I - \lambda_0 B_X(o))(w + \frac{\partial}{\partial \alpha} x_2)] = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} x_2(\alpha, \lambda, \mu) \Big|_{(0, \lambda_0, 0)} = \lambda_0 KQ B_{XX}(o)(w, w)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} x_2(\alpha, \lambda, \mu) \Big|_{(0, \lambda_0, 0)} = \lambda_0 KQ [B_X^{(3)}(o)w^3 + 3B_{XX}(o)(w, \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} x_2(0, \lambda_0, 0))].$$

On déduit alors de l'équation (12b) toujours par différentiation :

$$(14) \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} f(\alpha, \lambda, \mu) \Big|_{(0, \lambda_0, 0)} = \langle w^*, (I - \lambda_0 B_X(o))w \rangle = 0$$

(par définition de w^*).

$$(15) \quad \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} f(\alpha, \lambda, \mu) \Big|_{(0, \lambda_0, 0)} = -\lambda_0 \langle w^*, B_{XX}(o)(w, w) \rangle + \lambda_0 \langle w^*, (I - \lambda_0 B_X(o)) KQ B_{XX}(o)(w, w) \rangle$$

$$= -\lambda_0 \langle w^*, B_{XX}(o)(w, w) \rangle$$

(par définition de K et w^*).

$$(16) \quad \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} f(\alpha, \lambda, \mu) \Big|_{(0, \lambda_0, 0)} = \langle w^*, -\lambda_0 B_X^{(3)}(o)w^3 - 3\lambda_0^2 B_{XX}(o)(w, \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} x_2) \rangle +$$

$$\langle w^*, \lambda_0 (I - \lambda_0 B_X(o)) KQ [B_X^{(3)}(o)w^3 + 3B_{XX}(o)(w, \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} x_2)] \rangle$$

$$= -\lambda_0 \langle w^*, B_X^{(3)}(o)w^3 + 3B_{XX}(o)(w, \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} x_2(0, \lambda_0, 0)) \rangle$$

et rappelons que $f(0, \lambda_0, 0) = 0$.

Nous allons distinguer deux cas suivant l'ordre de non-dégénérescence k de $f(\alpha, \lambda, \mu)$ c'est-à-dire suivant la valeur du plus petit entier $k \leq 3$ tel que :

$$\frac{\partial^k}{\partial \alpha^k} f(\alpha, \lambda, \mu) \Big|_{(0, \lambda_0, 0)} \neq 0$$

(on ne considère pas le cas $k = 1$ qui relève du théorème des fonctions implicites, ni le cas $k > 3$ non générique pour 2 paramètres, cf. §3).

A) Cas où $k = 2$.

On a vu que d'après (14) $\frac{\partial}{\partial \alpha} f(\alpha, \lambda, \mu) \Big|_{(0, \lambda_0, 0)} = 0$. On suppose donc que :

$$(A 1) \quad \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} f(\alpha, \lambda, \mu) \Big|_{(0, \lambda_0, 0)} \neq 0 \quad \text{i.e.} \quad \langle w^*, B_{XX}(o)(w, w) \rangle \neq 0$$

d'après (15). Il résulte alors du théorème 3 §2 (applicable grâce à une hypothèse

précisée ci-dessous) que, à un changement de variable régulier près, $f(\alpha, \lambda, \mu)$ peut s'écrire au voisinage de $(0, \lambda_0, 0)$ comme un polynôme du second degré en α . Il suffit donc pour étudier l'équation (13) au voisinage de $(0, \lambda_0, 0)$ de considérer le développement de Taylor de $f(\alpha, \lambda, \mu)$ tronqué à l'ordre 2 ;

l'étude de (13) équivaut à l'étude de :

$$(17) \quad \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} f(0, \lambda_0, 0) \alpha^2 + (\lambda - \lambda_0) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \lambda} f(0, \lambda_0, 0) \alpha + \mu \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \mu} f(0, \lambda_0, 0) \alpha + (\lambda - \lambda_0) \frac{\partial f}{\partial \lambda}(0, \lambda_0, 0) \\ + \mu \frac{\partial f}{\partial \mu}(0, \lambda_0, 0) + (\lambda - \lambda_0) \frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial \mu} f(0, \lambda_0, 0) \mu = 0.$$

(Rappelons que $f(0, \lambda_0, 0) = 0$, $\frac{\partial}{\partial \alpha} f(0, \lambda_0, 0) = 0$).

On a vu que :

$$(15) \quad \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} f(0, \lambda_0, 0) = \langle w^*, B_{XX}(o)(w, w) \rangle.$$

De la même façon, on calcule successivement :

$$(18) \quad \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \lambda} f(0, \lambda_0, 0) = - \langle w^*, B_X(o)w \rangle$$

$$(19) \quad \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \mu} f(0, \lambda_0, 0) = - \langle w^*, C_X(o)w \rangle$$

$$(20) \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} f(0, \lambda_0, 0) = - \langle w^*, B(o) \rangle$$

$$(21) \quad \frac{\partial}{\partial \mu} f(0, \lambda_0, 0) = - \langle w^*, C(o) \rangle$$

$$(22) \quad \frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial \mu} f(0, \lambda_0, 0) = - \langle w^*, C_X(o)w \rangle.$$

Nous faisons alors les hypothèses supplémentaires suivantes :

$$(A 2) \quad \langle w^*, C(o) \rangle \neq 0 \quad \text{i.e.} \quad C(o) \notin \text{Im}(I - \lambda_0 B_X(o))$$

$$(A 3) \quad \langle w^*, C_X(o)w \rangle = 0 \quad \text{i.e.} \quad C_X(o) \text{Ker}(I - \lambda_0 B_X(o)) \subset \text{Im}(I - \lambda_0 B_X(o))$$

$$(A 4) \quad \langle w^*, B_X(o)w \rangle \neq 0.$$

Cette hypothèse signifie (cf. exposé n° 6) que λ_0^{-1} , valeur propre de multiplicité algébrique 1 d'après (ii), est aussi valeur propre de multiplicité géométrique 1.

Compte tenu de (A 2), (A 3), (A 4) et (H 1), il résulte de (15), (18), (22) que

(17) peut s'écrire :

$$(18) \quad a\alpha^2 + (\lambda - \lambda_0)b\alpha + \mu c = 0$$

où :

$$a = \langle w^*, B_{XX}(o)(w, w) \rangle, \quad b = - \langle w^*, B_X(o)w \rangle,$$

$$c = - \langle w^*, C(o) \rangle.$$

L'étude de (18) est maintenant triviale. Supposons, pour fixer les idées $a > 0$,

alors :

. si $\mu c > \frac{(\lambda - \lambda_0)^2 b^2}{4a^2}$ (18) n'a pas de solutions

. si $\mu c = \frac{(\lambda - \lambda_0)^2 b^2}{4a^2}$ (18) a une solution double

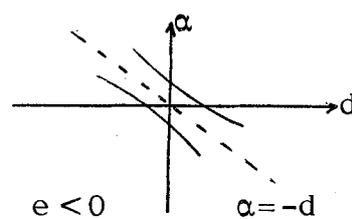
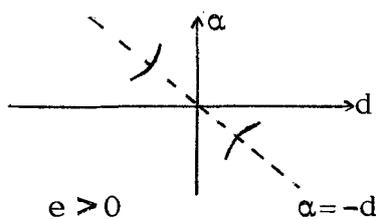
$$\alpha_1 = \alpha_2 = - \frac{(\lambda - \lambda_0)b}{2a}$$

. si $\mu c < \frac{(\lambda - \lambda_0)^2 b^2}{4a^2}$ (18) a deux solutions distinctes

$$\alpha_1 = -d + \sqrt{d^2 - e}, \quad \alpha_2 = -d - \sqrt{d^2 - e}$$

où $d = \frac{(\lambda - \lambda_0)b}{2a}$, $e = \frac{\mu c}{a}$.

Graphiquement, on peut représenter α comme fonction de d (au voisinage de $d = 0$, i.e. $\lambda = \lambda_0$) avec e comme paramètre au voisinage de 0 (i.e. μ au voisinage de 0)



Pour $e > 0$, il y a bifurcation à partir de la courbe des solutions doubles

$\alpha = -d$. Pour $e < 0$, il n'y a pas bifurcation.

Remarque 7. L'hypothèse (A 2) correspond à la propriété générique du théorème 3, §2 et à l'hypothèse (4 bis) du §3.C. Elle permet d'appliquer le théorème 3.

B) Cas où $k = 3$.

On suppose maintenant que :

$$(B\ 1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} f(0, \lambda_0, 0) = 0 \quad \text{i.e.} \quad \langle w^*, B_{xx}(0)(w, w) \rangle = 0 \\ \text{mais} \\ \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} f(0, \lambda_0, 0) \neq 0 \quad \text{i.e.} \quad \langle w^*, B_x^{(3)}(0)w^3 + 3B_{xx}(0)(w, \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} x_2(0, \lambda_0, 0)) \rangle \neq 0. \end{array} \right.$$

D'après le théorème 3, §2 (applicable sous des hypothèses précisées ci-dessous)

$f(\alpha, \lambda, \mu)$ peut s'écrire au voisinage de $(0, \lambda_0, 0)$, à un changement de variable régulier près, comme un polynôme du 3^e degré en α dont le coefficient en α^2 est nul. Il suffit donc pour étudier l'équation :

$$(23) \quad f(\alpha, \lambda, \mu) = 0$$

au voisinage de $(0, \lambda_0, 0)$ de considérer le développement de Taylor de $f(\alpha, \lambda, \mu)$

associé à ce polynôme ; l'étude de (23) équivaut à l'étude de :

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} f(0, \lambda_0, 0) \alpha^3 + \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \lambda} f(0, \lambda_0, 0) (\lambda - \lambda_0) + \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \mu} f(0, \lambda_0, 0) \mu \right. \\ \left. + \frac{\partial^3}{\partial \alpha \partial \lambda \partial \mu} f(0, \lambda_0, 0) (\lambda - \lambda_0) \mu + \frac{\partial^3}{\partial \alpha \partial \lambda^2} f(0, \lambda_0, 0) (\lambda - \lambda_0)^2 + \frac{\partial^3}{\partial \alpha \partial \mu^2} f(0, \lambda_0, 0) \mu^2 \right) \alpha \\ \left. + \frac{\partial f}{\partial \lambda} (0, \lambda_0, 0) (\lambda - \lambda_0) + \frac{\partial f}{\partial \mu} (0, \lambda_0, 0) \mu + \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda \partial \mu} (0, \lambda_0, 0) (\lambda - \lambda_0) \mu = 0. \right.$$

Le terme constant et le terme du 1^{er} degré de ce polynôme en α sont compliqués.

D'après le théorème 3, ces termes correspondent à des changements de variables réguliers (difféomorphisme) ; leur comportement ne dépend donc que de la première dérivée partielle non nulle. Le polynôme en α , obtenu à partir de (24) en conservant seulement la première dérivée partielle non nulle dans chaque coefficient, aura les mêmes propriétés qualitatives que le polynôme initial.

Nous faisons alors les hypothèses supplémentaires suivantes (en plus de

H1 et H2) :

$$(B 2) \quad \langle w^*, C(o) \rangle \neq 0$$

$$(B 3) \quad \langle w^*, C_X(o)w \rangle = 0$$

$$(B 4) \quad \langle w^*, B_X(o)w \rangle \neq 0.$$

Il résulte alors de (18), (21) que dans (24) :

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(0, \lambda_0, 0) \neq 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \lambda} f(0, \lambda_0, 0) \neq 0.$$

L'étude de (24) sera donc qualitativement équivalente à l'étude de :

$$(25) \quad \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} f(0, \lambda_0, 0) \alpha^3 + (\lambda - \lambda_0) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \lambda} f(0, \lambda_0, 0) \alpha + \frac{\partial f}{\partial \mu}(0, \lambda_0, 0) \mu = 0.$$

Il suffit pour cela de vérifier l'hypothèse du théorème 3.

$$\text{Posons } \tilde{f}(\alpha, \tau, \mu) = f(\alpha, \lambda_0 + \tau, \mu).$$

L'étude de f au voisinage de $(0, \lambda_0, 0)$ équivaut à l'étude de \tilde{f} au voisinage de $(0, 0, 0)$. On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \lambda}(\alpha, 0, 0) &= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \lambda}(0, 0, 0) + \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \lambda} \tilde{f}(0, 0, 0) \alpha + O(|\alpha|^2) \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \mu}(\alpha, 0, 0) &= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \mu}(0, 0, 0) + \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \mu} \tilde{f}(0, 0, 0) \alpha + O(|\alpha|^2) \end{aligned}$$

au voisinage de $\alpha = 0$.

De (20), (21), (18), (19) on déduit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \lambda}(0, 0, 0) &= \frac{\partial f}{\partial \lambda}(0, \lambda_0, 0) = - \langle w^*, B(o) \rangle \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \mu}(0, 0, 0) &= \frac{\partial f}{\partial \mu}(0, \lambda_0, 0) = - \langle w^*, C(o) \rangle \\ \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \lambda} \tilde{f}(0, 0, 0) &= \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \lambda} f(0, \lambda_0, 0) = - \langle w^*, B_X(o)w \rangle \\ \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \mu} \tilde{f}(0, 0, 0) &= \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \mu} f(0, \lambda_0, 0) = - \langle w^*, C_X(o)w \rangle. \end{aligned}$$

L'hypothèse du théorème 3 sera satisfaite si

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \lambda} & \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \lambda} \tilde{f} \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \mu} & \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \mu} \tilde{f} \end{pmatrix} \neq 0.$$

D'après (H 1), $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \lambda}(0,0,0) = 0$; il suffit donc que :

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \mu}(0,0,0) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \lambda} \tilde{f}(0,0,0) = \langle w^*, C(0) \rangle \langle w^*, B_X(0)w \rangle \neq 0$$

ce qui est satisfait grâce à (B2) et (B4).

En résumé, l'étude de (23) au voisinage de $(0, \lambda_0, 0)$ équivaut à l'étude au voisinage de $(0, 0, 0)$ de :

$$(26) \quad a\alpha^3 + \tau b\alpha + \mu c = 0$$

$$\text{où} \quad a = \langle w^*, B_X^{(3)}(0)w^3 + 3B_{XX}(0) \left(w, \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} x_2(0, \lambda_0, 0) \right) \rangle$$

$$b = - \langle w^*, B_X(0)w \rangle$$

$$c = - \langle w^*, C(0) \rangle$$

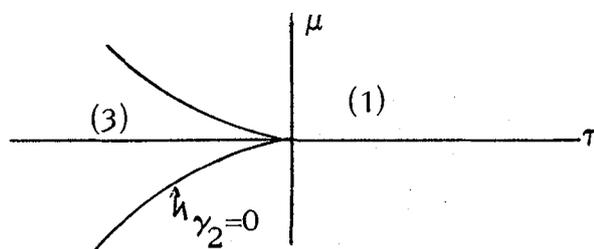
(on a posé $\lambda - \lambda_0 = \tau$).

L'étude de (26) est triviale. Il suffit d'appliquer le §3.D avec

$$\gamma_1 = -\tau b$$

$$\gamma_2 = 27 \mu^2 c^2 + 4 \tau^3 b^3.$$

Le nombre de solutions est alors donné par le graphique suivant :



La courbe $\gamma_2 = 0$ correspond au cas où (26) admet une racine double

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \text{sign}(\mu c) \sqrt{\frac{-\tau b}{3}} \quad \text{et une racine simple} \quad \alpha_3 = -2 \text{sign}(\mu c) \sqrt{\frac{-\tau b}{3}}.$$

On peut de même étudier graphiquement les racines α comme fonction de τ lorsque μ est donné (cf. §3.D).

Le problème de bifurcation étudié ci-dessus correspond aux équations de Von Karman (cf. [4] et [1]).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S.N. CHOW, J.K. HALE, J. MALLET-PARRET.
Applications of Generic bifurcation I. Arch. Rational Mech. Anal.
59 (1975) p. 159-188.
- [2] V. GUILLEMIN, M. GOLUBITSKY.
Stable Mappings and their singularities. Springer 1973.
- [3] G. WASSERMANN.
Stability of unfoldings. Springer Lecture Notes 393 (1974).
- [4] M. BERGER.
On Von Karman's equations and the buckling of a thin elastic plate
I,II. Comm. Pure Appl. Math. 20 (1967) p. 687-719, 21 (1968)
p. 227-241.
- [5] D.G. SCHAEFFER.
A regularity Theorem for conservation laws. Advances in Math.
11 (1973) p. 368-386.
- [6] M.G. LASSALLE.
Une démonstration du théorème de division pour les fonctions diffé-
rentiables. Topology 12 (1973) p. 41-62.

Exposé n° 9

BIFURCATION POUR DES OPERATEURS DE FREDHOLM D'INDICE 0

par

Bruno SCHEURER

-:-

Soit Y un espace de Banach sur le corps Λ des réels ou des complexes ($\Lambda = \mathbb{R}$ ou $\Lambda = \mathbb{C}$), dont on notera $\|\cdot\|_Y$ la norme.

Soit X un sous-espace vectoriel de Y , complet pour la norme $\|\cdot\|_X$; on suppose que X s'injecte continument dans Y et que la norme de l'injection est 1 :

$$\|\cdot\|_X \geq \|\cdot\|_Y.$$

On se propose d'étudier l'équation :

$$Ax - \lambda x - g(x, \lambda) = 0 \quad (1)$$

au voisinage de l'origine, lorsque A est un opérateur de Fredholm d'indice 0, en particulier de préciser les conditions d'une bifurcation.

Cet exposé s'inspire largement de Ize [3].

§ 1. HYPOTHESES

Dans tout cet exposé, A désignera un opérateur linéaire continu de X dans Y et $g(x, \lambda)$ une application C^0 , définie dans un voisinage de l'origine de $X \times \Lambda$ à valeurs dans Y . On suppose que :

(i) A est un opérateur Fredholm d'indice 0 :

$$\dim \ker A = \dim Y/R(A) = d$$

(ii) 0 est une valeur propre de A de multiplicité finie :

il existe un entier α tel que :

$$\ker(A^\alpha) = \ker(A^{\alpha+\ell}) \quad \forall \ell \in \mathbb{N}$$

et $\dim \ker(A^\alpha) = m$

[on définit $D(A^\alpha) = \text{domaine de } A^\alpha = \{x \in Y \mid x \in D(A) = X, Ax \in X, \dots, A^{\alpha-1}x \in X\}$]

(iii) $g : X \times \Lambda \rightarrow Y$ est une application continue et :

$$g(0, 0) = 0.$$

(iv) $\exists r_0, \lambda_0, C$ constantes positives telles que :

$$\forall x, x' \in B_r = \{x \in X \mid \|x\|_X \leq r\}, \quad r \leq r_0$$

$$\forall \lambda, \lambda' \text{ avec } |\lambda| \leq \lambda_0, |\lambda'| \leq \lambda_0$$

$$a) \|g(x, \lambda) - g(x', \lambda')\|_Y \leq C \{M(r) \cdot \|x - x'\|_X + |\lambda - \lambda'|\}$$

$$b) \|g(x, \lambda)\|_Y \leq C \{\|x\|_X^2 + |\lambda|^p\}$$

où $M : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction continue croissante avec $M(0) = 0$ et p est un exposant entier dont la valeur sera précisée après.

Remarque : On aurait pu définir A comme un opérateur fermé sur son domaine $D(A) \subset X$. En fait $D(A)$, muni de la norme du graphe, est un espace de Banach; A est alors continu pour cette norme et $D(A)$ s'injecte continument dans X .

§ 2. REDUCTION A UN PROBLEME EN DIMENSION FINIE.

A) Un lemme de décomposition.

LEMME 1. Décomposons $X = \ker A^\alpha \oplus X_2 = X_1 \oplus X_2$ ($\dim \ker A^\alpha < +\infty$)

alors $Y = \ker A^\alpha \oplus AX_2$; (2)

en particulier l'opérateur A se décompose en :

$$A : X_1 \rightarrow X_1 \quad \text{et} \quad A : X_2 \rightarrow AX_2,$$

cette application admettant un inverse borné K.

Preuve. Décomposons $\ker A^\alpha = \ker A \oplus X_3$; d'après (i) et (ii)

$$\dim \ker A = d \quad \text{et} \quad \dim X_3 = m-d.$$

$R(A)$ est donc engendré par AX_2 et AX_3 . En fait :

$$(3) \quad R(A) = AX_2 \oplus AX_3.$$

Il suffit pour cela de vérifier que $AX_2 \cap AX_3 = \{0\}$: soit $x_2 \in X_2, x_3 \in X_3$ avec $Ax_2 = Ax_3 \Leftrightarrow x_2 - x_3 \in \ker A$ et comme $X = (\ker A \oplus X_3) \oplus X_2$, $x_2 = x_3 = 0$.

L'application $X_3 \rightarrow AX_3$ est injective (par définition de X_3), donc :

$$\dim AX_3 = \dim X_3 = m-d.$$

Mais $\dim Y/R(A) = d$ d'après (i), donc grâce à (3) :

$$\dim Y/AX_2 = m.$$

Puisque $\dim \ker A^\alpha = m$, il suffit donc pour montrer (2) de vérifier que

$\ker A^\alpha \cap AX_2 = \{0\}$. Soit $y \in \ker A^\alpha \cap AX_2$; alors il existe $x_2 \in X_2$ tel que

$y = Ax_2$. Par définition de $\ker A^\alpha$, $A^{\alpha+1}x_2 = 0$, donc grâce à (ii) $A^\alpha x_2 = 0$:

c'est dire que $x_2 \in \ker A^\alpha \cap X_2 \Leftrightarrow x_2 = 0$ par hypothèse.

La deuxième partie de l'énoncé résulte du théorème du graphe fermé

($A : X_2 \rightarrow AX_2$ est injective). ■

B) Première réduction.

Procédons comme dans la méthode de Lyapounov Schmidt. Grâce au lemme 1

tout élément x de X s'écrit de façon unique :

$$x = x_1 + x_2 \quad x_1 \in \ker A^\alpha, \quad x_2 \in X_2.$$

Soit Q la projection dans Y sur AX_2 associée à la décomposition (2). Puisque

$Ax_1 - \lambda x_1 \in \ker A^\alpha$, l'équation (1) équivaut à :

$$(4) \quad Ax_2 - \lambda Qx_2 = Qg(x_1 + x_2, \lambda)$$

$$(5) \quad Ax_1 - \lambda x_1 = (I-Q)[g(x_1 + x_2, \lambda) + \lambda x_2].$$

Appliquons K à (4), on en déduit pour λ tel que :

$$|\lambda| < \frac{1}{\|KQ\|} \quad (\text{afin que } (I - \lambda KQ)^{-1} \text{ existe})$$

$$(6) \quad x_2 = (I - \lambda KQ)^{-1} KQ g(x_1 + x_2, \lambda) \equiv F(x_1, x_2, \lambda).$$

Résoudre (6), c'est trouver un point fixe de l'application $F(x_1, \dots, \lambda)$ soit

$x_2(x_1, \lambda)$. Résoudre l'équation (1) équivaudra alors à la résolution de :

$$(7) \quad Ax_1 - \lambda x_1 = (I-Q)[g(x_1 + x_2(x_1, \lambda), \lambda) + \lambda x_2(x_1, \lambda)];$$

nous allons montrer qu'il existe des constantes $\bar{\lambda}, R_1, R_2$ positives convenables

de sorte que pour chaque λ, x_1 fixés avec $|\lambda| \leq \bar{\lambda}, \|x_1\| \leq R_1$ l'application :

$$F(x_1, \dots, \lambda) : B_{R_2} \rightarrow B_{R_2}$$

soit une contraction stricte.

1) Prenons λ tel que $|\lambda| \leq \text{Min}\left(\frac{1}{2\|KQ\|}, \lambda_0\right) = \tilde{\lambda}$ et x_1, x_2, x_2' tels que

$\|x_1 + x_2\| \leq r \leq r_0, \|x_1 + x_2'\| \leq r \leq r_0$; alors, par définition de F :

$$\|F(x_1, x_2, \lambda) - F(x_1, x'_2, \lambda)\| \leq \|(I - \lambda KQ)^{-1}\| \|KQ\| \|g(x_1 + x_2, \lambda) - g(x_1 + x'_2, \lambda)\|$$

soit grâce à l'hypothèse (iv, a) sur g :

$$\|F(x_1, x_2, \lambda) - F(x_1, x'_2, \lambda)\|_Y \leq \frac{1}{2} \|KQ\| C M(r) \|x_2 - x'_2\|_X.$$

Choisissons $r \leq r_0$ tel que $\frac{1}{2} \|KQ\| C M(r) \leq \frac{1}{2}$ et définissons alors $R'_1 = \frac{r}{4}$, $R_2 = \frac{3r}{4}$. (On a bien $\|x_1 + x_2\| \leq r_0$, $\|x_1 + x'_2\| \leq r_0$). L'application :

$$F(x_1, \cdot, \lambda) : B_{R_2} \rightarrow Y$$

est une contraction stricte de B_{R_2} dans Y , pour chaque x_1 dans $B_{R'_1}$ et chaque λ tel que $|\lambda| \leq \tilde{\lambda}$.

2) Pour x_1, x_2, λ choisis comme ci-dessus et d'après l'hypothèse (iv, b)

on a, $F(x_1, \cdot, \lambda)$ étant une contraction stricte de rapport $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} \|F(x_1, x_2, \lambda)\|_Y &\leq \|F(x_1, 0, \lambda)\|_Y + \frac{1}{2} \|x_2\|_X \\ &\leq C \{\|x_1\|_X^2 + |\lambda|^p\} + \frac{1}{2} \|x_2\|_X. \end{aligned}$$

Choisissons $R_1 \leq R'_1$, $\bar{\lambda} \leq \tilde{\lambda}$ assez petits de sorte que :

$$x_1 \in B_{R_1}, \quad |\lambda| \leq \bar{\lambda} \Rightarrow C \{\|x_1\|_X^2 + |\lambda|^p\} \leq \frac{3r}{8}.$$

Pour x_2 dans B_{R_2} on a alors :

$$\|F(x_1, x_2, \lambda)\|_Y \leq \frac{3r}{8} + \frac{3r}{8} = \frac{3r}{4} \Leftrightarrow F(x_1, x_2, \lambda) \in B_{R_2}$$

et $F(x_1, \cdot, \lambda)$ est une contraction stricte de B_{R_2} dans B_{R_2} .

Pour chaque x_1 dans B_{R_1} et chaque λ vérifiant $|\lambda| \leq \bar{\lambda}$, l'équation

(6) admet donc une unique solution $x_2(x_1, \lambda)$ dans B_{R_2} .

Nous allons montrer que x_2 , comme fonction de x_1 et λ , vérifie l'analogie de l'hypothèse (iv) pour g

LEMME 2. Il existe R_0, μ_0, Γ constantes positives telles que :

$$\forall x_1, x_1' \in B_r, \quad r \leq R_0$$

$$\forall \lambda, \lambda' \text{ avec } |\lambda| \leq \mu_0, \quad |\lambda'| \leq \mu_0$$

$$a) \|x_2(x_1, \lambda) - x_2'(x_1', \lambda')\|_X \leq \Gamma \{M(r) \|x_1 - x_1'\|_X + |\lambda - \lambda'| \}$$

$$b) \|x_2(x_1, \lambda)\|_X \leq \Gamma \{ \|x_1\|_X^2 + |\lambda|^p \}$$

où $M : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction croissante continue avec $M(0) = 0$, p un exposant entier et x_2 (resp. x_2') l'unique solution de (6) correspondant à x_1, λ (resp. x_1', λ').

Preuve. a) Par définition de x_2 et x_2' :

$$\begin{aligned} \|x_2(x_1, \lambda) - x_2'(x_1', \lambda')\|_X &= \|F(x_1, x_2, \lambda) - F(x_1', x_2', \lambda')\|_Y \\ &\leq \|(I - \lambda KQ)^{-1} KQ\| \|g(x_1 + x_2, \lambda) - g(x_1' + x_2', \lambda')\| \\ &\quad + \|((I - \lambda KQ)^{-1} - (I - \lambda' KQ)^{-1}) KQ\| \|g(x_1' + x_2', \lambda)\|. \end{aligned}$$

Prenons x_1, x_1' dans B_{R_1} , λ, λ' avec $|\lambda| \leq \bar{\lambda}$, $|\lambda'| \leq \bar{\lambda}$, alors on a vu que x_2, x_2' sont dans B_{R_2} ; nous déduisons donc de l'hypothèse (iv) :

$$\begin{aligned} \|x_2(x_1, \lambda) - x_2'(x_1', \lambda')\| &\leq \|(I - \lambda KQ)^{-1} KQ\| C \{M(r) \|x_1 + x_2 - x_1' - x_2'\| + |\lambda - \lambda'| \} \\ &\quad + \|((I - \lambda KQ)^{-1} - (I - \lambda' KQ)^{-1}) KQ\| C \{ \|x_1' + x_2'\|^2 + |\lambda'|^p \}. \end{aligned}$$

Mais $\|(I - \lambda KQ)^{-1} - (I - \lambda' KQ)^{-1}\| \leq \gamma |\lambda - \lambda'|$ $\gamma > 0$, donc :

$$\begin{aligned} \|x_2(x_1, \lambda) - x_2'(x_1', \lambda')\| &\leq \frac{1}{2} \|KQ\| C M(r) \|x_2 - x_2'\| \\ &\quad + \frac{1}{2} \|KQ\| C M(r) \|x_1 - x_1'\| \\ &\quad + \frac{1}{2} \|KQ\| C |\lambda - \lambda'| \\ &\quad + \gamma \|KQ\| C \{ \|x_1' + x_2'\|^2 + |\lambda'|^p \} |\lambda - \lambda'|, \end{aligned}$$

grâce à l'inégalité du triangle.

D'après le choix de x_1', λ' , $\|x_1' + x_2'\|^2 + |\lambda'|^p \leq r_0^2 + \lambda_0^p$; il suffit alors

de prendre $r \leq r_0$ assez petit de sorte que $\frac{1}{2} \|KQ\| C M(r) \leq \frac{1}{2}$, pour obtenir

$$\frac{1}{2} \|x_2(x_1, \lambda) - x_2(x_1, \lambda')\| \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_1'\| + [\gamma \|KQ\| C \{r_0^2 + \lambda_0^p\} + \frac{1}{2} \|KQ\| C] |\lambda - \lambda'|$$

c'est-à-dire a).

b) L'application $F(x_1, \cdot, \lambda)$ étant une contraction stricte (on prend toujours x_1 dans B_{R_1} et λ vérifiant $|\lambda| \leq \lambda$):

$$\|x_2(x_1, \lambda)\| = \|F(x_1, x_2, \lambda)\| \leq \|F(x_1, 0, \lambda)\| + \frac{1}{2} \|x_2\|$$

d'où d'après l'hypothèse (iv, b) et la définition de F :

$$\frac{1}{2} \|x_2(x_1, \lambda)\| \leq \|(I - \lambda KQ)^{-1}\| \|KQ\| C \{\|x_1\|^2 + |\lambda|^p\}$$

soit :

$$\|x_2(x_1, \lambda)\| \leq \|KQ\| C \{\|x_1\|_X^2 + |\lambda|^p\}. \quad \blacksquare$$

C) Deuxième réduction.

La résolution de l'équation :

$$(1) \quad Ax - \lambda x - g(x, \lambda) = 0,$$

au voisinage de l'origine, est ainsi d'après ce qui précède équivalente à la résolution de l'équation :

$$(7) \quad Ax_1 - \lambda x_1 = (I - Q) [g(x_1 + x_2(x_1, \lambda), \lambda) + \lambda x_2(x_1, \lambda)] \equiv G(x_1, \lambda)$$

avec $x_1 \in X_1 = \ker A^\alpha$.

Compte tenu de l'hypothèse (iv) sur g et du lemme 2, $G(x_1, \lambda)$ satisfait également l'hypothèse (iv) avec éventuellement des constantes différentes :

il existe r'_0, λ'_0, C' constantes positives telles que :

$$\forall x_1, x_1' \in B_{r'}, \quad r \leq r'_0$$

$$\forall \lambda, \lambda' \text{ avec } |\lambda| \leq \lambda'_0, \quad |\lambda'| \leq \lambda'_0$$

$$a) \quad \|G(x_1, \lambda) - G(x_1', \lambda')\| \leq C' \{M(r) \|x_1 - x_1'\| + |\lambda - \lambda'|\}$$

$$b) \quad \|G(x_1, \lambda)\| \leq C \{\|x_1\|^2 + |\lambda|^p\}$$

où $M : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction continue croissante avec $M(0) = 0$ et p un exposant entier.

Précisons la valeur de l'exposant p intervenant ci-dessus (ainsi que dans le lemme 2 et l'hypothèse iv).

L'opérateur A , restreint à $\ker A^\alpha$ est nilpotent d'après l'hypothèse

$$(ii) : \quad A^\alpha x_1 = 0, \quad \forall x_1 \in \ker A^\alpha.$$

Nous pouvons donc choisir une base de $\ker A^\alpha$, soit $\beta = \{e_1, \dots, e_m\}$ telle

que la restriction de A à $\ker A^\alpha$ se décompose en $d = \dim \ker A$ blocs :

$$A|_{\ker A^\alpha} = \text{diag}(A_{k_1}, \dots, A_{k_d})$$

où les A_{k_j} $1 \leq j \leq d$ sont des blocs élémentaires de Jordan de taille $k_j \times k_j$

correspondant aux éléments de $\ker A$. On a alors :

$$\max_{1 \leq j \leq d} k_j = \alpha \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^d k_j = \dim \ker A^\alpha = m.$$

Nous prenons alors, pour tout ce qui suit :

$$p = 2\alpha + 1.$$

Remarque : $p = 2\alpha + 1$ est optimale. Considérons par exemple dans le cas où

$d = 1$, $m = \alpha$, le système en $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$

$$x_2 - \lambda x_1 = 0$$

$$x_3 - \lambda x_2 = 0$$

.....

$$x_m - \lambda x_{m-1} = 0$$

$$-\lambda x_m = \|x_1\|^2 + |\lambda|^{2\alpha}$$

correspondant à $p = 2\alpha$.

On vérifie qu'il se réduit à $-\lambda^m x_1 = |x_1|^2 + |\lambda|^{2\alpha}$ dont la seule solution est $x_1 = \lambda = 0$. Il n'y a pas bifurcation. ■

Dans la base β , $x_1 \in \ker A^\alpha$ a ainsi pour "coordonnées"

$$x_1 = (x_1^1, \dots, x_1^d) \quad \text{où } x_1^j \in \mathbb{R}^{k_j}, \quad 1 \leq j \leq d$$

plus précisément :

$$x_1 = \underbrace{(\xi_1^1, \xi_1^1, \dots, \xi_1^{k_1-1})}_{k_1} ; \underbrace{(\xi_2^1, \xi_2^1, \dots, \xi_2^{k_2-1})}_{k_2} ; \dots ; \dots ; \underbrace{(\xi_d^1, \xi_d^1, \dots, \xi_d^{k_d-1})}_{k_d}$$

et les $d = \dim \ker A$ vecteurs dont toutes les composantes sont nulles sauf l'une des ξ_1, \dots, ξ_d constituent une base de $\ker A$.

La restriction de A à $\ker A^\alpha$, étant ainsi mise sous la forme canonique de Jordan, l'équation (7) consiste donc en d blocs de tailles respectives k_1, \dots, k_d .

Ecrivons le j^{e} bloc :

$$(S_j) \begin{cases} \xi_j^1 - \lambda \xi_j^1 = G_j^1(x_1, \lambda) \\ \xi_j^2 - \lambda \xi_j^1 = G_j^2(x_1, \lambda) \\ \dots \dots \dots \\ \xi_j^{k_j-1} - \lambda \xi_j^{k_j-2} = G_j^{k_j-1}(x_1, \lambda) \\ -\lambda \xi_j^{k_j-1} = G_j^{k_j}(x_1, \lambda) \end{cases}$$

où $G_j^1, \dots, G_j^{k_j}$ sont les composantes de $G(x_1, \lambda)$ correspondant au j^{e} bloc

et satisfont des propriétés du même type que celles de G ; en particulier :

$$\forall x_1 \in B_r, \quad r \leq r'_0$$

$$\forall \lambda \text{ avec } |\lambda| \leq \lambda'_0$$

$$|G_j^i(x_1, \lambda)| \leq C \{ \|x_1\|^2 + |\lambda|^{2\alpha+1} \} \quad 1 \leq j \leq d, \quad 1 \leq i \leq k_j.$$

Compte tenu des propriétés des G_j^i , en utilisant la forme particulière du j^{e} bloc, nous allons réduire celui-ci à une seule équation, équivalente mais ne dépendant plus que de ξ_j , λ et des coordonnées autres que celles du j^{e} bloc (x_1^i pour $i \neq j$, $1 \leq i \leq d$).

Considérons la première équation du j^{e} bloc. En procédant comme dans le B) de ce paragraphe, elle peut être résolue en ξ_j^1 qui est alors une fonction continue en λ et toutes les autres coordonnées et vérifie :

$$|\xi_j^1| \leq C(|\lambda \xi_j| + \|\tilde{x}_1\|^2 + |\lambda|^{2\alpha+1})$$

où \tilde{x}_1 représente x_1 moins la composante ξ_j^1 ; cela pour \tilde{x}_1 et λ suffisamment petits.

Grâce à la 1^{ère} équation de (S_j) reportons ξ_j^1 (comme fonction de λ, ξ_j, \dots) dans la 2^e équation de (S_j) :

$$\xi_j^2 - \lambda^2 \xi_j = \lambda G_j^1(x_1, \lambda) + G_j^2(x_1, \lambda).$$

Nous pouvons alors résoudre cette équation en ξ_j^2 , par contraction comme en B) ; nous obtenons ξ_j^2 comme fonction continue de λ et de toutes les coordonnées sauf ξ_j^1, ξ_j^2 et de plus :

$$|\xi_j^2| \leq C(|\lambda^2 \xi_j| + \|\tilde{x}_1\|^2 + |\lambda|^{2\alpha+1})$$

où \tilde{x}_1 représente x_1 moins les composantes ξ_j^1, ξ_j^2 , cela pour \tilde{x}_1 et λ suffisamment petits.

Itérant ce procédé, le j^{e} bloc (S_j) se réduit à :

$$-\lambda^{k_j} \xi_j = \lambda^{k_j-1} G_j^1 + \dots + \lambda^{k_j-1} G_j^{k_j-1} + G_j^{k_j} \equiv -\tilde{g}_j$$

§ 3. RESOLUTION DU PROBLEME EN DIMENSION FINIE.

Nous étudions ici, par des méthodes de topologie algébrique, la résolution du système (9), au voisinage de l'origine, c'est-à-dire (en ne notant que la dépendance en ξ pour alléger) :

$$(9) \quad \begin{cases} \lambda^{k_1} \xi_1 - \tilde{g}_1(\xi, \lambda) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \lambda^{k_d} \xi_d - \tilde{g}_d(\xi, \lambda) = 0 \end{cases}$$

où $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \ker A$, $\tilde{g} = (\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_d)$ satisfait :

$$(10) \quad \|\tilde{g}(\xi, \lambda)\| \leq C(\|\xi\|^2 + |\lambda|^{2\alpha+1}).$$

Enfin λ est un paramètre réel ou complexe ($\Lambda = \mathbf{R}$ ou $\Lambda = \mathbf{C}$) et l'on peut identifier $\ker A$ à Λ^d

$$\ker A \simeq \Lambda^d.$$

Pour étudier (9), au voisinage de l'origine, il est commode d'introduire l'application :

$$(11) \quad F : \Lambda^d \times \Lambda \rightarrow \Lambda^d \times \mathbf{R}$$

définie par :

$$(\xi, \lambda) \rightarrow F(\xi, \lambda) = (\eta, \tau)$$

$$\text{où} \quad \eta_j = \lambda^{k_j} \xi_j - \tilde{g}_j(\xi, \lambda), \quad 1 \leq j \leq d$$

$$\tau = \|\xi\|^2 - r^2$$

(on "mesure" ainsi la distance à l'origine d'une solution de (9)).

LEMME 3. Soit la boule $D = \{(\xi, \lambda) \in \Lambda^d \times \Lambda \mid \|\xi\|^2 + |\lambda|^2 \leq r^2 + (Mr)^{\frac{2}{\alpha}}\}$

où $r \leq r_0 \leq \text{Min}(\text{rayons utilisés ci-dessus}, M^{-(2\alpha+1)})$ et $M = 2C + 1$, C étant

la constante de l'estimation (10).

Alors l'application F définit une application de ∂D dans $\Lambda^d \times \mathbb{R} - \{0\}$ (*)

et est homotope à :

$$(\xi, \lambda) \longrightarrow (\lambda^{k_1} \xi_1, \dots, \lambda^{k_d} \xi_d, \|\xi\|^2 - |\lambda|^2)$$

définie dans la sphère unité S de $\Lambda^d \times \Lambda$ à valeurs dans $\Lambda^d \times \mathbb{R} - \{0\}$.

Preuve. Rappelons que deux applications $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ sont dites homotopes

s'il existe une famille d'applications intermédiaires $f_t : X \longrightarrow Y$ continues en

$x \in X$ et en $t \in [0, 1]$, i.e. s'il existe une homotopie H

$$H : X \times [0, 1] \longrightarrow Y$$

continue et telle que $F(x, 0) = f_0(x)$, $F(x, 1) = f_1(x)$. On notera $f_0 \sim f_1$.

a) Montrons que F , définie par (11), n'a pas de zéros sur ∂D ; pour cela

raisonnons par l'absurde [le choix du paramètre M va remplacer "l'estimation

a priori" habituelle, nécessaire dans ce genre de raisonnement]. Si F admet

un zéro sur ∂D :

$$(12) \quad \lambda^{k_j} \xi_j - \tilde{g}_j(\xi, \lambda) = 0$$

$$(13) \quad \|\xi\|^2 - r^2 = 0 \quad \text{et} \quad \|\xi\|^2 + |\lambda|^2 = r^2 + (Mr)^{\frac{2}{\alpha}}$$

De (13), il résulte :

$$(14) \quad |\lambda| = (Mr)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\text{donc} \quad |\lambda|^\alpha = Mr \leq M M^{-(2\alpha+1)} = M^{-2\alpha} < 1$$

d'après le choix de r et M . On a donc $|\lambda| < 1$; d'où, puisque $k_j \leq \alpha$,

$$|\lambda|^\alpha \leq |\lambda|^{k_j}, \quad 1 \leq j \leq d \quad \text{et} \quad \|(\lambda^{k_1} \xi_1, \dots, \lambda^{k_d} \xi_d)\| \geq |\lambda|^\alpha \|\xi\|.$$

De (12) et (10) il résulte alors :

(*) On note ainsi $(\Lambda^d \times \mathbb{R}) - \{0\}$.

$$\begin{aligned}
|\lambda|^\alpha \|\xi\| &\leq \|(\lambda^{k_1} \xi_1, \dots, \lambda^{k_d} \xi_d)\| = \|(\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_d)\| \leq C(\|\xi\|^2 + |\lambda|^{2\alpha+1}) \\
&\leq C(r^2 + (Mr)^2 (Mr)^{\frac{1}{\alpha}}) \\
&\leq 2C r^2
\end{aligned}$$

en utilisant (14), $\|\xi\|^2 = r^2$ et le choix $r \leq M^{-(2\alpha+1)}$. D'où, comme $M = 2C+1$:

$$|\lambda|^\alpha \|\xi\| \leq 2Cr^2 < (2C+1)r^2 = Mr^2 = Mr r = |\lambda|^\alpha \|\xi\|$$

soit $|\lambda|^\alpha \|\xi\| < |\lambda|^\alpha \|\xi\|$ ce qui est impossible.

b) La deuxième partie de l'énoncé va être montrée par deux déformations (homotopies) successives de F .

La première déformation s'écrit :

$$0 \leq t \leq 1 \quad \begin{cases} \eta_j = \lambda^{k_j} \xi_j - t \tilde{g}_j(\xi, \lambda) & 1 \leq j \leq d \\ \tau = \|\xi\|^2 - r^2. \end{cases}$$

Pour $t = 1$, on retrouve l'application F ; en procédant comme en a)

(mais en remplaçant \tilde{g} par $t \tilde{g}$ et grâce à $\|t \tilde{g}\| \leq \|\tilde{g}\|$ si $0 \leq t \leq 1$), on montre que pour chaque valeur de t cette déformation définit une application continue de ∂D dans $\Lambda^d \times \mathbb{R} - \{0\}$. Cette déformation dépendant continûment de t , F est homotope à (faisant $t = 0$)

$$(15) \quad (\xi, \lambda) \rightarrow (\lambda^{k_1} \xi_1, \dots, \lambda^{k_d} \xi_d, \|\xi\|^2 - r^2). \quad A = (1 + M^{\frac{2}{\alpha}} r^{\frac{2}{\alpha} - 2})^{-1}$$

Passons à la deuxième déformation. Définissons $A = (1 + M^{\frac{2}{\alpha}} r^{\frac{2}{\alpha} - 2})^{-1}$ de sorte

que pour (ξ, λ) appartenant à ∂D (i.e. $\|\xi\|^2 + |\lambda|^2 = r^2 + (Mr)^{\frac{2}{\alpha}}$) :

$$(16) \quad \|\xi\|^2(1-A) - |\lambda|^2 A = \|\xi\|^2 - r^2.$$

La deuxième déformation s'écrit alors :

$$0 \leq t \leq 1 \quad \begin{cases} \eta_j = \lambda^{k_j} \xi_j & 1 \leq j \leq d \\ \tau = \|\xi\|^2 [1 - (1-t)A] - |\lambda|^2 [(1-t)A + t]. \end{cases}$$

Pour $t = 0$, on retrouve, en utilisant (16), l'application :

$$(\xi, \lambda) \rightarrow (\lambda^{k_1} \xi_1, \dots, \lambda^{k_d} \xi_d, \|\xi\|^2 - r^2).$$

En procédant comme en a) (ici $|\lambda| = \frac{(r^2 + (Mr)^{\frac{2}{\alpha}})(1 - (1-t)A)}{1+t}$) au lieu de $|\lambda| = (Mr)^{\frac{1}{\alpha}}$

et $g \equiv 0$). On montre que pour chaque valeur de t cette déformation définit une

application continue de ∂D dans $\Lambda^d \times \mathbb{R} - \{0\}$. Cette déformation dépendant conti-

nûment de t l'application (15) est homotope à (faisant $t = 1$) :

$$(17) \quad (\xi, \lambda) \rightarrow (\lambda^{k_1} \xi_1, \dots, \lambda^{k_d} \xi_d, \|\xi\|^2 - |\lambda|^2)$$

d'où le résultat en faisant une homothétie sur (ξ, λ) de façon à se placer sur la

sphère unité (on remplace ξ par $\xi(r^2 + (Mr)^{\frac{2}{\alpha}})^{\frac{1}{2}}$ et λ par $\lambda(r^2 + (Mr)^{\frac{2}{\alpha}})^{\frac{1}{2}}$), puis-

que (15) est homotope à F . ■

Le lemme 3 ramène ainsi l'étude de (9) à celle de (17) :

$$(17) \quad (\xi, \lambda) \in S \rightarrow (\lambda^{k_1} \xi_1, \dots, \lambda^{k_d} \xi_d, \|\xi\|^2 - |\lambda|^2) \in \Lambda^d \times \mathbb{R} - \{0\}$$

dont nous cherchons les zéros dans un voisinage de l'origine, plus précisément

dans la boule unité B_1 de $\Lambda^d \times \mathbb{R}$; on notera $\partial B_1 = S$, dans ce qui suit.

Introduisons la :

DEFINITION 1. Une application $T_0 : S \rightarrow \Lambda^d \times \mathbb{R} - \{0\}$ est dite essentielle si et seulement si toute extension continue $T : B_1 \rightarrow \Lambda^d \times \mathbb{R}$ de T_0 admet un zéro i.e. il existe $x \in B_1$, $T(x) = 0$.

Remarque : Une extension continue de S à B_1 existe toujours (cf. Dugundji [1]).

Le théorème suivant caractérise les applications essentielles :

THEOREME 1. Une application $T_0 : S \rightarrow \Lambda^d \times \mathbb{R} - \{0\}$ est essentielle si et seulement si T_0 n'est pas homotope à une application constante de S dans $\Lambda^d \times \mathbb{R} - \{0\}$ i.e. T_0 est non triviale.

Preuve. 1) \Rightarrow Par l'absurde. Si T_0 est homotope à une constante, il existe

$H : S \times [0, 1] \rightarrow \Lambda^d \times \mathbb{R} - \{0\}$ avec $H(x, t) = C \neq 0$, $H(x, 0) = T_0(x)$. Alors

$T : B_1 \rightarrow \Lambda^d \times \mathbb{R}$ définie par $T(tx) = H(x, t)$ $0 \leq t \leq 1$, $\|x\| = 1$ est une extension de T_0 sans zéros.

2) \Leftarrow Par l'absurde. Si T_0 est inessentiel, il existe une extension

$T : B_1 \rightarrow \Lambda^d \times \mathbb{R}$ sans zéro. Définissons l'homotopie $H : S \times [0, 1] \rightarrow \Lambda^d \times \mathbb{R}$

par $H(x, t) = T(tx)$. On a $H(x, t) \neq 0$ et $H(x, 0) = T(o) \neq 0$, $H(x, 1) = T_0(x) : T_0$

est homotope à une constante. ■

Remarque. Pratiquement pour étudier la classe d'homotopie de T_0 , on consi-

dèrera $\frac{T_0}{\|T_0\|} : S \rightarrow$ sphère unité de $\Lambda^d \times \mathbb{R}$. ■

COROLLAIRE 1. Si $\Lambda^d \times \Lambda = \Lambda^d \times \mathbb{R}$ i.e. si $\Lambda = \mathbb{R}$, T_0 est essentiel si et seulement si $\deg(T, B_1, o) \neq 0$, où T est une extension continue de T_0 .

Remarque. $\deg(T, B_1, o)$ ne dépend que du type d'homotopie de T_0 . ■

Le théorème 1, ramène donc l'étude de (17) à la classification de ces types d'homotopie.

Rappelons que : $\sum_1^d k_j = m = \dim \ker A^\alpha$.

THEOREME 2. L'application $T_0 : (\xi, \lambda) \rightarrow (\lambda^{k_1} \xi_1, \dots, \lambda^{k_d} \xi_d, \|\xi\|^{2-\lambda^2})$

possède les propriétés suivantes :

- a) $\Lambda = \mathbf{R}$. m est impair $\deg(T, B_1, 0) = -2$
 . m est pair $\deg(T, B_1, 0) = 0$

où T est une extension continue de T_0 .

- b) $\Lambda = \mathbf{C}$ T_0 est non triviale si et seulement si :

$d = 1$ et $m > 0$ ou $d > 1$ et m est impair.

La partie difficile du théorème est le cas b). La preuve sera donnée en Appendice.

Nous déduisons du Théorème 2, la solution du problème (9).

THEOREME 3. Soit $\Lambda = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} , $\ker A$ identifié à Λ^d . Soit k_1, \dots, k_d des entiers non négatifs avec $\alpha = \max_{1 \leq j \leq d} k_j$.

Considérons le système :

$$(9) \quad \lambda^{k_j} \xi_j - \tilde{g}_j(\xi, \lambda) = 0 \quad 1 \leq j \leq d$$

où $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \Lambda^d$ et $\tilde{g} = (\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_d)$ satisfait :

$$\|\tilde{g}(\xi, \lambda)\| \leq C(\|\xi\|^2 + |\lambda|^{2\alpha+1}).$$

Alors il existe deux constantes positives M et r_0 telles que :

- (i) $\forall r < r_0$, le système (9) admet une solution (ξ, λ) avec $\|\xi\| < r$,
 $|\lambda| = (Mr)^{\frac{1}{\alpha}}$.

Cet ensemble de solutions sera appelé l'ensemble des solutions triviales.

- (ii) Si $m = \sum_1^d k_j$ est impair, le système (9) admet une solution non triviale,
pour tout $r < r_0$ avec $\|\xi\| = r$, $|\lambda| < (Mr)^{\frac{1}{\alpha}}$.

- (iii) Si $\Lambda = \mathbf{C}$ et $d = 1$, pour tout $m > 0$, la conclusion de (ii) est vraie.

Preuve. (i) Prenons λ fixé tel que $|\lambda| = (Mr)^{\frac{1}{\alpha}}$, grâce au lemme 3 (cf. démonstration), l'application définie

$$\xi \rightarrow (\lambda^{k_1} \xi_1 - \tilde{g}_1(\xi, \lambda), \dots, \lambda^{k_d} \xi_d - \tilde{g}_d(\xi, \lambda))$$

peut être déformée par homotopie en :

$$(18) \quad \mathcal{J}: \xi \rightarrow (\lambda^{k_1} \xi_1, \dots, \lambda^{k_d} \xi_d).$$

La pré-image de zéro par cette application est 0. Le déterminant de son jacobien

$$\text{est } J = \prod_{j>1}^d \lambda^{k_j} = \lambda^{\sum_{j=1}^d k_j} = \lambda^m.$$

$\xi = 0$ étant un point régulier de (18), nous avons alors :

$$\deg(\mathcal{J}, \|\xi\| < r, 0) = \begin{cases} (Mr)^{\frac{m}{\alpha}} & \text{si } \Lambda = \mathbb{C} \\ (\text{sign } \lambda)^m (Mr)^{\frac{m}{\alpha}} & \text{si } \Lambda = \mathbb{R}, \end{cases}$$

d'où le résultat par le corollaire 1, $d(\mathcal{J}, \|\xi\| < r, 0)$ étant non nul.

(ii) et (iii) sont une conséquence immédiate du théorème 2. ■

COROLLAIRE 2. Supposons $m = \sum_1^d k_j$ pair et qu'il existe un indice j ,

soit $j = d$ pour fixer les idées tel que :

$k_d > 0$ et $\tilde{g}_d(\xi, \lambda)$ est de la forme

$\tilde{g}_d(\xi, \lambda) = \lambda h_d(\xi, \lambda)$, où h_d est une fonction continue en (ξ, λ) telle que

$|h_d(\xi, \lambda)| \leq C(\|\xi\|^2 + |\lambda|^{2\alpha})$. Alors il existe deux constantes positives M et r_0

telles que pour tout $r < r_0$, le système (9) admette une solution non triviale avec

$\|\xi\| = r$, $|\lambda| < (Mr)^{\frac{1}{\alpha}}$.

Preuve. On se ramène au cas (ii) du théorème 3 car $\lambda^{k_d} \xi_d - \tilde{g}_d = 0 \iff \lambda^{k_d-1} \xi_d - h_d = 0$. ■

§ 4. RESOLUTION DU PROBLEME EN DIMENSION INFINIE.

Elle est alors immédiate compte tenu de l'équivalence établie au § 2. Nous avons donc le :

THEOREME 4. Considérons l'équation :

$$(1) \quad Ax - \lambda x = g(x, \lambda)$$

où A et g satisfont les hypothèses du § 1 avec $p = 2\alpha + 1$ et m étant la dimension de $\ker A^\alpha$ (multiplicité algébrique).

Alors il existe deux constantes positives M et r_0 telles que :

$$(i) \quad \forall r < r_0, (1) \text{ a une solution } (x, \lambda) \text{ avec } \|Px\| < r, \quad |\lambda| = (Mr)^{\frac{1}{\alpha}}$$

[P est la projection sur $\ker A$ cf. § 2 c)]. Cet ensemble de solutions est l'ensemble des solutions triviales.

(ii) Si m est impair, (1) a une solution non triviale (x, λ) i.e. pour tout $r < r_0$ et $\|Px\| = r, \quad |\lambda| < (Mr)^{\frac{1}{\alpha}}$.

(iii) Si $\Lambda = \mathbb{C}$ et $\dim_{\mathbb{C}} \ker A = 1$, alors pour tout m , la conclusion de (ii) est satisfaite.

Preuve. (i), (ii), (iii) découle de façon immédiate du théorème 3. ■

Nous avons aussi le correspondant du corollaire 2.

COROLLAIRE 3. Supposons que dans la procédure de réduction de (1)

(cf. § 2 c)) il existe un bloc j , soit $j = d$ pour fixer les idées, tel que :

$$k_d > 0 \text{ et } G_d^k(x_1, \lambda) \text{ est de la forme :}$$

$$G_d^{k_d}(x_1, \lambda) = \lambda h_d^{k_d}(x_1, \lambda),$$

où $h_d^{k_d}$ est une fonction continue en (x_1, λ) telle que

$$|h_d^{k_d}(x_1, \lambda)| \leq C(\|x_1\|^2 + |\lambda|^{2\alpha}).$$

Alors, pour $m = \sum_{j=1}^d k_j$ pair, il existe deux constantes positives M et r_0 telles

que :

$$\forall r < r_0, (1) \text{ admet une solution non triviale } (x, \lambda) \text{ avec } \|Px\| = r \text{ et } |\lambda| < (Mr)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. DUGUNDJI. Topology. Allyn and Bacon, New Jersey 1966.
- [2] B. GRAY. Homotopy theory. Academic Press, New York 1975.
- [3] J. IZE. Bifurcation Theory for Fredholm operators. P.h.d. Thesis Courant Institute 1974, et Memoir of the A.M.S, n° 174 (1976)
- [4] L. NIRENBERG. Topics in non linear functional analysis. Courant Institute 1974.
- [5] S. LANG. Algebra. Addison Wesley 1965.
- [6] J.G. HOCKING, G.S. YOUNG. Topology, Addison Wesley 1961.

APPENDICE

A) L'objet de cet appendice est d'indiquer, dans ses grandes lignes, la démonstration du Théorème 2. § 3. Celle-ci nécessite quelques préliminaires de théorie de l'homotopie.

Soit T une application continue de B , boule unité dans \mathbb{R}^n , dans \mathbb{R}^k . Supposons que T_0 , restriction de T à S , frontière de B , est une application de S dans $\mathbb{R}^k - \{0\}$. Rappelons la :

DEFINITION. T_0 est dite essentielle par rapport à B , si toute extension continue $T : B \rightarrow \mathbb{R}^k$ de T_0 admet un zéro.

Elle est dite inessentielle dans le cas contraire.

On a vu (cf. § 3, théorème 1) qu'une application T_0 est essentielle si et seulement si T_0 n'est pas homotope à une application constante. Dans le cas où $n < k$, toute application $T_0 : S \rightarrow \mathbb{R}^k - \{0\}$ est inessentielle c'est-à-dire homotope à une application constante. Dans le cas où $n > k$, la situation est beaucoup plus difficile.

Nous allons donner un exemple d'application essentielle dans le cas $n=4$,

$k = 3$, c'est-à-dire correspondant à une application de S^3 dans $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ ou de S^3 dans S^2 [S^n = sphère unité de \mathbb{R}^{n+1} dans tout ce qui suit].

Considérons S^3 comme la sphère unité de $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$:

$$S^3 = \{(\lambda, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mid |\lambda|^2 + |z|^2 = 1\}.$$

On définit alors l'application de Hopf:

$$\eta : S^3 \longrightarrow S^2$$

par $\eta(\lambda, z) = (\operatorname{Re} 2 \bar{\lambda} z, \operatorname{Im} 2 \bar{\lambda} z, |z|^2 - |\lambda|^2)$.

Cette application est essentielle ; le principe de la démonstration consiste à raisonner par l'absurde en supposant η homotope à une application constante.

On exhibe alors une homotopie entre l'application identité de S^2 dans S^2 et une application constante. Cela signifierait que S^2 est contractible, d'où la contradiction.

Pour plus de détails on pourra consulter [2] [6].

Définissons maintenant la notion de suspension d'une application.

Soit $\psi : S^{n-1} \longrightarrow S^{k-1}$ une application continue. On définit la suspension de ψ , notée $\Sigma\psi$, géométriquement, de la façon suivante :

- 1) on identifie l'équateur de S^n (resp. S^k) avec S^{n-1} (resp. S^{k-1}).
- 2) $\Sigma\psi : S^n \longrightarrow S^k$ applique le pôle nord (resp. sud) de S^n sur le pôle nord (resp. sud) de S^k et est l'extension linéaire, sur les grands cercles, de ψ aux hémisphères.

Analytiquement, après avoir étendu radialement $\psi : S^{n-1} \longrightarrow S^{k-1}$ à la boule unité B^n de \mathbb{R}^n , on définit :

$$\Sigma\psi : S^n \rightarrow S^k$$

par :

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \rightarrow \left(\frac{\psi(x_1, \dots, x_n)}{(\|\psi\|^2 + x_{n+1}^2)^{\frac{1}{2}}}, \frac{x_{n+1}}{(\|\psi\|^2 + x_{n+1}^2)^{\frac{1}{2}}} \right).$$

Il est important de noter que si deux applications sont homotopes leurs suspensions le seront également ; en particulier si ψ est essentielle, $\Sigma\psi$ est essentielle.

Remarques : 1. A un facteur positif près, la suspension $\Sigma\psi$ de ψ

a donc la forme $\Sigma\psi(x_1, \dots, x_{n+1}) = (\psi(x_1, \dots, x_n), x_{n+1})$.

2. Lorsque ψ est une fonction complexe de plusieurs variables complexes, la suspension de ψ est définie de façon analogue ; il importe de noter qu'identifiant \mathbb{C} à \mathbb{R}^2 (i.e. z à $(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$), la suspension "complexe" correspond à deux suspensions "réelles". Sauf indication contraire, Σ désignera la suspension réelle.

B) Nous abordons maintenant la démonstration du Théorème 2.

Celle-ci va consister en une série de déformations de T_0 . Dans le cas où $\Lambda = \mathbb{R}$, T_0 est une application de S^d dans S^d . On pourra donc conclure en utilisant un argument de degré. Dans le cas où $\Lambda = \mathbb{C}$, T_0 est une application de S^{2d+1} dans S^{2d} ; on ne peut plus utiliser le degré. Par une nouvelle série de déformations on montre alors que T_0 est homotope à la suspension de l'application de Hopf composée avec une certaine autre application. Pour la commodité, nous procédons par une suite d'assertions.

ASSERTION 1. L'application $T_0 : (\xi, \lambda) \rightarrow (\lambda^{k_1} \xi_1, \dots, \lambda^{k_d} \xi_d, \|\xi\|^2 - |\lambda|^2)$

peut être déformée en l'application :

$$(\xi, \lambda) \rightarrow (\lambda^m \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d, |\xi_1|^2 - |\lambda|^2)$$

où $m = \sum_{j=1}^d k_j$ et $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d)$.

Preuve. Par abus de notation, on représentera une application par son image.

On a alors, le signe \sim désignant la relation "être homotope à" :

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{c} \lambda^{k_1} \xi_1 \\ \vdots \\ \lambda^{k_{d-1}} \xi_{d-1} \\ \lambda^{k_d} \xi_d \\ \|\xi\|^2 - |\lambda|^2 \end{array} \right| \stackrel{(1)}{\sim} \left| \begin{array}{c} \lambda^{k_1} \xi_1 \\ \vdots \\ -\xi_d \\ \lambda^{k_d+k_{d-1}} \xi_{d-1} \end{array} \right| \stackrel{(2)}{\sim} \left| \begin{array}{c} \lambda^{k_1} \xi_1 \\ \vdots \\ \lambda^{k_d+k_{d-1}} \xi_{d-1} \\ \xi_d \\ \|\xi\|^2 - |\lambda|^2 \end{array} \right| \dots \dots \dots \left| \begin{array}{c} \lambda^m \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_d \\ \|\xi\|^2 - |\lambda|^2 \end{array} \right| \stackrel{(3)}{\sim} \left| \begin{array}{c} \lambda^m \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_d \\ |\xi_1|^2 - |\lambda|^2 \end{array} \right|
 \end{array}$$

où \dots désigne la répétition (d-1 fois) des homotopies (1) et (2) (mais pour les valeurs $k_{d-1} \dots k_1$).

Précisons les homotopies (1), (2), (3).

L'homotopie (1) est :

$$\left| \begin{array}{c} \lambda^{k_1} \xi_1 \\ \vdots \\ \lambda^{k_{d-2}} \xi_{d-2} \\ \left[\begin{array}{cc} (1-t)\lambda^{k_{d-1}} & -t \\ t\lambda^{k_d+k_{d-1}} & (1-t)\lambda^{k_d} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \xi_{d-1} \\ \xi_d \end{array} \right] \\ \|\xi\|^2 - |\lambda|^2 \end{array} \right| \quad 0 \leq t \leq 1$$

L'homotopie (2) est :

$$\left| \begin{array}{c} \lambda^{k_1} \xi_1 \\ \vdots \\ \lambda^{k_{d-2}} \xi_{d-2} \\ \left[\begin{array}{cc} -(1-t) & t \lambda^{k_d+k_{d-1}} \\ t & (1-t) \lambda^{k_d+k_{d-1}} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \xi_{d-1} \\ \xi_d \end{bmatrix} \\ \|\xi\|^2 - |\lambda|^2 \end{array} \right| \quad 0 \leq t \leq 1$$

L'homotopie (3) est :

$$\left| \begin{array}{c} \lambda^m \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_d \\ t |\xi_1|^2 + (1-t) \|\xi\|^2 - |\lambda|^2 \end{array} \right| \quad 0 \leq t \leq 1$$

Pour démontrer l'assertion (1), il faut vérifier que pour chaque valeur de t dans $[0, 1]$ les applications ci-dessus ne s'annulent pas sur la sphère unité $\|\xi\|^2 + |\lambda|^2 = 1$ (ces applications sont trivialement continues en ξ, λ, t).

La conclusion en résultera alors en faisant $t = 0$ puis $t = 1$. Vérifions cela, par exemple, pour l'homotopie (1). (On raisonne de façon identique pour (2)).

Procédant par l'absurde, supposons que pour $t \in [0, 1]$, l'application définie par (1) admette un zéro (ξ, λ) tel que $\|\xi\|^2 + |\lambda|^2 = 1$. Comme $\|\xi\|^2 - |\lambda|^2 = 0$, λ est non nul. De $\lambda^{k_i} \xi_{d_i} = 0$, $1 \leq i \leq d-2$, on déduit alors $\xi_i = 0$, $1 \leq i \leq d-2$ et de :

$$\begin{bmatrix} (1-t)\lambda^{k_{d-1}} & -t \\ t\lambda^{k_d+k_{d-1}} & (1-t)\lambda^{k_d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{d-1} \\ \xi_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

on déduit $\xi_{d-1} = \xi_d = 0$ (le déterminant de la matrice est non nul) si $\lambda \neq 0$, $0 \leq t \leq 1$). On aurait donc $\xi = 0$ ce qui contredit $\|\xi\|^2 = |\lambda|^2 \neq 0$.

Vérifions la même conclusion pour l'homotopie (3). Si, pour $t \in [0, 1]$, l'application définie par (3) s'annulait sur $\|\xi\|^2 + |\lambda|^2 = 1$, on aurait :

$$\xi_i = 0 \quad 2 \leq i \leq d \quad \text{et} \quad \lambda^m \xi_1 = 0.$$

On ne peut avoir simultanément $\xi_1 = \lambda = 0$, car $\|\xi\|^2 + |\lambda|^2 = |\xi_1|^2 + |\lambda|^2 = 1$.

Donc ou bien $\lambda = 0$, ou bien $\xi_1 = 0$. Si $\lambda = 0$, comme $\|\xi\|^2 = |\xi_1|^2$:

$$t|\xi_1|^2 + (1-t)\|\xi\|^2 - |\lambda|^2 = 0 \Leftrightarrow |\xi_1|^2 = 0 ;$$

donc $\xi = \lambda = 0$ ce qui contredit $\|\xi\|^2 + |\lambda|^2 = 1$.

Si $\xi_1 = 0$, $\xi = 0$ et :

$$t|\xi_1|^2 + (1-t)\|\xi\|^2 - |\lambda|^2 = 0 \Leftrightarrow |\lambda|^2 = 0 ;$$

donc $\xi = \lambda = 0$ ce qui contredit $\|\xi\|^2 + |\lambda|^2 = 1$.

L'application (3) ne s'annule pas sur la sphère unité. ■

ASSERTION 2. Cas $\Lambda = \mathbb{R}$.

Soit T une extension de $T_0 : S^d \rightarrow S^d$ à B^{d+1} , boule unité de \mathbb{R}^{d+1} .

Rappelons que $m = \sum_1^d k_j$.

Si m est impair $\Leftrightarrow m = 2n+1$, $\deg(T, B^{d+1}, 0) = -2$

Si m est pair $\Leftrightarrow m = 2n$, $\deg(T, B^{d+1}, 0) = 0$.

Preuve. Remarquons tout d'abord que le degré est un invariant de la classe d'homotopie de T_0 , donc ne dépend pas de l'extension T.

D'après l'assertion 1, T_0 est homotope à :

$$(\xi_1, \dots, \xi_d, \lambda) \longrightarrow (\lambda^m \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d, |\xi_1|^2 - |\lambda|^2).$$

Si $m = 2n+1$, utilisant l'homotopie :

$$[(t + (1-t)\lambda^{2n})\lambda \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d, |\xi_1|^2 - |\lambda|^2] \quad 0 \leq t \leq 1$$

on a (après avoir vérifié que cette homotopie est admissible) :

$$(\lambda^m \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d, |\xi_1|^2 - |\lambda|^2) \sim (\lambda \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d, |\xi_1|^2 - |\lambda|^2).$$

La matrice jacobienne de $(\xi, \lambda) \longrightarrow (\lambda \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d, |\xi_1|^2 - |\lambda|^2)$

s'écrit :

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & \dots & 0 & \xi_1 \\ 0 & 1 & & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & & & 1 & 0 \\ 2\xi_1 & 0 & & & 0 & -2\lambda \end{bmatrix}$$

C'est une matrice $(d+1) \times (d+1)$ dont le déterminant s'écrit :

$$\begin{aligned} \det J &= \lambda(-2\lambda) + (-1)^{d+1} 2\xi_1 (-1)^{d+1} \xi_1 \det I_{d-1} \\ &= -2(\lambda^2 + \xi_1^2) < 0 \quad \forall (\xi, \lambda). \end{aligned}$$

Résolvant $\lambda \xi_1 = \epsilon^2$, $\xi_2 = 0 \dots \xi_d = 0$, $|\xi_1|^2 - |\lambda|^2 = 0$ qui admet deux solutions

$\xi_1 = \pm \epsilon$, $\xi_2 = \dots = \xi_d = 0$, $\lambda = \pm \epsilon$, on obtient donc :

$$\deg(T, B^{d+1}, 0) = -2.$$

Si $m = 2n$, utilisant l'homotopie :

$$[(t + (1-t)\lambda^{2n})\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d, |\xi_1|^2 - |\lambda|^2] \quad 0 \leq t \leq 1$$

puis l'homotopie :

$$[(1-t)\xi_1, (1-t)\xi_2, \dots, (1-t)\xi_d, (1-t)(|\xi_1|^2 - |\lambda|^2) + t] \quad 0 \leq t \leq 1$$

qui (on le vérifie) ne s'annule pas sur la sphère unité, T_0 est homotope à

$(0, 0, \dots, 0, -1)$ dont le degré est 0. ■

ASSERTION 3. Cas $\Lambda = \mathbb{C}$.

Soit $\alpha_m : (\mu, u) \rightarrow (\mu^m, u)$ l'application de S^3 dans S^3 et η l'appli-
cation de Hopf de S^3 dans S^2 .

Alors $T_0 : S^{2d+1} \rightarrow S^{2d}$ est homotope à $\Sigma^{2d-2} \alpha_m \circ \eta$, application
obtenue en effectuant $2d-2$ suspensions de $\alpha_m \circ \eta : S^3 \rightarrow S^2$.

Preuve. D'après la définition de α_m et η (cf. partie A), $\alpha_m \circ \eta$ est une appli-
cation de S^3 dans S^2 , définie par :

$$-\alpha_m \circ \eta : (\xi_1, \lambda) \rightarrow (\lambda^m \xi_1, |\xi_1|^2 - |\lambda|^2).$$

D'après la définition analytique de la suspension, $\Sigma^{2d-2} \alpha_m \circ \eta$ est une
application de S^{2d+1} dans S^{2d} définie par :

$$\Sigma^{2d-2} \alpha_m \circ \eta : (\xi_1, \dots, \xi_d, \lambda) \rightarrow (\lambda^m \xi_1, |\xi_1|^2 - |\lambda|^2, \xi_2, \dots, \xi_d).$$

Il faut vérifier que cette application est homotope à T_0 . Cela s'effectue
par l'intermédiaire des deux homotopies suivantes (dont on vérifie qu'elles ne
s'annulent pas sur S^{2d+1}), sachant que :

$$\xi_i \in \mathbb{C} \iff \xi_i \equiv (\operatorname{Re} \xi_i, \operatorname{Im} \xi_i) \quad 1 \leq i \leq d$$

$\begin{array}{c} \lambda^m \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{d-1} \\ \operatorname{Re} \xi_d \\ (1-t)\operatorname{Im} \xi_d - t(\xi_1 ^2 - \lambda ^2) \\ t \operatorname{Im} \xi_d + (1-t)(\xi_1 ^2 - \lambda ^2) \end{array}$	et	$\begin{array}{c} \lambda^m \xi_1 \\ \vdots \\ (1-t)\operatorname{Re} \xi_d + t(\xi_1 ^2 - \lambda ^2) \\ t \operatorname{Re} \xi_d - (1-t)(\xi_1 ^2 - \lambda ^2) \\ \operatorname{Im} \xi_d \end{array}$	$0 \leq t \leq 1$
---	----	--	-------------------

En effectuant ces deux homotopies, T_0 est déformée en :

$$(\xi_1, \dots, \xi_d, \lambda) \longrightarrow (\lambda^m \xi_1, \dots, \xi_{d-1}, |\xi_1|^2 - |\lambda|^2, \xi_d).$$

En répétant la même opération $d-2$ fois, T_0 est déformée en :

$$(\xi_1, \dots, \xi_d, \lambda) \longrightarrow (\lambda^m \xi_1, |\xi_1|^2 - |\lambda|^2, \xi_2, \dots, \xi_d)$$

qui est précisément $\Sigma^{2d-2} - \alpha_m \circ \eta$. ■

ASSERTION 4. $\Sigma^{2d-2} - \alpha_m \circ \eta$ est non triviale (i.e. n'est pas homotope à une constante) si et seulement si

$$d = 1 \quad \text{et} \quad m > 0$$

ou $d > 1$ et m est impair.

Preuve. Si $d = 1$, $\Sigma^{2d-2} - \alpha_m \circ \eta = -\alpha_m \circ \eta$ l'équivalence est immédiate car η , donc $-\eta$ est essentielle par construction ainsi que α_m (on vérifie que α_m a pour degré m).

Si $d > 1$, tout revient à montrer l'équivalence dans le cas $d = 2$ car l'opération de suspension conserve l'homotopie. Il suffit donc de montrer que :

$$\Sigma^2 - \alpha_m \circ \eta \sim \Sigma^2 - \eta \not\sim 0 \quad \text{si } m \text{ est impair}$$

$$\Sigma^2 - \alpha_m \circ \eta \sim 0 \quad \text{si } m \text{ est pair.}$$

Dans le cas où $d = 2$, $k_1 + k_2 = m$, $\Sigma^2 - \alpha_m \circ \eta$ est une application de S^5 dans S^4 définie par :

$$\Sigma^2 - \alpha_m \circ \eta : (\xi_1, \xi_2, \lambda) \longrightarrow (\lambda^m \xi_1, |\xi_1|^2 - |\lambda|^2, \xi_2)$$

alors que :

$$\Sigma^2 - \eta : (\xi_1, \xi_2, \lambda) \longrightarrow (\lambda \xi_1, |\xi_1|^2 - |\lambda|^2, \xi_2).$$

Supposons m impair i.e. $m = 2n+1$, alors par une série d'homotopies

analogue à celles utilisées pour prouver les assertions 1 et 3 (mais ici avec $d = 2$ et en supposant pour fixer les idées que $k_1 \geq k_2$) :

$$\Sigma^2 - \alpha_m \circ \eta = \begin{vmatrix} \lambda^m \xi_1 & & & \\ & |\xi_1|^2 - |\lambda|^2 & & \\ & & \xi_2 & \\ & & & \|\xi\|^2 - |\lambda|^2 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} \lambda^m \xi_1 & & & \\ & \xi_2 & & \\ & & \|\xi\|^2 - |\lambda|^2 & \\ & & & \|\xi\|^2 - |\lambda|^2 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} \lambda \xi_1 & & & \\ & |\xi_1|^2 - |\lambda|^2 & & \\ & & \xi_2 & \\ & & & \|\xi\|^2 - |\lambda|^2 \end{vmatrix} = \Sigma^2 - \eta$$

et $\Sigma^2 - \eta \neq 0$ résulte de $\eta \neq 0$.

Supposons m pair i.e. $m = 2n$, alors de façon analogue :

$$\Sigma^2 - \alpha_m \circ \eta = \begin{vmatrix} \lambda^m \xi_1 & & & & \\ & |\xi_1|^2 - |\lambda|^2 & & & \\ & & \xi_2 & & \\ & & & \|\xi\|^2 - |\lambda|^2 & \\ & & & & \|\xi\|^2 - |\lambda|^2 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} \lambda^m \xi_1 & & & & \\ & \xi_2 & & & \\ & & \|\xi\|^2 - |\lambda|^2 & & \\ & & & \|\xi\|^2 - |\lambda|^2 & \\ & & & & \|\xi\|^2 - |\lambda|^2 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} \xi_1 & & & & \\ & \xi_2 & & & \\ & & \|\xi\|^2 - |\lambda|^2 & & \\ & & & \|\xi\|^2 - |\lambda|^2 & \\ & & & & \|\xi\|^2 - |\lambda|^2 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & & \\ & & & & \end{vmatrix} \sim 0$$

ce qui achève la démonstration. ■

N° D'IMPRESSION 250
2ÈME TRIMESTRE 1977

