

G.S. HERZ

Analyse harmonique à plusieurs variables

1964-1965

32721

C. S. HERZ

Analyse harmonique à plusieurs
variables

3272-1



Table des matières

<u>Chapitre 1.</u> Fonctions de Hermite-Weber Application à la transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^n)$	1.1 à 1.11
<u>Chapitre 2.</u> Distributions conditionnellement positives	2.1 à 2.13
<u>Chapitre 3.</u> Fonctions définies négatives. Semi-groupes de mesures	3.1 à 3.14
<u>Chapitre 4.</u> Distributions invariantes par rotation	4.1 à 4.6
<u>Chapitre 5.</u> Transformation de Hankel	5.1 à 5.35
<u>Chapitre 6.</u> Formule sommatoire de Poisson	6.1 à 6.6

CHAPITRE I

FONCTIONS DE HERMITE-WEBER.

APPLICATION A LA TRANSFORMATION DE FOURIER SUR $L^2(\mathbb{R}^n)$.

§ 1. Polynômes. Formule de Taylor.

On désigne par \mathcal{P} l'espace vectoriel des polynômes à n indéterminées sur \mathbb{C} ;
par \mathcal{P}_d le sous espace des polynômes homogènes et de degré d .

Proposition 1. $\dim \mathcal{P}_d = \binom{n+d-1}{n-1}$.

Démonstration. Une base de \mathcal{P}_d se compose des monômes $x^\delta = x_1^{\delta_1} x_2^{\delta_2} \dots x_n^{\delta_n}$ où
 $\sum_{i=1}^n \delta_i = d$. (On désignera par δ le multiindice $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$, par $|\delta|$ la somme
 $\sum_{i=1}^n \delta_i$.)

Posons $d_k = \delta_1 + \dots + \delta_k + k$. On établit ainsi une bijection entre les n -uples d'entiers positifs ou nuls de somme d et les suites strictement croissantes de $n-1$ entiers strictement positifs, inférieurs ou égaux à $n+d-1$; le nombre de ces suites est évidemment $\binom{n+d-1}{n-1} = \frac{(n+d-1)!}{(n-1)!d!}$

Définition. P et Q étant des éléments de \mathcal{P} , on pose $\langle P, Q \rangle = (P(\frac{\partial}{\partial x})\bar{Q}(x))_{x=0}$
où $P(\frac{\partial}{\partial x})$ désigne l'opérateur de dérivation associé au polynôme P .

Plus généralement, S étant une série formelle $S(\frac{\partial}{\partial x})\bar{P}(x)$ est un polynôme. Dans ce cas, nous poserons encore $\langle S, P \rangle = (S(\frac{\partial}{\partial x})\bar{P}(x))_{x=0}$.

Proposition 2. L'application $(P, Q) \rightarrow \langle PQ \rangle$ est une forme hermitienne positive, qui définit sur \mathcal{P} une structure d'espace préhilbertien séparé.

Démonstration abrégée. Il est trivial que si $\lambda \in \mathbb{C}$ $\langle \lambda P, Q \rangle = \lambda \langle P, Q \rangle$; que
 $\langle P, \lambda Q \rangle = \bar{\lambda} \langle P, Q \rangle$. $\langle x^\alpha, x^\beta \rangle = 0$ si $\alpha \neq \beta$; $\langle x^\delta, x^\delta \rangle = |\delta|!$ en posant
 $|\delta| = \delta_1! \delta_2! \dots \delta_n!$.

Si $P(x) = \sum a_\delta x^\delta$ où les a_δ sauf un nombre fini sont nuls, on a
 $\langle P, P \rangle = \sum_\delta |a_\delta|^2 \delta!$. On pose $N(P) = \langle P, P \rangle$; $\sqrt{N(P)}$ définit une norme sur \mathcal{P} .
 $\mathcal{P} = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_d$. Si $d' \neq d''$ les sous espaces $\mathcal{P}_{d'}$ et $\mathcal{P}_{d''}$ sont orthogonaux. Il en
 résulte que si B_d est une base orthogonale de \mathcal{P}_d , $B = (U B_d)_{d \in \mathbb{N}}$ est une base orthogonale de \mathcal{P} . Soit f un polynôme. Sa composante suivant \mathcal{P}_d ("partie homogène de degré d ") est $f_d = \sum_{P \in B_d} \langle f, P \rangle \frac{P}{N(P)}$, qui ne dépend pas de la base orthogonale choisie ;
 $f = \sum f_d$ ou encore $f = \sum_{P \in B} \langle f, P \rangle \frac{P}{N(P)}$.

Plus généralement, soit g une série formelle. Sa partie homogène de degré d est la même que celle d'un polynôme de degré assez grand ; $g_d = \sum_{P \in B_d} \langle g, P \rangle \frac{P}{N(P)}$; la famille de polynômes $(\langle g, P \rangle \frac{P}{N(P)})_{P \in B}$ est sommable dans l'ensemble des séries formelles, et l'on a : $g = \sum_{P \in B} \langle g, P \rangle \frac{P}{N(P)}$.

Remarque. Soit $\hat{\mathcal{P}}$ l'espace de Hilbert complété de \mathcal{P} . C'est la somme hilbertienne des espaces \mathcal{P}_d , qui s'identifie à l'ensemble des séries formelles $\tilde{f}(x) = \sum a_\delta x^\delta$ telles que la famille $(|a_\delta|^2 \delta!)_{\delta \in \mathbb{N}}$ soit sommable dans \mathbb{R} .

B est une base hilbertienne de $\hat{\mathcal{P}}$, et l'on a : $\tilde{f} = \sum_{P \in B} \langle \tilde{f}, P \rangle \frac{P}{N(P)}$ le second membre étant une série sommable dans $\hat{\mathcal{P}}$.

Proposition 3 (formule de Taylor). Soit f une série formelle. Alors

$$f(x+y) = \sum_{P \in B} \left\{ \bar{P} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) f(x) \right\} \frac{P(y)}{N(P)} .$$

Démonstration. On a $f(x+y) = \sum_{P \in B} \langle f, P \rangle \frac{P(y)}{N(P)}$

$$\langle f, P \rangle_y = \left(\bar{P} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) f(x+y) \right)_{y=0} = \bar{P} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) f(x), \text{ d'où l'égalité.}$$

Proposition 3 bis. Si h est une fonction entière,

$$h(x+y) = \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{P \in B_d} \bar{P} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) h(x) \frac{P(y)}{N(P)} .$$

Démonstration. On a entre séries formelles l'égalité

$$h(x+y) = \sum_{P \in B} \bar{P}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) h(x) \frac{P(y)}{N(P)} \quad \text{qui peut s'écrire} \quad h(x+y) = \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{P \in B_d} \bar{P}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) h(x) \frac{P(x)}{N(P)}.$$

Nous avons vu que la somme $\sum_{P \in B_d} \bar{P}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x) \frac{P(y)}{N(P)}$ ne dépend pas de B_d ; elle apparaît

comme le développement Taylorien d'ordre d si on prend $B_d = \{y^\alpha, |\alpha| = d\}$

$$\langle h(x+y), y^\alpha \rangle \frac{y^\alpha}{N(y^\alpha)} = \left(\frac{\partial^{|\alpha|} f(x+y)}{\partial y^\alpha} \right)_{y=0} \frac{y^\alpha}{|\alpha|!} = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x^\alpha} \frac{y^\alpha}{|\alpha|!}.$$

La proposition résulte donc de ce que toute fonction entière est analytique. En particulier, la convergence est uniforme et

absolue sur tout compact de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, et on peut écrire :

$$h(x+y) = \sum_{P \in B} \bar{P}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) h(x) \frac{P(y)}{N(P)}.$$

Exemple. Soient, en dimension 2, $Z(x) = x_1 + ix_2$. $B = \{Z^k \cdot \bar{Z}^\ell\}_{k, \ell \in \mathbb{N}}$

est une base orthogonale.

$$N(Z^k) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^k (x_1 - ix_2)^k$$

$$N(Z^k) = 2k \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{k-1} (x_1 - ix_2)^{k-1} = 2k N(Z^{k-1}).$$

On a $N(Z^k) = N(\bar{Z}^k) = 2^k \cdot k!$;

$$N(Z^k \bar{Z}^\ell) = 2^{k+\ell} k! \ell!.$$

La formule de Taylor devient :

$$f(x+y) = \sum_{k, \ell} \left\{ \bar{Z}^k \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) Z^\ell \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) f(x) \right\} \frac{Z^k(y) \bar{Z}^\ell(y)}{2^{k+\ell} k! \ell!}$$

On pose

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \bar{Z} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) ; \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} Z \left(\frac{\partial}{\partial x} \right),$$

Il vient alors

$$f(x+y) = \sum_{k, \ell} \frac{\partial^{k+\ell} f(x)}{\partial z^k \partial \bar{z}^\ell} \frac{Z^k(y) \bar{Z}^\ell(y)}{k! \ell!}.$$

§ 2. Transformation de Hermite.

Définition. On appelle polynôme de Hermite associé au polynôme P (à n indéterminées

sur \mathbb{C}) le polynôme HP défini par la relation

$$HP(x) = \pi^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-y^2) P(x+iy) dy.$$

Proposition 1. L'application $P \rightarrow HP$ est linéaire, et transforme tout polynôme réel en polynôme réel ; c'est un automorphisme de \mathcal{P} .

Démonstration. La première partie de l'énoncé est triviale, la seconde résultera du lemme

Lemme 1. Si $P \in \mathcal{P}_d$, alors $HP - P \in \mathcal{P}_{d-2} + \mathcal{P}_{d-4} + \dots$. En effet, d'après la formule de Taylor, $P(x + iy) = P(x) + \sum_{k \leq d} \frac{(iy)^k}{k!} P^{(k)}(x)$.

$k \leq d$ signifiant $\forall i, 1 \leq i \leq n, k_i \leq d_i$.

$P^{(k)}$ est homogène et de degré $d - |k|$. Si $|k|$ est impair, l'un au moins des k_i l'est, et l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-y^2) \frac{(iy)^k}{k!} P^{(k)}(x) dy$, produit d'intégrales simples, est nulle. La démonstration du lemme s'achève si on remarque que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-y^2) dy = \pi^{\frac{n}{2}}.$$

Soit B une base de \mathcal{P} formée de polynômes homogènes. La famille $(HP)_P \in B$ est alors libre : sinon les parties homogènes de plus haut degré des HP seraient dépendantes.

Quel que soit d , H induit sur le sous espace de dimension finie $\bigoplus_{\delta=0}^d \mathcal{P}_\delta$ une application linéaire injective, donc un automorphisme. Il en résulte que c'est un automorphisme de \mathcal{P} .

Proposition 2. $\forall P \in \mathcal{P} \quad HP(x) = \exp x^2 P\left(\frac{-\partial}{2\partial x}\right) \exp -x^2$.

Démontrons d'abord le lemme :

$$H(x_1 P(x)) = x_1 HP(x) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} HP(x).$$

On écrit
$$H(x_1 P(x)) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-y^2} (x_1 + iy_1) P(x + iy) dy.$$

$$H(x_1 P(x)) = x_1 HP(x) + i \int_{\mathbb{R}^n} e^{-y^2} P(x + iy) y_1 dy.$$

Il suffit de démontrer la relation pour une base de \mathcal{P} , donc quand \mathcal{P} est un monôme.

On intègre alors le 2ème terme par parties par rapport à la i ème variable, en remarquant que H commute avec les dérivations.

Démonstration de la proposition. De même, on se ramène par linéarité au cas des monômes.

Procédons par récurrence. La relation est vraie en degré zéro puisque $H[1] = \pi^{-\frac{n}{2}} \int e^{-y^2} dy =$

1. Montrons que si elle est vraie pour un polynôme P , elle l'est aussi pour $x_i P(x)$:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} P\left(-\frac{\partial}{2\partial x}\right) \exp -x^2 &= \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} HP(x) \right] \exp -x^2 + x_i P\left(-\frac{\partial}{2\partial x}\right) \exp -x^2 \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} P\left(-\frac{\partial}{2\partial x}\right) \exp -x^2 &= (x_i HP(x) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} HP(x)) \exp -x^2 \\ &= H(x_i P(x)) \exp -x^2. \end{aligned}$$

Ce résultat permet une généralisation des polynômes de Hermite. Soit $x \rightarrow r^2(x)$ une forme quadratique réelle ; $(x, y) \rightarrow r(x, y)$ sa forme polaire.

Définition. On appelle transformation de Hermite associée à la forme quadratique r^2 la transformation qui à tout polynôme P fait correspondre HP défini par

$$HP(x) = \exp r^2(x) P\left(-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}\right) \exp -r^2(x).$$

Proposition 3 (formule génératrice).

$$\exp(-r^2(x) + 2r(x,y)) = \sum_{P \in B} \frac{2^p}{N(P)} P(x) \overline{HP(y)}, \text{ où } p = d^{\alpha} P.$$

Démonstration. $r^2(x+y) = r^2(x) + 2r(x,y) + r^2(y)$. D'autre part, la proposition 3 du § 1 (formule de Taylor) donne :

$$\exp(-r^2(x+y)) = \sum_{P \in B} \frac{P(x) \overline{P\left(-\frac{\partial}{\partial y}\right) \exp(-r^2(y))}}{\langle P, P \rangle}$$

$$\text{soit } \exp(-r^2(x+y)) = \sum_{P \in B} \exp(-r^2(y)) (-2)^p \frac{P(x) \overline{HP(y)}}{N(P)}$$

$$\exp(-r^2(x) - 2r(x,y)) = \sum_{P \in B} (-2)^p \frac{P(x) \overline{HP(y)}}{N(P)}.$$

Pour P homogène de degré p , $P(-x) = (-1)^p P(x)$. D'où en substituant $-y$ à y dans la relation précédente :

$$\exp(-r^2(x) + 2r(x,y)) = \sum_{P \in B} 2^p \frac{P(x) \overline{HP(y)}}{N(P)}.$$

À la forme quadratique r^2 on associe l'application $\Delta : P \rightarrow r^2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)P$, qui n'est autre que le laplacien lorsque $r^2(x) = x^2$. Si $d < 2$, $\Delta(\mathcal{P}_d) = 0$; pour $d \geq 2$, Δ applique

\mathcal{P}_d dans \mathcal{P}_{d-2} , et l'on a le

Lemme. Pour $d \gg 2$, H_d étant le noyau de l'application $\Delta : \mathcal{P}_d \rightarrow \mathcal{P}_{d-2}$ on a :

$$\mathcal{P}_d = H_d \oplus r^2 \mathcal{P}_{d-2}.$$

Démonstration. Puisque $H_d = \text{Ker}(\mathcal{P}_d \rightarrow \mathcal{P}_{d-2})$ $\dim \mathcal{P}_d \leq \dim H_d + \dim \mathcal{P}_{d-2}$. On a

$$\text{d'autre part : } \langle P, r^2 Q \rangle = \overline{\langle r^2 Q, P \rangle} = \overline{\left(Q \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \overline{P(x)} \right)_{x=0}}$$

$$\langle P, r^2 Q \rangle = \overline{\left(Q \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta \overline{P(x)} \right)_{x=0}} = \overline{\langle Q, \Delta P \rangle} = \langle \Delta P, Q \rangle. \text{ De l'égalité } \langle P, r^2 Q \rangle = \langle \Delta P, Q \rangle$$

résulte que H_d et $r^2 \mathcal{P}_{d-2}$ sont orthogonaux, donc que $\dim \mathcal{P}_d \gg \dim H_d + \dim r^2 \mathcal{P}_{d-2}$.

De ce lemme résulte que si $d \gg 2$, $\dim H_d = \binom{n+d-1}{n-1} - \binom{n+d-3}{n-1}$.

Considérons une seconde application associée à r qui à P fait correspondre son adjoint P^* défini par

$$P^*(y) = \left(P \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \exp r(x,y) \right)_{x=0}.$$

Il est clair que $\exp r(x,y) = \sum \frac{P(x) \overline{P^*(y)}}{\langle P, P \rangle}$; que si $r^2(x) = x^2$, $P^* = P$.

Proposition 4. Si $P \in \mathcal{P}_d$, $P^* - HP \in \mathcal{P}_{d-2} + \mathcal{P}_{d-4} + \dots$ on a $HP = P^*$ si et seulement si $\Delta P = 0$. (Autrement dit lorsque $r^2(x) = x^2$ les polynômes homogènes invariants par H sont les polynômes harmoniques).

Démonstration. Pour t réel non nul, $\exp(-t^2 r^2(x) + 2r(x,y)) = \sum_{P \in B} 2^p \frac{P(x)}{N(P)} t^p \overline{HP}(t^{-1}y)$

où $p = d^0 P$.

Pour $t = -1$, en vertu de l'unicité du développement Taylorien, il vient

$HP(-y) = (-1)^p HP(y)$ (cela résulte aussi de la formule de définition). Sur tout compact

de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, la fonction holomorphe $(x,y) \rightarrow \exp(-t^2 r^2(x) + 2r(x,y))$ converge uniformé-

ment vers $(x,y) \rightarrow \exp(2r(x,y))$ quand $t \rightarrow 0$. Puisque $\exp 2r(x,y) = \sum 2^p \frac{P(x)}{P, P} \overline{P^*(y)}$

on a $\lim_{t \rightarrow 0} t^p HP(t^{-1}y) = P^*(y)$. P^* et HP ont donc même partie homogène de degré p ,

d'autre part $P^*(-y) = (-1)^p P^*(y)$.

Démontrons la deuxième partie de l'énoncé :

$$\text{On a } (1 - \exp - r^2(x)) \exp 2r(x,y) = \sum_{P \in B} 2^p P(x) \frac{P^*(y) - HP(y)}{\langle P, P \rangle}$$

Il en résulte que

$$\overline{P^*(y) - HP(y)} = 2^{-p} \langle (1 - \exp r^2(x)) \exp 2r(x,y), P(x) \rangle.$$

Introduisons l'application $1 - e^{-\Delta}$ de \mathcal{P} dans \mathcal{P} : $1 - e^{-\Delta} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\Delta^n}{n!}$.

On voit que $(1 - e^{-\Delta})P = 0$ équivaut à $\Delta P = 0$; on a :

$$\begin{aligned} \overline{P^*(y) - HP(y)} &= 2^{-p} \langle \exp 2r(x,y), (1 - e^{-\Delta})P(x) \rangle \\ &= \sum_{Q \in B} 2^{q-p} \frac{Q(y)}{N(Q)} \langle \bar{Q}(x), (1 - e^{-\Delta})P(x) \rangle. \end{aligned}$$

Si $\Delta P = 0$, on a bien $P^* = HP$; d'autre part, si $P^* = HP$, $\langle Q, (1 - e^{-\Delta})P \rangle$ est nul quel que soit $Q \in B$, donc $(1 - e^{-\Delta})P = 0$ d'où $\Delta P = 0$.

§ 3. Fonctions de Hermite-Weber.

Nous supposons désormais que $r^2(x) = x^2$.

Définition. On appelle fonction de Hermite-Weber associée au polynôme P la fonction :

$$x \longrightarrow DP(x) = \exp -\frac{x^2}{2} HP(x).$$

Il est clair que $DP \in L^p(\mathbb{R}^n)$ quel que soit p tel que $1 \leq p < +\infty$.

Théorème. Les DP constituent une famille totale dans L^p pour $1 \leq p < +\infty$.

Nous utiliserons 2 lemmes :

Lemme 1. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, soit f_x la fonction $y \longrightarrow f(x+y)$, ω_p la fonction $x \longrightarrow \|f_x - f\|_p$. Alors ω_p est continue (si $1 \leq p < +\infty$).

Démonstration. L'ensemble des applications $f \longrightarrow f_x$ de L^p dans L^p est équicontinu pour $x \in \mathbb{R}^n$, puisque $\forall f, g \in L^p \quad \|f_x - g_x\|_p = \|f - g\|_p$; d'autre part $|\omega_p(x) - \omega_p(x')| \leq \|f_x - f_{x'}\|_p = \omega_p(x - x')$. Le lemme résulte donc de ce que, sur l'ensemble dense dans $L^p(1 \leq p < +\infty)$ des fonctions continues à support compact, $\omega_p(x)$ tend vers zéro quand x tend vers zéro.

Lemme 2. Soit $k \in L^1$, telle que $\int_{\mathbb{R}^n} k(x) dx = 1$; soit $k_\lambda(x) = \lambda^{-n} k(\frac{x}{\lambda})$.

Alors

a) si $f \in L^p$, avec $1 \leq p < +\infty$ $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \|k_\lambda * f - f\|_p = 0$

b) si $g \in L^\infty$, alors $k_\lambda * g \rightarrow g$ presque partout.

(Rappelons que $\forall p, 1 \leq p \leq +\infty, L^1 * L^p \subset L^p$).

Démonstration :

a) On écrit $\| \int k_\lambda(x-y)f(y)dy - f(x) \|_p = \| \int k_\lambda(x-y)(f(y)-f(x))dy \|_p$

$\| k_\lambda * f - f \|_p = \| \int (f(x-y) - f(x))k_\lambda(y)dy \|_p$ soit

$\| k_\lambda * f - f \|_p \leq \int \| f(x-y) - f(x) \|_p |k_\lambda(y)| dy$

où $\| k_\lambda * f - f \|_p \leq \int \omega_f(y) |k_\lambda(y)| dy$. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que

$|y| < \delta \implies \omega_f(y) < \epsilon$. $\| k_\lambda * f - f \|_p \leq \epsilon \|k_\lambda\|_1 + 2\|f\|_p \int_{|y| > \delta} \lambda^{-n} |k(\frac{y}{\lambda})| dy$ soit

$\| k_\lambda * f - f \|_p \leq \epsilon + 2 \|f\|_p \int_{|y| > \frac{\delta}{\lambda}} |k(y)| dy$.

Démonstration du théorème. Il suffit de montrer que toute forme linéaire ^{continue} nulle sur les DP est la forme nulle, donc que si $g \in L^{p'}$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$) et si $\int g(x)DP(x)dx = 0 \quad \forall P$, alors $g = 0$.

Posons $k(x) = (\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp \frac{-x^2}{2}$. Soit $G(\lambda, x) = (k_\lambda * g)(x)$. $G(\lambda, x)$ est une fonction holomorphe de (λ, x) dans le domaine $\text{Re } \lambda > 0$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Ses dérivées en $(1, 0)$ s'expriment sous la forme d'intégrales $\int \exp(-\frac{y^2}{2}) g(y)Q(y)dy$, où Q est un polynôme. D'après le § 2, Q est combinaison linéaire de polynômes HP, donc si $\int g(y)DP(y)dy = 0$ pour tout P , $G(\lambda, x)$ s'annule en $(1, 0)$ ainsi que toutes ses dérivées.

Il en résulte que $G(\lambda, x) = 0$ dans le domaine $\text{Re } \lambda > 0$. En particulier, pour $\lambda > 0$, $k_\lambda * g = 0$ donc $g = 0$ d'après le lemme 2.

Théorème 2.- Soit, pour $\text{Re } \lambda^2 < 1$, le noyau

$$K_\lambda(x,y) = (\pi(1-\lambda^2))^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{(1+\lambda^2)}{2(1-\lambda^2)}(x^2+y^2) + \frac{2\lambda xy}{1-\lambda^2}\right).$$

Pour $P \in \mathcal{P}_\delta$, on a

$$\int K_\lambda(x,y)DP(y)dy = \lambda^\delta DP(x).$$

Démonstration. Il revient au même de démontrer l'égalité

$$[\kappa(1-\lambda^2)]^{-\frac{n}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{1-\lambda^2}(y-\lambda x)^2} \text{HP}(y) dy = \lambda^\delta \text{HP}(x)$$

soit

$$[\kappa(1-\lambda^2)]^{-\frac{n}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{y^2}{1-\lambda^2}} \text{HP}(y+\lambda x) dy = \lambda^\delta \text{HP}(x).$$

L'égalité est vraie si $\delta = 0$: $\mathbb{H}[1] = 1$, et

$(\kappa(1-\lambda^2))^{-\frac{n}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{y^2}{1-\lambda^2}} dy = 1$. Si elle est vraie en degré $\delta-1$, les dérivées premières

des 2 membres par rapport aux x_1 sont égales. Il suffit donc de montrer l'égalité des

2 membres pour $x=0$, c'est à dire :

$$[\kappa(1-\lambda^2)]^{-\frac{n}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{y^2}{1-\lambda^2}} \text{HP}(y) dy = \lambda^\delta \text{HP}(0).$$

Procédons à nouveau par récurrence, et montrons que si la relation est vraie jusqu'au degré

δ , elle est vraie pour les polynômes $x_1 P(x)$, avec $d^0 P = \delta$. Rappelons (§ 2) que

$$\mathbb{H}(x_1 P(x)) = x_1 \text{HP}(x) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \text{HP}(x).$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{y^2}{1-\lambda^2}} \mathbb{H}(y_1 P(y)) dy = \int_0^{\infty} e^{-\frac{y^2}{1-\lambda^2}} (y_1 \text{HP}(y) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \text{HP}(y)) dy$$

$$\text{1er terme : } \int_0^{\infty} e^{-\frac{y^2}{1-\lambda^2}} y_1 \text{HP}(y) dy = \frac{1-\lambda^2}{2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{y^2}{1-\lambda^2}} \mathbb{H} \frac{\partial P}{\partial x_1}(y) dy.$$

On a donc

$$[\kappa(1-\lambda^2)]^{-\frac{n}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{y^2}{1-\lambda^2}} \mathbb{H}(y_1 P(y)) dy = \left(\frac{1-\lambda^2}{2}\right) \lambda^{\delta-1} \mathbb{H}\left(\frac{\partial P}{\partial x_1}\right)(0) - \frac{1}{2} \lambda^{\delta-1} \mathbb{H}\left(\frac{\partial P}{\partial x_1}\right)0$$

$$= -\frac{\lambda^{\delta+1}}{2} \frac{\partial \text{HP}}{\partial x_1}(0) = \lambda^{\delta+1} \mathbb{H}(x_1 P)(0).$$

Proposition 1. - Si $|\lambda| < 1$, $\mathbb{K}_\lambda \in L^P(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

En effet, $\text{Re} \frac{1+\lambda^2}{2(1-\lambda^2)}$ est alors strictement positif.

Il en résulte que pour $|\lambda| < 1$, \mathbb{K}_λ définit un opérateur linéaire symétrique de L^2 dans L^2 . Puisque les DP constituent une famille totale, les DP pour P homogène sont les fonctions propres de \mathbb{K}_λ ; ses valeurs propres sont λ . On peut donc appliquer le théorème de Mercer, et l'on a :

$$K_\lambda(x, y) = \sum_{P \in B} \lambda^\delta DP(x)DP(y)$$

si $0 \leq \lambda < 1$; si B est une base de polynômes homogènes tels que $\|DP\|_{L^2} = 1$.

Si P et Q sont homogènes et de degrés différents, DP et DQ , fonctions propres associées à des valeurs propres différentes d'un opérateur symétrique K_λ ($|\lambda| < 1$) sont orthogonales : $\langle DP, DQ \rangle_{L^2} = \int e^{-x^2} HP(x) \overline{HQ}(x) dx = 0$.

Plus généralement, on a le

Théorème 3. - Si $P \in \mathcal{P}_\delta$, $Q \in \mathcal{P}$, $\langle DP, DQ \rangle_{L^2} = 2^{-\delta} \pi^{\frac{n}{2}} \langle P, Q \rangle_{\mathcal{P}}$.

Démonstration. Il suffit de vérifier la relation pour Q homogène ; si $Q \in \mathcal{P}_{\delta'}$, $\delta' \neq \delta$, alors $\langle DP, DQ \rangle = 0$; $\langle P, Q \rangle = 0$. Soit $Q \in \mathcal{P}_\delta$.

$\langle DP, DQ \rangle = \int \exp(-x^2) HP(x) \overline{HQ}(x) dx$ $HQ - Q$ est de degré inférieur ou égal à $\delta - 2$, donc orthogonal à HP .

$$\begin{aligned} \langle DP, DQ \rangle &= \int \exp(-x^2) HP(x) \overline{Q}(x) dx \\ \langle DP, DQ \rangle &= \int P(-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}) \exp(-x^2) \overline{Q}(x) dx \\ &= \int \exp(-x^2) P(\frac{\partial}{2\partial x}) \overline{Q}(x) dx \text{ en intégrant par parties.} \end{aligned}$$

$$\langle DP, DQ \rangle = 2^{-\delta} \int \exp(-x^2) \langle P, Q \rangle dx = \pi^{\frac{n}{2}} 2^{-\delta} \langle P, Q \rangle.$$

Corollaire. Soit B une base algébrique de \mathcal{P} formée de polynômes homogènes.

Alors $\{DP, P \in B\}$ est une base orthogonale de $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Application à la transformation de Fourier.

Rappelons que si $f \in L^1$, on appelle transformée de Fourier de la fonction $\mathcal{F}f$ définie par :

$$(2\pi)^{-n/2} \hat{f}(y) = \mathcal{F}f(y) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(ixy) f(x) dx$$

\mathcal{F} peut ne pas être définie sous cette forme pour un élément de L^2 ; prenons pour $n = 1$

la fonction $f(x) = \frac{1}{x+1} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k X([kn, (k+1)n](x) \right\}$ où $X(I)$ désigne la fonction caractéristique de l'intervalle I . $f \notin L^1$; $f \in L^2$ et $\int_{\mathbb{R}} \exp(ixy) f(x) dx$ n'est pas définie.

D'autre part, le théorème 2, appliqué pour $\lambda = 1$, donne : $\mathcal{F} DP = i^p DP$ si $P \in \mathcal{P}_p$ ($DP \in L^1 \cap L^2$). Les DP formant une base orthogonale dans L^2 , on a le

Théorème 4.— Il existe une application linéaire continue et une seule de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ telle que $\mathcal{F} DP = i^p DP$ pour $P \in \mathcal{P}_p$. \mathcal{F} et \mathcal{F} coïncident sur $L^1 \cap L^2$, puisque les DP forment aussi une famille totale dans L^1 et que $|\hat{f}(y)| \leq \|f\|_1$.

On notera encore \mathcal{F} la transformation ainsi définie sur L^2 .

Théorème de Plancherel. Si $f \in L^2$, $\|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2$.

Démonstration. Il suffit de le vérifier pour une base orthogonale DP , les polynomes P étant homogènes. $\mathcal{F} DP = i^p DP$ si $p = d^0 P$ donc $\|\mathcal{F} DP\|_2 = \|DP\|_2$.

Théorème. Les valeurs propres de \mathcal{F} sont 1, -1, i, -i ; les fonctions propres les fonctions DP pour P homogène.

Si $\bar{\mathcal{F}} f(y) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(ixy) f(x) dx$ pour $f \in L^1$, $\bar{\mathcal{F}}$ se définit sur L^2 de la même manière ; lemme $\bar{\mathcal{F}} DP = (-i)^p DP$, on a : $\mathcal{F}\bar{\mathcal{F}} = \bar{\mathcal{F}}\mathcal{F} = I$.

Théorème. $\mathcal{F}^4 = I$.

En effet, $\mathcal{F}^4 DP = i^{4p} DP = DP$.

CHAPITRE II

DISTRIBUTIONS CONDITIONNELLEMENT POSITIVES

Notation. On notera \hat{f} et $\mathcal{F}f$ les transformées de Fourier de f définies respectivement par :

$$\hat{f}(y) = \int e^{ix \cdot y} f(x) dx \quad \mathcal{F}f = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \hat{f}.$$

§ 1. Rappels sur l'espace \mathcal{S} .

On appelle \mathcal{S} l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables f telles que $|f^{(\alpha)}|_P$ soit borné \forall le polynôme P et l'indice de dérivation α . C'est l'espace des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ à décroissance rapide ainsi que leurs dérivées. On munit \mathcal{S} d'une topologie définie par les normes :

$$N_{\alpha, m}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha| \leq m} |f^{(\alpha)}(x)| (1 + |x|)^k.$$

Donc une suite $\varphi_j \in \mathcal{S}$ tend vers 0 dans \mathcal{S} si, \forall les polynômes P et Q , on a

$$P(x) \cdot Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi_j \text{ tend vers } 0.$$

\mathcal{S} est ainsi muni d'une famille dénombrable de normes (de vraies normes et non de semi-normes). C'est un espace localement convexe, à base dénombrable de voisinages, donc métrisable et complet. C'est un espace de Montel : il y a identité entre ensembles bornés et ensembles relativement compacts.

On a évidemment $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$, mais la topologie de \mathcal{D} est strictement plus fine que la topologie induite par \mathcal{S} : la convergence de fonctions de \mathcal{D} dans \mathcal{S} n'entraîne pas leur convergence dans \mathcal{D} .

Mais \mathcal{D} , muni de la topologie induite par \mathcal{S} , est dense dans \mathcal{S} .

Distributions tempérées.

On note \mathcal{S}' le dual topologique de l'espace \mathcal{S} . Un élément de \mathcal{S}' définit une forme linéaire sur \mathcal{D} , continue pour la topologie induite par \mathcal{S} sur \mathcal{D} , donc a fortiori pour la topologie de \mathcal{D} .

Donc tout élément de \mathcal{S}' définit une distribution $T \in \mathcal{D}'$, avec laquelle on le confondra désormais.

Une telle distribution est dite distribution tempérée.

Transformation de Fourier.

Lemme. La transformation de Fourier induit un isomorphisme de \mathcal{S} sur \mathcal{S} .

Cela résulte du fait que $P(\frac{\partial}{i\partial\xi})\hat{f}(\xi) = \widehat{P(x)f(x)}$ et $P(\frac{\partial}{\partial x})f(x) = P(-i\xi)\hat{f}(\xi)$, et la définition de l'espace \mathcal{S} .

Conséquence. Il est dès lors facile de définir la transformation de Fourier dans \mathcal{S}' .

Si T est une distribution tempérée, \hat{T} sera bien définie et de manière unique par la formule :

$$\int fT = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \hat{f} \hat{T} \quad \forall f \in \mathcal{S}.$$

On note formellement $\hat{T}(\xi) = \int e^{-i\xi \cdot x} T(x)$.

En particulier si T est une fonction f de L^2 , dont on a défini précédemment la transformée de Fourier, alors $\hat{T} = \hat{f}(-\xi)$. La transformation de Fourier est donc un isomorphisme de \mathcal{S}' dans \mathcal{S}' .

Remarque. On n'a manifestement aucune inclusion entre l'espace \mathcal{C}' des mesures de Radon et l'espace \mathcal{S}' . On démontre les deux résultats suivants :

a) Pour qu'une mesure de Radon μ soit dans \mathcal{S}' , il suffit qu'elle soit à croissance lente dans \mathcal{C}' , c'est à dire qu'il existe un entier ℓ tel que $\int \frac{|d\mu|}{(1+r^2)^\ell} < \infty$.

b) Pour qu'une mesure de Radon positive μ soit dans \mathcal{S}' , il est nécessaire qu'elle soit à croissance lente dans \mathcal{C}' .

§ 2. Introduction.

Considérons un semi-groupe de probabilités μ_t , et posons $\varphi_t = \hat{\mu}_t$, fonction qui existe car $\int d\mu_t = 1$. La relation $\mu_t * \mu_s = \mu_{s+t}$ donne $\varphi_s \varphi_t = \varphi_{s+t}$, c'est à dire qu'il existe une fonction $\psi(x)$ telle que $\varphi_t = e^{-t\psi}$.

Donc $\psi = -\frac{d}{dt} \varphi_t|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \varphi_t}{t}$. Ceci peut encore s'écrire $-\psi = \lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{F} \frac{\mu_t - \delta}{t}$.

Les $\frac{\mu_t - \delta}{t}$ sont des mesures positives sauf à l'origine, donc $-\psi$ est la transformée de Fourier d'une mesure positive sauf à l'origine. On est ainsi amené à étudier la structure de telles mesures, ou plus généralement de telles distributions, ainsi que celle de leurs transformées de Fourier.

Distributions positives.

Une distribution $T \in \mathcal{D}'$ est dite positive si, \forall la fonction f positive de \mathcal{D} , $\int fT \geq 0$. Donc T distribution positive $\iff \int fT \geq 0 \quad \forall f \in \mathcal{D}^+$. Or il est facile de montrer que les distributions positives ne sont rien d'autre que les mesures de Radon positives, si bien que cette notion ne dépasse pas le cadre des mesures.

Distributions conditionnellement positives. Une distribution T sera dite conditionnellement positive (en abrégé CP) si $\int fT \geq 0 \quad \forall$ la fonction f positive de $\mathcal{D}(\mathbb{R}_*^n)$ en posant $\mathbb{R}_*^n = \mathbb{R}^n - \{0\}$. Il est équivalent de définir une distribution CP comme une distribution dont la restriction à \mathbb{R}_*^n est positive, donc mesure positive.

Remarquons qu'une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}_*^n)$ est nulle non seulement au point 0 mais dans tout un voisinage de 0. Par conséquent, \forall le polynôme P , la distribution $P(\frac{\partial}{\partial x})\delta$ est CP car $\int P(\frac{\partial}{\partial x})\delta \varphi = 0$ si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_*^n)$.

Considérons la fonction $e^{\frac{1}{x^2}}$. Elle définit une distribution positive sur \mathbb{R}_* , mais n'est pas la restriction d'une distribution sur \mathbb{R} ; ce n'est pas une distribution CP.

Par contre, $\frac{1}{x}$ qui définit une distribution sur \mathbb{R}_* peut se prolonger en un élément de \mathcal{D}'^+ , par exemple en définissant ce prolongement T par

$$\int \varphi T = \int \left[\varphi(x) - \left(\varphi(0) + x \varphi'(0) \right) \frac{dx}{x} \right] \text{ où } u \text{ est une fonction de } \mathcal{D} \text{ dont le développement de Taylor à l'origine commence par } 1 + ax^2.$$

Donc $\frac{1}{x}$ est, par abus de langage, une distribution CP.

Distributions N-conditionnellement positives. Une distribution sera dite N-conditionnellement positive (en abrégé N-CP) si $\int |g|^2 T \geq 0 \quad \forall g \in \mathcal{O}^N$, en appelant \mathcal{O}^N l'idéal de \mathcal{D} formé des fonctions qui s'annulent ainsi que leurs dérivées d'ordre $< N$ à l'origine.

Remarques. a) Il est bien évident que T positive $\iff T$ 0-conditionnellement positive. En effet, la racine carrée d'une fonction positive de \mathcal{D} n'est pas nécessairement dans \mathcal{D} , mais peut être approchée par des fonctions de \mathcal{D} .

b) Pour qu'une distribution T soit CP, il faut et il suffit qu'il existe un N tel que T soit N-CP.

Pour préciser la structure des distributions N-CP, nous allons préciser deux notions.

Polynôme fortement positif. On dit qu'un polynôme T_{2N} de degré $2N$ est fortement positif si \forall le polynôme P de degré N , $T_{2N}(\frac{\partial}{\partial x})|P(x)|^2 \gg 0$. Par exemple, toute combinaison linéaire à coefficients positifs de carrés de monômes de degré N est fortement positive, et c'est peut-être d'ailleurs là une condition nécessaire.

En tout cas, une somme de carrés de polynômes n'est pas toujours fortement positive : par exemple, $x_1^4 - x_1^2 x_2^2 + x_2^4 = (x_1^2 - x_2^2)^2 + (x_1 x_2)^2$ appliqué à $(x_1 x_2)^2$ donne -4 .

Partie finie. On rappelle que l'ordre d'une distribution à l'origine est la borne inférieure de ses ordres dans les voisinages compacts de l'origine. L'ordre étant un entier, cette borne est d'ailleurs atteinte pour un compact. Dès lors, si $T \in \mathcal{D}'$ et si $S \in \mathcal{D}'_*$ est sa restriction à R_*^n , l'application $T \rightarrow S$ n'est ni injective ni surjective.

S étant donné, on dit que T est une partie finie de S , et on note $T = PfS$, si l'ordre de T à l'origine est minimal parmi ceux des prolongements de S . Il convient de noter que, S étant donnée, PfS n'existe pas toujours (exemple de $e^{\frac{1}{x^2}}$ qui, comme on l'a vu, n'est pas prolongeable), et, si elle existe, elle n'est pas unique. Plus précisément

Lemme. Si T_1 et T_2 sont deux prolongements de $S \in \mathcal{D}'_*$ et si N est le plus grand des deux ordres, alors $T_1 - T_2 = P(\frac{\partial}{\partial x})\delta$ où P est un polynôme de degré $N-1$ ou plus.

Il suffit en effet de remarquer que $\int f(T_1 - T_2) = 0 \quad \forall f \in \mathcal{O}^N$, ce qui exige $T_1 - T_2 = P(\frac{\partial}{\partial x})\delta$ avec $d^0 P < N$.

Conséquence. Soit S donné comme élément de \mathcal{D}'_* et N l'ordre minimal des prolonge-

ments de S , s'il en existe. Alors $\text{Pf } S$ n'est déterminée qu'à un polynôme de dérivation à l'origine de degré $< N$, près.

Expression de $\text{Pf } S$. Soit $u \in \mathcal{D}$ tel que son développement de Taylor à l'origine commence par 1 + termes de degré N . Alors, si $\psi \in \mathcal{D}$ et si ψ_{N-1} est son développement de Taylor à l'ordre $N-1$ à l'origine, toutes les expressions de $\text{Pf } S$ sont données par :

$$\int \psi \text{Pf } S = \int (\psi - \psi_{N-1}) S + P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(0)$$

P étant un polynôme arbitraire de degré $< N$.

Théorème. Les trois énoncés suivants sont équivalents :

- i) T est une distribution N -conditionnellement positive
- ii) $|P|^2 T$ est une distribution positive $\forall P \in \mathcal{P}_N$.
- iii) $T = T_{2N}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\delta + U\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\delta + \text{Pf } d\mu$, où $T_{2N} \in \mathcal{P}_{2N}$ est fortement positif, U un polynôme de degré $< 2N$, et $d\mu$ une mesure de Radon positive définie sur \mathbb{R}_*^n et telle que $\int_{|x| < 1} |x|^{2N} d\mu(x) < \infty$.

Il suffit de montrer les trois implications successives $i \implies ii$. En effet, $\forall \psi \in \mathcal{D}$ et $P \in \mathcal{P}_N$, $\psi P \in \mathcal{S}^N$, donc, comme T est N -CP, $0 \leq \int |P\psi|^2 T = \int |\psi|^2 |P|^2 T$, ce qui montre que $|P|^2 T$ est une mesure positive.

$ii \implies iii$. Posons $Q(x) = \sum_{i=1}^N x_i^{2N}$: on sait qu'il existe une constante C positive telle que $|x|^{2N} \leq C Q(x) \forall x \in \mathbb{R}^n$. Dès lors, considérons $d\nu = QT$: c'est par hypothèse une mesure positive sur \mathbb{R}^n , donc $d\mu = \frac{d\nu}{Q}$ est une mesure positive sur \mathbb{R}_*^n , vérifiant

$$\int_{|x| < 1} |x|^{2N} d\mu \leq C \int_{|x| < 1} d\nu < \infty. \text{ Par suite } d\mu \text{ est prolongeable en une distribution}$$

$\text{Pf } d\mu$ d'ordre $\leq 2N$. T étant déjà un prolongement de $d\mu$, $T - \text{Pf } d\mu$ est portée par l'origine, donc c'est un polynôme de dérivation en δ qu'on peut décomposer en trois parties :

$$T - \text{Pf } d\mu = U\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\delta + T_{2N}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\delta + \sum_{k > 2N} V_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\delta$$

où U est de degré $< 2N$, T_{2N} homogène et de degré $2N$, et V_k homogène et de degré k .



Soit $P \in \mathcal{P}_{2N}$, et multiplions les deux membres par $|P|^2$. D'après la définition de $Pf d\mu$, on a $|P|^2 Pf d\mu = |P|^2 d\mu$, donc :

$$|P|^2 T - |P|^2 d\mu = |P|^2 T_{2N} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \delta + \sum_{k > 2N} |P|^2 v_k \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \delta .$$

Mais $|P|^2 T$ et $|P|^2 d\mu$ coïncident sur le complémentaire de l'origine, $d\mu$ ne charge pas l'origine, et par hypothèse $|P|^2 T$ est une mesure positive. Donc $|P|^2 T - |P|^2 d\mu$ est une mesure positive portée par l'origine, donc de la forme $A\delta$ où A est une constante positive.

$$|P|^2 T_{2N} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \delta + \sum_{k > 2N} |P|^2 v_k \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \delta = A\delta, \text{ ou encore :}$$

$$\left\{ T_{2N} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) |P|^2 \right\} \delta + \sum_{k > 2N} (-1)^k v_k \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) |P|^2 \cdot \delta = A\delta, \text{ ceci } \forall P \in \mathcal{P}_N, T_{2N} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) |P|^2 = A \geq 0.$$

iii \implies i.

Cette implication est évidente car, si $g \in \mathcal{G}^N$, on a :

$$\int U \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \delta \cdot |g|^2 = 0 \text{ puisque } U \text{ est de degré } < 2N.$$

$$\int |g|^2 Pf d\mu \geq 0 \text{ car } d\mu \text{ est une mesure positive.}$$

$$\int T_{2N} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \delta |g|^2 \geq 0 \text{ car } T_{2N} \text{ est fortement positif, et } g \text{ peut être approchée par}$$

des polynômes de \mathcal{P}_N au voisinage de l'origine.

§ 3. Nous allons maintenant voir ce que deviennent ces propriétés par transformation de Fourier. Pour cela, on remarque que l'idéal \mathcal{G}^N , transformé par Fourier, se compose de fonctions de \mathcal{S} ; pour raisonner sur les distributions, nous allons donc prendre l'intersection de \mathcal{D} et du transformé de Fourier de \mathcal{G}^N . Posons donc $\hat{\mathcal{G}}^N =$ idéal de convolution formé des fonctions $\varphi \in \mathcal{D}$ telles que $\int x^\alpha \varphi(x) dx = 0 \forall$ le multi-indice α tel que $|\alpha| < N$.

Le théorème suivant va préciser la structure des fonctions de $\hat{\mathcal{G}}^N$.

Théorème. Pour que $f \in \hat{\mathcal{G}}^N$, il faut et il suffit qu'elle s'exprime sous la forme

$$f = \sum_{|\alpha| = N} g_\alpha^{(\alpha)} \text{ où les } g_\alpha \text{ sont des fonctions de } \mathcal{D}.$$

Donc les fonctions de $\hat{\mathcal{D}}^N$ sont exactement formées des sommes finies de dérivées d'ordre N de fonctions de \mathcal{D} .

Pour $N = 1$, le théorème dit que les fonctions de \mathcal{D} d'intégrale nulle sont les divergences des fonctions de \mathcal{D} ; sous cette forme, il avait déjà été démontré par Poincaré.

La condition suffisante est triviale : toute somme finie de dérivées d'ordre N de fonctions de \mathcal{D} est dans \mathcal{D} et a ses moments $< N$ nuls. Reste à montrer la condition nécessaire. Soit donc $f \in \hat{\mathcal{D}}^N$: la difficulté vient du fait qu'on exige que les $g_\alpha \in \mathcal{D}$, car sinon la démonstration est facile. Nous allons faire une récurrence sur l'entier $n+N$.

On suppose l'énoncé vrai pour les couples (m, M) où $m + M < n + N$. A $f \in \hat{\mathcal{D}}^N(\mathbb{R}^n)$ on associe

$$f^*(x_1 \dots x_{n-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_{n-1}, t) dt.$$

On a par construction même $f^* \in \hat{\mathcal{D}}^N(\mathbb{R}^{n-1})$ d'où, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$f^* = \sum_{\substack{|\alpha| = N \\ \alpha_n = 0}} g_\alpha^{*(\alpha)} \quad \text{où } g_\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1}).$$

Donnons-nous alors $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et vérifiant $\int u(t) dt = 1$ et $\int t^j u(t) dt = 0$ pour $1 \leq j \leq N$, et considérons $g_\alpha(x_1 \dots x_n) = g_\alpha^*(x_1 \dots x_{n-1}) u(x_n)$.

Posons
$$\varphi = f - \sum_{\substack{|\alpha| = N \\ \alpha_n = 0}} g_\alpha^{(\alpha)}.$$

La fonction $\psi(x_1 \dots x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} \varphi(x_1 \dots x_{n-1}, t) dt$ est dans \mathcal{D} . En effet, dès que x_n est supérieur à la borne supérieure des projections sur le dernier avec des supports de f

et de u , on a :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{x_n} f(x_1 \dots x_{n-1}, t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1 \dots x_{n-1}, t) dt = f^*(x_1 \dots x_{n-1}) = \sum_{\substack{|\alpha| = N \\ \alpha_n = 0}} g_\alpha^{*(\alpha)} = \\ &= \int_{-\infty}^{x_n} \sum_{\substack{|\alpha| = N \\ \alpha_n = 0}} g_\alpha^{(\alpha)}(x_1 \dots x_{n-1}) u(t) dt \end{aligned}$$

car l'intégrale de $u(t)$ est unité.

Donc pour x_n assez grand, ψ est identiquement nulle. De même si x_n est inférieure aux projections sur le dernier axe des supports de f et des g_α , on a encore $\psi = 0$. Donc ψ est à support compact, et dans \mathcal{D} . D'autre part ψ a ses moments d'ordre $< N-1$ nuls, car ceux de f sont nuls et, pour $|\alpha| < N-1$:

$$\int \sum_{\substack{|\alpha|=N \\ \alpha_n=0}} x^\alpha g_\alpha^{(\alpha)} = \int \sum_{\substack{|\alpha|=N \\ \alpha_n=0}} x_1^{\alpha_1} \dots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} g_\alpha^{*(\alpha)}(x_1 \dots x_{n-1}) \int x_n^{\alpha_n} u(x_n) = 0.$$

On peut donc écrire

$$f = \sum_{\substack{|\alpha|=N \\ \alpha_n=0}} g_\alpha^{(\alpha)} + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \quad \text{où} \quad \psi \in \mathcal{C}^{N-1}(\mathbb{R}^n).$$

En utilisant à nouveau l'hypothèse de récurrence, on peut écrire :

$$\psi = \sum_{|\alpha|=N-1} h_\alpha^{(\delta)} \quad \text{avec} \quad h_\alpha \in \mathcal{D}.$$

Le théorème est alors démontré.

Remarque. On pouvait donner une démonstration plus rapide en remarquant que toute fonction h entière de $\mathcal{C}^{\hat{N}}$, ayant ses dérivées d'ordre $< N$ nulles à l'origine, peut s'écrire $h = \sum_{|\beta| \geq N} \frac{h^{(\beta)}(0)}{\beta!} x^\beta = \sum_{|\alpha|=N} x^\alpha k_\alpha(x)$, les k_α étant des fonctions entières. Si on pose $k_\alpha = i^{|\alpha|} \hat{g}_\alpha$ et $h = \hat{f}$, on obtient la relation du théorème.

Fonction définie positive. On dit qu'une fonction continue g est définie positive, ou de type positif, si \forall les nombres complexes c_i, c_j et les points x_i, x_j de \mathbb{R}^n , alors $\sum_{i,j} g(x_i - x_j) c_i \bar{c}_j \geq 0$. On en déduit facilement que $g(0)$ est réel positif, que $g = \check{g}$ en posant $\check{g}(x) = \overline{g(-x)}$, et enfin que $\forall x \in \mathbb{R}^n, |g(x)| \leq g(0)$, donc g est bornée. Si μ est la mesure discrète formée des masses c_i aux points x_i , l'inégalité de définition s'écrit $\int g(x - \xi) d\mu(x) \bar{d}\mu(\xi) \geq 0$. Or les mesures discrètes sont vaguement denses dans l'ensemble des mesures à support compact, et en particulier dans l'ensemble des mesures de la forme $\varphi(x) dx$ où $\varphi \in \mathcal{D}$. Par suite on devra avoir, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$, $\int g(x - \xi) \varphi(x) \bar{\varphi}(\xi) dx d\xi \geq 0$, ce qui s'écrit $\int g(x + \xi) \varphi(x) \check{\varphi}(\xi) dx d\xi \geq 0$.

En notations de convolutions, $\int g \cdot (\varphi * \check{\varphi}) \geq 0$ ou, si on appelle trace d'une fonction sa valeur à l'origine : $\text{Tr } g * \varphi * \check{\varphi} \geq 0$.

Ainsi présentée, la définition s'étend aux distributions.

Distributions de type positif. Une distribution T sera dite de type positif si, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$, $\int T \cdot (\varphi * \check{\varphi}) = \text{Tr } T * \varphi * \check{\varphi} \geq 0$.

On peut dire aussi : T est de type positif si toutes ses birégularisées $T * \varphi * \check{\varphi}$ pour $\varphi \in \mathcal{D}$ sont de type positif.

Nous allons maintenant définir une nouvelle notion.

Distributions N-conditionnellement de type positif. On dira qu'une distribution T est N-conditionnellement de type positif (en abrégé N-CTP) si, $\forall g \in \hat{\mathcal{O}}^N$:

$$\int g(x) \overline{g(y)} T(x - y) \geq 0.$$

Comme $\hat{\mathcal{O}}^0 = \mathcal{D}$, on retrouve la définition précédente pour $N = 0$.

Une propriété très importante est le théorème suivant.

Théorème. Si S est une distribution N-CTP, alors $S(x) = \mathcal{O}(|x|^{2N})$.

L'idée repose sur le fait que, $\forall \alpha$ et $\beta \in \mathcal{D}$:

$$4(\alpha * \beta) = (\alpha + \check{\beta}) * (\check{\alpha} + \beta) - (\alpha - \check{\beta}) * (\check{\alpha} - \beta) + i(\alpha + i\check{\beta}) * (\check{\alpha} - i\beta) - i(\alpha - i\check{\beta}) * (\check{\alpha} + i\beta).$$

Dès lors comme S est N-CTP, pour toute $g \in \hat{\mathcal{O}}^N$, la fonction $S * g * \check{g}$ est définie positive, donc en particulier bornée.

L'identité précédente montre alors que $\forall g$ et $h \in \hat{\mathcal{O}}^N$, $S * g * h$ est bornée, car $g + \check{h}$, $g - \check{h}$, $g + i\check{h}$, $g - i\check{h}$ appartient à $\hat{\mathcal{O}}^N$.

Soient alors $P \in \mathcal{P}_N$, et deux fonctions f et $g \in \mathcal{D}$.

On a manifestement $P(\frac{\partial}{\partial x})f$ et $P(\frac{\partial}{\partial x})g \in \hat{\mathcal{O}}^N$, par définition même de $\hat{\mathcal{O}}^N$.

Or $(S * P^2(\frac{\partial}{\partial x})f) * g = S * P(\frac{\partial}{\partial x})f * P(\frac{\partial}{\partial x})g$, donc est bornée. Ceci est vrai

$\forall g \in \mathcal{D}$, donc $\forall f \in \mathcal{D}$ et $P \in \mathcal{P}_N$, $S * P^2(\frac{\partial}{\partial x})f = P^2(\frac{\partial}{\partial x})S * f$ est bornée. Ceci entraîne

que toutes les dérivées d'ordre $2N$ de $S * f$ sont bornées, et par suite

$S * f(x) = \mathcal{O}(|x|^{2N})$. Une telle relation valable $\forall f \in \mathcal{D}$ équivaut par définition à

$$S(x) = \mathcal{O}(|x|^{2N}).$$

Remarques. a) Il résulte du théorème précédent que toute distribution N -CTP est tempérée.

b) Si S et T sont tempérées et $S = \hat{T}$, alors $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ telle que $\hat{\varphi} \in \mathcal{D}$ on a l'égalité $\int S(\varphi * \check{\varphi}) = \int |\hat{\varphi}|^2 \cdot T$. En effet, $\hat{\check{\varphi}} = \overline{\hat{\varphi}}$, donc

$$\int S(\varphi * \check{\varphi}) = \int \hat{T}(\varphi * \check{\varphi}) = \int T.(\hat{\varphi} \hat{\check{\varphi}}) = \int T.(\hat{\varphi} \overline{\hat{\varphi}}) = \int T|\hat{\varphi}|^2.$$

Définition. Une distribution T sera dite conditionnellement de type positif, ou en abrégé CTP, s'il existe un N tel que T soit N -CTP.

Théorème. Les trois énoncés suivants sont équivalents pour $N \neq 0$.

i) S est une distribution N -conditionnellement de type positif.

ii) $S = (-1)^N T_{2N}(x)dx + M$ où $T_{2N} \in \mathcal{P}_{2N}$ est fortement positif et où M est CTP et vérifie $M(x) = o(|x|^{2N})$.

iii) $S = \hat{T}$ où T est une distribution N -CP à croissance lente.

i) \implies iii). S est N -CTP, donc, comme on l'a vu, à croissance lente, donc il existe une distribution T à croissance lente telle que $S = \hat{T}$. L'hypothèse $\int S.(\varphi * \check{\varphi}) \geq 0$ $\forall \varphi \in \mathcal{O}^N$ donne, d'après la remarque, $\int T.|\hat{\varphi}|^2 \geq 0$. Donc $\int |f|^2 T \geq 0$ pour toute fonction f de \mathcal{O}^N telle que $\hat{f} \in \mathcal{O}^N$, donc pour toute f de \mathcal{O}^N telle que $\hat{f} \in \mathcal{D}$. Or $\forall g \in \mathcal{O}^N$, sa transformée de Fourier est dans \mathcal{S} puisque $\mathcal{O}^N \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{S}$. Par suite, comme \mathcal{D} est dense dans \mathcal{S} , on a $\int |g|^2 T \geq 0 \forall g \in \mathcal{O}^N$, ce qui exprime bien que T est N -CP.

iii) \implies i). Supposons $S = \hat{T}$ où T est N -CP à croissance lente.

$\int |g|^2 T \geq 0 \forall g \in \mathcal{O}^N$, donc $\int S(\varphi * \check{\varphi}) \geq 0 \forall \varphi$ telle que $\hat{\varphi} \in \mathcal{O}^N$, donc $\forall \varphi \in \mathcal{O}^N$ telle que $\hat{\varphi} \in \mathcal{D}$. Comme \mathcal{D} est dense dans \mathcal{S} , l'inégalité est ici encore valable $\forall \varphi \in \mathcal{O}^N$, et ceci exprime que S est N -CTP.

iii) \implies ii). Supposons $S = \hat{T}$ où T est N -CP à croissance lente.

On peut écrire $T = T_{2N}(\frac{\partial}{\partial x})\delta + U(\frac{\partial}{\partial x})\delta + Pf d\mu$ avec les notations déjà expliquées.

Si on transforme par Fourier en faisant entrer le polynôme U dans $Pf d\mu$, on trouve :

$$S = (-1)^N T_{2N}(x) dx + M \quad \text{avec} \quad M = \widehat{\text{Pf}} \, d\mu.$$

Mais on sait que $\int_{|x| \leq 1} |x|^{2N} d\mu(x) < \infty$, et par suite, $\forall f \in \mathcal{D}$, on peut écrire à un polynôme de degré $< 2N$ près :

$$M * f(\xi) = \widehat{\text{Pf}}(\widehat{f} \, d\mu) = \int \{e(\xi \cdot x) - e_{2N}(\xi \cdot x)\} \widehat{f}(x) \, d\mu(x)$$

en posant $e(\xi \cdot x) = e^{i \xi \cdot x}$ et $e_{2N}(\xi \cdot x)$ le polynôme de Taylor à l'ordre $2N-1$ de $e(\xi \cdot x)$ à l'origine. Ceci définit en effet une Pf de $d\mu$.

Nous allons utiliser les deux majorations suivantes :

$$|e(\xi \cdot x) - e_k(\xi \cdot x)| \leq \frac{1}{k!} |\xi \cdot x|^k \quad (\text{formule de Taylor avec reste})$$

$$|e(\xi \cdot x) - e_k(\xi \cdot x)| \leq k(1 + |\xi \cdot x|^{k-1}) \quad (\text{par exemple par récurrence}).$$

Soit alors un nombre δ que nous ferons varier en fonction de ξ . On peut écrire

$$M * f(\xi) \leq \frac{1}{(2N)!} |\xi|^{2N} \int_{|x| < \delta} |\widehat{f}(x)| |x|^{2N} d\mu(x) + 2N \int_{|x| > \delta} |\widehat{f}(x)| d\mu(x) + 2N |\xi|^{2N-1} \int_{|x| > \delta} |\widehat{f}(x)| |x|^{2N-1} d\mu(x).$$

Or $\widehat{f} \in \mathcal{F}$, donc $\int |x|^{2N} |\widehat{f}(x)| d\mu(x) < \infty$.

Si $\delta \rightarrow 0$,

$$M * f(\xi) = |\xi|^{2N} \sigma(1) + o(\delta^{-2N}) + |\xi|^{2N-1} o(\delta^{-1}).$$

Il suffit alors de prendre par exemple $\delta = \frac{1}{\sqrt{|\xi|}}$, qui tend bien vers 0 quand $\xi \rightarrow \infty$,

et il reste :

$$\forall f \in \mathcal{D}, \quad M * f(\xi) = o(|\xi|^{2N}), \quad \text{donc} \quad M = o(|\xi|^{2N}).$$

D'autre part $T_{2N}(x) dx$ est évidemment CTP ; et S aussi puisqu'on a vu que iii) était (équivalent à i), donc M est CTP.

ii) \implies i). Supposons $S = (-1)^N T_{2N}(x) dx + M$ où $T_{2N} \in \mathcal{P}_{2N}$ est fortement positif

et M est CTP avec $M(x) = o(|x|^{2N})$ à l'infini.

Par définition, $\exists \kappa$ tel que M soit κ -CTP.

Mais $\hat{\theta}^{N_1} \subset \hat{\theta}^{N_2}$ si $N_1 \geq N_2$, donc N_2 -CTP $\implies N_1$ -CTP.

Par suite, si $\kappa \leq N$, M est N -CTP, donc S aussi puisque T_{2N} l'est, et le résultat

est démontré.

Si $\kappa > N$, on pose $\kappa = N + N'$, et on va montrer que M est alors non seulement $N + N' - \text{CTP}$, mais même $N\text{-CTP}$. Il suffit pour cela de montrer que si M est $N + 1 - \text{CTP}$ et $M = o(|x|^{2N})$, alors M est $N\text{-CTP}$.

Soit donc une fonction $f \in \hat{\mathcal{O}}^N$, et posons $h_y(x) = f(x) - f(x+y)$. On a $\int x^\alpha f(x+y) dx = \int (x-y)^\alpha f(x) dx = \int x^\alpha f(x) dx$ pour $|\alpha| \leq N$. Par suite $h_y \in \hat{\mathcal{O}}^{N+1}$, et on a ainsi $M * h_y * \check{h}_y(0) \geq 0$. Puisque

$$h_y * \check{h}_y(x) = 2f * \check{f}(x) - 2f * \check{f}(x+y)$$

il en résulte que

$$M * f * \check{f}(0) - M * f * \check{f}(y) = \frac{1}{2} M * h_y * \check{h}_y(0) \geq 0.$$

Or, d'après le théorème donnant la structure des fonctions de $\hat{\mathcal{O}}^N$, on peut écrire

$$f = \sum_{|\alpha|=N} g_\alpha^{(\alpha)} \quad \text{et par suite}$$

$$M * f * \check{f} = \sum_{|\alpha|=|\beta|=N} k_{\alpha\beta}^{(\alpha+\beta)} \quad \text{où } k_{\alpha\beta} = (-1)^N M * g_\alpha * \check{g}_\beta.$$

Par hypothèse, $k_{\alpha\beta}(x) = \mathcal{O}(|x|^{2N})$. Nous allons démontrer que

$$\sum_{\alpha\beta} k_{\alpha\beta}^{(\alpha+\beta)}(0) - \sum_{\alpha\beta} k_{\alpha\beta}^{(\alpha+\beta)}(y) \geq 0 \quad \text{pour chaque } y$$

entraîne $\sum_{\alpha\beta} k_{\alpha\beta}^{(\alpha+\beta)}(0) \geq 0$, d'où l'énoncé. Le raisonnement est assez simple mais difficile

à écrire. En cas de dimension 1 on a

$$k^{(2N)}(0) - k^{(2N)}(y) \geq 0.$$

$$\text{Donc } \int_0^x \{k^{(2N)}(0) - k^{(2N)}(y)\} (x-y)^{2N-1} dy / (2N-1)! \geq 0$$

mais cette intégrale vaut

$$k^{(2N)}(0) x^{2N} / (2N)! - \{k(x) - k_{2N}(x)\}$$

$$\text{car } \int_0^x k^{(m)}(y) (x-y)^{m-1} dy / (m-1)! = k(x) - k_{m-1}(x).$$

$$\text{Alors } k^{(2N)}(0) - (2N)! \{k(x) - k_{2N-1}(x)\} / x^{2N} \geq 0$$

mais $k(x) = \mathcal{O}(x^{2N})$ et $k_{2N-1}(x)$ est un polynôme de degré $2N-1$. En faisant x tendre

vers ∞ on obtient $k^{(2N)}(0) \geq 0$. Pour le cas de plusieurs variables on considère

$$I(\alpha) = \int_{0 \leq y_i \leq x_i} \sum \{k_{\alpha\beta}^{(\alpha+\beta)}(0) - k_{\alpha\beta}^{(\alpha+\beta)}(y)\} (x-y)^{2\nu-1} dy / (2\nu-1)!$$

où $\nu = (N, N, \dots, N)$. On trouve que

$$\int_{0 \leq y_i \leq x_i} k^{(\gamma)}(y) (x-y)^{2\nu-1} dy / (2\nu-1)! = \int \{k(y) - k_{(\gamma)}(y)\} (x-y)^{2\nu-\gamma-1} dy / (2\nu-\gamma-1)!$$

où $k_{(\gamma)}(y) = \sum_{\alpha \leq \gamma} k^{(\alpha)}(0) y^{\alpha} / \alpha!$ et $\alpha \leq \gamma$ veut dire $\alpha_i \leq \gamma_i, i = 1, \dots, n$.

Enfin on voit que

$$I(x) = \sum k_{\alpha\beta}^{(\alpha+\beta)}(0) X^{2\nu} / (2\nu)! - \sum \int_{0 \leq y_i \leq x_i} \{k_{\alpha\beta}(y) - k_{\alpha\beta(\alpha+\beta-1)}(y)\} (x-y)^{2\nu-\alpha-\beta-1} dy / (2\nu-\alpha-\beta-1)!$$

Si l'on pose $x = (X, \dots, X)$ alors

$$I(x) = \sum k_{\alpha\beta}^{(\alpha+\beta)}(0) X^{2Nn} / (2N!)^n - \theta(X^{2Nn}).$$

Ainsi $M * f * \check{f}(0) = \sum k_{\alpha\beta}^{(\alpha+\beta)}(0) = \lim_{X \rightarrow \infty} (2N!)^n X^{-2Nn} I(x) \geq 0$.

Pour $N = 0$ il faut remplacer $M(x) = \theta(1)$ par $M(x) \rightarrow 0$ en moyenne presque-périodique.

CHAPITRE III

FONCTIONS DÉFINIES NÉGATIVES. SEMI-GROUPES DE MESURES.

Définition. Une fonction continue $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ est dite définie négative si

a) $\psi(-x) = \overline{\psi(x)} \quad \psi(0) \in \mathbb{R}^+$

b) $-\psi$ est 1-conditionnellement de type positif.

La fonction ψ est dite normalisée si $\psi(0) = 0$.

b) équivaut à c) : $\forall m \in \mathbb{N} \quad \forall x_0, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n \quad \forall c_0, \dots, c_m \in \mathbb{C}$ tels que

$$\sum_{i=0}^m c_i = 0$$

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m \psi(x_i - x_j) c_i \bar{c}_j \leq 0.$$

Montrons que (a) et (c) \iff (d)

(d) : $\forall m \in \mathbb{N} \quad \forall x_0, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ la matrice $\{\psi(x_i) + \overline{\psi(x_j)} - \psi(x_i - x_j)\}_{i,j=0, \dots, m}$ est hermitienne positive, i.e. $\forall c_0, \dots, c_m \in \mathbb{C} \quad \sum_{i,j=0}^m [\psi(x_i) + \overline{\psi(x_j)} - \psi(x_i - x_j)] c_i \bar{c}_j \geq 0$.

(a) et (c) \implies (d). Prenons dans (c) $x_0 = 0 \quad c_0 = -\sum_{i=1}^m c_i$

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m \psi(x_i - x_j) c_i \bar{c}_j = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m (\psi(x_i - x_j) - \psi(x_i) - \overline{\psi(x_j)}) c_i \bar{c}_j + \psi(0) \left| \sum_{i=1}^m c_i \right|^2 \leq 0$$

La conclusion résulte de ce que $\psi(0) \in \mathbb{R}^+$.

(d) \implies (a). Prenons dans (d) $m = 1 \quad x_0 = x \quad x_1 = x + y$

on obtient $\psi(x) + \overline{\psi(x+y)} - \psi(-y) = \overline{\psi(x+y) + \overline{\psi(x)} - \psi(y)}$ et $\psi(-y) = \overline{\psi(y)}$.

Prenons $m = 0 \quad x_0 = 0$ on obtient $\overline{\psi(0)} = \psi(0) \in \mathbb{R}^+$.

(d) \implies (c) en effet si $\sum_{i=0}^m c_i = 0$

$$0 \geq \sum_{i,j=0}^m [\psi(x_i - x_j) - \psi(x_i) - \overline{\psi(x_j)}] c_i \bar{c}_j = \sum_{i,j=0}^m \psi(x_i - x_j).$$

Prenons dans (d) $m = 1 \quad c_0 = 1 \quad x_0 = x \quad c_1 = -1 \quad x_1 = 0$

La matrice $B = U^* \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_m} \end{pmatrix} U$ répond à la question.

Lemme 2.— Soient (A_{ij}) et (B_{ij}) des matrices hermitiennes positives $C_{ij} = A_{ij} B_{ij}$.

La matrice (C_{ij}) est hermitienne positive.

$$\overline{C_{ij}} = \overline{A_{ij} B_{ij}} = \overline{A_{ij}} \overline{B_{ij}} = A_{ji} B_{ji} = C_{ji}.$$

(B_{ij}) possède une racine carrée hermitienne (b_{ij}) : $B_{ij} = \sum_k b_{ik} \overline{b_{jk}}$

$$\sum_{i,j} C_{ij} u_i \overline{u_j} = \sum_{i,j} A_{ij} \left(\sum_k b_{ik} \overline{b_{jk}} \right) u_i \overline{u_j} = \sum_{i,j} A_{ij} (b_{ik} u_i) (\overline{b_{jk} u_j}) \geq 0.$$

Corollaire. Si (A_{ij}) est hermitienne positive $(e^{A_{ij}})$ l'est aussi.

Théorème (Schönberg).— Pour que $e^{-t\psi(x)}$, $(\psi(0) \in \mathbb{R}^+)$, soit une fonction définie positive pour chaque $t \in \mathbb{R}^+$ il faut et suffit que ψ soit définie négative.

a) La condition est nécessaire

$e^{-t\psi(x)}$ étant une fonction continue de x , ψ est continue.

$e^{-t\psi(x)}$ est une fonction définie positive et $e^{-t\psi(0)} \leq 1$ donc $1 - e^{-t\psi(x)}$ est définie

négative donc aussi $\frac{1 - e^{-t\psi(x)}}{t}$ or $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-t\psi(x)}}{t} = \psi(x)$

$\frac{1 - e^{-t\psi(x)}}{t}$ vérifiant (d) il en est de même de ψ .

b) La condition est suffisante

ψ est définie négative $\psi(0) \in \mathbb{R}^+$, soient $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ on doit

montrer que la matrice $\{e^{-t\psi(x_i - x_j)}\}$ est hermitienne positive.

$$e^{-t\psi(x_i - x_j)} = e^{t[\psi(x_i) + \overline{\psi(x_j)} - \psi(x_i - x_j)]} = e^{-t(\psi(x_i) + \overline{\psi(x_j)})}.$$

La conclusion résulte du corollaire du lemme 2.

Théorème. Soit μ une mesure positive telle que $\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t} d\mu(t) < \infty$

$$u \in \mathbb{C} \quad \text{Re } u \geq 0 \quad F(u) = \int_0^{\infty} (1 - e^{-tu}) d\mu(t)$$

Si ψ est définie négative $F(\psi)$ l'est aussi.

$\psi_t = 1 - e^{-t\psi}$ est définie négative donc $\forall x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n \quad \forall c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}$

$\sum_{i=1}^n \{ \psi_t(x_i) + \overline{\psi_t(x_j)} - \psi_t(x_i - x_j) \} c_i \bar{c}_j \geq 0$ par intégration on obtient la même inégalité pour $F(\psi)$.

Reste à montrer que $F(\psi)$ est continue, montrons que F est continue.

Soient $u, v \in \mathbb{C}$ $\operatorname{Re} u \geq 0$ $\operatorname{Re} v \geq 0$ $\operatorname{Re} v \geq \operatorname{Re} u$

$$|F(u) - F(v)| = \left| \int_0^{+\infty} (e^{-tv} - e^{-tu}) d\mu(t) \right| \leq \int_0^{+\infty} |1 - e^{-t(v-u)}| d\mu(t).$$

Il suffit de montrer que $\lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ \operatorname{Re} u \geq 0}} \int_0^{+\infty} |1 - e^{-tu}| d\mu(t) = 0$

$1 - e^{-z} = z(1 + \alpha(z))$ où α est une fonction continue de z $\alpha(0) = 0$

soit $t_0 > 0$ $\int_0^{+\infty} |1 - e^{-tu}| d\mu(t) = \int_0^{t_0} |1 - e^{-tu}| d\mu(t) + \int_{t_0}^{+\infty} |1 - e^{-tu}| d\mu(t) \leq |u| \int_0^{t_0} |1 + \alpha(tu)| t d\mu(t) + 2 \int_{t_0}^{+\infty} d\mu(t)$

La fonction continue $(t, u) \mapsto |1 + \alpha(tu)|$ est bornée sur le compact

$$\{|u| \leq 1, \operatorname{Re} u \geq 0\} \times \{0 \leq t \leq t_0\}.$$

Si $|u| \leq 1$ $\operatorname{Re} u \geq 0$ il existe $A(t_0) \geq 0$ tel que $\forall t \in [0, t_0] |1 + \alpha(tu)| \leq A(t_0)$.

Alors si $|u| \leq 1$ $\int_0^{+\infty} |1 - e^{-tu}| d\mu(t) \leq A(t_0) |u| \int_0^{t_0} t d\mu(t) + 2 \int_{t_0}^{+\infty} d\mu(t)$.

Soit $\varepsilon > 0$ il existe t_0 tel que $\int_{t_0}^{+\infty} d\mu(t) \leq \frac{\varepsilon}{4}$ car $\int_1^{+\infty} d\mu(t) < \infty$, prenons t_0 ainsi.

Alors $|u| \leq \inf\left(1, \frac{\varepsilon}{2A(t_0) \int_0^{t_0} t d\mu(t)}\right) \implies \int_0^{+\infty} |1 - e^{-tu}| d\mu(t) \leq \varepsilon$.

Remarque. La fonction F est indéfiniment dérivable pour $u \in \mathbb{R}$ $u > 0$ et l'on a

$$F(u) \geq 0 \quad F'(u) \geq 0 \quad F''(u) \leq 0 \dots F^{(2k)}(u) \leq 0, \quad F^{(2k-1)}(u) \geq 0 \dots$$

Une telle fonction est dite complètement monotone. Un problème se pose à leur sujet :

peuvent-elles se mettre sous la forme $\int_0^{+\infty} (1 - e^{-tu}) d\mu(t)$ $\mu \geq 0$ $\int_0^{+\infty} \frac{t d\mu(t)}{1+t} < \infty$?

Réponse : oui. Voir G. Choquet, Theory of capacities, Annales de l'Institut Fourier 5

(1953) p. 131-295, surtout § 43.2 (N.B. Traduire "complètement monotone" ici par "alternating

of order ∞ " et non par "completely monotone" comme l'emploie Choquet.

Exemples. Soit $d\mu(t) = t^{\beta-1} dt$ $\beta \in \mathbb{R}$

$\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t} d\mu(t) < \infty$ si et seulement si $0 < \beta < 1$. La fonction correspondante est

$F(u) = \int_0^{+\infty} (1-e^{-tu}) t^{-\beta-1} dt = u^\beta \int_0^{+\infty} (1-e^{-x}) x^{-\beta-1} dx$. Par suite si ψ est définie négative et si $0 < \beta < 1$ ψ^β est définie négative. Ainsi $|x|^{2\beta}$ $0 < \beta < 1$ est définie négative, si $\beta > 1$ $|x|^{2\beta}$ n'est pas définie négative car $|x|^{2\beta}$ n'est pas $O(|x|^2)$ si $|x| \rightarrow +\infty$.

Preons $d\mu(t) = \frac{e^{-t}}{t} dt$ $\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t} d\mu(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t} dt < \infty$

$F(u) = \int_0^{+\infty} (1-e^{-tu}) \frac{e^{-t}}{t} dt$ si $\text{Re } u > 0$ $F'(u) = \frac{1}{1+u}$ $F(0) = 0$ donc $F(u) = \text{Log}(1+u)$.

La fonction $\text{Log}(1+u)$ opère donc sur les fonctions définies négatives.

Fonctions définies négatives et semi-groupes de mesures.

Soit ψ une fonction définie négative, si $t > 0$ $e^{-t\psi}$ est une fonction définie positive, c'est la transformée de Fourier d'une mesure positive :

$$\hat{\mu}_t = e^{-t\psi} \quad \int d\mu_t = e^{-t\psi(0)} \leq 1 \quad \text{car} \quad \psi(0) \geq 0.$$

On a $\widehat{\mu_t * \mu_s} = \hat{\mu}_t \hat{\mu}_s = e^{-(t+s)\psi} = \hat{\mu}_{t+s}$

la famille $(\mu_t)_{t > 0}$ forme un semi-groupe de mesures.

$$\text{Soit } f \in C_0 \quad \int f(x) d\mu_t(x) = \int \hat{f}(\xi) e^{-t\psi(\xi)} d\xi \rightarrow \int \hat{f}(\xi) d\xi \text{ si } t \rightarrow 0$$

$= f(0)$

par suite $\mu_t \rightarrow \delta$ vaguement si $t \rightarrow 0$.

Réciproquement soit $(\mu_t)_{t > 0}$ un semi groupe de mesures tel que $\forall t \geq 0 \quad \forall s \geq 0$

$$\mu_{t+s} = \mu_t * \mu_s \quad \forall t \geq 0 \quad \int d\mu_t \leq 1 \text{ si } t \rightarrow 0 \quad \mu_t \rightarrow \delta \text{ vaguement.}$$

On a $\hat{\mu}_t \hat{\mu}_s = \hat{\mu}_{t+s}$ et $\hat{\mu}_t(x) \rightarrow 1$ si $t \rightarrow 0$ car $\mu_t \rightarrow \delta$ vaguement si $t \rightarrow 0$. On en déduit que $\hat{\mu}_t(x) = e^{-t\psi(x)}$ et ψ est définie négative d'après un théorème précédent.

Il y a donc correspondance biunivoque entre les fonctions définies négatives et les semi-groupes de mesures de masse ≤ 1 .

Il y a correspondance biunivoque entre les fonctions définies négatives normalisées et les semi-groupes de probabilités.

Théorème de convergence de mesures.— Soit $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de mesures bornées ≥ 0

$\varphi_n = \hat{\mu}_n$ est une fonction définie positive pour chaque n .

Théorème.— Si $\forall x \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$ et si la convergence est uniforme sur un voisinage de 0 il existe une mesure positive μ telle que $\mu_n \rightarrow \mu$ vaguement.

Si $\forall n \mu_n$ est une probabilité, μ est une probabilité.

Il résulte des hypothèses que φ est continue dans un voisinage de l'origine $\varphi_n(0) - \varphi_n(x)$ vérifiant la condition (d) il en est de même de $\varphi(0) - \varphi(x)$ qui est donc une fonction définie négative et $\varphi(x)$ est définie positive. Il existe donc une mesure μ positive bornée telle que $\hat{\mu} = \varphi$ et $\forall f \in \hat{\mathcal{D}}$ on a

$$\int f(x) d\mu_n(x) = \int \hat{f}(\xi) \varphi_n(\xi) d\xi \rightarrow \int \hat{f}(\xi) \varphi(\xi) d\xi = \int f(x) d\mu(x) \text{ si } n \rightarrow +\infty$$

cela résulte du théorème de la convergence dominée car $|\varphi_n(\xi)| \leq \varphi_n(0)$ et la suite

$\{\varphi_n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée car elle est convergente. $\hat{\mathcal{D}}$ étant dense dans l'ensemble C_0

des fonctions continues nulles à l'infini muni de la topologie de la convergence uniforme

le théorème résulte du :

Lemme.— Soient $\mu, (\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des mesures positives telles que $\|\mu\| \leq M \forall n \|\mu_n\| \leq 1$ et telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f d\mu_n \rightarrow \int f d\mu$ pour toute fonction $f \in \hat{\mathcal{D}}$ sous ensemble dense dans C_0 pour la topologie de la convergence uniforme, alors $\mu_n \rightarrow \mu$ vaguement.

Soit $f \in C_0$ soit $f_p \in \hat{\mathcal{D}} \lim_{p \rightarrow \infty} \|f_p - f\| = 0$

$$\int f d\mu - \int f d\mu_n = \int (f - f_p)(d\mu - d\mu_n) + \int f_p (d\mu - d\mu_n)$$

$$\left| \int f d\mu - \int f d\mu_n \right| \leq 2M \|f - f_p\| + \left| \int f_p d\mu - \int f_p d\mu_n \right|.$$

Etant donné $\varepsilon > 0 \exists p \ 2M \|f - f_p\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ choisissons p ainsi comme $f \in \hat{\mathcal{D}}$

$$\left| \int f_p d\mu \rightarrow \int f_p d\mu_n \right| \rightarrow 0 \text{ si } n \rightarrow +\infty \text{ donc } \exists N \ \forall n \gg N \ \left| \int f_p d\mu - \int f_p d\mu_n \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{alors } \left| \int f d\mu - \int f d\mu_n \right| \leq \varepsilon$$

$$\text{comme } \varphi_n(0) \rightarrow \varphi(0) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mu_n\| = \|\mu\|$$

Si $\forall n \mu_n$ est une probabilité, μ est une probabilité.

L'hypothèse assurant la continuité de φ est nécessaire comme le montre l'exemple suivant :

prenons μ_n ainsi $\mu_n(f) = \frac{1}{2n} \int_{-n}^n f(x) dx.$

On a $\varphi_n(\xi) = \frac{1}{2n} \int_{-n}^n e^{i\xi x} dx = \frac{\sin n\xi}{n\xi}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(\xi) = 0$ si $\xi \neq 0$ cependant $\mu_n \rightarrow 0$ vaguement.
 1 si $\xi = 0.$

LAPLACIENS GENERALISES

Définition. On dit qu'une distribution D est un laplacien généralisé si $\int fD \leq 0$ pour toute fonction $f \in \mathcal{D}$ atteignant son maximum en 0.

D est un laplacien généralisé $\iff D * f(x) \leq 0 \quad \forall f \in \mathcal{D} \quad f$ maximum en $x.$

Exemples. - $D = \frac{\partial}{\partial x_1} \delta,$ Δ (laplacien ordinaire).

Formule de Levy-Khintchine. - Soit ψ une fonction définie négative, elle peut se mettre sous la forme $\psi(\xi) = Q(\xi) - iL_u(\xi) + p + \int \{1 - i\xi x u(x) - e^{i\xi x}\} d\mu(x)$ où Q est un polynôme homogène du second degré fortement positif, L_u est une forme linéaire réelle, u une fonction réelle de \mathcal{D} telle que $u(0) = 1, \frac{\partial u}{\partial x_1}(0) = 0$ p une constante positive et μ une mesure positive sur \mathbb{R}_*^n telle que

$$\int_{|x| \leq 1} |x|^2 d\mu < \infty, \int_{|x| \geq 1} d\mu(x) < \infty$$

la fonction $-\psi$ est 1-conditionnellement de type positif donc $-\psi = \hat{D}$

où D est une distribution 1-conditionnellement positive, par suite

$$D = Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\delta + L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\delta - p\delta + Pf(d\mu)$$

où Q est un polynôme homogène du second degré fortement positif

L est une forme linéaire

p une constante

$d\mu$ une mesure positive sur \mathbb{R}_*^n telle que $\int_{|x| \leq 1} |x|^2 d\mu(x) < \infty$

D peut se mettre sous la forme $D = D_1 + d\mu_2$ où D_1 est à support compact voisinage de 0, $d\mu_2$ est une mesure positive à support dans R^n $\hat{D} = -\psi = \hat{D}_1 + \hat{\mu}_2$

D_1 étant à support compact, \hat{D}_1 est une fonction continue donc $\hat{\mu}_2$ est une fonction continue donc $d\mu_2$ est une mesure bornée et $\int_{|x| > 1} d\mu(x) < +\infty$.

On peut écrire

$$\int f D = Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)f(0) + L_u\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)f(0) - pf(0) + \int \left\{ f(x) - f(0) - \sum_{\alpha=1}^n x_\alpha \frac{f'_\alpha(0)}{x_\alpha} u(x) \right\} d\mu(x)$$

où le facteur de convergence u est choisi ainsi : $u \in \mathcal{D}$ $u(0) = 1$ $\forall \alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}(0) = 0$.

La quantité sous le signe \int est $O(|x|^2)$ si $|x| \rightarrow 0$ donc l'intégrale converge. La forme L_u dépend du facteur de convergence u . On a $\psi(\xi) = Q(\xi) - iL_u(\xi) + p + \int (1 - i\xi x u(x) - e^{i\xi x}) d\mu(x)$

ψ possédant la symétrie hermitienne, L_u est une forme linéaire réelle. $u(x)$ est une fonction réelle. $\psi(0) = p$ donc $p \geq 0$.

Montrons que D est un laplacien généralisé.

Soit $f \in \mathcal{D}$ une fonction atteignant son maximum en 0. Toutes ses dérivées premières sont nulles à l'origine, toutes ses dérivées secondes sont négatives, car f est concave dans un voisinage de l'origine, de plus $f(0) \geq 0$. Tous les termes de $\int f D$ sont négatifs donc $\int f D \leq 0$.

Réciproquement tout laplacien généralisé est de cette forme.

Soit D un laplacien généralisé.

Soit P un polynôme homogène du premier degré. $g \in \mathcal{D}^+$ $-|P|^2 g \in \mathcal{D}$ et atteint son maximum en 0 donc $\int -|P|^2 g D \leq 0$ et la distribution $|P|^2 D$ est positive, D est donc 1-conditionnellement positive et l'on peut écrire

$$\int f D = Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)f(0) + L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)f(0) - p f(0) + \int \left\{ f(x) - f(0)v(x) - \sum_{\alpha=1}^n x_\alpha \frac{f'_\alpha(0)}{x_\alpha} u(x) \right\} d\mu(x)$$

où v et u sont des facteurs de convergence appropriés ($u(0) = v(0) = 1$ u, v réels $\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}(0) = \frac{\partial v}{\partial x_\alpha}(0) = 0$).

Soit $f_0 \in \mathcal{D}^+$ telle que $0 \leq f_0(x) \leq f_0(0) = 1$ $\text{supp } f_0 \subset \{|x| \leq 1\}$ $f \in \mathcal{D}^+$ $\text{supp } f \subset \{|x| > 1\}$ $m = \sup f(x)$

$\int (m f_0 + f) D \leq 0$ car $m f_0 + f$ atteint son maximum à l'origine et $\int f d\mu = \int f D \leq - \int m f_0 D$
 par conséquent $\mu(\{|x| \geq 1\}) \leq - \int_0^1 f_0 D$ et le facteur de convergence V est inutile.

Si l'on approche 1 par des fonctions de \mathcal{D} atteignant leur maximum au point 0 on obtient $p \geq 0$.

Si l'on prend pour f une fonction réelle, on voit que la forme L doit être réelle.

Ainsi les fonctions définies négatives et les laplaciens généralisés se correspondent bijectivement.

Si ψ est définie négative, $\{P_t\}_{t \geq 0}$ avec $\hat{P}_t = e^{-t\psi}$ est un semi-groupe sous-Markovien et $\hat{D} = -\psi = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\hat{P}_t - 1}{t}$ $D = \left. \frac{dP_t}{dt} \right|_{t=0}$ on a formellement $P_t = e^{tD}$

D est le générateur infinitésimal du semi-groupe P_t .

Exemple. - Prenons pour D le laplacien ordinaire

$$e^{t\Delta} = \frac{1}{(2\pi t)^{1/2n}} e^{-\frac{x^2}{4t}} dx$$

en effet $\psi(x) = |x|^2$ et $\mathcal{F}^{-1}(e^{-t(x)^2}) = \frac{1}{(2\pi t)^{1/2n}} e^{-\frac{\sqrt{n}}{4t}}$

Prenons en dimension 1 $D = \frac{d}{dx}$

$$P_t = e^{t \frac{d}{dx}} \quad \int f P_t = e^{t \frac{d}{dx}} f(x) \Big|_{x=0} = \sum_{m \geq 0} \frac{t^m f^{(m)}(0)}{m!} = f(t).$$

On obtient le semi-groupe des translations à droite.

APPLICATIONS.— Soit ψ une fonction définie négative réelle. On a vu que $\psi(0) \geq 0$

et $\psi(x) \geq \psi(0) \forall x$. En appliquant la formule de Lévy-Khintchine réduite à sa partie réelle,

on trouve :

$$\psi(\xi) = Q(\xi) + p + \int (1 - \cos \xi x) d\mu(x)$$

où Q est un polynôme quadratique, p une constante positive, et μ une mesure vérifiant

$\int \frac{|x|^2}{1+|x|^2} d\mu(x) < \infty$, c'est à dire que $|x|^2 d\mu(x)$ est sommable au voisinage de 0 et $d\mu(x)$ au voisinage de l'infini.

Choisissons les coordonnées de manière que $Q(\xi) = \sum c_\alpha^2 \xi_\alpha^2$. On peut alors écrire, f

étant donnée

$$\int |\hat{f}(\xi)|^2 \psi(\xi) d\xi = \int \sum |c_\alpha \xi_\alpha \hat{f}(\xi)|^2 d\xi + p \int |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi + 2 \int |\hat{f}(\xi)| \sin \frac{\xi x}{2} d\mu(x) d\xi$$

en remplaçant $1 - \cos \xi x$ par $2 \sin^2 \frac{\xi x}{2}$.

Mais $\hat{f}(\xi) e^{i \frac{\xi x}{2}} = \widehat{f(y - \frac{x}{2})}$, donc, si l'on pose $f^\alpha = \frac{\partial f}{\partial \xi_\alpha}$, la formule de Plancherel

appliquée aux trois termes du second membre donne :

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int |\hat{f}(\xi)|^2 \psi(\xi) d\xi = \sum_\alpha \int |c_\alpha f^\alpha(x)|^2 dx + p \int |f(x)|^2 dx + \frac{1}{2} \int |f(y + \frac{x}{2}) - f(y - \frac{x}{2})|^2 d\mu(x) dy.$$

Si cette expression est finie et si $\frac{1}{\psi}$ est intégrable, alors $\hat{f} \in L^1$ car, d'après la

formule de Schwartz, $(\int |\hat{f}(\xi)| d\xi)^2 \leq \int |\hat{f}(\xi)|^2 \psi(\xi) d\xi \int \frac{d\xi}{\psi(\xi)}$.

Remarquons d'ailleurs que si $n > 1$, ce résultat n'a aucun intérêt car $\frac{1}{\psi}$ n'est jamais

sommable, puisque $\psi = O(|x|^2)$. Mais l'expression, mise sous cette forme, a un autre

avantage : elle se prête à l'application des contractions normales. On sait que g est

dite contraction normale de f si, $\forall x, y$ on a

$$|g(x)| \leq |f(x)| \quad \text{et} \quad |g(x) - g(y)| \leq |f(x) - f(y)|.$$

Par conséquent si $\int |\hat{f}| \psi d\xi$ est finie, $\int |\hat{g}| \psi d\xi$ l'est aussi pour toute contraction

normale de f . Beurling a ainsi montré que si $L^2(\psi)$ est l'ensemble des fonctions h telles

que $\int |h|^2 \psi dx < \infty$, les contractions normales opéraient sur $\mathcal{F} L^2(\psi)$.

SYNTHÈSE SPECTRALE.

Introduction. Soient deux espaces \mathcal{A} et \mathcal{B} tels que

$$\mathcal{M}_c \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{D}' \quad \text{et} \quad \mathcal{D} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{C}$$

appelant \mathcal{M}_c l'espace des mesures à support compact.

Étant données une distribution $T \in \mathcal{B}$ à support dans un compact K , et une fonction $f \in \mathcal{A}$ nulle sur K , on cherche si $\int fT = 0$. Si T est positive, c'est une mesure à support dans K et on a bien $\int fT = 0$. Le problème revient donc à chercher si $\mathcal{B}^+(K)$ est total dans $\mathcal{B}(K)$, en notant $\mathcal{B}(K)$ l'ensemble des éléments de \mathcal{B} à support dans K .

Soient donc \mathcal{A} un espace hilbertien, \mathcal{B} son dual. On a les deux isomorphismes

$$\begin{aligned} E : \mathcal{B} &\longrightarrow \mathcal{A} & \text{tel que} & \quad \langle S, T \rangle = \int (\overline{ET})S \\ D : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{B} & \text{tel que} & \quad \langle f, g \rangle = - \int f \overline{Dg} \end{aligned}$$

D s'appelle le laplacien de f , ET s'appelle le potentiel de T .

Balayage. L'ensemble $\mathcal{B}(K) = \{T \in \mathcal{B} ; \text{Supp} T \subset K\}$, pour K compact, est un sous-espace fermé d'un Hilbert ; on sait qu'on a dans ces conditions une projection sur $\mathcal{B}(K)$.

La projection T_K de T sur $\mathcal{B}(K)$ s'appelle balayé de T .

Théorème. Si le balayé d'une mesure positive est encore positif, alors il y a synthèse spectrale.

En effet, soit $S \in \mathcal{B}(K)$ tel que $\langle S, Q \rangle = 0 \quad \forall Q \in \mathcal{B}^+(K)$. Il faut en déduire que $S = 0$, ce qui montrera bien que $\mathcal{B}^+(K)$ est total dans $\mathcal{B}(K)$.

Or $\forall T \in \mathcal{B}^+, T_K \in \mathcal{B}^+(K)$ puisque par hypothèse le balayé d'une mesure positive est positif. Donc $\forall T \in \mathcal{B}^+, \langle S, T_K \rangle = 0$. Mais par définition même du balayé, $\langle S, T_K \rangle = \langle S, T \rangle$ car $S \in \mathcal{B}(K)$. Donc, $\forall T \in \mathcal{B}^+, \langle S, T \rangle = 0$. Mais \mathcal{B}^+ est total dans l'espace entier, donc $S = 0$. C.Q.F.D.

On a donc ici une condition suffisante pour que la synthèse spectrale soit possible.

On peut alors chercher dans quelles hypothèses cette condition est réalisée. Nous allons pour

cela introduire une nouvelle notion.

Définition. Un élément $f \in \mathcal{A}$ sera dit surharmonique si son image Df dans \mathcal{B} est une distribution négative.

Hypothèse H. Nous allons supposer maintenant que la borne inférieure de deux éléments surharmoniques est encore surharmonique. Alors :

Théorème. Moyennant l'hypothèse H, le balayé d'une mesure positive est encore une mesure positive.

Donc l'hypothèse H entraînera la synthèse spectrale.

Pour la démonstration, nous allons supposer de plus que \mathcal{D} est dense dans \mathcal{A} et que les éléments de \mathcal{D} sont des multiplicateurs pour \mathcal{A} .

Notons, pour $T \in \mathcal{B}^+$:

$$T_K = \text{projection de } T \text{ sur } \mathcal{B}(K)$$

$$T_K^* = \text{projection de } T \text{ sur } \mathcal{B}^+(K).$$

La démonstration va consister à montrer que $T_K = T_K^*$; comme T_K^* est positive, ceci montrera bien que le balayé T d'une mesure positive T est encore positif.

Nous allons montrer cela en trois étapes.

a) Le potentiel de T_K^* est partout inférieur à celui de T , et il y a égalité sur K .

Remarquons d'abord que $D\circ E = -id$, donc le potentiel d'une mesure positive μ un laplacien égal à l'opposé de cette mesure, et par suite ce potentiel est surharmonique.

Posons alors $u = \inf(ET, ET_K^*)$. D'après l'hypothèse H, u est surharmonique : il existe $U \in \mathcal{B}^+$ tel que $u = EU$. Or $\forall Q \in \mathcal{B}^+(K)$, $\langle T, Q \rangle \leq \langle T_K^*, Q \rangle$ par la propriété fondamentale de la projection, donc $ET \leq ET_K^*$ sur K . Par suite, $EU \leq ET_K^*$ partout, et $EU = ET$ sur K . Sur le support de T_K^* , on a $ET = ET_K^*$ puisque, toujours d'après les propriétés de la projection, $\langle T, T_K^* \rangle = \langle T_K^*, T_K^* \rangle$, et $ET \leq ET_K^*$ sur K .

Des lors

$$\langle U, U \rangle \leq \langle U, T_K^* \rangle \text{ car } EU \leq ET_K^*$$

$$\langle T_K^*, T_K^* \rangle = \langle U, T_K^* \rangle \text{ car } EU = ET = ET_K^* \text{ sur le support de } T_K^*.$$

T_K^*

Donc $\langle U - T_K^*, U - T_K^* \rangle = \langle U, U \rangle + \langle T_K^*, T_K^* \rangle - 2 \langle U, T_K^* \rangle \leq 0$; donc $= 0$, et par suite $U = T_K^*$, d'où il résulte bien $ET_K^* \leq ET$.

D'autre part on a vu que $EU = ET$ sur K , donc $ET^* = ET_K^*$ sur K .

b) Nous allons montrer à présent que si $f \in \mathcal{A}$ est nulle sur un voisinage de K et $S \in \mathcal{B}(K)$, alors $\int fS = 0$.

Or \mathcal{D} est dense dans \mathcal{A} , donc \exists une suite $\varphi_n \in \mathcal{D}$ qui tend vers f dans \mathcal{A} . Soit une fonction ψ de \mathcal{D} , égale à 1 sur un voisinage de K et nulle aux points où f est $\neq 0$; ψ existe car f est nulle sur un voisinage de K . La suite $\varphi_n - \psi \varphi_n$ converge vers f car les éléments de \mathcal{D} sont des multiplicateurs pour \mathcal{A} .

Mais $\int \varphi_n (1 - \psi) S = 0$ car les $\varphi_n (1 - \psi)$ sont nuls dans un voisinage du support de S . On fait alors tendre n vers l'infini, et à la limite on a bien $\int fS = 0$.

c) Soit alors une suite décroissante de voisinages compacts K_n de K tels que K_n soit voisinage de K_{n+1} , et posons $T_n = T_{K_n}^*$. D'après une propriété des projections sur une suite décroissante de fermés d'intersection non vide, T_n , projection de T sur $\mathcal{B}^+(K_n)$, tend vers T_K^* , projection de T sur $\mathcal{B}^+(K) = \bigcap_n \mathcal{B}^+(K_n)$. Or on a bien sûr $ET_n = ET$ sur K_n , d'après la première partie. Si $S \in \mathcal{B}(K)$, $\langle S, T - T_n \rangle = \int (ET - ET_n) S = 0$ puisque $ET - ET_n$ est nul sur K_n voisinage de K ; il suffit d'appliquer le résultat de la seconde partie de la démonstration.

Donc $\forall S \in \mathcal{B}(K)$, $\langle S, T \rangle = \langle S, T_n \rangle$, donc à la limite $\forall S \in \mathcal{B}(K)$, $\langle S, T \rangle = \langle S, T_K^* \rangle$.

Ceci est une propriété caractéristique de la projection sur le sous-espace $\mathcal{B}(K)$.

Par suite $T_K = T_K^*$, et le balayé T_K de la mesure positive T est positif.

APPLICATION. Soit ψ une fonction définie négative réelle telle que $\int \frac{dx}{\psi(x)} < \infty$.

On pose

$$\mathcal{B} = \{f \in \mathcal{D}' \mid \int |\hat{T}|^2 \frac{dx}{\psi} < \infty\}$$

$$\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{E} \mid \int |\hat{f}|^2 \psi dx < \infty\}.$$

Ce sont bien des espaces de Hilbert en dualité.

On a $\hat{D}f = -\hat{f}\psi$, donc $\hat{D} = -\psi$

$$\hat{E}T = \frac{1}{\psi} \hat{T}.$$

On montre que \mathcal{D} est dense dans \mathcal{A} et est multiplicateur. Vérifions l'hypothèse H.

Soit le semi-groupe sous-markovien $P_t = e^{tD}$. On va montrer que

$$f \text{ sur harmonique} \iff \forall x, f(x) \gg \int f(x-y)P_t(y).$$

L'hypothèse H se déduira alors de la relation évidente :

$$\inf \left(\int f P_t, \int g P_t \right) \gg \int (\inf f, g) P_t.$$

Faisons donc $f_t(x) = \int f(x-y)P_t(y)$. On a

$$\frac{d}{dt} f_t(x) = \frac{d}{dt} e^{tD} f = D f_t = \int (Df) P_t \leq 0 \text{ car } f \text{ est surharmonique.}$$

Donc on a bien $f_t(x) \leq f_0(x)$, soit

$$f(x) \gg \int f(x-y)P_t(y).$$

Réciproquement, supposons $f - e^{tD} f \gg 0$. Il suffit de diviser par t et de faire tendre t vers 0, d'où $-Df \gg 0$ et f est surharmonique. On a donc bien la synthèse spectrale.

$$f = 0 \text{ sur le support de } T \implies \int \hat{T}(x-y)\hat{f}(y)dy = 0.$$

Notons que l'hypothèse $\int \frac{dx}{\psi} < \infty$ était fondamentale, car sinon \mathcal{B} ne contient plus les mesures à support compact et $\mathcal{B}^+(K)$ peut être vide, par exemple si K est réduit à un point.

CHAPITRE IV

DISTRIBUTIONS INVARIANTES PAR ROTATION

Considérons l'application

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^+) \quad \text{où } \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[\text{ et } \mathcal{D}(\mathbb{R}^+) = \text{espace des fonctions à}$$

support compact et indéfiniment dérivables dans $]0, +\infty[$; possédant en outre une infinité

de dérivées "à droite" en 0 ; définie par $f \longrightarrow \int f \omega_s \quad 0 \leq s < \infty$

ω_s est la mesure uniforme de masse totale 1 sur la sphère de rayon $\sqrt{2s}$.

Théorème 1. - L'application $f \longrightarrow \int f \omega_s$ est une surjection continue de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$.

Démonstration. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$ on pose $f(x) = \varphi(\frac{1}{2} \|x\|^2)$ alors $\int f \omega_s = \varphi(s)$ avec $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. La continuité se déduit du fait que l'on intègre sur un compact.

Remarque. - La construction explicite d'une f dont φ est l'image prouve même qu'étant donné un compact K de \mathbb{R}^+ il lui correspond un compact K' de \mathbb{R}^n tel que l'application $f \longrightarrow \int f \omega_s$ soit une surjection de $\mathcal{D}_{K'}(\mathbb{R}^n)$ sur $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^+)$. Se souvenant alors de ce que la topologie de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est la topologie limite inductive des topologies des $\mathcal{D}_{K'}(\mathbb{R}^n)$ et de même pour $\mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$, on en déduit que l'application $f \longrightarrow \int f \omega_s$ est ouverte.

fin de la démonstration. Pour prouver la continuité de l'application $f \longrightarrow \varphi(s) = \int f \omega_s$ nous allons montrer que les dérivées d'ordre inférieur ou égal à N de $\varphi(s)$ sont dominées par les bornes des dérivées d'ordre inférieur ou égal à $2N$ de f .

On se donne $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$ identique à 1 dans un voisinage de l'origine ; et on pose $f = f_{2N} \psi + g$ où $g \in \mathcal{O}^{2N}$ et f_{2N} est le début du développement de Taylor de f

$\frac{d}{ds} \int g \omega_s = \int \frac{1}{2s} (Hg) \omega_s$ où $H = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. En effet $\|x\|^2 = 2s$ et $\sum_{i=1}^n x_i dx_i = ds$ et $\frac{\partial}{\partial s} x_i = \frac{x_i}{2s}$. Donc les dérivées d'ordre inférieur ou égal à N de $\int g \omega_s$ sont nulles à l'origine.

$\int f_{2N} \psi \cdot \omega_s = P(s) \cdot \psi(s)$ où P est un polynôme de degré inférieur à N en s . Les opérations $f \longrightarrow f_{2N} \psi$ et $f_{2N} \psi \longrightarrow P(s) \psi(s)$ sont continues ; d'où les dérivées

d'ordre inférieur ou égal à $2N$ de f dominant donc les dérivées d'ordre inférieur ou égal à N de $P(s), \psi(s)$. Il en est de même pour g et sa transformée.

Ainsi $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) / \pi^{-1}(0) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$ passant aux distributions :

$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^+) \xrightarrow{\sim} [\pi^{-1}(0)]^\perp$. Nous sommes amenés à rechercher le noyau de cette transformation

$$\pi : f \rightarrow \int f \omega_s.$$

Préliminaire : Etude pour $n = 2$.

$$f \rightarrow \int_0^{2\pi} f(\sqrt{2s}, \theta) \frac{d\theta}{2\pi}$$

on pourrait songer à poser $f = \frac{\partial g}{\partial \theta}$ où $g = \int_0^\theta f(\sqrt{2s}, \theta) d\theta$ mais il n'est pas vrai en général que g provienne d'une fonction de (x_1, x_2) . Supposons que $f \in \pi^{-1}(0)$:

$$\int_0^{2\pi} f(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta, -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta) d\theta = 0$$

posons $g^*(x, \theta) = \int_0^\theta f(x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi, -x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi) d\varphi$

posons $x^\theta = \theta^{-1} \cdot x$ (θ^{-1} rotation d'angle $(-\theta)$.)

$$f(x^\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} g^*(x, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^{2\pi} g^*(x^\alpha, \theta - \alpha) \frac{d\alpha}{2\pi} = \frac{\partial}{\partial \theta} g(x, \theta).$$

Donc si $\int f \omega_s = 0$ il existe $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ tel que $f = \frac{\partial g}{\partial \theta} = x_1 \frac{\partial g}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial g}{\partial x_1}$.

Remarque.- On utilise surtout le fait que le cercle est un groupe possédant une mesure invariante par translation.

Généralisation :

Nous remplacerons le cercle (groupe des complexes de module 1) par le groupe $SO(n)$ des matrices orthogonales de déterminant +1. Rappelons que toute matrice de $SO(n)$ assez proche de l'unité est une e^S où S est antisymétrique. On le retrouve en partant de $\theta \cdot \theta^T = I$, $d\theta \cdot \theta^T + \theta \cdot d\theta^T = 0$ soit θ étant proche de I $d\theta + \theta^T(d\theta) = 0$ et on peut écrire θ sous la forme $\theta \simeq I + S$

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ -\lambda_{12} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{n-1,n} \\ & & & & -\lambda_{n-1,n} \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Donc si $f \in \mathcal{K}^{-1}(0)$, $f(x^\theta)$ en tant que fonction des λ est d'intégrale nulle, donc

c'est une divergence $f = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial}{\partial \lambda_{ij}} g_{ij}$.

Mais $\frac{\partial g(x^\theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=I} = \frac{\partial g}{\partial x_1} \frac{\partial x_1^\theta}{\partial \theta} \Big|_{\theta=I} + \frac{\partial g}{\partial x_2} \frac{\partial x_2^\theta}{\partial \theta} \Big|_{\theta=I} + \dots$ et

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_{ij}} g = \sum_k \frac{\partial g}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k^\theta}{\partial \lambda_{ij}} = x_i \frac{\partial g}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

car $x_1^\theta = x_1 - \lambda_{12} x_2 \dots$

$x_2^\theta = \lambda_{12} x_1 + x_2 \dots$

Donc si f vérifie $\int f \omega_s = 0$ alors f est une divergence, et nous conduit à énoncer le théorème suivant :

Théorème 2. - Une condition nécessaire et suffisante pour que f appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ vérifie $\int f \omega_s = 0$ est que f s'exprime sous la forme

$$f = \sum_{1 \leq i < j \leq n} L_{ij} g_{ij}$$

où g_{ij} appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Avant de démontrer ce théorème donnons-en deux corollaires :

Corollaire 1. - Le noyau de $f \rightarrow \int f \omega_s$ est l'ensemble des divergences généralisées.

Corollaire 2. - $T \rightarrow \omega_s \cdot T$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ sur l'ensemble

$$\{S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) : L_{ij} S = 0 \quad \forall 1 \leq i < j \leq n\}.$$

En effet $\int (L_{ij} g) \cdot S = 0 = - \int g (L_{ij} S) = 0$.

Démonstration du théorème 2. Nous allons rappeler le

Théorème A. - Pour que $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ s'exprime sous la forme $f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial x_i}$ où $g_i \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

il faut et il suffit que $\int f(x) dx = 0$.

Corollaire. - Si D est un pavé $D = \{x : |x^i - x_0^i| < \epsilon_1\}$ et $\text{supp } f \subset D$ alors on peut choisir les g_i tels que $\text{supp } g_i \subset D$.

Si f dépend C^∞ de certains paramètres alors on peut choisir des g_i fonctions C^∞ de ces paramètres.

Théorème B.— Soit G une variété C^∞ connexe à m dimensions, soit X un espace localement compact C^∞ ; on note $\mathcal{D}\Omega^k(G, X)$ les formes différentielles de degré k sur G dont les coefficients sont des éléments de $\mathcal{D}(G \times X)$. Pour que $w \in \mathcal{D}\Omega^m(G, X)$ s'exprime comme $w = dv$, $v \in \mathcal{D}\Omega^{m-1}(G, X)$ il faut et suffit que $\int_G w = 0$.

Par exemple $G = SO(n)$ $X = \mathbb{R}^n$, si $\theta \in SO(n)$ $\theta^{-1}.d\theta$ est une forme différentielle qui se décompose sur la base $(\theta^{-1}d\theta)_{ij}$ ($i < j$) de formes différentielles.

Démonstration du théorème B.— Soit \mathcal{C} l'ensemble des ouverts connexes U de G où l'énoncé est valable pour tout w dont le support est contenu dans U . Chaque rectangle appartient à \mathcal{C} d'après le théorème A. D'autre part \mathcal{C} est inductif, les ouverts U étant rangés par inclusion. Donc d'après Zorn \mathcal{C} possède des éléments maximaux. Soit H un élément maximal de \mathcal{C} , nous allons montrer qu'il est fermé non vide.

Supposons H non fermé, il existe alors D rectangle tel que $D \not\subset H$ et $D \cap H \neq \emptyset$; soit $w \in \mathcal{D}\Omega^m(G, X)$, $\text{supp } w \subset D \cup H$ et $\int_G w = 0$. On introduit alors $\varphi \in \mathcal{D}(D)$ $\varphi = 1$ au voisinage de $\text{supp } w \cap D \cap H$ et $z \in \mathcal{D}\Omega^m(D)$ $\int z = 1$. On introduit aussi $\psi \in \mathcal{D}(X)$ à support compact et $\psi = 1$ sur le support de w dans X .

On pose $w_1 = \varphi w - \psi \left(\int \varphi w \right) z$
 $w_2 = (1 - \varphi)w - \psi \left(\int (1 - \varphi)w \right) z$
 w_1 a son support dans D et $\int_D w_1 = 0$
 w_2 dans H $\int_H w_2 = 0$
 par hypothèse $w_1 = dv_1$ et $w = dv$.

Théorème C.— On suppose de plus que G est un groupe de Lie. Soit $\Lambda_1 \dots \Lambda_m$ une base pour les générateurs infinitésimaux à gauche de G . Alors une condition nécessaire et suffisante pour que $f \in \mathcal{D}(G \times X)$ s'exprime sous la forme $f = \sum \Lambda_\alpha . g_\alpha$ est que $\int f \eta (d\theta) = 0$ où η est la mesure de Haar invariante à gauche sur G .

Démonstration. On applique le théorème B à $v = f \cdot \eta$ alors $v = dv$ et on pose

$$g_1 = v(\Lambda_2 \dots \Lambda_m)$$

$$g_2 = -v(\Lambda_1 \Lambda_3 \dots \Lambda_m)$$

$$g_\alpha = (-1)^\alpha v(\Lambda_1 \dots \Lambda_{\alpha-1} \Lambda_{\alpha+1} \dots \Lambda_m)$$

Remarque. L'existence d'un champ de vecteurs non nuls sur un groupe de Lie est essentiel.

Théorème D.— Soit G un groupe de Lie compact qui opère C^∞ sur un espace C^∞ localement compact X . Soit $L_1 \dots L_m$ les opérateurs de dérivation sur X induits par $\Lambda_1 \dots \Lambda_m$. Pour que $f \in \mathcal{D}(X)$ s'exprime sous la forme $f = \sum L_\alpha g_\alpha$ où $g_\alpha \in \mathcal{D}(X)$ il faut et il suffit que $\int_G f(x^\theta) \eta(d\theta) = 0$ pour tout $x \in X$.

Définition de l'opérateur induit :

$$L_\alpha f(x) = \Lambda_\alpha f(x^\theta) \Big|_{\theta=Id}$$

Exemple $\theta \in SO(n)$

$$\Lambda_{12} = \frac{\partial}{\partial \theta_{12}} \text{ à l'origine}$$

$$\frac{\partial \theta_{j1}}{\partial \theta_{12}} = \begin{cases} 1 & j=1 \quad i=2 \\ -1 & j=2 \quad i=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_{12}} f(\theta^{-1}x) = \sum \frac{\partial(\theta^{-1}x)_i}{\partial \theta_{12}} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\theta=Id}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_{12}} f(\theta^{-1}x) = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

Démonstration. On applique le théorème C.

On pose $f^*(\theta, x) = f(x^\theta)$ $\int f^*(\theta, x) \eta(d\theta) = 0$ donc $f^*(\theta, x) = \sum \Lambda_\alpha \tilde{g}_\alpha(\theta, x)$

où chaque $\tilde{g}_\alpha \in \mathcal{D}(G \times X)$

$$f^*(\theta, x) = \int_G f^*(\varphi^{-1}\theta, x^\varphi) \eta(d\varphi) \text{ avec } \int_G \eta(d\varphi) = 1 \text{ en effet}$$

on a $\int_G f^*(\varphi^{-1}, (x^\theta)^\varphi) \eta(d\varphi)$ où $\varphi = \theta^{-1}\psi$ et $f^*(\varphi^{-1}, (x^\theta)^\varphi) = f(x^\theta)$.

On a aussi utilisé l'invariance par translation de la mesure $\eta(d\theta^{-1}\varphi) = \eta(d\varphi)$ pour

θ fixe. Donc $f^*(\theta, x) = \int_G f^*(\varphi^{-1}\theta, x^\varphi) \eta(d\varphi)$

$$f^*(\theta, x) = \int_G \sum_{\alpha} \Lambda_{\alpha}^{(\varphi^{-1}\theta)} \tilde{g}_{\alpha}(\varphi^{-1}\theta, x^{\varphi}) \eta(d\varphi)$$

mais Λ_{α} est un opérateur invariant par translation à gauche $\Lambda_{\alpha}^{(\varphi^{-1}\theta)} = \Lambda_{\alpha}^{(\theta)}$ soit

$$f^*(\theta, x) = \int_G \sum_{\alpha} \Lambda_{\alpha}^{(\theta)} \tilde{g}_{\alpha}(\varphi^{-1}\theta, x^{\varphi}) \eta(d\varphi).$$

Comme l'intégration est prise sur un compact on échange les sommations

$$f^*(\theta, x) = \sum_{\alpha} \Lambda_{\alpha}^{(\theta)} \int_G \tilde{g}_{\alpha}(\varphi^{-1}\theta, x^{\varphi}) \eta(d\varphi) = \sum_{\alpha} \Lambda_{\alpha}^{(\theta)} g_{\alpha}^*(\theta, x)$$

posons $g_{\alpha}(x) = g_{\alpha}^*(\text{Id}, x)$ on a $g_{\alpha}^*(\theta, x) = g_{\alpha}(x^{\theta})$ ce qui est légitime car

$g^*(\varphi^{-1}\theta, x^{\varphi}) = g^*(\theta, x)$. Donc $f(x^{\theta}) = \sum_{\alpha} \Lambda_{\alpha}^{(\theta)} g_{\alpha}(x^{\theta})$ et

$$f(x) = \sum_{\alpha} \Lambda_{\alpha}^{(\theta)} g_{\alpha}(x^{\theta}) \Big|_{\theta=\text{Id}} = \sum_{\alpha} L_{\alpha} g_{\alpha}(x).$$



CHAPITRE V

Transformation de Hankel

§ 1. Intégrale de Riemann-Liouville.

Définition. q étant un entier positif ou nul, $\delta^{(q)}$ désigne la dérivée q -ième de la mesure de Dirac à l'origine. Pour q réel et différent de tout entier positif ou nul, on définit la distribution $\delta^{(q)}$ de $\mathcal{F}'(\mathbb{R}^+)$ par la relation

$$(I) \quad \int f \delta^{(q)} = \int_0^{\infty} [f(s) - f_Q(s)] s^{-q-1} \frac{ds}{\Gamma(-q)}$$

où l'on a posé, pour $f \in \mathcal{F}'(\mathbb{R}^+)$:

$Q =$ partie entière de q ;

$$f_Q(s) = \sum_{k=0}^Q f^{(k)}(0) \frac{s^k}{k!} \quad \text{si } Q \geq 0 ; \quad f_Q = 0 \quad \text{si } Q < 0.$$

Par exemple, $\delta^{(-1)}$ est la distribution de Heaviside définie par : $\int f \delta^{(-1)} = \int_0^{\infty} f(s) ds.$

Lemme. $\forall q \in \mathbb{R} \quad \frac{d}{ds} \delta^{(q)} = \delta^{(q+1)}.$

Démonstration. Il suffit de vérifier

a) que cette relation est vraie quand q et $q+1$ ne sont pas des entiers positifs :

$$\int f \frac{d}{ds} \delta^{(q)} = - \int f'(s) \delta^{(q)} = - \int_0^{+\infty} \frac{d}{ds} [f(s) - f_{Q+1}(s)] s^{-q-1} \frac{ds}{\Gamma(-q)}.$$

soit en intégrant par parties

$$\int f \frac{d}{ds} \delta^{(q)} = \int_0^{+\infty} [f(s) - f_{Q+1}(s)] \frac{d(s^{-q-1})}{\Gamma(-q)}$$

$$\int f \frac{d}{ds} \delta^{(q)} = \int_0^{+\infty} [f(s) - f_{Q+1}(s)] s^{-q-2} \frac{ds}{\Gamma(-q-1)}$$

b) que $\frac{d}{ds} \delta^{(-1)} = \delta.$

$$\text{Or } \int f \frac{d}{ds} \delta^{(-1)} = - \int f' \delta^{(-1)} = - \int_0^{+\infty} f'(s) ds = f(0).$$

Théorème 1. L'application $q \rightarrow \delta^{(q)}$ est dérivable.

Démonstration. D'après le théorème de Banach-Steinhaus, il suffit de montrer que

$\forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^+)$ la fonction numérique $q \rightarrow \int f \delta^{(q)}$ est dérivable.

a) Si q n'est pas un entier positif, on peut dériver (I) sous le signe somme

b) Dérivabilité de $\delta^{(q)}$ en $q = N$, N entier positif.

Soit w une fonction à variation bornée sur $[0, +\infty[$ telle que $w(0) = 1$,

$$\int_0^1 |(1-w(s)) \frac{ds}{s}| < +\infty; \quad \int_1^{\infty} |w(s)| \frac{ds}{s} < +\infty.$$

De ces hypothèses résulte que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \log s \, dw(s)$ existe.

Posons $c(w) = \int_0^{+\infty} \log s \, dw(s)$. On définit $\delta^{(N+)} \in \mathcal{F}'(\mathbb{R}^+)$ par la relation

$$(-1)^N \int f \delta^{(N+)} = c(w) f^{(N)}(0) - \int_0^{\infty} \left\{ N! [f(s) - f_{N-1}(s)] - f^{(N)}(0) s^N w(s) \right\} s^{-N-1} ds.$$

Une intégration par parties montre que $\delta^{(N+)}$ ne dépend pas du choix de la fonction

satisfaisant aux hypothèses ci-dessus. Nous choisirons désormais la fonction w définie

$$w(s) = 1 \text{ si } s \leq 1; \quad w(s) = 0 \text{ si } s > 1.$$

Lemme 2. $\left\{ \frac{d}{dq} \delta^{(q)} \right\}_{q=N} = \delta^{(N+)}$.

Quand q tend vers N , $\Gamma(-q)$ tend vers l'infini. D'après la formule des compléments

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \text{ on a :}$$

$$\Gamma(-N-\epsilon) = \frac{(-1)^{N+1}}{N! \epsilon} + O(1)$$

d'où $\frac{1}{\Gamma(-N-\epsilon)} = (-1)^{N+1} N! \epsilon + O(\epsilon^2)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon} \left\{ \int f \delta^{(N+\epsilon)} - \int f \delta^{(N)} \right\} \text{ est donc équivalent à} \\ - \frac{1}{\epsilon} f^{(N)}(0) - \int_0^{\infty} N! \left\{ f(s) - f_N(s) \right\} s^{-N-\epsilon-1} ds \end{aligned}$$

ϵ tendant vers zéro par valeurs positives.

On a donc

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^N}{\epsilon} \left\{ \int f \delta^{(N+\epsilon)} - \int f \delta^{(N)} \right\} &= - f^{(N)}(0) \int_1^{\infty} s^{-\epsilon-1} ds - \int_0^1 N! \left\{ f(s) - f_N(s) \right\} s^{-N-\epsilon-1} ds \\ &\quad - \int_1^{\infty} \left\{ N! [f(s) - f_{N-1}(s)] - f^{(N)}(0) s^N \right\} s^{-N-\epsilon-1} ds \end{aligned}$$

second membre est bien égal à

$$- \int_0^{\infty} \left\{ N! [f(s) - f_{N-1}(s)] - f^{(N)}(0) s^N w(s) \right\} s^{-N-1-\epsilon} ds$$

$f(s)$ étant la fonction choisie précédemment. On a donc bien

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \frac{1}{\epsilon} \left(\int f \delta^{(N+\epsilon)} - \int f \delta^{(N)} \right) = \int f \delta^{(N+)}.$$

On démontre de même qu'il y a une dérivée à gauche égale à $\int f \delta^{(N+)}$, par un calcul analogue.

On remplaçant $\frac{f^{(N)}(0)}{\epsilon}$ par $f^{(N)}(0) \int_0^1 s^{-\epsilon-1} ds$.

Lemme 3. $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} \delta^{(q)}(s) = \lambda^q$ pour $\text{Re } \lambda > 0$. (détermination réelle pour λ réel)

Démonstration. C'est évident pour $q < 0$ d'après la définition de la fonction Γ ; la

propriété pour $q \gg 0$ en résulte par intégration par parties en appliquant le lemme 1.

Définition. Pour q réel, on pose

$$(-\partial)^q f(s) = \int f(s+t) \delta^{(q)}(t)$$

$(-\partial)^q$ est une application de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+)$ dans lui-même.

Théorème. $\forall q, (-\partial)^q$ définit un automorphisme de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+)$;

$$\forall q, r \quad (-\partial)^q (-\partial)^r = (-\partial)^{q+r}.$$

Démonstration. a) Pour N entier positif, on a

$$(-\partial)^N f(s) = (-1)^N f^{(N)}(s); \quad (-\partial)^N \text{ est bien continue. D'autre part}$$

pour $q < 0$, $(-\partial)^q f(s) = \int_s^{+\infty} f(t) \frac{(t-s)^{-q-1}}{\Gamma(-q)} dt$, ce qui définit encore une application

continue de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+)$ dans lui-même. D'après le lemme 1, pour N entier positif, q quelcon-

que $(-\partial)^q = (-\partial)^N (-\partial)^{q-N}$, ce qui montre que $(-\partial)^q$ est $\forall q$ une application continue

de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+)$ dans lui-même.

b) Démonstration de l'identité $(-\partial)^q (-\partial)^r = (-\partial)^{q+r}$, ces applications étant continues d'après a), il suffit de vérifier leur égalité sur une famille totale de fonctions de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+)$.

Lemme 4. Les fonctions $e^{-\lambda s}$ avec $\text{Re } \lambda > 0$ constituent une famille totale dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+)$.

Démonstration du lemme. Soit $T \in \mathcal{F}'(\mathbb{R}^+)$ telle que $\int e^{-\lambda s} T(s) = 0 \quad \forall \lambda$ tel que

$$\lambda = \xi + i\eta, \quad \xi > 0. \text{ On a alors}$$

$$\int e^{-i\eta s} e^{-\xi s} T(s) = 0 \quad \forall \eta \text{ soit } \mathcal{F}(e^{-\xi s} T(s)) = 0$$

soit $e^{-\xi s} T(s) = 0$ et enfin $T = 0$

(autrement dit, la transformation de Laplace dans $\mathcal{F}'(\mathbb{R}^+)$ est injective).

En vertu du lemme 2, $(-\partial)^q e^{-\lambda s} = \lambda^q e^{-\lambda s}$ donc $(-\partial)^q (-\partial)^r e^{-\lambda s} = (-\partial)^{q+r} e^{-\lambda s} = \lambda^{q+r} e^{-\lambda s}$ et d'après le lemme 3 $(-\partial)^q (-\partial)^r = (-\partial)^{q+r}$.

En particulier $(-\partial)^q (-\partial)^{-q} = (-\partial)^0 = \text{id}$, ce qui achève la démonstration.

Définition. On appelle ∂^q l'application de $\mathcal{F}'(\mathbb{R}^+)$ dans $\mathcal{F}'(\mathbb{R}^+)$ transposée de $(-\partial)^q \quad \forall f \in \mathcal{F} ; T \in \mathcal{F}' \quad \int (-\partial)^q f T = \int f \partial^q T$.

Si q est un entier positif, $\forall f \in \mathcal{F}$, on a : $(-\partial)^q f ds = \partial^q (f ds)$.

Corollaire. ∂^q est un automorphisme de $\mathcal{F}'(\mathbb{R}^+)$; $\forall q, r \quad \partial^{q+r} = \partial^q \partial^r$.

Application. Cherchons les distributions $S \in \mathcal{F}'$ que $\frac{dS}{ds} = T (T \in \mathcal{F}')$. Elles sont données par $S = \partial^{-1} T + c ds$.

§ 2. La fonction de Bessel.

Pour ν et t complexes, provisoirement $\operatorname{Re} \nu > -1$, on pose

$$\Delta_\nu(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\lambda t} e^{-t/\lambda} \lambda^{-\nu-1} d\lambda, \quad c > 0.$$

Cette somme converge, absolument pour $\operatorname{Re} \nu > 0$, et donne une fonction entière en t qui, si $\operatorname{Re} \nu > 0$, est bornée et tend vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$ par valeurs réelles. On voit aisément que

$$\frac{d}{dt} \Delta_\nu(t) = -\Delta_{\nu+1}(t), \quad \Delta_\nu(0) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}$$

Ainsi la formule

$$\Delta_{\nu-1}(t) = 1/\Gamma(\nu) - \int_0^t \Delta_\nu(s) ds$$

permet un prolongement de $\Delta_\nu(t)$ en fonction entière de ν . On obtient la série

$$\Delta_\nu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k! (\nu+k)!}$$

La fonction que l'on appelle d'habitude "fonction de Bessel" ou "fonction cylindrique" est

$J_\nu(x) = \Delta_\nu\left(\frac{1}{4} x^2\right) \left(\frac{1}{2} x\right)^\nu$, mais celle-ci est moins commode dans presque toutes les applications

Un changement de variables dans l'intégrale définissant Δ_ν donne

$$\Delta_\nu(st) s^\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\lambda s} e^{-t/\lambda} \lambda^{-\nu-1} d\lambda$$

qui n'est autre chose que l'inversion de la transformée de Laplace

$$\int_0^\infty e^{-\lambda s} \Delta_\nu(st) s^\nu ds = e^{-t/\lambda} \lambda^{-\nu-1}.$$

Il convient alors d'introduire le noyau-distribution

$$H_\nu(s; t) = \Delta_\nu(st) s^\nu ds$$

qui est en la variable s une distribution dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^+)$.

N.B. Ne pas confondre $H_\nu(s; t)$ avec la notation conventionnelle $H_\nu(x)$ pour la fonction de Hankel.

§ 3. Prolongement du noyau de Hankel.

Grâce à l'unicité de la transformée de Laplace on peut définir le noyau de Hankel

$H_\nu(s; t)$ quel que soit ν .

Théorème 2. Pour chaque ν complexe et chaque $t \geq 0$ il existe une distribution $H_\nu(\cdot; t) \in \mathcal{F}'(\mathbb{R}^+)$ telle que

$$\int_0^\infty e^{-\lambda s} H_\nu(s; t) ds = \lambda^{-\nu-1} e^{-t/\lambda}, \quad \operatorname{Re} \lambda > 0.$$

On a de plus, $\partial_s^q H_\nu(s; t) = H_{\nu-q}(s; t)$.

Remarque. L'énoncé reste valable pour chaque t complexe à provision d'écrire $H_\nu(\cdot; t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^+)$.

Démonstration. Si $\operatorname{Re} \nu > 0$ alors il n'y a rien à prouver. Or, pour chaque q , $\partial_s^q : \mathcal{F}'(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathcal{F}'(\mathbb{R}^+)$. La formule $\partial_s^q H_\nu(s; t) = H_{\nu-q}(s; t)$ est consistante si $\operatorname{Re} \nu > 0$, $\operatorname{Re} \nu - q > 0$. Elle sert alors pour prolonger H_ν en $\operatorname{Re} \nu \leq 0$ et on a, comme toujours,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\lambda s} H_{\nu-q}(s; t) ds &= \int_0^\infty e^{-\lambda s} \partial_s^q H_\nu(s; t) ds = \int_0^\infty \{(-\partial)^q e^{-\lambda s}\} H_\nu(s; t) ds \\ &= \lambda^q \int_0^\infty e^{-\lambda s} H_\nu(s; t) ds = \lambda^{-\nu+q-1} e^{-t/\lambda}. \end{aligned}$$

Lorsque $\operatorname{Re} \nu > -1$, $q < 0$ la formule $\partial_s^q H_\nu(s; t) = H_{\nu-q}(s; t)$ peut s'exprimer sous la forme

$$\int_0^s \Delta_\nu(rt) r^\nu (s-r)^{-q-1} dr / \Gamma(-q) = \Delta_{\nu-q}(st) s^{\nu-q}.$$

§ 4. L'opérateur D_ν .

Posons

$$D_\nu = s^{-\nu} \frac{d}{ds} s^{\nu+1} \frac{d}{ds} = s \frac{d^2}{ds^2} + (\nu+1) \frac{d}{ds}.$$

Si $\operatorname{Re} \nu > -1$ et $D_\nu f = g$ alors

$$f'(s) = s^{-\nu-1} \int_0^s g(t) t^\nu dt = -s^{-\nu-1} \int_s^\infty g(t) t^\nu dt.$$

Ainsi une majoration $|D_\nu f(s)| \leq c s^{-k}$ entraîne $|f'(s)| \leq c' s^{-k}$ d'où on voit

Lemme 5. La topologie de $\mathcal{F}'(\mathbb{R}^+)$ équivaut à celle donnée par la famille des normes

$$\|f\|_{j,k} = \sup |s^k D_\nu^j f(s)|.$$

Or, l'intérêt apporté ici par l'opérateur D_ν revient du

Lemme 6.

$$\int \{D_{\nu} f(s)\} H_{\nu}(s ; t) = -t \int f(s) H_{\nu}(s ; t)$$

$$D_{\nu}(t) \int f(s) H_{\nu}(s ; t) = - \int f(s) s H_{\nu}(s ; t).$$

Démonstration. On a

$$\int \{D_{\nu} f(s)\} H_{\nu}(s ; t) = \int \frac{d}{ds} (s^{\nu+1} \frac{df}{ds}) \Delta_{\nu}(st) ds$$

$$= - \int s^{\nu+1} \frac{df}{ds} \cdot \frac{d}{ds} \Delta_{\nu}(st) ds$$

$$= t \int s^{\nu+1} \frac{df}{ds} \Delta_{\nu+1}(st) ds = t \int f'(s) H_{\nu+1}(s ; t).$$

D'autre part, selon le théorème 2, $\frac{d}{ds} H_{\nu+1}(s ; t) = H_{\nu}(s ; t)$ et donc encore une intégration par parties établit la première formule. La deuxième se déduit d'une façon analogue.

§ 5. Transformée de Hankel d'un élément de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+)$.

Pour $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^+)$ on pose $\mathcal{H}_{\nu} f(t) = \int f(s) H_{\nu}(s ; t)$. On a la

Proposition 1. Pour chaque ν , $f \rightarrow \mathcal{H}_{\nu} f$ donne lieu à une application continue de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+)$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+)$.

Démonstration. D'après la définition de Δ_{ν} , il est évident que Δ_{ν} est une fonction à croissance lente pour $\text{Re } \nu$ suffisamment grande et par suite pour ν quelconque. Donc, pour $\text{Re } \nu > -1$, on a

$$\mathcal{H}_{\nu} f(t) = \int_0^{\infty} f(s) \Delta_{\nu}(st) s^{\nu} ds$$

et par conséquent $|\mathcal{H}_{\nu} f(t)| \leq b(1+t^m)$ si $|f(s)| \leq c(1+s)^{-n}$, b, c, m et n étant des constantes convenables dépendant de ν . Il résulte alors du lemme 6 que

$$|t^k D_{\nu}^j \mathcal{H}_{\nu} f(t)| \leq a \text{ lorsque } \sup \left\{ |(1+s)^n D_{\nu}^k s^j f(s)|, |(1+s)^n D_{\nu}^{k+m} s^j f(s)| \right\} \leq \frac{1}{2} ca/b.$$

ainsi l'énoncé se déduit du lemme 5 dans le cas $\text{Re } \nu > -1$. Pour traiter le cas $\text{Re } \nu \leq -1$.

on revient au théorème 2. La formule $\partial_s^q H_{\nu+q}(s ; t) = H_{\nu}(s ; t)$ donne $\mathcal{H}_{\nu} f = \mathcal{H}_{\nu+q} (-\partial)^q f$, ce qui nous permet de passer toujours au cas $\text{Re } \nu > -1$.

§ 6. Théorème de Tricomi.

L'application $\mathcal{H}_{\nu} : \mathcal{F}(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^+)$ induit l'application duale $\mathcal{H}_{\nu}' :$

$$\mathcal{F}'(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathcal{F}'(\mathbb{R}^+), \text{ à savoir}$$

$\int f(\mathcal{K}_\nu^1; T) = \int (\mathcal{K}_\nu f)T$. Pourtant il faut remarquer que la formule

$$\mathcal{K}_\nu^1 T(s) = \int H_\nu(s; t)T(t)$$

est purement formelle puisque $H_\nu(s; t)$ n'appartient pas à $\mathcal{F}(R^+)$ en tant que fonction de t et bien qu'il soit élément de $\mathcal{F}'(R^+)$ suivant la variable s .

Il y a une caractérisation très simple de l'application \mathcal{K}_ν^1 . On constate d'abord que les fonctions $e_\lambda(s) = e^{-\lambda s}$ pour $\text{Re } \lambda > 0$ constituent une famille fondamentale dans $\mathcal{F}(R^+)$. Pour $T \in \mathcal{F}'(R^+)$ on pose $\tilde{T}(\lambda) = \int e_\lambda T = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)$, la transformée de Laplace.

Théorème 3 (de Tricomi). Soient $S, T \in \mathcal{F}'(R^+)$. Pour que $S = \mathcal{K}_\nu^1 T$ il faut et il suffit que $\tilde{S}(\lambda) = \lambda^{-\nu-1} \tilde{T}(\lambda^{-1})$.

Démonstration. Selon le théorème 2, $(\mathcal{K}_\nu e_\lambda)(t) = \lambda^{-\nu-1} e_{\lambda^{-1}}(t)$. Donc $\int e_\lambda \mathcal{K}_\nu^1 T = \int (\mathcal{K}_\nu e_\lambda)T = \lambda^{-\nu-1} \tilde{T}(\lambda^{-1})$. L'énoncé s'en déduit grâce à l'unicité de la transformée de Laplace (autrement dit, que les e_λ constituent une famille fondamentale).

17. La transformation de Hankel.

Comme corollaire immédiat du théorème de Tricomi on a

Théorème 4. La transformation de Hankel $\mathcal{K}_\nu : \mathcal{F}(R^+) \rightarrow \mathcal{F}(R^+)$ est un isomorphisme tel que $\mathcal{K}_\nu^2 = \text{identité}$.

Démonstration. Il suffit de démontrer que $\mathcal{K}_\nu^1 : \mathcal{F}'(R^+) \rightarrow \mathcal{F}'(R^+)$ est un isomorphisme, mais le fait que $\mathcal{K}_\nu^2 = \text{identité}$ est évident suivant le théorème de Tricomi.

Posons $Y_\nu = \delta^{(-\nu-1)}$. Les transformations \mathcal{K}_ν et \mathcal{K}_ν^1 sont liées par la

Proposition 2. Si $f \in \mathcal{F}(R^+)$ alors $\mathcal{K}_\nu^1\{f Y_\nu\} = (\mathcal{K}_\nu f)Y_\nu$.

Démonstration. Cette formule équivaut au fait que $H_\nu(s; t)Y_\nu(t)$ est, comme élément de $\mathcal{F}'(R^+ \times R^+)$, symétrique dans ses arguments. Pour le voir on considère la transformée

de Laplace

$$\begin{aligned} \iint e^{-\lambda s - \mu t} H_\nu(s; t)Y_\nu(t) &= \lambda^{-\nu-1} \int e^{-\lambda^{-1} t - \mu t} Y_\nu(t) \\ &= \lambda^{-\nu-1} (\lambda^{-1} + \mu)^{-\nu-1} = (1 + \lambda\mu)^{-\nu-1}. \end{aligned}$$

La transformée de Laplace étant symétrique, la distribution de départ l'est également.

Or il est commode d'introduire la notation suivante : si φ est une fonction définie sur \mathbb{R}^+ telle que φY_ν donne lieu à une distribution dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^+)$ et si la distribution $\mathcal{H}'_\nu(\varphi Y_\nu)$ peut s'exprimer sous la forme ψY_ν alors on écrira $\psi = \mathcal{H}_\nu \varphi$ (dans cette circonstance l'égalité n'a un sens que presque partout, au moins pour $\text{Re } \nu > -1$).

Pour $\nu > -1$ on note L^2_ν l'espace hilbertien des fonctions-classes φ définies sur \mathbb{R} pour lesquelles $\|\varphi\|^2 = \int_0^\infty |\varphi(s)|^2 Y_\nu(s) < \infty$. La proposition 2 et le théorème 4 nous conduisent au

Théorème 5. Pour $\nu > -1$ l'application $\varphi \rightarrow \mathcal{H}_\nu \varphi$ est un isomorphisme unitaire et symétrique de L^2_ν .

Démonstration. Si $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^+)$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^+)$ alors $\int f T = \int (\mathcal{H}_\nu f)(\mathcal{H}'_\nu T)$.
Ainsi, pour $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^+)$ et ν réel, si l'on pose $T = \bar{g} Y_\nu$ on obtient

$$\int f \bar{g} Y_\nu = \int (\mathcal{H}_\nu f)(\overline{\mathcal{H}_\nu g}) Y_\nu,$$

autrement dit $\langle f, g \rangle = \langle \mathcal{H}_\nu f, \mathcal{H}_\nu g \rangle$. Cette formule, valable pour $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^+)$ s'étend aux $f, g \in L^2_\nu$.

7 bis. Forme Hankelienne de la transformation de Hankel. Notre présentation de la transformation de Hankel suit l'exposé de N. Sonine, Recherches sur les fonctions cylindriques et le développement des fonctions continues en séries, Math. Ann. 16 (1880) pp. 1-80.
Auparavant cette transformation fut étudiée par H. Hankel, Die Fourierschen Reihen und Integralen für Cylinderfunctionen, Math. Ann. 8 (1875) pp. 471-494. L'oeuvre de Hankel date de 1869, celle de Sonine de 1879, et le fleuve d'études postérieures a apporté des reculs importants.

Le théorème de Hankel est essentiellement le

Théorème 5 bis. Pour $\nu > -1$ l'application

$$F \rightarrow \int_0^\infty J_\nu(xy) \sqrt{xy} F(x) dx$$

donne lieu à un isomorphisme unitaire et symétrique de L^2 .

Démonstration. Soit $U_\nu : L^2 \rightarrow L^2_\nu$ l'application donnée par $\varphi = U_\nu F$ où $\varphi(s) = F(\sqrt{2s})s^{-\nu/2}(2s)^{-1/4}$. On voit aisément que U_ν est une équivalence unitaire et l'application de l'énoncé du théorème n'est autre que $F \rightarrow U_\nu^{-1} \mathcal{H}_\nu U_\nu F$.

À prime abord la présentation hankelienne semble avantageuse à cause de l'analogie évidente avec la transformée de Fourier et on a même

$$J_{-\frac{1}{2}}(xy)\sqrt{xy} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos xy, \quad J_{+\frac{1}{2}}(xy)\sqrt{xy} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin xy.$$

Mais alors cette apparence est illusoire et la forme hankelienne ne convient pas aux distributions.

§ 8. Produit de composition associé à la transformation de Hankel.

Le théorème 4 dit que la transformation de Hankel donne lieu à un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+)$, mais cet espace, muni de l'opération de multiplication de fonctions, est une algèbre. Donc, si $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^+)$ alors il existe $h \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^+)$ telle que $\mathcal{H}_\nu h = (\mathcal{H}_\nu f)(\mathcal{H}_\nu g)$. Les fonctions f et g déterminent la fonction h , et nous pouvons écrire $h = f \# g$. L'opération $\#$ est bilinéaire, associative, et commutative. Ainsi $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+)$, muni de l'opération $\#$, est une algèbre. Remarquons que

$$f \# g = \mathcal{H}_\nu \{ (\mathcal{H}_\nu f)(\mathcal{H}_\nu g) \}$$

dépend du choix de ν .

Proposition 3. Pour $\nu \geq -\frac{1}{2}$ on a $\mathcal{F}^+(\mathbb{R}^+) \# \mathcal{F}^+(\mathbb{R}^+) \subset \mathcal{F}^+(\mathbb{R}^+)$; autrement dit, le produit de composition de fonctions positives est une fonction positive.

Examinons l'énoncé. Nous savons que l'opération $\#$ s'exprime moyennant un noyau-distribution

$$f \# g(t) = \int f(r)g(s) \Gamma_\nu(r, s; t)$$

où Γ_ν est une distribution en r et s et fonction en t . La proposition 3 dit que pour $\nu \geq -\frac{1}{2}$ et $t \geq 0$, la distribution $\Gamma_\nu(\cdot, \cdot; t) \in \mathcal{F}'(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$ est positive, ce qui équivaut à $\Gamma_\nu(\cdot, \cdot; t)$ est une mesure positive. Nous la démontrons au § 9.

Nous avons besoin du

Lemme 6. Pour $\nu \geq -\frac{1}{2}$, $\Delta_\nu(t)$ est bornée dans $t \geq 0$. (On a même

$$|\Delta_\nu(t)| \leq \Delta_\nu(0).$$

Démonstration. Vu le calcul fait après le théorème 2 on a

$$\partial_s^{\frac{1}{2}-\nu} H_{-\frac{1}{2}}(s; t) = H_\nu(s; t) \text{ et pour } s = 1 \text{ cela vaut}$$

$$\Delta_\nu(t) = \int_0^1 \Delta_{-\frac{1}{2}}(rt) r^{-\frac{1}{2}} (1-r)^{\nu-\frac{1}{2}} dr / \Gamma(\nu+\frac{1}{2}).$$

Donc si $|\Delta_{-\frac{1}{2}}(t)| \leq \Delta_{-\frac{1}{2}}(0)$ alors on aura $|\Delta_\nu(t)| \leq \Delta_\nu(0)$ pour chaque $\nu \geq -\frac{1}{2}$.

D'autre part, $\Delta_{-\frac{1}{2}}(t) = \pi^{-\frac{1}{2}} \cos 2\sqrt{t}$ comme on peut voir, par exemple, en utilisant la série $\Delta_\nu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-t)^k / k!(k+\nu)!$ et le fait que $k!(k-\frac{1}{2})! = 2^{-2k} \sqrt{\pi} (2k)!$.

On verra plus tard une autre démonstration du lemme 6 ; elle est moins élémentaire mais elle n'exige aucun calcul.

Théorème 6. Le produit de composition $\#$ s'étend à $L^1_{\mathcal{V}}(\mathbb{R}^+)$ pour $\mathcal{V} \geq -\frac{1}{2}$. On obtient ainsi une algèbre de Banach semi-simple et régulière dont l'espace structurel s'identifie à \mathbb{R}^+ et dont la transformation de Gelfand coïncide avec $\mathcal{H}_{\mathcal{V}}$.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{F}^+(\mathbb{R}^+)$. Pour sa norme dans $L^1_{\mathcal{V}}(\mathbb{R}^+)$ nous avons

$$\|f\| = \mathcal{V}! \int f \chi_{\mathcal{V}} = \mathcal{H}_{\mathcal{V}} f(0).$$

Il résulte de la proposition 3 que, si $f, g \in \mathcal{F}^+(\mathbb{R}^+)$ alors

$$\|f \# g\| = (\mathcal{H}_{\mathcal{V}} f \# g)(0) = \mathcal{H}_{\mathcal{V}} f(0) \cdot \mathcal{H}_{\mathcal{V}} g(0) = \|f\| \|g\|.$$

Soient maintenant f et g des fonctions réelles dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+)$. Étant donné $\varepsilon > 0$ on peut écrire

$$f = f_1 - f_2, \quad g = g_1 - g_2 \quad \text{où} \quad f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathcal{F}^+(\mathbb{R}^+) \text{ et}$$

$$\|f_1\| + \|f_2\| < \|f\| + \varepsilon, \quad \|g_1\| + \|g_2\| < \|g\| + \varepsilon.$$

On en déduit que $\|f \# g\| \leq \|f\| \|g\|$ en passant par l'inégalité

$$\|f \# g\| \leq \|f_1 \# g_1\| + \|f_1 \# g_2\| + \|f_2 \# g_1\| + \|f_2 \# g_2\|$$

et le fait que $\|f_1 \# g_j\| \leq \|f_1\| \|g_j\|$. Pour le passage aux fonctions à valeurs complexes on n'obtient que $\|f \# g\| \leq 4 \|f\| \|g\|$ mais peu importe. Puisque $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+)$ est dense dans $L^1_{\mathcal{V}}(\mathbb{R}^+)$, l'opération $\#$ se prolonge d'une façon unique à un produit de composition pour $L^1_{\mathcal{V}}(\mathbb{R}^+)$. On obtient une algèbre de Banach et après un changement de norme en norme équivalente on aura $\|f \# g\| \leq \|f\| \|g\|$; en fait cette inégalité est valable pour la norme donnée. D'après le lemme 6 la convergence dans $L^1_{\mathcal{V}}$ entraîne la convergence uniforme des transformées de Hankel. Donc $\mathcal{H}_{\mathcal{V}}$ applique homomorphiquement $L^1_{\mathcal{V}}(\mathbb{R}^+)$ sur une algèbre de fonctions continues sur \mathbb{R}^+ . Cette application est un isomorphisme car la transformée de Hankel est biunivoque. Le reste de l'énoncé est une conséquence abstraite de ce que nous avons déjà dit, voir le supplément th. 1 avec $\mathcal{A} = \mathcal{H}_{\mathcal{V}} L^1_{\mathcal{V}}$, $X = \mathbb{R}^+$, et $\mathcal{D} = \mathcal{F}(\mathbb{R}^+)$.

Remarque. Les mêmes idées s'appliquent pour démontrer que $L^1(\mathbb{R}^n)$ muni de la convolution comme produit de composition est une algèbre de Banach semi-simple et régulière dont l'espace structurel s'identifie à \mathbb{R}^n et dont la transformation de Gelfand coïncide avec la transformation de Fourier.

§ 9. Le noyau pour le produit dièze.

L'opération $\#$ s'exprime sous la forme

$$f \# g(t) = \int f(r)g(s) \Gamma_{\nu}(r, s ; t)$$

et pour démontrer la proposition 3 il suffit d'établir la

Proposition 4. Le noyau du produit dièze, dans le cas $\nu > -\frac{1}{2}$, possède la forme

$\Gamma_{\nu}(r, s ; t) = C_{\nu}(r, s, t) t^{-\nu}$ où $C_{\nu}(r, s, t)$ est une fonction positive qui est symétrique en ses trois arguments. Explicitement on a

$$C_{\nu}(r, s, t) = w^{\nu-\frac{1}{2}} / 4^{\nu} \sqrt{\pi} \Gamma(\nu + \frac{1}{2}) \text{ si } w > 0, = 0 \text{ sinon}$$

où $w = 2rs + 2st + 2tr - r^2 - s^2 - t^2$.

Remarques.

1^a) Le cas $\nu = -\frac{1}{2}$ de la proposition 3 s'ensuit par passage à la limite.

2^a) Dans la pratique, le noyau explicite C_{ν} est trop compliqué et donc il n'a pas un grand intérêt. Cependant, nous ne savons pas prouver la proposition 3 sans calculer C_{ν} à une constante près.

Nous donnerons deux démonstrations essentiellement différentes de la proposition 4.

Première démonstration (basée sur le calcul fonctionnel). Soit D'_{ν} l'opérateur du § 4.

Le lemme 3 dit que

$$\mathcal{H}_{\nu, D'_{\nu}} = -M \mathcal{H}_{\nu}$$

où $(Mf)(s) = +sf(s)$. Si φ est une fonction C^{∞} à croissance lente sur $[0, +\infty[$

alors $\varphi(M)$ opère sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$, à savoir, $\varphi(M)f(s) = \varphi(s) f(s)$. Il en résulte que

$\varphi(-D'_{\nu})$ applique $\mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$ dans lui-même. L'opérateur $\varphi(-D'_{\nu})$ a un noyau $\varphi(-D'_{\nu})(s ; t)$,

fonction en t et distribution en s où l'on pose

$$\varphi(-D_\nu) f(t) = \int f(s) \varphi(-D_\nu)(s; t).$$

pour le cas particulier $\varphi(s) = e^{-\tau s}$, $\operatorname{Re} \tau > 0$ nous avons

Lemme 7. $e^{+\tau D_\nu}(s; t) = \tau^{-\nu-1} e^{-(s+t)/\tau} \Delta_\nu(-\tau^{-2}st) s^\nu ds.$

Démonstration. Nous allons calculer $e^{\tau D_\nu} f$ pour une famille totale dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+)$, les e_λ , $\operatorname{Re} \lambda > 0$ où $e_\lambda(t) = e^{-\lambda t}$. On a

$$\begin{aligned} e^{+\tau D_\nu} e_\lambda &= \mathcal{H}_\nu \left\{ e^{-\tau u} \mathcal{H}_\nu e_\lambda(u) \right\} \\ &= \mathcal{H}_\nu \left\{ e^{-\tau u} \lambda^{-\nu-1} e^{-u/\lambda} \right\} = \lambda^{-\nu-1} \mathcal{H}_\nu e_{\tau+\lambda^{-1}} \\ &= (1 + \lambda \tau)^{-\nu-1} e_\mu \end{aligned}$$

$\mu = \lambda / (1 + \lambda \tau)$. Autrement dit

$$\int e^{-\lambda s} e^{\tau D_\nu}(s; t) = (1 + \lambda \tau)^{-\nu-1} \exp\{-\lambda t / (1 + \lambda \tau)\}.$$

cette formule est une transformée de Laplace (on considère τ et t comme des paramètres).

d'après la formule de base du § 2, la distribution (en s) $\tau^{-\nu-1} e^{-(s+t)/\tau} \Delta_\nu(-\tau^{-2}st) s^\nu ds$ possède la même transformée de Laplace. L'énoncé résulte du fait que deux éléments de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+)$ avec la même transformée de Laplace sont identiques.

L'utilité du lemme 7 est une conséquence du suivant.

Lemme 8. $\Gamma_\nu(r, s; t) = \Delta_\nu(-r D_\nu)(s, t) r^\nu dr.$

Démonstration. Etant donné $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^+)$ on a pour

$$h(t) = \iint f(r) g(s) \Delta_\nu(-r D_\nu)(s, t) r^\nu dr$$

la relation

$$\mathcal{H}_\nu h(u) = \int f(r) \Delta_\nu(ru) r^\nu dr \mathcal{H}_\nu g(u).$$

ce qui équivaut $\mathcal{H}_\nu h = (\mathcal{H}_\nu f) \cdot (\mathcal{H}_\nu g)$, et donc $h = f \# g$.

Or, pour achever la démonstration de la proposition 4 il ne reste qu'à calculer

$\Delta_\nu(-r D_\nu)(s, t) r^\nu dr$. D'après la définition de la fonction de Bessel

$$\Delta_\nu(-r D_\nu) r^\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp\{\lambda r + \lambda^{-1} D_\nu\} \lambda^{-\nu-1} d\lambda.$$

D'après les lemmes 7 et 8 on trouve donc

$$\begin{aligned} (st)^{-\nu} C_{\nu}(r, s; t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\lambda r} e^{-\lambda(s+t)} \Delta_{\nu}(-\lambda^2 st) d\lambda. \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(r-s-t)y} \Delta_{\nu}(y^2 st) dy \\ &= (st)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} \Delta_{\nu}(y^2) dy \end{aligned}$$

où $x = (r - s - t)s^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}}$. La formule de la démonstration du lemme 6, à savoir

$$\Delta_{\nu}(v) = \int_0^1 \Delta_{-\frac{1}{2}}(uv) u^{-\frac{1}{2}} (1-u)^{\nu-\frac{1}{2}} du / \Gamma(\nu + \frac{1}{2})$$

devient, en écrivant $v = y^2$, $u = \frac{1}{2}x^2$,

$$\Delta_{\nu}(y^2) = \int_0^1 \cos xy (1 - \frac{1}{2}x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dx / \pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(\nu + \frac{1}{2}).$$

Celle-ci est l'inversion de Fourier de l'intégrale pour $(st)^{\frac{1}{2}} C_{\nu}(r, s, t)$. Donc

$C_{\nu}(r, s, t) = (st)^{\nu-\frac{1}{2}} (1 - \frac{1}{2}x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} / \pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})$ pour $|x| < 1$, d'où l'énoncé de la proposition 4.

Seconde démonstration de la proposition 4 (basée sur la transformation de Laplace par rapport à un cône dans \mathbb{R}^3). Considérons la transformée de Laplace en trois variables

$$F_{\nu}(\rho, \sigma, t) = \int \exp(-\rho r - \sigma s - \tau t) \Gamma_{\nu}(r, s, t) t^{\nu} dt.$$

Par définition, $\int \exp(-\rho r - \sigma s) \Gamma_{\nu}(r, s, t) = e_{\rho} \# e_{\sigma}(t)$, et comme on voit aisément

$$e_{\rho} \# e_{\sigma} = (\rho + \sigma)^{\nu+1} e_{\mu} \quad \text{où} \quad \mu^{-1} = \rho^{-1} + \sigma^{-1}.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} F_{\nu}(\rho, \sigma, t) &= \int e^{-\tau t} (\rho + \sigma)^{\nu+1} e_{\mu}(t) t^{\nu} dt \\ &= \nu! (\tau + \mu)^{-\nu-1} (\rho + \sigma)^{\nu+1} \\ &= \nu! (\rho\sigma + \sigma\tau + \tau\rho)^{-\nu-1}. \end{aligned}$$

La proposition 4 équivaut alors à la formule

$$\iiint \exp(-\rho r - \sigma s - \tau t) t^{\nu-1} \Gamma_{\nu}(r, s, t) dr ds dt / \pi \Gamma(2\nu+1) = (\rho\sigma + \sigma\tau + \tau\rho)^{-\nu-1}$$

pour $\nu > -\frac{1}{2}$.

Définissons une distribution $A^{(q)} \in \mathcal{F}'(\mathbb{R}^3)$ par

$$\int \exp(-\rho r - \sigma s - \tau t) A^{(q)}(r, s, t) = (\rho\sigma + \sigma\tau + \tau\rho)^q.$$

L'existence de $A^{(q)}$ pour chaque q est assuré par inversion de la transformation de

Laplace. Nous allons arranger les variables d'une manière commode. Posons

$$W = \begin{bmatrix} 2s & -r+s+t \\ -r+s+t & 2t \end{bmatrix} \quad \Omega = \begin{bmatrix} \rho + \sigma & -\rho \\ -\rho & \rho + \tau \end{bmatrix}$$

des matrices 2×2 symétriques. La formule ci-dessus devient

$$\int \exp \left\{ -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(\Omega W) \right\} A^{(q)}(W) = (\det \Omega)^q.$$

L'intégrale a un sens pour $\operatorname{Re} \Omega > 0$ dès que $W \geq 0$ où $W \geq 0$ dénote l'assertion que

la matrice W est définie-positive. Pour les distributions $A^{(q)}$ on voit que

$$\begin{aligned} A^{(0)} &= \delta \\ A^{(1)} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r \partial s} + \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} + \frac{\partial^2}{\partial t \partial r} \right) \delta \\ A^{(p)} * A^{(q)} &= A^{(p+q)}. \end{aligned}$$

Si q est assez négatif alors $A^{(q)}$ est une fonction $A^{(q)}(W) = \int \Phi_q(W) dW$ où dW désigne

la mesure de Haar sur \mathbb{R}^3 invariante par translation. Soit U une matrice inversible ;

alors $W \rightarrow U W U'$ est un automorphisme de l'espace des matrices définies positives et on a

Lemme. $d(U W U') = (\det U)^3 dW.$

Démonstration. La mesure $d(U W U')$ comme mesure sur \mathbb{R}^3 (l'espace des matrices 2×2

symétriques) est également invariante par translation. D'après l'unicité de la mesure de

Haar

$$d(U W U') = f(U) dW.$$

La fonction f est définie sur $GL(2, \mathbb{R})$, le groupe des matrices 2×2 inversibles.

On voit aisément que $f > 0$ et $f(U V) = f(U) f(V)$. Il en résulte que $f(U) = |\det U|^p$

pour un p convenable. Soit $U = \alpha I$, $I =$ l'identité. Alors $W \rightarrow U W U'$ est la transfor-

mation $r \rightarrow \alpha^2 r$, etc..

Donc $d(UWU') = \alpha^6 dW$ et il s'ensuit que $p = 3$.

Or, q étant suffisamment négatif et $\Omega > 0$ on a

$$\begin{aligned} (\det \Omega)^q &= \int \exp\left(-\frac{1}{2} \operatorname{tr} \Omega W\right) \Phi_q(W) dW \\ &= \int \exp\left\{-\frac{1}{2} \operatorname{tr} \Omega^{\frac{1}{2}} W \Omega^{\frac{1}{2}}\right\} \Phi_q(W) dW \\ &= \int \exp\left\{-\frac{1}{2} \operatorname{tr} W\right\} \Phi_q\left(\Omega^{-\frac{1}{2}} W \Omega^{-\frac{1}{2}}\right) d\left(\Omega^{-\frac{1}{2}} W \Omega^{-\frac{1}{2}}\right) \\ &= (\det \Omega)^{-3/2} \int \exp\left(-\frac{1}{2} \operatorname{tr} W\right) \Phi_q\left(\Omega^{-\frac{1}{2}} W \Omega^{-\frac{1}{2}}\right) dW. \end{aligned}$$

On dérive la forme $\Phi_q(W) = k_q (\det W)^{-q-3/2}$ où k_q est une constante telle que

$$k_q \int \exp\left(-\frac{1}{2} \operatorname{tr} W\right) (\det W)^{-q-3/2} dW = 1.$$

Cette somme est convergente pour $-q-3/2 > -1$; i.e. $q < -\frac{1}{2}$. Dans ce cas il est évident

que $k_q > 0$. Par comparaison des transformées de Laplace on obtient la proposition 4

sous la forme

$$C_\nu(r, s, t) = k_q (\det W)^{-q-3/2} \text{ si } W > 0, = 0 \text{ sinon}$$

avec $q = -\nu - 1$; il faut remarquer que $w = \det W$.

§ 10. Transformation de Fourier et transformation de Hankel.

$\mathcal{J}'_{\text{inv}}(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace des distributions tempérées sur \mathbb{R}^n invariantes par rotation. Rappelons que pour que $T \in \mathcal{J}'(\mathbb{R}^n)$ appartienne à $\mathcal{J}'_{\text{inv}}(\mathbb{R}^n)$ il faut et il suffit

que $L_{ij}T = 0$, $1 \leq i < j \leq n$ où

$$L_{ij} = x_i \partial / \partial x_j - x_j \partial / \partial x_i.$$

Du fait que $\mathcal{F}L_{ij} = L_{ij}$ il en résulte que pour la transformation de Fourier \mathcal{F} on a

$$\mathcal{F}' : \mathcal{J}'_{\text{inv}}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\sim} \mathcal{J}'_{\text{inv}}(\mathbb{R}^n).$$

Soit ω_s la mesure uniforme de masse totale 1 sur la sphère de rayon $\sqrt{2s}$ centrée à l'origine de \mathbb{R}^n . On a vu que

$$F \longrightarrow \int F(x) \omega_s(x)$$

défini une surjection

$$\Omega_n : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^+)$$

dont l'application duale donne lieu à un isomorphisme

$$\Omega_n' : \mathcal{F}'(\mathbb{R}^+) \longrightarrow \mathcal{F}'_{\text{inv}}(\mathbb{R}^n).$$

Théorème 7. Le diagramme ci-dessous est commutatif où $\nu = \frac{1}{2}n - 1$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}'_{\text{inv}}(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow[\mathcal{F}]{\sim} & \mathcal{F}'_{\text{inv}}(\mathbb{R}^n) \\ \Omega_n' \uparrow \sim & & \Omega_n' \uparrow \sim \\ \mathcal{F}'(\mathbb{R}^+) & \xrightarrow[\mathcal{F}'_\nu]{\sim} & \mathcal{F}'(\mathbb{R}^+). \end{array}$$

Démonstration. Soit $U \xrightarrow{\mathcal{F}'} V$

$$\begin{array}{ccc} \Omega_n' \uparrow & & \uparrow \Omega_n' \\ S & & T. \end{array}$$

Autrement dit, à partir d'une $S \in \mathcal{F}'(\mathbb{R}^+)$ donnée nous avons une unique $T \in \mathcal{F}'(\mathbb{R}^n)$ définie par $T = \Omega_n'^{-1} \mathcal{F} \Omega_n' S$. Il faut prouver $T = \mathcal{F}'_\nu S$. Or, pour toute $F \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} \iint \mathcal{F} F(y) \omega_s(y) S(s) &= \int \mathcal{F} F(y) U(y) = \int F(x) V(x) \\ &= \iint F(x) \omega_t(x) T(t). \end{aligned}$$

Prenons $F(x) = \exp\{-\frac{1}{2}\lambda|x|^2\}$, $\text{Re } \lambda > 0$. Alors $\mathcal{F} F(y) = \lambda^{-n/2} \exp\{-\frac{1}{2}\lambda^{-1}|y|^2\}$ et donc $\int \lambda^{-\nu-1} e^{-\lambda^{-1}s} S(s) = \int e^{-\lambda t} T(t)$ où $\nu = \frac{1}{2}n - 1$. C'est exactement le théorème de Tricomi.

Lemme 9. $\Omega_n' \{ \varphi(x) Y_\nu(x) \} = \varphi(\frac{1}{2}|x|^2) dx / (2\pi)^{n/2}$.

Démonstration. En effet $\Omega_n' Y_\nu = dx / (2\pi)^{n/2}$ car $Y_\nu = \mathcal{F}'_\nu \delta$, $\Omega_n' \delta = \delta$, et $\mathcal{F}' \delta = dx / (2\pi)^{n/2}$.

Corollaire. Pour chaque p , $1 \leq p \leq \infty$, on a $\Omega_n' L^p_\nu(\mathbb{R}^+) = L^p_{\text{inv}}(\mathbb{R}^n)$. Autrement dit, chaque $F \in L^p_{\text{inv}}(\mathbb{R}^n)$ s'exprime sous la forme $F(x) = \varphi(\frac{1}{2}|x|^2)$ où $\varphi \in L^p_\nu(\mathbb{R}^+)$ et, inversement, si $\varphi \in L^p_\nu(\mathbb{R}^+)$ alors $F \in L^p_{\text{inv}}(\mathbb{R}^n)$.

§ 11. Généralisation du précédent.

Nous aurons besoin des deux lemmes qui suivent.

Lemme 10. Soit P un polynôme harmonique homogène de degré k et Q un polynôme de degré $< k$. Alors $\int P(x)\bar{Q}(x) \omega_s(x) = 0$.

Démonstration. On peut supposer Q homogène de degré $j < k$. Alors Q s'exprime sous la forme $Q = \sum \alpha_i H_{Q_i}$ où les Q_i sont des polynômes homogènes de degré $\leq j$.

On a donc

$$\int e^{-|x|^2} HP(x)\overline{HQ_i}(x) dx = 0; \quad \forall Q_i, \text{ degré } Q_i < k$$

ce qui entraîne

$$\int e^{-|x|^2} HP(x)\bar{Q}(x) dx = 0.$$

D'autre part, $HP(x) = P(x)$ et donc

$$\int e^{-|x|^2} P(x)\bar{Q}(x) dx = 0$$

d'où l'énoncé parce que, l'intégrale le long d'un rayon étant strictement positive, cette dernière intégrale est un multiple positif de la somme cherchée. En effet,

$$\begin{aligned} \int e^{-|x|^2} P(x)\bar{Q}(x) dx &= \int e^{-2s} 2^{j+k} s^{(j+k)/2} ds \int P(x)\bar{Q}(x) \omega_s(x) \\ &= c \int P(x)\bar{Q}(x) \omega_1(x). \end{aligned}$$

Lemme 11. Si P est un polynôme harmonique homogène de degré k alors

$$P \Omega_n' \delta^{(j)} = P(x) \omega_s(x) \delta^{(j)}(x) = 0 \text{ pour chaque } j < k.$$

Démonstration. Soit \mathcal{B} une base orthogonale pour les polynômes et $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. On a

$$f(x) \sim \sum_{Q \in \mathcal{B}} Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f(0) \bar{Q}(x)$$

et donc $f = f_{k-1} + g$ où

$$f_{k-1}(x) = \sum_{\partial^0 Q < k} Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f(0) \bar{Q}(x)$$

et chaque dérivée de g d'ordre $< k$ est nulle à l'origine. Calculons

$$\begin{aligned} \int f P \Omega_n' \delta^{(j)} &= \int f(x) P(x) \omega_s(x) \delta^{(j)}(s) \\ &= \int f_{k-1}(x) P(x) \omega_s(x) \delta^{(j)}(s) + \int g(x) P(x) \omega_s(x) \delta^{(j)}(s). \end{aligned}$$

La première somme est nulle car $\int f_{k-1}(x)P(x)\omega_g(x) = 0$ suivant le lemme précédent. La seconde est également nulle parce que $\int g(x)P(x)\omega_g(x) = O(s^k)$ et $\int O(s^k)\delta^{(j)}(s) = 0$ pour $j < k$.

Nous avons maintenant la

Proposition 5. Soit P un polynôme harmonique homogène de degré k . Alors l'application $\Omega'_{n,P} : \mathcal{J}'(\mathbb{R}^+)^n \rightarrow \mathcal{J}'(\mathbb{R}^n)$ définie par

$$S \longrightarrow \left(\frac{1}{2}|x|^2\right)^{-k} P(x) \omega_g(x) S(s)$$

est univoque.

Démonstration. La distribution $R(s) = s^{-k}S(s)$ est définie à $\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \delta^{(j)}$ près.

On a $\Omega'_{n,P} S = P \Omega'_n R$ et suivant le lemme, $P \Omega'_n R$ est indépendante du choix de R .

Or, si $U = \Omega'_n S \in \mathcal{J}'_{inv}(\mathbb{R}^n)$ la distribution $(\frac{1}{2}|x|^2)^{-k} P(x)U(x)$ est bien déterminée. De plus, nous avons le

Théorème 7 bis. Soit P un polynôme harmonique homogène de degré k . Si $U = \Omega'_n S \in \mathcal{J}'_{inv}(\mathbb{R}^n)$ alors

$$\mathcal{F}'\left\{\left(\frac{1}{2}|x|^2\right)^{-k} P(x)U(x)\right\} = \left(\frac{1}{2}|y|^2\right)^{-k} P(iy)V(y)$$

où $V = \Omega'_n T \in \mathcal{J}'_{inv}(\mathbb{R}^n)$ et

$$T = \mathcal{R}'_{\nu+k} S, \quad \nu = n/2 - 1.$$

Démonstration. Il s'agit de démontrer que

$$\mathcal{F}' \Omega'_{n,P} : \mathcal{J}'(\mathbb{R}^+)^n \rightarrow \mathcal{J}'(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad i^k \Omega'_{n,P} \mathcal{R}'_{\nu+k} : \mathcal{J}'(\mathbb{R}^+)^n \rightarrow \mathcal{J}'(\mathbb{R}^n)$$

sont les mêmes applications d'un espace vectoriel topologique dans un autre. Tous les deux étant continus, il suffit de vérifier leur égalité sur une famille totale, à savoir les S de la forme

$$S = e^{-\lambda s} s^{\nu+k} ds / (\nu+k)! , \quad \operatorname{Re} \lambda > 0.$$

Avec la notation de l'énoncé on a

$$U = \exp(-\frac{1}{2}\lambda|x|^2) \cdot \left(\frac{1}{2}|x|^2\right)^{\nu+k} dx. \quad \nu! / (2\pi)^{n/2} (\nu+k)!$$

et donc

$$\left(\frac{1}{2}|x|^2\right)^{-k} P(x)U(x) = \exp(-\frac{1}{2}\lambda|x|^2)P(x)dx \cdot \nu/(2\pi)^{n/2}(\nu+k)!$$

dont la transformée de Fourier est

$$\begin{aligned} & \lambda^{-\frac{n}{2}-k} \exp(-\frac{1}{2}|y/\sqrt{\lambda}|^2)P(iy/\sqrt{\lambda})dy \cdot \nu/(2\pi)^{n/2}(\nu+k)! \\ &= \lambda^{-\frac{n}{2}-k} \exp(-\frac{1}{2}\lambda^{-1}|y|^2)P(iy)dy \cdot \nu/(2\pi)^{n/2}(\nu+k)! \\ &= i^k \Omega_{n,P}^{\nu} \quad \text{où } \mathbb{T} = \lambda^{-n/2-k} \int_0^{\infty} e^{-\lambda^{-1}t} t^{\nu+k} dt / (\nu+k)! \end{aligned}$$

qui est égale à $\mathcal{H}_{\nu+k}^{\nu}$ d'après le théorème de Tricomi.

Corollaire. Si $F \in L^2(\mathbb{R}^n)$ possède la forme $F(x) = f(\frac{1}{2}|x|^2) \cdot P(x)$ où P est un polynôme harmonique homogène de degré k alors $f \in L^2_{\nu+k}$ et $\mathcal{F}F = g(\frac{1}{2}|y|^2) \cdot P(iy)$ où $g = \mathcal{H}_{\nu+k}^{\nu} f$.

On pose $S = s^k f(s)Y_{\nu}(s) = \frac{(\nu+k)!}{\nu!} f(s) Y_{\nu+k}(s)$ d'où

$$\mathbb{T} = \frac{(\nu+k)!}{\nu!} g(t) Y_{\nu+k}(t) \quad g(t) = \mathcal{H}_{\nu+k}^{\nu} f(s)$$

ce qui démontre la deuxième partie.

Enfin
$$\int |F(x)|^2 dx = \int_0^{\infty} |f(s)|^2 |P(x)|^2 \omega_s(x) dx ds$$

$$= k \int_0^{\infty} |f(s)|^2 Y_{\nu+k}(s) \quad \nu = \frac{n}{2} - 1.$$

§ 12. Application : Calcul de certaines transformées de Fourier.

a) $U = -\Delta \delta \quad \nu = |y|^2 dy / (2\pi)^{n/2}$

peut-on définir $(-\Delta)^q \delta$ de telle sorte que $(-\Delta)^q \delta * (-\Delta)^p \delta = (-\Delta)^{p+q} \delta$.

On pose par définition

$$(-\Delta)^q \delta = \text{transformée par } \mathcal{F}^{\nu} \text{ de } (|y|^2)^q dy / (2\pi)^{n/2}.$$

Posons alors $\Lambda^{(q)} = \Omega_n^{\nu} \delta^{(q)}$ d'après le lemme du paragraphe précédent

$$\Lambda^{(-\frac{n}{2})} = dx / (2\pi)^{n/2} \text{ et}$$

$$\Lambda(q) = \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(-q)} \left(\frac{1}{2}|x|^2\right)^{-q-\frac{n}{2}} dx / (2\pi)^{n/2} \quad \text{Re } q < 0.$$

D'après le théorème de Tricomi

$$\mathcal{H}_\gamma^\alpha \delta(q) = \delta(-q-\gamma-1)$$

donc $\mathcal{F}' \Lambda(q) = \Lambda^{(-q-\frac{n}{2})}$

$$\mathcal{F}^\alpha \Delta \Lambda(q) = -|y|^2 \Lambda^{(-q-\frac{n}{2})}(y)$$

$$= -2 \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n/2+q)} \left(\frac{1}{2}|y|^2\right)^{q+1} dy / (2\pi)^{n/2}$$

$$= -2 \left(\frac{n}{2} + q\right) \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(\frac{n}{2}+q+1)} \left(\frac{1}{2}|y|^2\right)^{q+1} dy / (2\pi)^{\frac{n}{2}}$$

$$= -(n+2q) \cdot \mathcal{F}^\beta \Lambda^{(q+1)}.$$

Soit

$$\Delta \Lambda(q) = -(n+2q) \Lambda^{(q+1)}$$

$$\Lambda^0 = \delta \dots$$

$$\Lambda(N) = \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(\frac{n}{2}+N)} \left(-\frac{1}{2}\Delta\right)^N \cdot \delta \quad \text{pour } N \in \mathbb{N}.$$

Soit maintenant E_n une solution élémentaire de

$$\Delta E_n = -\delta \quad E_n = \frac{1}{n-2} \Lambda^{(-1)}$$

sauf pour $n=2$. Dans ce cas

$$\Delta \left(\frac{\Lambda^{(q)} - \Lambda^{(-1)}}{2+2q} \right) = -\Lambda^{(q+1)} \quad \text{qui tend vers } -\delta \text{ pour } q \rightarrow -1.$$

Donc $E_2 = \lim_{q \rightarrow -1} \frac{\Lambda^{(q)} - \Lambda^{(-1)}}{2+2q}$

$$E_2 = \lim_{q \rightarrow -1} \frac{dx}{4\pi} \left[\frac{\left(\frac{1}{2}|x|^2\right)^{-q-1} - \Gamma(-q)}{1+q} \right]$$

$$E_2 = -\text{Log}|x| dx / 2\pi + c^{te} \cdot dx \quad .$$

b) Calcul de $\mathcal{F}' P(x) \omega_{\frac{1}{2}}(x)$ dans \mathbb{R}^n .

P polynôme homogène harmonique de degré k

$$P(x) \omega_{\frac{1}{2}}(x) = 2^{-k} \left(\frac{1}{2}|x|^2\right)^{-k} P(x) \omega_{\frac{1}{2}}(x)$$

car $\omega_{\frac{1}{2}}$ désigne la masse uniforme sur la sphère unité.

Prenons $U = 2^{-k} \omega_{\frac{1}{2}}$ $S = 2^{-k} \delta_{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\nu+k} \delta_{\frac{1}{2}} &= \Delta_{\nu+k} \left(\frac{1}{2} t\right) t^{\nu+k} dt \\ &= \nu! \Delta_{\nu+k} \left(\frac{1}{2} t\right) t^k Y_{\nu}(t) \end{aligned}$$

puis $V = 2^{-k} \nu! \Delta_{\nu+k} \left(\frac{1}{4} |y|^2\right) \left(\frac{1}{2} |y|^2\right)^k dy / (2\pi)^{n/2}$

et : $\mathcal{F}^{-1} P(x) \omega_{\frac{1}{2}}(x) = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) P\left(\frac{iy}{2}\right) \Delta_{\nu+k} \left(\frac{1}{4} |y|^2\right) dy / (2\pi)^{n/2}$.

c) En deux dimensions les polynômes harmoniques sont les polynômes $(X_1 + iX_2)^k$

$$P(X) = (X_1 + iX_2)^k = |X|^k e^{ik\theta}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{ixy} e^{ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} = \left(\frac{1}{2}|y|\right)^k e^{ik\eta} \Delta_k \left(\frac{1}{4}|y|^2\right)$$

d'après la formule précédente et $y = |y| e^{ik\eta}$.

Nous savons que $J_k(r) = \Delta_k \left(\frac{1}{4} r^2\right) \left(\frac{1}{2} r\right)^k$

$$\int_0^{2\pi} e^{ixy} e^{ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} = i^k J_k(|y|) e^{ik\eta}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{ixy} e^{ik(\theta-\eta)} \frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} e^{i|y|\cos\theta} e^{ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} = i^k J_k(|y|)$$

$$e^{i|y|\cos\theta} = \sum_{-\infty}^{+\infty} i^k J_k(|y|) e^{-ik\theta}$$

développement en série de Fourier de $e^{i|y|\cos\theta}$.

d) Comportement asymptotique des fonctions de Bessel.

Rappel : $\partial^{-q} \mathcal{H}_{\nu} = \mathcal{H}_{\nu} \partial^q = \mathcal{H}_{\nu+q}$

d'où $\mathcal{H}_{\nu} \left\{ (1-s)^{p-1} / \Gamma(p) \right\} = \Delta_{\nu+p}(t)$

et $\nu = -\frac{1}{2}$: $\mathcal{H}_{-\frac{1}{2}} \left\{ (1-s)^{p-1} / \Gamma(p) \right\} = \Delta_{p-\frac{1}{2}}(t)$

$$(1-s)^{p-1} = 0 \text{ pour } s > 1$$

passons à la transformée de Fourier en une dimension

$$\Delta_{p-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} y^2\right) = \int_{-1}^{+1} e^{ixy} \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^{p-1} dx / \sqrt{2\pi} \Gamma(p)$$

$$\Delta_{p-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}y^2\right) = \int_{|x| < 1} e^{ixy}(1-x^2)^{p-1} dx / \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(p) \text{ pour } \operatorname{Re} p > 0.$$

Donc pour $p > 0$ $\Delta_{p-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}y^2\right)$ est définie positive et par conséquent

$$|\Delta_{\nu}(s)| \leq \Delta_{\nu}(0) \text{ si } \nu \geq -\frac{1}{2}.$$

Enfin :

$$\Delta_{\nu}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos\left(\sqrt{2s} - \frac{\pi\nu}{2} + \frac{\pi}{4}\right) s^{-\frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}} + o\left(s^{-\frac{\nu}{2} - \frac{3}{4}}\right)$$

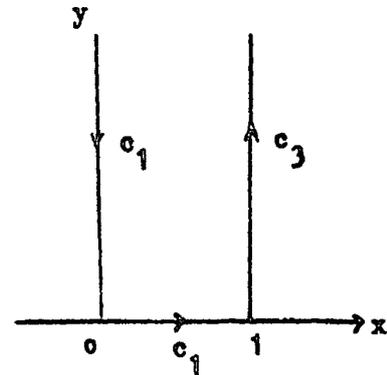
pour $s \rightarrow \infty$, $\nu \geq -\frac{1}{2}$

$$\Delta_{p-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}y^2\right) = 2 \operatorname{Re} \int_0^1 e^{ixy}(1-x^2)^{p-1} dx / \sqrt{\pi} \Gamma(p)$$

$$\int_c e^{izy}(1-z^2)^{p-1} dz = 0$$

$$\int_{c_2} = - \int_{c_1} - \int_{c_3}$$

$$\int_{c_1} \text{ est purement imaginaire.}$$



sur c_3 $z = 1 + iu$

$$\Delta_{p-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}y^2\right) = -2 \operatorname{Re} i \int_0^{\infty} e^{iy} e^{-uy}(u^2 - 2iu)^{p-1} du / \sqrt{\pi} \Gamma(p)$$

et si $y \rightarrow +\infty$

$$\Delta_{p-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}y^2\right) \sim -2 \operatorname{Re} e^{iy} \frac{i(-2i)^{p-1}}{\sqrt{\pi} \Gamma(p)} \int_0^{\infty} e^{-uy} u^{p-1} du$$

$$\Delta_{p-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}y^2\right) \sim \frac{2^p}{\sqrt{\pi} y^p} \operatorname{Re} e^{i\left(y - p\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Supplément au chapitre V

Algèbres

Espace structural. Considérons une algèbre commutative \mathcal{A} sur un corps \mathbb{C} (qui sera en général le corps des complexes). On sait que si \mathcal{M} est un idéal maximal de \mathcal{A} , alors le quotient \mathcal{A}/\mathcal{M} est une algèbre sans idéaux propres, et réciproquement. Or une algèbre sans idéaux propres est soit un corps, soit une zéro-algèbre - algèbre où le produit de deux éléments quelconques est nul.

Si le quotient est un corps, on dit que l'idéal maximal \mathcal{M} est régulier. Pour cela, il faut et il suffit que \mathcal{A} possède une unité modulo \mathcal{M} , c'est à dire un élément j tel que $\forall f \in \mathcal{A}, jf - f \in \mathcal{M}$. La classe de j est alors l'unité de \mathcal{A}/\mathcal{M} . Par conséquent un idéal maximal régulier de \mathcal{A} est le noyau d'un homomorphisme de \mathcal{A} dans un corps.

Soit alors X l'ensemble des idéaux maximaux réguliers de \mathcal{A} . Si $x \in X$ et $f \in \mathcal{A}$, on note $f(x)$ l'image de f dans l'homomorphisme de noyau x . $f(x)$ est donc élément d'un corps qui dépend précisément de x .

On va définir une topologie sur X . Si $f \in \mathcal{A}$, l'ensemble des idéaux maximaux réguliers ne contenant pas f sera ouvert. Une base d'ouverts pour la topologie sera alors formée des intersections finies de tels ensembles. Donc la topologie de X sera définie de la manière suivante : une base d'ouverts est formée des ensembles $\Omega_{f_1 \dots f_n} = \{x ; f_i(x) \neq 0 \quad \forall i = 1 \dots n\}$ définis par un nombre fini $f_1 \dots f_n$ d'éléments de \mathcal{A} .

On appelle espace structural de \mathcal{A} l'espace topologique X ainsi obtenu.

C'est un espace de Kolmogoroff : $\forall x_0$ et $x_1 \in X$, il existe un voisinage de x_1 ne contenant pas x_0 et un voisinage de x_0 ne contenant pas x_1 . En effet, comme $x_0 \neq x_1$, soit $f \in \mathcal{A}$ un élément appartenant à l'idéal x_0 mais pas à l'idéal x_1 . On a donc $f(x_0) = 0$ et $f(x_1) \neq 0$, et $\Omega_f = \{x ; f(x) \neq 0\}$ est un voisinage de x_1 ne contenant pas x_0 .

Mais X n'est pas nécessairement séparé. Dire que X est séparé signifie qu'il existe $g \in \mathcal{A}$ tel que $x_0 \in \Omega_g$, $x_1 \notin \Omega_g$, et $\Omega_f \cap \Omega_g = \emptyset$, donc qu'il existe $g \in \mathcal{A}$ tel que $g(x_0) \neq 0$, $g(x_1) = 0$ et $f g = 0$: ceci n'est évidemment pas toujours possible.

Exemples. a) Prenons $\mathcal{A} = \mathbb{Z}$ et $\mathcal{C} = \mathbb{Z}$ (ce n'est qu'un domaine d'intégrité et non un corps, mais ce qu'on a dit reste valable).

Alors X est l'ensemble des nombres premiers, et on vérifie aisément que les fermés sont les parties finies de X et X lui-même. La topologie n'est donc pas ici séparée.

b) Prenons pour \mathcal{A} les fonctions complexes continuellement dérivables sur $[0, 1]$ et s'annulant en 0. On montre que $X =]0, 1]$ muni de la topologie habituelle, donc ici séparée. L'idéal $\mathfrak{M}_0 = \{f ; f'(0) = 0\}$ donne un exemple d'idéal maximal non régulier.

Algèbre semi-simple. L'algèbre \mathcal{A} est dite semi-simple si $f(x) = 0 \quad \forall x \in X$ entraîne $f = 0$, c'est à dire si l'intersection des idéaux maximaux réguliers est réduite à 0. D'une manière générale, si U est un ouvert de X , on pose $\mathcal{A}(U) = \{f \in \mathcal{A} ; f = 0 \text{ dans } [U]\}$. Dire que \mathcal{A} est semi-simple équivaut donc à $\mathcal{A}(\emptyset) = 0$.

Nous supposerons désormais constamment que \mathcal{A} est semi-simple.

Radical. Il est bien évident que les $\mathcal{A}(U)$ sont des idéaux de l'algèbre \mathcal{A} . Soit maintenant un idéal \mathfrak{J} de \mathcal{A} . Pour qu'un ouvert U soit tel que $\mathfrak{J} \subset \mathcal{A}(U)$, il faut et il suffit que $[U$ soit contenu dans l'ensemble des $x \in X$ tels que $f(x) = 0 \quad \forall f \in \mathfrak{J}$. Si donc nous posons

$$U = \{x ; \exists f \in \mathfrak{J} \text{ tel que } f(x) \neq 0\},$$

U est le plus petit ouvert de X tel que $\mathfrak{J} \subset \mathcal{A}(U)$. L'idéal $\mathcal{A}(U)$ ainsi défini s'appelle le radical de \mathfrak{J} .

Proposition 1. Si $\mathcal{A}(U)$ est le radical de l'idéal \mathfrak{J} , alors l'espace structural de l'algèbre \mathfrak{J} s'identifie à U .

En effet, si Y est l'espace structural de \mathfrak{J} , on va définir une application naturelle

$F : U \longrightarrow Y$. Soit $x \in U$. Il y correspond une surjection φ_x de \mathcal{A} sur un corps K . L'image de \mathcal{J} dans cette surjection est un idéal de K . Mais d'après la définition de U , cet idéal n'est pas réduit à $\{0\}$, donc c'est K tout entier et $\varphi_x(\mathcal{J}) = K$. Le noyau de cet épimorphisme est par suite un idéal maximal régulier de \mathcal{A} , qu'on note justement $\mathcal{M}(x)$, élément de Y .

L'application F est évidemment continue. Montrons qu'elle est surjective. Soit donc \mathcal{M}_y un idéal maximal régulier de \mathcal{B} correspondant à $y \in Y$. Il existe alors $j \in \mathcal{M}_y$ tel que $j(y) = 1$, l'unité du corps. Soit J l'ensemble des idéaux de \mathcal{A} contenant \mathcal{M}_y mais non j . Ordonné par inclusion, J est inductif. Soit \mathcal{M} un élément maximal de J . On voit aisément que $\mathcal{M} = \mathcal{M}_x$, un idéal maximal de \mathcal{A} . Montrons que $y = F(x)$. On a $\mathcal{M}_y \subset \mathcal{A} \cap \mathcal{M}_x \neq \mathcal{A}$. Puisque \mathcal{M}_y est maximal dans \mathcal{A} , $\mathcal{M}_y = \mathcal{A} \cap \mathcal{M}_x$ ce qui entraîne $x \in U$ et $y = F(x)$.

F est donc surjective et on montre aisément que c'est un homéomorphisme. C.Q.F.D.

On en déduit facilement que $\mathcal{A}(U \cap V) = \mathcal{A}(U) \cap \mathcal{A}(V)$, mais il n'y a rien d'analogue en ce qui concerne la réunion.

Proposition 2. Soit \mathcal{J} un idéal de \mathcal{A} et E l'ensemble des $x \in X$ tels que $f(x) = 0 \quad \forall f \in \mathcal{J}$. Alors l'espace structurel de l'algèbre \mathcal{A}/\mathcal{J} s'identifie à E .

Ceci signifie que les idéaux maximaux réguliers de \mathcal{A}/\mathcal{J} s'identifient homéomorphiquement à ceux de \mathcal{A} qui contiennent \mathcal{J} . Soit en effet $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ la surjection canonique de \mathcal{A} sur $\mathcal{B} = \mathcal{A}/\mathcal{J}$. Si Ψ est épimorphisme de \mathcal{B} sur un corps K , alors

$\varphi = \Psi \circ \Phi$ est un épimorphisme de \mathcal{A} sur K , ce qui définit une application G de Y dans X en appelant Y l'espace structurel de \mathcal{B} . Les images par G de tous les éléments de Y sont des $x \in X$ tels que $f(x) = 0 \quad \forall f \in \mathcal{J}$, donc $G(Y) \subset E$.

G est manifestement continue et ouverte. Il reste à montrer que $G(Y) = E$. Soit donc

$x \in E$; posons $\mathcal{M}_x = \{f \in \mathcal{A} ; f(x) = 0\}$ et $\mathcal{N}_x = \Phi(\mathcal{M}_x)$, qui est donc un idéal de \mathcal{B} .

Donnons-nous $k \in \mathcal{A}$ tel que $k(x) = 1$, et soit $j = \hat{\Phi}(k)$. Il existe un idéal maximal \mathcal{N}_x^* de \mathcal{B} qui contient \mathcal{N}_x et tel que $jh - h \in \mathcal{N}_x^* \quad \forall h \in \mathcal{B}$, avec $j \notin \mathcal{N}_x^*$; il suffit d'appliquer l'axiome de Zorn. On a donc un épimorphisme ψ de \mathcal{B} sur le corps $\mathcal{B}/\mathcal{N}_x^*$ avec $\psi(j) = 1$. Si on pose $\varphi = \psi \circ \hat{\Phi}$, on a $\varphi(f) = f(x) \quad \forall f \in \mathcal{A}$, donc $x \in G(Y)$ et par suite G applique homéomorphiquement Y sur E .

Lemme 1. Si \mathcal{A} possède une identité, alors son espace structurel est quasi-compact.

Soit en effet $\{U_\alpha\}$ un recouvrement ouvert de X . Tout $x \in X$ est contenu dans un ouvert élémentaire contenu dans un $U_{\alpha(x)}$, c'est à dire qu'il existe $f_x \in \mathcal{A}$ tel que $f_x(x) \neq 0$ et $\{y \in X; f_x(y) \neq 0\} \subset U_{\alpha(x)}$. Soit \mathcal{J} l'idéal engendré par les f_x . \mathcal{J} n'est contenu dans aucun idéal maximal. Comme \mathcal{A} est unitaire, ceci exige $\mathcal{J} = \mathcal{A}$; en particulier l'unité $1 \in \mathcal{J}$, donc il existe un nombre fini x_1, \dots, x_n d'éléments de X et des g_1, \dots, g_n éléments de \mathcal{A} ou du corps de base C tels que $1 = g_1 f_{x_1} + \dots + g_n f_{x_n}$.

Il en résulte que $X = U_{\alpha(x_1)} \cup \dots \cup U_{\alpha(x_n)}$, donc on a bien pu extraire un recouvrement fini et X est quasi-compact. Si X est séparé, il est alors compact.

Proposition 3. Si k est un élément donné de \mathcal{A} , alors l'ensemble $K = \{x \in X; k(x) \neq 0\}$ est un fermé quasi-compact de X .

Posons $\mathcal{J} = \{f - fk \text{ pour } f \in \mathcal{A}\}$; c'est un idéal, et K est l'ensemble des $x \in X$ tels que $g(x) \neq 0 \quad \forall g \in \mathcal{J}$, donc c'est un fermé. Mais dans l'application canonique de \mathcal{A} sur \mathcal{A}/\mathcal{J} , l'image de k est une unité pour \mathcal{A}/\mathcal{J} . D'après le lemme 1, il en résulte que l'espace structurel de \mathcal{A}/\mathcal{J} est quasi-compact, mais la proposition 2 montre que cet espace structurel n'est autre que K . C.Q.F.D.

Exemples. a) Prenons $C = \mathbb{Z}$ et $\mathcal{A} =$ l'anneau des entiers pairs.

Alors X est l'ensemble des nombres premiers impairs et les fermés sont X lui-même et ses sous-ensembles finis. Ici, X est quasi-compact bien que \mathcal{A} ne soit pas unitaire.

b) Soit \mathcal{A} l'algèbre des fonctions holomorphes dans le disque unité et continues sur le bord. L'espace structurel X est quasi-compact mais non séparé. Si $\mathcal{B} = \{f \in \mathcal{A}; f(\theta) = 0\}$ alors l'espace structurel de \mathcal{B} est $X - \theta$, ouvert quasi-compact de X .

Nous allons désormais faire une hypothèse supplémentaire sur \mathcal{A} .

Définition. L'algèbre \mathcal{A} est dite synthétique si $\forall x \in X$ et $f \in \mathcal{A}$ avec $f(x) \neq 0$, il existe $g \in \mathcal{A}$ tel que $fg = 1$ sur un voisinage de x .

Proposition 4. L'algèbre \mathcal{A} étant synthétique, l'espace structurel X est localement compact séparé.

De plus, pour tout idéal \mathcal{J} de \mathcal{A} et tout compact K de X tels que $\forall x \in K$, $\exists f \in \mathcal{J}$ avec $f(x) \neq 0$, on peut trouver un $k \in \mathcal{J}$ vérifiant $k = 1$ sur K .

Soit x_0 et x_1 deux éléments de X . On sait qu'il existe toujours f et $h \in \mathcal{A}$ avec $f(x_0) = h(x_1) = 0$ et $f(x_1) = h(x_0) = 1$. Puisque \mathcal{A} est synthétique, $\exists g \in \mathcal{A}$ tel que $fg = 1$ sur un voisinage V_1 de x_1 . Il suffit alors de poser $V_0 = \{x; h - fg h(x) \neq 0\}$. V_0 est un voisinage ouvert de x_0 et $V_0 \cap V_1 = \emptyset$, donc X est séparé.

Soient \mathcal{J} un idéal de \mathcal{A} et K un compact de X disjoint de l'ensemble des zéros communs aux éléments de \mathcal{J} : $\forall x \in K$, $\exists f_x \in \mathcal{J}$ avec $f_x(x) \neq 0$. \mathcal{A} étant synthétique, on peut en multipliant au besoin f_x par un élément de \mathcal{A} , supposer $f_x = 1$ sur un voisinage U_x de x . Dès lors, les ouverts U_x recouvrent K compact, donc on peut en extraire un recouvrement fini, c'est à dire qu'il existe $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{J}$ tels que $\forall x \in K$, \exists un indice $i(x)$ avec $f_{i(x)}(x) = 1$. Dans ces conditions, si on pose $k = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - f_i)$ il est évident que $k \in \mathcal{J}$ et $k = 1$ sur K .

Le support d'un élément $f \in \mathcal{A}$ est l'adhérence dans X de l'ensemble des x tels que $f(x) \neq 0$.

Si U est un ouvert de X , on note $\mathcal{A}(U)$ l'idéal formé des éléments $f \in \mathcal{A}$ à

K

support compact dans U . Cet idéal peut être trivial. Il est bien évident qu'on a toujours $\mathcal{A}_K(U) \subset \mathcal{A}(U)$.

Proposition 5. Si \mathcal{A} est une algèbre synthétique et \mathcal{J} un idéal de \mathcal{A} , alors une condition nécessaire et suffisante pour que le radical de \mathcal{J} soit $\mathcal{A}(U)$ est que $\mathcal{A}_K(U) \subset \mathcal{J} \subset \mathcal{A}(U)$.

Par conséquent, le plus petit idéal associé à l'ouvert U est $\mathcal{A}_K(U)$.

Supposons en effet que le radical de \mathcal{J} soit $\mathcal{A}(U)$. On sait que $\mathcal{J} \subset \mathcal{A}(U)$ et, par définition, $\forall x \in U, \exists f \in \mathcal{J}$ avec $f(x) \neq 0$. Mais d'après la proposition 4, \forall le compact $K \subset U, \exists k \in \mathcal{J}$ tel que $k = 1$ sur K . Ceci montre que $\mathcal{A}_K(U) \subset \mathcal{J}$, puisque si $g \in \mathcal{A}_K(U)$ a comme support K , l'élément $gk \in \mathcal{J}$ vérifie $gk(x) = g(x) \forall x \in K$, donc $gk = g$ d'après la semi-simplicité de l'algèbre, et par suite $g \in \mathcal{J}$.

Soit maintenant $x \in U$. \mathcal{A} étant synthétique, il existe $f \in \mathcal{A}(U)$ telle que $f = 1$ sur un ouvert contenant x ; on peut supposer que c'est un ouvert élémentaire Ω_g , donc $\exists g \in \mathcal{A}$ tel que $g(x) \neq 0$ et que $f=1$ sur l'ensemble des y où $g(y) \neq 0$. Donc le support de g est contenu dans le compact $\{z; f(z) = 1\}$, lui-même contenu dans U . Donc $\forall x \in U, \exists g \in \mathcal{A}_K(U)$ tel que $g(x) \neq 0$. Ceci prouve que $\mathcal{A}(U)$ est le radical de $\mathcal{A}_K(U)$.

Remarques. a) Si \mathcal{A} est synthétique, son espace structurel X est régulier, c'est à dire que \forall le fermé F et le compact K tel que $F \cap K = \emptyset$, alors \exists deux ouverts U et V tels que $U \supset F, V \supset K$ et $U \cap V = \emptyset$. En effet, d'après les propositions 4 et 5, il existe $f \in \mathcal{A}_K(F)$ tel que $f = 1$ sur K . Si E est le support de f , il suffit de poser $U = \{E$ et $V = \{x; f(x) \neq 0\}$.

b) Supposons que le corps de base C est le corps des complexes. Alors il peut a priori exister des épimorphismes de l'algèbre \mathcal{A} sur un corps strictement plus grand que C . Il peut aussi exister des épimorphismes non continus de \mathcal{A} sur C , si l'algèbre est

topologique. Un théorème dû à Gelfand montre que de telles difficultés ne se présentent pas dans le cas d'une algèbre de Banach.

Lemme 2 (Gelfand). Si \mathcal{A} est une algèbre de Banach sur \mathbb{C} et φ un épimorphisme de \mathcal{A} sur un corps K , alors $K = \mathbb{C}$ et φ est continue.

Soit $\mathcal{M} = \varphi^{-1}(0)$ le noyau : montrons que \mathcal{M} est fermé. Si $f \notin \mathcal{M}$, $\varphi(f) \neq 0$, et $\exists g$ et j avec $fg = j$ et $\varphi(j) = 1$. Prenons $h \in \mathcal{A}$ tel que $\|h\| < \|g\|^{-1}$.

Comme $\|hg\| < 1$, la série $\sum_0^{\infty} (hg)^n$ converge, et on a l'égalité

$$(f+h)g \sum_0^{\infty} (-hg)^n = j.$$

Par suite $\varphi(f+h) \neq 0$, donc si φ est non nulle pour f , φ est non nulle sur un voisinage de f , ce qui montre que \mathcal{M} est fermé. Dès lors $\mathcal{A}/\mathcal{M} = K$ est un corps normé contenant \mathbb{C} ; on va montrer que dans ces conditions $K = \mathbb{C}$. Supposons en effet qu'il existe $k \in K$ et $k \notin \mathbb{C}$. Alors, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $(k - \lambda)$ est inversible, et pour toute fonctionnelle linéaire F sur K on voit facilement que $F[(k - \lambda)^{-1}]$ est une fonction analytique de λ qui tend vers 0 quand $\lambda \rightarrow \infty$, donc qui est nulle d'après le théorème de Liouville. Par suite pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et toute fonctionnelle linéaire F , on a $F[(k - \lambda)^{-1}] = 0$. En particulier, $F(k^{-1}) = 0 \quad \forall F$, ce qui exige $k^{-1} = 0$, d'où une contradiction, et on a bien $K = \mathbb{C}$.

Problème. Soit $\mathcal{C}_0(X)$ l'algèbre des fonctions complexes continues s'annulant à l'infini sur l'espace localement compact séparé X . \mathcal{A} étant une sous-algèbre de $\mathcal{C}_0(X)$, on cherche à savoir si X s'identifie avec l'espace structurel \tilde{X} de \mathcal{A} .

Proposition 6. Si \mathcal{A} sépare les points de X , c'est à dire si $\forall x_0 \neq x_1 \in X$ il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x_0) = 0$ et $f(x_1) = 1$, alors il y a une injection continue naturelle F de X dans \tilde{X} , donc l'image est dense dans \tilde{X} .

Si $x \in X$, $f \rightarrow f(x)$ est un épimorphisme de \mathcal{A} sur \mathbb{C} qui définit donc un élément $f(x)$ de \tilde{X} . L'application F est manifestement injective. Or les fermés de \tilde{X} sont les ensembles $\{\tilde{x} ; f(\tilde{x}) = 0\}$, f étant un élément de \mathcal{A} . Mais f est continue, donc l'ensemble

$x ; f(x) = 0$ est fermé, et par suite l'image réciproque par F d'un fermé est fermée si F est continue. Reste à montrer que $F(X)$ est dense dans \tilde{X} . Sinon, il existerait un ouvert élémentaire $\Omega_g \neq \emptyset$ disjoint de $F(X)$, donc un $g \in \mathcal{A}$ tel que $\{\tilde{x} ; g(\tilde{x}) \neq 0\} \cap F(X) = \emptyset$, ce qui exige $g(x) = 0 \quad \forall x \in X$, donc $g = 0$ et $\Omega_g = \emptyset$, d'où contradiction.

Cette proposition est d'ailleurs moins forte qu'elle n'en a l'air car la topologie de \tilde{X} est a priori très faible : les éléments de \mathcal{A} eux-mêmes n'ont aucune raison d'être continus en tant que fonctions sur \tilde{X} .

Théorème 1. Soit \mathcal{A} une algèbre de Banach sous-algèbre de $\mathcal{C}_0(X)$, où X est un espace localement compact séparé. Soit \mathcal{D} une sous-algèbre dense dans \mathcal{A} et stable pour l'application des fonctions entières, c'est à dire que si f et $g \in \mathcal{D}$ et si Φ est une fonction entière, alors $f \Phi(g) \in \mathcal{D}$. Supposons de plus que si $f \in \mathcal{D}$ et $|f(x)| \leq c < 1$, alors $\frac{f}{1-f} \in \mathcal{A}$, et si $x_0 \in X$ et si U est un voisinage de x_0 , il existe $f \in \mathcal{D}$ telle que $f \geq 0$, $f(x_0) = 1$, et $f = 0$ hors de U .

Alors X s'identifie avec l'espace structurel de \mathcal{A} , et \mathcal{A} est une algèbre synthétique.

(Remarquons d'ailleurs que si $\mathcal{D} = \mathcal{A}$, les fonctions entières opèrent toujours puisque \mathcal{A} est algèbre de Banach).

Soit \tilde{X} l'espace structurel de \mathcal{A} . Les épimorphismes $f \rightarrow f(\tilde{x})$ de \mathcal{A} sur \mathbb{C} sont nécessairement continus en f comme on l'a vu, mais $f(\tilde{x})$ n'est pas toujours fonction continue de \tilde{x} .

On sait que cette fonction de \tilde{x} , définie sur \tilde{X} , s'appelle transformée de Gelfand de f , et que sa norme uniforme s'appelle norme spectrale de f . On démontre sur cette norme spectrale une égalité connue sous le nom de formule de rayon spectral :

$$\sup_{\tilde{x} \in \tilde{X}} |f(\tilde{x})| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f^n\|^{1/n}.$$

Comme $\frac{f}{1-f} = \sum_{n \geq 1} f^n$ la condition $\sup |f(\tilde{x})| \leq c < 1$ est bien nécessaire et suffisante

pour que $\frac{f}{1-f}$, comme fonction de \tilde{X} , existe. Il nous faut démontrer qu'il y a correspondance biunivoque entre X et \tilde{X} . On a défini une application naturelle F de X dans \tilde{X} continue et injective puisque ici \mathcal{D} , donc \mathcal{A} , sépare les points de X . De plus, F est ouverte : en effet, si U est un ouvert de X et $x_0 \in U$, on a supposé qu'il existe $f \in \mathcal{A}$ avec $f(x_0) = 1$ et $f = 0$ hors de U ; mais alors $V = \{\tilde{x} ; f(\tilde{x}) \neq 0\}$ est un voisinage de $F(x_0)$ dans \tilde{X} compris dans $F(U)$.

Pour montrer l'homéomorphisme entre X et \tilde{X} , il reste donc simplement à prouver que F est surjective. Supposons donc qu'il n'en soit pas ainsi, c'est à dire qu'il existe un épimorphisme φ de \mathcal{A} sur \mathcal{C} ne s'exprimant pas sous la forme $\varphi(f) = f(x)$ pour un $x \in X$.

Soient $x \in X$ et $k \in \mathcal{D}$ avec $k(x) \neq 0$ et $\varphi(k) = 1$. Il existe $h \in \mathcal{D}$ vérifiant $h(x) = 0$ et $\varphi(h) \neq 0$, car sinon on aurait $\varphi(f) = f(x) \quad \forall f \in \mathcal{D}$, donc $\forall f \in \mathcal{A}$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Posons alors $g^* = \varphi(h)k - h$ et $g_x = \frac{g^*}{g^*(x)}$. Cet élément $g_x \in \mathcal{D}$ vérifie $\varphi(g_x) = 0$ et $g_x(x) = 1$.

Donc à tout $k \in \mathcal{D}$ et $x \in X$ tels que $\varphi(k) = 1$ et $k(x) \neq 0$ on a associé $g_x \in \mathcal{D}$ tel que $\varphi(g_x) = 0$ et $g_x(x) = 1$. L'ensemble $K = \{x \in X ; |k(x)| \geq \frac{1}{2}\}$ est un compact. $\forall x \in K, \exists f_x \in \mathcal{D}$ avec $f_x(x) = 1, f_x \geq 0$ et $f_x(y) = 0$ si $\operatorname{Re} g_x(y) \leq \frac{1}{2}$; il suffit d'appliquer la seconde hypothèse sur \mathcal{D} en remarquant que $\{y ; \operatorname{Re} g_x(y) \geq \frac{1}{2}\}$ est un voisinage de x . Si on pose alors $h_x = f_x g_x$, on a $\operatorname{Re} h_x > 0$, et les ensembles $W_x = \{y \in X ; \operatorname{Re} h_x(y) > \frac{1}{2}\}$ forment, quand x varie, un recouvrement ouvert du compact K . On en extrait un recouvrement fini $W_{x_1} \cup W_{x_2} \cup \dots \cup W_{x_n}$. Si on pose alors $h = f_1 g_1 + \dots + f_n g_n$, $h \in \mathcal{D}$ vérifie $\operatorname{Re} h > \frac{1}{2}$ sur K et $\varphi(h) = 0$ puisque $\varphi(g_x) = 0 \quad \forall x$.

Or $\forall \lambda > 0, u = k e^{-\lambda h} \in \mathcal{D}$ puisque \mathcal{D} est stable pour l'application des fonctions entières. Mais pour λ assez grand, on aura $|u(x)| \leq \frac{1}{2} \quad \forall x \in X$; alors $v = \frac{u}{1-u} \in \mathcal{A}$ par hypothèse et $\varphi(u) = \varphi(k) \varphi(e^{-\lambda h}) = \sum_0^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} (\varphi(h))^n = 1$ car $\varphi(h) = 0$ et $\varphi(k) = 1$. On a alors une contradiction manifeste puisque $u - v + uv = 0$ donne

$$1 - \varphi(v) + \varphi(v) = 0.$$

Donc F est bien surjective, et X s'identifie à \tilde{X} . Montrons maintenant la seconde partie de l'énoncé, c'est à dire que \mathcal{A} est synthétique. Rappelons que cela signifie que si $f(x_0) = 1$, alors il existe $g \in \mathcal{A}$ avec $fg = 1$ sur un voisinage de x_0 . Soit donc l'ensemble des x où $|f(x)| \geq \frac{1}{2}$. Posons $\mathcal{B} = \mathcal{A}/\mathcal{A}(\mathbb{K})$. Comme l'idéal $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ est fermé, \mathcal{B} est une algèbre de Banach. Si Y est l'espace structurel de \mathcal{B} , on a vu une application naturelle G de Y dans X , car tout épimorphisme $\psi : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{C}$ induit un épimorphisme $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ en composant avec l'injection canonique de \mathcal{A} dans \mathcal{B} .

Montrons que $G(Y) \subset \mathbb{K}$. En effet, si $x \in \mathbb{K}$, il existe, d'après les hypothèses du théorème, $f \in \mathcal{A}$ tel que $f(x) = 1$ et $f = 0$ sur \mathbb{K} , donc $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$, et il est bien évident qu'aucun épimorphisme de \mathcal{B} dans \mathbb{C} défini par x .

D'autre part G est injective, et $G : Y \rightarrow \mathbb{K}$ est biunivoque. On voit aisément que G est un homéomorphisme, donc Y est compact. Soit \tilde{f} l'image de f dans \mathcal{B} . On a $|\tilde{f}| \geq \frac{1}{2}$ sur Y , donc \tilde{f} est un élément inversible de \mathcal{B} , donc $\exists g \in \mathcal{A}$ avec $fg = 1$ mod $\mathcal{A}(\mathbb{K})$, ce qui signifie $fg = 1$ sur \mathbb{K} . C.Q.F.D.

On rappelle qu'une algèbre topologique remplit la condition de Wiener si $\mathcal{A} = \bar{\mathcal{A}}_{\mathbb{K}}$, en notant $\mathcal{A}_{\mathbb{K}} = \mathcal{A}_{\mathbb{K}}(X)$ l'idéal formé des éléments de \mathcal{A} à support compact. On a alors le résultat :

Corollaire. Si X est une variété C^∞ et \mathcal{A} une sous-algèbre de $\mathcal{C}_0(X)$ qui est complétion de $\mathcal{D}(X)$ pour une norme dominant la norme uniforme, alors X est l'espace structurel de \mathcal{A} et \mathcal{A} est une algèbre synthétique satisfaisant la condition de Wiener.

On retombe en effet sur les hypothèses du théorème précédent en prenant $\mathcal{D} = \mathcal{D}(X)$.

Exemples. a) Si $X = \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{A} = \mathcal{F}L^1$ muni de la norme transportée de la norme de L^1 , les hypothèses du corollaire sont bien remplies et les conclusions s'appliquent.

De même si $\mathcal{A} = \mathcal{H}_v L_v^1$. Dans ces deux cas, les idéaux maximaux réguliers sont donc exactement donnés par les points de \mathbb{R}^n .

b) Prenons $X = \mathbb{R}^n$ et pour \mathcal{A} l'algèbre des fonctions transformées de Fourier des

mesures bornées, c'est à dire des fonctions de la forme $f(x) = \int e^{i\xi \cdot x} d\mu(\xi)$, avec la norme $\|f\| = \int |d\mu|$. \mathcal{A} possède bien entendu une identité, transformée de Fourier de δ , donc son espace structurel \tilde{X} est compact. Par suite, X et \tilde{X} sont différents, mais on sait que l'injection naturelle \mathcal{F} de X dans \tilde{X} donne une image dense. D'autre part, un résultat classique dit qu'il existe $f \in \mathcal{A}$ non inversible dans \mathcal{A} et vérifiant $f \gg 1$ sur X ; par conséquent f s'annule au moins en un point \tilde{x} de \tilde{X} , puisqu'elle n'est pas inversible, et pourtant f est supérieure à 1 sur un sous-ensemble dense de \tilde{X} , à savoir l'image de X . Ceci montre que f n'est pas une fonction continue sur \tilde{X} .

Ceci montre bien qu'il ne faut pas confondre les deux topologies de \tilde{X} : celle de \tilde{X} en tant qu'espace structurel, et la topologie la moins fine rendant continus les éléments de \mathcal{A} , cette dernière étant la topologie employée dans la théorie de Gelfand. D'autre part, dans cet exemple, \mathcal{A} n'est pas stable pour la conjugaison complexe. Il existe en effet $f \in \mathcal{A}$ et $\tilde{x} \in \tilde{X}$ tels que, si on considère l'élément g de \mathcal{A} défini par $g(x) = \bar{f}(x)$, on ait $g(\tilde{x}) = 0$ alors $f(\tilde{x}) = 1$.

CHAPITRE VI

Formule sommatoire de Poisson

\mathbb{Z}^n désigne l'ensemble des points de \mathbb{R}^n à coordonnées entières.

$$\hat{f}(\xi) = \int e^{-2i\pi\xi x} f(x) dx \quad \text{si } f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n).$$

L'application $f \rightarrow \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} f(x)$ de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ dans \mathbb{C} est une distribution tempérée \sum ,

elle est évidemment linéaire, il faut montrer qu'elle est continue : soit $M(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{|x|^{2n} |f(x)|\}$ alors $|\int f \sum| \leq |f(0)| + \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} \frac{M(f)}{|x|^{2n}} \Rightarrow |\int f \sum| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| + k M(f)$, k ne dépendant pas de f .

Nous nous proposons d'établir la formule de Poisson : si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^n} f(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(\xi). \quad \text{Ceci équivaut à } \sum = \hat{\sum}.$$

Démonstration. $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$.

Soit $t \in \mathbb{T}^n$, prenons un représentant x de t . L'expression $\sum_{z \in \mathbb{Z}^n} f(x+z)$ est indépendante du représentant choisi, on a donc défini par ce procédé une fonction numérique

$$\varphi \text{ sur } \mathbb{T}^n \quad \varphi : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{C} \quad \varphi(t) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} f(x+z) \quad \text{où } x \in t \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{T}^n).$$

Calculons les coefficients de Fourier de φ :

$$c_k \in \mathbb{Z}^n, \quad c_k = \int_{\mathbb{T}^n} e^{-2i\pi k t} \varphi(t) dt = \int_{\mathbb{T}^n} e^{-2i\pi k t} \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} f(x+z) dt = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \int_{\{x | 0 < x_i < 1\}} e^{-2i\pi k x} f(x+z) dx$$

en définitive

$$c_k = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi k x} f(x) dx = \hat{f}(k)$$

appartenant à $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ la famille $\{\hat{f}(k)\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$ est sommable, il en résulte que la série

$$\text{le Fourier } \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k e^{2i\pi k t} \text{ est normalement convergente et } \varphi(t) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(k) e^{2i\pi k t}.$$

par définition de φ nous avons $\varphi(0) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} f(z)$ d'où la formule.

Exemple. $n = 1$, $f(x) = \exp(-\pi \lambda x^2)$. On sait que $\hat{f}(\xi) = \lambda^{-\frac{1}{2}} \exp(-\pi \lambda^{-1} \xi^2)$. Si on pose $\theta(\lambda) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} e^{-\pi \lambda x^2}$ on en déduit $\theta(\lambda) = \lambda^{-\frac{1}{2}} \theta(\lambda^{-1})$, formule donnée par Poisson (Cahiers

de l'Ecole Polytechnique 1823). Ce cas spécial équivaut à la formule générale parce que

$\sum e^{-g(\mathbb{R}^n)}$ est une distribution paire dans chacun de ses arguments. Donc il suffit de calculer $\hat{\sum}$ par $\hat{\sum} g = \sum \hat{g}$ où les fonctions tests g constituent un ensemble total

parmi les fonctions paires dans chacun de ses arguments. Les g de la forme $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = e^{-\pi \lambda_1 x_1^2 - \pi \lambda_2 x_2^2 \dots - \pi \lambda_n x_n^2}$ ont cette propriété. Alors

$$\sum \hat{g} = \lambda_1^{-\frac{1}{2}} \theta(\lambda_1^{-1}) \dots \lambda_n^{-\frac{1}{2}} \theta(\lambda_n^{-1}) \text{ et donc}$$

$$\sum \hat{g} = \theta(\lambda_1) \dots \theta(\lambda_n) = \sum g$$

ce qui entraîne $\hat{\sum} = \sum$.

Equation fonctionnelle de la fonction ζ . Soit $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}$ la fonction de Riemann.

Puisque $\frac{1}{2} \{ \theta(\lambda) - 1 \} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\pi \lambda k^2}$ on obtient

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{2} \{ \theta(\lambda) - 1 \} \lambda^{\frac{1}{2}s-1} d\lambda = \pi^{-\frac{1}{2}s} \Gamma(\frac{1}{2}s) \zeta(s),$$

l'intégration terme par terme étant légitime si $\text{Re } s > 1$. Nous écrivons

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{2} \{ \theta(\lambda) - 1 \} \lambda^{\frac{1}{2}s-1} d\lambda = A(s) + B(s) - s^{-1} - (1-s)^{-1}$$

$$\text{où } A(s) = \int_1^{\infty} \frac{1}{2} \{ \theta(\lambda) - 1 \} \lambda^{\frac{1}{2}s-1} d\lambda \text{ et } B(s) = \int_0^1 \frac{1}{2} \{ \theta(\lambda) - \lambda^{-\frac{1}{2}} \} \lambda^{\frac{1}{2}s-1} d\lambda.$$

L'intégrale pour $A(s)$ est absolument convergente quel que soit s car $\theta(\lambda) - 1 \rightarrow 0$

plus vite que n'importe quelle puissance de λ lorsque $\lambda \rightarrow \infty$. Donc $A(s)$ est une

fonction entière. D'autre part, en changeant λ en λ^{-1} dans l'intégrale, nous avons

$$A(s) = \int_0^1 \frac{1}{2} \{ \theta(\lambda^{-1}) - 1 \} \lambda^{-\frac{1}{2}s-1} d\lambda$$

et suivant la formule de Poisson, $\theta(\lambda^{-1}) = \lambda^{\frac{1}{2}} \theta(\lambda)$, ce qui donne

$$A(s) = \int_0^1 \frac{1}{2} \{ \theta(\lambda) - \lambda^{-\frac{1}{2}} \} \lambda^{\frac{1}{2}s-1} d\lambda = B(1-s).$$

Or, nous venons de démontrer que

$$\pi^{-\frac{1}{2}s} \Gamma(\frac{1}{2}s) \zeta(s) = \Delta(s) + \Delta(1-s) - s^{-1} - (1-s)^{-1}$$

où Δ est une fonction entière. En particulier, $\pi^{-s} \Gamma(\frac{1}{2}s) \zeta(s)$ reste inchangée si l'on remplace s par $1-s$.

Application à la transformation de Hankel.

Considérons l'application $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$
 $\varphi \longrightarrow \varphi(\frac{1}{2}|x|^2)$.

Soit Q_n la transformée de \sum par l'application duale :

$$Q_n \in \mathcal{F}'(\mathbb{R}^+) \quad \int Q_n \varphi = \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} \varphi(\frac{1}{2}|x|^2)$$

$$Q_n = \sum_{t \in \mathbb{R}_+} r_n(t) \delta_{\frac{1}{2}t}$$

où $r_n(t)$ est le nombre des $x \in \mathbb{Z}^n$ tels que $|x|^2 = t$. Le fait que $\widehat{\sum} = \sum$ entraîne

$$\text{que } \mathcal{L}_v Q_n = Q_n \quad v = \frac{n}{2} - 1.$$

Posons $R_n(T) = \sum_{t \leq T} r_n(t)$ c'est le nombre de points du réseau situés dans la boule fermée de centre 0 et de rayon T .

Estimation de $R_n(\rho)$.

L'ensemble des pavés d'arêtes 1 centrés en chacun des points à coordonnées entières de la boule de centre 0 de rayon ρ est recouvert par la boule de rayon $\rho + \frac{1}{2}\sqrt{n}$ et recouvre la boule de rayon $\rho - \frac{1}{2}\sqrt{n}$. Par suite si $V_n(\rho)$ désigne le volume de la boule de rayon ρ nous avons

$$R_n(\rho) - V_n(\rho) = O(\rho^{n-1}) \text{ lorsque } \rho \longrightarrow +\infty.$$

D'une façon plus générale nous allons étudier le nombre des points de \mathbb{Z}^n situés dans un ouvert B borné de \mathbb{R}^n .

$\Lambda(x)$ désigne le nombre des points de $\mathbb{Z}^n \cap (B - x)$.

Si λ est la fonction caractéristique de B nous avons $\Lambda(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^n} \lambda(x + y)$

V désigne le volume de B .

Théorème de Minkowski. Soit B un corps convexe symétrique par rapport à 0 . On a $\Lambda(0) > 1$ si $V > 2^n$.

Posons
$$\varphi(x) = 2^n V^{-1} \int \lambda(2x + 2y) \lambda(2y) dy$$

 $\varphi(0) = 1$
 $\varphi(\{B\} = \{0\})$ en effet $\varphi(x) \neq 0 \iff (\exists y) (2x + 2y \in B \text{ et } 2y \in B)$ d'où $x \in B$
 $\varphi(x) = 2^n V^{-1} \lambda_{1/2} * \tilde{\lambda}_{1/2}(x)$ où $\lambda_{1/2}$ est la fonction caractéristique de $B/2$ et
 $\tilde{f}(x) = \bar{f}(-x)$

$$\hat{\varphi}(\xi) = 2^n V^{-1} |\hat{\lambda}_{1/2}(\xi)|^2$$

$$\hat{\lambda}_{1/2}(\xi) = 2^{-n} \hat{\lambda}(\xi/2) \text{ d'où } \hat{\varphi}(\xi) = 2^{-n} V^{-1} |\hat{\lambda}(\xi/2)|^2.$$

Soit $\rho_m \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ une suite régularisante : $\rho_m \geq 0$ $\int \rho_m dx = 1$
 $\text{supp } \rho_m \subset B(0, \frac{1}{m})$.

On peut imposer à ρ_m les conditions $\forall \xi \in \mathbb{Z}^n \quad \hat{\rho}_m(\xi) \geq 0$

Appliquant la formule de Poisson à $\varphi * \rho_m$ nous obtenons :

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^n} \varphi * \rho_m(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{\varphi}(k) \hat{\rho}_m(k) = 2^n V^{-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\hat{\lambda}(\frac{1}{2} k)|^2 \hat{\rho}_m(k) \text{ d'où}$$

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^n} \varphi * \rho_m(x) \geq 2^{-n} V.$$

La somme du premier membre ne comprenant qu'un nombre fini de termes on obtient en faisant tendre m vers $+\infty$ $\sum_{x \in \mathbb{Z}^n} \varphi(x) \geq 2^{-n} V > 1$ par conséquent $\sum_{x \in \mathbb{Z}^n} \varphi(x) > 0$ ce qui prouve qu'existe dans B un point distinct de 0 appartenant à \mathbb{Z}^n .

Remarque. Le résultat obtenu est le meilleur possible comme le montre l'exemple suivant :

$$B =]-1, 1[\quad V = 2^n \quad \Lambda(0) = 1.$$

Corollaire. Soient $A = (a_{ij})$ une matrice (n, n) réelle régulière et a_1, \dots, a_n n nombres réels positifs. Si $a_1 a_2 \dots a_n > |\det A|$ le système d'inéquations :

$$0 \leq \sum a_{ij} x_j \leq a_i$$

$$|\sum a_{ij} x_j| < a_i \quad 1 < i \leq n$$

possède une solution non triviale en nombres entiers.

Soit $\varepsilon > 0$ $B_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |(\Delta x)_1| < a_1 + \varepsilon \text{ et } |(\Delta x)_i| < a_i \quad 1 < i \leq n\}$

B_ε est un corps convexe symétrique par rapport à 0, son volume est

$$2^n (a_1 + \varepsilon) a_2 a_3 \dots a_n |\det A|^{-1} > 2^n.$$

Donc il existe un point de $\mathbb{Z}^n - \{0\}$ dans B_ε comme il n'y a qu'un nombre fini de points du réseau dans chaque B_ε et que les B_ε sont filtrants \cap il existe un point de $\mathbb{Z}^n - \{0\}$ dans $\bigcap_{\varepsilon > 0} B_\varepsilon$, $\bigcap_{\varepsilon > 0} B_\varepsilon$ étant symétrique, il y a bien un $x \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$ vérifiant le système.

Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\int f(x) dx = 1$ $f(x) \geq 0$ et telle que $(\text{supp} f - \text{supp} f) \cap \mathbb{Z}^n = \{0\}$

$$\Lambda * f(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^n} \lambda * f(x + y).$$

Appliquons la formule de Poisson à la fonction $y \mapsto \lambda * f(x + y)$

$$\int e^{-2i\pi \xi y} \lambda * f(x + y) dy = e^{2i\pi \xi x} \hat{\lambda}(\xi) \cdot \hat{f}(\xi)$$

$$\Lambda * f(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \hat{\lambda}(\xi) \cdot \hat{f}(\xi) e^{2i\pi \xi x}$$

$\hat{\lambda}(0) = \int \lambda(x) dx = 1$ posant $\Delta(x) = \Lambda(x) - 1$ on obtient :

$$\Delta * f(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \hat{\lambda}(\xi) \cdot \hat{f}(\xi) e^{2i\pi \xi x}$$

$$|\Delta * f(x)| \leq \sum_{1 \leq |\xi| \leq r} |\hat{\lambda}(\xi)| |\hat{f}(\xi)| + \sum_{|\xi| > r} |\hat{\lambda}(\xi)| |\hat{f}(\xi)|$$

$$\leq \sum_{1 \leq |\xi| \leq r} |\hat{\lambda}(\xi)| + \left[\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{|\xi| > r} |\hat{\lambda}(\xi)|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

car $\forall \xi \quad |\hat{f}(\xi)| \leq \int f(x) dx = 1$ en définitive

$$|\Delta * f(x)| \leq \sum_{1 \leq |\xi| \leq r} |\hat{\lambda}(\xi)| + \|f\|_2 \left[\sum_{|\xi| > r} |\hat{\lambda}(\xi)|^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Prenant pour B la boule $B_{\rho \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}}$ de rayon ρ on obtient $\Delta_\rho(x)$.

Théorème. $|\Delta_\rho(x)| \leq C_n \rho^{\frac{n-1}{n+1}}$

Démonstration : $|\hat{\lambda}_\rho(\xi)| < a |\xi|^{-\frac{n+1}{2}}$ où a ne dépend que de n

$$\hat{\lambda}_\rho(\xi) = \rho^n \hat{\lambda}(\rho \xi) \quad |\hat{\lambda}_\rho(\xi)| \leq a \rho^{\frac{n-1}{2}} |\xi|^{-\frac{n+1}{2}}$$

$$|\Delta_\rho(x)| \leq a^n \rho^{\frac{n-1}{2}} \rho^{\frac{n-1}{2}} + a^n \|f\|_2 \rho^{\frac{n-1}{2}} r^{-\frac{1}{2}}.$$

Prenons pour f une fonction dont le support est dans la boule de centre O de rayon h ,
on a

$$\Delta_{\rho-h}(x) \leq f * \Delta_{\rho}(x) \leq \Delta_{\rho+h}(x).$$

Par suite

$$|\Delta(x)| = \Theta(\rho^{n-1}h) + \Theta(\rho^{\frac{n-1}{2}} r^{\frac{n-1}{2}}) + \Theta(h^{-\frac{n}{2}} \rho^{\frac{n-1}{2}} r^{-\frac{1}{2}}).$$

Posons $h = \rho^{\alpha}$ $r = \rho^{\beta}$ et déterminons α et β pour que les 3 termes aient le même ordre :

$$n-1 + \alpha = \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} \beta = -\frac{n}{2} \alpha + \frac{n-1}{2} - \frac{1}{2} \beta$$

$$\beta = -\alpha = \frac{n-1}{n+1}.$$

On obtient

$$|\Delta(x)| = \Theta(\rho^{(n-1)\frac{n}{n+1}}) \text{ lorsque } \rho \rightarrow +\infty.$$

Si $n = 2$ $|\Delta(x)| = \Theta(\rho^{2/3})$ (Sierpinski 1906)

$n = 3$ $|\Delta(x)| = \Theta(\rho^{3/2})$.

