

# THÈSES DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD (1971-2012)

**JEAN-CLAUDE RAOULT**

*Le théorème de compactification de Nagata pour les espaces algébriques, 1974*

Thèse numérisée dans le cadre du programme de numérisation de la bibliothèque mathématique Jacques Hadamard - 2016

Mention de copyright :

Les fichiers des textes intégraux sont téléchargeables à titre individuel par l'utilisateur à des fins de recherche, d'étude ou de formation. Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale.

Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente page de garde.



# THÈSE

présentée

à l'université de Paris-Sud

centre d'Orsay

---

pour obtenir le titre de docteur troisième cycle

Spécialité : Géométrie algébrique

par

JEAN-CLAUDE RAOULT

Sujet de la thèse : *Le théorème de compactification de Nagata pour les espaces algébriques*

soutenue le 16 mai 1974 devant la commission d'examen :

MM.	MICHEL RAYNAUD	Président
	MICHEL DEMAZURE	Examineurs
	JEAN-LOUIS VERDIER	



## INTRODUCTION

LE plongement d'un espace affine dans un complété projectif est connu et utilisé depuis le XIX<sup>e</sup> siècle (Poncelet, Gergonne, Plücker, ...). Il n'y a guère, cette propriété a été étendue par Masayoshi Nagata aux variétés algébriques définies sur un corps, puis généralisée aux schémas séparés et de type fini sur une base noëthérienne [7]. Pierre Deligne, dans un papier non publié, en a donné une démonstration « modernisée » : il recouvre le schéma  $Y$  à compactifier par des ouverts quasi-projectifs denses, applique le lemme de Chow à  $Y$  relativement à chacun de ces ouverts et recolle les schémas obtenus — après force éclatements — en une compactification de  $Y$ .

Le premier pas de cette démonstration est malheureusement irréalisable si  $Y$  est un espace algébrique au sens de M. Artin [2]. On donne ici une démonstration en trois étapes du théorème de compactification (p. 9) : si  $Y$  est normal, on utilise le fait que l'une de ses fermatures intégrales est un schéma et que  $Y$  est quotient d'icelui sous l'action d'un groupe fini. Par un artifice, ledit schéma se plonge dans un schéma propre sur lequel opère le même groupe. Enfin, un résultat de Pierre Deligne, non publié mais cité par Knutson [6], permet de passer au quotient par un groupe fini, dans la catégorie des espaces algébriques.

Si  $Y$  est réduit, on le normalise, on compactifie le normalisé et on le pince par le conducteur de la normalisation (cf. la thèse de Daniel Ferrand [4]). Pour être complet, on a cru bon de donner quelques résultats sur les carrés cocartésiens, ou « sommes amalgamées », et de démontrer l'existence des sommes amalgamées de schémas affines. Les carrés semi-cartésiens y utilisés proviennent d'un cours de Claude Chevalley à l'I.H.P. (1965-1966). Cette partie n'étant pas proprement géométrique a été rejetée en appendice.

Dans le cas général où  $Y$  est seulement séparé et de type fini, on compactifie  $Y_{\text{red}}$  en  $\overline{Y}_{\text{red}}$  et on cherche à prolonger les nilpotents de  $O_Y$  au-dessus de  $\overline{Y}_{\text{red}}$ . Cela peut n'être pas possible d'emblée mais le devient après quelques éclatements. Plus que dans les deux premiers cas se mêlent ici morphismes ouverts (immersions, morphismes étales) et fermés (immersions, morphismes propres). Cette source supplémentaire de difficultés explique la longueur inattendue de la dernière partie.

Je voudrais exprimer à monsieur Raynaud ma reconnaissance pour son aide et pour la patience avec laquelle il a discerné les erreurs dans de précédentes rédactions ; et remercier, comme le permet la coutume, J-C Raoult pour la frappe du manuscrit.

# LE THÉORÈME DE COMPACTIFICATION DE NAGATA

Étant donné un espace algébrique séparé et de type fini sur une base, on appellera compactification de cet espace un espace algébrique propre dans lequel il est un ouvert schématiquement dense.

Le produit fibré de  $X$  et  $Y$  au-dessus de  $Z$  est noté  $X \times_Z Y$ . L'omission de  $Z$  implique que  $Z$  est l'objet final  $\text{Spec}(\mathbf{Z})$ .

Définie par la propriété duale, la somme amalgamée de  $X$  et  $Y$  au-dessous de  $Z$  est notée  $X +_Z Y$ , lorsqu'elle existe. L'omission de  $Z$  implique que  $Z$  est l'objet initial  $\emptyset$  : dans ce cas, la somme amalgamée est simplement la « somme », ou la réunion disjointe, de  $X$  et de  $Y$ .

## § 1. Le cas des espaces algébriques normaux

**PROPOSITION 1.** — *Soit  $Y$  un espace algébrique normal, quasi-compact, quasi-séparé et irréductible de point générique  $\eta$ . Alors il existe une extension finie galoisienne  $K$  de  $\mathbf{k}(\eta)$  telle que, si  $Z$  désigne l'espace algébrique fermeture intégrale de  $Y$  dans  $K$ , alors  $Z$  est un schéma.*

On considère  $Y$  comme quotient d'un schéma affine  $X$  par une relation d'équivalence étale [2],[6]. Le schéma  $X$  étant étale au-dessus de  $Y$ , les points maximaux  $x_i$  de  $X$  sont en nombre fini, ils sont au-dessus de  $\eta$  et  $\mathbf{k}(x_i)$  est une extension finie séparable de  $\mathbf{k}(\eta)$ . Soit alors  $K$  l'extension galoisienne de  $\mathbf{k}(\eta)$  engendrée par les  $\mathbf{k}(x_i)$  dans une clôture séparable de  $\mathbf{k}(\eta)$  ; soit  $Z$  la fermeture intégrale de  $Y$  dans  $K$  et  $f: Z \rightarrow Y$  le morphisme canonique. Pour que  $Z$  soit un schéma, il suffit qu'il le soit au voisinage de chacun de ses points. Soit donc  $z$  un point de  $Z$  et  $y = f(z)$ . Le groupe de Galois  $G$  de  $K$  sur  $\mathbf{k}(\eta)$  opère sur  $Z$  par  $Y$ -automorphismes et opère transitivement sur la fibre  $f^{-1}(y)$ . Il suffit donc de montrer que  $Z$  est un schéma au voisinage de l'un des points de  $f^{-1}(y)$ . Comme le morphisme  $X \rightarrow Y$  est surjectif, il existe un point  $x$  de  $X$  au-dessus de  $y$ . Soit  $X_i$  la composante irréductible de  $X$  passant par  $x$ , et  $U_i$  la fermeture intégrale de  $Y$  dans le corps des fractions  $\mathbf{k}(x_i)$ .

$$\begin{array}{ccc}
 & & Z \\
 & \swarrow & \downarrow \\
 X_i & \longrightarrow & U_i \\
 & \searrow & \downarrow \\
 & & Y
 \end{array}$$

D'après le théorème principal de Zariski, le morphisme  $X_i \rightarrow U_i$  est une immersion ouverte ([5] IV, 8.12.6). Le choix d'un plongement de  $\mathbf{k}(x_i)$  dans  $K$  permet de considérer  $Z$  comme la fermeture intégrale de  $U_i$  dans  $K$ . Alors  $Z \rightarrow U_i$  est surjectif, il existe un point de  $f^{-1}(y)$  au-dessus de  $x$  et  $Z \times_{U_i} X_i$  est un voisinage ouvert de ce point dans  $Z$ , isomorphe à la fermeture intégrale de  $X_i$  dans  $K$ , donc représentable, cqfd.

**COROLLAIRE.** — *Gardons les notations de la proposition 1 et soit  $G$  le groupe de Galois de  $K$  sur  $\mathbf{k}(\eta)$ . Alors  $G$  opère sur  $Z$  et  $Z \rightarrow Y$  est un quotient de  $Z$  sous l'action de  $G$ .*

Ici, on entend par « quotient de  $Z$  sous l'action de  $G$  » un objet initial dans la catégorie des flèches  $f: Z \rightarrow T$  où  $T$  est un espace algébrique et où  $fg = f$  pour tout automorphisme  $g$  de  $G$ .

*Remarques :* a) Rappelons que lorsque l'on exige que  $Z \rightarrow Z/G$  soit affine, alors  $Z/G$  est un schéma si, et seulement si, toute orbite de  $Z$  suivant  $G$  est contenue dans un ouvert affine.

b) Si  $Y$  est de type fini sur un schéma de base noëthérien, alors sa fermeture  $Z$  l'est aussi et  $Z \rightarrow Y$  est un morphisme fini ([3] V.1.6 prop. 18).

**PROPOSITION 2** — *Soit  $S$  un schéma noëthérien et  $Y$  un espace algébrique normal, séparé et de type fini sur  $S$ . Alors il existe une immersion d'image dense de  $Y$  dans un espace algébrique propre sur  $S$ .*

Les composantes irréductibles de  $Y$  sont disjointes et en nombre fini ; on raisonne sur chacune d'elles et on peut donc supposer  $Y$  irréductible. D'après le corollaire précédent,  $Y$  est quotient d'un  $S$ -schéma  $Z$  normal, séparé et de type fini, sous l'action d'un groupe fini  $G$ . Il existe une immersion ouverte  $i: Z \rightarrow Z'$  où  $Z'$  est propre sur  $S$  [7]. Par composition avec les automorphismes  $g$  de  $G$ , on obtient une famille finie d'immersions  $(ig)_{g \in G}$  ; d'où une immersion  $j: Z \rightarrow \prod_{g \in G} Z' = P$  où  $P$  est le produit fibré au-dessus de  $S$  de  $\text{Card}(G)$  copies de  $Z'$ . Or  $G$  opère à gauche sur ce produit par permutation des facteurs, et  $j$  est compatible avec les actions de  $G$  sur  $Z$  et sur  $P$ . Notons  $\bar{Z}$  l'adhérence schématique de l'image de  $j$ , qui est stable sous l'action de  $G$ . Comme fermé d'un schéma propre,  $\bar{Z}$  est encore propre. Si on note  $\bar{Y}$  l'espace algébrique  $\bar{Z}/G$ , quotient de  $\bar{Z}$  par  $G$  [6],  $Y$  est dense dans  $\bar{Y}$ . Comme  $S$  est noëthérien et  $\bar{Z}$  de type fini sur  $S$ ,  $\bar{Y}$  est aussi de type fini sur  $S$ , et on voit facilement qu'il est séparé (car  $G$  est fini) et que le morphisme  $\bar{Y} \rightarrow S$  est universellement fermé (car  $\bar{Z} \rightarrow \bar{Y}$  est surjectif), d'où le résultat.

## § 2. Le cas des espaces algébriques réduits

**PROPOSITION 1.** — *Soit  $P$  un espace algébrique noëthérien et séparé,  $F \rightarrow P$  une immersion fermée et  $f: F \rightarrow G$  un morphisme fini, où  $G$  est aussi noëthérien et séparé. Il existe un espace algébrique  $Q$  noëthérien et séparé, une immersion fermée  $G \rightarrow Q$  et un morphisme fini  $P \rightarrow Q$  tels que le carré résultant est cartésien et cocartésien.*

La démonstration est assez formelle lorsqu'on dispose du lemme suivant.

**LEMME.** — *Avec les notations de la proposition, il existe des recouvrements étales affines  $W$  de  $G$  et  $V$  de  $P$  dont les images réciproques au-dessus de  $F$  sont égales.*

En effet, soit  $y$  un point de  $G$  ; la fibre  $f^{-1}(y)$  est une réunion disjointe de points  $x_1, \dots, x_n$  de  $F$ . La limite projective des voisinages étales de  $y$  est un spectre hensélien et son image réciproque par  $f$  est décomposée en la somme des spectres locaux (henséliens) des  $x_i$ . La fibre étant finie, la décomposition se produit déjà au-dessus d'un voisinage étale  $W$  de  $G$ , qu'on peut choisir affine :

$$W \times_G F = U_1 + \dots + U_n$$

où  $U_i$  est un voisinage étale affine de  $x_i$  dans  $F$ .

Soit  $V$  un voisinage étale affine de  $x_1$  dans  $P$  et  $V_F$  son image réciproque au-dessus de  $F$ . Lorsque  $W'$  parcourt la catégorie des voisinages étales affines de  $y$  qui sont au-dessus de  $W$ ,

la limite projective des  $W' \times_W U_1$  est un hensélisé de  $F$  en  $x_1$ , et il existe donc déjà un  $W'$  tel que  $W' \times_W U_1$  domine  $V_F$ . Quitte à changer de notations, on peut supposer  $W' = W$ .

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & V_F & \longrightarrow & V \\
 & & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & & F & \longrightarrow & P \\
 & & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 W' \times_W U_1 & \longrightarrow & \sum U_i & \longrightarrow & F & \longrightarrow & P \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 W' & \longrightarrow & W & \longrightarrow & G & & 
 \end{array}$$

Maintenant,  $U_1$  est étale sur  $V_F$  : son anneau de sections est de la forme  $(A/I)[T_1, \dots, T_m]/J$  où  $A$  est l'anneau de sections de  $V$  et  $I$  est l'idéal de définition de  $F$  dans  $V$ . Il existe un voisinage de  $x_1$  où  $J$  est engendré par  $m$  polynômes  $\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_m$  de  $(A/I)[T_1, \dots, T_m]$ . Relevons chaque  $\bar{p}_i$  en  $p_i$  dans l'anneau  $A[T_1, \dots, T_m]$  et posons :

$$B = A[T_1, \dots, T_m]/(p_1, \dots, p_m).$$

Comme  $x_1$  appartient au fermé  $F$ ,  $\det(\partial p_i / \partial T_j)$  est inversible modulo un idéal contenu dans le radical de  $B_{x_1}$ , donc aussi dans  $B_{x_1}$ , donc dans un voisinage  $V$  de  $x_1$  dans  $\text{Spec}(B)$ . Ainsi  $V'$  est étale sur  $V$ . Mais comme  $f$  est fini, l'image dans  $G$  du fermé  $U_1 - U_1 \times_P V'$  est un fermé ne contenant pas  $y$ . Soit  $W_g$  un voisinage affine de  $y$  contenu dans le complémentaire. Son image réciproque dans  $U_1$  est un voisinage affine  $(U_1)_{\bar{b}}$  de  $x_1$ , où  $\bar{b} \in (A/I)[T_1, \dots, T_m]/J$ . En notant  $b$  un relèvement de  $\bar{b}$  dans  $B$ , on obtient ce qu'on cherchait :

$$W_g \times_G U_1 = (U_1)_{\bar{b}} = V_b \times_P U_1.$$

On opère ainsi en tout point de la fibre finie  $f^{-1}(y)$ . L'espace  $G$  étant noëthérien est ensuite recouvert par un nombre fini de voisinages  $W$ . On complète enfin le recouvrement de  $F$  ainsi obtenu en un recouvrement de  $P$  au moyen d'un recouvrement fini de  $P - F$ , qui est quasi-compact.

Soient donc maintenant  $V$  et  $W$  des recouvrements affines étales de  $P$  et de  $G$ , et  $U$  leur image réciproque au-dessus de  $F$ . On construit la somme amalgamée  $Z = V +_P W$  grâce à la proposition de l'appendice § 3 (ou voir [4]). De même, si  $V \times_P V$  et  $W \times_G W$  sont les relations d'équivalence sur  $V$  et  $W$  dont les quotients sont  $P$  et  $G$ , leur image au-dessus de  $U$  est la relation d'équivalence  $U \times_F U$ , et on construit la somme amalgamée de schémas affines

$$R = V \times_P V +_{U \times_F U} W \times_G W.$$

Les morphismes  $V \times_P V \rightarrow V \times V$  et  $W \times_G W \rightarrow W \times W$  sont des immersions fermées, et le morphisme somme  $R \rightarrow Z \times Z$  est une immersion fermée (appendice § 3, corollaire de la proposition). En la composant avec les deux projections de  $Z \times Z$ , on obtient deux morphismes  $R \rightarrow Z$  qui coïncident avec les projections  $V \times_P V \rightarrow V$  en-dehors de  $W$ , et avec les projections de  $W \times_G W$  au-dessus de  $W$ . Ce sont donc des morphismes étales ([4] 6.2 (iii) et (iv)b) ;  $R$  est une relation d'équivalence sur  $Z$  et le quotient est un espace algébrique  $Q$ . Les morphismes  $G \rightarrow Q$  et  $P \rightarrow Q$  sont respectivement une immersion fermée et un morphisme fini, car autant vaut pour  $W \rightarrow Z$  et  $U \rightarrow Z$ . L'espace  $Q$  est séparé puisque  $R \rightarrow Z \times Z$  est une immersion fermée ; et il est noëthérien comme réunion de deux

fermés  $G$  et  $f(P)$  qui sont noëthériens, le premier par hypothèse, le second parce qu'il est l'image d'un espace noëthérien par un morphisme fermé.

**COROLLAIRE.** — *Avec les notations de la proposition 1, si de plus  $P$  et  $G$  sont propres sur un anneau de base noëthérien, alors  $Q$  l'est également.*

Notons  $k$  l'anneau de base. On constate d'abord que tous les anneaux considérés plus haut sont des  $k$ -algèbres, et  $Q$  est bien au-dessus de  $k$ . Qu'il soit séparé a déjà été vu ; de plus, le morphisme  $P + G \rightarrow Q$  est surjectif, et  $Q$  est donc universellement fermé sur  $k$ . Il suffit donc de montrer que  $Z$  est de type fini sur  $k$ . Or si l'on décompose le morphisme de  $k$ -algèbres  $\Gamma(W, O_W) \rightarrow \Gamma(U, O_U)$  en un morphisme surjectif suivi d'une injection et si l'on construit le produit fibré  $\Gamma(Z, O_Z)$  en deux étapes, il correspond à la première une sous- $k$ -algèbre de  $\Gamma(V, O_V)$  sur laquelle  $\Gamma(V, O_V)$  est finie, et qui est donc de type fini sur  $k$  ([3] ch. V, § 1, n° 9, lemme 5), et à la seconde un anneau de type fini sur  $k$ , correspondant au schéma recollé de deux schémas le long d'un fermé commun ([1] remarque 1.1.5(ii)).

*Remarque.* En fait, on peut supposer que la base est un schéma noëthérien. En effet, si  $S_1, \dots, S_n$  est un recouvrement de la base  $S$  par des ouverts affines, la construction ci-dessus fournit une somme amalgamée  $Q_i$  au-dessus de chaque  $S_i$ . Au-dessus de  $S_i \cap S_j$  ( $i \neq j$ ) on obtient alors deux restrictions provenant de  $Q_i$  et  $Q_j$ ; mais ces restrictions sont isomorphes, d'après l'unicité à isomorphisme près de la somme amalgamée. Et comme ces isomorphismes sont uniques, ils se recollent au-dessus des intersections triples  $S_i \cap S_j \cap S_l$ . On peut alors en déduire un espace algébrique  $Q$  au-dessus de  $S$  en recollant les  $Q_i$ .

**PROPOSITION 2.** — *Soit  $Y$  un espace algébrique réduit, séparé et de type fini sur une base  $B = \text{Spec}(k)$  où  $k$  est soit  $\mathbf{Z}$ , soit un corps, soit un anneau local noëthérien complet. Il existe une immersion ouverte  $Y \rightarrow \bar{Y}$  où  $\bar{Y}$  est un espace algébrique propre sur  $B$ .*

La démonstration se fait par récurrence sur la dimension de  $Y$ . Si  $X$  est un normalisé de  $Y$ , le morphisme  $b: X \rightarrow Y$  est fini, vu les hypothèses faites sur  $k$ . Soit  $f: F \rightarrow G$  le conducteur de  $b$  [4], fini également. Comme  $Y$  est réduit,  $G$  est un fermé de  $Y$  distinct de  $Y$ , et la restriction de  $b$  au-dessus de l'ouvert non vide  $Y - G$  est un isomorphisme de  $X - F$  sur  $Y - G$ . L'espace  $X$ , étant normal et séparé, se plonge dans un espace algébrique propre  $\bar{X}$  (cf. § 1) ; d'autre part,  $G$  admet par hypothèse une compactification  $\bar{G}$ . Comme  $G$  et  $\bar{G}$  sont séparés, les graphes  $F \rightarrow F \times_B G$  et  $F \rightarrow F \times_B \bar{G}$  sont des immersions fermées et on identifie  $F$  avec son image. Soit  $\bar{F}$  l'adhérence schématique de  $F$  dans  $\bar{X}$ , et  $F'$  son adhérence schématique dans  $\bar{F} \times_B \bar{G}$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 F & \longrightarrow & F' & \longrightarrow & \bar{G} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 F \times_B \bar{G} & \longrightarrow & \bar{F} \times_B \bar{G} & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 F & \longrightarrow & \bar{F} & \longrightarrow & \bar{X}
 \end{array}$$

Le morphisme  $F' \rightarrow \bar{F}$  est propre et c'est une immersion au-dessus de  $F$ . Il existe un éclatement  $F$ -admissible  $F_1$  de  $F$  tel que le transformé strict de  $F'$  est isomorphe à  $F_1$  ([8] corollaire 5.7.12). Le morphisme  $F_1 \rightarrow \bar{G}$  est propre, et fini au-dessus de  $G$ . Il existe un



éclatement  $G$ -admissible  $G'$  de  $G$  tel que le transformé strict  $F_2$  de  $F_1$  est propre sur  $G'$  et de dimension relative nulle ([8] corollaire 5.7.10), donc fini.

Maintenant, le transformé strict  $F_2$  de  $F'$  s'obtient en éclatant dans  $\bar{F}$  des fermés contenus dans  $\bar{F} - F$ , et s'identifie au transformé strict de  $\bar{F}$  dans un éclatement  $P$  de  $\bar{X}$ , de centre inclus dans  $\bar{F} - F$ , donc  $X$ -admissible. On se trouve alors ramené à la situation suivante :

$$\begin{array}{ccc} F_2 & \rightarrow & P \\ \downarrow f' & & \\ G' & & \end{array}$$

où  $f'$  est fini, où la flèche horizontale est une immersion fermée et où  $P$  est propre sur  $B$ . D'après la proposition 1, il existe un espace algébrique  $Q$  propre sur  $B$ , isomorphe à  $P$  au-dehors de  $G'$  et contenant le fermé  $G'$ . Il contient alors  $Y$  comme un ouvert : c'est la compactification cherchée.

### § 3. Le cas général

On se donne un espace algébrique  $Y$  séparé et de type fini sur une base comme celle de la proposition précédente. On construit une compactification  $\bar{Y}_{\text{red}}$  de  $Y_{\text{red}}$ . On va montrer en trois étapes qu'on peut en déduire une compactification de  $Y$ .

a) Le cas affine.

Proposition 1. — *Soit  $X$  un schéma affine et de type fini sur un corps  $k$ ,  $U$  un ouvert affine de  $X$  et  $U \rightarrow V$  une immersion fermée où  $V$  est aussi affine et de type fini sur  $k$ . Alors il existe un carré cartésien comme ci-dessous où  $Y$  est un schéma affine et de type fini sur  $k$ , et où  $v$  et  $j$  sont des immersions respectivement ouverte et fermée.*

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{u} & X \\ \downarrow i & & \downarrow j \\ V & \xrightarrow{v} & Y \end{array}$$

Notons  $A, B, C$  les anneaux de sections de  $X, U, V$ , et considérons le carré cartésien et cocartésien de  $k$ -algèbres ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} B & \xleftarrow{r} & A \\ \uparrow p & & \uparrow q \\ C & \xleftarrow{s} & A \times_B C \end{array}$$

Il existe dans  $A$  un idéal  $I = (f_1, \dots, f_n)$  définissant le fermé complémentaire de  $U$ , c'est-à-dire qu'il existe des éléments  $b_1, \dots, b_n$  de  $B$  vérifiant

$$b_1 r(f_1) + \dots + b_n r(f_n) = 1$$

avec de plus que  $A_{f_i} \rightarrow B_{r(f_i)}$  est un isomorphisme pour tout  $i$ . Soit  $g_1, \dots, g_n$  des relèvements de  $f_1, \dots, f_n$  dans  $A \times_B C$ , et  $c_1, \dots, c_n$  des relèvements de  $b_1, \dots, b_n$  dans  $C$ . On a :

$$c_1 s(g_1) + \cdots + c_n s(g_n) = 1 + m \quad \text{où } m \in \text{Ker}(p).$$

Autrement dit,  $\text{Spec}(C_{s(g_1)}), \dots, \text{Spec}(C_{s(g_n)})$  et  $\text{Spec}(C_m)$  recouvrent  $\text{Spec}(C)$ .

Considérons  $A \times_B C$  comme la limite inductive filtrante de ses sous- $k$ -algèbres de type fini  $D_\lambda$ , et notons  $q_\lambda$  et  $s_\lambda$  les homomorphismes induits par  $q$  et  $s$  sur  $D_\lambda$ . À partir d'un certain rang,  $q_\lambda$  est surjectif, et  $\text{Spec}(A_\lambda) \rightarrow \text{Spec}(D_\lambda)$  est donc une immersion fermée. Dès que  $D_\lambda$  contient une famille de générateurs de  $\text{Ker}(p)$ , on a :

$$B = C/\text{Ker}(p) = C/\text{Ker}(q_\lambda)C = C \otimes_{D_\lambda} A,$$

et le carré des spectres est cartésien. À partir d'un certain rang,  $D_\lambda$  contient  $g_1, \dots, g_n, m$ . Considérons les morphismes de  $k$ -algèbres de type fini

$$(s_\lambda)_{g_j} : (D_\lambda)_{g_j} \rightarrow C_{s_\lambda(g_j)}$$

À la limite, on a un isomorphisme : en effet,  $(A \times_B C)_{g_j}$  est plat sur  $A \times_B C$ , le carré ci-dessous est cartésien, et  $A_{f_j} \rightarrow B_{r(f_j)}$  est un isomorphisme.

$$\begin{array}{ccc} B_{r(f_j)} & \leftarrow & A_{f_j} \\ \uparrow & & \uparrow \\ C_{s(g_j)} & \leftarrow & (A \times_B C)_{g_j} \end{array}$$

On sait par ailleurs (cf. appendice § 3) que  $(A \times_B C)_m \rightarrow C_m$  est également inversible. Il existe alors un certain rang  $\lambda$  au-delà duquel  $(s_\lambda)_{g_1}, \dots, (s_\lambda)_{g_n}, (s_\lambda)_m$  sont des isomorphismes. On prend pour  $Y$  le spectre d'un tel  $D_\lambda$ .

b) le cas des schémas.

**PROPOSITION 2.** — *Soit  $X$  un schéma de type fini sur  $k$ ,  $U \rightarrow V$  une immersion fermée surjective où  $V$  est un schéma de type fini sur  $k$ . Alors il existe un carré cartésien comme ci-dessous, où  $Y$  est un schéma de type fini sur  $k$ , et où  $v$  et  $j$  sont des immersions respectivement ouverte affine et fermée surjective.*

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{u} & X \\ \downarrow i & & \downarrow j \\ V & \xrightarrow{v} & Y \end{array}$$

Soit  $\{X_1, \dots, X_n\}$  un recouvrement de  $X$  par des ouverts affines. Sur chacun d'eux, l'immersion  $u$  induit l'immersion ouverte affine  $U_i \rightarrow X_i$ . Notons  $V_i$  l'ouvert de  $V$  de même espace réduit sous-jacent que  $U_i$ . Grâce au (a), on construit pour tout  $i$  un carré cartésien comme ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc} U_i & \longrightarrow & X_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ V_i & \longrightarrow & Y_i \end{array}$$

On va montrer par récurrence sur  $n$  qu'il est possible de recoller les  $Y_i$  en un schéma  $Y$  convenable, en les modifiant légèrement.

Pour  $n = 1$ , c'est le cas (a). Supposons avoir obtenu des immersions fermées surjectives  $X_1 \rightarrow Y_1$  et  $X_2 \cup \dots \cup X_n = X'_2 \rightarrow Y'_2$ . Sur l'intersection  $X_1 \cap X'_2$  existent deux schémas  $Y_{12}$  et  $Y_{21}$  induits respectivement par  $Y_1$  et  $Y'_2$ , qui coïncident par construction sur l'ouvert  $X_1 \cap X'_2 \cap U = U_1 \cap U'_2$  avec  $U'_2 = X'_2 \cap U$ . Soit  $V_2$  l'ouvert de  $V$  de même espace réduit sous-jacent que  $U'_2$ . Il existe d'unique immersions  $V_1 \cap V'_2 \rightarrow Y_{12} \times_k Y_{21} = P$  et  $X_1 \cap X'_2 \rightarrow P$  qui rendent le diagramme ci-dessous commutatif.

$$\begin{array}{ccccc}
 U_1 \cap U'_2 & \longrightarrow & V_1 \cap V'_2 & \longrightarrow & Y_{12} \\
 \downarrow & & \downarrow & \searrow & \nearrow \\
 X_1 \cap X'_2 & \longrightarrow & P & \longrightarrow & Y_{21}
 \end{array}$$

Quitte à réduire le produit à un ouvert, on peut supposer que l'immersion  $X_1 \cap X'_2 \rightarrow P$  est fermée. Soient alors  $J(X)$ ,  $J(U)$  et  $J(V)$  les idéaux de  $O_P$  définissant les fermés  $X_1 \cap X'_2$  et les adhérences schématiques de  $U_1 \cap U'_2$  et  $V_1 \cap V'_2$ . On a les inclusions ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc}
 J(U) & \supseteq & J(X) \\
 \cup & & \cup \\
 J(V) & \supseteq & 0
 \end{array}$$

Mais  $J(U)$  et  $J(V)$  définissent le même fermé réduit et ont donc même racine : il existe alors un (plus petit) entier  $n$  tel qu'on a  $J(U)^n \subseteq J(V)$  et par suite  $J(X)^n \subseteq J(V)$ . Soit  $W$  le quotient de  $P$  par  $J(X)^n$ , de même espace réduit sous-jacent que  $X_1 \cap X'_2$ . L'immersion  $V_1 \cap V'_2 \rightarrow P$  se factorise par  $W$ . En notant  $I$  l'idéal de  $O_W$  qui définit l'adhérence schématique de  $V_1 \cap V'_2$ , et  $J$  l'idéal de  $O_W$  qui définit  $X_1 \cap X'_2$ , on a  $I \subseteq J$  au-dessus de  $V_1 \cap V'_2$ . Il existe alors un sous-idéal de  $J$  (de type fini) prolongeant  $I$  au-dessus de  $W$ . Soit  $Z$  le quotient de  $W$  par ce sous-idéal. Il s'insère dans un diagramme commutatif comme ci-dessous, où les flèches horizontales sont des immersions fermées surjectives et les flèches verticales des immersions ouvertes.

$$\begin{array}{ccccc}
 U_1 \cap U'_2 & \longrightarrow & V_1 \cap V'_2 & & Y_{12} \\
 \downarrow & & \downarrow & \nearrow & \\
 X_1 \cap X'_2 & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & Y_{21}
 \end{array}$$

Notons enfin  $I_1$  et  $I_2$  les idéaux nilpotents, quasi-cohérents et de type fini de  $O_{Y_{12}}$  et  $O_{Y_{21}}$  définissant  $Z$ . Comme  $X'_2$  est une réunion finie d'ouverts affines, les immersions  $Y_{12} \rightarrow Y_1$  et  $Y_{21} \rightarrow Y_2$  sont quasi-compactes. Il est alors possible de prolonger  $I_1$  et  $I_2$  en des idéaux de  $O_{Y_1}$  et  $O_{Y_2}$  nilpotents, quasi-cohérents et de type fini, nuls sur l'ouvert découpé par  $V$ . Ils définissent des fermés  $Y'_1$  et  $Y'_2$  qu'on peut recoller le long de leur ouvert commun  $Z$ . Le schéma  $Y$  ainsi obtenu contient l'ouvert  $V = V_1 \cup V'_2$  et le fermé  $X = X_1 \cup X'_2$ , et il possède donc les propriétés exigées.

c) Le cas des espaces algébriques.

**PROPOSITION 3.** — *Soit  $X$  un espace algébrique de type fini sur  $k$ ,  $U \rightarrow X$  une immersion ouverte et  $U \rightarrow V$  une immersion fermée surjective. Alors il existe un carré cartésien comme ci-dessous où  $X'$  est obtenu par un éclatement  $U$ -admissible de  $X$ , où  $Y$  est un espace algébrique de type fini sur  $k$  et où  $v$  et  $j$  sont des immersions respectivement ouverte et fermée surjective.*

On sait qu'il existe une suite finie de sous-espaces ouverts de  $X$  :

$$\emptyset = X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_n = X$$

et un voisinage étale surjectif  $Z_i \rightarrow X_i$  de  $X_i - X_{i-1}$  pour  $i = 1, \dots, n$  (cf. [8] 5.7.6). Remarquons dès maintenant que cette assertion est encore vraie quand on remplace  $X$  par l'éclaté le long d'un fermé  $F$ , et les  $X_i$  et  $Z_i$  par leurs images réciproques au-dessus de l'éclaté. En effet, les immersions ouvertes, les morphismes étales, surjectifs et les isomorphismes sont stables par changement de base. De plus, l'éclatement commute aux changements de base plats, et l'image réciproque de  $X_i$  (resp.  $Z_i$ ) est isomorphe à l'éclaté de  $X_i$  (resp.  $Z_i$ ) le long du fermé de  $X_i \cap F$  (resp.  $Z_i \times_X F$ ).

On fait ici une démonstration par récurrence sur  $n$ .

Si  $n = 1$ ,  $X = X_1$  est un schéma, ainsi que  $U$ , et on se ramène à une immersion ouverte affine  $U \rightarrow X'$  au moyen d'un éclatement  $U$ -admissible  $X' \rightarrow X$ . L'ouvert  $U$  apparaît alors comme le complémentaire du support d'un diviseur. On conclut par le cas (b).

Si  $n > 1$ , on suppose par récurrence avoir obtenu au cran  $n - 1$  un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} U \cap X_{n-1} & \rightarrow & X'_{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ V_{n-1} & \rightarrow & Y_{n-1} \end{array}$$

où  $V_{n-1}$  est l'ouvert de  $V$  d'espace réduit sous-jacent  $U \cap X_{n-1}$  et où  $X'_{n-1} \rightarrow X_{n-1}$  est un éclatement  $U \cap X_{n-1}$ -admissible de  $X_{n-1}$ . L'éclaté  $X'_{n-1}$  s'identifie, comme on l'a vu plus haut, à l'image réciproque de  $X_{n-1}$  dans un éclatement  $U$ -admissible  $X' \rightarrow X$  (par exemple, l'éclatement de l'adhérence schématique dans  $X$  du fermé qu'on éclatait dans  $X_{n-1}$ ). Quitte à faire un nouvel éclatement centré dans le fermé complémentaire de  $U \cup X'_{n-1}$ , on peut supposer que l'immersion ouverte  $U \cup X'_{n-1} \rightarrow X'_n = X'$  est affine. De plus, le morphisme  $X' \rightarrow X$ , composé de deux éclatements  $U$ -admissibles, est un éclatement  $U$ -admissible ([8] 5.1.4). Si on note par  $p: Z'_n \rightarrow X'$  le voisinage étale de  $X' - X'_{n-1}$  obtenu par image réciproque au-dessus de  $X'$  du voisinage  $Z_n \rightarrow X$ , l'immersion ouverte  $p^{-1}(U \cup X'_{n-1}) \rightarrow Z'_n$  est donc affine. D'après le cas (b), il existe un carré cartésien comme ci-dessous

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U \cup X'_{n-1}) & \rightarrow & Z'_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ W & \rightarrow & T \end{array}$$

où  $W$  est obtenu par relèvement infinitésimal des algèbres étales, où  $W \rightarrow T$  est une immersion ouverte affine et où  $Z'_n \rightarrow T$  est une immersion fermée surjective. Soit  $R$  la relation d'équivalence qui sur  $W$  a pour graphe  $W \times_V W$ , et qui sur le complémentaire de  $W$  se réduit à l'égalité. Cette relation est encore étale : en effet, son graphe s'obtient en recollant  $W \times_V W$  et la diagonale de  $T \times_k T$  le long de la diagonale de  $W \times_V W$ , qui est bien

un ouvert — isomorphe à  $W$  — dans chacun d'eux. Notons encore  $R$  ce graphe. Comme  $Z'_n$  est un voisinage étale de  $X' - X'_{n-1}$ , on vérifie immédiatement que

$$R_{\text{red}} = Z'_n \times_{X'} Z'_n,$$

et par suite que le quotient  $Y$  de  $T$  par  $R$  a bien les propriétés annoncées, cqfd.

*Remarque.* Avec les notations de la proposition 3, si  $X$  est séparé (resp. propre), il en va de même de  $Y$ . En effet,  $X$  est alors séparé (resp. propre), et  $Y_{\text{red}} = X'$ .

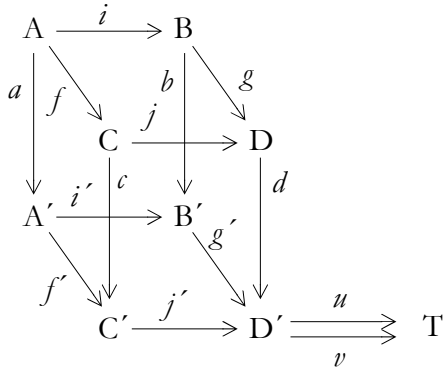
La dernière proposition et la remarque ci-dessus concluent l'étude, en posant  $Y = V$ ,  $Y_{\text{red}} = U$  et  $\bar{Y}_{\text{red}} = X$ , d'où le théorème.

**THÉORÈME.** — *Soit  $Y$  un espace algébrique séparé et de type fini sur  $k$ , où  $k$  est l'anneau des entiers relatifs, ou un corps, ou un anneau local nothérien complet. Alors  $Y$  se plonge dans un espace algébrique propre sur  $k$ .*

## APPENDICE

### § 1. Compléments sur les carrés cocartésiens

PROPOSITION 1. — *Si dans un cube commutatif comme ci-dessous le carré du bas est cocartésien et si  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sont des épimorphismes, alors  $d$  est aussi un épimorphisme.*



Si  $u, v : D' \rightarrow T$  sont deux morphismes tels que  $ud = vd$ , alors  $udg = vdg = ug'b = vg'b$ . Comme  $b$  est un épimorphisme, on a  $ug'b = vg'b$ . Comme  $c$  est un épimorphisme, on a  $uj' = vj'$ . Enfin comme  $a$  est un épimorphisme, on déduit  $uj'f' = vj'f' = ug'i' = vg'i'$ . Le diagramme  $C' \leftarrow A' \rightarrow B'$  s'envoie dans  $T$ , et comme le carré du bas est cocartésien, il existe une flèche unique  $h : D' \rightarrow T$  qui rend les triangles auxquels on pense commutatifs :  $h = u = v$ .

PROPOSITION 2. — *Soit  $gi = jf : A \rightarrow D$  un carré cocartésien d'ensembles. Le carré commutatif d'ensembles déduit par changement de base  $D' \rightarrow D$  est encore cocartésien.*

Comme le produit fibré commute aux sommes :  $(B+C) \times_D D' = (B \times_D D') + (C \times_D D')$ , il suffit de montrer qu'il commute aux conoyaux : que dans un diagramme comme ci-dessous où  $w$  est un conoyau de la double flèche  $(u, v)$  et où le carré de droite et le rectangle sont cartésiens, alors  $w'$  est un conoyau de la double flèche  $(u', v')$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 E & \xrightarrow[u]{v} & F & \xrightarrow{w} & G \\
 e \uparrow & & \downarrow f & & \downarrow g \\
 E' & \xrightarrow[u']{v'} & F' & \xrightarrow{w'} & G'
 \end{array}$$

On sait que

$$\begin{aligned}
 F' &= \{(y, \xi') \in F \times G' ; w'(y) = g(\xi')\}, \\
 E' &= \{(x, \xi') \in E \times G' ; uu(x) = vv(x) = g(\xi')\}.
 \end{aligned}$$

Vu que  $uu = vv$  et que le rectangle est cartésien, il est déjà clair que  $w'u' = w'v'$ , ou encore que la relation d'équivalence définie sur  $F'$  par  $w'$  est moins fine que la relation d'équivalence engendrée par  $u'$  et  $v'$ . Mais de plus, si  $(y_1, \xi'_1)$  et  $(y_2, \xi'_2)$  dans  $F'$  ont même image par  $w'$ , c'est-à-dire que  $\xi'_1 = \xi'_2$ , alors on a  $w'(y_1) = g(\xi'_1) = g(\xi'_2) = w'(y_2)$  par définition de  $F'$ . Les éléments  $y_1$  et  $y_2$  appartiennent à la même classe d'équivalence pour l'équivalence engendrée par  $u$  et  $v$  : il existe des suites finies d'éléments  $x_i$  de  $E$  et  $t_i$  de  $F$  avec

$$u(x_i) = t_i \quad \text{et} \quad v(x_i) = t_{i+1}$$

avec  $t_1 = y_1$  et  $t_n = y_2$ . Alors les suites  $(x_i, z_i)$  et  $(t_i, z_i)$  relient  $(y_1, z_1)$  et  $(y_2, z_1)$ , cqfd.

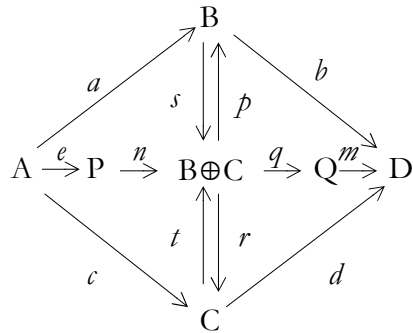
En particulier, dans le cas de l'injection canonique  $D' \rightarrow D$  d'une partie  $D'$  de  $D$ , la restriction du carré aux images réciproques dans  $D'$  est encore cocartésien.

**PROPOSITION 3.** — *Soit  $gi = jf$  un carré cocartésien de schémas où tous les morphismes sont quasi-compacts et quasi-séparés, et où le morphisme  $B+C \rightarrow D$  est universellement submersif. Alors le carré déduit par changement de base plat  $D' \rightarrow D$  est encore cocartésien.*

- a) Pour les ensembles, c'est la proposition précédente.
- b) Pour la topologie, c'est dans les hypothèses.
- c) Pour les faisceaux d'anneaux, c'est dû à la platitude de  $D'$  sur  $D$  et au fait que la formation de l'image directe par un morphisme quasi-compact et quasi-séparé commute aux changements de bases plats.

## § 2. Carrés semi-cartésiens

Soit  $ba = dc$  un carré commutatif dans une catégorie abélienne.



**PROPOSITION 1.** — *Soit  $ba = dc$  un carré commutatif et construisons la somme directe  $B \oplus C$  avec ses injections  $s, t$  et ses projections  $p, r$ , puis le produit fibré  $(P, q_1, q_2)$  de  $(b, d)$  par le noyau  $n$  de  $bp - dr$ , enfin la somme amalgamée  $(Q, t_1, t_2)$  de  $(a, c)$  par le conoyau  $q$  de  $sa + tc$ . Alors il existe d'unique flèches  $e : A \rightarrow P$  et  $m : Q \rightarrow C$  rendant les triangles que l'on pense commutatifs, d'où le diagramme ci-dessus. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $e$  est un épimorphisme,
- (ii)  $m$  est un monomorphisme,
- (iii) la suite  $0 \rightarrow P \rightarrow B \oplus C \rightarrow Q \rightarrow 0$  est exacte,
- (iv) la suite  $A \rightarrow (sa + tc) B \oplus C \rightarrow (bp - dr) C$  est exacte.

En construisant  $P$  et  $Q$ , on pose

$$\begin{aligned} q_1 &= pn, & u &= qs, \\ q_2 &= rn, & v &= -qt. \end{aligned}$$

Il existe donc un unique  $e$  tel que  $a = q_1e$  et  $c = q_2e$ ; et un unique  $m$  tel que  $b = mu$  et  $d = mv$ . Composant à droite  $\text{id}_{B \oplus C} = sp + tr$  par  $ne$ , on trouve  $ne = sa + tc$ . Donc  $q$  est conoyau de  $ne$ . Ceci étant, on a :

- (i)  $\Leftrightarrow$  (iii) : Pour que la suite du (iii) soit exacte, il faut et il suffit que  $q$  soit conoyau de  $n$ ,

c'est-à-dire que  $e$  soit un épimorphisme.

(iii)  $\Leftrightarrow$  (ii) : La condition (iii) étant conservée par dualité est équivalente à (ii) qui est duale de (i).

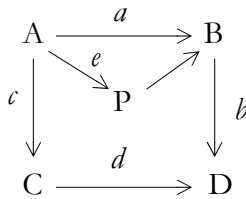
(iii)  $\Rightarrow$  (iv) : parce que  $n$  est un monomorphisme et  $q$  un épimorphisme.

(iv)  $\Rightarrow$  (iii) : parce que le conoyau  $q$  de  $ne$  doit être conoyau du noyau de  $mq$ , c'est-à-dire de  $n$ , d'où (iii), cqfd.

**DÉFINITION.** — Un carré commutatif est dit *semi-cartésien* s'il vérifie les conditions de la proposition 1.

Par exemple, un carré cartésien, ou cocartésien, est semi-cartésien.

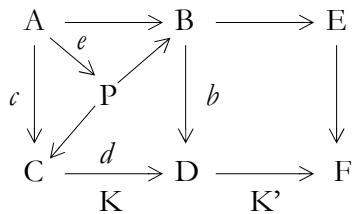
**PROPOSITION 2.** — Dans un carré semi-cartésien  $ba = dc$ , si  $a$  est un monomorphisme, alors le carré est cartésien et  $d$  est un monomorphisme. Si  $d$  est un épimorphisme, alors  $a$  aussi et le carré est cocartésien.



On note  $P$  le produit fibré de  $b$  et  $d$ . Comme dans la proposition 1, il s'ensuit une unique flèche  $e : A \rightarrow P$ . Comme  $a$  est un monomorphisme,  $e$  en est aussi. Comme  $c$  est un épimorphisme, il est inversible et le carré donné est cartésien. Soit alors  $j : N \rightarrow C$  une flèche noyau de  $d$  et  $0 : N \rightarrow B$  la flèche nulle. Il existe une unique flèche  $u : N \rightarrow A$  telle que  $j = cu$  et  $0 = au$ . Mais  $a$  est un monomorphisme, donc  $u = 0$  et par suite  $j = 0$ , cqfd.

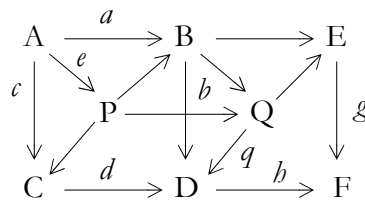
**PROPOSITION 3.** — (L'ordre des carrés est celui dans lequel ils sont écrits)

- 1)  $K$  et  $K'$  semi-cartésiens  $\Rightarrow K K'$  semi-cartésien.
- 2)  $K K'$  semi-cartésien et  $K'$  cartésien  $\Rightarrow K$  semi-cartésien.
- 3)  $K K'$  semi-cartésien et  $K$  cocartésien  $\Rightarrow K$  semi-cartésien



2) Soit  $P$  un produit fibré de  $(b,d)$ . Le carré PEFC est cartésien comme composé de carrés cartésiens. Comme  $KK'$  est semi-cartésien, l'unique flèche  $e : A \rightarrow P$  qui rend le diagramme commutatif est un épimorphisme et  $K$  est bien semi-cartésien.

3) Dual de 2).



1) Soit  $Q$  un produit fibré de  $(g,b)$  et  $P$  un produit fibré de  $(q,d)$ . Le carré PEFC est alors cartésien comme composé de carrés cartésiens et il existe une unique flèche  $e : A \rightarrow P$  qui



rend le diagramme commutatif. Comme  $K'$  est semi-cartésien, la flèche  $B \rightarrow Q$  est un épimorphisme. Comme  $K$  est semi-cartésien et  $PQDC$  est cartésien, le carré  $ABQP$  est semi-cartésien d'après 2) et  $e$  est un épimorphisme d'après la proposition 2, cqfd.

Cette proposition montre en particulier qu'on obtient des carrés semi-cartésiens en composant des carrés cartésiens et cocartésiens. En fait, c'est toujours le cas, comme le montre la proposition suivante.

**PROPOSITION 4.** — *Soit  $ba = dc$  un carré semi-cartésien,  $a = rp$  et  $d = sq$  les décompositions de  $a$  et  $d$  en épimorphismes suivis de monomorphismes, enfin  $f$  l'unique application telle que  $fp = qc$  et  $sf = br$ . Alors le carré  $fp = qc$  est cocartésien et le carré  $br = sf$  est cartésien.*

$$\begin{array}{ccccc}
 K & \xrightarrow{m} & A & \xrightarrow{a} & B \\
 \downarrow k & & \downarrow c & \searrow p & \downarrow b \\
 & & & E & \\
 & & & \downarrow f & \\
 & & & F & \\
 & & \swarrow q & \searrow s & \\
 L & \xrightarrow{n} & C & \xrightarrow{d} & D
 \end{array}$$

On construit successivement les noyaux  $m$  et  $n$  de  $a$  et  $d$ , d'où une unique flèche  $k$  telle que  $nk = cm$ . Puis on construit le conoyau  $p$  de  $m$ , et le conoyau  $q$  de  $nk$ , d'où les flèches  $r$  et  $s$ .

Montrons que le carré  $fp = qc$  est cocartésien. Soit  $u$  et  $v$  des flèches telles que  $up = vc$ . Alors  $0 = upm = vcm = mnk$  et comme  $q$  est conoyau de  $nk$ , il existe une unique flèche  $z$  telle que  $v = zq$ . Elle vérifie de plus  $u = zf$  puisque  $up = vc = zqc = zfp$  et que  $p$  est un épimorphisme.

Donc en vertu de la proposition 2, 3), le carré  $br = sf$  est semi-cartésien. Et comme  $r$  est un monomorphisme, ce carré est cartésien et  $s$  est un monomorphisme. La décomposition  $sq$  est donc bien la décomposition de  $d$  en épimorphisme suivi d'un monomorphisme, cqfd.

En corollaire, on peut remarquer que, comme  $q$  a été défini comme le conoyau de  $nk$  et qu'il est aussi celui de  $n$ , c'est que  $k$  est un épimorphisme.

### § 3. Carrés cocartésiens de schémas affines

**PROPOSITION.** — *Un carré cartésien d'anneaux  $ba = dc$  où  $b$  est surjectif est transformé par passage aux spectres en un carré cartésien et cocartésien de schémas.*

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{a} & B & \longrightarrow & E \\
 \downarrow c & & \downarrow b & & \downarrow \\
 C & \xrightarrow{d} & D & \longrightarrow & F \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 G & \longrightarrow & H & \longrightarrow & L
 \end{array}$$

Le carré I est cartésien dans la catégorie des A-modules, a fortiori semi-cartésien. Comme  $b$  est surjectif, I est aussi cocartésien et  $c$  est aussi surjectif (cf. proposition 2). Le carré des spectres est donc déjà cartésien.

Les morphismes déduits de  $b$  et  $\hat{c}$  sont des immersions fermées, en particulier injectives. Et même,  $a$  induit un isomorphisme de  $\text{Spec}(B) - V(N)$  sur  $\text{Spec}(A) - V(M)$  en notant M et N les noyaux de  $b$  et  $c$  ; en effet, M et N sont isomorphes et pour  $t \in M$ , on a :

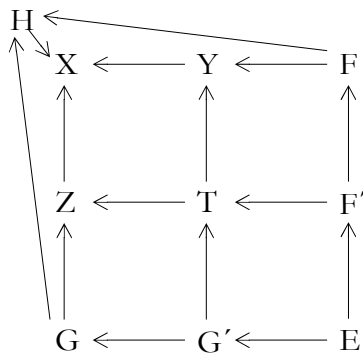
$$A_t = (tA)_t \xrightarrow{\sim} (tB)_t = B_t$$

Le carré des spectres est alors cocartésien dans la catégorie des ensembles.

Montrons que la topologie de  $\text{Spec}(A)$  est la topologie finale définie par  $\text{Spec}(a)$  et  $\text{Spec}(c)$ . Soit Z une partie de  $\text{Spec}(A)$  dont les images réciproques dans  $\text{Spec}(B)$  et dans  $\text{Spec}(C)$  sont des fermés d'anneaux E et G. Leurs images réciproques dans  $\text{Spec}(D)$  sont des fermés d'anneaux F et H. En posant  $L = F \otimes_D H$ , on adjoint trois carrés cocartésiens au carré initial, et le carré composé est donc cocartésien. Si on note T le produit fibré  $G \times_L E$ , l'unique flèche  $A \rightarrow T$  qui rend le diagramme commutatif est un épimorphisme de A-modules (cf. I). En passant aux spectres, il correspond à T la somme amalgamée (en tant qu'ensemble) de  $\text{Spec}(E)$  et de  $\text{Spec}(G)$  au-dessous de  $\text{Spec}(T)$ , savoir Z (cf. proposition 1 du § 1), et au morphisme  $A \rightarrow T$  une immersion fermée.

Que le carré de faisceaux d'anneaux soit cartésien vient de la platitude du A-module  $A_P$  pour tout idéal premier P de A, cqfd.

**COROLLAIRE.** — Notons  $X = \text{Spec}(A)$ ,  $Y = \text{Spec}(B)$ ,  $Z = \text{Spec}(C)$  et  $T = \text{Spec}(D)$  le carré déduit du carré I ci-dessus par passage aux spectres, et soient F et G des fermés de Y et de Z dont les images réciproques  $F'$  et  $G'$  au-dessous de Z sont homéomorphes. Notons E leur produit fibré  $F' \times_Z G'$  et  $H = F +_E G$  la somme amalgamée de F et G au-dessous de E. Alors l'unique morphisme  $H \rightarrow Y$  qui rend le diagramme ci-dessous commutatif est une immersion fermée :



Ce n'est autre que la partie topologique de la démonstration.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. ANANTHARAMAN : « Schémas en groupes, espaces homogènes et espaces algébriques sur une base de dimension un », thèse, université d'Orsay et *Mem. Soc. Math. France*, vol. 33, Paris, 1973.
- [2] M. ARTIN : « The implicit function theorem in algebraic geometry », *Proc. Bombay colloquium*, Oxford University Press (1968).
- [3] N. BOURBAKI : *Algèbre commutative*, Hermann.
- [4] D. FERRAND : « Conducteur, descente et pincement », thèse, université de Paris.
- [5] A. GROTHENDIECK, DIEUDONNÉ : *E.G.A.*, Publ. Math. de l'IHES.
- [6] D. KNUTSON : « Algebraic Spaces », *Lecture Notes in Math.* 203, Springer Verlag.
- [7] M. NAGATA : « Imbedding of an abstract variety in a complete variety », *J. Math. Kyoto Univ.*, 1962 ;  
« Generalisation of the imbedding problem », *J. Math. Kyoto Univ.*, 1963.
- [8] M. RAYNAUD, L. GRUSON : « Critères de platitude et projectivité, 1<sup>re</sup> partie », *Inventiones mathematica*, vol. 13, Springer Verlag.
- [9] C.S. SESHADRI : « Some results on the quotient space by an algebraic group of automorphisms », *Math. Ann.* vol. 149, 1963, p. 286-301.