UNIVERSITÉ PARIS XI

U. E. R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

2,5

n° 167

Sur les théorèmes de Schwarz-Pick et Nevanlinna dans C^n

Denise et Eric Amar

Analyse Harmonique d'Orsay
1975 25164

n° 167

Sur les théorèmes de Schwarz-Pick
et Nevanlinna dans C^n

Denise et Eric Amar

Analyse Harmonique d'Orsay
1975

Sur les théorèmes de Schwarz-Pick et Nevanlinna dans $\mathbb{C}^n$

par Denise et Eric Amar

Soit D le disque unité dans $\mathbb{C}$ et soit $H^\infty(D)$ l'algèbre des fonctions analytiques bornées dans D. Si $\{z_1 \dots z_n\} \subset D$ et si $f \in H^\infty(D)$, $\|f\|_\infty \leq 1$, on pose $w_i = f(z_i)$, $i = 1, \dots n$. On a alors [1] :

THEOREME 1 (Schwarz-Pick). <u>La forme quadratique sur</u> $\mathbb{C}^n$ <u>définie par</u> :

$\forall t = (t_1 \dots t_n) \in \mathbb{C}^n$

$$Q_n(t) = \sum_{i\,j} \frac{1 - \bar{w}_i w_j}{1 - z_i \bar{z}_j} t_i \bar{t}_j$$

<u>est positive</u>

Ce théorème admet la réciproque :

THEOREME 2. <u>Soient</u> $\{z_1 \dots z_n\} \subset D$ <u>et</u> $\{w_1 \dots w_n\} \subset D$ <u>tels que la forme quadratique</u> Q_n <u>sur</u> $\mathbb{C}^n$ <u>soit positive</u>. <u>Alors il existe</u> $f \in H^\infty(D)$ <u>telle que</u> $\|f\|_\infty \leq 1$ <u>et</u> $f(z_i) = w_i$, $i = 1 \dots n$.

Depuis Pick [2] et Nevanlinna [3] ces théorèmes ont été démontrés par un grand nombre d'auteurs [4] [5] [6] [7] [8].

Peut-on généraliser ces théorèmes dans la boule unité ou le polydisque de $\mathbb{C}^n$?

On utilise les méthodes définies en [6].

2. Cas de la boule.

B_n désigne la boule unité de $\mathbb{C}^n$. Soient $\sigma = \{z_1 \dots z_k\} \subset B_n$ et $f \in H^\infty(B_n)$ telle que $\|f\|_\infty \leq 1$. Pour déterminer l'analogue de la forme Q_w dans ce cas, on considère le mesure de Lebesgue sur ∂B_n et la représentation π associée [6] i. e.

$$\forall g \in H^2(B_n), \quad \pi(f)\, g = P_{H^2} \bar{f} g$$

où P_{H^2} est la projection orthogonale sur $H^2(B)$.

Comme dans [6], on définit E_σ le sous-espace engendré par $\{k_{z_i},\ i = 1..k\}$ où k_{z_i} est le noyau de Cauchy-Szegö associé à z_i. Alors E_σ est invariant par $\pi(f)$ et si $\pi_\sigma(f)$ est la restriction de $\pi(f)$ à E_σ :

$$\|\pi_\sigma(f)\| \leq \|f\|_{H^\infty/I_\sigma} \leq \|f\|_\infty$$

où I_σ est l'idéal des fonctions de H^∞ qui s'annulent sur σ, d'où :

$$\|\pi_\sigma(f)\| \leq 1.$$

C'est-à-dire, que si $h = \sum_{i=1}^{k} h_i k_{z_i}$, $h_i \in \mathbb{C}$,

$$\|h\|^2 - \|\pi_\sigma(f)\, h\|^2 \geq 0$$

$$0 \leq \sum_{i\,j} h_i \bar{h}_j \langle k_{z_i}, k_{z_j}\rangle - \sum_{i\,j} h_i \bar{h}_j f(\bar{z}_i) \langle k_{z_i}, k_{z_j}\rangle$$

$$0 \leq \sum_{i\,j} h_i \bar{h}_j \frac{1 - \bar{w}_i w_j}{(1-\langle z_i, z_j\rangle)^2}$$

si l'on pose $w_i = f(z_i)$, $i = 1 \dots k$.

La forme quadratique $Q_{w,\sigma}$ est définie par :

$$Q_{w,\sigma}(t) = \sum_{i,j=1}^{k} t_i \bar{t}_j \frac{1 - \bar{w}_i w_j}{(1-\langle z_i, z_j\rangle)^2} .$$

On obtient donc l'analogue du théorème de Schwarz-Pick :

THEOREME 1'. Si $f \in H^\infty(B)$, $\|f\|_\infty \leq 1$, alors la forme quadratique $Q_{w,\sigma}$ est positive.

Remarque. On peut remplacer la mesure de Lebesgue sur δB_n par n'importe quelle mesure de probabilité sur $\bar{B}$.

Que peut-on dire de la réciproque ?

Elle est fausse à cause du contre exemple suivant.

THEOREME 3. Si D est le disque unité de $\mathbb{C}$, λ la mesure de Lebesgue et $H^2(\lambda)$ l'adhérence dans $L^2(\lambda)$ de $A(D)$. Alors il existe une suite d'interpolation pour $H^2(\lambda)$ qui n'est pas d'interpolation pour $H^\infty(D)$.

Ce théorème admet en effet le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1. Il existe une suite $\sigma \subset B_2$ qui est d'interpolation pour $H^2(B_2)$ et qui n'est pas d'interpolation pour $H^\infty(B_2)$.

Soit alors $\sigma = \left\{z_i \text{ , } i \in N\right\} \subset B_2$ une telle suite. Il existe une suite $\omega = (\omega_i)_i \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ telle que, pour toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H^\infty(B_2)$ vérifiant $f_n(z_i) = \omega_i$, $1 \leq i \leq n$, on ait

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_\infty = \infty .$$

Si σ est d'interpolation dans $H^2(B_2)$ de constante C, on a ([6] Proposition p. 26), en notant $\sigma_n = \left\{z_i, \ 1 \leq i \leq n\right\}$ $\omega^{(n)} = \left\{\omega_i \text{ , } 1 \leq i \leq n\right\}$,

$$\|\pi_{\sigma_n}(f_n)\| \leq C^2 \|\omega\|_\infty .$$

Si de plus $\|\omega\|_\infty \leq \frac{1}{C^2}$, ce que l'on peut supposer, $\|\pi_{\sigma_n}(f_n)\| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'où, pour tout n, $Q_{w^{(n)},\sigma_n}$ est une forme quadratique positive sur $\mathbb{C}^n$.

3. Cas du polydisque.

Δ_n désigne le polydisque unité de $\mathbb{C}^n$. On considère la mesure de Lebesgue sur le bord distingué $\mathbb{T}^n$ de Δ_n et la représentation π associée. On démontre, comme dans le cas de la boule B_n, que si $f \in H^\infty(\Delta_n)$, $\|f\|_\infty \leq 1$, si $\sigma = \{z_1 \dots z_k\} \subset \Delta_n$ où $z_i = (z_i^1 \dots z_i^n)$, si $f(z_i) = w_i$, Q_{w_σ} définie sur $\mathbb{C}^k$ par

$$Q_{w_\sigma}(t) = \sum_{ij=1}^{k} t_i \bar{t}_j \frac{1 - \bar{w}_i w_j}{(1-z_i^1 \overline{z_j^1})(1-\overline{z_i^2} z_j) \dots (1-\overline{z_i^n} z_j^n)}$$

est une forme quadratique positive.

La réciproque est dans ce cas aussi fausse. Le théorème 3 admet en effet le second corollaire suivant :

COROLLAIRE 2. <u>Il existe une suite</u> $\sigma \subset \Delta_2$ <u>qui est d'interpolation pour</u> $H^2(\Delta_2)$ <u>et qui n'est pas d'interpolation pour</u> $H^\infty(\Delta_2)$ <u>dans</u> $L^2(\mathbb{T}^2)$).

Comme dans le cas de la boule on déduit l'existence pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'une forme quadratique $Q_{w^{(n)},\sigma_n}$ positive sur $\mathbb{C}^n$ telle que si $f_n \in H^\infty(\Delta_2)$ $f_n(z_i) = \omega_i$, $z_i \in \sigma_n$, $\omega_i \in \omega^{(n)}$, $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_\infty = +\infty$. Toutefois, on obtient une réciproque du théorème de Schwarz-Pick si on considère toutes les mesures de probabilité portées respectivement par ∂B_n et $\mathbb{T}^n$, cf [6], chap. I, § 4.

4. Démonstration du théorème 3 et de ses corollaires.

a) λ est la mesure planaire sur D, $H^2(\lambda)$ est la fermeture de $A(D)$ dans $L^2(\lambda)$. Pour $z \in D$, $K_z(\zeta)$ est le noyau reproduisant au point z dans $H^2(\lambda)$. On note E_z le vecteur unitaire de $H^2(\lambda)$

$$E_z(\zeta) = \frac{K_z(\zeta)}{\|K_z\|} = \frac{1-|z|^2}{(1-\bar{z}\,\zeta)^2}.$$

Dans [6], on montre que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(z_n) \subset D$ est l'interpolation $I(C)$ pour $H^2(\lambda)$ si et seulement si l'opérateur S de $\ell^2(\mathbb{N})$ défini par la matrice $(\langle E_{z_n}, E_{z_k}\rangle)_{n,k}$ est bicontinu et vérifie : $\|S\| \leq C^2$, $\|S^{-1}\| \leq C^2$. Une suite d'interpolation de $H^\infty(D)$ est une suite d'interpolation pour $H^2(\lambda)$ [6].

b) Construction d'une suite d'interpolation de $H^2(\lambda)$ qui n'est pas d'interpolation pour $H^\infty(m)$.

Cette suite (σ) sera réunion de suites finies G_n de points situés sur un même cercle et équiréparties sur ce cercle

$$G_n = \left\{ z_k \quad |z_k| = 1-2^{-g(n)} \quad \operatorname{Arg} z_k = \frac{2k\pi}{2^{g(n)}} \qquad 0 \leq k < 2^{g(n)} \right\}$$

où g est une fonction strictement croissante. G_n est la $n^{\text{ième}}$ génération de la suite σ au sens de Garnett [9]. $\sigma = \bigcup_n G_n$ n'est pas une suite d'interpolation de $H^\infty(D)$. En effet $\sum_{z_k \in G_n} (1-|z_k|) = 1$ d'où la suite $\sum_{z_i\in\sigma} (1-|z_i|)$ est divergente. Par construction, chaque génération est un ensemble d'interpolation de $H^2(\lambda)$ pour une même constante C. On montre qu'on peut choisir une fonction g pour que σ soit d'interpolation pour $H^2(\lambda)$.

Démonstration. Soit S_p la matrice $(\langle E_{z_i}, E_{z_j}\rangle)_{ij}$, $z_i \in G_p$, $z_j \in G_p$.

S_p est bicontinue et $\|S_p\| \leq C^2$

$$\|S_p^{-1}\| \leq C^2.$$

On note T_n la matrice $(\langle E_{z_i}, E_{z_j}\rangle)_{ij}$, $z_i \in \bigcup_1^n G_p$, $z_j \in \bigcup_1^n G_p$. On démontre par récurrence que T_n est une matrice inversible. Supposons $\|T_n\| \leq K_n^2$ où $C^2 \leq K_n^2$

$$\|T_n^{-1}\| \leq K_n^2.$$

T_{n+1} est de la forme $\begin{pmatrix} T_n & G \\ G^\infty & S_{n+1} \end{pmatrix}$

où G est la matrice $(\langle E_{z_k}, E_{z_p}\rangle$, $z_k \in \bigcup_1^n G_j$, $z_p \in G_{n+1})$. Si $z_k \in G_j$, $z_p \in G_{n+1}$

$$|\langle E_{z_k}, E_{z_p}\rangle| = \frac{(1-|z_k|^2)(1-|z_p|^2)}{|1-\bar{z}_k z_p|^2}$$

$$\leq \frac{4\ 2^{-g(j)-g(n+1)}}{[1-(1-2^{-g(j)})(1-2^{-g(n+1)})]^2}$$

$$\leq 4\ 2^{g(j)-g(n+1)}$$

$$|\langle E_{z_k}, E_{z_p}\rangle|^2 \leq 16\ 2^{2g(j)-2g(n+1)}$$

$$\sum_{z_k \in G_j, z_p \in G_{n+1}} |\langle E_{z_k}, E_{z_p}\rangle|^2 \leq 16.2^{3g(j)-g(n+1)}$$

d'où

$$\sum_{z_k \in \bigcup_1^n G_j, z_p \in G_{n+1}} |\langle E_{z_k}, E_{z_p}\rangle|^2 \leq 16.2^{-g(n+1)} \left(\sum_1^n 2^{3g(j)}\right)$$

$$= \varepsilon^2(n).$$

La fonction g sera choisie telle que :

$$\sum_n \varepsilon(n) < \frac{1}{2C^2}.$$

La norme de Hilbert-Schmidt de la matrice G est inférieure à $\varepsilon(n)$.

Si $\lambda \in \ell^2(2^{g(1)} + 2^{g(2)} + \ldots + 2^{g(n)} + 2^{g(n+1)})$ alors $\lambda = \mu + \nu$ où :

$\mu \in \ell^2(2^{g(1)} + \ldots + 2^{g(n)})$, $\nu \in \ell^2(2^{g(n)})$

$$\|\lambda\|^2 = \|\mu\|^2 + \|\nu\|^2$$

$$\|T_{n+1}\lambda\|^2 = \|T_n\mu + G\nu\|^2 + \|G^\infty\mu + S_{n+1}\nu\|^2$$

$$\|T_{n+1}\lambda\|^2 \leq (K_n^2\|\mu\| + \varepsilon(n)\|\nu\|)^2 + (C^2\|\nu\| + \varepsilon(n)\|\mu\|)^2$$

$$\leq [K_n^2 + \varepsilon(n)]^2\|\lambda\|^2$$

de même

$$\|T_{n+1}(\lambda)\|^2 \geq \left[\frac{1}{K_n^2} - \varepsilon(n)\right]^2\|\lambda\|^2.$$

La matrice T_{n+1} de $\bigcup_1^{n+1} G_p$ vérifie donc

$$\|T_{n+1}\| \leq K_n^2 + \varepsilon(n)$$

$$\|T_{n+1}^{-1}\| \leq \frac{1}{\frac{1}{K_n^2} - \varepsilon(n)}.$$

La matrice T de $\bigcup_n G_n$ vérifiera donc

$$\|S\| \leq C^2 + \sum_n \varepsilon(n) \leq 2C^2$$

$$\|S^{-1}\| \leq \frac{1}{\frac{1}{C^2} - \sum_n \varepsilon(n)} \leq 2C^2$$

d'où $\bigcup_n G_n$ est une suite d'interpolation pour $H^2(\lambda)$.

c) Démonstration du corollaire 1.

Si $\sigma = \{z_i, \ i\in\mathbb{N}\} \subset D$ est d'interpolation pour $H^2(\lambda)$ et n'est pas d'interpolation pour $H^\infty(D)$, on définit

$$\tilde{\sigma} = \{(z_i, 0), \ i\in\mathbb{N}\} \subset B_2$$

$\tilde{\sigma}$ n'est pas d'interpolation pour $H^\infty(B_2)$ car si $g(z,\omega) \in H^\infty(B_2)$ interpole $\omega \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ sur $\tilde{\sigma}$, la fonction f définie par $f(z) = g(z,0)$ interpole $\omega \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ sur σ.

$\tilde{\sigma}$ est l'interpolation pour $H^2(B_2)$. En effet les vecteurs $e_{(z_i,0)}$ unitaires dans $H^2(B_2)$, homothétiques des noyaux de Cauchy-Szegö vérifient $\langle e_{(z_i,0)}, e_{(z_j,0)}\rangle = \langle E_{z_i}, E_{z_j}\rangle$. D'où les vecteurs (E_{z_i}) et $(e_{(z_i,0)})$ définissent la même matrice.

d) Démonstration du corollaire 2.

σ étant comme précédemment, on définit $\tilde{\tilde{\sigma}} = \left\{(z_i,z_i),\ \ i\in\mathbb{N}\right\} \subset \Delta_2$.

La démonstration est l'analogue de la démonstration du corollaire 1.

Bibliographie

[1] AHLFORS, L. V. Complex Analysis. Mc Graw Hill International Student Edition, 1973.

[2] PICK, G. Über die Beschränkungen analystischer Funktionen, welche durch vorgegebene Funktionswerke bewirkt werden. Math. Ann. 77 (1916), 7-23.

[3] NEVANLINNA, R. Über beschränkte Funktionen die in gegebenen Punkten vorgeschriebene weste annehmen. Ann. Acad. Sci. Fenn, serie A 13 (1919), nº 1.

[4] Sz-NAGY, B. et KORANYI, A. Relations d'un problème de Nevanlinna et Pick avec la théorie des opérateurs de l'espace hilbertien. Acta Math. Acad. Sci. Hungar 7 (1956).

[5] SARASON, D. Generalized interpolation in H^∞. Trans. Amer. Math. Soc. 127, nº 2 (1967).

[6] AMAR, E. Méthodes hilbertiennes et interpolation dans le spectre d'une algèbre de Banach. Analyse Harmonique d'Orsay 152 (1975).

[7] ADAMYAN, V. M., AROV, D. Z., KREIN, M. G. Infinite Hankel matrices and generalisations of the Caratheodory-Riesz problem and the F. Riesz problem. Funktional'Analiz. i Ego Prilozhen 2, n° 1 (1968).

[8] MARSCHALL, D. E. An elementary proof of the Pick-Nevanlinna interpolation theorem. Michigan Math. J. 21, n° 3 (1975).

[9] GARNETT, J. Interpolating sequences for bounded harmonic functions. Indiana Univ. Math. J. 21, no 3 (1971).