UNIVERSITÉ PARIS XI

U.E.R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

n° 82

Propriétés asymptotiques des vibrations des tores

Marc Frisch

Analyse Harmonique d'Orsay
1974

n° 82

Propriétés asymptotiques des vibrations des tores

Marc Frisch

Analyse Harmonique d'Orsay
1974

ANALYSE MATHEMATIQUE. Propriétés asymptotiques des vibrations des tores. Note de M. Marc Frisch, présentée par M.

Introduction. On considère une solution $f(x,t) : \mathbf{T}^n \times \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ de l'équation des ondes $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ sur le tore $\mathbf{T}^n$ à n dimensions. On verra que même si ses conditions initiales sont de classe C^2, une telle fonction n'est pas nécessairement bornée (du moins pour $n \geq 5$). On se pose alors le problème suivant : Est-il possible de contrôler la croissance asymptotique d'une solution (quand $t \to +\infty$), à l'aide d'une hypothèse de régularité, portant soit sur ses conditions initiales, soit, plus généralement, sur sa restriction à un intervalle fini de temps ?

Ainsi, étant donné un entier k, on cherche s'il existe un $\ell > 0$ et une fonction $\omega(t)$, tels que pour toute solution f, tout réel t et tout x de $\mathbf{T}^n$ on ait :

$$|f(x,t)| \leq |\omega(t)| \, \|f\|_{C^k(\mathbf{T}^n \times [-\ell,\ell])}$$

On met en évidence un indice critique qui est $\frac{n-1}{2}$, tel que si $k > \frac{n-1}{2}$ une telle majoration est possible et si $k < \frac{n-1}{2}$, elle ne l'est pas. Les espaces de Lipschitz $\Lambda_\alpha(\mathbf{T}^n \times [-\ell,\ell])$, définis pour tout réel positif $\alpha > 0$, permettent de cerner l'indice critique et interviendront naturellement dans l'étude d'opérateurs de dérivation fractionnaire.

1. DEFINITIONS ET RAPPELS.

a) Laplacien sur $\mathbf{T}^n$.

Soit Γ un réseau maximal de $\mathbf{R}^n$, soit $\mathbf{T}^n = \mathbf{R}^n/\Gamma$ le tore à n dimensions.

A une fonction $f : \mathbf{T}^n \to \mathbb{C}$ correspond une fonction $\tilde{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbb{C}$ périodique par rapport au réseau $\mathfrak{t}$, et réciproquement. Choisissons sur $\mathbf{R}^n$ une forme quadratique définie positive de matrice (a_{ij}) dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$. Notons $\|x\|$ et (x,y) la norme et le produit scalaire associés. On prend pour Laplacien sur $\mathbf{R}^n$ l'opérateur différentiel $\Delta = \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$. Le laplacien correspondant $\tilde{\Delta}$ sur $\mathbf{T}^n$ est défini par $(\tilde{\Delta} f)^{\sim} = \Delta \tilde{f}$. Dans la suite on ne distinguera pas Δ et $\tilde{\Delta}$, f et $\tilde{f}$. Soit enfin $\mathfrak{t}^*$ le réseau dual, formé des points $m \in \mathbf{R}^n$, tels que pour tout $m' \in \mathfrak{t}$, $(m,m') \equiv 0 \quad (2\pi)$.

b) <u>Espaces de Lipschitz</u>.

Si $0 < \alpha \leq 1$, on appelle $\Lambda_\alpha(\mathbf{T}^n \; [-\ell,\ell])$ l'espace des fonctions f à valeurs complexes vérifiant l'inégalité $|f(y) - f(x)| \leq C(d(y,x))^\alpha$ pour une certaine constante C ne dépendant que de f, où $d(x,y)$ est la distance canonique sur $\mathbf{T}^n \times [-\ell,\ell]$ identifié localement à $\mathbf{R}^{n+1}$.

Si $\alpha > 1$ et si on pose $\alpha = k + \beta$ où k est un entier et $0 < \beta \leq 1$, on a $f \in \Lambda_\alpha(\mathbf{T}^n \times [-\ell,\ell])$ si et seulement si toutes ses dérivées d'ordre k appartiennent à $\Lambda_\beta(\mathbf{T}^n \times [-\ell,\ell])$.

On note $\|f\|_{\Lambda_\alpha(\mathbf{T}^n \times [-\ell,\ell])}$ la norme usuelle sur cet espace.

c) <u>Solutions de l'équation des ondes</u>.

Toute fonction continue solution au sens des distributions de l'équation des ondes $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ sur $\mathbf{T}^n$ admet une série de Fourier du type :

$$f(x,t) \sim c + dt + \sum a_m e^{i(m,x)} e^{i\|m\|t} + \sum b_m e^{i(m,x)} e^{-i\|m\|t}$$

la somme $\sum$ étant étendue à $\mathfrak{t}^*$ privé de l'origine.

Il est bien connu que si $f \in C^\infty(T^n \times R)$, les suites a_m et b_m sont à décroissance rapide sur $\mathfrak{t}^*$ et que la série converge absolument vers f.

DEFINITION. Nous appellerons vibration une solution continue dont la série de Fourier vérifie $c = d = 0$.

2. RESULTATS.

THEOREME 1. Soit $n \geq 2$. Quelle que soit la fonction $\omega : R \to [1,\infty[$, et quel que soit α avec $0 < \alpha < \frac{n-1}{2}$, il existe une vibration f telle que pour tout $\ell > 0$ $f \in \Lambda_{\frac{n-1}{2}-\alpha}(T^n \times [-\ell, \ell])$, mais qui n'est pas $O(w(t))$ $(t \to +\infty)$.

Ceci constitue le résultat "négatif" par rapport aux résultats "positifs" que nous allons maintenant énoncer :

THEOREME 2. Soient ℓ et α deux réels positifs, $\alpha \neq \frac{1}{2}$. Il existe alors une constante C telle que pour toute vibration f sur T^2 on ait :

$$(1) \quad \begin{matrix} \forall x \in T^2 \\ \forall t \in R \end{matrix} \qquad |f(x,t)| \leq C(1+|t|)^{\frac{1}{2}-\alpha} \|f\|_{\Lambda_{\frac{1}{2}+\alpha}}(T^2 \times [-\ell,\ell])$$

Si $\alpha = \frac{1}{2}$, l'inégalité (1) est remplacée par :

$$\begin{matrix} \forall x \in T^2 \\ \forall t \in R \end{matrix} \qquad |f(x,t)| \leq C \log(2+|t|)(\|u_o\|_{\Lambda_1(T^2)} + \sup_{T^2} |u_1|)$$

où l'on a posé : $\left| \begin{array}{l} u_o(x) = f(x,0) \\ u_1(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x,0). \end{array} \right.$

Dans le cas des tores T^n avec $n \geq 3$, l'indice critique $\frac{n-1}{2}$ est au moins égal à 1 et on peut, comme dans le cas précédent, obtenir une inégalité qui n'utilise plus que la régularité des conditions initiales :

THEOREME 3. Soit un entier $n \geq 3$, soit $\alpha > 0$, $\alpha \neq \frac{1}{2}$. Il existe alors une constante C telle que pour toute vibration f sur $\mathbf{T}^n$ on ait :

$$(2) \quad \begin{matrix} \forall x \in \mathbf{T}^n \\ \forall t \in \mathbf{R} \end{matrix} \quad |f(x,t)| \leq C(1+|t|)^{(n-1)(\frac{1}{2}-\alpha)} (\|u_0\|_{\Lambda_{\frac{n-1}{2}+\alpha}(\mathbf{T}^n)} + \|u_1\|_{\Lambda_{\frac{n-3}{2}+\alpha}(\mathbf{T}^n)})$$

Si $\alpha = \frac{1}{2}$, l'inégalité (2) est remplacée par

$$\begin{matrix} \forall x \in \mathbf{T}^n \\ \forall t \in \mathbf{R} \end{matrix} \quad |f(x,t)| \leq C \operatorname{Log}(2+|t|)(\|u_0\|_{\Lambda_{\frac{n}{2}}(\mathbf{T}^n)} + \|u_1\|_{\Lambda_{\frac{n-2}{2}}(\mathbf{T}^n)}).$$

REMARQUE. Dans le cas $\alpha > \frac{1}{2}$, les théorèmes 2 et 3 signifient que les vibrations sont bornées. D'ailleurs on a $\frac{n-1}{2} + \alpha > \frac{n}{2}$ et c'est un cas bien connu où la série converge absolument. Pour le cas $\alpha = 0$, précisons qu'il est facile d'obtenir la majoration suivante :

PROPOSITION 1. Soit un entier impair $n \geq 3$. Il existe alors une constante C telle que pour toute vibration f sur $\mathbf{T}^n$ on ait :

$$\begin{matrix} \forall x \in \mathbf{T}^n \\ \forall t \in \mathbf{R} \end{matrix} \quad |f(x,t)| \leq C(1+|t|)^{\frac{n-1}{2}} (\|u_0\|_{C^{\frac{n-1}{2}}(\mathbf{T}^n)} + \|u_1\|_{C^{\frac{n-3}{2}}(\mathbf{T}^n)}).$$

De plus le poids $(1+|t|)^{\frac{n-1}{2}}$ est le meilleur possible en ce sens qu'il n'est pas possible de le remplacer par une fonction $\omega(t) = o(1+|t|)^{\frac{n-1}{2}}$

Par contre si n est pair, aucune majoration n'est possible :

PROPOSITION 2. Soit n un entier pair. Il n'existe aucune fonction $\omega(t)$ telle que pour toute vibration f sur $\mathbf{T}^n$ on ait :

$$\begin{array}{l}\forall x\in T^n\\ \forall t\in R\end{array}\qquad |f(x,t)|\leq |\omega(t)|(\|u_o\|_{\Lambda_{\frac{n-1}{2}}(T^n)} + \|u_1\|_{\Lambda_{\frac{n-3}{2}}(T^n)}).$$

Les démonstrations des théorèmes 2 et 3 s'appuient sur le lemme suivant :

LEMME [1]. Soit K le compact de R^n défini par $1\leq \|x\|\leq 2$. Désignons par $\|e^{it\|x\|}\|_{A(K)}$ la borne inférieure des normes des mesures de radon bornées μ telles que pour tout x de K $\hat{\mu}(x) = e^{it\|x\|}$ Alors il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que :

$$C_1(1+|t|)^{\frac{n-1}{2}} \leq \|e^{it\|x\|}\|_{A(K)} \leq C_2(1+|t|)^{\frac{n-1}{2}}$$

La démonstration du théorème 2 utilise en oubre l'étude locale par rapport au temps de la transformation de Hilbert et des opérateurs de dérivation fractionnaire appliqués à des vibrations sur T^n (voir [2]).

Signalons que nous ignorons si les "poids" figurant dans les inégalités des théorèmes 2 et 3 sont les meilleurs.

On pourra enfin rapprocher ces résultats de ceux de [3], [4] et [5] concernant les vibrations des sphères et des membranes carrées.

Résumé d'un texte qui sera conservé cinq ans par les Archives de l'Académie et dont copie peut être obtenue de l'Académie.

[1] DOMAR, Y. Communication orale et estimates of $\|e^{itf}\|_{A(\Gamma)}$. Israël J. Math. 12 (1972).

[2] FRISCH, M. Propriétés asymptotiques des vibrations des tores. Sém. Goulaouic-Schwartz, exposé XVII, 1974.

[3] MEYER, Y. Trois problèmes sur les sommes trigonométriques. 1) Etude asymptotique des vibrations des sphères. Astérisque 1, SMF, 1973.

[4] MEYER, Y. Théorie L^p des sommes trigonométriques apériodiques (exemple : vibrations des sphères). C. R. Acad. Sc. Paris 277 (1973).

[5] MEYER, Y. Nombres premiers et vibrations. Sém. Delange-Pisot-Poitou, exposé XV, 1972.

Université Paris 13
Département de Mathématiques
Place du 8 mai 1945
93-ST DENIS