FACULTE DES SCIENCES DE
L'UNIVERSITE DE PARIS
ORSAY

1967-1968

SEMINAIRE DE GEOMETRIE ALGEBRIQUE

-:-:-:-:-:-

Exposé nº 1

TORES COMPLEXES, VARIETES ABELIENNES.

par J. Giraud

-:-:-:-:-:-

§ 1 . Variétés abéliennes.

Définition 1.1. On appelle tore réel (resp. complexe) le quotient d'un espace vectoriel réel (resp. complexe) par un sous-groupe discret D de rang maximum.

On a donc une suite exacte de groupes de Lie réels (resp. complexes)

$$0 \longrightarrow D \longrightarrow T \xrightarrow{\pi} X \longrightarrow 0 \quad , \quad X = T/D \quad ,$$

que l'on peut d'ailleurs reconstituer à partir de X, car T s'interprète comme l'espace tangent à l'origine et π comme l'application exponentielle. On notera que T est également un revêtement universel de X, ce qui identifie D au groupe fondamental de X. Nous utiliserons constamment ces notations et nous dispenserons le plus souvent de le rappeler.

Théorème 1.2. Soit $X = T/D$ un tore complexe. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) X est une variété analytique projective.

(ii) il existe une forme hermitienne négative non dégénérée H sur T dont la partie imaginaire A est entière sur $D \times D$.

Nous énoncerons plus bas un théorème de Kodaira (2.2) dont nous déduirons ensuite (1.2) grâce à quelques résultats sur la cohomologie des tores (3.7). En fait, comme nous verrons, il est à peu près trivial que (i) implique (ii) et l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i) sera démontrée dans l'exposé IV grâce à la théorie des fonctions thêta sans recours au théorème de Kodaira. Nous n'utiliserons pas (1.2) avant qu'il ne soit prouvé dans l'exposé IV et, jusque là, appellerons <u>variété abélienne</u> un tore complexe qui satisfait à la condition (ii). Joint au théorème de Chow [1] , [2], le théorème ci-dessus nous enseigne que toute variété abélienne X est munie d'une structure de variété algébrique complexe caractérisée par la condition que la structure de variété analytique complexe qui s'en déduit soit celle de X. On obtient ainsi un groupe algébrique complexe X_{al} qui est <u>connexe</u>, <u>lisse</u> et <u>propre</u> ; c'est ce que l'on appelle un $\mathbb{C}$-schéma abélien. Réciproquement nous verrons plus tard que tout $\mathbb{C}$-schéma abélien X est commutatif et projectif ; le groupe analytique X_{an} qui s'en déduit est donc un tore complexe projectif, c'est-à-dire une variété abélienne. Utilisant à nouveau [2] , on en déduit que <u>la catégorie des $\mathbb{C}$-schémas abéliens est équivalente à celle des variétés abéliennes</u>.

Terminons cette introduction par quelques commentaires sur la condition (1.2 (ii)). Notons qu'une forme hermitienne h est déterminée par sa partie imaginaire a car on a

$$h(x,y) = a(ix,y) + ia(x,y) \quad , \quad i^2 = -1 \quad ;$$

bien entendu, a est $\mathbb{R}$-bilinéaire alternée et satisfait aux conditions précisées par le lemme que voici.

<u>Lemme</u> 1.3. Soient T un espace vectoriel complexe de dimension finie et a une

forme $\underline{\underline{R}}$-bilinéaire alternée à valeurs réelles définie sur T. Les conditions suivantes sont équivalentes

(i) il existe une forme hermitienne h sur T dont a est la partie imaginaire ;

(ii) pour tout $(x,y) \in T \times T$, on a $a(ix,iy) = a(x,y)$.

Nous dirons qu'une telle forme a est <u>de type</u> $(1,1)$; nous dirons qu'une forme de type $(1,1)$ est <u>négative</u> s'il en est ainsi de la forme hermitienne h qu'elle définit et nous dirons qu'elle est <u>de type kählérien</u> si h est négative non dégénérée, ce qui signifie que, pour tout $x \in T$, $x \neq 0$, on a $a(ix,x) < 0$ ou encore $a(x,ix) > 0$.

1.3.1. Notons que la forme $k(x,y) = a(x,iy) + ia(x,y)$ attachée à une forme de type $(1,1)$ par [W] p. 15 est $\underline{\underline{C}}$-linéaire par rapport à la seconde variable et satisfait à $k(x,y) = -h(y,x)$.

1.3.2. Soit $X = T/D$ un tore complexe. On appelle <u>forme de Riemann</u> sur X une forme $\underline{\underline{R}}$-bilinéaire alternée de type $(1,1)$ sur T qui est négative (éventuellement dégénérée)

Exprimons maintenant la condition (1.2 (ii)) en termes de "<u>matrices de Riemann</u>".

<u>Proposition</u> **1.4.** Soient g un entier, $\Omega \in M_{g,2g}(\underline{\underline{C}})$ une matrice dont les vecteurs colonnes $\omega_1,\ldots\ldots,\omega_{2g}$ sont linéairement indépendants sur $\underline{\underline{R}}$ et D le réseau de $\underline{\underline{C}}^g$ engendré par ceux-ci. Pour que le tore complexe $X = \underline{\underline{C}}^g/D$ soit une variété abélienne, il faut et il suffit qu'il existe une matrice antisymétrique de déterminant non nul $A \in M_{2g}(\underline{\underline{Z}})$ telle que

(1) $\Omega \check{A}\, \Omega' = 0$

(2) $i\bar{\Omega}\check{A}\,\Omega'$ est une matrice hermitienne négative non dégénérée.

Notons que (2) signifie que $i\Omega\check{A}\,\bar{\Omega}'$ est une matrice hermitienne positive non dégénérée

La transposée d'une matrice M est notée M', l'inverse de celle-ci est notée $\check{M}$. Par définition, $\underline{\underline{C}}^g/D$ est une variété abélienne, s'il existe une forme de type Kählerien a qui est entière sur D. La matrice A de a par rapport à la base $\omega_1,\ldots\ldots,\omega_{2g}$ est nécessairement non dégénérée ; par suite, il suffit de prouver que, pour toute matrice A comme dans l'énoncé, les conditions (1) et (2) expriment que la forme a dont la matrice par rapport à $\omega_1,\ldots\ldots,\omega_{2g}$ est A, est de type Kählérien. Pour cela, désignons par U la partie réelle de Ω et posons $\Omega = U + iV$, $W = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$. Soit $e = (e_1,\ldots, e_g)$ la base canonique de $\underline{\underline{C}}^g$. La matrice de a rapportée à la base $\underline{e} = (e_1,\ldots,e_g,ie_1,\ldots,ie_g)$ de $\underline{\underline{C}}^g$ sur $\underline{\underline{R}}$ est alors $B=\check{W}A\check{W}^{-1}$. Pour éviter de calculer W^{-1}, notons que a est de type kählérien si et seulement si il en est de même de la forme $\check{a}$ dont la matrice rapportée à $\underline{e}$ est $\check{B}$ [considérer l'automorphisme dont la matrice dans la base $\underline{e}$ est B et remarquer que la matrice dans la base $\underline{e}$ de l'homothétie de rapport i est $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$].

On a donc

$$\check{B} = W\check{A}W' = \begin{pmatrix} U\check{A}U' & U\check{A}V' \\ V\check{A}U' & V\check{A}V' \end{pmatrix},$$

et la condition (1.3 (ii)) s'écrit $J\check{B} = \check{B}J$, c'est-à-dire, $0 = U\check{A}V' + V\check{A}U' = U\check{A}U' - V\check{A}V'$ qui n'est autre que (1). Si cette condition est satisfaite, la matrice dans la base $\underline{e}$ de la forme hermitienne k dont $\check{a}$ est la partie imaginaire est $H = i\bar{\Omega}\check{A}U'$; d'après (1), on a $2H = i\bar{\Omega}\check{A}\,\Omega'$, d'où la conclusion. On prendra garde que la forme hermitienne attachée à $i\bar{\Omega}A\,\Omega'$ n'est pas celle définie par a.

<u>Remarque</u>. Tout tore complexe de dimension 1 est une variété abélienne. En

effet, si h est une forme hermitienne négative non dégénérée, et si a est sa partie imaginaire, $a(\omega_1,\omega_2)$ est non nul dès que le rapport des vecteurs ω_1 et ω_2 n'est pas réel. En prenant pour ω_1 et ω_2 une base du réseau, on en déduit que $h/|a(\omega_1,\omega_2)|$ est une forme de Riemann non dégénérée.

§ 2 . Un théorème de KODAIRA.

Définition 2.1. Soit X une variété analytique complexe. On appelle structure Kählérienne sur X une forme différentielle fermée à valeurs réelles ω sur X telle que, pour tout $x \in X$, la forme $\underline{\underline{R}}$-bilinéaire alternée ω_x sur l'espace tangent T_x à X au point x soit de type Kählérien (1.3). On appelle structure de Hodge une structure Kählérienne ω dont la classe $\overline{\omega} \in H^2(X,\underline{\underline{R}})$ appartient à l'image de $H^2(X,\underline{\underline{Z}})$.

Malgré les apparences, cette définition est en accord avec celle de [W] p. 41, voir (1.3.1).

On appelle variété Kählérienne (resp. de Hodge) une variété analytique complexe munie d'une structure Kählérienne (resp. de Hodge). Dans cette définition, la classe $\overline{\omega} \in H^2(X,\underline{\underline{R}})$ de la forme différentielle ω est définie grâce au théorème de De Rham qui dit que, sur une variété différentiable paracompacte, la cohomologie du faisceau constant $\underline{\underline{R}}$ se calcule grâce au complexe des formes différentielles extérieures (Godement [3] p. 181).

2.1.1. Pour éviter les ambiguïtés de signe, gênantes lorsque l'on parle de positivité, précisons que, si $\underline{\Omega}^*$ désigne le complexe des faisceaux de formes différentielles extérieures à valeurs réelles, et Ω^* le complexe formé par ses sections, le morphisme

(1) $$H^n(\Omega^*) \longrightarrow H^n(X,\underline{\underline{R}})$$

que nous considérons est celui qu'induit un morphisme quelconque $i : \underline{\Omega}^* \longrightarrow I^*$, où I^* est une résolution injective du faisceau constant $\underline{\underline{R}}$. En le multipliant par $(-1)^{n(n+1)/2}$, on trouve, d'après ([6] p. 92) le morphisme induit par le cobord itéré

(2) $$H^0(X,\underline{\Omega}^n_f) \longrightarrow H^n(X,\underline{\underline{R}})$$

attaché à la suite exacte

(3) $$0 \longrightarrow \underline{\underline{R}} \longrightarrow \underline{\Omega}^0 \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow \underline{\Omega}^n_f \longrightarrow 0 ,$$

où $\underline{\Omega}^n_f$ désigne le faisceau des formes différentielles fermées de degré n. L'application (2) est calculée explicitement dans [W] pour $n = 1$ et $n = 2$. Par suite, la classe que nous attachons à une forme est l'opposée de celle considérée dans [W]. D'après [4] p. 257, les morphismes (1) transforment le produit extérieur des formes différentielles en le cup-produit des classes de cohomologie.

<u>Théorème</u> 2.2. (Kodaira [5]). Pour qu'une variété analytique complexe compacte soit projective, il faut et il suffit qu'elle admette une structure de Hodge.

Nous nous contenterons de prouver la partie triviale du théorème (la réciproque sera prouvée dans l'exposé V). Il est clair qu'une sous-variété d'une variété de Hodge en est une autre et il nous suffira donc de munir l'espace projectif complexe de dimension r d'une structure de Hodge. Notons X cet espace et considérons la suite exacte de faisceaux sur X

(1) $$0 \longrightarrow \underline{\underline{Z}} \longrightarrow \underline{O}_X \xrightarrow{\underline{e}} \underline{O}^*_X \longrightarrow 0 ,$$

où $\underline{O}_X$ (resp. $\underline{O}^*_X$) désigne le faisceau des fonctions holomorphes (resp. holomorphes inversibles) sur X et où $\underline{e}(z) = \exp(2\pi i\, z)$. Soit $k \in H^1(X,\underline{O}^*_X)$ la classe du fibré en droites canoniques $\underline{O}_X(1)$ et soit c sa classe caractéristique, c'est-à-dire, par définition, l'image de k par le composé

(2) $$H^1(X,\underline{O}^*_X) \xrightarrow{\delta} H^2(X,\underline{\underline{Z}}) \xrightarrow{\iota} H^2(X,\underline{\underline{R}}) ,$$

où δ est le second cobord attaché à la suite exacte (1) et où ι est induit par l'inclusion $\underline{\underline{Z}} \longrightarrow \underline{\underline{R}}$. Il nous suffira de trouver une structure Kählérienne de classe c, car, par construction, ce sera une structure de Hodge.

<u>Proposition</u> 2.3. Soit $(x_o, x_1, \ldots, x_r)$ un système de coordonnées homogènes de l'espace projectif complexe X de dimension r. Il existe une unique forme différentielle Ω sur X telle que, pour $0 \leq u \leq r$, on ait

$$X_u = \frac{i}{2\pi} d'd''\mathrm{Log}\Big(\sum_{0 \leq v \leq r} |x_v/x_u|^2\Big) ,$$

où $\{X_u = x \in X \,\big|\, x_u(x) \neq 0\}$. De plus, Ω est fermée, réelle, de type Kählérien et sa classe de cohomologie est c. En particulier, Ω est une <u>structure de Hodge</u> sur X.

On définit dans X_u une forme η_u par

$$\eta_u = \frac{i}{2\pi} d'\mathrm{Log}\Big(\sum_{0 \leq v \leq r} |x_v/x_u|^2\Big) ,$$

ce qui a un sens car $\sum |x_v/x_u|^2 \geq 1$. Dans $X_{uv} = X_u \cap X_v$, on a

$$\eta_v - \eta_u = \frac{i}{2\pi} d'\mathrm{Log}\, |x_u/x_v|^2$$

$$= \frac{i}{2\pi} d'\mathrm{Log}(x_u/x_v . \overline{x_u/x_v}) .$$

Notons maintenant que si X' est un ouvert simplement connexe contenu dans X_{uv} et si f est une détermination de $\mathrm{Log}(x_u/x_v)$, on a, dans X',
$\eta_v - \eta_u = \frac{i}{2\pi} d'\, f\bar{f} = \frac{i}{2\pi} d'f$ car $\bar{f}$ est antiholomorphe ; par abus de langage, on écrira

$$\eta_v - \eta_u = \frac{i}{2\pi} d'\mathrm{Log}(x_u/x_v) .$$

Donc $\eta_v - \eta_u$ est une forme holomorphe, donc $d''(\eta_v - \eta_u)$ est nulle dans X_{uv}, ce qui, par recollement, prouve l'existence d'une forme Ω telle que

(1) $$\Omega | X_u = -d''\, \eta_u = -d\, \eta_u$$

$$\eta_v - \eta_u = \frac{1}{2\pi i} d\mathrm{Log}(x_v/x_u) .$$

Notons que Ω est évidemment <u>fermée</u> ; elle est réelle, car pour toute forme a, on a $\overline{d'd''a} = -d'd''\bar{a}$. Prouvons que la classe de cohomologie de Ω est la classe caractéristique de $\underline{O}_X(1)$. Rappelons à ce propos que x_u est une section de $\underline{O}_X(1)$ sur X_u ; selon Bourbaki [9] p. 65, formule (4), <u>la classe de cohomologie attachée à $\underline{O}_X(1)$ est donc celle du cocycle</u> $c_{u,v} = x_v/x_u$. Puisque X est paracompact, il existe un recouvrement $\underline{X}' = (X'_a)$, $a \in A$, de X, une application $f : A \longrightarrow [0,r]$ telle que $X'_a \subset X_{f(a)}$, $a \in A$, et des fonctions holomorphes $F_{a,b}$ définies dans $X'_{ab} = X'_a \cap X'_b$ tels que, pour tout $(a,b) \in A \times A$, on ait, dans X'_{ab}, $\underline{e}(F_{a,b}) = x_{f(b)}/x_{f(a)}$. La classe dans $H^2(X,\underline{\underline{Z}})$ du cocycle

$$d \in Z^2(\underline{X}',\underline{\underline{Z}}) \quad , \quad d_{abc} = F_{bc} - F_{ac} + F_{ab} \quad ,$$

est donc la classe caractéristique $\delta(k) \in H^2(X,\mathbf{Z})$ du fibré $\underline{O}_X(1)$. Par ailleurs, d'après les formules (1), on a $\Omega|X'_a = -d\eta_{f(a)}$ et $\eta_{f(b)} - \eta_{f(a)} = dF_{a,b}$, d'où il résulte que la classe de d dans $H^2(X,\underline{\underline{R}})$ est celle de la forme Ω (cf. 2.1.1).

Il reste à démontrer que Ω est de type Kählérien. Soit $x \in X$ et soit $u \in [0,r]$ tel que $x_u(x) \neq 0$. On a, dans X_u, des fonctions holomorphes $f_v = x_v/x_u$, $0 \leq v \leq r$, telles que

(2) $$\Omega|X_u = \frac{1}{2\pi i} d''d'\mathrm{Log}\Big(\sum_{0 \leq v \leq r} f_v\overline{f_v}\Big) .$$

Posons $A = \sum_{0 \leq v \leq r} f_v\overline{f_v}$ et $a_{v,w} = f_v df_w - f_w df_v$; on déduit de (2) les formules

$$X_u = \frac{1}{2\pi iA^2} \sum_{v,w} (f_w\overline{f_w}\,\overline{df_v}\wedge df_v - \overline{f_v}f_w\overline{df_w}\wedge df_v)$$

$$= \frac{1}{4\pi A^2} \sum_{v,w} \Big(\frac{1}{2i}\ \overline{a_{v,w}}\wedge a_{v,w}\Big) .$$

Posant $B = A(x)$ et $b_{v,w} = a_{v,w}(x)$, la formule (3) montre que $\Omega(x)$ est la partie imaginaire de la forme hermitienne H sur l'espace tangent T_x à X en x définie par

$$H(t,t') = \frac{-1}{4\pi A^2} \sum_{v,w} b_{v,w}(t)\overline{b_{v,w}(t')} \ .$$

Celle-ci est évidemment négative ; elle est non dégénérée, car les formes $b_{v,w}$ engendrent le dual de l'espace vectoriel complexe T_x puisque parmi elles se trouvent les formes $b_{u,v} = df_v$, $0 \leqslant v \leqslant r$, $v \neq u$, qui forment une base de cet espace.

C.Q.F.D.

Remarque 2.4. Soient X une variété analytique complexe et L un module inversible sur X . Soient X_i , $i \in I$, des ouverts recouvrant X et $f_i \in L(X_i)$, $i \in I$, des sections ne s'annulant pas. Le raisonnement fait plus haut montre que, si l'on a une 2-forme réelle Ω sur X et des 1-formes η_i sur X_i , $i \in I$, la classe de Ω est la classe caractéristique de L dès que l'on a $\Omega | X_i = d \quad _i$ et $\eta_j - \eta_i = \frac{1}{2\pi i}\, d\mathrm{Log}(f_u/f_v)$.

§ 3 . Cohomologie des tores.

Pour tout anneau A , tout A-module M et toute A-algèbre B , on note $\mathrm{Alt}_A^*(M,B)$ l'algèbre graduée des formes multilinéaires alternées sur M à valeurs dans B . Soit $T = X/D$ un tore et soit $\pi : T \longrightarrow X$ la projection. L'algèbre des formes différentielles réelles sur X s'identifie à celle des fonctions de classes C^∞ sur X à valeurs dans $\mathrm{Alt}_{\mathbb{R}}^*(T,\mathbb{R})$ lesquelles s'interprètent comme des fonctions de classe C^∞ sur T admettant D comme groupe de périodes ; parmi celles-ci, les fonctions constantes correspondent aux formes invariantes par translation ; celles-ci sont donc fermées. En associant à $f \in \mathrm{Alt}_{\mathbb{R}}^p(T,\mathbb{R})$, $p \in \mathbb{N}$, l'unique forme différentielle F sur X , invariante par translation, dont la valeur à l'origine est f , on définit donc une application

$$(1) \qquad a : \mathrm{Alt}_{\mathbb{R}}^*(T,\mathbb{R}) \longrightarrow H^*(X,\mathbb{R}) .$$

<u>Théorème</u> 3.1. L'application (1) est un isomorphisme d'algèbres. L'application $i : H^*(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(X,\mathbb{R})$ est injective. Pour que l'image par a d'une forme $f \in \mathrm{Alt}_{\mathbb{R}}^p(T,\mathbb{R})$ soit <u>entière</u> [c'est-à-dire appartienne à l'image de i], il faut et il suffit que f soit entière sur D^p .

On trouvera dans [W] p. 104 une démonstration fort élégante de ce résultat, à ceci près qu'elle ne montre pas que i est injective. Il est inutile de reproduire cette démonstration ; aussi en donnerons-nous une autre (3.5.1) qui nous permettra également de calculer la cohomologie de X à l'aide de celle du groupe D .

Pour tout faisceau F sur X , on notera π^*F son image inverse par la projection $\pi : T \longrightarrow X$ et on posera $F(T) = \pi^*F(T)$. On fait opérer le groupe D sur $F(T)$ par la formule $(uf)(z) = f(z+u)$, $u \in D$, $f \in F(T)$, $z \in T$, à laquelle on donne un sens en considérant que f est une section de l'espace étalé attaché à π^*F. Nous désignerons encore par $F(T)$ le D-module ainsi obtenu. On a des isomorphismes évidents :

(1) $$b : H^0(X,F) \xrightarrow{\sim} H^0(D,F(T)).$$

Lemme 3.2. Il existe une unique famille de morphismes de foncteurs

(2) $$b_n : H^n(D,F(T)) \longrightarrow H^n(X,F) \quad , \quad n \in \underline{\underline{N}} \; ,$$

définis sur la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur X et à valeurs dans celle des groupes abéliens telle que,

(a) b_0 soit l'inverse de l'isomorphisme b

(b) pour tout suite exacte $0 \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 0$ de faisceaux de groupes abéliens sur X telle que la suite de groupes $0 \longrightarrow F(T) \longrightarrow G(T) \longrightarrow H(T) \longrightarrow 0$ soit exacte, les diagrammes ci-dessous soient commutatifs

(2) $$\begin{array}{ccc} H^n(D,H(T)) & \xrightarrow{b_n} & H^n(X,F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^{n+1}(D,F(T)) & \xrightarrow[b_n]{} & H^{n+1}(X,F) \end{array} \qquad n \in \underline{\underline{N}} \; ,$$

où les flèches verticales sont les opérateurs cobords.

De plus, pour tout faisceau de groupes abéliens F sur X, il existe une suite spectrale

(3) $$H^p(D,H^q(T,\pi^*F)) \Longrightarrow H^*(X,F)$$

dont les "edge-homomorphisms" sont les b_n.

De l'avis du rédacteur, la démonstration la plus simple de ce résultat s'obtient en notant que le morphisme $\pi : T \longrightarrow X$ est couvrant dans le topos des espaces étalés au-dessus de X et en explicitant la suite spectrale qui relie la cohomologie de Cech de ce morphisme couvrant à celle du topos (Verdier [7]).

Les lecteurs qui ont une raison sérieuse de ne pas partager cette conviction connaissent depuis longtemps ce résultat et il est inutile de leur fournir une référence.

Il résulte du lemme que, pour tout faisceau constant F, les b_n sont des isomorphismes. En effet, on a $H^q(T,\pi^*F) = 0, q > 0$, car T est contractile.

Proposition 3.2.1. Soient F un faisceau de groupes abéliens sur X et $\underline{X} = (X_i)$, $i \in I$, un recouvrement de X. Soient $c \in Z^1(C^*(\underline{X},F))$ un 1-cocycle de $\underline{X}$ à valeurs dans F et $f \in Z^1(D,F(T))$ un 1-cocycle du complexe des cochaines inhomogènes de D à valeurs dans $F(T)$. S'il existe des sections $u_i \in F(X_i)$ telles que $u_j - u_i = c_{ij}$ et telles que $u_i'(t+u) = u_i'(t) + \varsigma(t,u), t \in \pi^{-1}(X_i), u \in D$, où u_i' est la restriction de u_i à $\pi^{-1}(U_i)$, alors l'image par $b_n : H^1(D,F(T)) \longrightarrow H^1(X,F)$ de la classe de f est l'opposée de celle de c.

D'après [6] p. 92, la classe de c est l'opposée de l'image de c par le premier opérateur cobord attaché à la suite exacte $0 \longrightarrow F \longrightarrow \underline{C}^0(\underline{X},F) \longrightarrow Z^1\underline{C}^*(\underline{X},F) \longrightarrow 0$, où $\underline{C}^*(\underline{X},F)$ désigne le complexe (de faisceaux) de Cech attaché au recouvrement $\underline{X}$ et au faisceau F. Les sections u_i permettent de calculer ce cobord grâce à la cohomologie $H^*(D, \,.\,)$, d'où la conclusion.

3.3. Soit $e_1,\ldots,e_N$ une base du $\underline{\underline{Z}}$-module D. A tout D-module M, on associe le complexe obtenu en munissant $\mathrm{Alt}^*_{\underline{\underline{Z}}}(D,M)$ de la différentielle qui, à une forme alternée f de degré p, associe la forme δf qui satisfait à

$$(\delta f)(e_{i_1},\ldots,e_{i_{p+1}}) = \sum_{1 \leq q \leq p+1} (-1)^{q+1}(e_{i_q}-1)f(e_{i_1},\ldots,\widehat{e_{i_q}},\ldots,e_{i_{p+1}}),$$

$1 \leq i_1 < i_2 \ldots\ldots < i_{p+1} \leq N$. Puisque D est libre, on obtient ainsi un foncteur exact défini sur la catégorie des D-modules , à valeurs dans celle des complexes de groupes abéliens, d'où, en passant à l'homologie, un δ-foncteur exact sur la catégorie des D-modules , d'où un morphisme de δ-foncteurs

(1) $$c_n : H^n(D,M) \longrightarrow H^n(\mathrm{Alt}^*_{\underline{\underline{Z}}}(D,M)) \quad , \quad n \in \underline{\underline{N}} \ ,$$

caractérisé, d'après Grothendieck [4] p. 141 et 68, par la condition d'induire l'isomorphisme évident en degré 0 . Les c_n sont des <u>isomorphismes</u> ; en effet, d'après loc. cit., il suffit de prouver que le but des c_n est un δ-foncteur effaçable, ce qui résulte de [8] p. 187 ou de [6] p. 193.

3.3.1. En particulier, <u>si</u> D <u>opère</u> <u>trivialement</u> <u>sur</u> M , la différentielle du complexe introduit plus haut est nulle et c_n induit un isomorphisme

(2) $$c_n : H^n(D,M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Alt}^n_{\underline{\underline{Z}}}(D,M) \quad , \quad n \geqslant 0 \ .$$

<u>Proposition</u> 3.3.2. Soient M un D-module et $f : D \longrightarrow M$ un 1-cocycle du complexe des cochaines inhomogènes attaché à M . L'application linéaire $F : D \longrightarrow M$ caractérisée par $F(e_i) = f(e_i)$, $1 \leqslant i \leqslant N$, satisfait à $\delta F = 0$ et sa classe dans $H^1(\mathrm{Alt}^*_{\underline{\underline{Z}}}(D,M))$ est l'image par c_n de celle de f .

On sait que le complexe simplicial $\underline{C}^n(M) = \mathrm{Appl}(D^{n+1},M)$ est une résolution de M , que $C^*(M) = H^0(D,\underline{C}^*(M))$ est le complexe des cochaines homogènes, isomorphe à celui des cochaines inhomogènes, et que la 1-cochaine inhomogène f attachée à une cochaine homogène g est $f(u) = g(0,u)$. Par ailleurs, d'après [6] p. 92, la classe de cohomologie attachée à un cocycle homogène $g \in C^1(M)$ est l'opposée de $\Delta(g)$, où $\Delta : H^0(D,Z^1\underline{C}^*(M)) \longrightarrow H^1(D,M)$ est le premier opérateur cobord attaché à la suite exacte de D-modules $0 \longrightarrow M \longrightarrow \underline{C}^0(M) \longrightarrow Z^1\underline{C}^*(M) \longrightarrow 0$. En calculant ce cobord grâce aux complexes $\mathrm{Alt}^*_{\underline{\underline{Z}}}(D, .)$, on trouve le résultat annoncé.

<u>Lemme</u> 3.4. Désignons encore par $\underline{\underline{R}}$ le faisceau constant sur X et le D-module trivial définis par $\underline{\underline{R}}$. Pour tout $n \in \underline{\underline{N}}$, les deux composés du diagramme ci-dessous se déduisent l'un de l'autre par multiplication $(-1)^n$.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Alt}^n_{\underline{\underline{R}}}(T,\underline{\underline{R}}) & \xrightarrow{\ a_n\ } & H^n(X,\underline{\underline{R}}) \\ {\scriptstyle j}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle b_n} \\ \mathrm{Alt}^n_{\underline{\underline{Z}}}(D,\underline{\underline{R}}) & \xrightarrow[c_n^{-1}]{} & H^n(D,\underline{\underline{R}}) \end{array} .$$

Le composé $b_n \circ c_n^{-1}$ ne dépend pas de la base choisie pour définir c_n.

Bien entendu, j est l'application induite par l'inclusion $D \subset T$; c'est donc un isomorphisme, ce qui prouve que la dernière assertion résulte de la première. Prouvons celle-ci. Soit $f \in \mathrm{Alt}^n_{\underline{\underline{R}}}(T,\underline{\underline{R}})$; d'après (2.1.1), $(-1)^{n(n+1)/2} a_n(f)$ est l'image de la forme différentielle invariante F sur X dont la valeur à l'origine est f, par le cobord itéré

(1) $$\Delta : H^0(X,\underline{\Omega^n_f}) \longrightarrow H^n(X,\underline{\underline{R}})$$

attaché à la suite exacte de faisceaux sur X

(2) $$0 \longrightarrow \underline{\underline{R}} \longrightarrow \Omega^0 \longrightarrow \cdots\cdots \ \Omega^{n-1} \longrightarrow \Omega^n_f \longrightarrow 0 .$$

Nous devons donc prouver que

(3) $$(-1)^{n(n+1)/2}\Delta(F) = (-1)^n i(f) \quad ,$$

où $i(f)$ est la classe de cohomologie attachée au cocycle $j(f)$. Or l'image réciproque I^* sur T de la résolution (2) est l'analogue relatif à T. Comme la cohomologie de T à valeurs dans les faisceaux qui composent I^* est triviale, les sections de I^* forment une suite exacte de D-modules. D'après (3.2 (b)), on peut donc calculer le cobord itéré Δ grâce à la cohomologie du groupe D et l'on calculera celle-ci grâce aux complexes $\mathrm{Alt}_{\underline{\underline{Z}}}(D, \cdot)$.
Soit $\xi_1,\ldots,\xi_N$ la base duale de la base $e_1,\ldots,e_N$ du réseau D et soient

$x_1,\ldots,x_N$ les formes coordonnées de T correspondantes. Pour prouver (3), on peut supposer que $f = x_{i_1}\wedge\ldots\wedge x_{i_n}$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_n \leqslant N$, donc $F = dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_n}$ et $j(f) = \xi_{i_1}\wedge\ldots\wedge\xi_{i_n}$. Pour trouver $\Delta(F)$, il suffit de construire deux suites $F_p \in \mathrm{Alt}^p(D,\Omega^{n-p})$, $0 \leqslant p \leqslant n$, $G_p \in \mathrm{Alt}^p(D,\Omega^{n-p-1})$, $0 \leqslant p \leqslant n$, où $\Omega^i = H^0(T,\underline{\Omega}^i_T)$, telles que

(a) $F_0 = F$

(b) $dG_p = F_p$

(c) $\delta G_p = F_{p+1}$,

où d désigne la différentielle du complexe (2) et δ celle du complexe $\mathrm{Alt}^*_{\underline{\underline{Z}}}(D\ ,\ .)$. On aura alors $G_n \in \mathrm{Alt}^n_{\underline{\underline{Z}}}(D,\underline{\underline{R}})$ et sa classe de cohomologie sera $\Delta(F)$. La relation (3) deviendra

(d) $G_n = (-1)^{n(n-1)/2}\xi_{i_1}\wedge\ldots\wedge\xi_{i_n}$,

car $n(n+1)/2 + n(n-1)/2 \equiv n \pmod{2}$. Posons

$$F_p = (-1)^{p(p-1)/2}\xi_{i_1}\wedge\ldots\wedge\xi_{i_p}\, dx_{i_{p+1}}\wedge\ldots\wedge dx_{i_n}$$

$$G_p = (-1)^{p(p-1)/2}\xi_{i_1}\wedge\ldots\wedge\xi_{i_p}\, x_{i_{p+1}}\, dx_{i_{p+2}}\wedge\ldots\wedge dx_{i_n} .$$

On a évidemment (a), (b) et (d). Il suffit de vérifier que les deux membres de (c) prennent la même valeur sur les éléments $(e_{j_1},\ldots,e_{j_{n+1}})$, $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_{n+1} \leqslant N$, de D^{n+1}. Par définition de δ, on a

$$(\delta G_p)(e_{\underline{j}}) = (-1)^{p(p-1)/2}\sum_{1\leqslant q\leqslant p+1}(-1)^{q+1}((e_{j_q}-1)G_p)(e_{j_1},\ldots,\widehat{e_{j_q}},\ldots,e_{j_{p+1}})$$

$$= (-1)^{p(p-1)/2}\, A\,\omega\ ,$$

où $\omega = dx_{i_{p+2}}\wedge\ldots\wedge dx_{i_n}$ et

$$A = \sum_{1\leqslant q\leqslant p+1}(-1)^{q+1}\xi_{i_1}\wedge\ldots\wedge\xi_{i_p}(e_{j_1},\ldots,\widehat{e_{j_q}},\ldots,e_{j_n}).\xi_{i_{p+1}}(e_{j_q}) .$$

Par ailleurs, $F_{p+1} = (-1)^{p(p+1)/2} B\omega$, où

$$B = \xi_{i_1} \wedge \dots \wedge \xi_{i_{p+1}} (e_{j_1}, \dots, e_{j_{p+1}}) .$$

Il suffit donc de prouver que $B = (-1)^p A$; or on sait que $B = \text{dét}\, \xi_{i_u}(e_{j_v})$, d'où la conclusion en développant ce déterminant par rapport à sa dernière ligne.

Remarque 3.5. Nous retiendrons que la classe de cohomologie attachée par le théorème de de Rham à une n-forme alternée f sur T est égale à celle du cocycle obtenu en restreignant $(-1)^n f$ à D .

3.5.1. Nous pouvons maintenant déduire le théorème (3.1) de ces lemmes. D'après (3.4), a_n est un isomorphisme car il en est ainsi de j , b_n et c_n . C'est un isomorphisme d'algèbres car le morphisme de de Rham transforme produit extérieur en cup-produit (Godement [3] p. 181). L'application $i : H^*(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(X,\mathbb{R})$ est injective car les isomorphismes b_n et c_n relatifs aux faisceaux constants $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$ identifient cette application à $\mathrm{Alt}^*_{\mathbb{Z}}(D,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Alt}^*_{\mathbb{Z}}(D,\mathbb{R})$. Enfin, d'après (3.4), l'image de i s'identifie à l'ensemble des formes alternées sur T qui sont entières sur D .

Corollaire 3.6. Soit F une forme différentielle fermée définie sur X et soit HF la moyenne de F pour la mesure invariante sur X de masse totale 1 . Les formes F et HF sont cohomologues.

Bien entendu, dans cet énoncé, on profite de la structure de groupe de X pour identifier les formes différentielles sur X aux fonctions de classe C^∞ sur X à valeurs dans l'algèbre des formes différentielles sur l'espace tangent à l'origine T . Une forme invariante F s'interprète ainsi comme une fonction constante et l'on a donc $HF = F$. D'après le théorème (3.1), pour toute forme fermée F , il existe une forme invariante F' et une forme F'' telles que

$F = F' + dF''$. On a donc $HF = F' + HdF''$. Or il est facile de vérifier que $Hd = 0$, d'où la conclusion.

Corollaire 3.7. Pour qu'un tore complexe soit une variété de Hodge il faut et il suffit qu'il admette une forme de Riemann non dégénérée.

D'après le théorème (3.1), pour qu'une forme différentielle invariante F soit une structure de Hodge il faut et il suffit que sa valeur à l'origine soit une forme de Riemann non dégénérée. La condition du corollaire est donc suffisante. Elle est nécessaire car si F est une structure Kählérienne, il en est de même de HF d'après les propriétés bien connues des intégrales et, par ailleurs, si F est de classe entière, il en est de même de HF qui lui est cohomologue.

Joint au théorème de Kodaira, le corollaire (3.7) implique le théorème (1.2).

3.8. Soit $X = T/D$ un tore complexe. Nous allons maintenant calculer la cohomologie du faisceau $\underline{O}_X$ des fonctions holomorphes sur X . Tout d'abord, grâce à la formule de Kunneth, on déduit immédiatement du théorème (3.1) que l'on a des isomorphismes

$$a_n : \mathrm{Alt}^n_{\underline{\underline{R}}}(T,\underline{\underline{C}}) \xrightarrow{\sim} H^n(X,\underline{\underline{C}}) .$$

Par ailleurs, si l'on désigne par $\mathrm{Alt}^{p,q}(T,\underline{\underline{C}})$ le sous-espace vectoriel complexe de $\mathrm{Alt}^*_{\underline{\underline{R}}}(T,\underline{\underline{C}})$ engendré par les formes $u_1 \wedge \dots \wedge u_p \wedge \overline{v_1} \wedge \dots \wedge \overline{v_q}$, où $u_1,\dots,u_p,v_1,\dots,v_q$ sont des formes $\underline{\underline{C}}$-linéaires sur T , on a une décomposition en somme directe

(1) $$\mathrm{Alt}^n_{\underline{\underline{R}}}(T,\underline{\underline{C}}) = \coprod_{p+q=n} \mathrm{Alt}^{p,q}_{\underline{\underline{R}}}(T,\underline{\underline{C}})$$

d'où une décomposition en somme directe

(2) $$H^n(X,\underline{\underline{C}}) = \coprod_{p+q=n} H^{p,q}(X,\underline{\underline{C}})\ .$$

Remarquons que $\mathrm{Alt}^2_{\underline{\underline{R}}}(T,\underline{\underline{R}}) = \mathrm{Alt}^{1,1}_{\underline{\underline{R}}}(T,\underline{\underline{C}})$ n'est autre que l'ensemble des formes de type $(1,1)$ sur T, (1.3). D'après (3.1), on a donc la proposition suivante.

<u>Proposition</u> 3.9. L'ensemble $H^{1,1}(X,\underline{\underline{Z}})$ des $x \in H^2(X,\underline{\underline{Z}})$ dont l'image dans $H^2(X,\underline{\underline{C}})$ est de bidegré $(1,1)$ est canoniquement isomorphe à l'ensemble des formes de type $(1,1)$ sur T qui prennent des valeurs entières sur $D \times D$.

<u>Théorème</u> 3.10. Le morphisme naturel $H^n(X,\underline{\underline{C}}) \longrightarrow H^n(X,\underline{O}_X)$ induit un isomorphisme $H^{0,n}(X,\underline{\underline{C}}) \longrightarrow H^n(X,\underline{O}_X)$.

La décomposition (3.8 (1)) est valable pour tout espace vectoriel complexe T, en particulier pour les espaces tangents aux points de X. On en déduit, pour tout $n \in \underline{\underline{N}}$, une décomposition en somme directe

(1) $$\underline{\Omega}^n = \sum_{p+q=n} \underline{\Omega}^{p,q}$$

du faisceau $\underline{\Omega}^n$ des formes différentielles sur X à valeurs complexes, et, en particulier, des projecteurs $q_n : \underline{\Omega}^n \longrightarrow \underline{\Omega}^{0,n}$. L'opérateur d'' augmente le second degré d'une unité et, d'après le théorème de Dolbeault (cf. [10] p. 184), la suite

(2) $$0 \longrightarrow \underline{O}_X \longrightarrow \underline{\Omega}^0 \xrightarrow{d''} \underline{\Omega}^{0,1} \xrightarrow{d''} \cdots$$

est une résolution par des faisceaux fins du faisceau $\underline{O}_X$ des fonctions holomorphes sur X. De même, d'après le théorème de de Rham, la suite

(3) $$0 \longrightarrow \underline{\underline{C}} \longrightarrow \underline{\Omega}^0 \xrightarrow{d} \underline{\Omega}^1 \longrightarrow \cdots$$

est une résolution par des faisceaux fins du faisceau constant $\underline{\underline{C}}$. Enfin, un calcul immédiat montre que le morphisme naturel $\underline{\underline{C}} \xrightarrow{i} \underline{O}_X$ et les projecteurs

q_n définissent un morphisme de la suite (3) dans la suite (2). Si l'on désigne par Ω^i et $\Omega^{0,i}$ les modules formés par les sections des faisceaux $\underline{\Omega}^i$ et $\underline{\Omega}^{0,i}$, on en déduit que l'on a un carré commutatif

$$
(4)\qquad
\begin{array}{ccc}
H^n(X,\underline{\underline{C}}) & \xrightarrow{\ i_n\ } & H^n(X,\underline{O}_X) \\
\uparrow \wr & & \uparrow \wr \\
H^n(\Omega^*) & \xrightarrow[\ q'_n\ ]{} & H^n(\Omega^{0,*})
\end{array}
$$

où i_n est induit par $i : \underline{\underline{C}} \longrightarrow \underline{O}_X$ et q'_n par q_n. Puisqu'une forme invariante F satisfait $d''F = 0$, on déduit de (4) un carré commutatif

$$
(5)\qquad
\begin{array}{ccc}
H^n(X,\underline{\underline{C}}) & \xrightarrow{\ i_n\ } & H^n(X,\underline{O}_X) \\
\uparrow \wr & & \uparrow j_n \\
\mathrm{Alt}^n_{\underline{\underline{R}}}(T,\underline{\underline{C}}) & \xrightarrow[\ p_n\ ]{} & \mathrm{Alt}^{0,n}_{\underline{\underline{R}}}(T,\underline{\underline{C}}) = \mathrm{Alt}^n_{\underline{\underline{C}}}(\bar{T},\underline{\underline{C}})
\end{array}
\quad ,
$$

où la verticale de gauche est, comme on a vu, un isomorphisme. Il reste à démontrer qu'il en est de même de celle de droite. Montrons que j_n est <u>injective</u>. Soit ω une forme différentielle sur X, identifiée à une fonction indéfiniment différentiable sur X à valeurs dans $\mathrm{Alt}^p_{\underline{\underline{R}}}(T,\underline{\underline{C}})$. Comme plus haut, on notera $H\omega$ la moyenne de ω relativement à la mesure invariante sur X de masse totale 1. Bien entendu, si ω est bihomogène de bidegré (p,q), il en est de même de $H\omega$ et, par ailleurs, il est immédiat que $Hd\omega = 0$, d'où, par homogénéité, $Hd''\omega = 0$. Soit alors ω une forme invariante de bidegré $(0,n)$. Si sa classe de cohomologie est nulle, il existe une forme α de bidegré $(0,n-1)$ telle que $\omega = d''\alpha$, d'où $H\omega = Hd''\alpha = 0$, donc $\omega = 0$, donc j_n est injective.

Pour prouver que j_n est surjective, il suffit de montrer que pour toute forme ω de type $(0,n)$ telle que $d''\omega = 0$, il existe une forme α de type $(0,n-1)$ telle que $\omega = H\omega + d''\alpha$, car la classe de $H\omega$ appartient à l'image de j_n . Pour cela, nous choisissons une structure hermitienne sur T , ce qui donne naissance à des opérateurs locaux Δ et δ'' homogènes de bidegrés 0 et $(0,-1)$, tels que $\Delta = 2(d''\delta'' + \delta''d'')$, [W] p. 41 et 44 . En choisissant une base de D et en développant en série de Fourier les coefficients d'une forme f on définit d'après [W] p. 69 , une forme Gf telle que $f = Hf + \Delta Gf$. L'opérateur G est homogène de bidegré 0 et satisfait $dG = Gd$, d'où, par homogénéité, $d''G = Gd''$. En particulier, on a

$$\omega = H\omega + 2d''\delta''G\omega + 2\delta''d''G\omega$$

or $\delta''d''G\omega = \delta''Gd''\omega = 0$, d'où la conclusion, en posant $\alpha = 2\delta''G\omega$.

BIBLIOGRAPHIE

[W] WEIL (André).- Introduction à l'étude des Variétés Kählériennes.- Hermann, Paris, 1958.

[1] CHOW (W.L.).- On compact complex analytic varieties.- Amer. J. of Math., 71, 1949, p. 893-914.

[2] SERRE (J.P.).- Géométrie algébrique et géométrie analytique.- Ann. de l'Inst. Fourier, tome VI, 1955, p. 1-42.

[3] GODEMENT (R.).- Topologie algébrique et théorie des faisceaux.- Hermann, Paris, 1958.

[4] GROTHENDIECK (A.).- Sur quelques points d'algèbre homologique.- Tohoku Math. Journal, Vol. 9, 1957, p. 119-221.

[5] KODAIRA (K.).- On Kähler varieties of restricted type (an intrinsic characterisation of algebraic varieties).- Ann. of Math., 60, 1954, p. 28-48.

[6] CARTAN (H.) et EILENBERG (S.).- Homological algebra.- Princeton University Press, 1956.

[7] VERDIER (J.L.).- Théorie des faisceaux.- Séminaire de géométrie algébrique de l'I.H.E.S., 1963.

[8] MAC-LANE (S.).- Homology.- Springer Verlag, 1963.

[9] BOURBAKI (N.).- Variétés différentielles et analytiques.- Fascicule de résultats, Hermann, Paris, 1967.

[10] GUNNING (R.) and ROSSI (H.).- Analytic functions of several complex variables.- Prentice Hall Inc., 1965.

FACULTE DES SCIENCES DE
L'UNIVERSITE DE PARIS
ORSAY

1967-1968

SEMINAIRE DE GEOMETRIE ALGEBRIQUE

-:-:-:-:-:-

Exposé nº 2

DUAL D'UN TORE COMPLEXE

par J. Giraud

-:-:-:-:-:-

Définition 1 . Soient X une variété analytique complexe et $\underline{O}_X$ le faisceau des fonctions holomorphes sur X . On appelle groupe de Picard de X et on note $\mathrm{Pic}(X)$ l'ensemble des classes à isomorphisme près de modules inversibles sur X [faisceaux de $\underline{O}_X$-modules localement libres de rang 1].

D'après [1] p. 65, si $\underline{O}_X^*$ désigne le faisceau des fonctions holomorphes inversibles sur X , on définit un isomorphisme

$$\mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{\sim} H^1(X,\underline{O}_X^*) \tag{1}$$

en attachant à un module inversible L , un recouvrement de X par des ouverts X_i , $i \in I$, et une famille $f_i \in L(X_i)$ de sections ne s'annulant pas, la classe du cocycle de Cech $c \in Z^1C^*((X_i),\underline{O}_X^*)$ caractérisé par

$$f_j = f_i . c_{ij} \quad . \tag{2}$$

Par ailleurs, si $X = T/D$ est un tore complexe, un 1-cocycle $F \in Z^1C^*(D,\underline{O}_T^*(T))$ du complexe des cochaines inhomogènes du D-module $\underline{O}_T^*(T)$ permet de faire opérer D sur le module inversible trivial $T \times \underline{\underline{C}}$ sur T , par

(3) $$(x,a,u) \longmapsto (x+u, a.F(x,u)) \quad , \quad (x,a,u) \in T \times \underline{\underline{C}} \times D \ .$$

le quotient $T \times \underline{\underline{C}}/D$ est alors un module inversible L sur X , dont les sections sur un ouvert U de X sont les fonctions holomorphes $\theta : \pi^{-1}(U) \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ telles que

(4) $$\theta(x+u) = \theta(x).F(x,u) \quad , \quad x \in T, u \in D \ .$$

<u>Proposition</u> 2 . Soit $F \in Z^1C^*(D, \underline{O}_T^*(T))$, soit L le fibré qui lui est attaché par (1 (3)), soit c la classe de cohomologie attachée à L par (1 (2)) et soit $\varphi \in H^1(D, \underline{O}_T^*(T))$ la classe de F . L'image de φ par le morphisme

(1) $$H^1(D, \underline{O}_T^*(T)) \longrightarrow H^1(X, \underline{O}_T^*)$$

de (I 3.2) est <u>l'opposée</u> de celle de F .

On déduit ceci de (I 3.2.1) en considérant un recouvrement de X par des ouverts simplements connexes X_i , $i \in I$, et des sections $f_i \in L(X_i)$, qui ne s'annulent pas. On notera que (1) est un isomorphisme car $H^1(T, \underline{O}_T^*) = 0$.

<u>Proposition</u> 3 . Soit $X = T/D$ un tore complexe. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^1(X, \underline{\underline{Z}}) \longrightarrow H^{0,1}(X, \underline{\underline{C}}) \longrightarrow H^1(X, \underline{O}_X^*) \xrightarrow{\delta} H^{1,1}(X, \underline{\underline{Z}}) \longrightarrow 0 \ .$$

On considère la suite exacte de faisceaux sur X

(1) $$0 \longrightarrow \underline{\underline{Z}} \longrightarrow \underline{O}_X \xrightarrow{e} \underline{O}_X^* \longrightarrow 0 \quad ,$$

où $\underline{e}(z) = \exp(2\pi iz)$. Puisque X est compacte, $H^0(X, \underline{e})$ est surjective et la suite de cohomologie attachée à (1) s'écrit

(2) $$0 \longrightarrow H^1(X, \underline{\underline{Z}}) \longrightarrow H^1(X, \underline{O}_X) \longrightarrow H^1(X, \underline{O}_X^*) \xrightarrow{d} H^2(X, \underline{\underline{Z}}) \xrightarrow{\alpha} H^2(X, \underline{O}_X) \longrightarrow \dots$$

On a vu (I 3.8) comment identifier $H^{0,n}(X, \underline{\underline{C}})$ et $H^n(X, \underline{O}_X)$. Il reste donc à prouver que le noyau de l'application α est $H^{1,1}(X, \underline{\underline{Z}})$ (cf. I 3.9). Soit $x \in H^2(X, \underline{\underline{Z}})$ et soit $x = x^{0,2} + x^{1,1} + x^{2,0}$ la décomposition en éléments homogènes de son image dans $H^2(X, \underline{\underline{C}})$. Puisque x est réel, on a $x = \bar{x}$ donc

$x^{2,0} = \overline{x^{0,2}}$, car le conjugué d'un élément homogène de bidegré (p,q) est homogène de bidegré (q,p). Pour que $\alpha(x) = 0$, il faut et il suffit, d'après (I 3.10), que $x^{0,2} = 0$, ce qui équivaut à $x = x^{1,1}$, d'où la conclusion.

On sait que (I 3.10) reste valable pour une variété Kählérienne compacte quelconque ; il en est donc de même de la proposition 2.

Corollaire 4. Soient $X = T/D$ un tore complexe et soit $\bar{T}$ l'anti-espace de T [obtenu en faisant opérer $\underline{\underline{C}}$ sur T par $(a,x) \longmapsto \bar{a}x$]. Soit $\hat{T} = \mathrm{Hom}_{\underline{\underline{C}}}(\bar{T},\underline{\underline{C}})$ et soit $\hat{D}$ l'ensemble des $y \in \hat{T}$ tels que la partie imaginaire de y soit entière sur D. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \hat{D} \longrightarrow \hat{T} \xrightarrow{\chi} H^1(X,\underline{O}_X^*) \xrightarrow{\delta} H^{1,1}(X,\underline{\underline{Z}}) \longrightarrow 0 ,$$

où χ est l'application qui, à $\hat{x} \in \hat{T}$, associe la classe du fibré inversible sur X attaché par (1 (3)) au cocycle

$$\chi(\hat{x}) : D \longrightarrow \underline{\underline{C}}^* \quad , \quad \chi(\hat{x})(u) = \exp(\pi < \hat{x},u >) .$$

Pour tout $(\hat{x},x) \in \hat{T} \times T$, on pose $< \hat{x},x > = \hat{x}(x)$; la forme $< , >$ est donc $\underline{\underline{C}}$-linéaire par rapport à la première variable et $\underline{\underline{C}}$-anti-linéaire par rapport à la seconde. En identifiant une forme linéaire sur T à la forme différentielle sur X invariante par translation dont elle est la valeur à l'origine, on trouve des isomorphismes qui rendent commutatif le diagramme ci-dessous

$$(1) \qquad \begin{array}{ccccc} H^1(X,\underline{\underline{R}}) & \longrightarrow & H^1(X,\underline{\underline{C}}) & \longrightarrow & H^1(X,\underline{O}_X) \\ \wr\uparrow & & \wr\uparrow & & \wr\uparrow \\ \mathrm{Hom}_{\underline{\underline{R}}}(T,\underline{\underline{R}}) & \xrightarrow{u} & \mathrm{Hom}_{\underline{\underline{R}}}(T,\underline{\underline{C}}) & \xrightarrow{v} & \mathrm{Hom}_{\underline{\underline{C}}}(\bar{T},\underline{\underline{C}}) \end{array} ,$$

où u est induit par l'inclusion de $\underline{\underline{R}}$ dans $\underline{\underline{C}}$ et où, d'après (I 3.10), v associe à une forme $\underline{\underline{R}}$-linéaire f sa partie $\underline{\underline{C}}$-antilinéaire. On a donc

$$(2) \qquad (vf)(x) = \tfrac{1}{2}\,(f(x) + i\, f(ix)) \quad , \quad x \in T .$$

Il est immédiat que <u>le composé</u> v <u>est un isomorphisme</u>, l'isomorphisme inverse étant obtenu en attachant à $\hat{x} \in \hat{T}$ la forme $f : T \longrightarrow \underline{\underline{R}}$, $f(x) = 2\mathrm{Re} < \hat{x}, x >$. Il en résulte que l'image de $H^1(X,\underline{\underline{Z}})$ dans $\hat{T}$ est l'ensemble des $\hat{x} \in \hat{T}$ dont la partie réelle est demi-entière sur D . Soit alors $\alpha : \hat{T} \longrightarrow H^1(X,\underline{O}_X)$ l'isomorphisme obtenu en multipliant par $(1/2i)$ celui qui figure dans (1). L'image réciproque de $H^1(X,\underline{\underline{Z}})$ par α est $\hat{D}$ et pour prouver la proposition, il reste à démontrer que le composé $\hat{T} \xrightarrow{\alpha} H^1(X,\underline{O}_X) \longrightarrow H^1(X,\underline{O}_X^*)$ n'est autre que χ . Or, d'après (I 3.4), l'image par α d'un élément $\hat{x} \in \hat{T}$ est la classe du cocycle alterné $b \in \mathrm{Alt}^1_{\underline{\underline{R}}}(D,O_T(T))$, $b(u) = (-1/2i) < \hat{x},u >$, (I 3.3). Celui-ci est également un cocycle du complexe des cochaines inhomogènes du D-module $\underline{O}_T(T)$ et, d'après (I 3.3.2), sa classe est encore égale à $\alpha(\hat{x})$; l'image de $\hat{x}$ par le composé ci-dessus est donc la classe du cocycle $c \in Z^1(D,O^*_T(T))$, $c(u) = \exp(-\pi < \hat{x},u >)$. D'après la proposition 2 , celle-ci est $\chi(\hat{x})$, d'où la conclusion.

<u>Définition</u> 5 . On appelle dual d'un tore complexe $X = T/D$ le tore complexe $\hat{X} = \hat{T}/\hat{D}$.

D'après ce qui précède, on a un isomorphisme de tores réels

$$H^1(X,\underline{\underline{R}})/H^1(X,\underline{\underline{Z}}) \xrightarrow{\sim} \hat{X} \quad ;$$

de plus, d'après (4 (2)), la structure d'espace vectoriel complexe dont on munit $H^1(T,\underline{\underline{R}}) = \mathrm{Hom}_{\underline{\underline{R}}}(T,\underline{\underline{R}})$ en transportant celle de $\hat{T}$ grâce à l'isomorphisme $v$ou est telle que

(1) $$(if)(x) = f(-ix) \quad , \quad f \in \mathrm{Hom}_{\underline{\underline{R}}}(T,\underline{\underline{R}}) \quad , \quad x \in T \ .$$

Nous allons voir que $\hat{X}$ est la variété des paramètres d'une famille analytique de modules inversibles sur X , autrement dit, nous allons décrire un module inversible $\underline{P}$ sur $X \times \hat{X}$, appelé <u>fibré de Poincaré de</u> X . Puisque

$X \times \hat{X} = (T \times \hat{T})/(D \times \hat{D})$, on peut construire $\underline{P}$ à l'aide d'un 1-cocycle c de $D \times \hat{D}$ à valeurs dans le groupe multiplicatif des fonctions holomorphes inversibles sur $T \times \hat{T}$. On pose

(2) $$c(u,\hat{u};x,\hat{x}) = \exp(\pi \overline{<\hat{u},x>} + \pi < \hat{x}+\hat{u},u>) \quad , \quad (u,\hat{u},x,\hat{x}) \in D \times \hat{D} \times T \times \hat{T} \; .$$

On notera que la fonction dont c est l'exponentielle est $\underline{\underline{C}}$-linéaire en x et $\hat{x}$ et que, par suite, $c(u,\hat{u})$ est une fonction holomorphe. De plus, c est bien un cocycle car on a

$$c(u+v,\hat{u}+\hat{v};x,\hat{x}) = c(u,\hat{u};x,\hat{x})c(v,\hat{v};x+u,\hat{x}+\hat{u})\exp(2\pi i \ \operatorname{Im} < \hat{v},u>) \quad ,$$

et $\operatorname{Im}(<\hat{v},u>)$ est un entier par définition de $\hat{D}$. Désignons donc par $\underline{P}$ le fibré attaché par (1 (3)) à c. Soient V une variété, $\tilde{V}$ son revêtement universel, G son groupe fondamental, $\begin{array}{ccc} \tilde{V} & \xrightarrow{F} & T \times \hat{T} \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \xrightarrow[f]{} & X \times \hat{X} \end{array}$ un diagramme commutatif et $g : G \longrightarrow D \times \hat{D}$ un morphisme de groupes tels que $F(xu) = F(x) + g(u)$, $x \in \tilde{V}$, $u \in G$. Le cocycle du fibré $f^*(P)$ sera

$$c'(u,x) = c(g(u);F(x)) \quad , \quad x \in \tilde{V} \quad , \quad u \in G \; .$$

En particulier, le cocycle du module inversible $e^*(P)$, où $e : \hat{X} \longrightarrow X \times \hat{X}$ est la section nulle, est $c'(\hat{u},\hat{x}) = c(0,\hat{u};0,\hat{x}) = 1$; <u>le module inversible</u> $e^*(\underline{P})$ <u>est donc trivial</u>, et même trivialisé.

De même, si $\hat{x} \in \hat{T}$, on a un morphisme $f : X \longrightarrow X \times \hat{X}$ induit par $F : T \longrightarrow T \times \hat{T}$, $F(x) = (\hat{x},x)$. Le module inversible $f^*(P)$ est donc celui attaché au cocycle

$$c'(u,x) = c(u,0;x,\hat{x}) = \exp\pi < \hat{x},u> \; ;$$

sa classe dans $H^1(X,\underline{O}_X^*)$ est donc $\chi(\hat{x})$, où χ est le morphisme du corollaire 4. D'où ce qui suit

<u>Proposition</u> 6. Soit $\hat{x} \in \hat{T}$ et soit ξ le point correspondant de $\hat{X}$. La classe

du module inversible induit par $\underline{P}$ sur la fibre en ξ de la deuxième projection $X \times \hat{X} \longrightarrow \hat{X}$ est $\chi(\hat{x})$.

Remarque 7. Il existe sur $H^1(X,\underline{O}^*_X)$ une unique structure de groupe de Lie complexe telle que les applications

$$H^1(X,\underline{O}_X) \longrightarrow H^1(X,\underline{O}^*_X) \longrightarrow H^{1,1}(X,\underline{\underline{Z}})$$

soient holomorphes. D'après Grothendieck [2], le groupe de Lie $\underline{\mathrm{Pic}}(X)$ ainsi obtenu représente le foncteur qui, à tout espace analytique S, associe l'ensemble $\mathrm{Pic}(S)$ des classes à isomorphisme près de modules inversibles normalisées sur $X \times S$, un module inversible normalisé étant un couple (L,r), où L est un module inversible sur $X \times S$ et $r : \underline{O}_S \xrightarrow{\sim} e^*(L)$ un isomorphisme de modules inversibles sur S, où $e : S \longrightarrow X \times S$ est la section nulle du S-groupe $X \times S$. On a vu que le fibré de Poincaré est un module inversible normalisé sur $X \times \hat{X}$; il détermine donc un morphisme de variétés analytiques $\varkappa : \hat{X} \longrightarrow \underline{\mathrm{Pic}}(X)$ qui, d'après la proposition 6 n'est autre que le morphisme induit par $\chi : \hat{T} \longrightarrow \underline{\mathrm{Pic}}(X)$. Le dual $\hat{X}$ du tore X se trouve ainsi identifié à la composante neutre de $\underline{\mathrm{Pic}}(X)$, cependant que le groupe $H^{1,1}(X,\underline{\underline{Z}})$ décrit dans (I 3.9) est identifié au groupe des composantes connexes de $\underline{\mathrm{Pic}}(X)$, souvent appelé groupe de Néron-Severi de X. Notons au passage que, par définition de $\varkappa$, le fibré de Poincaré est la restriction à $X \times \hat{X}$ du fibré universel porté par $X \times \underline{\mathrm{Pic}}(X)$.

Remarquons que ce qui précède assure que le tore complexe attaché au dual (au sens de la géométrie algébrique) d'un $\underline{\underline{C}}$-schéma abélien Y est le dual du tore complexe attaché à Y, car, d'après [GAGA], la catégorie des modules inversibles sur Y est équivalente à celle des modules inversibles sur le tore complexe correspondant.

<u>Proposition</u> 8 . (Bidualité). L'isomorphisme naturel $k_T : T \xrightarrow{\sim} \hat{\hat{T}}$, $k_T(x)(\hat{x}) = \overline{<\hat{x}, x>}$, induit un isomorphisme $D \xrightarrow{\sim} \hat{\hat{D}}$, donc un isomorphisme

(1) $$k_X : X \xrightarrow{\sim} \hat{\hat{X}} .$$

Soit $\underline{\hat{P}}$ le module inversible sur $\hat{X} \times X$ obtenu en transportant par $1_{\hat X} \times k_X$ le fibré de Poincaré de $\hat{X}$. On a $\underline{\hat{P}} = s^*(\underline{P})$, où $s : \hat{X} \times X \longrightarrow X \times \hat{X}$ est la symétrie. Soit $x \in T$ et soit $\xi \in X$ son image. Le fibré inversible sur $\hat{X}$ attaché à $k_X(\xi)$ est l'image inverse de $\underline{P}$ par le morphisme $\hat{X} \longrightarrow X \times \hat{X}$ induit par $\hat{T} \longrightarrow T \times \hat{T}$, $\hat{x} \longmapsto (x, \hat{x})$.

La première assertion est évidente. Quant à la seconde, notons que k_X est caractérisé par la condition

$$\overline{<\hat{x}, x>} = <k_T(x), \hat{x}> , \quad x \in T , \hat{x} \in \hat{T} .$$

Il en résulte que le cocycle de $\underline{\hat{P}}$ est

$$c'(\hat{u}, u; \hat{x}, x) = c_{\hat{X}}(\hat{u}, k_T(u); \hat{x}, k_T(x))$$

$$= \exp(\pi <\hat{x}, u> + \pi \overline{<\hat{u}, x+u>}) \quad , \text{ d'après } (5\ (2)) ,$$

cependant que celui de $s^*(\underline{P})$ est égal à

$$c''(\hat{u}, u; \hat{x}, x) = \exp(\pi \overline{<\hat{u}, x>} + \pi <\hat{x}+\hat{u}, u>) .$$

Ces deux cocycles sont égaux, car

$$\pi <\hat{u}, u> - \pi \overline{<\hat{u}, u>} = 2\pi i \ \operatorname{Im} <\hat{u}, u>$$

et $\operatorname{Im} <\hat{u}, u>$ est entier par définition de $\hat{D}$. Donc $\underline{\hat{P}} = s^*(\underline{P})$: la dernière assertion en résulte en appliquant la proposition 6 à $\hat{X}$ et $\hat{\hat{X}}$.

<u>Remarque</u> 9 . Il est immédiat que $\hat{X}$ est fonctoriel en X et que $X \longmapsto k_X$ est un isomorphisme de foncteurs ; donc si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme de tores complexes, les isomorphismes k_X et k_Y identifient f et $\hat{\hat{f}}$.

<u>Proposition</u> 10 . Soit n un entier et soient ${}_nX$ et ${}_n\hat{X}$ les groupes des points

d'ordre n de X et $\hat{X}$. Ce sont des groupes finis d'ordre n^{2g}, où $g = \dim X$. Soit ${}_n\mu$ le groupe des racines n-ièmes de l'unité. On a une forme bilinéaire non dégénérée

$$ {}_nX \times {}_n\hat{X} \longrightarrow {}_n\mu \quad , $$

induite par l'application $(x,\hat{x}) \longmapsto \exp(2\pi i\ n\ \mathrm{Im} < \hat{x},x >)$, $x \in T$, $\hat{x} \in \hat{T}$.

La première assertion est immédiate ; de fait, le groupe des points d'ordre fini de X est canoniquement isomorphe à $D \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/D$, lui-même isomorphe à $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{2g}$, où g est la dimension complexe de X . La seconde assertion résulte du fait que la forme $\mathrm{Im} < \hat{x},x >$ induit une dualité entre D et $\hat{D}$ car c'est une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire non dégénérée.

Proposition 11 . Soient L un module inversible sur X et soit H la forme hermitienne dont la partie imaginaire A est la classe caractéristique de L . Soit $F_H : T \longrightarrow \hat{T}$ le morphisme défini par $F_H(x)(y) = H(x,y)$ et soit $\varphi_H : X \longrightarrow \hat{X}$ le morphisme qu'il induit. Pour tout $\alpha \in X$, on a

$$ \varphi_H(\alpha) = - \mathrm{Cl}(L_\alpha - L) \quad , $$

où $L = t_\alpha^*(L)$, et $t_\alpha : X \longrightarrow X$ la translation $t_\alpha(x) = x+\alpha$.

Soit $a \in T$ et soit $\alpha \in X$ son image. Par définition, $\varphi_H(\alpha)$ est la classe du fibré L attaché par (1 (3)) au cocycle $c \in Z^1(D,\underline{O}_T^*(T))$, $c((u,x) = \exp(\pi < F_H(a),u >) = \exp(\pi H(a,u))$. Pour pouvoir utiliser le complexe des cochaines alternées (I 3.3) nous choisirons une base $e_1,\dots,e_{2g}$ de D . D'après (1.2) et (I 3.3.2), $\varphi_H(\alpha)$ est également la classe du cocycle $c' \in \mathrm{Alt}^1_{\mathbb{Z}}(D,\underline{O}_T^*(T))$, $c'(x,u) = \exp(-\pi H(a,u))$. En effet, on a $c'(x,e_i) = c(x,e_i)^{-1}$, $1 \leqslant i \leqslant 2g$.

Il reste à trouver un cocycle $f \in \mathrm{Alt}^1_{\mathbb{Z}}(D,\underline{O}_T^*(T))$ dont la classe est L et qui satisfait à $f(x+a,u)/f(x,u) = \exp(\pi H(a,u))$, ce qui résulte du lemme que voici.

Lemme 11.1. Soit L un module inversible sur X et soit H la forme hermitienne dont la partie imaginaire A est la classe caractéristique de L. Il existe $\hat{x} \in \hat{T}$ tel que la fonction $f(x,u) = \exp(\pi(H(x,u) + <\hat{x},u>))$, $x \in T$, $u \in D$, soit un cocycle $f \in Z^1(D,\underline{O}_T^*(T))$ dont la classe $\varphi \in H^1(X,\underline{O}_X^*)$ est celle de L.

Pour tout $\hat{x} \in \hat{T}$, on a $f = \exp(2\pi i\, g)$, où $g(x,u) = (1/2i)(H(x,u)+<\hat{x},u>)$. On a évidemment

$g(x+u,v) - g(x,v) - g(x+v,u) + g(x,u) = A(u,v), (u,v) \in D \times D$.

Prenant pour (u,v) un couple (e_i,e_j), $1 \leqslant i < j \leqslant 2g$, on en déduit que f est un cocycle et que l'image de sa classe par le premier cobord $H^1(D,\underline{O}_T^*(T)) \longrightarrow H^2(D,\underline{\underline{Z}})$ est A. Soit L' un module inversible ayant même classe que f ; la classe caractéristique de $L'-L$ est nulle ; d'après le corollaire 4, il existe donc $\hat{x}' \in \hat{T}$ tel que la classe de $L'-L$ soit celle du cocycle $\exp(\pi <\hat{x}',u>)$, d'où la conclusion.

Corollaire 12. Pour tout module inversible L sur X, on a un morphisme de groupes de Lie complexes $\varphi_L : X \longrightarrow \hat{X}$, $\varphi_L(\alpha) = Cl(L_\alpha - L)$.

Remarque 13. Pour que φ_L soit surjective, il faut et il suffit que la forme hermitienne H dont la partie imaginaire est la classe caractéristique de L soit non dégénérée. Puisque X et $\hat{X}$ ont même dimension, le noyau de φ_L est alors un groupe fini dont l'ordre est appelé <u>le degré de</u> L. (N.B. un morphisme de tores surjectif à noyau fini est appelé une <u>isogénie</u>). On démontrera dans l'exposé IV que si H est une forme de Riemann non dégénérée, on a

$$\deg \varphi_L = [\dim H^0(X,L)]^2 = \text{dét } A \quad .$$

On observera que la première égalité garde un sens en géométrie algébrique ; c'est la forme que prend le Théorème de Riemann-Roch pour les variétés abéliennes.

<u>Remarque</u> 14 . D'après la propriété universelle de $\hat{X}$ (cf. 7), le morphisme φ_L est caractérisé par le module inversible normalisé $\underline{P}(L) = (1_X \times \varphi_L)^*(\underline{P})$ sur $X \times X$. On vérifie aisément que $\underline{P}(L) = m^*(L) - p_1^*(L) - p_2^*(L)$, où $m(x,y) = x+y, p_i(x_1,x_2) = x_i$, d'où le résultat que voici.

<u>Proposition</u> 15 . Soit L un module inversible sur X . Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\varphi_L = 0$

(ii) $\underline{P}(L) = \underline{O}_{X \times X}$

(iii) la classe caractéristique de L est nulle.

On peut aisément démontrer que la condition (ii) est équivalente aux autres sans utiliser la propriété universelle de $\hat{X}$.

16 . Soient $X = T/D$ et $X' = T'/D'$ des tores complexes ; le groupe abélien $H(X,X')$ des morphismes de X dans X' est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{Hom}_{\underline{\underline{Z}}}(D,D')$; c'est donc un <u>$\underline{\underline{Z}}$-module libre de rang fini</u>. Nous poserons $H_o(X,X') = H(X,X') \otimes_{\underline{\underline{Z}}} \underline{\underline{Q}}$, $E(X) = H(X,X)$ et $E_o(X) = H_o(X,X)$; on voit donc que $E_o(X)$ est une <u>$\underline{\underline{Q}}$-algèbre de rang inférieur ou égal à</u> $4g^2$. Pour ce qui suit, il sera utile d'avoir remarqué que la catégorie des tores complexes est une sous-catégorie de celle qui a les mêmes objets et dont les morphismes de source X et de but X' sont les éléments de $H_o(X,X')$. Les <u>isogénies</u> apparaissent ainsi comme les morphismes de tores complexes qui admettent un inverse dans cette nouvelle catégorie, appelée <u>catégorie des variétés abéliennes à isogénie près</u>.

<u>Proposition</u> 17 . (Théorème de complète réductibilité de Poincaré). Soient X une variété abélienne et X' un sous-tore-complexe de X . Les tores X' et X/X' sont des variétés abéliennes et X est isogène au produit $X' \times (X/X')$.

En effet, si A est une forme de Riemann sur X et si H est la forme hermitienne correspondante, l'orthogonal relativement à A du réseau D' dans le réseau D est un réseau de l'orthogonal relativement à H de l'espace tangent T' dans l'espace tangent T, car $H(x,y) = A(ix,y) + iA(x,y)$, $(x,y) \in T \times T$.

18. Soit $X = T/D$ un tore complexe et soit σ un endomorphisme de X. Notons P_σ le polynôme caractéristique de l'endomorphisme σ_D de D induit par σ. C'est un polynôme à coefficients entiers :

(1) $$P_\sigma = X^{2g} + \mathrm{Tr}(\sigma)X^{2g-1} + \dots + \nu(\sigma) .$$

Les entiers $\mathrm{Tr}(\sigma)$ et $\nu(\sigma)$ s'appellent la <u>trace</u> et le <u>degré</u> de σ. Puisque $\nu(\sigma) = \mathrm{dét}(\sigma_D)$, ce nombre est l'ordre du conoyau de σ_D, du moins si celui-ci est fini ; dans ce cas, c'est donc également l'<u>ordre du noyau de</u> σ. Soit H une forme de Riemann non dégénérée sur X ; le morphisme $\varphi_H : X \longrightarrow \hat{X}$ est une isogénie, il admet donc un inverse dans la catégorie introduite plus haut et définit une application $\sigma \longmapsto \sigma'$, $\sigma' = \varphi_H^{-1}\hat{\sigma}\varphi_H$, de l'anneau $E_0(X)$ dans lui-même. Par construction, l'endomorphisme σ'_T de T induit par σ' est l'<u>adjoint relativement</u> à H de l'endomorphisme σ_T induit par σ. On a donc $(\sigma+\tau)' = \sigma' + \tau'$, $(\sigma\tau)' = \tau'\sigma'$, $(\sigma')' = \sigma$, $1'=1$, ce que l'on traduit en disant que $\sigma \longmapsto \sigma'$ est une <u>involution</u> de l'algèbre $E_0(X)$.

<u>Théorème</u> **19**. Soient X une variété abélienne et H une forme de Riemann non dégénérée. Pour tout $\sigma \in E_0(X)$, $\sigma \neq 0$, on a $\mathrm{Tr}(\sigma\sigma') > 0$, où σ' est l'image de σ par l'involution attachée à H.

Notons d'abord que l'inclusion de D dans T induit un isomorphisme $D \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \longrightarrow T \oplus \bar{T}$; on a donc $\mathrm{Tr}(\sigma_D) = 2\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}(\sigma_T)$, où σ_D et σ_T sont les endomorphismes de D et T induits par un endomorphisme σ de X . On a donc $\mathrm{Tr}(\sigma\sigma') = 2\ \mathrm{Re}\ \mathrm{Tr}(\sigma_T\sigma'_T)$, d'où la conclusion, puisque σ'_T est l'adjoint de σ_T relativement à la forme hermitienne positive non dégénérée $-H$.

<u>Théorème</u> 20 . Soit X une variété abélienne. L'anneau $E_o(X)$ est semi-simple. Soit $\sigma \longmapsto \sigma'$ l'involution de $E_o(X)$ induite par une forme de Riemann non dégénérée sur X et soit K le centre d'une composante simple de $E_o(X)$. Soit $K_o = \{x \in K \mid x' = x\}$.

(1) K_o est un corps de nombres totalement réels

(2) si $K \neq K_o$, le corps K est une extension quadratique totalement imaginaire de K_o .

Si X et Y sont des variétés abéliennes simples, tout morphisme non nul $f : X \longrightarrow Y$ est une isogénie, car autrement le noyau de f serait une sous-variété abélienne non triviale de X . En particulier, $E_o(X)$ est un corps (voir 16). Par ailleurs, pour toute variété abélienne X , il existe, d'après le théorème de complète réductibilité de Poincaré, des variétés abéliennes deux à deux non isomorphes X_i , $1 \leqslant i \leqslant r$, et des entiers n_i tels que X soit isogène à $\prod_i X_i^{n_i}$. Il en résulte que $E_o(X)$ est isomorphe au composé direct des $M_{n_i}(E_o(X_i))$, ce qui prouve que $E_o(X)$ est semi-simple. D'aucuns auraient dit que la catégorie des variétés abéliennes à isogénie près est abélienne, semi-simple et artinienne.

Notons maintenant que l'involution respecte chaque composante $M_{n_i}(E_o(X_i))$ de $E_o(X)$ donc aussi son centre, qui est celui de $E_o(X_i)$ et qui est un corps; notons-le K . La représentation $\sigma \longmapsto \sigma_{D_o}$ de K dans $D_o = D \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est un multiple de l'unique représentation simple de K ; sa trace est donc un multiple de la trace de l'extension $K/\underline{\underline{Q}}$; si l'on note tr cette dernière, on aura donc, pour tout $x \in K$, $tr(xx') > 0$. Pour prouver (1), considérons les différents plongements $f_1, \ldots, f_n$ de K_0 dans $\underline{\underline{C}}$ et supposons que f_1 ne soit pas réel. L'image de f_1 est alors dense dans $\underline{\underline{C}}$ et il existe donc $x \in K_0$ tel que $Re(x^2) < -1$. D'après le lemme d'approximation, pour tout nombre réel $\epsilon > 0$, il existe $y \in K_0$ tel que $|f_1(x) - f_1(y)| < \epsilon$ et $|f_i(y)| < \epsilon$, $2 \leq i \leq n$. On en déduit que

$$tr(y^2) = \sum f_i(y^2) = \sum Re\ f_i(y^2)$$

est négatif dès que ϵ est assez petit, ce qui est une contradiction car $yy' = y^2$. Pour prouver (2), on note que si K est différent de K_0, on a $[K : K_0] = 2$. Il existe alors $x \in K$ tel que $K = K_0(x)$, $x' = -x$, et il faut prouver que, pour $1 \leq i \leq n$, on a $f_i(x^2) < 0$. D'après le lemme d'approximation, pour tout nombre réel $\epsilon > 0$ et tout entier i, $1 \leq i \leq n$, il existe $y \in K_0$ tel que $|f_i(y)| > 1$ et $|f_j(y)| < \epsilon$, $j \neq i$. De plus, $xy(xy)' = -x^2y^2$ donc $tr(x^2y^2) < 0$. Si ϵ est assez petit, $tr(x^2y^2)$ a le même signe que $f_i(x^2y^2)$, donc le même signe que $f_i(y^2)$, d'où la conclusion. Notons pour terminer que, pour tout plongement g de K dans $\underline{\underline{C}}$ et tout $x \in K$, $g(x')$ est le conjugué de $g(x)$.

Bibliographie

[1] BOURBAKI (N.).- Variétés différentielles et analytiques.- Fascicule de résultats, Hermann, Paris, 1967.

[2] GROTHENDIECK (A.).- In Séminaire Cartan, 1960-61, exposé IX.

[3] LANG (S.).- Abelian varieties.- Interscience publishers, New York, 1959.

FACULTE DES SCIENCES DE
L'UNIVERSITE DE PARIS
ORSAY

1967-1968

SEMINAIRE DE GEOMETRIE ALGEBRIQUE

-:-:-:-:-:-

Exposé nº 3

DIVISEURS SUR LES TORES COMPLEXES

par M. Demazure

-:-:-:-:-:-

Cet exposé n'est qu'un démarquage du chapitre VI des "variétés kählériennes" A. Weil.

On considère un tore complexe X de dimension n , on note T son algèbre de Lie, $p : T \longrightarrow X$ l'application exponentielle et Γ le noyau de p ; p induit donc un isomorphisme de variétés analytiques complexes $T/\Gamma \xrightarrow{\sim} X$.

1. Description des faisceaux inversibles sur un tore complexe.

1.1 Rappelons (II,1) l'existence d'un isomorphisme canonique

$$H^1(\Gamma,H^0(T,\underline{O}_T^*)) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)$$

que l'on peut décrire comme suit. Si $u \longmapsto F(z,u)$ est un 1-cocycle de D dans $H^0(T,\underline{O}_T^*)$, c'est-à-dire si, pour $z \in T$ et $u \in \Gamma$, on a

$$F(z+u,u')F(z,u+u')^{-1} F(z,u) = 1 ,$$

on lui associe le $\underline{O}_T$-module inversible L_F sur X , tel que, pour tout ouvert U de X , on ait

$$\Gamma(U,L_F) = \left\{\theta \in \Gamma(p^{-1}(U),\underline{O}_T) \,|\, \theta(z+u) = \theta(z)F(z,u), z \in p^{-1}(U), u \in \Gamma\right\};$$

les sections méromorphes de L_F sur U s'identifient alors aux fonctions méromorphes θ sur $p^{-1}(U)$ telle que $\theta(z+u) = \theta(z)F(z,u)$ lorsque $\theta(z)$ est défini.

1.2 Rappelons également (I,3) l'existence d'un isomorphisme canonique

$$H^i(\Gamma,\underline{\underline{Z}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Alt}^i(\Gamma,\underline{\underline{Z}})$$

que l'on peut décrire ainsi pour $i=2$; si $(u,u') \longmapsto \alpha(u,u')$ est un 2-cocycle de Γ dans $\underline{\underline{Z}}$, c'est-à-dire si

$$\alpha(u',u'') - \alpha(u+u',u'') + \alpha(u,u'+u'') - \alpha(u,u') = 0 ,$$

alors $(u,u') \longmapsto \alpha(u,u') - \alpha(u',u)$ est bilinéaire alternée ; c'est l'image dans $\mathrm{Alt}^2(\Gamma,\underline{\underline{Z}})$ de la classe de a par l'isomorphisme donné.

1.3 On considère alors la suite exacte

$$0 \longrightarrow \underline{\underline{Z}} \longrightarrow H^0(T,\underline{O}_T) \xrightarrow{\underline{e}} H^0(T,\underline{O}_T^*) \longrightarrow 0 ,$$

où $\underline{e}(f) = e^{2\pi i f}$, et l'opérateur bord $\partial : H^1(\Gamma,H^0(T,\underline{O}_T^*)) \longrightarrow H^2(\Gamma,\underline{\underline{Z}})$ correspondant. On notera

$$\underline{A} : \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Alt}^2(\Gamma,\underline{\underline{Z}})$$

l'application composé de $-\partial$ et des deux isomorphismes précédents. Si L est un $\underline{O}_X$-module inversible, on notera aussi $\underline{A}(L)$ l'image par $\underline{A}$ de la classe de L dans $\mathrm{Pic}(X)$. Rappelons (II,2) que si on identifie $\mathrm{Alt}^2(\Gamma,\underline{\underline{Z}})$ à $H^2(X,\underline{\underline{Z}})$, $\underline{A}(L)$ est la classe caractéristique de L .

Proposition.- Soient H une forme hermitienne sur T, A sa partie imaginaire, et soit $a : \Gamma \longrightarrow \underline{\underline{U}}$ une application. Pour que

$$F_{H,a}(z,u) = a(u)e^{\pi H(z,u)+\frac{\pi}{2} H(u,u)}$$

appartienne à $Z^1(\Gamma, H^0(T,\underline{O}_T^*))$, il faut et il suffit que si $u, u' \in \Gamma$, on ait $A(u,u') \in \underline{\underline{Z}}$ et $a(u+u') = a(u)a(u')(-1)^{A(u,u')}$.

Posons $F = F_{H,a}$. On a aussitôt pour $u, u' \in \Gamma$

$$F(z+u,u')F(z,u+u')^{-1}F(z,u) = a(u)a(u')a(u+u')^{-1}\underline{e}(\tfrac{1}{2} A(u,u'))$$

Il est clair que les conditions proposées sont suffisantes. Inversement, si F est un cocycle, alors $a(u+u') = a(u)a(u')\,\underline{e}(\frac{1}{2} A(u,u'))$, ce qui entraîne que $\underline{e}(\frac{1}{2} A(u,u')) = \underline{e}(\frac{1}{2} A(u',u))$; cela donne $\frac{1}{2} A(u,u') = -\frac{1}{2} A(u,u')$ modulo 1, d'où $A(u,u') \in \underline{\underline{Z}}$, ce qui entraîne les conditions données.

1.4 Lorsque H et a satisfont aux conditions de (a), on note $L_{H,a}$ le $\underline{O}_X$-module inversible associé à $F_{H,a}$. On a donc pour tout ouvert U de X :

$$\Gamma(U,L_{H,a}) = \left\{\theta \in \Gamma(p^{-1}(U),\underline{O}_T), \theta(z+u) = a(u)\theta(z)e^{\pi H(z+\frac{u}{2},u)}\right\}.$$

On a $L_{H,a} \otimes L_{H',a'} \simeq L_{H+H',aa'}$ et $L_{0,1} \simeq \underline{O}_X$.

Théorème.- Tout module inversible L sur X est isomorphe à un module $L_{H,a}$ unique ; on a $\underline{A}(L) = -\mathcal{J}(H)$.

Remarquons d'abord que $\underline{A}(L_{H,a}) = -\mathcal{J}(H)$. En effet, on peut écrire $F_{H,a}(z,u) = \underline{e}(G(z,u))$ où

$$G(z,u) = \frac{1}{2i} H(z + \frac{u}{2}, u) + \beta(u)$$

avec $\underline{e}(\beta(u)) = a(u)$. Alors le bord de la classe de F est la classe du cocycle

$$\alpha(u,u') = G(z+u,u') - G(z,u+u') + G(z,u) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\, A(u,u') + \beta(u) + \beta(u') - \beta(u+u') \ .$$

L'image canonique de ce dernier dans $\mathrm{Alt}^2(\Gamma,\underline{\underline{Z}})$ est

$$(u,u') \longmapsto \alpha(u,u') - \alpha(u',u) = A(u,u') \ ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Remarquons ensuite que $L_{H,a} \simeq L_{H',a'}$ implique $H = H', a=a'$. En effet, $\mathfrak{J}(H) = -\underline{A}(L_{H,a}) = -\underline{A}(L_{H',a'}) = \mathfrak{J}(H')$, donc $H = H'$; alors $L_{0,a'a^{-1}} \simeq \underline{O}_X$, donc $u \longmapsto a'(u)/a(u)$ est un cobord, et il existe $f \in H^0(T,\underline{O}_T^*)$ telle que $a'(u)/a(u) = f(z+u)/f(z)$, mais cela donne $|f(z+u)| = |f(z)|$, donc f est bornée, donc constante et $a' = a$.

Soit L un $\underline{O}_X$-module inversible et soit $A = -\underline{A}(L)$. Posons $H(x,y) = A(ix,y) + i\,A(x,y)$ et $a(u) = (-1)^{B(u,u)}$, où B est une forme $\underline{\underline{Z}}$-bilinéaire sur Γ à valeurs dans $\underline{\underline{Z}}$, telle que $A(u,u') = B(u,u') - B(u',u)$. Alors les conditions a) et b) de 1.3 sont satisfaites et $\underline{A}(L_{H,a}) = -A = \underline{A}(L)$.

Pour démontrer que L est isomorphe à un $\underline{O}_X$-module de la forme $L_{H,a}$, on peut donc supposer $\underline{A}(L) = 0$. D'après II.4, L est alors associé à un cocycle de la forme $u \longmapsto \underline{e}(f(u))$ où $f : T \longrightarrow \mathbf{C}$ est une forme antilinéaire. Comme $z \longmapsto \underline{e}(\bar{f}(z))$ est holomorphe, et que son bord est

$$u \longmapsto \underline{e}(\bar{f}(z+u))\ \underline{e}(\bar{f}(z))^{-1} = \underline{e}(\bar{f}(u))$$

le cocycle donné est cohomologue à $u \longmapsto \underline{e}(2\,\mathcal{R}\,f(u)) = a(u)$ qui est de module 1, donc de la forme voulue.

Si L est un module inversible sur X, on notera $\underline{H}(L)$ et $\underline{a}(L)$ les objets définis par $L \simeq L_{\underline{H}(L),\underline{a}(L)}$. On a donc

$$\underline{A}(L) = -\mathfrak{I}\,\underline{H}(L)$$

1.5 Corollaire.- Pour tout diviseur D sur X, il existe une fonction méromorphe non nulle θ sur T, déterminée à un scalaire inversible près, telle que

$$\mathrm{div}_T(\theta) = p^*(D)$$

et

$$\theta(z+u) = \theta(z)a(u)\,e^{\pi H(z+u/2,u)}\quad ,\ u \in \Gamma,\ z \in T\ ,$$

où H et a satisfont aux conditions de 1.3.

En effet, il existe une fonction méromorphe non nulle φ sur T, telle que $\mathrm{div}_T(\varphi) = p^*(D)$. Pour chaque $u \in \Gamma$, on a donc $\varphi(z+u) = \varphi(z)\,F(z,u)$ où $F(z,u) \in \mathbb{C}^*$. On a aussitôt $F(z,u) \in Z^1(\Gamma,H^0(T,\underline{O}^*_T))$; il existe donc $f \in H^0(X,\underline{O}^*_X)$ tel que $F(z,u) = F_{H,a}(z,u)f(z+u)f(z)^{-1}$. Alors $\theta(z) = \varphi(z)f(z)^{-1}$ répond à la question. De plus, si θ' est une autre solution du problème, correspondant au cocycle $F_{H',a'}$, on a $\theta'\,\theta^{-1} \in H^0(T,\underline{O}^*_T)$, de sorte que $F_{H,a}$ et $F_{H',a'}$ sont cohomologues, donc égaux. On a alors $(\theta'/\theta)(z+u) = (\theta'/\theta)(z)$, de sorte que $\theta'/\theta = f \circ p$ où $f \in H^0(X,O^*_X) = \mathbb{C}^*$, ce qui achève la démonstration.

Une démonstration plus savante consiste à remarquer que le faisceau $\underline{O}_X(D)$ est isomorphe à un unique faisceau $L_{H,a}$, donc que D est le diviseur d'une section méromorphe de $L_{H,a}$ déterminée à un facteur constant près.

Une fonction θ méromorphe $\neq 0$ sur T satisfaisant à une équation fonctionnelle du type précédent est appelée fonction thêta. On pose

$H = \underline{H}(\theta)$, $a = \underline{a}(\theta)$ et on note $\operatorname{div}_X(\theta)$ le diviseur D sur X tel que $p^*(D) = \operatorname{div}_T(\theta)$. Tout diviseur D sur X est donc le diviseur d'une fonction théta θ déterminée à un scalaire inversible près, et on pose $\underline{H}(D) = \underline{H}(\theta)$, $\underline{a}(D) = \underline{a}(\theta)$. a donc $\underline{H}(D) = \underline{H}(\underline{O}_X(D)), \underline{a}(D) = \underline{a}(\underline{O}_X(D))$.

1.6 Corollaire.- Soit $x_o \in X$, soit $t_{x_o} : x \longmapsto x + x_o$ la translation correspondante dans X, et soit $z_o \in T$ tel que $p(z_o) = x_o$. Soient L un $\underline{O}_X$-module inversible, $A = \underline{A}(L)$ et $a = \underline{a}(L)$. Alors $\underline{A}(t^*_{x_o}(L)) = A$, $\underline{a}(t^*_{x_o}(L))(u) = a(u)\underline{e}(A(u,z_o))$.

En effet, si $H = \underline{H}(L)$, L est isomorphe à $L_{H,a}$, donc $t^*_{x_o}(L)$ est défini par le cocycle $F_{H,a}(z+z_o,u)$. Mais

$$F_{H,a}(z+z_o,u) = F_{H,a'}(z,u)f(z+u)f(z)^{-1}$$

où $a'(u) = a(u)\underline{e}(A(u,z_o))$ et $f(z) = e^{-\pi H(z,z_0)}$

De plus, la démonstration prouve que si $\theta(z)$ est une fonction théta et si $A = -\Im \underline{H}(\theta)$ et $a = \underline{a}(\theta)$, alors

$$\theta_{z_o}(z) = \theta(z+z_o)e^{-\pi H(z,z_0)}$$

est une fonction théta de diviseur $t^*_{x_o}(\operatorname{div}_X(\theta))$ telle que

$$\underline{H}(\theta_{z_o}) = \underline{H}(\theta), \underline{a}(\theta_{z_o})(u) = a(u)\underline{e}(A(u,z_o)) .$$

1.7 Corollaire.- Soient L un $\underline{O}_X$-module inversible, $H = \underline{H}(L)$ et $A = \underline{A}(L)$. Le groupe des $x \in X$ tels que $t^*_x(L) \simeq L$ est fermé dans X, et sa composante neutre est l'image dans X de

$$N = \{z \in T , A(z,T) = 0\} = \{z \in T , H(z,T) = 0\}$$

Le groupe cherché est $p(N')$ où $N' = \left\{z \in T \ , \ A(z,\Gamma) \subset \mathbb{Z}\right\}$; c'est l'intersection des noyaux des caractères $p(z) \longmapsto \underline{e}(A(z,u))$, $u \in \Gamma$, de X ; il est donc fermé dans X. Sa composante neutre est $p(N)$, où N est le plus grand sous-espace vectoriel réel de N', donc est l'ensemble des $z \in T$ tels que $A(z,\mathbb{R}\Gamma) \subset \mathbb{Z}$, i.e $A(z,T) = 0$, i.e $H(z,T) = 0$.

On dit que L est non dégénéré si $N = 0$, c'est-à-dire si A (resp. H) est non dégénérée. Si $|\det(A)|$ désigne la valeur absolue du déterminant de la forme alternée A, calculée par rapport à une base quelconque de Γ, on a aussitôt

$$\mathrm{Card}\left\{x \in X \ , \ p_x^*(L) \simeq L\right\} = |\det(A)|$$

Dans le cas général, $p(N)$ est un sous-groupe fermé de X, et le quotient $X/p(N)$ est un tore complexe, isomorphe à $(T/N)/(\Gamma/N \cap \Gamma)$. Pour que L soit isomorphe à l'image réciproque d'un module inversible sur $X/p(N)$, il faut et il suffit que $a(u) = 1$ pour $u \in \Gamma \cap N$.

2. Existence de diviseurs, théorème de Riemann-Roch.

2.1 Proposition. - a) Soit L un $\underline{O}_X$-module inversible tel que $H^0(X,L) \neq \{0\}$. Alors $H = \underline{H}(L)$ est positive. De plus si $N = \left\{x \in T \ , \ H(z,T) = 0\right\}$, L provient par image réciproque d'un module inversible sur le tore $X/p(N)$.

b) Si θ est une fonction-théta holomorphe, alors $H = \underline{H}(\theta)$ est positive. De plus si $N = \left\{z \in T \ , \ H(z,T) = 0\right\}$, chaque $z \in N$ est une période de θ.

Il suffit évidemment de démontrer b). Soit $H = \underline{H}(\theta)$, $a = \underline{a}(\theta)$. On a

$$\left|e^{\pi H(z+u,z+u)}\right| = \left|e^{\pi H(z)}\right| \left|e^{2\pi \Re H(z+\frac{u}{2},u)}\right|$$

$$= \left|e^{\pi H(z)}\right| \left|F_{H,a}(z,u)\right|^2 .$$

Il en résulte que $|\theta(z)|^2 |e^{-\pi H(z,z)}|$ est périodique, donc <u>bornée</u> ; il existe donc $C > 0$ telle que

$$|\theta(z)| \leqslant C\, e^{\pi H(z,z)}, \quad z \in T .$$

Si $\alpha \in T$ et si $H(\alpha,\alpha) < 0$, $H(z+\lambda\alpha, z+\lambda\alpha)$ tend vers $-\infty$ lorsque $|\lambda|$ augmente indéfiniment, donc $\theta(z+\lambda\alpha)$ est une fonction holomorphe de $\lambda \in \mathbf{C}$ qui tend vers 0 à l'infini, donc est identiquement nulle, ce qui est exclus.

Si $H(\alpha,\alpha) = 0$, on a pour $z \in T$, $\lambda \in \mathbf{C}$,

$$0 \leqslant H(z+\lambda\alpha, z+\lambda\alpha) = H(z,z) + 2\mathcal{R}(\lambda H(z,\alpha))$$

ce qui implique $H(z,\alpha) = 0$, donc $\alpha \in N$, puis

$$|\theta(z+\lambda\alpha)| \leqslant C\, e^{\pi(\alpha,\alpha)} ;$$

$\lambda \longmapsto \theta(z+\lambda\alpha)$ est donc constante et $\theta(z+\alpha) = \theta(z)$.

2.2 On appelle <u>formes de Riemann</u> les formes $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$-bilinéaires alternées A sur $T \times T$, entières sur $\Gamma \times \Gamma$, telles que $A(ix,iy) = A(x,y)$ et $A(ix,x) \leqslant 0$ pour $x,y \in T$, c'est-à-dire telles qu'il existe une forme hermitienne <u>positive</u> H telle que $A = -\mathcal{J}H$. D'après 2.1, $\underline{A}(L)$ est une forme de Riemann si $H^0(X,L) \neq 0$.

Si A est une forme de Riemann, et si $A = -\mathcal{J}H$ on note

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} A &= \{z \in T \,;\, A(z,T) = 0\} = \{z \in T \,;\, H(z,T) = 0\} \\ &= \{z \in T \,;\, H(z,z) = 0\} . \end{aligned}$$

Si A et A' sont deux formes de Riemann, $A+A'$ en est aussi une, et $\operatorname{Ker}(A+A') = \operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Ker} A'$. Il existe donc un sous-espace vectoriel T_0 de T et une forme de Riemann A_0 telle que $\operatorname{Ker} A_0 = T_0$ et $\operatorname{Ker} A \supset T_0$ pour toute forme de Riemann A. D'après le raisonnement fait plus haut, $p(T_0)$ est fermé dans X. Notons $X_{ab} = X/p(T_o) = (T/T_o)/(\Gamma/\Gamma \cap T_o)$. C'est le plus grand tore quotient de X possédant une forme de Riemann non dégénérée. Notons $q : X \longrightarrow X_{ab}$ la projection canonique.

On déduit aussitôt de ce qui précède :

Proposition.- a) Tout $\underline{O}_X$-module inversible L sur X possédant une section méromorphe non nulle est de la forme $q^*(L')$ et $H^o(X,L) \simeq H^o(X_{ab},L)$.

b) Tout diviseur D sur X est de la forme $q^*(D')$.

c) Toute fonction méromorphe φ sur X est de la forme $\varphi' \circ q$.

En effet, d'après 1.7 et 2.1, tout diviseur positif provient de X_{ab}, donc aussi tout diviseur d'où b) et a). Si φ est une fonction méromorphe sur X, il existe des fonctions thêta holomorphes θ_+ et θ_- telle que $\operatorname{div}(\theta_+) = \operatorname{div}(\varphi)^+$, $\operatorname{div}(\theta_-) = \operatorname{div}(\varphi)^-$ donc $\varphi = a \dfrac{\theta_+}{\theta_-}$. On applique alors 2.1 b).

On dit que X est une variété abélienne si $X = X_{ab}$, c'est-à-dire s'il existe une forme de Riemann non dégénérée sur T.

2.3 Théorème.- Soit L un $\underline{O}_X$-module inversible tel que $\underline{H}(L)$ soit positive et que $\underline{a}(L)(u) = 1$ si u appartient au noyau de $\underline{H}(L)$. Alors $H^o(X,L) \neq 0$.

On peut passer au quotient par Ker L et on est ramené au cas où H est non dégénérée. L'énoncé résulte alors de :

Théorème de Riemann-Roch.- Soit L un $\underline{O}_X$-module inversible tel que $\underline{H}(L)$ soit positive non dégénérée. Alors

$$\dim H^o(X,L)^2 = |\det \underline{A}(L)| .$$

donc (1.9)

$$\mathrm{Card}\left\{x \in X\ ,\ t_x^*(L) \simeq L\right\} = \dim H^0(X,L)^2 \ .$$

2.3 Posons $H = \underline{H}(L)$, $A = -\underline{A}(L)$, $a = \underline{a}(L)$; A est une forme $\underline{\underline{Z}}$-bilinéaire alternée non dégénérée sur $\Gamma \times \Gamma$. On peut donc décomposer Γ en somme directe $\Gamma_1 \oplus \Gamma_2$, où Γ_1 et Γ_2 sont de rang n sur $\underline{\underline{Z}}$, et où A est nulle sur $\Gamma_1 \times \Gamma_1$ et $\Gamma_2 \times \Gamma_2$. On notera T_1 (resp. T_2) le $\underline{\underline{R}}$-espace vectoriel engendré par Γ_1 (resp. Γ_2), et $p_i : T \longrightarrow T_i$, $i = 1,2$, la projection canonique. Il est clair que $T_1 \otimes_{\underline{\underline{R}}} \underline{\underline{C}} \simeq T$; en effet, il suffit de prouver qu'une base $x_1, \ldots x_n$ de T_1 est un système libre sur $\underline{\underline{C}}$. Or si $i \sum \lambda_i x_i = \sum \mu_i x_i$ $\lambda_i , \mu_i \in \underline{\underline{R}}$, on a $H(\sum \lambda_i x_i , \sum \lambda_i x_i) = A(\sum \lambda_i x_i , i \sum \lambda_i x_i) = A(\sum \lambda_i x_i , \sum \mu_i x_i) = 0$, donc $\sum \lambda_i x_i = 0$ et $\lambda_i = 0$ donc aussi $\mu_i = 0$.

Tout élément $z \in T$ s'écrit donc $a+ib$ avec $a \in T_1$, $b \in T_1$. On posera $a = \Re z$, $b = \Im z$, $\bar z = a-ib$. La forme

$$(z,z') \longmapsto H(z,\bar z')$$

est $\mathbf{C}$-bilinéaire symétrique comme A est nul sur $T_1 \times T_1$, H est réelle et symétrique sur $T_1 \times T_1$, et on a aussitôt

$$H(z,\bar z') = H(\Re z,\Re z') - H(\Im z,\Im z') + i(H(\Re z,\Re z') + H(\Re z',\Re z)) \ .$$

Soit L une forme $\underline{\underline{C}}$-linéaire sur T . Nous devons chercher la dimension de l'espace vectoriel des fonctions holomorphes θ sur T telles que

$$\theta(z+u) = \theta(z)a(u)e^{\pi H(z+u/2,u)} \quad z \in T \ , \ u \in \Gamma \ .$$

L'application $\theta(z) \longmapsto \theta(z)e^{-\frac{\pi}{2}H(z,\bar z)+L(z)}$ induit un isomorphisme de cet espace vectoriel sur l'espace vectoriel des fonctions holomorphes ψ sur T telles que

(1) $\psi(z+u) = \psi(z)\, a(u) e^{L(u)} \underline{e}(F(z,u)+\frac{1}{2}F(u,u))$, $z \in T$, $u \in \Gamma$,

où

$$F(z,z') = \frac{1}{2i}\,(H(z,z') - H(z,\bar{z}')) = - H(z,\mathcal{J}z') .$$

2.5 Mais F est $\mathbb{C}$-linéaire en z , et nulle sur $T \times T_1$. Il existe une application $\mathbb{R}$-linéaire $v : T \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T,\mathbb{C})$ nulle sur T_1 et telle que

(2) $F(z,z') = - H(z,\mathcal{J}z') = < v(z'),z >$.

D'autre part, comme $H(z,\bar{z}')$ est symétrique, on a

$$F(z,z') - F(z',z) = \frac{1}{2i}\,(H(z,z') - H(z',z)) = A(z,z') \ ;$$

remplaçant z par $p_1(z)$, on obtient

$$A(p_1(z),z') = F(p_1(z),z') = < v(z'),p_1(z) > ,$$

d'où

$$(3)\ \begin{cases} A(z,z') = A(p_1(z),z') + A(p_2(z),z') = A(p_1(z),z') - A(z',p_2(z)) \\ \qquad\qquad = A(p_1(z),z') - A(p_1(z'),z) = < v(z'),p_1(z)> - < v(z),p_1(z')> \end{cases}$$

Il en résulte que la différence $F(z,z') - < v(z'),p_1(z) >$ est <u>symétrique</u>, et s'annule pour $z , z' \in T_1$, donc s'écrit $\phi(p_2(z),p_2(z'))$ où ϕ est une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire symétrique sur T_2 ; on a donc

(4) $F(z,z') = < v(z'), z > = < v(z'),p_1(z) > + \phi\, (p_2(z),p_2(z'))$.

Si $z , z' \in T_2$, cela donne $\phi(z,z') = F(z,z') = - H(z,\mathcal{J}z')$, d'où $\mathcal{J}\phi(z,z') = - H(\mathcal{J}z,\mathcal{J}z')$, d'où enfin $\mathcal{J}\phi(z,z) = - H(\mathcal{J}z,\mathcal{J}z)$. Si $z \neq 0$, alors $z \notin T_1$, donc $\mathcal{J}z \neq 0$, donc $\mathcal{J}\phi(z,z) < 0$. <u>La forme quadratique</u> $\mathcal{J}\phi(z,z)$ <u>est donc négative non dégénérée</u>.

2.6 D'autre part, on a $a(u)a(u') = a(u+u')(-1)^{A(u,u')}$; mais d'après (3), cela entraîne que $a(u) = (-1)^{<v(u),p_1(u)>}\alpha(u)$, où α est un caractère de Γ. L'équation fonctionnelle (1) s'écrit donc d'après (2) et (4)

$$(5)\quad \psi(z+u) = \psi(z)\beta(u)\underline{e}(<v(u),z> + \tfrac{1}{2}\,\emptyset(p_2(u),p_2(u))),$$

où $\beta(u) = \alpha(u)e^{L(\gamma)}$.

Choisissant convenablement L , on peut imposer que l'homomorphisme $\beta:\Gamma \longrightarrow \underline{\underline{C}}^*$ s'annule sur Γ_1. L'équation précédente devient alors

$$(6)\begin{cases}\psi(z+u) = \psi(z) \quad , \quad u\in\Gamma_1 \; ;\\ \psi(z+u) = \psi(z)\beta(u)\underline{e}(<v(u),z> + \tfrac{1}{2}\,\emptyset(u,u)) \quad , \ u\in\Gamma_2 .\end{cases}$$

La première condition équivaut au fait que ψ se développe en série de Fourier partout convergente

$$\psi(z) = \sum_{\lambda\in\Lambda} c(\lambda)\underline{e}(<\lambda,z>) ,$$

où $\Lambda = \{\lambda \in \mathrm{Hom}_{\underline{\underline{C}}}(T,\underline{\underline{C}}),\ \lambda(\Gamma_1) \in \underline{\underline{Z}}\} \simeq \mathrm{Hom}_{\underline{\underline{Z}}}(\Gamma_1,\underline{\underline{Z}})$.

La seconde s'écrit :

$$\begin{aligned}\psi(z-u) &= \sum_{\lambda\in\Lambda} c(\lambda)\underline{e}(<\lambda,z>)\underline{e}(-<\lambda,u>)\\ &= \sum_{\lambda\in\Lambda} c(\lambda)\underline{e}(<\lambda,z>)\beta(u)^{-1}\underline{e}(-<v(u),z>)\underline{e}(\tfrac{1}{2}\emptyset(u,u))\\ &= \sum_{\lambda\in\Lambda} c(\lambda+v(u))\beta(u)^{-1}\underline{e}(\tfrac{1}{2}\,\emptyset(u,u))\underline{e}(<\lambda,z>) ,\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(7)\quad c(\lambda+v(u)) = c(\lambda)\beta(u)\underline{e}(-<\lambda,u> - \tfrac{1}{2}\,\emptyset(u,u)) .$$

Soit $\lambda\in\Lambda$. Considérons la série

$$\psi_\lambda(z) = \sum_{\gamma\in\Gamma_2} \beta(u)\underline{e}(-<\lambda,u> - \tfrac{1}{2}\,\emptyset(u,u))\underline{e}(<\lambda+v(u),z>)$$

Elle est normalement convergente sur tout compact : En effet, le module de son terme général est

$$|\beta(u)|\, e^{2\pi\mathcal{J}(<\lambda,u>)-2\mathcal{J}(<\lambda+v(u),z>)+\pi\mathcal{J}\phi(u,u)} ;$$

mais la forme quadratique $\pi\mathcal{J}\phi(z,z)$ est négative non dégénérée sur T_2 ; pour tout compact K de T, et tout $\varepsilon>0$, il existe A tel que l'expression précédente soit majorée pour $z\in K$ par $A\,e^{(1-\varepsilon)\pi\mathcal{J}\phi(u,u)}$ qui est le terme général d'une série théta convergente.

2.7 Soient alors $\lambda_1,\dots,\lambda_N$ un système de représentants de $\Lambda/v(\Gamma_2)$. Les identités (6) sont alors équivalentes à

$$\psi(z) = \sum_{i=1}^{N} c(\lambda_i)\psi_{\lambda_i}(z) ,$$

de sorte que la dimension cherchée est $N = \mathrm{Card}(\Lambda/v(\Gamma_2))$, qui n'est autre que la valeur absolue du déterminant de $v : \Gamma_2 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Gamma_1,\mathbb{Z})$, ou encore de la forme $\mathbb{Z}$-bilinéaire $\Gamma_2\times\Gamma_1 \longrightarrow \mathbb{Z}$ définie par v. Mais d'après (3), la forme $\mathbb{Z}$-bilinéaire alternée A sur $\Gamma\times\Gamma$ n'est autre que $\begin{pmatrix} 0 & v \\ -v & 0\end{pmatrix}$, de sorte que $|(\det(v)|^2 = |\det(A)|$, ce qui achève la démonstration.

2.8 <u>Corollaire</u>.- <u>Soit</u> L <u>un</u> $\underline{O_X}$<u>-module inversible tel que</u> $H^0(X,L) \neq \{0\}$. <u>On a pour tout</u> $r\in\mathbb{N}$:

$$\dim H^0(X,L^{\otimes r}) = r^m \dim H^0(X,L)$$

<u>où</u> $m = r\text{-}\dim \mathrm{Ker}\ \underline{H}(L)$ <u>est la dimension du plus grand quotient de</u> X <u>dont provient</u> L.

En effet, on peut supposer $\underline{H}(L)$ non dégénérée (2.2). Alors $\underline{A}(L^{\otimes r}) = r\underline{A}(L)$ et $|\det(r\,\underline{A}(L))| = r^{2m}|\det(\underline{A}(L))|$.

FACULTE DES SCIENCES DE
L'UNIVERSITE DE PARIS 1967-1968

ORSAY

SEMINAIRE DE GEOMETRIE ALGEBRIQUE

Exposé n° IV

PLONGEMENTS PROJECTIFS DES VARIETES ABELIENNES

par M. Demazure

Soit $X = T/\Gamma$ un tore complexe. Rappelons que X est une variété abélienne s'il existe une forme de Riemann non dégénérée sur $\Gamma \times \Gamma$ (III 2.2). Le but de cet exposé est la démonstration du théorème suivant :

Théorème. Soit X un tore complexe. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) X est une variété abélienne.

(ii) X possède un diviseur positif D non dégénéré (c'est-à-dire tel que $\{x \in X \mid t_x^*(D) = D\}$ soit fini.

(iii) Tout $\mathcal{O}_X$-module inversible sur X possède une section méromorphe non nulle (i.e. est défini par un diviseur).

(iv) Le corps des fonctions méromorphes sur X est de degré de transcendance $\dim X$.

(v) La variété analytique X est isomorphe à une sous-variété fermée d'un espace projectif complexe.

(vi) Il existe une $\mathbb{C}$-variété algébrique projective et lisse $\tilde{X}$ et un isomorphisme analytique $\varphi : X \to \tilde{X}(\mathbb{C})$.

Nous allons donner de ce théorème une démonstration indépendante des théorèmes de Kodaira et de Chow rappelés dans l'exposé I et tirée des "Variétés Kalhériennes" de A. Weil.

1. <u>Fonctions méromorphes sur un tore complexe</u>.

1.1 Remarquons d'abord qu'il résulte de III, 2.2 que toute fonction méromorphe sur X provient par image réciproque de la plus grande variété abélienne quotient X_{ab} de X. Si $\underline{\underline{C}}(X)$ désigne le corps des fonctions méromorphes sur $\underline{X}$, on a donc $\underline{\underline{C}}(X) = \underline{\underline{C}}(X_{ab})$.

1.2 <u>Lemme</u>. <u>On a</u> $\deg\mathrm{tr}_{\underline{\underline{C}}}\, \underline{\underline{C}}(X) \leqslant \dim X_{ab}$.

On peut en effet supposer $X = X_{ab}$. Soit $n = \dim X_{ab}$ et soient $f_{\underline{1}},\dots, f_{n+1} \in \underline{\underline{C}}(X)$; il existe des diviseurs positifs D_i, $i = 0,\dots,n+1$ sur X tels que

$$\mathrm{div}(f_i) = D_i - D_o .$$

Posons $\underline{O}_X(D_o) = L$. Si $r_i \in \underline{\underline{N}}$ et $\sum r_i \leqslant r$, on a

$$\Pi\, \underline{f}_i^{\,r_i} \in H^o(X,\underline{L}^{\otimes r}).$$

Mais il y a $\binom{r+n+1}{n+1}$ monômes $\Pi\, f_i^{\,r_i}$ tandis que par III.2.8 $\dim H^o(X,\underline{L}^{\otimes r}) = dr^m$, où $d = \dim H^o(X,\underline{L})$ et $m \leqslant n$. Dès que r est assez grand on a $\binom{r+n+1}{n+1} > dr^m$ et il y a donc une relation linéaire entre les $\Pi\, f_i^{\,r_i}$, donc une relation polynomiale entre les f_i, ce qui entraîne l'inégalité cherchée.

1.3 Il en résulte que $(iv) \Longrightarrow (i)$. En effet, si $\deg\mathrm{tr}_{\mathbb{C}}\, \mathbb{C}(X) = \dim X$, on a $\dim X \leqslant \dim X_{ab}$, donc $X = X_{ab}$. D'autre part, on a $(vi) \Longrightarrow (iv)$. En effet dans la situation de (vi), φ induit une injection du corps des fonctions rationnelles $\underline{\underline{C}}(V)$ de V dans $\underline{\underline{C}}(X)$. On a donc :

$$\dim X = \dim V = \deg \operatorname{tr}_{\underline{\underline{C}}} \underline{\underline{C}}(V) \leqslant \deg \operatorname{tr}_{\underline{\underline{C}}} \underline{\underline{C}}(X) \leqslant \dim X$$

d'où (iv).

Comme (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) d'après III,2.2 et 2.3, et comme (vi) $\Longrightarrow$ (v) trivialement et (v) $\Longrightarrow$ (i) d'après l'exposé I, il ne nous reste plus à démontrer que (i) $\Longrightarrow$ (vi).

<u>Dans toute la suite de l'exposé, on supposera donc que</u> X <u>est une variété abélienne</u>.

2. <u>Fonctions-thêta et systèmes linéaires</u>.

2.1 Soit L un $\underline{O}_X$-module inversible sur X ; et soit V un sous-espace vectoriel de $H^0(X,L)$. On sait associer à V une application analytique d'un ouvert de X dans l'espace projectif $\underline{\underline{P}}(V^*)$. En termes de fonctions-thêta, cette application se décrit ainsi : $H^0(X,L)$ s'identifie à l'espace vectoriel des fonctions-thêta de type $(\underline{H}(L),\underline{a}(L))$. (i.e. l'espace vectoriel formé de ces fonctions et de la constante 0). Pour $z \in T$, $\theta \mapsto \theta(v)$ est une forme linéaire sur $H^0(X,L)$, qui induit une forme linéaire φ_z sur V ; on a donc une application analytique

$$\varphi : T \to V^* .$$

Comme les fonctions de V sont toutes de même type, les points $\varphi(z+\gamma)$ et $\varphi(z)$ sont alignés avec 0 lorsque $\gamma \in \Gamma$. Si U est l'ouvert de T complémentaire de $\varphi^{-1}(0)$, on a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[rr, dashed, "\varphi"] \arrow[dd, "p"'] & & V^* \\
& U \arrow[ul, hook] \arrow[r, dashed] \arrow[d] & V^* - \{0\} \arrow[u, hook] \arrow[d, "\mathrm{can.}"] \\
X \supset & p(U) \arrow[r, dashed, "f"] & \underline{\underline{P}}(V)
\end{tikzcd}$$

et $f : p(U) \to \underline{\underline{P}}(V^*)$ est l'application analytique cherchée.

2.2 Nous allons appliquer cette construction au cas suivant. On prend un $\underline{O}_X$-module inversible L_o tel que $\underline{A}(L_o)$ soit une forme de Riemann <u>non dégénérée</u>, on prend $L = L_o^{\otimes 3}$, et on choisit pour $V \subset H^o(X, L_o^{\otimes 3})$ l'espace vectoriel formé des fonctions

$$\theta(z) = \theta_o(z+\alpha)\theta_o(z+\beta)\theta_o(z+\gamma)$$

où $\alpha+\beta+\gamma = 0$, et où θ_o est un élément convenable de $H^o(X, L_o)$. Pour choisir θ_o nous utiliserons le lemme suivant :

2.3 <u>Lemme</u> : <u>Soit</u> L_o <u>un</u> $\underline{O}_X$<u>-module inversible non dégénéré et tel que</u> $H^o(X, L_o) \neq \{0\}$ (i.e. tel que $\underline{A}(L_o)$ soit une forme de Riemann non dégénérée). <u>Il existe un diviseur positif</u> D <u>de classe</u> L_o (i.e. une fonction-thêta holomorphe θ_o de classe L_o) avec $D = \mathrm{div}(\theta)$) <u>tel que</u> :

a) <u>Toutes les composantes de</u> D <u>sont simples</u>

b) <u>Pour tout</u> $x \in X$, $x \neq 0$, <u>on a</u> $t_x^*(D) \neq D$.

Il suffit de prouver :

α) L'ensemble des $\theta \in H^o(X, L_o)$ tel que $\mathrm{div}(\theta)$ satisfasse à a) est ouvert et dense

β) L'ensemble des $\theta \in H^o(X, L_o)$ tel que $\mathrm{div}(\theta)$ satisfasse à b) est dense.

<u>Prouvons</u> α). Si D est un diviseur positif de classe L_o, l'ensemble $X_D = \{x \in X , t_x^*(D) = D\}$ est fini puisque L_o est non dégénéré ; de plus $\underline{A}(L_o)(u,v) \in \underline{\underline{Z}}$ pour $u \in \Gamma$, $v \in p^{-1}(X_D) \supset \Gamma$ (III,1.6). Si on pose $\Gamma_o = \{v \in T | \underline{A}(L_o)(T,v) \subset \underline{\underline{Z}}\}$, il en résulte que X_D est un sous-groupe du groupe <u>fini</u> $p(\Gamma_o)$; l'ensemble des X_D possibles est donc fini. D'autre part D provient d'un diviseur D' du tore $X/X_D = X' + T/\Gamma'$; la classe

L' de cet X' est telle que $\underline{a}(L')|\Gamma = \underline{a}(L_o)$, $\underline{A}(L')|\Gamma \times \Gamma = \underline{A}(L_o)$; pour chaque X_D , l'ensemble des L' possibles est donc <u>fini</u>. Enfin, si X_D et L' sont fixés, et si $X_D \neq \{0\}$, on a

$$\dim H^o(X',L') = \sqrt{|\det_{\Gamma'} \underline{A}(L')|} < \sqrt{|\det_{\Gamma} \underline{A}(L)|} = \dim H^o(X,L_o).$$

L'ensemble des $\theta \in H^o(X,L_o)$ telles que $\operatorname{div}(\theta)$ ne satisfasse pas à a) est donc la réunion d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels de $H^o(X,L_o)$ de codimension > 0 , ce qui démontre α).

<u>Prouvons</u> β). Soit $D = \operatorname{div}(\theta)$ un diviseur positif de classe L_o . Décomposons D en composantes irréductibles :

$$D = \sum_{i=1}^{n} m_i D_i \; , \; D_i = \operatorname{div}(\theta_i) \; , \; \theta = \Pi \, \theta_i^{m_i} \; .$$

Soient $z_{ij} \in T$, $i = 1,\ldots n$, $j = 1,\ldots m_i'$; posons $x_{ij} = p(t_{ij})$,

$$D' = \sum_{i,j} t^*_{x_{ij}}(D_i) = \operatorname{div}(\theta') \; ,$$

$$\theta'(z) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m_i} \theta_i(z+z_{ij}) \; .$$

Il s'agit de prouver qu'il existe des z_{ij} aussi près de 0 qu'on le veut tels que les $t^*_{x_{ij}}(D_i)$ soient deux à deux distincts.

Pour chaque i , soit X_{ii} le sous-groupe fermé de X , distinct de X , formé des $x \in X$ tel que $t_x^*(D_i) = D_i$; l'ensemble X_{ij} des $x \in X$ tels que $t_x^*(D_i) = D_j$ est vide ou est une classe suivant X_i . Pour que les $t^*_{x_j}(D_i)$ soient distincts, il suffit que

$$\forall (i,j,k,\ell) \; , \; z_{ij} - z_{k\ell} \notin p^{-1}(X_{ik}) \; .$$

Or ce système a évidemment des solutions aussi près de 0 qu'on le veut (dans $T^{\Sigma m_i}$, l'ensemble des solutions est le complémentaire de la réunion d'un nombre fini de translatés de sous-espaces vectoriels de codimension > 0).

2.4 L'assertion (i) $\Longrightarrow$ (vi) résultera du théorème suivant :

Théorème. Soit L_o un $\mathcal{O}_X$-module non dégénéré tel que $H^o(X,L_o) \neq \{0\}$. Soit $D_o = \mathrm{div}(\theta_o)$ un diviseur positif de classe L_o satisfaisant aux conditions a) et b) de 2.3. Soit $V \subset H^o(X,L_o^{\otimes 3})$ l'espace vectoriel engendré par les fonctions $\theta_{\alpha,\beta,\gamma}(z) = \theta_o(z+\alpha)\theta_o(z+\beta)\theta_o(z+\gamma)$ où $\mathrm{div}(\theta_o) = D_o$ et $\alpha+\beta+\gamma = 0$ (i.e., l'espace vectoriel tel que $\underline{\underline{P}}(V)$ corresponde à l'ensemble des diviseurs de la forme $t_x^*(D) + t_y^*(D) + t_z^*(D)$ où $x, y, z \in X$, $x+y+z = 0$). Alors l'application f définie en 2.1 induit un isomorphisme analytique de X sur l'ensemble $V(\underline{\underline{C}})$ des points complexes d'une sous-variété fermée lisse de $\underline{\underline{P}}(V^*)$. De plus l'application correspondante $\underline{\underline{C}}(V) \to \underline{\underline{C}}(X)$ est bijective.

Corollaire. Si L_o est un $\mathcal{O}_X$-module non dégénéré et tel que $H^o(X,L_o) \neq 0$, alors L_o est ample et $L_o^{\otimes 3}$ est très ample.

Corollaire. Si θ_o est une fonction-thêta holomorphe tel que $\mathrm{div}(\theta_o)$ satisfasse aux conditions a) et b) de 2.3, toute fonction méromorphe sur X est une fraction rationnelle par rapport à des translatées de θ_o.

3. Démonstration du théorème de plongement.

3.1 L'application f est partout définie (i.e. $p(U) = X$) : il s'agit de prouver que pour tout $z \in T$, il existe $\alpha, \beta, \gamma \in T$ avec $\alpha+\beta+\gamma = 0$ et $\theta_{\alpha,\beta,\gamma}(z) \neq 0$. Et en effet, il existe α tel que $\theta_o(z+\alpha) \neq 0$ et β tel que $\theta_o(z+\beta)\theta_o(z-\alpha-\beta) \neq 0$.

3.2 L'application f est injective : Soient $u, v \in T$ tels que $p(u) \neq p(v)$. Il suffit de prouver qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in T$ avec $\alpha+\beta+\gamma = 0$ et

$\theta_{\alpha,\beta,\gamma}(u) = 0$, $\theta_{\alpha,\beta,\gamma}(v) \neq 0$. Comme $p(u-v) \neq 0$, on a $\mathrm{div}\ \theta_0(z+v-u) \neq \mathrm{div}\ \theta_0(z)$ (condition b) de 2.3) ; comme ces deux diviseurs n'ont pas de composantes multiples, il existe $\delta \in T$ avec $\theta_0(\delta) = 0$, $\theta_0(\delta+v-u) \neq 0$. Posons $\alpha = \delta-u$, et choisissons β tel que $\theta_0(v+\beta)\theta_0(u+v+\delta-\beta) \neq 0$. Alors $\theta_{\alpha,\beta,\gamma}(u) = 0$, $\theta_{\alpha,\beta,\gamma}(v) \neq 0$.

3.3 <u>L'application</u> f <u>est de rang maximum</u> : il s'agit de prouver que pour tout $z_0 \in T$, l'application tangente f'_x à f en $x = p(z_0)$ est injective. Or, si on identifie l'espace tangent à X en x à T , un vecteur $v \in T$ est dans le noyau de f'_x si et seulement s'il existe un scalaire λ tel que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\theta(z_0+hv) - \theta(z)}{h} = \lambda\ \theta(z_0)$$

pour tout $\theta \in V$. Notons $\Delta_{v,z}$ l'opération de dérivation logarithmique par rapport à v au point x :

$$\Delta_{v,z}(F) = \frac{1}{F(z)} \lim_{h\to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} .$$

La condition précédente signifie donc que $\Delta_{v,z_0}(\theta_{\alpha,\beta,\gamma})$ est indépendant de α,β,γ . Or si $\Psi(z) = \Delta_{v,z}(\theta_0)$, on a aussitôt

$$\Delta_{v,z_0}(\theta_{\alpha,\beta,\gamma}) = \Psi(z_0+\alpha) + \Psi(z_0+\beta) + \Psi(z_0+\gamma) .$$

La fonction méromorphe Ψ est donc telle que $\Psi(z_0+a) + \Psi(z_0+\beta) + \Psi(z_0-\alpha-\beta)$ soit indépendant de α et β . Cela entraîne que Ψ est identiquement nul (dériver par rapport à α par exemple), donc que $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\theta_0(z+hv) - \theta_0(z)}{h} = 0$ pour tout z . La fonction $h \mapsto \theta_0(z+hv)$ est donc constante, et tout multiple de v est une période de θ_0 , ce qui contredit le fait que $\mathrm{div}(\theta_0)$ est non dégénéré.

3.4 <u>On a</u> $f(X) = \tilde{X}(\underline{\underline{C}})$, <u>où</u> $\tilde{X}$ <u>est une sous-variété algébrique lisse de l'espace projectif</u> $P(V)$ (on a $P(V)(\underline{\underline{C}}) = \underline{\underline{P}}(V^*)$).

L'application f induit un isomorphisme analytique de X sur une sous-variété analytique compacte X' de $\underline{\underline{P}}(V^*)$. Soit $\tilde{X}$ le plus petit sous-schéma fermé Y du fibré projectif $\underset{\sim}{P}(V)$ tel que $Y(\underline{\underline{C}}) \supset X'$; c'est l'ensemble des zéros de l'idéal homogène p de $S(V)$ formé des éléments qui considérés comme fonctions holomorphes sur T sont identiquement nuls : l'idéal p est donc premier et $\tilde{X}$ <u>intègre</u>. Comme $f^* : \underline{\underline{C}}(\tilde{X}) \to \underline{\underline{C}}(X)$ est injectif, on a d'après 1.2

$$\dim \tilde{X} = \deg\operatorname{tr} \underline{\underline{C}}(\tilde{X}) \leqslant \deg\operatorname{tr} \underline{\underline{C}}(X) \leqslant \dim X = \dim X'.$$

Soit $\tilde{X}_{reg}$ l'ouvert de $\tilde{X}$ formé des points lisses ; on sait que $\tilde{X}_{reg}(\underline{\underline{C}})$ est une sous-variété analytique <u>connexe</u> de $\underline{\underline{P}}(V^*)$ de dimension $\dim(\tilde{X})$ et que c'est un ouvert dense de $\tilde{X}(\underline{\underline{C}})$, (critère jacobien). Alors $X' \cap \tilde{X}_{reg}(\underline{\underline{C}})$ est un ouvert dense de X' et est fermé dans $\tilde{X}_{reg}(\underline{\underline{C}})$ puisque X' est compact. Comme

$$\dim(X' \cap \tilde{X}_{reg}(\underline{\underline{C}})) = \dim X' \geqslant \dim \tilde{X} = \dim \tilde{X}_{reg}(\underline{\underline{C}}),$$

il s'ensuit que $X' \cap \tilde{X}_{reg}(\underline{\underline{C}}) = \tilde{X}_{reg}(\underline{\underline{C}})$, donc que $\tilde{X}_{reg}(\underline{\underline{C}}) \subset X'$. Comme X' est alors dense dans $\tilde{X}(\underline{\underline{C}})$ et qu'il est compact, on a $\tilde{X}(\underline{\underline{C}}) = X'$. L'espace analytique $\tilde{X}(\underline{\underline{C}})$ est donc <u>lisse</u> : il en résulte que $\tilde{X}$ est lisse : si x est un point rationnel de $\tilde{X}$, l'anneau $\widehat{\underline{O}}_{\tilde{X},x}$ est le complété de l'anneau local de $x \in \tilde{X}(\underline{\underline{C}})$ sur la variété analytique $\tilde{X}(\underline{\underline{C}})$, donc est un anneau de séries formelles et $\underline{O}_{\tilde{X},x}$ est régulier.

3.5 f^* <u>induit une bijection</u> $\underline{\underline{C}}(\tilde{X}) \xrightarrow{\sim} \underline{\underline{C}}(X)$. Comme

$$\deg\operatorname{tr} \underline{\underline{C}}(\tilde{X}) = \dim \tilde{X} = \dim \tilde{X}(\underline{\underline{C}}) = \dim X \geqslant \deg\operatorname{tr} \underline{\underline{C}}(X),$$

l'extension $\underline{\underline{C}}(X)(f^*(\underline{\underline{C}}(\tilde{X})))$ est <u>algébrique</u>. Soit $u \in \underline{\underline{C}}(X)$; il existe donc un entier $m > 0$ et des éléments $a_i \in S^m(V)$ non tous nuls tels que

$$a_0 u^n + a_1 u^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \;.$$

La fonction $(a_0 u)$ est donc entière sur l'anneau des fonctions holomorphes sur T ; comme celui-ci est <u>intégralement clos</u> (ses localisés sont factoriels, d'après Weierstrass), la fonction $a_0 u$ est holomorphe ; d'autre part c'est une fonction-thêta de type $L_0^{\otimes 3m} = (L_0^{\otimes m})^3$. Appliquant ce qui précède au $\underline{O}_X$-module $L_0^{\otimes m}$, on en déduit qu'il existe une variété algébrique projective et lisse $\tilde{X}'$ et un isomorphisme analytique $f' : X \to \tilde{X}'(\underline{\underline{C}})$ tel que $f'^*(\underline{\underline{C}}(\tilde{X}'))$ contienne $f^*(C(\tilde{X}))$ et u . Mais l'application

$$g = f o f'^{-1} : \tilde{X}'(\underline{\underline{C}}) \to \tilde{X}(\underline{\underline{C}})$$

est telle que $g^*(\underline{\underline{C}}(\tilde{X})) \subset \underline{\underline{C}}(X')$. Elle est donc de la forme $r(\underline{\underline{C}})$, où $r : \tilde{X}' \to \tilde{X}$ est un morphisme de variétés algébriques ; comme r est bijectif, il est <u>birationnel</u>, de sorte que $g^*(\underline{\underline{C}}(\tilde{X})) = C(\tilde{X}')$, ce qui signifie que $f'^*(\underline{\underline{C}}(\tilde{X}')) = f^*(\underline{\underline{C}}(\tilde{X}))$, et entraîne $u \in f^*(\underline{\underline{C}}(\tilde{X}))$, ce qu'il fallait démontrer.

FACULTE DES SCIENCES DE
L'UNIVERSITE DE PARIS
ORSAY

1967-1968

SEMINAIRE DE GEOMETRIE ALGEBRIQUE

-:-:-:-:-:-

Exposé nº 5

LA THEORIE DE KODAIRA

par P. Deligne

-:-:-:-:-:-

nº1 . La classe de cohomologie associée à un fibré de rang 1

Soit $\mathscr{L}$ un fibré complexe de rang 1 sur une variété C^∞ V . On a prouvé (I 2.4) que la classe de cohomologie associée à $\mathscr{L}$ dans $H^2(V,\underline{\underline{C}})$ pouvait s'obtenir comme suit.

Soient $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de V , f_i une section de $\mathscr{L}$ sur U_i , et η_i une 1-forme sur U_i. Si

$$\frac{1}{2\pi i} d \operatorname{Log} (f_i^{-1} f_j) = - \eta_i + \eta_j \qquad \text{et}$$

$$\eta \mid U_i = d \cdot \eta_i$$

alors, $\eta \equiv - \mathrm{cl}(\mathscr{L})$ (1.1).

Soit Γ une connection linéaire sur le fibré $\mathscr{L}$. La courbure R de Γ est une 2-forme à valeur dans les algèbres de Lie des groupes d'automorphismes des fibres de $\mathscr{L}$, i.e. une 2-forme à valeur dans l'algèbre de Lie de $\underline{C}^*$, identifiée à $\underline{\underline{C}}$. Désignons par ∇ la dérivation covariante associée à Γ. Avec les notations précédentes, on a

$$\frac{1}{2\pi i}\, d \,\mathrm{Log}\,(f_i^{-1} f_j) = \frac{1}{2\pi i}\,(- f_i^{-1}\nabla f_i + f_j^{-1}\nabla f_j) \qquad \text{d'où}$$

$$\mathrm{cl}(\mathcal{L}) = \frac{-1}{2\pi i}\, d\,(f_i^{-1}\nabla f_i) \ .$$

On peut encore écrire, utilisant l'identité de Ricci,

$$d(f_i^{-1}\nabla f_i) = \nabla(f_i^{-1}\nabla f_i) = f_i^{-2}\nabla f_i \wedge \nabla f_i + f_i^{-1}\nabla\nabla f_i = 0 + f_i^{-1} R\, f_i = R$$

d'où enfin

$$\mathrm{cl}(\mathcal{L}) \equiv -\frac{1}{2\pi i}\; R \qquad (1.2).$$

Supposons maintenant que V soit une variété analytique complexe et que $\mathcal{L}$ soit un fibré holomorphe, de sorte que si les f_i sont des sections holomorphes de $\mathcal{L}$, le cocycle $c_{ij} = f_i^{-1} f_j$ soit holomorphe.

Introduisons sur $\mathcal{L}$ une structure hermitienne positive. On aura

$$d\,\mathrm{Log}\, f_i^{-1} f_j = d'\,\mathrm{Log}\, f_i^{-1} f_j = d'\,\mathrm{Log}\,|f_i^{-1} f_j|^2 = -\,d'\,\mathrm{Log}\,|f_i|^2 + d'\,\mathrm{Log}\,|f_j|^2$$

de sorte que

$$\mathrm{cl}(\mathcal{L}) \equiv -\frac{1}{2\pi i}\, d''\, d'\,\mathrm{Log}\,|f_i|^2 \qquad (1.3).$$

En d'autres termes, la 2-forme fermée $d''d'|f|^2$ ne dépend que de la structure hermitienne positive imposée à $\mathcal{L}$, et non de la section holomorphe f, et sa classe de cohomologie coïncide avec la classe de cohomologie de $\mathcal{L}$ au facteur $-1/2\pi i$ près.

On désignera par $\phi_{\mathcal{L}}$ la forme hermitienne vérifiant

$$d''\, d'\,\mathrm{Log}\,|f|^2 = +\,2i\,\mathfrak{I}\,\phi_{\mathcal{L}} \qquad (1.4).$$

pour toute section locale holomorphe inversible f de $\mathcal{L}$.

<u>Définition</u> **1.5** : (1) <u>On dit que</u> $\mathcal{L}$, <u>muni de sa structure hermitienne (positive)</u>, <u>est positif si la forme hermitienne</u> $\phi_{\mathcal{L}}$ <u>est définie positive.</u>

(2) <u>On dit qu'un fibré holomorphe inversible</u> $\mathcal{L}$ <u>est positif, et on écrit</u> $\mathcal{L} > 0$, <u>s'il admet une structure hermitienne positive pour laquelle il soit positif</u>.

En vertu de la proposition suivante, il en est ainsi dès que la classe de cohomologie de $\mathcal{L}$ peut être représentée par une 2-forme qui soit la partie imaginaire d'une structure hermitienne définie < 0 .

<u>Proposition</u> 1.6 : <u>Si</u> V <u>est une variété kahlérienne</u>, <u>toute</u> 2-<u>forme réelle fermée de type</u> (1,1) <u>dont la classe de cohomologie est celle de</u> $\mathcal{L}$ <u>est déduite d'une structure hermitienne sur</u> $\mathcal{L}$ <u>par</u> (1.3).

On se ramène aisément à prouver que si η est une 2-forme réelle de type (1,1) homologue à zéro, il existe une fonction réelle f telle que $\eta = i\, d''d'f$.

Par hypothèse, on a $\eta = d\alpha$, et on peut supposer α réelle ; soit β sa composante de type (1,0) de sorte que $d'\beta = 0$ et $\eta = d''\beta + \overline{d''\beta}$.

En vertu de Weil [3] II.6 th. 2 et IV.1 th. 1, on a

$$\beta = H\beta + \Delta G\beta = H\beta + d'(2\delta' G\beta)$$

où $H\beta$ est la composante harmonique de β. Dès lors, posant $g = 2\delta' G\beta$, on trouve que

$$\eta = d''d'g + \overline{d''d'g} = d''d'g + d'd''\bar{g} = d''d'(g-\bar{g}) = i\, d''d'\frac{(g-\bar{g})}{i}$$

ce qui achève la démonstration.

nº2 . <u>L'identité de Kodaira</u>

Soit V une variété hermitienne, i.e. une variété différentiable dont le fibré tangent est muni d'une structure hermitienne. Cette structure induit sur V une structure de variété riemannienne, à laquelle est associée une connection

$(\mathbf{R})$-linéaire sur le fibré tangent, de dérivée covariante ∇. Désignons par F la 2-forme partie imaginaire du produit scalaire hermitien ϕ.

Rappelons qu'on dit que V est une variété kahlérienne si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées.

(1) La connection riemannienne de V est une connection hermitienne i.e.

$$\nabla\phi = 0$$

(2) V est une variété analytique complexe, et $dF = 0$.

Soit R la courbure de la connection riemannienne d'une variété kahlérienne V de dimension n ; c'est une 2-forme de type $(1,1)$ à valeur dans les algèbres de Lie des groupes unitaires des espaces tangents. La connection hermitienne de V induit une connection hermitienne sur le fibré de rang 1 des n-vecteurs de V ; la courbure de cette connection est la 2-forme de type $(1,1)$ $\mathrm{Tr}(R)$, image de R par la différentielle de l'application déterminant, du groupe unitaire dans C^*. Cette 2-forme est purement imaginaire, et

$$\mathrm{cl}(\Omega) \equiv \frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{Tr}(R) \tag{2.1}$$

où Ω désigne le fibré des n-formes différentielles holomorphes, en vertu de (1.2). A un facteur constant près, $\frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{Tr}(R)$ est ce qu'on appelle la courbure de Ricci de V.

Soit $\mathcal{L}$ un fibré vectoriel holomorphe de rang 1 sur une variété analytique complexe V. Désignons par $\Omega^{0,q}(\mathcal{L})$ le faisceau des q-formes C^∞ de type $(0,q)$ à valeur dans $\mathcal{L}$. Le fibré $\mathcal{L}$ étant holomorphe, on dispose de

$$d'' : \Omega^{0,q}(\mathcal{L}) \longrightarrow \Omega^{0,q+1}(\mathcal{L}) ,$$

de sorte que les $\Omega^{0,q}(\mathcal{L})$ forment une résolution de $\mathcal{L}$ (théorème de Dolbault) qui est un complexe elliptique.

Supposons donné sur le fibré tangent et sur $\mathcal{L}$ une structure hermitienne, ce qui définit un élément de volume et, en chaque point, une structure hermitienne sur l'espace des q-formes à valeur dans $\mathcal{L}$. Pour deux champs de q-formes à valeur dans $\mathcal{L}$. Pour deux champs de q-formes α et β on pose $(\alpha,\beta) = \int_V (\alpha,\beta)_x dv$.

Relativement à ce produit scalaire, l'opérateur d'' a un transposé δ'' vérifiant

$$(d''\alpha,\beta) = (\alpha,\delta''\beta)$$

lorsque α ou β est à support compact. On pose comme d'habitude

$$\Delta = d''\delta'' + \delta''d'' \quad .$$

Si V est <u>compacte</u>, la formule

$$(\Delta\alpha,\alpha) = (d''\alpha,d''\alpha) + (\delta''\alpha,\delta''\alpha)$$

montre qu'une forme α est harmonique $(\Delta\alpha = 0)$ si et seulement si elle est fermée $(d''\alpha = 0)$ et cofermée $(\delta''\alpha = 0)$; d'autre part, il résulte de la théorie des complexes elliptiques que l'application évidente induit un isomorphisme entre l'espace des formes harmoniques et les espaces de cohomologie

$$H^q(\Gamma\,\Omega^{0,*}(\mathcal{L})) = H^q(V,\mathcal{L}) \quad .$$

Lorsque V est une variété kählérienne, on dispose, en outre de l'opérateur d'', d'un opérateur ∇''

$$\nabla'' : \Omega^{0,q}(\mathcal{L}) \longrightarrow T'' \underset{\underline{\underline{C}}}{\otimes} \Omega^{0,q}(\mathcal{L})$$

où T'' désigne l'antidual du fibré tangent. Cet opérateur est défini par les conditions d'être de nature locale et de coïncider avec la partie antilinéaire de

$$\nabla : \Omega^{0,q}(\theta) \longrightarrow T^* \underset{\underline{\underline{C}}}{\otimes} \Omega^{0,q}(\theta)$$

lorsque $\mathcal{L}$ est isomorphe à θ .

On vérifie que d'' est le composé de ∇'' et de l'application évidente

$$T'' \underset{\underline{\underline{C}}}{\otimes} \Omega^{0,q}(\mathcal{L}) \longrightarrow \Omega^{0,q+1}(\mathcal{L})$$

Lorsque $\mathcal{L}$ est muni d'une structure hermitienne positive, on dispose sur V de la structure kahlérienne, de la structure hermitienne $\phi_{\mathcal{L}}$ (1.4) et enfin de la structure hermitienne ϕ_{Ω} définie par

$$\mathrm{Tr}\, R = -\, 2i\, \mathfrak{I}\, \phi_{\Omega} \tag{2.2}$$

On sait que $-1/\pi\, \mathfrak{I}\, \phi_{\mathcal{L}}$ (resp. $-1/\pi\, \mathfrak{I}\, \phi_{\Omega}$) définit la classe de cohomologie de $\mathcal{L}$ (resp. du faisceau inversible $\Omega = \overset{n}{\wedge} T'$ (2.1)) ce qui justifie l'harmonie des notations.

Chaque fois que sur un vectoriel hermitien T, de structure hermitienne $(g_{\alpha\beta^*})$, on se donne une nouvelle structure hermitienne $(u_{\alpha\beta^*})$, on en déduit diverses structures sur les $\overset{i}{\wedge} T''$, et notamment la structure hermitienne sur $\overset{q}{\wedge} T'$ donnée par

$$(\varphi,\varphi)_{u;g} = \frac{1}{(q-1)!} \sum u_{\alpha\beta^*}\, \varphi^{\alpha}{}_{\alpha_2^*\dots\alpha_q^*}\, \overline{\varphi^{\beta\alpha_2\dots\alpha_q}} \tag{2.3}$$

formule dans laquelle on fait voler les indices de haut en bas grâce à g.

On dispose maintenant de tous les ingrédients de l'identité de Kodaira [1].

<u>Théorème</u> 2.4 (Kodaira) <u>Soient</u> V <u>une variété kahlérienne et</u> $\mathcal{L}$ <u>un faisceau holomorphe inversible sur</u> V <u>muni d'une structure hermitienne positive</u>. <u>On a alors, pour</u> $\alpha, \beta \in \Omega^{0,q}(\mathcal{L})$ <u>et</u> α <u>ou</u> β <u>étant à support propre</u>

$$\int(\Delta\alpha,\beta)dv = \int(\nabla''\alpha,\nabla''\beta)dv + \int(\alpha,\beta)_{\phi_{\mathcal{L}}-\phi_{\Omega};g}dv \tag{2.5}$$

<u>où</u> g <u>désigne la structure kahlérienne</u>.

De cette formule résulte aussitôt le "Vanishing Theorem" [1] :

<u>Corollaire</u> 2.6 : (Kodaira) <u>Si la variété kahlérienne</u> V <u>est compacte, et si le faisceau holomorphe inversible</u> $\mathcal{L} \otimes \Omega^{\otimes -1}$ <u>est positif (ce qui s'écrit</u> $\mathcal{L} > \Omega$), <u>les groupes de cohomologie</u>

$H^q(V,\mathcal{L})$ <u>sont nuls pour</u> $q > 0$.

En effet, en vertu de la proposition 1.5 on pourra trouver sur $\mathcal{L}$ une structure hermitienne positive telle que $\phi_{\mathcal{L}} - \phi_{\Omega}$ soit défini positif. Faisant alors dans (2.5) $\alpha = \beta$, on voit que pour $q \geqslant 1$, $\Delta\alpha = 0$ implique $\alpha = 0$.

Je n'ai pas envie d'écrire la démonstration de (2.5).

Soit X un tore complexe de dimension n , d'algèbre de Lie T , et identifions $H^q(X,\mathbb{C})$ au vectoriel des q-formes $\mathbb{R}$-linéaires sur T à valeur dans $\mathbb{C}$. Pour tout fibré vectoriel holomorphe inversible $\mathcal{L}$ sur X , désignons encore par $\phi_{\mathcal{L}}$ la forme hermitienne sur T telle que

$$cl(\mathcal{L}) = - 1/\pi \, \Im \, \phi_{\mathcal{L}} \ .$$

<u>Théorème</u> 2.7 (Mumford) <u>Soit</u> $\mathcal{L}$ <u>un fibré holomorphe inversible sur un tore complexe</u> X . <u>Si</u> $\mathcal{L}$ <u>est non dégénérée, i.e. si</u> $\phi_{\mathcal{L}}$ <u>est non dégénérée, et si</u> q <u>est le nombre de signes moins de</u> $\phi_{\mathcal{L}}$, <u>alors</u>

$$H^p(X,\mathcal{L}) = 0 \quad \underline{\text{pour}} \quad p \neq q \ .$$

Le théorème de Riemann-Roch donne alors

$$(-1)^q \dim H^q(X,\mathcal{L}) = \int_X \frac{cl(\mathcal{L})^n}{n!} = \mathrm{Pf}(cl(\mathcal{L})) \tag{2.8}$$

où Pf désigne un pfaffien.

Notons tout d'abord que toute forme hermitienne définie positive sur T détermine sur X une structure kahlérienne invariante par translation dont le tenseur de courbure est nul. Relativement à une telle structure hermitienne, on a

$$\phi_{\mathcal{L}}(x,y) = (x,H_{\mathcal{L}}\, y) \tag{2.9}$$

avec $H_{\mathcal{L}}$ hermitien. De plus, on peut choisir la structure hermitienne sur T de sorte que la somme des q valeurs propres négatives de $H_{\mathcal{L}}$ soit plus petite, en valeur absolue, que toute valeur propre positive de $H_{\mathcal{L}}$.

De même, pour les p-formes antilinéaires à valeur dans $\mathcal{L}$, (muni d'une structure hermitienne induisant $\phi_{\mathcal{L}}$) on aura en tout point

$$(\alpha,\beta)_{\phi_{\mathcal{L}};g} = (\alpha, H^p_{\mathcal{L}}\,\beta) \qquad (2.10)$$

et on vérifie aisément que les valeurs propres de $H^p_{\mathcal{L}}$ sont les sommes de p valeurs propres distinctes de $H_{\mathcal{L}}$. L'opérateur hermitien $H^p_{\mathcal{L}}$ est donc défini positif lorsque $p > q$ et on en déduit comme en 2.6 que

$$H^p(X,\mathcal{L}) = 0 \quad \text{pour} \quad p > q \ .$$

Si on applique le même raisonnement au dual de $\mathcal{L}$, on trouve que

$$H^p(X,\mathcal{L}') = 0 \quad \text{pour} \quad p > n-q$$

donc, par dualité de Serre,

$$H^p(X,\mathcal{L}) = 0 \quad \text{pour} \quad p < q$$

ce qui achève la démonstration.

nº3 . Le critère d'amplitude de Kodaira

Théorème 3.1 (Kodaira [2]) Pour qu'un fibré holomorphe inversible $\mathcal{L}$ sur une variété analytique complexe compacte V soit ample, il faut et il suffit qu'il soit positif.

Rappelons qu'on dit que $\mathcal{L}$ est ample si un de ses multiples est très ample, i.e. définit un plongement de V dans un espace projectif. Si sur V existe un fibré ample, ou un fibré positif, V sera une variété kählérienne ; on suppose donc V kählérienne de dimension $n > 0$. On sait déjà (I 2.3) qu'un fibré très ample est positif ; un fibré ample l'est aussi d'après (1.6).

On dira qu'une 2-forme η de type $(1,1)$ est positive s'il existe une forme hermitienne définie positive ϕ telle que $\eta = -\,\mathfrak{J}(\phi)$. Le théorème résultera de l'énoncé plus précis :

Lemme 3.2 : <u>Il existe sur</u> V <u>une</u> **2**-<u>forme réelle de type</u> $(1,1)$ η_0 , <u>telle que tout fibré</u> $\mathcal{L}$ <u>vérifiant</u> $cl(\mathcal{L}) > \eta_0$ <u>soit très ample, l'assertion</u> $cl(\mathcal{L}) > \eta_0$ <u>signifiant qu'il existe une</u> **2**-<u>forme fermée</u> η <u>dans</u> $cl(\mathcal{L})$ <u>telle que</u> $\eta - \eta_0 > 0$.

Si P est un point de V , on désignera par V_P la variété déduite de V en faisant éclater P , et par f la projection de V_P sur V . L'image réciproque de P est un diviseur sur V_P , désigné par $\bar{P}$; on sait que $\mathcal{O}(-\bar{P})$ est très ample relativement à f .

Lemme 3.3 : <u>La classe de cohomologie de</u> $\mathcal{O}(-\bar{P})$ <u>peut se représenter par une</u> **2**-<u>forme réelle de type</u> $(1,1)$, <u>nulle en dehors d'un petit voisinage de</u> $\bar{P}$, <u>définie</u> $\geqslant 0$ <u>dans un voisinage plus petit et dont la restriction à</u> $\bar{P}$ <u>est</u> > 0

Soit x_i un système de coordonnées locales près de P les x_i s'annullant en P ; on définit une structure hermitienne sur $\mathcal{O}(-\bar{P})$ en posant

$$\|f\|^2 = \frac{|f|^2}{\rho(\sum |x_i|^2)} \qquad (3.4)$$

où ρ est une quelconque fonction $C^\infty \geqslant 0$, nulle seulement en 0 , constante pour $x \geqslant 2\varepsilon$ et égale à l'identité pour $x \leqslant \varepsilon$.

On aura alors, pour toute section locale f de $\mathcal{O}(-\bar{P})$,

$$\begin{cases} d''d'\operatorname{Log}\|f\|^2 = 0 \quad \text{si} \quad \sum |x_i|^2 \geqslant 2\varepsilon , \\ d''d'\operatorname{Log}\|f\|^2 = -(\sum |x_i|^2)^{-2} \Big\{ \sum |x_i|^2 . \sum \overline{dx}_i \wedge dx_i \quad \sum x_i \overline{dx}_i \wedge \sum x_j \overline{dx}_j \Big\} , \\ \qquad\qquad \text{si} \quad \sum |x_i|^2 \leqslant \varepsilon . \end{cases}$$

Prenant sur V_p les coordonnées locales $x_1 t_2 \ldots t_n$ telles que $x_1 t_i = x_i$, on peut encore écrire pour $\sum |x_i|^2 \leqslant \varepsilon$:

$$d''d'\operatorname{Log}\|f\|^2 = (1+\sum |t_i|^2)^{-2} \Big\{ \sum dt_i \wedge \overline{dt}_i + \sum_{i<j} (t_i dt_j - t_j dt_i) \wedge \overline{(t_i dt_j - t_j dt_i)} \Big\}$$

ce qui vérifie 3.3.

Notons la formule

$$dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n = x_1^{n-1}\; dx_1\wedge dt_2\wedge\ldots\wedge dt_n \quad . \qquad (3.5)$$

Elle signifie que

$$\Omega_{V_P} \sim f^*\Omega_V((n-1)\bar{P}) \quad . \qquad (3.6)$$

Les calculs faits en (3.3) sont "uniformes en P ". Le lemme suivant est dès lors conséquence immédiate de (3.3) et (3.6) :

<u>Lemme</u> 3.7 : <u>Il existe sur</u> V <u>une</u> 2-<u>forme réelle de type</u> (1,1) η_0 <u>telle que tout fibré</u> $\mathcal{L}$ <u>vérifiant</u> $cl(\mathcal{L}) > \eta_0$ <u>vérifie aussi</u> :

(1) <u>Pour tout point</u> P <u>de</u> V , <u>on a</u>

$$f^*\mathcal{L}(-\bar{P}) > \Omega_{V_P} \qquad \underline{\text{et}} \qquad f^*\mathcal{L}(-2\,\bar{P}) > \Omega_{V_P} \quad .$$

(2) <u>Quels que soient les points</u> P <u>et</u> Q <u>de</u> V , <u>désignant par</u> V_{PQ} <u>la variété déduite de</u> V <u>en faisant éclater</u> P <u>et</u> Q , <u>on a</u>

$$f^*\mathcal{L}(-\bar{P} - \bar{Q}) > \Omega_{V_{PQ}} \quad .$$

On peut en effet réécrire ces formules sous les formes

$$f^*(\mathcal{L}\otimes\Omega_V^{\otimes -1})(-n\;\bar{P}) > 0$$

$$f^*(\mathcal{L}\otimes\Omega_V^{\otimes -1})(-(n+1)\bar{P}) > 0$$

$$f^*(\mathcal{L}\otimes\Omega_V^{\otimes -1})(-n\bar{P} - n\bar{Q}) > 0 \quad .$$

Avec les notations de (3.7), si un fibré $\mathcal{L}$ sur V vérifie $cl(\mathcal{L}) > \eta_0$, il résulte du "Vanishing Theorem" que

$$H^1(V_P , f^*\mathcal{L}(-\bar{P})) = H^1(V_P , f^*\mathcal{L}(-2\,\bar{P}) = 0 \qquad (3.8)$$

$$H^1(V_{PQ} , f^*\mathcal{L}(-\bar{P}-\bar{Q})) = 0 \quad . \qquad (3.9)$$

Considérons sur V_P ou V_{PQ} les suites exactes de faisceaux

$$0 \longrightarrow f^*\mathcal{L}(-\bar{P}) \longrightarrow f^*\mathcal{L} \longrightarrow f^*\mathcal{L}/_{f^*\mathcal{L}(-\bar{P})} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow f^*\mathcal{L}(-2\bar{P}) \longrightarrow f^*\mathcal{L}(-\bar{P}) \longrightarrow f^*\mathcal{L}(-\bar{P})/_{f^*\mathcal{L}(-2\bar{P})} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow f^*\mathcal{L}(-\bar{P}-\bar{Q}) \longrightarrow f^*\mathcal{L} \longrightarrow f^*\mathcal{L}/_{f^*\mathcal{L}(-\bar{P}-\bar{Q})} \longrightarrow 0 \ .$$

Les suites exactes de cohomologie définies par ces suites exactes montrent, compte tenu de (3.8) et (3.9), les surjectivités

$$H^0(V_P,f^*\mathcal{L}) \longrightarrow H^0(V_P,f^*\mathcal{L}/_{f^*\mathcal{L}(-\bar{P})}) \longrightarrow 0 \tag{3.10}$$

$$H^0(V_P,f^*\mathcal{L}(-\bar{P})) \longrightarrow H^0(V_P,f^*\mathcal{L}(-\bar{P})/_{f^*\mathcal{L}(-2\bar{P})}) \longrightarrow 0 \tag{3.11}$$

$$H^0(V_{P,Q},f^*\mathcal{L}) \longrightarrow H^0(V_{P,Q},f^*\mathcal{L}/_{f^*\mathcal{L}(-\bar{P}-\bar{Q})}) \longrightarrow 0 \ . \tag{3.12}$$

Notons que

$$H^0(V,\mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} H^0(V_P,f^*\mathcal{L}) \ ; \tag{3.13}$$

c'est trivial pour $n = 1$, et résulte d'un argument de "profondeur" si $n > 1$: on a alors (théorème d'Hartogs)

$$H^0(V,\mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} H^0(V-\{P\},\mathcal{L}) \ .$$

Désignons par $\mathcal{L}_P$ la fibre $(\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}} \mathbb{C})$ de $\mathcal{L}$ en P. On a

$$H^0(V_P,f^*\mathcal{L}/_{f^*\mathcal{L}(-\bar{P})}) = H^0(\bar{P},f^*\mathcal{L}_P) \xleftarrow{\sim} \mathcal{L}_P \qquad \text{et}$$

$$H^0(V_P,f^*\mathcal{L}(-\bar{P})/_{f^*\mathcal{L}(-2\bar{P})}) = H^0(\bar{P},f^*\mathcal{L}_P \otimes \mathcal{O}(-\bar{P})) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}(T_P,\mathcal{L}_P) \ ,$$

où T_P désigne l'espace tangent de V en P, de sorte que (3.10), (3.11) et (3.12) se réécrivent :

$$H^0(V,\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{L}_P \longrightarrow 0 \tag{3.14}$$

$$H^0(V,\mathcal{L}\otimes\mathfrak{m}_P) \longrightarrow \mathrm{Hom}(T_P,\mathcal{L}_P) \longrightarrow 0 \tag{3.15}$$

$$H^0(V,\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{L}_P\otimes\mathcal{L}_Q \longrightarrow 0 \ . \tag{3.16}$$

Rappelons que ces flèches sont surjectives quels que soient P et Q dans V, pourvu que $cl(\mathcal{L}) > \eta_0$ (3.7).

La formule (3.14) signifie que $\mathcal{L}$ est engendré par ses sections, la formule (3.15) signifie que l'application de V dans un espace projectif, associée à $\mathcal{L}$, est une immersion, la formule (3.16) signifie que cette application est injective, donc un plongement. Ceci prouve (3.2), et achève la démonstration de (3.1).

Corollaire 3.17 : Pour qu'une variété analytique complexe compacte soit sous-jacente à une variété algébrique projective, il faut et il suffit qu'elle admette une structure kählérienne dont la 2-forme fondamentale appartienne à une classe de cohomologie rationnelle.

Cela résulte de (3.1) et du fait que sur une variété analytique complexe admettant une structure kählérienne, toute classe de cohomologie entière de type (1,1) provient d'un fibré holomorphe de rang 1 .

Corollaire 3.18 : Toute variété kählérienne compacte telle que $h^{0,2} = 0$ est une variété projective.

Bibliographie

[1] KODAIRA (K.).- On a differential-geometric method in the theory of analytic stacks.- Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A., 39, 1953, 1268-1273.

[2] KODAIRA (K.).- On Kähler varieties of restricted type (an intrinsic characterisation of algebraic varieties).- Ann. of Math., vol. 60, nº 1 1954, 28-48.

[3] WEIL (André).- Introduction à l'étude des Variétés Kählériennes.- Hermann, Paris, 1958.

FACULTE DES SCIENCES DE
L'UNIVERSITE DE PARIS
ORSAY

967-1968

SEMINAIRE DE GEOMETRIE ALGEBRIQUE

-:-:-:-:-:-

Exposé nº VI

SCHEMAS ABELIENS - FONCTEUR DE PICARD.

par M. Raynaud

-:-:-:-:-:-

§ 1. Généralités sur les schémas abéliens.

Définition 1.1. On appelle variété abélienne sur un corps k , un k-groupe algébrique A , lisse propre et connexe.

Nous montrerons dans un instant qu'une variété abélienne A est un groupe algébrique commutatif et nous verrons dans l'exposé VIII, que A est une variété projective. Il en résulte que lorsque k est le corps des complexes, la définition ci-dessus est en accord avec la définition d'une variété abélienne donnée dans I § 1 .

Définition 1.2. Soit S un schéma. Un S-schéma abélien A est un S-schéma en groupes, lisse et propre sur S , à fibres connexes.

Si $S' \longrightarrow S$ est un morphisme de schémas, le S'-schéma en groupes $A_{S'} = A \times_S S'$ est un S'-schéma abélien. En particulier, si $s \in S$, la fibre A_s de A au-dessus de s est une variété abélienne sur le corps résiduel

$k(s)$ de s. Intuitivement, un S-schéma abélien est donc une (jolie) famille algébrique de variétés abéliennes paramétrée par S.

<u>Exercice</u> (sans intérêt). montrer qu'un S-schéma en groupes G, plat et localement de présentation finie sur S, dont les fibres sont des variétés abéliennes et un S-schéma abélien.

<u>Proposition</u> **1.3.** Soit S un schéma limite projective filtrante d'une famille S_i, $i \in I$, de schémas affines et soit A un S-schéma abélien. Alors il existe $i \in I$. un S_i-schéma abélien A_i et un S-isomorphisme de schémas en groupes $A \xrightarrow{\sim} (A_i) \times_{S_i} S$ (autrement dit A provient d'un schéma abélien sur S_i pour i assez grand).

<u>Démonstration</u>. Le schéma A est de présentation finie sur S. En effet, il est propre sur S donc séparé et de type fini et il est lisse sur S, donc localement de présentation finie. Il résulte alors de la théorie générale du passage à la limite projective que A provient pour i assez grand d'un schéma A_i, de présentation finie sur S_i (EGA IV 8.8.2). On peut de plus supposer que A_i est lisse et propre sur S_i (EGA IV 17.7.8 et 8.10.5) et que la structure de schéma en groupes sur A provient d'une structure de schéma en groupes sur A_i (SGA 3 VI_B 10.1). Les fibres de A étant géométriquement connexes, on peut supposer qu'il en est de même des fibres de A_i (cf. EGA IV 9.7.7) ; mais alors A_i est un S_i-schéma abélien.

Comme tout schéma affine S est limite projective filtrante de schémas affines de type fini sur $\mathbf{Z}$, la proposition **1.3** permet, dans une certaine mesure, de ramener l'étude locale des schémas abéliens au cas où la base est noethérienne et même excellente. Pour cette raison, sauf mention expresse du contraire, <u>les schémas considérés dans la suite seront supposés localement noethériens</u>.

<u>Proposition</u> 1.4. Soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme propre et plat tel que pour tout $s \in S$ on ait $\Gamma(X_s, O_{X_s}) = k(s)$ (ce sera le cas si les fibres de f sont géométriquement intègres ou plus généralement si les fibres de f sont séparables et géométriquement connexes). Alors on a $f_*(O_X) = O_S$ <u>universellement</u>. Cela signifie que le morphisme canonique $O_S \longrightarrow f_*(O_X)$ est un isomorphisme et que la formation de $f_*(O_X)$ commute aux changements de base. Autrement dit, pour tout diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} X & \longleftarrow & X' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ S & \xleftarrow{g} & S' \end{array}$$

l'application canonique $g^* f_*(O_X) \longrightarrow f'_*(O_{X'})$ est un isomorphisme.

<u>Démonstration</u>. La proposition résulte de EGA III 7.8.6 et 7.8.8.

<u>Corollaire</u> 1.5. Si A est un S-schéma abélien, et si f est son morphisme structural, on a $f_*(O_A) = O_S$ universellement.

Les démonstrations qui suivent sont extraites de [1] chap. 6 § 1.

<u>Proposition</u> 1.6. Soit

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle p}\searrow & & \swarrow{\scriptstyle q} \\ & S & \end{array}$$

un diagramme commutatif de schémas. On suppose :

a) S est connexe.

b) $p_*(O_X) = O_S$.

c) il existe $s \in S$ tel que $f_s(X_s)$ soit (ensemblistement) un point de

Y_s .

Alors f est un S-morphisme constant (i.e. il existe une section $\eta : S \longrightarrow Y$ de Y au-dessus de S telle que $f = \eta \circ p$) dans chacun des trois cas suivants :

1) $f(X)$ est contenu dans un ouvert de Y affine sur S (ce sera en particulier le cas si S est artinien).

2) Le morphisme p est à la fois ouvert et fermé ; p possède une S-section $\varepsilon : S \longrightarrow X$ et ou bien Y est séparé sur S, ou bien p est à fibres connexes).

3) Le morphisme p est propre et plat sur S .

Démonstration. 1) On peut supposer Y affine sur S , auquel cas f se factorise à travers $\operatorname{Spec} f_*(O_X)$ qui est égal à S d'après b), d'où 1).

2) Le morphisme $\eta = f \circ \varepsilon$ définit une section de Y au-dessus de S . Pour voir que $f = \eta \circ p$, il nous suffit de montrer que l'image réciproque Z de la diagonale de $Y \times_S Y$ par le morphisme

$$X \longrightarrow Y \times_S Y$$

$$x \longmapsto (f(x) , \eta \circ p(x))$$

est égale à X . Soit $\underline{E}$ la partie de S formée des points t de S tels que Z_t ait même espace sous-jacent que X_t .

i) $\underline{E}$ est ouvert dans S et si E désigne le sous-schéma ouvert de S ayant même espace sous-jacent que $\underline{E}$, on a $Z_E = X_E$. Pour établir ce point, on peut supposer S affine. Soit $t \in \underline{E}$, de sorte que $y = \eta(t)$ est égal ensemblistement à $f_t(X_t)$. Soit V un ouvert affine de Y contenant y . Comme p est fermé, $p(X-f^{-1}(V))$ est un fermé de S , qui évidemment ne contient pas t. Il existe donc un ouvert S' de S, contenant t, tel que $f^{-1}(V) \supset X_{S'}$. Quitte à faire le changement de base $S' \longrightarrow S$, on peut supposer que f se factorise à travers un ouvert de Y, affine sur S, mais alors $Z = X$ d'après 1).

ii) Montrons que $S-E$ est ouvert dans S, ce qui achévera la démonstration de 2), compte tenu de a) et c) et de i).

<u>1er cas</u> : Y est séparé sur S. Le sous-schéma Z est alors fermé. Comme $S-E = p(X-Z)$, $S-E$ est ouvert puisque p est ouvert.

<u>2ème cas</u> : Les fibres de p sont connexes. Comme S est localement noethérien, le morphisme $\eta : S \longrightarrow Y$ est quasi-compact et par suite η ne factorise en $S \xhookrightarrow{\bar{\eta}} \bar{S} \hookrightarrow Y$, où $\bar{S}$ est un sous-schéma fermé de Y et $\bar{\eta}$ une immersion ouverte (EGA I 9.5.10). Il est clair alors que pour tout $t \in S$, $\eta(t)$ est une partie à la fois ouverte et fermée de $(\bar{S})_t$. Soit $\bar{Z} = f^{-1}(\bar{S})$. Comme p est ouvert $p(X-\bar{Z})$ est un ouvert de S, disjoint de E. Il nous suffit donc de montrer que $\underline{E} = S-p(X-\bar{Z})$. Or, si $t \in S-p(X-\bar{Z})$, $f_t : X_t \longrightarrow Y_t$ se factorise ensemblistement à travers $(\bar{S})_t$. Par suite $Z_t = f_t^{-1}[\eta(t)]$ est une partie à la fois ouverte et fermée de X_t, non vide (elle contient $\varepsilon(t)$). Le schéma X_t étant connexe, Z_t a donc même espace sous-jacent que X_t ; c'est dire que $t \in \underline{E}$.

3) L'hypothèse $p_*(O_X) = O_S$ entraîne que $f(X)$ contient les point maximaux de S. Comme f est fermé, f est donc surjectif et par suite fidèlement plat. S'il existe une section $\eta : S \longrightarrow Y$ telle que $f = \eta \circ p$, est nécessairement unique et il en est de même après tout changement de base $T \longrightarrow S$. D'après la théorie de la descente fpqc (SGA 1 VIII) il suffit de prouver l'existence de η après avoir fait le changement de base fidèlement plat quasi-compact $X \longrightarrow S$. Notons que les hypothèses a), b) et c) sont

conservées (cf. EGA III 4.3.1) et que $p_1 : X \times_S X \longrightarrow X$ possède une section sur X : la section diagonale. Le morphisme p_1 étant propre et plat, il est fermé et ouvert (EGA IV 2.4.6) et ses fibres sont connexes d'après le théorème de connexion de Zariski (EGA III 4.3.1). On est donc ramené au cas 2).

<u>Exercice</u>. Montrer que dans 3) on peut remplacer la condition "p est plat" par "p est universellement ouvert".

<u>Corollaire</u> 1.7. Soient S un schéma connexe, $p : X \longrightarrow S$ un morphisme propre et plat tel que $p_*(O_X) = O_S$, G un S-schéma en groupes, $(f,g) : X \longrightarrow G$ deux S-morphismes. Supposons qu'il existe $s \in S$ tel que $f_s = g_s$; il existe alors une S-section η $S \longrightarrow G$ telle que $f = (\eta \circ p).g$ (où le point désigne le produit dans le groupe $G(X)$).

<u>Démonstration</u>. On applique 1.6 au morphisme $f.g^{-1}$.

<u>Corollaire</u> 1.8. Considérons un diagramme cartésien de schémas :

$$\begin{tikzcd} & X \times_S Y \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ X \arrow[dr, "q_1"'] & & Y \arrow[dl, "q_2"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

On suppose : a) q_1 est propre et plat, et $(q_1)_*(O_X) = O_S$ universellement.

b) Y est connexe et possède une section $\varepsilon_2 : S \longrightarrow Y$.

Soit d'autre part $w : X \times_S Y \longrightarrow G$ un S-morphisme de $X \times_S Y$ dans un S-schéma en groupes G . Alors il existe des S-morphismes $u : X \longrightarrow G$ et $v : Y \longrightarrow G$ tels que $w = (u \circ p_1).(v \circ p_2)$.

Démonstration. On applique 1.6 en prenant pour f le Y-morphisme :

$$X \times_S Y \longrightarrow G \times_S Y$$

$$(x,y) \longmapsto [f(x,y)f(x,\varepsilon_2(y))^{-1},y]$$

Corollaire 1.9. Soient A un S-schéma abélien et G un S-schéma en groupes. Alors tout S-morphisme $f : A \longrightarrow G$ qui envoie la section unité de A sur la section unité de G est un morphisme de groupes.

Démonstration. On applique 1.8 en prenant pour w le morphisme $f \circ \mu : A \times_S A \longrightarrow G$, où $\mu : A \times_S A \longrightarrow A$ est le morphisme de multiplication $(a,a') \longmapsto (aa')$.

Corollaire 1.10. Un S-schéma abélien A est un schéma en groupes commutatif.

Démonstration. On note que d'après 1.9 le morphisme de passage à l'inverse $a \longmapsto a^{-1}$ est un morphisme de groupes.

Corollaire 1.11. Soit X un S-schéma muni d'une S-section $\varepsilon : S \longrightarrow X$. Alors il existe au plus une structure de S-schéma abélien sur X pour laquelle ε est la section unité.

Démonstration. D'après 1.9 l'application identique de X est nécessairement un morphisme de groupes.

§ 2. Le foncteur de Picard.

2.1. Nous aurons besoin de résultats élémentaires sur la théorie des faisceaux et les topologies de Grothendieck pour lesquels nous renvoyons le lecteur à SGA 3 IV et SGA 4. En dehors de la topologie de Zariski (citée Zar s'il y a lieu), nous utiliserons les topologies suivantes :

i) la topologie <u>étale</u> (citée et)

ii) la topologie <u>fidèlement plate localement de présentation finie</u> (fppf).

iii) la topologie <u>fidèlement plate quasi-compacte</u> (fpqc).

Rappelons que la catégorie Sch/S des schémas sur S est une sous-catégorie pleine de la catégorie des faisceaux sur Sch/S pour chacune des topologies précédentes et nous identifions un schéma au faisceau qu'il représente. Soit $u : F \longrightarrow G$ un morphisme de foncteurs contravariants sur Sch/S à valeurs dans Ens et (P) une propriété de morphismes de schémas, stable par changement de base. On dit que u vérifie (P) si la condition suivante est satisfaite : pour tout diagramme cartésien de foncteurs

$$\begin{tikzcd} T\times_G F \arrow[r] \arrow[d, "u_T"'] & F \arrow[d, "u"] \\ T \arrow[r, "v"] & G \end{tikzcd}$$

dans lequel T est un <u>schéma</u> et v un S-morphisme, alors $T\times_G F$ est un schéma et le morphisme u_T vérifie (P).

2.2. Rappelons que le <u>groupe multiplicatif</u> $\underline{\mu}$ est le foncteur en groupes commutatif

$$\begin{aligned} Sch/Z &\longrightarrow Gr \\ T &\longmapsto \Gamma(T, O_T^*) \end{aligned}$$

Il est représentable par Spec $Z[X, X^{-1}]$. Pour tout schéma T, $\underline{\mu}(T)$ est le groupe des automorphismes du O_T-module O_T. Par suite $H^1_{zar}(X,\underline{\mu}) = H^1(X,O_X^*)$, est canoniquement isomorphe au groupe des classes, à un isomorphisme près, de faisceaux inversibles sur X, c'est-à-dire au groupe de Picard Pic(X) de X. Compte tenu de la descente fpqc des faisceaux quasi-cohérents (SGA 3 VIII), un élément de $H^1_{fpqc}(X,\mu)$ définit un faisceau quasi-cohérent L sur X , qui localement pour la topologie fpqc est isomorphe à O_X , par suite L est aussi un faisceau inversible. D'où la proposition suivante :

<u>Proposition</u> 2.3. Les monomorphismes canoniques :

$$H^1_{zar}(X,\mu) \hookrightarrow H^1_{et}(X,\mu) \hookrightarrow H^1_{fppf}(X,\mu) \hookrightarrow H^1_{fpqc}(X,\mu)$$

sont des isomorphismes. Dans la suite, la valeur commune de ces groupes sera désignée par $H^1(X,\mu)$. Le groupe $H^1(X,\mu)$ est canoniquement isomorphe au groupe Pic(X) des classes de faisceaux inversibles sur X .

2.4. Soit maintenant $f : X \longrightarrow S$ un S-schéma. On se propose d'étudier les faisceaux inversibles sur X , <u>relativement à</u> S . Pour cela introduisons le foncteur contravariant suivant

$$Sch/S \longrightarrow \text{Groupes commutatifs}$$

$$T \longmapsto Pic(X_T) \quad \text{où} \quad X_T = X \times_S T$$

Lorsque T parcourt les ouverts de S , le préfaisceau $T \longmapsto Pic(X_T)$ n'est pas en général un faisceau pour la topologie de Zariski (en effet, un élément de Pic(X) qui provient d'un élément de Pic(S) est localement nul sur S mais n'est pas nécessairement nul) ; à fortiori $T \longmapsto Pic(X_T)$ n'est pas un faisceau pour chacune des topologies plus fines considérées plus haut, donc n'est pas en général représentable. Par passage au faisceau associé, pour une topologie convenable, on se ramène à considérer un foncteur qui est un faisceau. Pour des raisons techniques on choisit la <u>topologie fppf</u>, d'où la définition suivante :

Définition 2.5. Soit $f : X \longrightarrow S$ un S-schéma. On appelle foncteur de Picard relatif de X au-dessus de S et on note $\underline{\mathrm{Pic}}_S(X)$ le faisceau fppf sur Sch/S , associé au préfaisceau $T \longmapsto \mathrm{Pic}(X_T)$. On note $\mathrm{Pic}_S(X)$ le groupe $\underline{\mathrm{Pic}}_S(X)(S)$ des points de $\underline{\mathrm{Pic}}_S(X)$ à valeurs dans S.

Notons que la formation du foncteur $\underline{\mathrm{Pic}}_S(X)$ est compatible avec tout changement de base $S' \longrightarrow S$ et que le groupe $\mathrm{Pic}_S(X)$ se calcule à l'aide du "petit site fppf" sur S. On sait que le faisceau fppf associé au préfaisceau $T \longmapsto H^1(X_T, \underline{\mu})$ est le faisceau image directe supérieure $R^1 f_{*\,\mathrm{fppf}}(\underline{\mu})$ d'où la proposition suivante :

Proposition 2.6. Avec les notations de 2.5, on a

$$\mathrm{Pic}_S(X) = H^0(S, R^1 f_{*\,\mathrm{fppf}}(\underline{\mu})).$$

2.6. Rigidifications.

Définition 2.7. Soient $f : X \longrightarrow S$ un S-schéma, $e : S \longrightarrow X$ une section de f et L un faisceau inversible sur X. Une rigidification de L le long de e est la donnée d'un isomorphisme $\alpha : \mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} e^*(L)$. Si (L,α) et (M,β) sont deux faisceaux inversibles sur X, rigidifiés le long de e, un isomorphisme $u(L,\alpha) \xrightarrow{\sim} (M,\beta)$ est la donnée d'un isomorphisme $u : L \xrightarrow{\sim} M$ tel que $e^*(u)\alpha = \beta$. On note $\mathrm{Pic}_e(X)$ le groupe des classes, à un isomorphisme près, de faisceaux inversibles sur X, rigidifiés le long de e. On a alors un morphisme canonique $\mathrm{Pic}_e(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)$ (ou oublie la rigidification) qui est visiblement injectif, et dont l'image est formée des classes de faisceaux inversibles L sur X tels que $e^*(L) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_S$.

La terminologie précédente est justifiée par la

<u>Proposition</u> 2.8. Gardons les notations de 2.7 et supposons de plus que $f_*(0_X) = 0_S$. Alors le seul automorphisme d'un faisceau inversible rigidifié (L,α) est l'identité.

En effet, un automorphisme du faisceau inversible L est une homothétie définie par un élément $b \in \Gamma(X,0_X^*)$. L'hypothèse $f_*(0_X) = 0_S$ entraîne que $b = f^*(a)$, où $a \in \Gamma(S,0_S^*)$. La condition $e^*(\alpha) = \alpha$ implique que $a = e^*(b)=1$.

<u>Proposition</u> 2.9. Soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme quasi-compact et quasi-séparé tel que $f_*(0_X) = 0_S$. Alors

1) On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(S) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}_S(X)$$

2) Si f possède une section $e : S \longrightarrow X$, on a la suite exacte

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(S) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}_S(X) \longrightarrow 0$$

De plus le morphisme composé

$$\mathrm{Pic}_e(X) \hookrightarrow \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}_S(X)$$

est un isomorphisme, de sorte que le choix de e définit canoniquement un scindage de $(*)$.

<u>Démonstration</u>. Notons que l'hypothèse $f_*(0_X) = 0_S$ est conservée après tout changement de base plat $S' \longrightarrow S$ (EGA IV 1.7.21), de sorte que si on travaille avec le petit site fppf sur S on a $f_*(\mu_X) = \mu_S$. La suite spectrale de Leray fournit alors la suite exacte :

$$(**) \quad 0 \longrightarrow H^1(S,\mu) \longrightarrow H^1(X,\mu) \longrightarrow H^0(S,R^1 f_{*\text{-fppf}}\mu_X) \longrightarrow H^2_{\text{fppf}}(S,\mu_S) \longrightarrow H^2_{\text{fppf}}(X,\mu_X)$$

Soit en explicitant les premiers termes

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(S) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}_S(X) \longrightarrow H^2_{\text{fppf}}(S,\mu_S) \longrightarrow H^2_{\text{fppf}}(X,\mu_X)$$

Ceci prouve 1). Si de plus f possède une section e, le morphisme $H^2(S,\mu_S) \longrightarrow H^2(X,\mu_X)$ possède une rétraction, donc est injectif, d'où la première partie de 2). Il est clair d'après 1) que le morphisme canonique $\mathrm{Pic}_e(X) \hookrightarrow \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}_S(X)$ est injectif, mais il est aussi surjectif car on vient de voir que $\mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}_S(X)$ est surjectif et si L est un faisceau inversible sur X, $L \otimes f^* e^*(L^{-1})$ est rigidifié le long de e et a même image que L dans $\mathrm{Pic}_S(X)$.

<u>Corollaire</u> 2.10. Soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme quasi-compact et quasi-séparé possédant une section e et tel que $f_*(O_X) = O_S$ universellement. Alors, pour tout S-schéma T, on a :

$$\mathrm{Pic}_T(X_T) = \mathrm{Pic}(X_T)/\mathrm{Pic}(T) = H^0(T, R^1(f_T)_*(O^*_{X_T}))$$

(où l'image directe supérieure est relative à la topologie de Zariski).

Cela résulte immédiatement de la comparaison de la suite exacte (**) (où l'on a remplacé S par T) et de la suite exacte analogue obtenue en utilisant la topologie de Zariski.

2.11. <u>Etude infinitésimale du foncteur de Picard</u>.

<u>Proposition</u> 2.12. Soient S un schéma, S_o un sous-schéma fermé de S défini par un idéal de carré nul I, $f : X \longrightarrow S$ un morphisme quasi-compact et quasi-séparé, possédant une section et tel que $f_*(O_X) = O_S$ <u>universellement</u>. Posons $X_o = X \times_S S_o$. Alors :

i) $\mathrm{Ker}\, \mathrm{Pic}_S(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}_{S_o}(X_o)$ est canoniquement isomorphe à $H^0(S, R^1 f_*(IO_X))$ (et par suite est isomorphe à $H^0(X, IO_X)$ si S est affine.

ii) Supposons que $H^1(S, R^1 f_*(IO_X)) = 0$ (par exemple S affine), alors pour qu'un élément $a_o \in \mathrm{Pic}_{S_o}(X_o)$ se relève en un élément de $\mathrm{Pic}_S(X)$ il faut et il suffit que l'image de a_o dans $H^0(S, R^2 f_*(IO_X))$, soit nulle.

<u>Démonstration</u>. Compte tenu de 2.10 nous pouvons travailler avec la topologie de Zariski. Considérons les deux suites exactes :

$$0 \longrightarrow IO_X \longrightarrow O_X \longrightarrow O_{X_o} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow O_X^* \longrightarrow O_{X_o}^* \longrightarrow 0$$

Comme IO_X est un idéal de carré nul, l'application

$$IO_X \longrightarrow K$$

$$a \longmapsto 1+a$$

est un isomorphisme de groupes commutatifs, d'où la suite exacte :

$$f_*(O_X^*) \longrightarrow (f_o)_*(O_{X_o}^*) \longrightarrow R^1f_*(IO_X) \longrightarrow R^1f_*(O_X^*) \longrightarrow R^1(f_o)_*(O_{X_o}^*) \longrightarrow R^2f_*(IO_X)$$

Vu l'hypothèse $f_*(O_X) = O_S$ universellement, le morphisme $f_*(O_X^*) \longrightarrow (f_o)_*(O_{X_o}^*)$ s'identifie à l'épimorphisme $O_S^* \longrightarrow O_{S_o}^*$. On en déduit les suites exactes :

$$0 \longrightarrow R^1f_*(IO_X) \longrightarrow R^1f_*(O_X^*) \longrightarrow R^1(f_o)_*(O_{X_o}^*) \longrightarrow R^2f_*(IO_X)$$

$$0 \longrightarrow H^o(S, R^1f_*(IO_X)) \longrightarrow Pic_S(X) \longrightarrow Pic_{S_o}(X_o)$$

(cf. 2.10) d'où l'assertion i). Pour établir a), notons que l'on déduit de (*) les deux suites exactes.

$$(**) \quad 0 \longrightarrow R^1f_*(IO_X) \longrightarrow R^1f_*(O_X^*) \longrightarrow R^1f_*(O_X^*)/R^1f_*(IO_X) \longrightarrow 0$$

$$(***) \quad 0 \longrightarrow R^1f_*(O_X^*)/R^1f_*(IO_X) \longrightarrow R^1(f_o)_*(O_{X_o}^*) \longrightarrow R^2f_*(IO_X)$$

Compte tenu de l'hypothèse $H^1(S, R^1f_*(IO_X)) = 0$, on en déduit les suites exactes

$$H^0(S,R^1f_*(O_X^*)) \longrightarrow H^0(S_o,R^1(f_o)_*(O_{X_o}^*)) \longrightarrow H^0(S,R^2f_*(IO_X))$$

d'où l'assertion ii).

Exercice. Montrer que pour établir l'assertion i) il est inutile de supposer que $f : X \longrightarrow S$ possède une section. En est-il de même pour l'assertion ii) ?

Rappelons (cf. SGA 3 II) que si $\underline{G}$ est un préfaisceau en groupes sur Sch/S , on définit le foncteur $\underline{\mathrm{Lie}}\ \underline{G}$: Sch/S $\longrightarrow$ groupes par la formule :

$\underline{\mathrm{Lie}}\ \underline{G}(T) = \mathrm{Ker}\ \underline{G}(T_\varepsilon) \longrightarrow \underline{G}(T)$ où T est un S-schéma et T_ε le schéma des nombres duaux sur T.

Corollaire 2.13. Soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme propre et plat (possédant une section), tel que $f_*(O_X) = O_S$ universellement. Alors $\underline{\mathrm{Lie}}\ \underline{\mathrm{Pic}}_S(X)$ est représentable par un fibré vectoriel de présentation finie sur S.

Il résulte de 2.12 i) que l'on a un isomorphisme canonique.

$$\left[\underline{\mathrm{Lie}}\ \underline{\mathrm{Pic}}_S(X)\right](S) = \mathrm{Ker}\ \mathrm{Pic}_{S_\varepsilon}(X_\varepsilon) \longrightarrow \mathrm{Pic}_S(X) \simeq H^0(S,R^1f_*(O_X))$$

où S_ε est le schéma des nombres duaux sur S et $X_\varepsilon = X\times_S S_\varepsilon$. D'autre part, d'après EGA III 7.8.9 il existe un O_S-module cohérent Q et un isomorphisme factoriel par rapport au O_S-module quasi-cohérent M :

$$R^1f_*(f^*\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{O_S}(Q,\mathcal{M})$$

d'où $H^0(S,R^1f_*(f^*\mathcal{M})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{O_S}(Q,\mathcal{M})$.

Le O_S-module Q est défini à isomorphisme unique près et sa formation commute à tout changement de base $T \longrightarrow S$. D'où un isomorphisme fonctoriel en T :

$$H^0(T,R^1(f_T)_*(O_{X_T})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{O_T}(Q_T,O_T).$$

On en déduit que <u>Lie</u> $\underline{\mathrm{Pic}}_S(X)$ est isomorphe au fibré vectoriel.

2.14. <u>Représentabilité</u> <u>de</u> $\underline{\mathrm{Pic}}_S(X)$.

<u>Théorème</u> 2.15 (Grothendieck). Soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme <u>projectif</u> <u>plat</u> et <u>intègre</u> sur S (i.e. les fibres de f sont géométriquement intègres). Alors $\underline{\mathrm{Pic}}_S(X)$ est un schéma en groupes, localement de type fini sur S, réunion d'une suite croissante d'ouverts quasi-projectifs sur S. En particulier $\underline{\mathrm{Pic}}_S(X)$ est séparé sur S.

Nous admettrons ce théorème fondamental dont la démonstration délicate repose sur la théorie des schémas de Hilbert et la technique de passage au quotient par une relation d'équivalence propre et plate (TDTE V 1961/62 nº 232)

<u>Corollaire</u> 2.16. Soit A un S-schéma abélien projectif sur S. Alors $\underline{\mathrm{Pic}}_S(s)$ est un S-schéma en groupes, localement de type fini sur S, réunion d'une suite croissante d'ouverts quasi-projectifs sur S.

<u>Remarque</u> 2.17. Nous verrons plus loin que si A est un S-schéma abélien, alors $\underline{\mathrm{Pic}}_S(s)$ est représentable, bien que A ne soit pas en général projectif, ni même localement projectif sur S.

Bibliographie

EGA GROTHENDIECK (A.) et DIEUDONNE (J.).- Eléments de géométrie algébrique.- Publications mathématiques de l'IHES Nº 4 , 8,...

SGA Séminaires de géométrie algébrique de l'IHES.

SGA 1 - Revêtements étales et groupe fondamental 60/61.

SGA 3 - Schémas en groupes 63/64.

SGA 4 - Cohomologie étale 63/64.

TDTE GROTHENDIECK (A.).- Fondements de la géométrie algébrique.- Extraits du séminaire Bourbaki (1957-1962).

[1] MUMFORD (D.).- Geometric invariant theory.- Springer Verlag, 1965.

FACULTE DES SCIENCES DE
L'UNIVERSITE DE PARIS

ORSAY

1967-1968

SEMINAIRE DE GEOMETRIE ALGEBRIQUE

-:-:-:-:-:-

Exposé n° VII

CORRESPONDANCES DIVISORIELLES - THEOREME DU CUBE.

par M. Raynaud

-:-:-:-:-:-

§ 1. Un opérateur de rigidification.

1.1. Soient E un ensemble fini ayant n éléments, S un schéma, $f_i : X_i \longrightarrow S$ $(i \in E)$ des S-schémas et $e_i : S \longrightarrow X_i$ une section de X_i au-dessus de S. Soient $J \subset I \subset E$ deux parties de E. On note

1) $X_I = \prod_{i \in I} X_i$ (où $\prod$ désigne le produit au-dessus de S).

$X = X_E$.

2) $\pi^I_J : X_I \longrightarrow X_J$ la projection canonique.

$\pi^E_J = \pi_J : X \longrightarrow X_J$.

3) $s^I_J : X_J \hookrightarrow X_I$ l'immersion définie par les sections e_i, $i \in I - J$.

$s_J = s^E_J : X_J \hookrightarrow X$.

4) $p_J = s_J \circ \pi_J : X \longrightarrow X$ qui est un 'projecteur' dans X

(i.e. $p_J \circ p_J = p_J$).

La définition suivante généralise VI 2.7.

<u>Définition</u> 1.2. Une <u>rigidification</u> d'un faisceau inversible L sur $X = \prod_{i \in I} X_i$, relativement aux sections e_i, $i \in I$, est la donnée pour tout partie I de E, $I \neq E$, d'un isomorphisme $\alpha_I : O_{X_I} \xrightarrow{\sim} s_I^*(L)$, ces isomorphismes étant compatibles dans le sens suivant : Si $J \subset I \subset E$, $I \neq E$, on a $(s_J^I)^*(\alpha_I) = \alpha_J$.

On note $\mathrm{Pic}_{e_i, i \in E}(X)$ le sous-groupe de $\mathrm{Pic}(X)$ formé des classes de faisceaux inversibles sur X, rigidifiables relativement aux sections e_i, $i \in I$.

<u>Exercice</u> : Soient L un faisceau inversible sur X, α et β deux rigidifications de L relativement aux sections e_i. Construire un isomorphisme canonique entre les faisceaux rigidifiés (L,α) et (L,β).

Procédant comme dans la démonstration de VI 2.8, on montre que si $(f_i)_*(O_{X_i}) = O_S$ universellement, alors tout automorphisme d'un faisceau inversible rigidifié (L,α) sur X est l'identité.

Pour tout faisceau inversible L sur X et toute partie I de E, posons $(1-p_I)(L) = L \otimes p_I^*(L^{-1})$.

<u>Lemme</u> 1.3. i) On a $s_I^*\left[(1-p_I)(L)\right] = O_{X_I}$

ii) Si I et J sont des parties de E, on a, avec des notations évidentes :

$$(1-p_I) \circ (1-p_J) = (1-p_J) \circ (1-p_I) = 1-p_I-p_J+p_{I \cap J} .$$

En particulier, $(1-p_I) \circ (1-p_I) = 1-p_I$.

Démonstration immédiate.

Ceci étant, désignons par r le composé des foncteurs $(1-p_I)$ pour I parcourant les parties de E ayant $\mathrm{card}(E)-1 = n-1$ éléments.

<u>Proposition</u> 1.4. Soit L un faisceau inversible sur X .

1) On a $r(L) = \bigotimes_{I \subset E} p_I^*(L^{(-1)^{n-\mathrm{card}(I)}})$ et r(L) est canoniquement rigidifié relativemant aux sections e_i , $i \in E$.

2) Le foncteur r est un projecteur (i.e. $r \circ r = r$) et si L est rigidifiable relativement aux sections e_i , on a $r(L) \simeq L$.

<u>Démonstration</u>.- L'expression de r(L) donnée dans 1) résulte facilement du fait que toute partie F de E est l'intersection de n-card(F) parties de E ayant n-1 éléments. Montrons que r(L) est canoniquement rigidifié relativement aux sections e_i , $i \in E$. Soit J une partie de E ayant au plus n-1 éléments, de sorte que J est contenue dans une partie I de E ayant n-1 éléments. On a alors :

$$r(L) = (1-p_I) \prod_{\substack{K \subset E \\ \mathrm{card}(K)=n-1 \\ K \neq I}} (1-p_K)L = (1-p_I)N$$

d'où :
$$\begin{aligned} s_J^* r(L) &= (s_J^I)^* \, s_I^* \, (1-p_I)N \\ &= (s_J^I)^* \, 0_{X_I} \quad \text{(cf 1.3 i))} \\ &= 0_{X_J} \end{aligned}$$

Comme les foncteurs $(1-p_I)$ sont des projecteurs qui commutent deux à deux (1.3 ii)), r est un projecteur. Enfin la dernière assertion de 2) résulte de l'expression de r(L) donnée dans 1).

<u>Corollaire</u> 1.5. Pour qu'un faisceau inversible L sur X soit rigidifiable, relativement aux sections e_i , $i \in I$, il faut et il suffit que pour toute partie I de E , de cardinal n-1 , on ait $s_I^*(L) \simeq 0_{X_I}$.

Nous allons étudier le sous-groupe $\mathrm{Pic}_{e_i, i \in E}(X)$ (1.2) suivant les valeurs de n = card E . Pour mémoire, rappelons que si n=1 , et si

$f_*(O_X) = O_S$ universellement, alors $\mathrm{Pic}_e(X)$ est isomorphe à $\mathrm{Pic}_S(X)$ (VI 2.9). Dans le paragraphe suivant, nous étudions le cas $n=2$ ce qui nous amène à parler des correspondances divisorielles. Enfin, nous verrons que pour $n \geqslant 3$, on a $\mathrm{Pic}_{e_i, i\in E}(X) = 0$, du moins si l'on fait des hypothèses convenables de platitude et de propreté sur les morphismes f_i.

§ 2. Correspondances divisorielles.

Dans ce paragraphe, nous conservons les notations introduites dans 1.1 et nous supposons que $I = \{1,2\}$. Pour tout S-schéma T, on a alors un homomorphisme canonique, fonctoriel en T :

$$\mathrm{Pic}(X_1)_T \times \mathrm{Pic}(X_2)_T \longrightarrow \mathrm{Pic}(X_1 \times_S X_2)_T$$

$$(L_1\ ,\ L_2) \longmapsto (\pi_1)_T^*(L_1) \otimes (\pi_2)_T^*(L_2).$$

Par passage aux faisceaux fppf associés, on en déduit un homomorphisme canonique : $\underline{\mathrm{Pic}}_S(X_1) \times_S \underline{\mathrm{Pic}}_S(X_2) \longrightarrow \underline{\mathrm{Pic}}_S(X_1 \times_S X_2)$

Définition 2.1. Soient X_1 et X_2 deux S-schémas. On appelle foncteur des correspondances divisorielles sur $X_1 \times_S X_2$, relativement à S et on note $\underline{\mathrm{Corr}}_S(X_1,X_2)$, le faisceau fppf associé au préfaisceau

$$T \longmapsto \mathrm{Pic}(X_1 \times_S X_2)_T / \mathrm{Im}(\mathrm{Pic}(X_1)_T \times \mathrm{Pic}(X_2)_T)$$

On pose $\mathrm{Corr}_S(X_1,X_2) = \underline{\mathrm{Corr}}_S(X_1,X_2)(S)$.

Vu la définition de $\underline{\mathrm{Pic}}_S(X)$, il est clair que l'on a une suite exacte de faisceaux fppf :

$$(*)\quad \underline{\mathrm{Pic}}_S(X_1) \times_S \underline{\mathrm{Pic}}_S(X_2) \xrightarrow{\text{can}} \underline{\mathrm{Pic}}_S(X_1 \times_S X_2) \longrightarrow \underline{\mathrm{Corr}}_S(X_1,X_2) \longrightarrow 0$$

<u>Proposition</u> 2.2. Soient S un schéma, $f_i : X_i \longrightarrow S$, $i = 1,2$, deux S-schémas, $e_i : S \longrightarrow X_i$ une section de f_i et supposons que $(f_i)_*(O_{X_i}) = O_S$ universellement. Alors

1) L'application canonique $\mathrm{Pic}_S(X_1) \times \mathrm{Pic}_S(X_2) \longrightarrow \mathrm{Pic}_S(X_1 \times_S X_2)$ est injective.

2) Les homomorphismes canoniques :

$$\mathrm{Pic}_{(e_1,e_2)}(X_1 \times_S X_2) \xrightarrow{u} \mathrm{Pic}_S(X_1 \times_S X_2) / \mathrm{Pic}_S(X_1) \times \mathrm{Pic}_S(X_2) \xrightarrow{v} \mathrm{Corr}_S(X_1,X_2)$$

sont des isomorphismes.

3) On a des isomorphismes canoniques :

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Hom}_{e_1}(X_1,\underline{\mathrm{Pic}_S}(X_2)) \\ \mathrm{Corr}_S(X_1,X_2) \arrow[ur, "w_1", "\sim"'] \arrow[dr, "\sim", "w_2"'] & \\ & \mathrm{Hom}_{e_2}(X_2,\underline{\mathrm{Pic}_S}(X_1)) \end{tikzcd}$$

[où $\mathrm{Hom}_{e_1}(X_1,\underline{\mathrm{Pic}_S}(X_2))$ désigne le groupe des morphismes du faisceau X_1 dans le faisceau $\underline{\mathrm{Pic}_S}(X_2)$ qui envoient la section e_1 sur la section unité. On a une définition analogue pour $\mathrm{Hom}_{e_2}(X_2,\underline{\mathrm{Pic}_S}(X_1))$].

<u>Démonstration</u>.- L'assertion 1) et le fait que u soit un isomorphisme résultent immédiatement des définitions et de VI 2.9 . Par ailleurs, $\mathrm{Hom}(X_1,\underline{\mathrm{Pic}_S}(X_2))$ est le groupe $\underline{\mathrm{Pic}_S}(X_2)(X_1)$ des points de $\underline{\mathrm{Pic}_S}(X_2)$ à valeurs dans X_1 . D'après VI 2.9 ce groupe est aussi égal aux classes de faisceaux inversibles L sur $X_1 \times_S X_2$ tels que $s_1^*(L) \simeq O_{X_1}$. Pour que L définisse un élément de $\mathrm{Hom}_{e_1}(X_1,\underline{\mathrm{Pic}_S}(X_2))$, il faut de plus que $s_2^*(L) \simeq O_{X_2}$. Compte tenu de 1.5, on en déduit que le morphisme canonique

$$\mathrm{Pic}_{(e_1,e_2)}(X_1 \times_S X_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{e_1}(X_1,\underline{\mathrm{Pic}_S}(X_2))$$

est un isomorphisme. Cet isomorphisme est compatible avec les changements de base $T \longrightarrow S$, d'où le fait que le foncteur $T \longmapsto \mathrm{Pic}_{((e_1)_T,(e_2)_T)}(X_1 \times_S X_2)_T$ est isomorphe au <u>faisceau</u> fppf $T \longmapsto \mathrm{Hom}_{(e_1)_T}((X_1)_T , \underline{\mathrm{Pic}}_T(X_2)_T)$. Il en résulte bien que v est un isomorphisme, donc aussi w_1 ; en échangeant les rôles de X_1 et X_2 , on voit de même que w_2 est un isomorphisme.

<u>Théorème</u> 2.3. Soient $f_i : X_i \longrightarrow S$ deux S-schémas <u>propres</u> et <u>plats</u>, tels que $(f_i)_*(0_{X_i}) = 0_S$ <u>universellement</u>. Alors, $\underline{\mathrm{Corr}}_S(X_1,X_2)$ est un S-schéma en groupes, <u>localement de type fini</u>, <u>net</u> (i.e. non ramifié) et <u>séparé</u> sur S .

"<u>Démonstration</u>".- Dans [3] on prouve que sous les conditions énoncées, le foncteur $\underline{\mathrm{Corr}}_S(X_1,X_2)$ satisfait au critère valuatif de séparation. Le théorème résulte alors de ([1] théorème 4). Notons que la démonstration utilise les critères délicats de représentabilité des foncteurs nets et séparés. Dans la suite, ce théorème ne sera pas utilisé dans l'étude élémentaire des schémas abéliens.

<u>Remarque</u> 2.4. Sous les conditions du théorème 2.3, supposons de plus que S soit le spectre d'un corps k . On peut alors montrer que $\underline{\mathrm{Pic}}_k(X^i)$ et $\underline{\mathrm{Pic}}_k(X_1 \times_k X_2)$ sont des schémas en groupes localement de type fini [2] . Le fait que $\underline{\mathrm{Corr}}_k(X_1,X_2)$ soit net sur k équivaut alors à dire que la composante neutre $\underline{\mathrm{Pic}}^o_k(X_1 \times_k X_2)$ est le produit des composantes neutres $\underline{\mathrm{Pic}}^o_k(X_i)$, $i = 1,2$.

§ 3. <u>Le théorème du cube</u>.

<u>Théorème</u> 3.1 (théorème du cube). Soit E un ensemble fini, avec $\mathrm{card}(E) \geqslant 3$ et soient $f_i : X_i \longrightarrow S$, $i \in E$, des morphismes propres plats tels que $(f_i)_*(0_{X_i}) = 0_S$ universellement et soit e_i , $i \in E$, une section de f_i. Alors tout faisceau inversible L sur $X = \prod_{i \in E} X_i$, qui est rigidifié rela-

tivement aux sections e_i , $i \in E$, est trivial. Autrement dit

$$\mathrm{Pic}_{e_i, i\in E,}(X) = 0 .$$

Remarque 3.2. Reprenons les notations de 1.1 et pour tout partie I de E notons r_I le foncteur de rigidification sur X_I relatif aux sections e_i , $i \in I$ (cf 1.4) et soit $\mathrm{Pic}_{e_I}(X_I)$ le sous groupe de $\mathrm{Pic}(X_I)$ formé des classes de faisceaux inversibles rigidifiables relativement aux sections e_i , $i \in I$. On vérifie formellement que le morphisme canonique :

$$\mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \prod_{I\subset E} \mathrm{Pic}_{e_I}(X_I)$$

$$L \longmapsto (r_I(s_I)^*(L))$$

est un isomorphisme, l'isomorphisme inverse envoyant un élément M de $\mathrm{Pic}_{e_I}(X_I)$ sur $(\pi_I)^*(M)$. Si on suppose de plus que les morphismes f_i , $i \in E$, sont propres, plats et tels que $(f_i)_*(\mathcal{O}_{X_i}) = \mathcal{O}_S$ universellement, il résulte de 3.1 que l'on a $\mathrm{Pic}_{e_I}(X_I) = 0$ pour $\mathrm{card}(I) \geqslant 3$, et il résulte de 2.2 que pour $I = \{i,j\}$, $i \neq j$, on a $\mathrm{Pic}_{e_I}(X_I) = \mathrm{Corr}_S(X_i \times_S X_j)$ d'où le fait que l'on a un isomorphisme canonique :

$$\mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(S) \times \prod_{i\in E} \mathrm{Pic}_S(X_i) \times \prod_{\substack{(i,j)\subset E\\ i\neq j}} \mathrm{Corr}_S(X_i \times_S X_j)$$

Démonstration de 3.1. Quitte à remplacer S par le produit de $\mathrm{card}(E)-3$ des X_i , on voit facilement qu'il suffit de prouver le théorème lorsque $E = \{1,2,3\}$ L'hypothèse $(f_3)_*(\mathcal{O}_{X_3}) = \mathcal{O}_S$ universellement entraîne que les fibres de f_3 sont connexes. Le théorème du cube va donc résulter de 2.3 et du lemme suivant :

Lemme 3.3. Soient $f_i : X_i \longrightarrow S$, $i = 1,2,3,$ trois S-schémas et soit e_i une section de f_i pour $i = 1,2,3$. On suppose de plus :

1) Les fibres de f_3 sont connexes.

2) $(f_i)_*(O_{X_i}) = O_S$ universellement pour $i = 1,2$.

3) La section unité de $\underline{\mathrm{Corr}}_S(X_1,X_2)$ est une immersion à la fois ouverte et fermée.

Alors, tout faisceau inversible sur $X = X_1 \times_S X_2 \times_S X_3$ qui est rigidifié relativement aux sections e_i, $i = 1,2,3$, est trivial.

Soit donc L un faisceau inversible sur X, rigidifié relativement aux sections e_i et montrons que $L \simeq O_X$. Le faisceau L définit un S-morphisme $u : X_3 \longrightarrow \underline{\mathrm{Corr}}_S(X_1,X_2)$. Soit Z le sous-schéma à la fois ouvert et fermé de X_3 égal à l'image réciproque par u de la section unité de $\underline{\mathrm{Corr}}_S(X_1,X_2)$. Comme L est rigidifié on a $s^*_{1,2}(L) \simeq O_{X_1 \times_S X_2}$, donc Z majore $e_3(S)$. Mais les fibres de f_3 sont connexes, donc $Z = Z_3$ et L définit la correspondance divisorielle nulle sur $X_1 \times_S X_2$, relativement à X_3. Comme $s^*_{13}(L) \simeq O_{X_1 \times_S X_3}$ et $s^*_{23}(L) \simeq O_{X_2 \times_S X_3}$, on déduit de 2.2 que $L \simeq O_X$.

Pour démontrer le théorème du cube, il nous suffit donc de savoir que la section unité de $\underline{\mathrm{Corr}}_S(X_1,X_2)$ est une immersion à la fois ouverte et fermée. C'est là un résultat plus faible que 2.3 que nous allons démontrer directement, du moins dans le cas où les fibres de f_i, $i = 1,2$, sont géométriquement intègres, ce qui nous suffira dans la suite du séminaire.

<u>Proposition</u> 3.4. Soient X_1 et X_2 deux S-schémas propres, plats et intègres sur S (i.e. les fibres sont géométriquement intègres). Alors la section unité de $\underline{\mathrm{Corr}}_S(X_1,X_2)$ est une immersion à la fois ouverte et fermée.

Etablissons d'abord quelques lemmes.

<u>Lemme</u> 3.5. Soient $f_i : X_i \longrightarrow S$ $(i = 1,2)$ deux S-morphismes plats, quasi-compacts (et quasi-séparés), tels que $(f_i)_*(O_{X_i}) = O_S$ universellement et soit

e_i, $i = 1,2$, une section de f_i. Alors, $\underline{\mathrm{Corr}_S(X_1,X_2)}$ est <u>formellement net</u> sur S (EGA IV 17.1.1).

Comme les hypothèses faites sont stables par changement de base, il nous suffit de montrer que si S est affine et si $\bar{S}$ est un fermé de S défini par un idéal de carré nul I, alors l'application

$$\mathrm{Corr}_S(X_1,X_2) \longrightarrow \mathrm{Corr}_{\bar{S}}(\bar{X}_1,\bar{X}_2)$$

est injective (on note $\bar{X}_i = X_i \times_S \bar{S}$). Considérons le carré cartésien :

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[d, "f_1"'] & X_1 \times_S X_2 \arrow[l, "g_1"'] \arrow[d, "g_2"] \arrow[dl, "h"'] \\ S & X_2 \arrow[l, "f_2"] \end{tikzcd}$$

L'hypothèse $(f_1)_*(O_{X_1}) = O_S$ universellement entraîne que $(g_2)_*(I\, O_{X_1 \times_S X_2}) = I\, O_{X_2}$. La suite spectrale de Leray relative au faisceau $I\, O_{X_1 \times_S X_2}$ et au morphisme $h = f_2 g_2$ donne la suite exacte

$$0 \longrightarrow R^1(f_2)_*(I\, O_{X_2}) \longrightarrow R^1 h_*(I\, O_{X_1 \times_S X_2}) \longrightarrow (f_2)_* R^1(g_2)_*(I\, O_{X_1 \times_S X_2})$$

Compte tenu de EGA IV 1.7.21 et du fait que $(f_2)_*(O_{X_2}) = O_S$ universellement, le dernier terme s'identifie à $R^1(f_1)_*(I\, O_{X_1})$. On en déduit que le morphisme canonique

$$R^1(f_1)_*(I\, O_{X_1}) \oplus R^2(f_2)_*(I\, O_{X_2}) \longrightarrow R^1 h_*(I\, O_{X_1 \times_S X_2})$$

est un isomorphisme, l'application réciproque étant définie par les sections e_i. Comme S est affine, l'application

$$H^1(X_1, I\, O_{X_1}) \oplus H^1(X_2, I\, O_{X_2}) \longrightarrow H^1(X_1 \times_S X_2, I\, O_{X_1 \times_S X_2})$$

est aussi un isomorphisme. D'après VI 2.12 les classes de faisceaux inversibles L sur $X_1 \times_S X_2$ qui relèvent le faisceau trivial sur $\bar{X}_1 \times_{\bar{S}} \bar{X}_2$ correspondent aux éléments u de $H^1(X_1 \times_S X_2, I\,O_{X_1 \times_S X_2})$. Le faisceau L est rigidifiable relativement aux sections e_1, e_2 si et seulement si les images réciproques de u dans $H^1(X_i, I\,O_{X_i})$ sont nulles pour $i = 1,2$. Vu ce qui précède, cela équivaut à dire que u est nul. Le lemme 3.5 est alors conséquence de 2.2 2).

<u>Lemme</u> 3.6. Soit S le spectre d'un anneau de valuation discrète, η son point générique, s son point fermé et soit X un S-schéma plat et localement de type fini sur S dont la fibre X_s est intègre. Alors tout faisceau inversible L sur X, dont la fibre générique L_η est triviale, est trivial.

En effet, soit t le point générique de X_s et π une uniformisante de $\Gamma(S)$. L'hypothèse X_s intègre entraîne que π engendre l'idéal maximal de l'anneau de dimension 1 $O_{X,t}$, donc $O_{X,t}$ est un anneau de valuation discrète admettant π pour uniformisante. Soit alors a une section rationnelle de L qui engendre L_η. Quitte à multiplier a par une puissance convenable de π, on peut supposer que a engendre L au point t. Mais alors a engendre L aux points de X de profondeur ≤ 1 (EGA IV 6.3.1), donc engendre L (cf. EGA IV 21.1.8).

Prouvons maintenant la proposition 3.4. Vu la descente fpqc des sous-schémas (SGA 1 VIII), l'assertion à démontrer est locale pour la topologie fppf, ce qui nous permet de supposer que f_i possède une section e_i $(i = 1,2)$. Les hypothèses faites étant stables par changement de base, nous sommes ramenés, compte tenu de 2.2, à prouver l'assertion suivante :

Soit L un faisceau inversible sur $X_1 \times_S X_2$, rigidifié relativement à (e_1, e_2) et soit Z le sous-foncteur de S défini comme suit :

$$\left.\begin{array}{ll} Z(T) = \{1\} & \text{si } L_T \text{ est trivial} \\ Z(T) = \emptyset & \text{sinon} \end{array}\right\} \quad T \in Sch/S$$

Alors Z est un sous-schéma à la fois ouvert et fermé de S.

A) $Z \hookrightarrow S$ est une immersion ouverte. Soit donc $s \in S$ tel que L_s soit trivial et montrons que L est trivial au-dessus d'un ouvert U de S contenant s. Par passage à la limite, il suffit de montrer que L est trivial au-dessus de $\mathrm{Spec}(O_{S,s})$ ce qui nous ramène au cas où S est local de point fermé s. Par descente fpqc, on peut supposer que $A = O_{S,s}$ est complet pour la topologie définie par son idéal maximal m (rappelons que S est noethérien). Pour tout entier $n \geqslant 0$ posons $S_n = \mathrm{Spec}(A/m^{n+1})$, $L_n = L \otimes_S S_n$. Comme $X_1 \times_S X_2$ est propre sur S, il résulte facilement de EGA III 5.1.6 que L est trivial si et seulement si L_n est trivial pour tout n. Or $L_o = L_s$ est trivial par hypothèse et $\underline{\mathrm{Corr}}_S(X_1,X_2)$ est formellement net sur S (3.5), donc L_n est trivial pour tout n.

B) $Z \hookrightarrow S$ est une immersion fermée. Sachant que Z est un sous-schéma ouvert de S, pour voir que Z est fermé, il suffit de voir que Z est stable par spécialisations. Une technique standard (EGA II 7.1.9) nous ramène alors au cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète, auquel cas on applique 3.6.

Bibliographie

EGA et SGA cf exposé VI.

[1] MURRE (J.P.).- Representation of unramified functors.- Sém. Bourbaki, mai, nº 294, mais 1965.

[2] MURRE (J.P.).- On contravariant functors...... I.H.E.S., Publications Math., nº 23.

[3] RAYNAUD (M.).- Faisceaux amples sur les schémas en groupes.- Publication faculté d'Orsay.

FACULTE DES SCIENCES DE
L'UNIVERSITE DE PARIS
ORSAY

1967-1968

SEMINAIRE DE GEOMETRIE ALGEBRIQUE

-:-:-:-:-:-

Exposé n° VIII

APPLICATIONS DU THEOREME DU CUBE AUX SCHEMAS ABELIENS.

par M. Raynaud

-:-:-:-:-:-

§ 1. Les homomorphismes φ_L .

1.1. Soit A un S-schéma abélien. On désigne par $p : A \to S$ son morphisme structural, par $e : S \to A$ la section unité, par $p_i : A\times_S A \to A$ $(i = 1,2)$ la projection sur le $i^{\text{ème}}$ facteur, par $s : A\times_S A \to A$ le morphisme d'addition $((a,a') \mapsto a+a')$, par $\delta : A \hookrightarrow A\times_S A$ le morphisme diagonal. Pour tout entier n , on note n_A , ou simplement n , le morphisme d'élévation à la puissance n dans A ; son noyau est désigné par A_n . Soit $a \in A(S)$; la translation par a est le S-morphisme $T_a : A \to A$

$$b \mapsto a+b$$

Si L est un faisceau inversible sur A , on pose $L_a = (T_a)^*(L)$. Si D est un diviseur sur A , on pose de même $D_a = (T_a)^*(L)$. Si D est un diviseur sur A , on pose de même $D_a = (T_a)^*D$. On a donc $T_a(D_a) = D$. Par passage au faisceau fppf associé, l'application

$$(a,L) \mapsto L_a$$

définit une opération de A sur $\underline{\mathrm{Pic}}_S(A)$.

1.2. Commençons par une proposition qui est un cas particulier de VI 1.9 lorsqu'on suppose $\underline{\mathrm{Pic}}_S(B)$ représentable.

<u>Proposition</u> 1.3. Soient A et B deux S-schémas abéliens. Alors tout morphisme (de foncteurs) $u : A \to \underline{\mathrm{Pic}}_S(B)$ qui envoie la section unité de A sur la section unité de $\underline{\mathrm{Pic}}_S(B)$; est un <u>morphisme</u> <u>de</u> <u>groupes</u>.

<u>Démonstration</u>. Nous devons montrer que le morphisme

$$v : A\times_S A \to \underline{\mathrm{Pic}}_S(B)$$

$$(a,a') \mapsto u(a+a') - u(a) - u(a')$$

est nul. Or v est défini par un faisceau inversible L sur $A\times_S A\times_S B$ que l'on peut supposer rigidifié relativement à la section unité de B. L'hypothèse $u(0) = 0$, entraîne que la restriction de v à $A\times(0)$ et $(0)\times A$ est nulle, donc la restriction de L à $A\times(0)\times B$ et $(0)\times A\times B$ est nulle. Bref L est rigidifiable relativement aux sections unités des trois facteurs et par suite est trivial (VII 3.1) ; à fortiori, v est nul.

<u>Corollaire</u> 1.4. Soient A et B deux S-schémas abéliens. Alors on a des isomorphismes canoniques :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & \mathrm{Hom}_{Gr}(A,\underline{\mathrm{Pic}}_S(B)) \\ \mathrm{Pic}_{(e,e)}(A\times_S B) \arrow[r] & \mathrm{Corr}_S(A,B) \arrow[ur, "\sim"] \arrow[dr, "\sim"'] & \\ & & \mathrm{Hom}_{Gr}(B,\underline{\mathrm{Pic}}_S(A)) \end{tikzcd}$$

Démonstration. Compte tenu de 1.3, ce n'est autre que VII 2.2.

Proposition 1.5. Soit A un S-schéma abélien et notons φ_A (ou simplement φ) l'homomorphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Pic}}_S(A) \longrightarrow \underline{\mathrm{Pic}}_S(A\times_S A) \xrightarrow{\mathrm{can}} \underline{\mathrm{Corr}}_S(A,A)$$

$$L \to s^*(L)$$

Soit L un faisceau inversible sur A. Alors :

1) Si on identifie $\mathrm{Corr}_S(A,A)$ à $\mathrm{Pic}_{(e,e)}(A\times_S A)$, on a

$$\varphi(L) = s^*(L) \otimes p_1^*(L^{-1}) \otimes p_2^*(L^{-1}) \otimes p_{12}^* \, e^*(L)$$

(où p_{12} désigne le morphisme structural de $A\times_S A$). En particulier, si L est rigidifié relativement à e, on a

$$\varphi(L) = s^*(L) \otimes p_1^*(L^{-1}) \otimes p_2^*(L^{-1})$$

2) Si l'on identifie $\mathrm{Corr}_S(A,A)$ à $\mathrm{Hom}_{Gr}(A,\underline{\mathrm{Pic}}_S(A))$ (1.4), $\varphi(L)$ s'identifie à l'homomorphisme

$$\varphi_L : A \to \underline{\mathrm{Pic}}_S(A)$$
$$a \mapsto c\ell(L_a \otimes L^{-1})$$

Démonstration. 1) résulte de la description du foncteur de rigidification (VII 1.4). Prouvons que 1) $\Longrightarrow$ 2). Le morphisme $\varphi_L : A \to \underline{\mathrm{Pic}}_S(A)$ est le point de $\underline{\mathrm{Pic}}_S(A)$ à valeur dans A défini par le faisceau inversible $M = s^*(L) \otimes (p_1)^*(L^{-1}) \otimes (p_2)^*(L^{-1})$ sur $A\times_S A$. Soit alors $u : T \to A$ un S-morphisme et considérons le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd}
A_T \arrow[r, "v"] \arrow[d, "p_T"'] & A\times_S A \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & A \arrow[d, "p"] \\
T \arrow[r, "u"] & A \arrow[r, "p"'] & S
\end{tikzcd}$$

L'élément $\varphi_L(u)$ de $\mathrm{Pic}_T(A_T)$ est défini par le faisceau inversible

$$v^*(M) = (L_T)_u \otimes p_T^* u^*(L^{-1}) \otimes L_T^{-1}$$

donc aussi par l'élément $(L_T)_u \otimes L_T^{-1}$ cqfd.

<u>Remarque</u> 1.6. Comme A est commutatif, l'image de φ est formée de correspondances divisorielles <u>symétriques</u> (i.e. invariantes par la symétrie de $A\times_S A$ qui échange les deux facteurs). Nous verrons plus loin que l'image de φ se compose exactement des correspondances divisorielles symétriques.

<u>Définitions</u> 1.7. i) On note $\hat{A}$ le sous faisceau en groupes de $\underline{\mathrm{Pic}}_{A/S}$ égal à $\mathrm{Ker}(\varphi)$

ii) Le faisceau fppf quotient $\underline{\mathrm{Pic}}_S(A)/\hat{A}$ est le foncteur de Néron-Séveri de A relativement à S et se note $\underline{\mathrm{NS}}_S(A)$. On pose $\mathrm{NS}_S(A) = \underline{\mathrm{NS}}_S(A)(S)$. On a donc un monomorphisme canonique

$$\underline{\varphi} : \underline{\mathrm{NS}}_S(A) \to \underline{\mathrm{Corr}}_S(A.A)$$

iii) Le sous groupe $\hat{A}$ de $\underline{\mathrm{Pic}}_S(A)$ définit une relation d'équivalence sur $\underline{\mathrm{Pic}}_S(A)$. Plus précisément, si L et M sont deux faisceaux inversibles sur A, on écrit $L \equiv M$ si l'image de $L \otimes M^{-1}$ dans $\mathrm{Pic}_S(A)$ est un élément de $\hat{A}(S)$, ou ce qui revient au même, si $\varphi_L = \varphi_M$.

<u>Proposition</u> 1.8. Soit L un faisceau inversible sur A. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) $L \equiv 0_A$

2) $\varphi_L = 0$

3) $s^*(L) \otimes (p_1)^*(L^{-1}) \otimes (p_2)^*(L^{-1}) \otimes (p_{12})^*(L) \simeq 0_{A\times_S A}$

4) L'image de L dans $\underline{\mathrm{Pic}}_S(A)$ est invariante par translations.

5) Pour tout S-schéma T et pour tout $a \in A(T)$, il existe un faisceau inversible M sur T et un isomorphisme

$$(L_T)_a \otimes L_T^{-1} \simeq (p_T)^*(M).$$

Démonstration. 1) $\Longleftrightarrow$ 3) résulte de 1.5 1).

1) $\Longleftrightarrow$ 2) $\Longleftrightarrow$ 4) résulte de 1.5 2) et l'assertion 5) ne fait qu'expliciter 4).

Proposition 1.9. Soit A un S-schéma abélien.

1) $\hat{A}$ est un sous-groupe à la fois ouvert et fermé de $\underline{\mathrm{Pic}}_S(A)$.

2) Si $L \in \mathrm{Pic}(A)$ le morphisme $\varphi_L : A \to \underline{\mathrm{Pic}}_S(A)$ se factorise à travers $\hat{A}$.

Démonstration. 1) résulte du fait que la section unité de $\underline{\mathrm{Corr}}_S(A,A)$ est une immersion à la fois ouverte et fermée (VII 3.4). 2) résulte immédiatement de 1).

Remarque 1.10. Un des buts de la théorie élémentaire des schémas abéliens est est de montrer que $\hat{A}$ est un schéma abélien, que l'on appelle le schéma abélien dual de A. Dans les chapitres IX, X et XI on montrera que $\hat{A}$ est une variété abélienne si A est une variété abélienne.

Proposition 1.11. Soient A et B deux S-schémas abéliens et $u : A \to B$ un homomorphisme. Alors on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{Pic}}_S(B) & \xrightarrow{\mathrm{Pic}(u)} & \underline{\mathrm{Pic}}_S(A) \\ \varphi_B \downarrow & & \downarrow \varphi_A \\ \underline{\mathrm{Corr}}_S(B,B) & \xrightarrow{\mathrm{Corr}(u)} & \underline{\mathrm{Corr}}_S(A,A) \end{array} .$$

Par suite, $\mathrm{Pic}(u)$ induit un homomorphisme $\hat{u} : \hat{B} \to \hat{A}$ et définit par passage au quotient un homomorphisme $\mathrm{NS}(u) : \underline{\mathrm{NS}}_S(B) \to \underline{\mathrm{NS}}_S(A)$.

Démonstration. Cela résulte de la définition de φ et du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A\times_S A & \xrightarrow{u\times u} & B\times_S B \\ s_A \downarrow & & \downarrow s_B \\ A & \xrightarrow[u]{} & B \end{array}$$

En explicitant 1.11 en terme des φ_L on trouve le corollaire fondamental suivant :

Corollaire 1.12. Sous les hypothèses de 1.11, on a pour tout faisceau inversible L sur B le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\varphi_L} & \hat{B} \\ u \uparrow & & \downarrow \hat{u} \\ A & \xrightarrow{\varphi_{u^*(L)}} & \hat{A} \end{array}$$

Théorème 1.13. Soient A et B deux S-schémas abéliens, u et v deux homomorphismes de A dans B, alors $\widehat{u+v} = \hat{u}+\hat{v}$ (autrement dit $A \mapsto \hat{A}$ est un foncteur additif). En particulier, pour tout entier n, $\hat{n}_A = n_{\hat{A}}$.

Démonstration. Considérons le diagramme

$$A \xrightarrow{\delta} A\times_S A \xrightarrow{(uv)} B\times_S B \overset{s,\, p_1,\, p_2}{\rightrightarrows} B$$

On a alors

$$u = p_1 \circ (u \times v) \circ \delta$$

$$v = p_2 \circ (u \times v) \circ \delta$$

$$u+v = s \circ (u \times v) \circ \delta$$

Soit L un faisceau inversible sur B, rigidifié relativement à la section unité et soit $M = s^*(L) \otimes (p_1)^*(L^{-1}) \otimes (p_2)^*(L^{-1})$. On a donc $(u+v)^*(L) \otimes u^*(L^{-1}) \otimes v^*(L^{-1}) = \delta^*(u \times v)^*(M)$. Or si $L \equiv O_B$, M est trivial (1.5 1)) d'où $(u+v)^*(L) \simeq u^*(L) \otimes v^*(L)$ et par suite $u+v = \hat{u}+\hat{v}$.

<u>Corollaire</u> 1.14. Soient A un S-schéma abélien et n un entier. Alors

1) Si L est un faisceau inversible sur A, on a $(n_A)^*(L) \equiv L^{\otimes n^2}$ (autrement dit $\varphi_{(n_A)^*(L)} = n^2 \varphi_L$). En particulier on a $(-1)_A^*(L) \equiv L$.

2) L'application $L \mapsto (n_A)^* L$ dans $\underline{\mathrm{Pic}}_S(A)$ induit l'élévation à la puissance n sur $\hat{A}$ et définit par passage au quotient, l'élévation à la puissance n^2 sur $\underline{NS}_S(A)$.

<u>Démonstration</u>. 2) résulte trivialement de 1) et de 1.13. Pour établir 1) on note que compte tenu de 1.12 et 1.13 on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi_L} & \hat{A} \\ {\scriptstyle n_A}\downarrow & & \uparrow\downarrow{\scriptstyle n_{\hat{A}}} \\ A & \xrightarrow[\varphi_{(n_A)^*L}]{} & \hat{A} \end{array}$$

<u>Remarque</u> 1.15. Le corollaire 1.14 montre que $A \mapsto \underline{\mathrm{Pic}}_S(A)$ n'est pas un foncteur additif, mais plutôt un foncteur "quadratique". Ce point sera précisé plus loin.

<u>Proposition</u> 1.16. Soient A et B deux S-schémas abéliens et u, v, w trois homomorphismes de A dans B. Alors, pour tout faisceau inversible L

sur B on a :

$$(u+v+w)^*(L)\otimes(v+w)^*(L^{-1})\otimes(w+u)^*(L^{-1})\otimes(u+v)^*(L^{-1})\otimes u^*(L)\otimes v^*(L)\otimes w^*(L)\otimes 0^*(L^{-1}) = 0_A .$$

Démonstration. Soit $s_3 : B \otimes_S B \otimes_S B \to B$ le morphisme d'addition $(b_1,b_2,b_3) \mapsto b_1+b_2+b_3$. Il est immédiat que le faisceau inversible sur **A** qui figure au premier membre de l'égalité ci-dessus n'est autre que l'image réciproque par le morphisme $A \to B\times_S B\times_S B$ ($a \mapsto [u(a),v(a),w(a)]$) du rigidifié de $(s_3)^*(L)$ relativement aux sections unité des trois facteurs, donc est trivial d'après le théorème du cube (VII 3.1).

Remarque 1.17. Pour tout couple d'homomorphismes $u,v : A \rightrightarrows B$ et tout faisceau inversible L sur B posons

$$D_L(u,v) = (u+v)^*(L) \otimes u^*(L^{-1}) \otimes v^*(L^{-1}) \otimes 0^*(L).$$

La proposition 1.16 signifie alors que l'application

$$\mathrm{Hom}(A,B) \times \mathrm{Hom}(A,B) \to \mathrm{Pic}(A)$$

$$(u,v) \mapsto D_L(u,v)$$

est une application bi-additive.

Terminons ce paragraphe par une propriété de $\underline{\mathrm{Pic}}_S(A)$ qui aurait pu être signalée dès le chapitre VI.

Définition 1.18. Soient S un schéma (localement noethérien) et $F : (Sch/S)^o \to Ens$ un foncteur. On dit que F satisfait au critère valuatif de propreté si pour tout S-schéma T qui est le spectre d'un anneau de valuation discrète, de point générique t , l'application de restriction $F(T) \to F(t)$ est un isomorphisme. Rappelons que si F est un S-schéma de type fini (resp. localement de type fini) alors F satisfait au critère valuatif de propreté si et seulement si F est propre (resp. essentiellement propre) sur S (EGA II 7.3.8 et EGA IV 18.10.20).

Proposition 1.19. Soit $f : X \to S$ un morphisme propre, lisse, tel que $f_*(O_X) = O_S$ (par exemple A est un S-schéma abélien). Alors $\underline{\mathrm{Pic}}_S(X)$ satisfait au critère valuatif de propreté.

On peut supposer que S est le spectre d'un anneau de valuation discrète. Comme $\underline{\mathrm{Pic}}_S(X)$ est un faisceau f.p.p.f. il est loisible de prouver l'assertion après avoir fait un changement de base fidèlement plat $S' \to S$. On peut donc de plus supposer que f possède une section. Soit t le point générique de S. Un point de $\mathrm{Pic}_t(X_t)$ est alors défini par un faisceau inversible L_t sur X_t (VI 2.9). Comme X est lisse sur S qui est régulier, X est régulier, donc à ses anneaux locaux factoriels. Par suite L_t se prolonge en un faisceau inversible L sur X et L est unique à isomorphisme près d'après (VII 10), d'où la proposition 1.19.

Exercice 1.20. Montrer que dans 1.19 l'hypothèse $f_*(O_X) = O_S$ est inutile.

§ 2. Faisceaux amples sur les variétés abéliennes.

2.1. Soient A un S-schéma abélien, D un diviseur sur A, $L = O_A(D)$ le faisceau inversible défini par D. L'homomorphisme $\varphi_L : A \to \hat{A}$ sera aussi noté φ_D. On désigne par $|D|$ le support de D.

Théorème 2.2 (Weil). Soit A une variété abélienne sur un corps k.

1) Pour qu'un diviseur positif D sur A soit ample, il faut et il suffit que $\mathrm{Ker}\, \varphi_D(\bar{k})$ soit un groupe fini (N.B. $\bar{k}$ désigne une clôture algébrique de k).

2) Il existe sur A un faisceau ample, autrement dit A est un schéma projectif sur k.

<u>Lemme</u> 2.3. Soit A une variété abélienne sur un corps k algébriquement clos et soit D un diviseur sur A.

1) Pour $a, b \in A(k)$, on a : $D_{a+b} + D_a + D_b \simeq 3D$ (où $\simeq$ désigne l'équivalence linéaire).

2) Si x et $a \in A(k)$, il existe un ouvert non vide V de A tel que $b \in V(k) \Longrightarrow x \notin |D_{a+b}| \cup |D_b|$.

3) Supposons D irréductible et soient a et $b \in A(k)$ tels $D_{a-b} \neq D$, alors il existe $c \in A(k)$ tel que $a \in |D_c|$ et $b \notin |D_c|$.

<u>Démonstration</u>. 1) résulte du fait que φ_D est un homomorphisme.

2) On a $x \in |D_{a+b}| \Longleftrightarrow x \in -b + |D_a| \Longleftrightarrow b \in -x + |D_a| =$ $b \in |D_{a+x}|$. On peut donc prendre pour V l'ouvert non vide $A - |D_{a+x}| - |D_x|$.

3) Comme D est irréductible $D_{a-b} \neq D \Longleftrightarrow |D_a| \neq |D_b|$. Par suite il existe $c \in A(k)$ tel que $c \in |D_a| = -a + |D|$ et $c \notin |D_b| = -b + |D|$ d'où $a \in |D_c|$ et $b \notin |D_c|$.

<u>Lemme</u> 2.4. Soient A une variété abélienne sur un corps k algébriquement clos, D_i, $i \in I$ une famille finie de diviseurs positifs irréductibles sur A, $D = \sum_{i \in I} D_i$, E le sous-groupe de $A(k)$ formé des points a tels que $(D_i)_a = D_i$, $\forall i \in i$. Alors si a et $b \in A(k)$ sont tels que $a-b \notin E$, il existe un diviseur positif $\Delta \simeq 3D$ qui sépare a et b (i.e. $a \in |\Delta|$ et $b \notin |\Delta|$).

En effet, il résulte de la définition de E et de 2.3 3), qu'il existe $i \in I$ et $u_i \in A(k)$ tel que $a \in |D_i|_{u_i}$ et $b \notin |D_i|_{u_i}$. D'après 2.3 2), il existe v_i tel que $b \notin |D_i|_{u_i+v_i} \cup |D_i|_{u_i}$ et pour tout $j \in I$, $j \neq i$, il existe u_j et v_j dans $A(k)$ tels que $b \notin |D_j|_{u_j+v_j} \cup |D_j|_{u_j} \cup |D_j|_{v_j}$. Le diviseur $\geqslant 0$, $\Delta = \sum_{i \in I} (D_i)_{u_i+v_i} + (D_i)_{u_i} + (D_i)_{v_i}$ est alors linéairement équivalent à $3D$ (2.3 1)) et par construction, on a $b \notin |\Delta|$ et $a \in |\Delta|$

Prouvons maintenant l'assertion 2) de 2.2. En fait on a le résultat plus précis suivant (cf. [1]) :

<u>Proposition</u> 2.5. Soient A une variété abélienne sur un corps k, V un ouvert <u>affine</u> non vide de A, D un diviseur positif ayant $A-V$ comme support (N.B comme $A-V$ est purement de codimension 1 dans A (EGA IV 21.12.7), et comme les anneaux locaux de A sont factoriels, un tel diviseur D existe) Alors D est ample sur A.

En effet, d'après 2.3 2) et 1), $\forall x \in A(k)$, $\exists\, a$ et $b \in A(k)$, tels que $x \notin |D_{a+b}| \cup |D_a| \cup |D_b|$ et $\Delta = D_{a+b} + D_a + D_b$ est un diviseur $\geqslant 0$ linéairement équivalent à $3D$. On a évidemment $A - |\Delta| = V_{a+b} \cap V_a \cap V_b$ qui est un ouvert affine puisque V est affine et A séparé. Il résulte alors de EGA II 4.5.2 a') que D est ample sur A.

<u>Corollaire</u> 2.6. Si A est une variété abélienne sur un corps k, le foncteur de Picard, $\underline{\mathrm{Pic}}_k(A)$ est un schéma en groupes localement de type fini et il en est de même de $\hat{A}$.

Le fait que $\underline{\mathrm{Pic}}_k(A)$ soit un schéma en groupes localement de type fini résulte de 2.5 et de VI 2.14. L'assertion portant sur $\hat{A}$ résulte alors de 1.9

Pour établir l'assertion 1) de 2.2, on peut supposer k algébriquement clos.

1) Soit $D = \sum_{i \in I} D_i$ un diviseur sur A, où les D_i sont positifs irréductibles, tel que $\operatorname{Ker} \varphi_D(k)$ soit fini. Montrons que D est ample sur A. Appliquons le lemme 2.4 à D. Le groupe E est évidemment contenu dans $\operatorname{Ker} \varphi_D(k)$, donc est fini. D'après 2.4, le système linéaire associé à $3D$ permet de définir un k-morphisme $h : A \to \operatorname{Proj}(W)$ (où $W = \Gamma(A, \mathcal{O}_A(3D))$), qui

sépare les orbites de E dans $A(k)$. Comme E est fini et $\mathbf{A}$ propre, h est fini (EGA III 4.4.2). L'image réciproque par h du faisceau ample canonique sur $\mathrm{Proj}(W)$, qui est isomorphe à $O_A(3D)$ est donc ample sur $\mathbf{A}$; à fortiori D est ample sur A.

ii) Soit D un diviseur ample positif sur A. Montrons que $\mathrm{Ker}\,\varphi_D$ (qui est un sous-schéma en groupes de A d'après 2.6) est fini. Cela va résulter du lemme suivant :

<u>Lemme</u> 2.7. Soient A une variété abélienne sur un corps k algébriquement clos, D un diviseur positif sur A, B la sous-variété abélienne de A égale à la composante neutre réduite de $\mathrm{Ker}\,\varphi_D$. Alors :

1) Le diviseur D est invariant par les translations par le sous groupe B et par suite $O_A(D)|B \simeq O_B$.

2) Le diviseur D est l'image réciproque d'un diviseur Δ sur $C = A/B$ et Δ est ample sur C.

<u>Démonstration</u>. 1) $\Longrightarrow$ 2). En effet puisque D est invariant par B, il résulte de la théorie de la descente fpqc que D provient d'un diviseur Δ sur C. Vu la définition de B, le groupe $\mathrm{Ker}(\varphi_C)_\Delta$ est fini, donc d'après i) ci-dessus, Δ est ample sur C.

Prouvons 1). Soit W le k-espace vectoriel de dimension finie égal au dual de $\Gamma(A, O_A(D))$. Le foncteur

$T \mapsto$ (Diviseurs positifs relatifs sur A_T qui localement sur T sont linéairement équivalents à D_T)

est représenté par le fibré projectif P défini par W. Comme, B est contenu dans $\mathrm{Ker}\,\varphi_D$, B opère sur P par $\Delta \mapsto \Delta^a$, d'où une représentation de B dans $PGL(W)$. Mais on a $\Gamma(B) = k$, alors que $PGL(W)$ est affine, donc B opère trivialement et par suite D est fixe sous les opérations de B.

Corollaire 2.8. Si A est une variété abélienne sur k, on a $\dim(\hat{A}) \geqslant \dim(A)$. En effet si D est un diviseur ample sur A, $\operatorname{Ker} \varphi_D$ est un groupe fini (2.2), donc l'image de A dans $\hat{A}$ par φ_D a même dimension que A.

Corollaire 2.9. Si A est une variété abélienne et si n est un entier non nul, $\operatorname{Ker} n_A$ est un groupe fini.

On peut supposer $n > 0$. Soit D un diviseur ample, positif sur A. Alors nD est ample positif, donc $\operatorname{Ker} \varphi_{nD}$ est fini (2.2). Mais $\varphi_{nD} = n\,\varphi_D$, donc $\operatorname{Ker} \varphi_{nD} \supset A_n$, à fortiori, A_n est fini.

Remarque 2.10. Lorsque n est premier à la caractéristique de k, il est clair à priori que A_n est fini, en effet n_A est alors un morphisme étale.

Bibliographie

EGA, SGA voir chapitre VI.

[1] RAYNAUD (M.).- Faisceaux amples sur les schémas en groupes. Publication de la Faculté d'Orsay.

[2] LANG (S.).- Abelian varieties.- Interscience New-York.

FACULTE DES SCIENCES DE
L'UNIVERSITE DE PARIS

ORSAY

1967-1968

SEMINAIRE DE GEOMETRIE ALGEBRIQUE

Exposé nº IX

LISSITE DU SCHEMA DE PICARD

par M. Demazure

1. Un lemme sur les algèbres de Hopf.

1.1 Soit k un anneau. Une algèbre graduée anticommutative est un k-module H muni d'une graduation $(H^n)n \geqslant 0$, et d'une structure d'algèbre compatible avec sa structure de module et telle que si $a \in H^r$ et $b \in H^s$, on ait $ab \in H^{r+s}$ et $ba = (-1)^{rs}ab$.

Le produit tensoriel (gauche) $H \otimes_g H'$ des algèbres graduées anticommutatives H et H' est le k-module $H \otimes_k H'$ muni de la graduation produit tensoriel et de la structure d'algèbre telle que pour $a \in H$, $a' \in H'^r$, $b \in H^s$, $b' \in H'$ on ait

$$(a \otimes a')(b \otimes b') = (-1)^{rs}(ab \otimes a'b')$$

1.2 Une algèbre de Hopf est une algèbre graduée anticommutative munie d'un homomorphisme d'algèbres graduées (coproduit)

$$\Delta : H \longrightarrow H \otimes_g H$$

et vérifiant les axiomes suivants.

a) La multiplication de H est associative et possède un élément unité, noté 1 tel que $\lambda \longmapsto \lambda . 1$ soit un isomorphisme de k sur H^0.

b) Si $a \in H^n$, $n > 0$, on a

$$\Delta a - 1 \otimes a - a \otimes 1 \in \sum_{i=1}^{n-1} H^i \otimes H^{n-i} .$$

La condition b) signifie que la projection $\varepsilon : H \longrightarrow H^0 \simeq k$ est une coünité pour Δ, c'est-à-dire que $(\mathrm{Id}_H \otimes \varepsilon) \circ \Delta = (\varepsilon \otimes \mathrm{Id}_H) \circ \Delta = \mathrm{Id}_H$.

1.3 Soit V un k-module. Il existe sur l'algèbre graduée anticommutative ΛV une structure d'algèbre de Hopf unique telle que $\Delta v = 1 \otimes v + v \otimes 1$ pour $v \in V$. En effet l'application diagonale de V dans $V \times V$ induit un homomorphisme d'algèbre $\Lambda V \longrightarrow \Lambda(V \times V) \xrightarrow{\sim} \Lambda V \otimes_g \Lambda V$ qui répond à la question.

Soit H une algèbre de Hopf. D'après 1.2 b) tout élément a de H^1 est primitif, c'est-à-dire tel que $\Delta a = 1 \otimes a + a \otimes 1$.

Si $a, b \in H^1$, on a $(a+b)^2 = a^2+b^2+ab+ba = a^2+b^2$. Il s'ensuit que l'ensemble V des $a \in H^1$ tels que $a^2 = 0$ est un sous-module de H^1. L'injection de V dans H^1 se prolonge en un homomorphisme d'algèbres graduées $\Lambda V \longrightarrow H$ qui est compatible avec les coproduits.

1.4 Proposition.- Soit H une algèbre de Hopf, et soit d un entier tel que $H^n = 0$ pour $n > d$. Alors pour tout $s \in \mathrm{Spec}\, k$, on a $[H^1(s) : \kappa(s)] \leq d$. De plus, si H^1 est localement libre de rang d, tout élément de H^1 est de carré nul et l'homomorphisme canonique $\Lambda H^1 \longrightarrow H$ est injectif. Si en outre k est un corps, ou si le k-module H est de type fini, cet homomorphisme est bijectif et tout élément primitif de H est de degré 1.

Lorsque k est un corps, ceci résulte du théorème de Hopf-Borel (A. BOREL, Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts, Ann. of Maths, 57, 1953, p. 138). La démonstration qui suit n'utilise pas ce théorème. Prouvons d'abord :

1.5 Lemme.- Soient H une algèbre de Hopf, V^1 un sous-module de H^1 tel que H^1/V^1 soit plat et V la sous-algèbre de H engendrée par V^1. Si $a \in H^1$, $b, c \in V$, et si $b \neq 0$ et $a \notin V^1$, alors $ab+c \neq 0$.

On peut supposer b homogène de degré n, c homogène de degré $n+1$. Si $n = 0$, l'assertion est triviale ; supposons donc $n > 0$. Comme $\Delta u = 1 \otimes u + u \otimes 1$ pour $u \in H^1$, on a aussitôt $\Delta V \subset V \otimes V$, donc

$$\Delta b = 1 \otimes b + b \otimes 1 + \sum_{i=1}^{n-1} b'_i \otimes b''_{n-i} ,$$

$$\Delta c = 1 \otimes c + c \otimes 1 + \sum_{i=1}^{n} c'_i \otimes c''_{n+1-i} ,$$

avec b'_i, b''_i, c'_i, $c''_i \in V \cap H^i$ car V est graduée. Si $u = ab+c$, on a

$$\Delta u = (1 \otimes a + a \otimes 1)\Delta b + \Delta c , \quad \text{donc}$$

$$\Delta u - 1 \otimes u - u \otimes 1 =$$

$$a \otimes b + \sum ab'_i \otimes b''_i - b \otimes a - \sum b'_i \otimes ab''_{n-i} + \sum c'_i \otimes c''_{n+1-i}$$

Le terme de bidegré $(1,n)$ du membre de droite est

$$a \otimes b - b'_1 \otimes ab''_{n-1} + c'_1 \otimes c''_n \quad \text{si} \quad n > 1 ,$$

$$a \otimes b - b'_1 \otimes ab''_{n-1} + c'_1 \otimes c''_n - b \otimes a \quad \text{si} \quad n = 1 .$$

Si $\varphi : H^1 \longrightarrow H^1/V^1$ est la projection canonique, l'image de ce terme par $\varphi \otimes \mathrm{Id}_{H^n}$ est $\varphi(a) \otimes b$. Si $u = 0$, alors $\varphi(a) \otimes b = 0$ ce qui implique $\varphi(a) = 0$ ou $b = 0$ puisque H/V^1 est plat ; or cela est exclus, donc $u \neq 0$.

1.6 Lemme.- *Soient* H *une algèbre de Hopf telle que le* k-*module* H^1 *soit libre, et soit* $(a_1,\ldots a_m)$ *une partie d'une base de* H^1. *Si* n *est un entier* ≥ 0 *tel que* $a_1^n \neq 0$, *alors* $a_1^n a_2 \ldots a_m \neq 0$.

Raisonnons par récurrence sur $m \geq 1$, l'assertion étant triviale pour $m = 1$. Soit $V^1 = k\, a_1 + \ldots + k\, a_{m-1} \subset H^1$. Le lemme 1.5 appliqué à $a = a_m \notin V^1$ $b = a_1^n a_2 \ldots a_{m-1}$, $c = 0$ entraîne que $a_1^n a_2 \ldots a_m \neq 0$ si $a_1^n a_2 \ldots a_{m-1} \neq 0$

1.7 Démontrons maintenant la proposition. Soit $s \in \operatorname{Spec} k$ et soit $(a_1,\ldots,a_m)$ un système libre d'éléments de $H^1(s)$. D'après 1.6, on a $a_n \ldots a_m \neq 0$, donc $H^m(s) \neq 0$, donc $m \leq d$; cela entraîne $[H^1(s) : \kappa(s)] \leq d$ et démontre la première assertion de 1.4. Pour démontrer le reste de la proposition, on peut supposer H^1 *libre de rang* d ; soit $(a_1,\ldots,a_d)$ une base de H^1. On a

$$a_1 \ldots a_i^2 \ldots a_d \in H^{d+1} = 0$$

donc $a_i^2 = 0$ pour $i = 1,\ldots,d$ d'après 1.6. Tout élément de H^1 est donc de carré nul (cf. 1.3). Soit $f : \Lambda H^1 \longrightarrow H$ l'homomorphisme d'algèbres graduées induisant l'identité sur H^1. *Prouvons que* f *est injectif*. Soit n le plus petit entier, s'il existe, tel que $f \mid \Lambda^n H^1$ ne soit pas injectif : soit V^1 un sous-module de H^1, engendré par une partie de la base (a_i), tel que $f \mid \Lambda^n V^1$ soit injectif, et maximal pour ces propriétés. Soit a l'un des a_i n'appartenant pas V^1 ; il existe $u \in \Lambda^n(V^1 + k\, a)$, tel que $u \neq 0$ et $f(u) = 0$. Mais u s'écrit $a \wedge b + c$, avec $b \in \Lambda^{n-1} V^1$, $c \in \Lambda^n V^1$. On a donc $a\, f(b) + f(c) = f(u) = 0$. D'après 1.5, cela implique $f(b) = 0$ donc $b = 0$, donc $u = c$; mais cela est contradictoire car $f \mid \Lambda^n V^1$ est injectif.

Enfin, supposons que k soit un corps, ou que H soit un k-module de type fini , et prouvons que f est *bijectif*. D'après Nakayama, on peut supposer que k est un corps. L'image de f contient H^o et H^1 ; soit n le plus petit entier, s'il existe, tel que $f(\Lambda^n H^1) \neq H^n$. Notons I l'idéal de H engendré par H^1 ; on voit aussitôt que c'est le sous-module gradué de H tel

$$I \cap H^m = \sum_{i=1}^{m} f(\Lambda^i H^1)\, H^{m-i}, \quad m \geqslant 0 .$$

En particulier $I \cap H^n = \sum_{i=1}^{n} f(\Lambda^i H^1)\, f(\Lambda^{n-i} H^1) = f(\Lambda^n H^1) \neq H^n$. Soit $a \in H^n$, $a \notin I$, et soit $b \in \Lambda^d H^1$, $b \neq 0$. On a

$$\Delta a \equiv a \otimes 1 + 1 \otimes a \quad \text{mod. } I \otimes H ,$$

$$\Delta f(b) \equiv 1 \otimes f(b) \qquad \text{mod. } I \otimes H ,$$

d'où $\Delta(a\, f(b)) \equiv 1 \otimes a\, f(b) + a \otimes f(b)$ mod. $I \otimes H$. Mais $a\, f(b) \in H^{d+1} = 0$, donc $a \otimes f(b) \in I \otimes H$, ce qui contredit le fait que $a \notin I$ et $f(b) \neq 0$.

Il ne nous reste plus qu'à prouver que tout élément primitif de l'algèbre de Hopf ΛH^1 est de degré 1 : c'est un résultat bien connu, donnons une démonstration pour être complet. Raisonnons par récurrence sur le rang d de H^1, l'assertion étant triviale pour $d = 1$. Si $d \geqslant 1$, écrivons $H^1 = V' + V''$, où V' est libre de rang 1 et V'' libre de rang $d-1$. Si $u \in \Lambda^i H^1$, $i > 1$, on peut écrire $u = a \wedge b + c$, avec $a \in V'$, $b \in \Lambda^{i-1} V''$, $c \in \Lambda^i V''$. Le calcul fait au cours de la démonstration de 1.5 prouve que la composante de bidegré $(1, i-1)$ de $\Delta u - 1 \otimes u - u \otimes 1$ est congrue à $a \otimes b$ modulo $V'' \otimes \Lambda^{i-1} H^1$; si u est primitif on a donc $a = 0$ ou $b = 0$, donc $u = c$, d'où $c = 0$ d'après l'hypothèse de récurrence.

2. Lissité de $\hat{A}$.

2.1 Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant

Théorème.- *Soient* S *un schéma,* A *un* S*-schéma abélien et* $f : A \longrightarrow S$ *le morphisme structural.*

a) *Le foncteur* $\hat{A}$ (VIII 1.7) *est formellement lisse sur* S.

b) *Les* $\underline{O}_S$*-modules* $\mathcal{R}^i f_*(\underline{O}_A)$ *sont localement libres de rang fini et leur formation commute à l'extension de la base* (pour tout $S' \longrightarrow S$, notons $A' = A \times_S S'$, $f' = f \times_S S'$, alors $\mathcal{R}^i f'_*(\underline{O}_{A'}) \simeq \mathcal{R}^i f_*(\underline{O}_A) \otimes_{O_S} \underline{O}_{S'}$).

c) *Toute section de* $\mathcal{R}^1 f_*(\underline{O}_A)$ *sur un ouvert de* S *est de cup-carré nul. L'homomorphisme d'algèbres canonique*

$$\wedge \mathcal{R}^1 f_*(\underline{O}_A) \longrightarrow \mathcal{R}^{\circ} f_*(\underline{O}_A) = \coprod_{i \geq 0} \mathcal{R}^i f_*(\underline{O}_A)$$

est un isomorphisme.

d) *Soit* $s \in S$ *et soit* $d = \dim_{\kappa(s)} A(s)$. *Alors*

$$\dim_{\kappa(s)} \hat{A}(s) = d ,$$

$$\left[\mathcal{R}^i f_*(\underline{O}_A)(s) : \kappa(s)\right] = \binom{d}{i} , \quad i \geq 0 .$$

Comme d'habitude, on peut supposer S *affine*, soit $S = \operatorname{Spec} k$, et A de dimension relative constante, soit d. La démonstration se fera en plusieur temps.

2.2 *Structure d'algèbre de Hopf sur* $H^*(A,\underline{O}_A)$.

Pour le cup-produit $H^*(A,\underline{O}_A) = \coprod_{n \geq 0} H^n(A,\underline{O}_A)$ est une k-algèbre graduée anticommutative. Les deux projections canoniques $A \times_S A \longrightarrow A$ induisent des homomorphismes d'algèbres graduées $H^*(A,\underline{O}_A) \longrightarrow H^*(A \times_S A, \underline{O}_{A\times A})$, d'où par cup-produit un homomorphisme

$$\varphi : H^*(A,\underline{O}_A) \otimes_g H^*(A,\underline{O}_A) \longrightarrow H^*(A \times_S A , \underline{O}_{A\times A}).$$

Celui-ci est un isomorphisme d'après la formule de Kunneth (EGA III).

La multiplication $m : A\times_S A \longrightarrow A$ induit un homomorphisme d'algèbres graduées $m^* : H^*(A,\underline{O}_A) \longrightarrow H^*(A\times_S A , \underline{O}_{A\times A})$, d'où par composition avec φ^{-1} un homomorphisme

$$\Delta : H^*(A,\underline{O}_A) \longrightarrow H^*(A,\underline{O}_A) \otimes_g H^*(A,\underline{O}_A).$$

Il est clair que Δ munit $H^*(A,\underline{O}_A)$ d'une structure d'algèbre de Hopf. Remarquons que $H^n(A,\underline{O}_A) = 0$ pour $n > d$.

2.3 Le cas d'un corps de base.

Supposons que k soit un corps. D'après VIII, 2.2, il existe sur A des modules inversibles L non dégénerés, c'est-à-dire tels que l'homomorphisme canonique $\varphi_L : A \longrightarrow \underline{Pic}_{A/S}$ ait un noyau fini ; en particulier

$$(*) \quad d = \dim A \leq \dim \underline{Pic}_{A/S} .$$

D'autre part, (VI 2.11), l'algèbre de Lie du k-groupe algébrique $\underline{Pic}_{A/S}$ est $H^1(A,\underline{O}_A)$, donc

$$(**) \quad \dim \underline{Pic}_{A/S} \leq \left[H^1(A,\underline{O}_A) : k\right] .$$

Enfin, d'après 1.4, on a

$$(***) \quad \left[H^1(A,\underline{O}_A) : k\right] \leq d .$$

Comparant ces trois inégalités, on voit que ce sont des égalités. Cela entraîne l'égalité $\dim \underline{Pic}_{A/S} = d$ d'après $(*)$, la lissité de $\underline{Pic}_{A/S}$ d'après $(**)$ et l'égalité $\left[H^1(A,\underline{O}_A) : k\right] = d$ d'après $(***)$. Appliquant alors 1.4, on en déduit les assertions b), c) d) du théorème.

2.4

Lemme.- Si S est réduit, les $R^i f_*(\underline{O}_A)$ sont localement libres de rang fini et la restriction à $R^2 f_*(\underline{O}_A)$ de l'homomorphisme

$$\varphi = m^* - pr_1^* - pr_2^* : R^\circ f_*(\underline{O}_A) \longrightarrow R^\circ(f \times f)_*(\underline{O}_{A \times A})$$

est un monomorphisme.

On se réduit comme d'habitude au cas où S est noethérien. D'après ce qui précède, on a

$$\left[R^1 f_*(\underline{O}_A)(s) : \varkappa(s) \right] = d$$

pour tout $s \in S$, donc $R^1 f_*(\underline{O}_A)$ est localement libre de rang d. Appliquant 1.4, on en déduit des isomorphismes

$$\Lambda^i R^1 f_*(\underline{O}_A) \xrightarrow{\sim} R^i f_*(\underline{O}_A), \quad i > 0$$

donc les $R^i f_*(\underline{O}_A)$ sont localement libres. Enfin, le noyau de φ est le faisceau des éléments primitifs de $R^\circ f_*(\underline{O}_A)$, donc est $R^1 f_*(\underline{O}_A)$ d'après 1.4.

2.5 Démonstration de a).- Il faut prouver que pour tout S-schéma affine S', et tout sous-schéma fermé S'_o de S' défini par un idéal nilpotent, l'homomorphisme canonique $\hat{A}(S') \longrightarrow \hat{A}(S'_o)$ est surjectif. Comme d'habitude, on peut remplacer S par S', A par $A \times_S S'$ et supposer que l'idéal I de k définissant $S_o = S'_o$ est de carré nul et annulé par le nilradical N de k ; on pose $\bar{S} = S_{red}$, $A_o = A \times_S S_o$, $\bar{A} = A \times_S \bar{S}$. Comme $\hat{A}$ est un sous-foncteur ouvert de $\underline{Pic}_{A/S}$ (VIII, 1.9), il suffit de prouver que tout élément de $\hat{A}(S_o) = \hat{A}_o(S_o)$ est l'image d'un élément de $\underline{Pic}_{A/S}(S) = Pic(A/S)$.

Changeant provisoirement de notations, soit T un S-schéma quelconque (possédant une section) et soit $f : T \longrightarrow S$ le morphisme structural ; notons $T_o = T \times_S S_o$ et $f_o = f \times_S S_o$. On a introduit en VI 2.11 une suite exacte

$$\mathrm{Pic}(T/S) \longrightarrow \mathrm{Pic}(T_o/S_o) \xrightarrow{\partial} \Gamma(S, R^2 f_*(I\,\underline{O}_T)).$$

Si T' est un second S-schéma (possédant une section) et si $g : T' \longrightarrow T$ est un S-morphisme, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Pic}(T/S) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(T_o/S_o) & \xrightarrow{\partial} & \Gamma(S, R^2 f_*(I\,\underline{O}_T)) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle g^*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle g_o^*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \bar g} \\
\mathrm{Pic}(T'/S) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(T'_o/S_o) & \xrightarrow{\partial} & \Gamma(S, R^2 f'_*(I\,\underline{O}_{T'}))
\end{array}$$

où $\bar g$ est induit par g de façon évidente. Cela s'applique en particulier au cas où $T = A$, $T' = A \times_S A$, et où g est l'un des trois morphismes m, pr_1, pr_2. D'autre part, comme A est plat sur S, on a $I\,\underline{O}_A = I \otimes_{\bar S} O_{\bar A}$; comme les $R^i \bar f_*(O_A)$ sont plats (2.4), on a des isomorphismes $R^2 f_*(I\,\underline{O}_A) \simeq R^2 f_*(\underline{O}_{\bar A}) \otimes_{\bar S} I$

Le même raisonnement s'applique à $A \times_S A$. On en déduit donc un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Pic}(A/S) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(A_o/S_o) & \xrightarrow{\partial} & \Gamma(\bar A, R^2 \bar f_*(\underline{O}_{\bar A})) \otimes_{\bar S} I \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \varphi_o} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \bar\varphi \otimes I} \\
\mathrm{Pic}(A \times_S A/S) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(A_o \times_{S_o} A_o/S_o) & \xrightarrow{\partial} & \Gamma(\bar A, R^2 (\bar f \times \bar f)_*(\underline{O}_{\bar A \times_{\bar S} \bar A})) \otimes_{\bar S} I
\end{array}$$

où $\varphi = m^* - pr_1^* - pr_2^*$, $\varphi_o = m_o^* - pr_1^* - pr_2^*$ et $\bar\varphi = \Gamma(\bar S, \bar m^* - \bar{pr}_1^* - \bar{pr}_2^*)$.

Si $\alpha_o \in \mathrm{Pic}(A_o/S_o)$ et si $\alpha_o \equiv 0$, alors $\varphi_o(\alpha_o) = 0$, donc $(\bar\varphi \otimes_{\bar S} I)(\partial\alpha_o) = \delta\varphi_o(\alpha_o) = 0$; or $\bar\varphi$ est injectif (2.4) donc aussi $\bar\varphi \otimes_{\bar S} I$ puisque la source et le but de $\bar\varphi$ sont plats (2.4) ; on a donc $\partial\alpha_o = 0$, ce qui prouve que α_o provient d'un élément de $\mathrm{Pic}(A/S)$, ce qu'il fallait démontrer.

2.6 Fin de la démonstration.- Compte-tenu de ce qui précède et de 1.4, il suffit de prouver que $R^1 f_*(\underline{O}_A)$ est localement libre et que sa formation commute à l'extension de la base. Or cela résulte de

Lemme.- Soit $f : X \to S$ un morphisme propre et plat tel que $f_*(\underline{O}_X) = \underline{O}_S$ universellement et que $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ soit formellement lisse le long de la section unité. Alors $R^1 f_*(\underline{O}_X)$ est localement libre de rang fini et sa formation commut à l'extension de la base.

D'après VI, 2.13, il existe un $\underline{O}_S$-module quasi-cohérent Q et un isomorphisme de foncteurs en $S' \in \mathrm{Sch}_{/S}$ (où $X' = X \times_S S'$ et $f' = f \times_S S'$)

$$H^o(S', R^1 f'_*(\underline{O}_{X'})) \simeq \mathrm{Hom}_{S'}(Q \otimes_S S', \underline{O}_{S'}).$$

Il suffit de prouver que Q est localement libre de rang fini, c'est-à-dire que le foncteur F tel que

$$F(S') = \mathrm{Hom}_{S'}(Q \otimes_S S', \underline{O}_{S'}) ,$$

est formellement lisse. Soit donc T un S-schéma affine, T_o un sous-schéma fermé de T défini par un idéal nilpotent, $i : T_o \to T$ l'immersion canonique ; il nous faut prouver que $F(i)$ est surjectif. Or si ε est une variabl de carré nul, on a une suite exacte scindée (VI, 2.11).

$$0 \to F(T) \to \hat{X}(T(\varepsilon)) \rightleftarrows \hat{X}(T) \to 0 ,$$

d'où une décomposition $\hat{X}(T(\varepsilon)) = \hat{X}(T) \oplus F(T)$; de même $\hat{X}(T_o(\varepsilon)) = \hat{X}(T_o) \oplus F(T_o)$ et $\hat{X}(i(\varepsilon)) = \hat{X}(i) \oplus F(i)$. Comme $\hat{X}(i(\varepsilon))$ est surjectif, $F(i)$ l'est aussi, ce qu'il fallait démontrer.

2.7 Proposition.- Si A est un S-schéma abélien, le morphisme canonique $\varphi : \underline{\mathrm{Pic}}_{A/S} \longrightarrow \underline{\mathrm{Corr}}_S(A,A)$ est formellement lisse.

Il suffit de prouver que si S est affine, et si S_o est un sous-schéma fermé de S défini par un idéal I annulé par le nilradical de $\Gamma(S,\underline{O}_S)$, la condition suivante est vérifiée : si $\alpha_o \in \mathrm{Pic}(A_o/S_o)$ et $\beta \in \mathrm{Corr}_S(A,A)$ sont tels que $\varphi_o(\alpha_o) = \beta_o$ il existe $\lambda \in \mathrm{Pic}(A/S)$ tel que $\lambda_o = \alpha_o$ et $\varphi(\lambda) = \beta$. Comme $\mathrm{Corr}_S(A,A)$ est formellement net (VII, 3.5), la condition $\lambda_o = \alpha$ entraîne $(\varphi(\lambda))_o = \varphi_o(\alpha_o) = \beta_o$, donc $\varphi(\lambda) = \beta$. Il suffit donc de prouver que si $\alpha_o \in \mathrm{Pic}(A_o/S_o)$ et si $\varphi_o(\alpha_o) \in \mathrm{Corr}_{S_o}(A_o,A_o) \simeq \mathrm{Pic}_{(e,e)}(A_o \times A_o/S_o)$ provient d'un élément de $\mathrm{Pic}(A \times A/S)$, alors α_o provient d'un élément de $\mathrm{Pic}(A/S)$. Mais cela résulte aussitôt du diagramme commutatif de 2.5 et du fait que $\breve{\varphi} \otimes I$ est injectif.

FACULTE DES SCIENCES DE
L'UNIVERSITE DE PARIS

ORSAY

1967-1968

SEMINAIRE DE GEOMETRIE ALGEBRIQUE

-:-:-:-:-:-

Exposé n° X

COMPARAISON DE $\hat{A}$ ET DE $\mathrm{Pic}^{\tau}_{A/k}$

par M. Raynaud

-:-:-:-:-:-

§ 1. Sous-groupes algébriques engendrés par des courbes.

Proposition 1.1. Soient k un corps, G un k-groupe algébrique. C une courbe sur k, géométriquement intègre, $u : C \to G$ un k-morphisme dont l'image est de dimension 1 et contient l'origine de G. Pour tout entier $r > 1$ considérons le k-morphisme

$$u_r : C_r = \overbrace{C \times_k \dots \times_k C}^{r \text{ fois}} \to G$$

$$(c_1, \dots, c_r) \mapsto u(c_1) \dots u(c_r)$$

et soit W_r l'image schématique de u_r. Alors :

1) On a $W_r \subset W_{r+1}$ et $\dim W_r \leqslant r$.

2) Soit r_o le plus grand entier r pour lequel on a $\dim W_r = r$. Alors $W_r = W_{r_o}$ pour $r \geqslant r_o$, et W_{r_o} est un sous-groupe algébrique de G lisse et connexe, de dimension r_o.

3) Pour tout entier $r \leqslant r_o$, le morphisme $u_r : C\times_k\ldots\times_k C \to W_r$, est un morphisme dominant, (surjectif si C est propre), et génériquement fini.

<u>Démonstration</u>. 1) et 3) sont évidents. Prouvons 2). Vu la définition de r_o, on a $\dim W_{r_o+1} \leqslant \dim W_{r_o}$. D'autre part, W_{r_o+1} est intègre et contient W_{r_o} donc $W_{r_o+1} = W_{r_o}$. De proche en proche on en déduit que $W_r = W_{r_o}$ pour $r \geqslant r_o$. Comme le morphisme

$$W_{r_o} \times_k W_{r_o} \to G$$

$$(w,w') \mapsto w\,w'$$

a pour image schématique, $W_{2r_o} = W_{r_o}$ on voit que W_{r_o} est stable par la multiplication dans G. Considérons alors l'isomorphisme v

$$G\times_k G \xrightarrow{\sim} G\times_k G$$

$$(x,y) \mapsto (xy,y)$$

Vu ce qui précède, v induit un morphisme $w : W_{r_o} \times_k W_{r_o} \to W_{r_o} \times_k W_{r_o}$ qui est évidemment une immersion fermée. Comme $W_{r_o} \times_k W_{r_o}$ est intègre, w est nécessairement un isomorphisme. L'isomorphisme réciproque est la restriction à $W_{r_o} \times_k W_{r_o}$ du morphisme $(x,y) \mapsto (xy^{-1},y)$, d'où le fait que W_{r_o} est un sous-groupe algébrique de G. Comme W_{r_o} est géométriquement intègre, W_{r_o} est lisse et connexe.

Il est clair que tout sous-groupe algébrique de G, qui contient l'image schématique de u, contient W_{r_o}. On dit que W_{r_o} est le <u>sous groupe algébrique engendré par</u> u (cf SGA 3 VI_B 7).

<u>Exercice</u>. Mêmes hypothèses que dans 1.1, mis à part que l'on ne suppose plus que $u(C)$ contient l'origine de G. Montrer que W_{r_o} est alors un espace

principal homogène sous un sous-groupe algébrique H de G, lisse et connexe, et que W_{r_0} est contenu dans le normalisateur de H dans G.

Corollaire 1.2. Soit A une variété abélienne non nulle définie sur un corps k algébriquement clos. Alors il existe une courbe intègre C propre et lisse sur k et un k-morphisme $u : C \to A$ dont l'image contient l'origine de A et qui engendre une sous-variété abélienne non nulle B de A.

Démonstration. Il suffit de prendre pour C le normalisé d'un sous-schéma fermé intègre de A, de dimension 1, contenant l'origine.

Corollaire 1.3. Soit k un corps algébriquement clos et A une k-variété abélienne simple (i.e A est une variété abélienne non nulle qui ne contient pas de sous-variétés abéliennes autres que A et 0). Alors A est engendrée par une courbe intègre C, propre et lisse sur k. dont l'image contient l'origine de A.

Remarque 1.4. On peut montrer que toute variété abélienne A, non nulle, définie sur un corps k algébriquement clos, contient une courbe C intègre, propre et lisse, contenant l'origine, qui engendre A.

§ 2. Image directe d'un diviseur.

Sans entrer dans le détail de la théorie des intersections, rappelons brièvement le minimum vital sur l'image directe d'un diviseur.

Soient X et Y deux schémas intègres, K et L leurs corps de fonctions rationnelles, $f : X \to Y$ un morphisme propre surjectif. Si $[K : L]$ est fini, f est génériquement fini et $n = [K : L]$ s'appelle le degré de

Supposons de plus que les anneaux locaux de Y soient factoriels. Dans ces conditions, on va définir un homomorphisme canonique sur les groupes de diviseu

$$f_! : \mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Div}(Y)$$

Soit V le plus grand ouvert de Y au-dessus duquel f est fini et plat. Il résulte des hypothèses faites que V contient les points de Y de codimension 1 . Posons $U = f^{-1}(V)$. Soient D un diviseur sur X , D_U sa restriction à U , $\Delta_V = \mathrm{Norm}_{U/V}(D_U)$ qui est un diviseur sur V (EGA IV 21.5.5). Comme les anneaux locaux de Y sont factoriels, Δ_V se prolonge de manière unique en un diviseur Δ sur Y . Par définition, on pose $f!(D) = \Delta$. Il est clair que $f!$ est un homomorphisme. De plus on a la proposition suivante :

Proposition 2.1. Gardons les hypothèses précédentes et soient y un point de Y de codimension 1 , x_i , $i = 1,\dots,r$ les points de $f^{-1}(x)$. Alors, si D est un diviseur sur X , de multiplicité n_i au point x_i , la multiplicité de $f!(D)$ au point y est

$$\sum_{i=1}^{r} n_i \, [k(x_i) : k(y)].$$

Cela résulte de la description de $f!$ et de EGA IV 21.10.17.

Corollaire 2.2. Soit D un diviseur sur Y , alors on a

$$f! \, f^*(D) = nD \quad (\text{où } n \text{ est le degré de } f).$$

§ 3. Equivalence algébrique - Equivalence de torsion.

3.1 Soient k un corps et G un k-groupe localement algébrique (i.e localement de type fini sur k). Alors G possède un plus petit sous-groupe ouvert, sa composante neutre G^0 qui est un groupe algébrique géométriquement irréductible (SGA 3 VI_A 2.4). Si G est commutatif, on peut considérer pour tout entier n , l'homomorphisme n_G d'élévation à la puissance n dans G. On définit alors le sous-groupe ouvert G^τ de G comme étant la réunion des sous-groupes ouverts $n_G^{-1}(G^0)$, pour $n > 1$. Le groupe G^τ est aussi l'image réciproque, par la projection canonique $G \to G/G^0$, du sous-groupe de torsion du groupe étale G/G^o.

Ceci étant, soit k un corps, X un k-schéma propre et admettons que $\underline{\mathrm{Pic}}_k(X)$ est un groupe localement algébrique, ce qui résulte de [2] dans le cas général et de VI 2.15 dans le cas où X est intègre et projectif sur k. On peut donc définir les deux sous-groupes ouverts $\underline{\mathrm{Pic}}_k^o(X)$ et $\underline{\mathrm{Pic}}_k^\tau(X)$ de $\underline{\mathrm{Pic}}_k(X)$. A ces sous-groupes sont associés des relations d'équivalence sur les faisceaux inversibles sur X. Plus précisément :

Définition 3.2. Soient k un corps et X un k-schéma propre. On dit que deux faisceaux inversibles L et L' sur X sont algébriquement équivalents et on écrit $L \approx L'$, si $L' \otimes L^{-1}$ définit un point de $\mathrm{Pic}_k^o(X)$.

Si $\Gamma(X.\mathcal{O}_X) = k$ et si X possède un point rationnel. il résulte de VI 2.9, que l'on a $L \approx L'$ si et seulement si il existe un k-schéma Y connexe, un faisceau inversible M sur $X \times_k Y$, deux points y et y' de $Y(k)$ et des isomorphismes

$$L \simeq M_y \ , \ L' \simeq M_{y'} .$$

Pour qu'un faisceau inversible L sur X définisse un point de $\mathrm{Pic}^\tau(X/k)$ il faut et il suffit qu'il existe un entier $n > 1$, tel que $L^{\otimes n}$ soit algébriquement équivalent à $\mathcal{O}_X$.

Exemple 3.3. Soit k un corps, A une k-variété abélienne,

a) Comme $\hat{A}$ est un sous-groupe ouvert de $\underline{\mathrm{Pic}}_k(A)$ (VIII 1.9), $\hat{A}$ contient $\underline{\mathrm{Pic}}_k^o(A)$. Par suite $L \approx \mathcal{O}_A \Longrightarrow L \equiv \mathcal{O}_A$.

b) Soit L un faisceau inversible sur A et $a \in A(k)$. Alors on a $L_a \approx L$. En effet, comme A est connexe, l'homomorphisme φ_L se factorise à travers $\underline{\mathrm{Pic}}_k^o(A)$.

§ 4. Application aux variétés abéliennes simples.

Le théorème suivant est un résultat provisoire qui sera amélioré dans l'exposé 11. Sa démonstration est directement extraite de [1] IV § 2.

Théorème 4.1 (Weil). Soient k un corps, A une k-variété abélienne qui est engendrée (au sens du § 1) par une courbe C géométriquement intègre, propre et lisse.

Alors il existe un entier $n > 0$, tel que nA soit contenu dans $\underline{\mathrm{Pic}}^0_k(A)$; à fortiori, $\hat{A}$ est contenu dans $\underline{\mathrm{Pic}}^\tau_k(A)$.

Pour établir le théorème, on peut supposer k algébriquement clos et compte tenu de 3.3 il suffit de prouver la proposition suivante:

Proposition 4.2. Soient k un corps algébriquement clos, A une k-variété abélienne de dimension $r \geqslant 1$, C une courbe intègre, propre et lisse sur k, $u : C \to A$ un morphisme qui engendre A. Reprenons les notations de 1.1. Soit d_r le degré du morphisme $u_r : C^r \to A$ et d_{r-1} celui du morphisme $u_{r-1} : C^{r-1} \to W_{r-1} = W \subset A$.

Enfin soit D un diviseur sur A tel que $D \equiv 0$. Alors il existe $a \in A(k)$ tel que l'on ait :

$$(*) \quad d_r D \simeq r d_{r-1}(W^a - W)$$

Notons d'abord que W est un sous-schéma intègre de A, de codimension 1 dans A, donc est un diviseur puisque les anneaux locaux de A sont réguliers, donc factoriels, ce qui donne un sens à $(*)$. D'autre part, quitte à remplacer D par un diviseur linéairement équivalent, on peut supposer que $u^*(D)$ est défini.

Nous allons calculer de deux façons différentes le diviseur

$$(u_r)_!(u_r)^*(D)$$

a) D'après 2.2 on a d'abord

$$(1) \quad (u_r)!(u_r)^*(D) = d_r D$$

b) Notons $s_r : A^r \to A$ le morphisme d'addition $(a_1,\ldots,a_r) \to a_1+\ldots+a_r$ et p_i, $(i = 1,\ldots,r)$ la projection de A^r sur le $i^{\text{ème}}$ facteur. Le morphisme u_r admet la factorisation

$$C^r \xrightarrow{u^r} A^r \xrightarrow{s_r} A$$

de sorte que l'on a $(u_r)^*(D) = (u^r)^*(s_r)^*(D)$. L'homomorphisme s_r est la somme des homomorphismes p_i, $i = 1,\ldots,r$. L'hypothèse $D \equiv 0$, entraîne donc, d'après VIII 1.13, que l'on a

$$(2) \quad (s_r)^*(D) \simeq \sum_{i=1}^{r} (p_i)^*(D)$$

Désignons par π_i $(i = 1,\ldots r)$ la projection de C^r sur le $i^{\text{ème}}$ facteur. On a alors le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} C^r \arrow[r, "u^r"] \arrow[d, "\pi_i"'] & A^r \arrow[d, "p_i"] \\ C \arrow[r, "u"] & A \end{tikzcd}$$

Par hypothèse, $u^*(D)$ est défini. Il en résulte que $(u^r)^*(p_i)^*(D)$ est défini et est égal à $(\pi_i)^*(u)^*(D)$. D'où

$$(u_r)^*(D) \simeq \sum_{i=1}^{r} (\pi_i)^* u^*(D)$$

et par suite

$$(3) \quad (u_r)!(u_r)^*(D) \simeq \sum_{i} (u_r)!(\pi_i)^* u^*(D)$$

Soit σ une permutation de $\{1,\ldots,r\}$ et $\tilde{\sigma}$ l'automorphisme correspondant de C^r. Comme A est commutatif, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} C^r \arrow[rr, "\tilde{\sigma}"] \arrow[dr, "u_r"'] & & C^r \arrow[dl, "u_r"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

d'où il résulte que si Δ est un diviseur sur C, alors $(u_r)_!(\pi_i)^*(\Delta)$ est indépendant de i. On a donc

$$(4) \quad (u_r)_!(u_r)^*(D) \simeq r(u_r)_!(\pi_r)^* u^*(D)).$$

Il nous reste à calculer $(u_r)_!(\pi_r)^* u^*(D)$. Comme C est une courbe lisse sur un corps algébriquement clos, le diviseur $u^*(D)$ est de la forme $\sum_{j=1}^{n} m_j (P_j)$, où les P_j, $j=1,\ldots n$, sont des points rationnels distincts de C et les m_j sont des entiers. Par suite, $(\pi_r)^* u^*(D) = \sum_{j=1}^{n} m_j C^{r-1} \times_k P_j$. Si l'on pose $Q_j = u(P_j)$, on a, ensemblistement, $u_r(C^{r-1} \times_k P_j) = W+Q_j = W^{(-Q_j)}$. D'autre part, il résulte de 2.1 que la multiplicité de $W^{(-Q_j)}$ dans $(u_r)_!(C^{r-1} \times_k P_j)$ est égale au degré d_{P_j} du morphisme

$$v_{P_j} = u_r | C^{r-1} \times_k P_j : C^{r-1} \times_k P_j \to W^{(-Q_j)}.$$

Or si T_{Q_j} désigne la translation par Q_j dans A, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} C^{r-1} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "u_{r-1}"'] & C^{r-1} \times_k P_j \arrow[d, "v_{P_j}"] \\ W \arrow[r, "T_{Q_j} | W"] & W^{(-Q_j)} \end{tikzcd}$$

qui montre que d_{P_j} est égal au degré d_{r-1} de u_{r-1}. Finalement on obtient

$$(6) \quad (u_r)_!(u_r)^*(D) \simeq r\, d_{r-1} \Big(\sum_{j=1}^{n} m_j\, W^{(-Q_j)}\Big).$$

c) En comparant (1) et (6) on trouve

$$(7)\quad d_r D \simeq r\, d_{r-1}\Big(\sum_{j=1}^{n} m_j\, W^{(-Q_j)}\Big)$$

Le point suivant va consister à montrer que l'on a $\sum_{j=1}^{n} m_j = 0$ (autrement dit $u^*(D)$ est un diviseur sur C de degré 0). D'après le théorème du cube (VIII 1.5), φ_W est un homomorphisme de A dans $\hat{A}$ de sorte que l'on a

$$\sum_{j=1}^{n} m_j\big(W^{(-Q_j)} - W\big) \simeq W^a - W$$

où l'on a posé $a = \sum_{j=1}^{n} -m_j\, Q_j$.

On déduit alors de (7) que l'on a la relation

$$(8)\quad d_r D - r_{d_{r-1}}\Big(\sum_{j=1}^{n} m_j\Big) W \simeq r\, d_{r-1}(W^a - W).$$

Mais on a $D \equiv 0$ par hypothèse et d'après 3.3, on a aussi $W^a - W \equiv 0$, donc si $\Delta = r d_{r-1}\big(\sum_{j=1}^{n} m_j\big)W$, il résulte de (8) que l'on a aussi $\Delta \equiv 0$. Or Δ ou $-\Delta$ est un diviseur $\geqslant 0$, puisque W est > 0 . D'après VIII 2.7 on a nécessairement $\Delta = 0$ et par suite $\sum_{j=1}^{n} m_j = 0$. On déduit alors de (8) la relation cherchée :

$$d_r D \simeq r\, d_{r-1}(W^a - W)$$

<u>Remarque</u> 4.3. On déduit facilement de la démonstration de 4.2 que si $\mathcal{L}$ est un faisceau inversible sur une variété abélienne A sur un corps k algébriquement clos tel que $\mathcal{L} \equiv \mathcal{O}_A$, alors la restriction de $\mathcal{L}$ à toute courbe fermée intègre C de A est de degré 0. Autrement dit $\mathcal{L}$ est <u>numériquement équivalent</u> à $\mathcal{O}_A$. Le théorème 4.1 est alors à rapprocher du résultat général suivant (dont la démonstration est délicate - cf. SGA 6 - Théorie des intersections, chap. XIII, à paraître) : si X est un k-schéma propre et $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur A , alors $\mathcal{L}$ est numériquement équivalent à $\mathcal{O}_X$ si

et seulement si $\mathcal{L}$ définit un point de $\mathrm{Pic}^{\tau}(X/k)$.

Bibliographie

EGA - SGA cf. Exposé VI

[1] LANG (S.).- Abelian varieties.- Interscience New-York.

[2] MURRE (J.P.).- On contravariant functors... I.H.E.S. Publication Math. N° 23.

FACULTE DES SCIENCES DE
L'UNIVERSITE DE PARIS

ORSAY

1967-1968

SEMINAIRE DE GEOMETRIE ALGEBRIQUE

Exposé n° XI

BIDUALITE DES SCHEMAS ABELIENS

par M. Demazure

Comme annoncé dans l'exposé VI, on suppose que S est un schéma localement noethérien, donc somme directe de schémas connexes.

Nous dirons simplement S-faisceau pour faisceau (fppf) sur S.

§1. Groupes d'extensions.

1.1 Soit $\underline{\underline{Ab}}_S$ la catégorie abélienne des S-faisceaux en groupes commutatifs. Si G, $H \in \mathrm{Ob}\,\underline{\underline{Ab}}_S$, on note $\mathrm{Hom}(G,H)$ (resp. $\underline{\mathrm{Hom}}(G,H)$) le groupe (resp. le S-faisceau en groupe) des homomorphismes de G dans H. Pour tout S-schéma T, on a donc

$$\underline{\mathrm{Hom}}(G,H)(T) = \mathrm{Hom}_{\underline{\underline{Ab}}_T}(G_T, H_T) .$$

Par exemple, $\underline{\mathrm{Hom}}(G,\underline{\mu}_S)$ est le dual de Cartier de G, noté aussi $D(G)$. Rappelons que si G est un S-schéma fini et plat (= fini et localement libre), $D(G)$ est un S-schéma fini et plat et l'homomorphisme canonique de bidualité $G \to D(D(G))$ est un isomorphisme (voir par exemple [1], II, §1, 2.10).

1.2 On note Ext^i (resp. $\underline{\mathrm{Ext}}^i$) les foncteurs dérivés de Hom (resp. $\underline{\mathrm{Hom}}$) appliquant la recette canonique de dérivation des foncteurs à valeurs dans une catégorie de faisceaux, on obtient un isomorphisme canonique entre $\underline{\mathrm{Ext}}^i(\underline{G},\underline{H})$ et le faisceau associé au préfaisceau $T \to \mathrm{Ext}^i(G_T,H_T)$.

En fait nous n'utiliserons que les foncteurs Ext^1 et $\underline{\mathrm{Ext}}^1$. La suite exacte des foncteurs composés s'écrit ici

$$0 \to H^1(S_{fppf},\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{G},\underline{H})) \to \mathrm{Ext}^1(\underline{G},\underline{H}) \to \underline{\mathrm{Ext}}^1(\underline{G},\underline{H})(S) \to H^2(S_{fppf},\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{G},\underline{H})) \to \mathrm{Ext}^2(\underline{G},$$

En particulier,

a) si $\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{G},\underline{H}) = 0$, alors $\mathrm{Ext}^1(\underline{G},\underline{H}) = \underline{\mathrm{Ext}}^1(\underline{G},\underline{H})(S)$, et le foncteur $T \to \mathrm{Ext}^1(G_T,H_T)$ est déjà un faisceau

b) si $\underline{\mathrm{Ext}}^1(\underline{G},\underline{H}) = 0$, on a une bijection

$$H^1(S_{fppf},\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{G},\underline{H})) \simeq \mathrm{Ext}^1(\underline{G},\underline{H}).$$

1.3 Comme d'habitude, $\mathrm{Ext}^1(\underline{G},H)$ s'identifie naturellement au groupe des classes d'extensions de G par H. Remarquons en passant que si

$$0 \to H \to E \to G \to 0$$

est une extension de G par $\underline{H}$, le morphisme $E \to G$ est affine (resp. plat, lisse, ...) si H est un S-schéma affine (resp. plat, lisse,...). En particulier, si G est un S-schéma et si H est un S-schéma <u>affine</u>, E est affine au-dessus du S-schéma G, donc est un S-<u>schéma</u> ("descente des schémas affines", SGA 1, VIII, 2.1) ; en ce cas, $\mathrm{Ext}^1(\underline{G},\underline{H})$ est aussi le groupe des classes d'extensions de G par H dans la catégorie des S-schémas en groupes commutatifs.

1.4 <u>Proposition</u>. <u>Si</u> G <u>est un</u> S-<u>groupe commutatif fini et plat, on a</u> $\underline{\mathrm{Ext}}^1(\underline{G},\underline{\mu}_S) = 0$.

En effet, soit

$$(\varepsilon) : 0 \to \underline{\mu}_S \to E \to G \to 0$$

une extension de G par $\underline{\mu}_S$. On peut supposer qu'il existe $n \in \underline{\underline{N}}^+$ tel que $n_G = 0$. La suite

$$0 \to {}_n\underline{\mu}_S \to {}_nE \to G \to 0$$

est alors exacte, puisque ${}_n\underline{\mu}_S$ est un épimorphisme (diagramme du serpent) on note ${}_nH$ le noyau de ${}_nH : H \to H$ pour tout S-foncteur en groupes commutatif H). Comme G et ${}_n\underline{\mu}_S$ sont des S-schémas finis et plats, il en est de même de ${}_nE$ et par dualité on obtient une suite exacte

$$0 \to D(G) \to D({}_nE) \to (\underline{\underline{Z}}/n\underline{\underline{Z}})_S \to 0 .$$

Par définition d'un épimorphisme, il existe une famille (fppf)-couvrante $\{S_i \to S\}$ et pour chaque i un élément x_i de $D({}_nE)(S_i)$ qui se projette sur $1 \in (\underline{\underline{Z}}/n\underline{\underline{Z}})_S(S_i)$; comme $nx_i = 0$, la suite

$$0 \to D(G)_{S_i} \to D({}_nE)_{S_i} \to (\underline{\underline{Z}}/n\underline{\underline{Z}})_{S_i} \to 0$$

se scinde, de même que la suite duale, et il existe une section s_i $G_{S_i} \to {}_nE_{S_i} \subset E_{S_i}$. Pour chaque i, l'extension $(\mathcal{E})_{S_i}$ est donc triviale, ce qui entraîne le résultat annoncé.

1.5 <u>Corollaire. On a une bijection canonique</u>

$$\mathrm{Ext}^1(G,\underline{\mu}_S) \simeq H^1(S_{fppf}, D(G)) .$$

1.6 Soit G un S-schéma en groupes commutatif et $e : S \to G$ sa section unité. On va définir un homomorphisme canonique

$$c_G : \mathrm{Ext}^1(G,\underline{\mu}_S) \to \mathrm{Pic}_e(G)$$

Soit donc

$$(\mathcal{E}) \qquad 0 \longrightarrow \underline{\mu}_S \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \longrightarrow 0$$

une extension de G par μ_G : le G-schéma E est muni naturellement d'une structure de μ_G-torseur. On sait qu'un tel torseur est associé à un $\underline{O}_G$-module inversible L que l'on peut décrire ainsi : pour tout ouvert U de G, $L(U)$ est l'ensemble des fonctions $\theta \in \underline{O}_E(p^{-1}(U))$ telles que $\theta(x+i(\lambda)) = \lambda\theta(x)$ pour $x \in p^{-1}(U)(T)$, $\lambda \in \underline{\mu}(T)$, $T \in \mathrm{Ob}\,\underline{\underline{\mathrm{Sch}}}_{/S}$. Alors $p_*(\underline{O}_E)$ s'identifie à l'algèbre graduée $\coprod_{n \in \mathbb{Z}} L^{\otimes n}$, la graduation étant associée à l'opération de μ_G sur le G-schéma E (confer SGA 3, VIII, §4). Notons de plus que L est muni d'une rigidification canonique relativement à e : si V est un ouvert de S, $\Gamma(V, e^*(L))$ s'identifie à l'ensemble des fonctions $\varphi \in \Gamma(\underline{\mu}_V, \underline{O}_{\underline{\mu}_V})$ telles que $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$, ensemble qui s'identifie naturellement à $\Gamma(V, \underline{O}_S)$ (par image réciproque par la section unité de $\underline{\mu}_V$). L'application c_G cherchée associe à la classe de $(\mathcal{E})$ la classe de L dans $\mathrm{Pic}_e(G) \subset \mathrm{Pic}(G)$.

1.7 Exercice : Vérifier que c_G est un homomorphisme de groupes.

1.8 Proposition. *Si $(\mathcal{E}) \in \mathrm{Ext}^1(G, \mu_S)$, l'image de $c_G((\mathcal{E}))$ dans $\underline{\mathrm{Pic}}_S(G)$ est invariante par translations.*

Soit d'abord $x \in E(S)$, notons $a = p(x)$, soit $T_a : A \to A$ la translation $b \mapsto b+a$, et soit $L_a = T_a^*(L)$. Si U est un ouvert de G, on a $p^{-1}(U+a) = p^{-1}(U)+x$,

$$L_a(U) = \{\theta \in \Gamma(p^{-1}(U)+x, \underline{O}_E) ; \theta(y+i(\lambda)) = \lambda\theta(y)\} ,$$

et la translation $y \mapsto y+x$ définit un isomorphisme

$$\varphi(x) : L \xrightarrow{\sim} L_a .$$

Il s'ensuit que la classe de L dans $\mathrm{Pic}(G)$ est invariante par translation par les éléments de $p(E(S)) \subset G(S)$. Comme p est un épimorphisme et comme $\underline{\mathrm{Pic}}_S(G)$ est le faisceau associé au préfaisceau $T \to \mathrm{Pic}(G_T)$, on en déduit le résultat associé.

1.9 Remarque. Avec les notations précédentes, si $x, y \in E(S)$, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, dashed, "\varphi(x+y)"] \arrow[d, "\varphi(x)"'] & L_{p(x+y)} \arrow[d, equal] \\ L_{p(x)} \arrow[r, dashed, "\varphi(y)_{p(x)}"] & (L_{p(y)})_{p(x)} \end{tikzcd} ;$$

d'où $\quad \varphi(x+y) = \varphi(y)_{p(x)} \circ \varphi(x) = \varphi(x)_{p(y)} \circ \varphi(y)$.

§2. Théorème de Rosenlicht.

2.1 Lemme. Soient A un S-schéma abélien, E un S-faisceau en groupes et $f : E \to A$ un épimorphisme de S-faisceaux en groupes. Si $\operatorname{Ker} f$ est un S-schéma en groupes commutatif et à fibres connexes, E est commutatif.

Posons $G = \operatorname{Ker} f$, et soit $\varphi : E \times_S G \to G$ le morphisme défini ensemblistement par $\varphi(x, g) = xgx^{-1}$. Comme G est commutatif, on a $\varphi(xg', g) = \varphi(x, g)$ et φ se factorise par un morphisme $\bar{\varphi} : A \times_S G \to G$. D'après VI, 1.8, il existe des morphismes $u : A \to G$ et $v : G \to G$ tels que $\bar{\varphi}(a, g) = u(a)v(g)$, c'est-à-dire tels que $xgx^{-1} = u(f(x))v(g)$. Faisant $g = 1$ on trouve $u(f(x))v(1) = 1$; faisant $x = 1$, on trouve $g = u(f(1))v(g)$, ce qui donne $xgx^{-1} = g$, et G est central dans E. Considérons maintenant le morphisme $\Psi : E \times E \to E$ défini par $\Psi(x, y) = x^{-1}y^{-1}xy$; comme G est central, Ψ se factorise par un morphisme $\bar{\Psi} : A \times A \to E$; celui-ci prend ses valeurs dans G puisque A est commutatif. Appliquant de nouveau VI, 1.8, on en déduit qu'il existe des morphismes $w, h : A \to G$ tels que $x^{-1}y^{-1}xy = w(f(x)).h(f(y))$. Raisonnant comme ci-dessus, on en déduit que E est commutatif.

Soit A un S-schéma abélien. Considérons l'homomorphisme composé

$$\underline{\mathrm{Ext}}^1(A,\mu_S) \xrightarrow{\alpha_A} \mathrm{Pic}_e(A) \longrightarrow \mathrm{Pic}_S(A).$$

D'après 1.8, il se factorise par $\hat{A}(S)$ et définit donc un homomorphisme, noté $\gamma_A : \underline{\mathrm{Ext}}^1(A,\mu_S) \to \hat{A}(S)$.

2.2 <u>Théorème</u> (Rosenlicht). <u>Si</u> A <u>est un</u> S-<u>schéma abélien, l'homomorphisme canonique</u>

$$\gamma_A : \underline{\mathrm{Ext}}^1(A,\mu_S) \to \hat{A}(S)$$

<u>est bijectif</u>.

Si $(\varepsilon) : 0 \longrightarrow \mu_S \longrightarrow E \xrightarrow{p} A \longrightarrow 0$ est une extension telle que $\gamma_A((\varepsilon)) = 0$, on a $\alpha_A((\varepsilon)) = 0$ car $\mathrm{Pic}_e(A) \to \mathrm{Pic}_S(A)$ est injectif. Il en résulte que le A-torseur E est trivial, donc qu'il existe une section $s : A \to E$ de p. On peut supposer que $s(0) = 0$; alors s est un homomorphisme de groupes d'après VI 1.9 et (ε) est triviale. Pour prouver que γ_A est bijectif, il suffit donc de construire une application $\delta : \hat{A}(S) \to \underline{\mathrm{Ext}}^1(A,\mu_S)$ telle que $\gamma_A \circ \delta = \mathrm{Id}$.

Pour cela, soit plus généralement L un $\underline{O}_A$-module inversible et considérons le S-faisceau E tel que pour $T \in \mathrm{Ob}\,\underline{\underline{\mathrm{Sch}}}/S$

$$E(T) = \{(a,\varphi) \mid a \in A(T)\ ;\ \varphi : L_T \xrightarrow{\sim} (L_T)_a\}\ ,$$

où L_T est l'image réciproque de L sur $A_T = A\times_S T$. La loi $(a,\varphi)(a',\varphi') = (a+a',\varphi_{a'} \circ \varphi')$ est une loi de groupe, de sorte que E est un S-faisceau en groupes et qu'on a une suite exacte

$$(\varepsilon) : 0 \longrightarrow \mu_S \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} A\ ,$$

où $p(a,\varphi) = a$ et où $i(z) = (0,z^{-1})$. Lorsque $L \equiv 0$, p est un épimorphisme. Le groupe E est alors commutatif (2.1) et l'application δ cherchée associe à la classe de L la classe de l'extension précédente.

Démontrons que $\gamma_A \circ \delta = \mathrm{Id}$. Soit $\alpha : \underline{O}_S \xrightarrow{\sim} e^*(\mathscr{L})$ une rigidification de L. Soit $u \in L(A)$. Si $(a,\varphi) \in \underline{E}(S)$, considérons l'isomorphisme

$$\alpha_{a,\varphi} : \underline{O}_S \xrightarrow{\alpha} e^*(L) \xrightarrow{\varphi} e^*(L_a) = a^*(L) ,$$

soit $u_a \in \Gamma(S, \underline{a}^*(L))$ l'élément correspondant à $u \in \Gamma(A,L)$, et posons $\bar{u}(\underline{a},\varphi) = \alpha_{a,\varphi}^{-1}(u_a) \in 1(S,\underline{O}_S)$. On a $\bar{u}(a,z\varphi) = z\bar{u}(\underline{a},\varphi)$ pour $z \in \mu(S)$. L'application $\bar{u} \mapsto \bar{\bar{u}}$ étant fonctorielle en S définit un homomorphisme de L dans le A-module inversible défini par l'extension (ε) ; celui-ci est donc un isomorphisme, ce qui entraîne que $\gamma_A((\varepsilon)) \simeq L$.

2.3 <u>Remarque</u>. Le fait que l'extension (ε) soit commutative se traduit par le résultat suivant. Si $L \equiv 0$, si $a,b \in A(S)$ et si φ et Ψ sont des isomorphisme $\varphi : L \xrightarrow{\sim} L_a$, $\Psi : L \to L_b$, alors le diagramme suivant est commutati

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\Psi"'] & L_a \arrow[d, "\Psi_a"] \\ L_b \arrow[r, "\varphi_b"'] & L_{a+b} \end{tikzcd} .$$

2.4 <u>Corollaire. Si A est un schéma abélien, on a un isomorphisme canonique</u>

$$\gamma_A : \underline{\mathrm{Ext}}^1(A,\underline{\mu}_S) \xrightarrow{\sim} \hat{A} .$$

<u>Pour tout homomorphisme $f : A \to B$ de schémas abéliens, on a</u>
$\underline{\mathrm{Ext}}^1(f,\underline{\mu}_S) = \gamma_A^{-1} \circ \hat{f} \circ \gamma_B$.

Nous identifierons dans la suite $\hat{A}$ à $\underline{\mathrm{Ext}}^1(A,\underline{\mu}_S)$ pour tout S-schéma abélien A et $\hat{f}$ à $\underline{\mathrm{Ext}}^1(f,\underline{\mu}_S)$ pour tout homomorphisme de S-schémas abéliens $f : A \to B$.

2.5 Scholie. Soit G un S-faisceau en groupes commutatif.

a) Si G est un S-schéma fini et plat, on a

$$\underline{\mathrm{Ext}}^0(G,\underline{\mu}_S) = D(G) \quad , \quad \underline{\mathrm{Ext}}^1(G,\underline{\mu}_S) = 0 \ .$$

b) Si G est un S-schéma abélien, on a

$$\underline{\mathrm{Ext}}^0(G,\underline{\mu}_S) = 0 \quad , \quad \underline{\mathrm{Ext}}^1(G,\underline{\mu}_S) = \hat{A} \ .$$

§3. Le schéma abélien dual.

3.1 Un homomorphisme $f : G \to H$ de $\underline{\underline{Ab}}_S$ est une isogénie s'il est fidèlement plat et fini, c'est-à-dire si c'est un épimorphisme de noyau un S-schéma plat et fini ("descente des morphismes fidèlement plats et finis").

Proposition. Si $f : A \to B$ est une isogénie de S-schémas abéliens, alors $\hat{f} : \hat{B} \to \hat{A}$ est une isogénie et $\mathrm{Ker}\ \hat{f}$ est canoniquement isomorphe à $D(\mathrm{Ker}\ f)$.

La suite exacte de $\underline{\underline{Ab}}_S$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\ f \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

donne la suite exacte des $\underline{\mathrm{Ext}}$

$$0 \longrightarrow D(\mathrm{Ker}\ f) \longrightarrow \hat{B} \longrightarrow \hat{A} \longrightarrow 0$$

3.2 Corollaire. Si $n \in \underline{\underline{Z}}$, $n \neq 0$, et si A est un S-schéma abélien, $n_{\hat{A}} : \hat{A} \to \hat{A}$ est un épimorphisme et ${}_n\hat{A} = D({}_nA)$.

En effet $n_{\hat{A}} = \hat{n}_A$ (VIII 1.13) et n_A est une isogénie (VIII, 2.9).

3.3 Théorème. Si A est un S-schéma abélien, le S-foncteur $\hat{A}$ est à fibres (représentables) connexes.

On peut supposer que S est le spectre d'un corps. Raisonnons par récurrence sur la dimension de A, supposée > 0. Si A possède une sous-variété abélienne $B \neq 0, A$, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow B \overset{i}{\longrightarrow} A \overset{p}{\longrightarrow} C \longrightarrow 0 \ ,$$

d'où une suite exacte des <u>Ext</u>

$$0 \dashrightarrow \hat{C} \overset{\hat{p}}{\dashrightarrow} \hat{A} \overset{\hat{i}}{\dashrightarrow} \hat{B} .$$

Par l'hypothèse de récurrence, $\hat{C}$ et $\hat{B}$ sont connexes ; de plus d'après IX, 2.1 $\dim \hat{A} = \dim A = \dim B + \dim C = \dim \hat{B} + \dim \hat{C}$, donc $\hat{i}$ est surjectif et $\hat{A}$ est connexe. Si A est <u>simple</u>, il existe d'après X 4.1 un entier $n \neq 0$ tel que $n\hat{A} \subset \underline{\mathrm{Pic}}^0_{A/S}$. Mais $n\hat{A} = \hat{A}$ d'après 3.2, donc $\hat{A} \subset \underline{\mathrm{Pic}}^0_{A/S}$ et $\hat{A} = \underline{\mathrm{Pic}}^0_{A/S}$.

3.4 <u>Corollaire. Si</u> S <u>est le spectre d'un corps, on a</u>

$$\underline{\mathrm{Pic}}^0_S\, A = \hat{A} = \underline{\mathrm{Pic}}^{\tau}_S\, A$$

En effet $\underline{\mathrm{Pic}}^0_S\, A \subset \underline{\mathrm{Pic}}^{\tau}_S\, A \subset \underline{\mathrm{Pic}}^{\equiv}_S\, A = \hat{A}$.

3.5 <u>Corollaire. Si</u> A <u>est un</u> S-<u>schéma abélien et si</u> $\hat{A}$ <u>est un schéma, c'est un</u> S-<u>schéma abélien.</u>

En effet, $\hat{A}$ est lisse (IX, 2.1), propre (VIII 1.18), et à fibres connexes.

On dit que $\hat{A}$ est le <u>schéma abélien dual</u> de A.

3.6 <u>Corollaire. Si</u>

$$0 \dashrightarrow A \overset{f}{\dashrightarrow} B \overset{g}{\dashrightarrow} C \dashrightarrow 0$$

<u>est une suite exacte de schémas abéliens et si</u> $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ <u>sont des schémas, la suite</u>

$$0 \dashrightarrow \hat{C} \overset{\hat{g}}{\dashrightarrow} \hat{B} \overset{\hat{f}}{\dashrightarrow} \hat{A} \dashrightarrow 0$$

<u>est aussi exacte.</u>

En effet l'exactitude à gauche résulte de la suite exacte des <u>Ext</u> ; d'autre part $\hat{f} : \hat{B} \to \hat{A}$ est un épimorphisme : cela se vérifie sur les fibres (cf. démonstration de 3.3).

§4. Bidualité des schémas abéliens.

4.1 Soient A et B deux schémas abéliens. On a défini en VIII 1.4 et 1.9 des isomorphismes fonctoriels en A et B

$$\mathrm{Hom}(B,\hat{A}) \simeq \mathrm{Corr}_S(A,B) \simeq \mathrm{Hom}(A,\hat{B}).$$

Supposons que $\hat{A}$ soit un schéma ; prenant $B = \hat{A}$, l'application identique de $\hat{A}$ donne par les isomorphismes précédents un morphisme dit canonique

$$K_A : A \to \hat{\hat{A}} .$$

Par fonctorialité en B, il en résulte que l'isomorphisme précédent transforme $f : B \to \hat{A}$ en $\hat{f} \circ K_A : A \to \hat{B}$. Si $\hat{B}$ est également un schéma, on a donc

$$(1) \qquad f = (\hat{f} \circ K_A)\hat{} \circ K_B = \hat{K}_A \circ \hat{\hat{f}} \circ K_B ;$$

et en particulier, si $\hat{A}$ et $\hat{\hat{A}}$ sont des schémas

$$(2) \qquad \hat{K}_A \circ K_{\hat{A}} = \mathrm{Id}_{\hat{A}} .$$

4.2 <u>Théorème</u> (Cartier-Nishi). <u>Soit A un S-schéma abélien. Si $\hat{A}$ et $\hat{\hat{A}}$ sont des schémas, l'homomorphisme K_A est un isomorphisme.</u>

On peut supposer que S est un corps. Alors $\dim A = \dim \hat{A} = \dim \hat{\hat{A}}$. D'après (2), $K_{\hat{A}}$ est un monomorphisme, donc un isomorphisme ; d'après (2) à nouveau, $\hat{K}_A$ est un isomorphisme, et il suffit de prouver :

4.3 <u>Lemme. Si $f : A \to B$ est un homomorphisme de variétés abéliennes sur un corps, et si $\hat{f} : \hat{B} \to \hat{A}$ est un isomorphisme, alors f est un isomorphisme.</u>

Soit $C = \mathrm{Im}\, f$ et $D = \mathrm{Coker}\, f$. On a une suite exacte de variétés abéliennes :

$$0 \to C \to B \to D \to 0 ,$$

d'où (3.6) une suite exacte

$$0 \to \hat{D} \to \hat{B} \to \hat{C} \to 0 .$$

Comme $\hat{f} : \hat{B} \to \hat{C} \to \hat{A}$ est un isomorphisme, $\hat{B} \to \hat{C}$ est un monomorphisme, donc $\hat{D} = 0$, donc $\dim D = \dim \hat{D} = 0$ et $D = 0$. Il en résulte que f est un épimorphisme, comme $\dim A = \dim \hat{A} = \dim \hat{B} = \dim B$, f est une isogénie. Mais $\operatorname{Ker} f \simeq D(\operatorname{Ker} \hat{f}) = 0$ d'après 3.1 et f est un monomorphisme, donc un isomorphisme.

4.4 <u>Scholie</u>. D'après la formule (1), si $\hat{A}$ et $\hat{\hat{A}}$ sont des schémas on peut <u>identifier</u> A à $\hat{\hat{A}}$ de manière fonctorielle en A : l'isomorphisme

$$\operatorname{Hom}(B, \hat{A}) \simeq \operatorname{Hom}(A, \hat{B})$$

est alors simplement $f \mapsto \hat{f}$.

[1] M. DEMAZURE et P. GABRIEL.- <u>Groupes algébriques</u>, North Holland Pub. Aj ; à paraître.