UNIVERSITÉ PARIS XI
U.E.R. MATHÉMATIQUE
91405 ORSAY FRANCE

N° 126 75-30

STABILITE STRUCTURELLE EQUIVARIANTE

(première partie)

par

V. POENARU

INTRODUCTION

Dans ce qui suit on va considérer des variétés C^∞ , compactes, sur lesquelles un groupe de Lie compact G , agit (différentiablement). Dans $C^\infty(X,Y)$, l'ensemble des applications G-équivariantes , c'est-à-dire telles que :

$$g f(x) = f(gx)$$

sera désigné par $C^\infty_G(X,Y)$. De même, $\mathrm{Diff}_G(X)$ (respectivement $\mathrm{Diff}_G(Y)$) va désigner l'ensemble des difféomorphismes C^∞ , G-équivariants de X (respectivement de Y) .
On a une action naturelle :

$$\mathrm{Diff}_G(X)\times\mathrm{Diff}_G(Y)\times C^\infty_G(X,Y) \xrightarrow{\Phi} C^\infty_G(X,Y) ,$$

donnée par :

$$\Phi(h,g,f) = g\circ f\circ h^{-1}$$

Si f est fixée, Φ induit l'application

$$\mathrm{Diff}_G(X)\times\mathrm{Diff}_G(Y) \xrightarrow{\Phi_f} C^\infty_G(X,Y)$$

appelée orbite de f . L'espace $C^\infty_G(X,Y)$, en tant que partie de $C^\infty(X,Y)$ hérite de la topologie C^∞ .

Si A,B,C sont trois variétés lisses de dimension finie, on pose, par définition:

$$C^\infty(A,C^\infty(B,C)) = C^\infty(A\times B,\ C) .$$

Si $N\subset C^\infty(A,B)$, $N'\subset C^\infty(A',B')$, une application de $\psi : N\to N'$ est dite faiblement différentiable , si pour toute variété lisse de dimension finie, elle induit, canoniquement, une application :

$$C^\infty(P,N)\xrightarrow{\psi_*} C^\infty(P,N') .$$

Si Z' est un espace topologique et Z'' une variété lisse, une application de source $Z'\times Z''$ est dite $C^{0,\infty}$ si elle est continue, et ∞ - dérivable en Z'' avec toutes les dérivées continues (en Z',Z'') .

Par définition $f\in C^\infty_G(X,Y)$ est STABLE s'il existe un voisinage $f\in N\subset C^\infty_G(X,Y)$ et une application Ψ rendant commutatif le diagramme ci-dessous, où i est l'inclusion canonique :

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Diff}_G(X)\times \mathrm{Diff}_G(Y) \arrow[d, "\Phi_f"] \\ N \arrow[ur, "\Psi"] \arrow[r, "i"'] & C^\infty_G(X,Y) . \end{tikzcd}$$

Si, en plus Ψ est continue, on dira que f est FORTEMENT STABLE.

On va définir, plus loin, la notion de stabilité infinitésimale.

Le but de ce mémoire est de prouver que :

$$\boxed{\text{Stabilité infinitésimale} \implies \text{Stabilité (forte)}}$$

Ceci est une généralisation du théorème de J. Mather [6] (voir aussi [10]).

Soit X un espace topologique sur lequel le groupe G agit, et $E \to X$ un fibré vectoriel. Par définition on a une structure de G-fibré, s'il existe une représentation

$$G \longrightarrow \mathrm{Aut}(E \to X)$$

$(g \mapsto g')$ telle que :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "g'"] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ X \arrow[r, "g"] & X \end{tikzcd}$$

soit commutatif et que g' soit un automorphisme linéaire au niveau de chaque fibre.

Par exemple, $TX \to X$ est naturellement un G-fibré, avec $g' = Tg$ (la représentation tangentielle).

Pour un G-fibré, on peut considérer les sections invariantes :
$\xi \in \Gamma(E)^G \subset \Gamma(E)$, caractérisées par la propriété :

$$g'\xi(x) = \xi(gx) \quad .$$

En particulier, on a les champs de vecteurs (C^∞) invariants :

$$\Gamma^\infty(TX)^G \subset \Gamma(TX) \quad ,$$

avec

$$Tg \,.\, \xi(x) = \xi(gx) \quad .$$

Si $f \in C^{\infty}_{G}(X,Y)$, le fibré induit

$$f^{*}TY \longrightarrow X$$

possède une structure naturelle de G-fibré. Si on pense à ses sections comme étant des flèches η:

$$\begin{tikzcd} & TY \arrow[d] \\ X \arrow[ur, "\eta"] \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd} ,$$

les sections invariantes sont celles pour lesquelles

$$\underbrace{Tg \, . \, \eta(x)}_{\text{action de } Tg \text{ dans } TY} = \underbrace{\eta(gx)}_{\text{action de } G \text{ dans } X} .$$

On a des applications R-linéaires :

$$\alpha_f \; : \; \Gamma^{\infty}(TY)^G \longrightarrow \Gamma^{\infty}(f^{*}TY)^G$$

$$\beta_f \; : \; \Gamma^{\infty}(TX)^G \longrightarrow \Gamma^{\infty}(f^{*}TY)^G$$

définies à partir du diagramme

$$\begin{tikzcd} TX \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, shift left] & TY \arrow[d, shift left] \\ X \arrow[u, shift left, "\xi"] \arrow[ur, shift left, "\beta_f(\xi)"] \arrow[ur, shift right, "\alpha_f(\eta)"'] \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[u, shift left, "\eta"'] \end{tikzcd} .$$

Donc : $\alpha_f(\eta) = \eta \circ f$ et

$\beta_f(\xi) = Tf \circ \xi$.

Par définition, f est INFINITESIMALEMENT STABLE , si $\beta_f + \alpha_f$ est une surjection :

$$\Gamma^{\infty}(TX)^G + \Gamma^{\infty}(TY)^G \xrightarrow{\beta_f + \alpha_f} \Gamma^{\infty}(f^{*}TY)^G \to 0 .$$

On peut énoncer maintenant le

THEOREME DE STABILITE EQUIVARIANTE : - " Soit $f \in C^\infty_G(X,Y)$, infinitésimalement stable.

i) Alors :

Soit (Z_1, z_1^o) un germe d'espace topologique qui est ou bien métrisable ou bien compact et (Z_2, z_2^o) un germe de variété C^∞ .

Pour chaque germe d'application :

$$\psi \in C^{o,\infty}_{z_1^o,\, z_2^o}(Z_1 \times Z_2 \,,\, C^\infty_G(X,Y))$$

tel que $\psi(z_1^o, z_2^o) = f$, il existe :

$$\Psi \in C^{o,\infty}_{z_1^o, z_2^o}(Z_1 \times Z_2 \,,\, \mathrm{Diff}_G(X) \times \mathrm{Diff}_G(Y)) \ ,$$

tel que $\Psi(z_1^o, z_2^o) = (id_X) \times (id_Y)$ et que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Diff}_G(X) \times \mathrm{Diff}_G(Y) \arrow[d, "\Phi_f"] \\ Z_1 \times Z_2 \arrow[ur, "\Psi"] \arrow[r, "\psi"'] & C^\infty_G(X,Y) \ . \end{tikzcd}$$

ii) f est fortement stable . "

COROLLAIRE : - "Si $f \in C^\infty_G(X,Y)$ est stable dans le sens habituel elle est stable dans le sens equivariant".

Le point ii) résulte de i) vu que $C^\infty_G(X,Y)$ est métrisable.

Il y a, aussi, une version germifiée du théorème de stabilité équivariante, qui a été démontrée indépendemment par F.Ronga [13] .

La présente généralisation de la théorie de Mather est rendue possible par l'extension au cas C^∞ du théorème de finitude de la théorie des invariants de Hilbert ([2], [16]), due à G. Schwarz [14].

Ce travail continue le programme commencé dans [12] .

Je remercie J. Bochnak, P. Deligne, A. Douady et D. Spring pour les conversations très utiles que j'ai eues avec eux, de même que G. Schwarz, pour m'avoir envoyé [14], et C.T.C. Wall pour m'avoir posé le problème de la stabilité équivariante.

Dans des parties ultérieures de ce mémoire on espère prouver que

stabilité ==> stabilité infinitésimale.

(De toute façon dans une seconde partie on montre que la stabilité infinitésimale est une condition ouverte).

CHAPITRE O : - TOPOLOGIE ET ANALYSE DIFFERENTIELLES EQUIVARIANTES.-

1) VOISINAGES TUBULAIRES :

Pour plus de détails concernant les notions de topologie différentielle utilisées dans ce mémoire, on renvoie à [1], [4] .

Si G est un groupe de Lie compact qui opère sur la variété X , on va considérer les fonctions G-invariantes sur X :

$$C^{\infty}(X)^G \subset C^{\infty}(X)$$

(c'est-à-dire les fonctions telles que $f(gx) = f(x)$) .

Si $d\mu(g)$ est la mesure de Haar sur G , on définit une retraction :

$$C^{\infty}(X) \xrightarrow{Av} C^{\infty}(X)^G$$

par :

$$Av.h(x) = \int_G h(gx)d\mu(g).$$

[D'une manière analogue on va introduire

$$\Gamma^{\infty}(TX) \xrightarrow{Av} \Gamma^{\infty}(TX)^G$$

par :

$$Av.\eta(x) = \int_G Tg^{-1}.\eta(gx)d\mu(g),$$

et des retractions analogues dans des G-fibrés quelconques.]

LEMME 1.1. : - "Soit $K \subset X$ un compact invariant. Il existe une sous-variété compacte, à bord $\neq \emptyset$: $Q \subset X$, telle que :

a) $K \subset \text{int } Q$

b) $\dim Q = \dim X$

c) Q est G-invariante. (Donc ∂Q est, aussi, une sous-variété G-invariante de X)."

Démonstration

On peut construire une application C^∞ , propre :

$$X \xrightarrow{\varphi} [0,\infty]$$

telle que $\varphi^{-1}(0) = K$.

On considère la fonction G-invariante, C^∞ :

$$\psi(x) = \int_G \varphi(gx)d\mu(g) \ .$$

On remarque que :

$$K = \psi^{-1}(0) \ .$$

Je dis que cette fonction est, aussi, propre.

En effet, si $x_1, x_2, \ldots\ldots$ sont des points de X , tendant vers l'infini, les G-orbites Gx_n sont, à partir d'un certain n , en dehors d'un compact donné, quelconque $L \subset X$.

En particulier, puisque φ est propre :

$$\lim_{n=\infty} \{\inf \varphi(Gx_m) \ , \ m \geq n\} = \infty \ .$$

On en déduit que $\lim_{n=\infty} \psi(x_n) = \infty$, donc ψ est propre.

Maintenant, on peut prendre une valeur régulière $\epsilon > 0$ de la fonction G-invariante ψ , et définire Q par :

$$Q = \psi^{-1}[0,\epsilon] \ .$$

Ceci finit la démonstration.

Soit maintenant, comme avant, X une variété sur laquelle G agit et $Y \subset X$ une sous-variété G-invariante. On peut construire une métrique riemanienne G-invariante sur X . Ceci fait du fibré normal $\nu(Y)$ un G-fibré (en fait muni d'une métrique euclidienne, avec action orthogonale de G) .

Disons que le fibré normal est :

$$Y \xrightarrow{i} \nu(Y) \xrightarrow{p} Y$$

(i et p sont G-equivariants) .

Le lemme suivant est classique :

LEMME 1.2. - "Il existe un $\epsilon > 0$ tel que si $N(Y,\epsilon)$ est l'espace total du fibré en disques de rayon ϵ , attaché à $\nu(Y)$, on ait un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} N(Y,\epsilon) \arrow[rr, hook, "T"] & & X \\ & Y \arrow[ul, "i"] \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

où $T \in C^\infty_G(N(Y,\epsilon),X)$." (T est un plongement équivariant.)

(On remarque que $N(Y,\epsilon)$ possède une structure naturelle de G-variété à bord).

2) "PLONGEMENTS" :

Le résultat suivant est crucial pour ce mémoire :

LEMME 1.3. -(" Théorème de plongement") : "Soit X une variété C^∞ compacte, sur laquelle le groupe de Lie compact G , agit différentiablement. Il existe une entier positif N, tel que, si l'on considère l'espace euclidien R^N , avec l'action triviale de G , il existe :

$$F \in C^\infty_G(X,R^N)$$

tel que la flèche F^* :

$$0 \leftarrow C^\infty(X)^G \xleftarrow{F^*} C^\infty(R^N) \equiv C^\infty(R^N)^G$$

est surjective".

Démonstration :

[On appelle le lemme 1.3 "théorème de plongement" parce que, heuristiquement parlant, il nous dit que "l'espace des orbites" X/G , muni de l'anneau $C^\infty(X)^G$ (qu'on interprète comme étant les fonctions C^∞ sur X/G) se "plonge d'une manière C^∞"

dans un espace euclidien de dimension suffisamment grande] .

Je rappelle qu'il y a un autre théorème de plongement, plus facile :

LEMME 1.3.1. (Palais [8], Mostow [7])- : "Soit X une variété C^∞ compacte, sur laquelle opère un groupe de Lie compact G . Alors, il existe une représentation fidèle $G \subset O(n)$ (qu'on va interpréter comme action de G sur R^n) et un plongement equivariant :

$$e \in P\ell_G^\infty(X,R^n) = P\ell^\infty(X,R^n) \cap C_G^\infty(X,R^n)."$$

Je rappelle maintenant le résultat fondamental de G. Schwarz [14] .

Dans un travail classique Hilbert avait montré que si $G \subset O(n)$ est compact, il existe une application polynomiale (donnée par un nombre fini de polynômes homogènes de degré >0) :

$$x \in R^n \xrightarrow{\rho} R^k \ni y$$

telle que, si l'on écrit

$$\rho(x) = (\rho_1(x), \ldots, \rho_k(x)),$$

alors :

$$\rho_i(x) \in R[x]^G \text{ , et } \rho^* :$$
$$O \longleftarrow R[x]^G \xleftarrow{\rho^*} R[y]$$

est surjective . (On pense içi à l'action triviale de G sur R^k , donc ρ est équivariante, et

$$R[y] \equiv R[y]^G \text{ .)}$$

Voir [2], [16] .

On a :

LEMME 1.3.2. (Schwarz [14]).- : " $O \longleftarrow C^\infty(R^n)^G \xleftarrow{\rho^*} C^\infty(R^k)$ est surjective."

Ceci n'est rien d'autre que le lemme 1.3. pour le cas où $X = R^n$.

Maintenant, si l'on applique à X le lemme 1.3.1. , on voit que

$$O \longleftarrow C^\infty(X)^G \xleftarrow{e^*} C^\infty(R^n)^G$$

est surjective (comparer au lemme 1.5. ci-dessous).

Il suffit donc de prendre $k=N$, et $F=\rho\circ e$, ce qui prouve 1.3.

Avant d'aller plus loin on donne le lemme suivant :

LEMME 1.3.3.-: " Soit Z un espace topologique qui est ou bien compact ou bien métrisable . Soit F un E.V.T. localement convexe, fréchétique. On va considérer $C^0(Z,F)$, l'E.V.T. des applications continues $Z \to F$, muni de la topologie compacte-ouverte ; de même $C^0(Z)$ sera l'E.V.T. des applications continues $Z \to R$ (muni de la même topologie).

Alors : $C^0(Z,F) = C^0(Z) \hat{\otimes}_\epsilon F$.

En particulier, si F est nucléaire , on a :

$$C^0(Z,F) = C^0(Z) \hat{\otimes} F \ ."$$

Démonstration : (d'après A. Douady)

Si Z est compact, le résultat est bien connu [15] .

On va donc s'occuper du cas où Z est métrisable. La démonstration résulte de plusieures remarques :

$C^0(Z,F)$ et $C^0(Z)$ sont complets . [En effet, un sous-ensemble $E \subset Z$ est fermé, si et seulement si, son intersection avec chaque compact de Z est fermé.]

$C^0(Z) \otimes F$ est dense dans $C^0(Z,F)$. [Soit $f : Z \to F$ (continue), $K \subset Z$ un compact et $\epsilon > 0$. On peut recouvrir K par un nombre fini de petits ouverts $U_i \subset Z$ tels que {oscillation de f sur U_i } $< \epsilon$.

Soit η_i une partition de 1 sur K , subordonnée à U_i , et $x_i \in U_i$ fixés.

On considère : $\psi \in C^0(Z) \otimes F$ définie par $\psi(x) = \sum_i \eta_i(x) f(x_i)$. Sur K , ψ approche f à ϵ-près.]

Considérons maintenant une semi-norme de F , $p : F \to R_+$, un compact $K \subset Z$, et la (semi)-norme de $C^o(Z,F)$ définie par :

$$\|f\|_{K,p} = \sup_{x\in K} p(f(x)).$$

Soit aussi $\|\ldots\ldots\|_K$ la semi-norme attachée à K pour $C^o(Z)$.

Je dis que, sur $C^o(Z)\otimes F$ on a :

$$\|\ \|_K \otimes_\epsilon p = \|\ \|_{K,p} ,$$

et à partir de là , notre lemme est démontré.

[Je rappelle la définition de la norme $\|\ldots\|\otimes_\epsilon\|\ldots\|$. Si F_1, F_2 sont deux espaces normés, on peut considérer le diagramme commutatif naturel :

$$\begin{tikzcd} F_1\otimes F_2 \arrow[r] \arrow[d] & L(F_1',F_2) \arrow[d, "\alpha"] \\ L(F_2',F_1) \arrow[r, "\beta"] & B(F_1'\times F_2' , R) \end{tikzcd}$$

où $B(F_1'\times F_2' , R) = \{$ les formes bilinéaires sur $F_1'\times F_2'\} = L(F_1' , F_2'')$. Par Hahn-Banach les applications α et β sont isométriques. Par définition, la norme (unique) induite sir $F_1\otimes F_2$ à partir du diagramme commutatif ci-dessus est le produit $\otimes_\epsilon$ des deux normes initiales.]

Donc, pour $f\in C^o(Z)\otimes F$, on a, par définition :

$$\|f\|_{K\otimes_\epsilon p} = \sup_{\substack{\xi\in F' \\ p^*(\xi)\le 1}} \|\xi\circ f\|_K .$$

En appliquant de nouveau Hahn-Banach, on trouve que :

$$\sup_\xi \|\xi\circ f\|_K = \sup_\xi \sup_{x\in K} |\xi\circ f(x)| = \sup_x \sup_\xi |\xi\circ f(x)| =$$

$$= \sup_{x\in K} p(f(x)) = \|f\|_{K,p} ,$$ ce qui prouve 1.3.3.

On aura besoin, aussi, du lemme suivant :

LEMME 1.3.4. - " Soit X une variété C^∞ compacte sur laquelle le groupe de Lie compact G agit différentiablement. Soit aussi Z_1 un espace topologique qui est, ou bien métrisable, ou bien compact, et Z_2 une variété C^∞

G agira (par définition), trivialement sur Z_1 et Z_2 .

Soit (avec F comme dans le lemme 1.3) :

$$f = id(Z_1) \times id(Z_2) \times F \in C_G^{o,\infty}(Z_1 \times Z_2 \times X \ , \ Z_1 \times Z_2 \times R^N) \ .$$

Alors, l'application f^* est surjective :

$$O \longleftarrow C^{o,\infty}(Z_1 \times Z_2 \times X)^G \xleftarrow{f^*} C^{o,\infty}(Z_1 \times Z_2 \times R^N) \equiv C^{o,\infty}(Z_1 \times Z_2 \times R^N)^G \ ."$$

[Cette version paramétrée du lemme 1.3, que l'on va démontrer ci-dessous, par un argument tiré de [14], est l'analogue du théorème standard qui dit que les plongements sont un ouvert dans l'espace des applications C^∞] .

Démonstration :

Si Y est une variété C^∞ , l'espace $C^\infty(Y)$ muni de la topologie C^∞ , compacte-ouverte est nucléaire (voir [3], [15]) .

Ceci a comme conséquence les faits suivants :

a) Les produits tensoriels $\dots \hat{\otimes}_\pi C^\infty(Y)$ ou $\dots \hat{\otimes}_\epsilon C^\infty(Y)$ sont identiques ; On a un seul produit tensoriel complété $\hat{\otimes}$. En particulier :

$$C^\infty(X \times Y) = C^\infty(X) \hat{\otimes} C^\infty(Y) \ .$$

b) Si Z est un espace topologique compact, et $C^o(Z, C^\infty(X))$ est l'espace des applications continues $Z \to C^\infty(X)$ (muni de sa structure E.V.T. naturelle), alors :

$$C^o(Z \ , \ C^\infty(X)) = C^o(Z) \ \hat{\otimes} \ C^\infty(X) \ .$$

D'après le lemme 1.3.3 , ceci est vrai, aussi, quand Z est métrisable.

Remarquons que $C^o(Z, C^\infty(X))$ s'identifie à notre $C^{o,\infty}(Z \times X)$ (muni de la topologie $C^{o,\infty}$- compacte-ouverte) . Je rappelle aussi, que le produit tensoriel complété $\hat{\otimes}$ est exact à droite et qu'il est la solution d'un problème universel pour les E.V.T., localement convexes, analogue au problème universel qui définit le $\otimes$ (produit tensoriel ordinaire.)

En revenant à notre lemme, on a donc :

$$C^{o,\infty}(Z_1 \times Z_2 \times R^N) = C^o(Z_1) \ \hat{\otimes} \ C^\infty(Z_2 \times R^N) = C^o(Z_1) \ \hat{\otimes} \ C^\infty(Z_2) \ \hat{\otimes} \ C^\infty(R^N) \ .$$

On a une flèche naturelle :

$$C^o(Z_1)\hat{\otimes}C^\infty(Z_2)\hat{\otimes}C^\infty(X)^G \xrightarrow{\alpha} C^{o,\infty}(Z_1\times Z_2\times X)^G$$

provenant de l'application multi-linéaire naturelle :

$$C^o(Z_1)\times C^\infty(Z_2)\times C^\infty(X)^G \longrightarrow C^{o,\infty}(Z_1\times Z_2\times X)^G \quad .$$

Avec ceci on construit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} C^o(Z_1)\hat{\otimes}C^\infty(Z_2)\hat{\otimes}C^\infty(R^N) \arrow[r, "id\hat{\otimes}F^*"] \arrow[d, "\approx"] & C^o(Z_1)\hat{\otimes}C^\infty(Z_2)\hat{\otimes}C^\infty(X)^G \arrow[d, "\alpha"] & C^o(Z_1)\hat{\otimes}C^\infty(Z_2)\hat{\otimes}C^\infty(X) \arrow[l, "id\hat{\otimes}Av"'] \arrow[d, "\approx"] \\ C^{o,\infty}(Z_1\times Z_2\times R^N) \arrow[r, "(id\times F)^*=f^*"] & C^{o,\infty}(Z_1\times Z_2\times X)^G & C^{o,\infty}(Z_1\times Z_2\times X) \arrow[l, "Av"'] \end{tikzcd} \quad .$$

Les flèches Av sont surjectives . Donc $Id\hat{\otimes}Av$ est surjective, puisque $\hat{\otimes}$ est exact à droite . Donc α est surjectif. F^* est surjective (d'après le théorème de plongement), donc $id\hat{\otimes}F^*$ l'est aussi.

Donc f^* est surjective , ce qui finit la démonstration.

3) STRUCTURE DE MODULE :

On va considérer une G-variété compacte X (G étant un groupe de Lie compact) et un G-fibré

$$(\xi) \qquad\qquad E \longrightarrow X \ .$$

LEMME 1.4. : " $\Gamma^\infty(\xi)^G$ est un $C^\infty(X)^G$-module fini."

Démonstration :

Chaque G-orbite de X possède un voisinage tubulaire équivariant produit-tordu $G\times_H V\subset X$ (voir [1], [4]) . Par partition C^∞ , équivariante, de 1 , il suffit donc de considérer le cas où $X=G\times_H V$ (où $H\subset G$ est un sous-groupe opérant linéairement sur l'espace vectoriel V .) On a des isomorphismes canoniques, induits par l'inclusion naturelle :

$$V\approx V\times\{H\} \hookrightarrow G\times_H V \quad ,$$

(où $\{H\}\in G/H$ est la classe de 1), pour les fonctions et les sections :

$$\Gamma^{\infty}(\xi)^G \approx \Gamma^{\infty}(\xi \mid V)^H$$
$$C^{\infty}(G \times_H V)^G \approx C^{\infty}(V)^H \quad .$$

Il suffit donc de prouver le lemme pour le H-fibré $\xi|V$. Mais les éléments de $\Gamma^{\infty}(\xi|V)^H$ ne sont rien d'autre que les applications équivariantes de V dans la fibre de ξ. On est donc réduit au lemme suivant :

LEMME 1.4.1. - "<u>Soient</u> V, W <u>deux espaces vectoriels sur lesquels le groupe de Lie compact</u>, G , <u>agit linéairement</u>.

$C^{\infty}_G(V,W)$ <u>est un</u> $C^{\infty}(V)^G$ - <u>module fini. Une assertion analogue est valable au niveau des germes</u>."

<u>Démonstration</u> :

[Une démonstration analogue a été donnée par B. Malgrange].

Soit $f : V \to W$ et $z \in W^*$. On considère $f_1 : V \times W^* \to R$ définie par $f_1(x,z) = < f(x),z>$. Soient D',D'' les dérivées partielles de f_1 en x et z . Donc

$$V \times W^* \xrightarrow{D''f_1} \mathrm{Hom}_R(W^*, R) \approx W.$$

On vérifie que, quelque soit z :

$$D''f_1(x,z) = f(x)$$

L'action de G sur W induit canoniquement une action sur W^* (voir par exemple [12]):

$$<\ldots\ldots,g.z>= <g^{-1}\ldots\ldots,z>.$$

On va considérer l'action-produit sur $V \times W^*$. [On remarque que si $f \in C^{\infty}_G(V,W)$ alors le f_1 considérée ci-dessus est dans $C^{\infty}(V \times W^*)^G$.] Soit $\psi \in C^{\infty}(V \times W^*)^G$, et

$$D''\psi \in C^{\infty}(V \times W^*, W) \ .$$

On vérifie que

$$D''\psi \in C^{\infty}_G(V \times W^*, W)$$

ce qui implique que :

$$D''\psi(x,0) \in C_G^\infty(V,W) \ .$$

Considérons maintenant les polynômes invariants sur $V \times W^*$: $R[x,z]^G$.
Soit $Q_1, \ldots, Q_K$ un système de générateurs de l'algèbre $R[x,z]^G$. D'après le lemme 1.3.2, pour $f \in C_G^\infty(V,W)$, il existe une fonction

$$P(u_1, \ldots\ldots, u_K) \in C^\infty(R^K)$$

telle que :

$$f_1(x,z) = P(Q_1(x,z), \ldots\ldots, Q_K(x,z)).$$

En dérivant en z , on trouve :

$$f(x) = \sum_i \frac{\partial P}{\partial u_i}(Q(x,0)) \circ D''Q_i(x,0) \ .$$

Puisque $\frac{\partial P}{\partial u_i}(Q(x,0)) \in C^\infty(V)^G$ on trouve que les K éléments $D''Q_i(x,0) \in C_G^\infty(V,W)$ engendrent le $C^\infty(V)^G$ -module $C_G^\infty(V,W)$.

4) EQUATIONS DIFFERENTIELLES :

Soit X une variété C^∞ fermée ; On va considérer des systèmes dynamiques, dépendant du temps

$$\xi \in C^\infty(R, \Gamma^\infty(TX)) \ .$$

LE THEOREME FONDAMENTAL DES SYSTEMES DYNAMIQUES nous dit qu'il existe une correspondance biunivoque entre $C^\infty(R,\Gamma^\infty(TX))$ et {les sous-groupes à un paramètre $S_t \in \mathrm{Diff}^\infty(X)$}.(Ceci implique $S_0 = \mathrm{id}(X)$). Cette correspondance attache à $\xi(x,t) = \xi_t(x)$ le sous-groupe $S_t(x)$, unique, tel que

$$\frac{\partial S_t}{\partial t} \circ S_t^{-1} = \xi_t \ .$$

Içi, à toute application paramétrée

$$F_t \in C^\infty(X,Y) \ ,$$

on attache, d'une manière naturelle sa "dérivée temporelle" :

$$\begin{tikzcd} & TY \arrow[d] \\ X \arrow[ur, "\frac{\partial F_t}{\partial t}"] \arrow[r, "F_t"'] & Y \end{tikzcd} .$$

Supposons maintenant que le groupe de Lie compact G agisse sur X . A partir du THEOREME FONDAMENTAL que l'on vient de citer, on a une correspondance biunivoque :

$$\{\xi \in C^{\infty}(\mathbb{R},\Gamma^{\infty}(TX)^G)\} \rightleftarrows \{\text{les sous-groupes à un paramètre } S_t \in \mathrm{Diff}^{\infty}_G(X)\}.$$

Je laisse les détails au lecteur.

5) EXTENSION DES FONCTIONS :

On va utiliser le :

LEMME 1.5 : "Soit X une variété sur laquelle G agit, et $Y \subset X$ une sous-variété G-invariante. Il existe une application linéaire, $C^{0,\infty}$:

$$E : C^{\infty}(Y)^G \longrightarrow C^{\infty}(X)^G$$

telle que, si $\varphi \in C^{\infty}(Y)^G$, alors :

$$E(\varphi) \mid Y \equiv \varphi \text{ "} .$$

Démonstration :

D'après Seeley, il existe (sans aucune hypothèse sur G), une application linéaire, $C^{0,\infty}$:

$$E' : C^{\infty}(Y) \longrightarrow C^{\infty}(X)$$

telle que $E'(\varphi')\,|\,Y \equiv \varphi'$ (pour $\varphi' \in C^{\infty}(Y)$) (voir par exemple [10]).

On peut définir : $(x \in X)$:

$$E\varphi(x) = \int_G E'\varphi(gx)d\mu(g) \quad ,$$ ce qui prouve 1.5.

6) DIVISION DES FONCTIONS PAR DES POLYNÔMES :

On a le :

LEMME 1.6. : " Soit M une variété C^{∞} sur laquelle le groupe de Lie compact G agit (d'une manière C^∞) . On considère l'action triviale de G sur R et l'action naturelle induite sur $M\times R$. Soient :

$$u_o(x), \ldots\ldots, u_{p-1}(x) \in C^\infty(M)^G ,$$

et

$$\Gamma(t,x) = t^p + \sum_{i=0}^{p-1} u_i(x)t^i \in C^\infty(M\times R)^G .$$

Il existe des applications R-linéaires, $C^{o,\infty}$:

$$C^\infty(M\times R)^G \xrightarrow{q} C^\infty(M\times R)^G$$

$$C^\infty(M\times R)^G \xrightarrow{r} (C^\infty(M)^G)^p$$

$(r=r_o, \ldots\ldots, r_{p-1})$ telles que, si

$$f(x,t) \in C^\infty(M\times R)^G ,$$

on ait :

$$f(x,t) = \Gamma(t,x).(qf)(x,t) + \sum_{o}^{p-1} (r_i f)(x).t^i .\text{"}$$

Démonstration :

Si l'on oublie l'action de G , et on travaille avec $C^\infty(M\times R)$ (à la place de $C^\infty(M\times R)^G$) , l'énoncé ci-dessus est tout simplement le théorème de division de Mather [6], [5] . On obtient q et r comme ci-dessus, en appliquant l'opération Av au quotient et reste du théorème de division de Mather.

7) FONCTIONS IMPLICITES :

On a le :

LEMME 1.7. : " Soit G une groupe de Lie compact agissant sur Y et (trivialement) sur R^k .

Soit :

$$\Phi \in C^{o,\infty}_{z^o}(Z, C^\infty_G(Y\times R^k, R^k)),$$

et pour $y \in Y$ fixé :

$$\Phi_y(u) = \Phi(z^o,y,u) \in C^\infty(R^k, R^k) .$$

On suppose que :

a) $\Phi(z^o,y,O) \equiv O$.

b) Pour tout y ,

$$D\Phi_y(O) \in L(R^k,R^k)$$

est inversible.

Il existe alors des :

$$\psi_i \in C^{o,\infty}_{z^o}(Z,C^{\infty}(Y)^G) \quad (i=O,\dots\dots,k-1) ,$$

telles que si l'on considère le

$$\psi \in C^{o,\infty}_{z^o}(Z,C^{\infty}_G(Y,R^k))$$

qu'elles induisent $(u_i=\psi_i(z,y))$, on ait :

$$\Phi(z,y,\psi(z,y)) \equiv O \in R^k \quad ."$$

Démonstration :

[Içi (Z,z^o) est un germe d'espace topologique quelconque.]

A partir de Φ on fabrique, canoniquement, un

$$\Phi_1 \in C^{o,\infty}_{z^o}(Z,C^{\infty}_G(Y\times R^k \ , \ Y\times R^k))$$

(où il est entendu que l'on est dans la partie de $C^{\infty}_G(Y\times R^k \ , \ Y\times R^k)$ qui respecte la projection sur Y et qui transporte

$$(z^o,y,O) \longrightarrow (y,O) .$$

$$\Phi_1(z,y,u) = (y,\Phi(z,y,u)).)$$

Notre hypothèse, et le théorème classique des fonctions implicites (paramétré) nous assure que (au voisinage de la section nulle $Y\times O$) , Φ_1 possède une inverse (C^{∞} , respectant la projection sur Y , et respectant (z^o,y,O)).

Il est clair que l'inverse Φ_1^{-1} est aussi G-équivariante. Disons qu'elle a la forme :

$$(z,y,\lambda) \longrightarrow (z,y,\Psi(z,y,\lambda)).$$

On pose :

$$\psi(z,y) = \Psi(z,y,O) \in R^k ,$$

ce qui prouve 1.7

8) CONTRACTIBILITE LOCALE DE $C_G^\infty(X,Y)$:

Dans tout ce paragraphe X,Y et G sont compacts.

LEMME 1.8. " Soit :

$$f \in C_G^\infty(X,Y).$$

Pour tout voisinage $f \in N_o \subset C_G^\infty(X,Y)$, il existe un voisinage $f \in N_1 \subset N_o$ avec la propriété suivante :

Il existe :

$$\Phi \in C^{o,\infty}(N_1 \times I, N_o)$$

telle que : 1) $\Phi(g,O) = f \qquad (g \in N_1)$

2) $\Phi(g,1) = g \qquad (g \in N_1)$."

Démonstration :

D'après le théorème de plongement de Palais, énoncé ci-dessus, on a toujours une représentation fidèle $G \subset O(n)$ et un plongement équivariant $Y \subset R^n$. Pour la sous-variété invariante Y, on a un voisinage tubulaire invariant :

$$\begin{tikzcd} N \arrow[rr, hook] \arrow[dr, shift right, "p"'] & & R^n \\ & Y \arrow[ul, shift right, "i"'] \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

où l'on remarque que la projection p est équivariante.

Sans perte de généralité, pour tout $g \in N_o$, $x \in X$, le segment qui joint $g(x), f(x)$ (points de R^n) est dans N.

On peut définir (pour un N_1 convenablement choisi) :

$$\Phi(g,x,t) = p((1-t)f(x) + tg(x)).$$

[Puisque G agit linéairement sur R^n, on a, pour tout $\gamma \in G$:

$\gamma.((1-t)f(x) + t\,g(x)) = (1-t)\,\gamma.f(x) + t\,\gamma.\,g(x) = ((1-t)f + t\,g)\,(\gamma.\,x)$, e.a.d.s.].

Il est utile d'avoir une version un peu plus raffinée de la contractibilité locale de $C^{\infty}_G(X,Y)$:

LEMME 1.8.1. : "Soit $f \in C^{\infty}_G(X,Y)$, (Z_1, z_1^o) un germe d'espace topologique et (Z_2, z_2^o) un germe de variété C^{∞} (de dimension finie), et

$$F \in C^{o,\infty}_{z^o}(Z_1 \times Z_2 , C^{\infty}_G(X,Y)),$$

un germe tel que l'on ait : $F(z^o) = f$.

Il existe, alors, un germe

$$F_1 \in C^{o,\infty}_{z^o}(Z_1 \times Z_2 , C^{\infty}_G (X \times I, Y))$$

tel que

$$F_1(z,x,1) = F(z,x) \in Y \quad , F_1(z^o, x,t) = F_1(z,x,O) = f(x) \quad . "$$

La démonstration est laissée au lecteur.

9) STRUCTURES DE "VARIETES INFINIES" :

[Ce qui suit ne sera utilisé qu'au dernier paragraphe, en remarque].

Soit $S \subset C^{\infty}(X)$ une sous-R-algèbre et $M \subset C^{\infty}(X,Y)$ une partie. On dira que M est une S-variété faible si les axiomes suivants sont vérifiés :

A-1) Toute application $\varphi \in C^{\infty}([O,\infty) , M)$ s'étend en une application $\Phi \in C^{\infty}((-\infty,\infty) , M)$.

A-2) Soit $\Phi \in C^{\infty}(R,M)$ et $\xi \in C^{\infty}(R,S) \subset C^{\infty}(R \times X, R)$. Soit

$$\psi \in C^{\infty}(R, C^{\infty}(X,Y))$$

défini par :

$$\psi (t,x) = \Phi (\xi (t,x),x) \quad .$$

Alors : $\psi \in C^{\infty}(R,M)$.

A-3) On va désigner par c_f^k l'application constante $I^k \longrightarrow f \in C^{\infty}(X,Y)$.

Soit $f \in M$ et $f \in V \subset M$ un voisinage de f .

Il existe un voisinage

$$c_f^1 \in U \subset C^{\infty}(I,M)$$

tel que si, $\psi_1, \ldots\ldots, \psi_k \in U$, $\psi_i(O) = f$, il existe $\psi \in C^\infty(I^k, V)$ avec la propriété :

$$\psi\,(O, \ldots\ldots O, t_i, O, \ldots\ldots, O) = \psi_i(t_i) \ .$$

[Les axiomes A-1,2,3 font que l'ensemble des variations infinitésimales $T_f M \subset \Gamma^\infty(f^* TY) = T_f\, C^\infty(X,Y)$ possède une structure naturelle de S-module. Par exemple si, $\Phi(t,x)$ est une famille à 1-paramètre dans M, avec $\Phi(O,x) = f$,

$$\sigma(x) = \frac{\partial}{\partial t}\Phi\,\Big|_{t=O} \in T_f\, M$$

et si $\eta(x)$ est dans S, alors l'élément

$$\eta\sigma \in T_f C^\infty(X,Y) = \Gamma^\infty(f^* TY)$$

est en fait dans $T_f M$ car :

$$\eta(x)\sigma(x) = \frac{\partial}{\partial t}\,\Phi(t\eta(x), x)\big|_{t=O}$$

et $\Phi(t\eta(x),x)$ peut se lire comme une application $t \to M$].

A-4) M est localement contractile (dans le sens du lemme 1.8.1)

A-5) (qui raffine la connexité locale). Si $f \in M$ et U est un voisinage

$$c_f^1 \in U \subset C^\infty(I, C^\infty(X,Y)),$$

il existe un voisinage

$$f \in V \subset M$$

tel que tout $g \in V$ peut être uni avec f par un arc dans $U \cap C^\infty(I,M)$.

A-6) (qui raffine A-3). Soient $f \in M$, $\Psi \in C^\infty(I^k, M)$ avec $\Psi(O) = f$ et W un voisinage

$$\Psi \in W \subset C^\infty(I^k, M) \ .$$

Il existe $U = U(W)$, voisinage de $c_f^1 \in U \subset C^\infty(I,M)$ tel que pour tout $\psi \in U$ avec $\psi(O) = f$ il existe $\Phi \in C^\infty(I \times I^k, M)$ tel que

a) $\Phi(O,u) = \Psi(u)$

b) $\Phi(t,O) = \psi(t)$

c) Pour t_o fixé $\Phi(t_o, \ldots\ldots,) \in W$.

Ces axiomes contiennent tout ce qu'il faut pour la théorie de la tranversalité [11] et peuvent servir, aussi, de cadre "variétés de dimension ∞ " pour une théorie à la Mather [9] .

PROPOSITION : "Si G est un groupe de Lie compact et X, Y deux G- variétés compactes, alors $C^{\infty}_G(X,Y) \subset C^{\infty}(X,Y)$ est une $C^{\infty}(X)^G$ - variété faible".

La vérification des axiomes est facile. Par exemple, pour A-2 on a

$$\Phi(t,g.x) = g.\Phi(t,x) \quad \text{et} \quad \xi(t,g.x) = \xi(t,x) \ .$$

Il en résulte :

$$\psi(t,g.x) = \Phi(\xi(t,g.x), g.x) = \Phi(\xi(t,x),g.x) = g.\Phi(\xi(t,x),x) = g.\psi(t,x) \ .$$

Pour A-1 , on plonge $Y \subset R^N$ d'une manière équivariante (Palais), on prend un voisinage tubulaire invariant de Y : $T \xrightarrow{\pi} Y$, on prolonge $X \times [0,\infty) \to Y$ à $X \times (-\infty, \infty) \to R^N$ (Seeley), on rend ceci invariant (par Av), on prend la projection π sur Y , et ainsi de suite ..... .

CHAPITRE I.- LE THEOREME DE PREPARATION EQUIVARIANT.-

1) L'ENONCE DU RESULTAT :

On considère deux variétés C^∞ , X et Y , X étant supposée compacte et un groupe de Lie compact G . X et Y seront munies, une fois pour toutes d'actions de G (à gauche) :

$$G \times X \longrightarrow X \quad , \quad G \times Y \longrightarrow Y \quad ,$$

et on va considérer

$$C^\infty_G(X,Y) \subset C^\infty(X,Y) \quad ,$$

où C^∞_G = {l'ensemble des applications G-équivariantes, c'est-à-dire telles que $f(g.x) = g.f(x)$} .

Soient (Z_1, z_1^o) un germe d'espace topologique qui est ou bien <u>métrisable</u> ou bien <u>compact</u>, et (Z_2 , z_2^o) un germe de variété C^∞ de dimension finie. On considère

$$C^{o,\infty}_{z_1^o , z_2^o}(Z_1 \times Z_2 \; , C^\infty_G(X,Y)),$$

ensemble des germes d'applications $Z_1 \times Z_2 \to C^\infty_G(X,Y)$,différentiables en Z_2 et continues, ainsi que toutes leures dérivées partielles, en $Z_1 \times Z_2$.

Pour la simplicité de l'écriture, on va désigner, quelquefois $(Z_1 \times Z_2 \; , z_1^o \times z_2^o)$ par (Z, z^o) .

On considère l'application d'évaluation évidente :

$$C^{o,\infty}_{z^o}(Z, C^\infty(X)^G) \xrightarrow{ev(z^o)} C^\infty(X)^G \quad ,$$

qui sera désignée, dorénavant par ev_X . L'application analogue pour $C^\infty(Y)^G$ sera désignée par ev_Y . Si

$$F \in C^{o,\infty}_{z^o}(Z, C^\infty_G(X,Y))$$

est donné, on construit un homorphisme de R-algèbres :

$$C^{o,\infty}_{z^o}(Z, C^\infty(Y)^G) \xrightarrow{F^*_*} C^{o,\infty}_{z^o}(Z, C^\infty(X)^G) \quad ,$$

défini par :

$$z \xrightarrow[F^*_*(\Phi)]{} (X \xrightarrow{F(z)} Y \xrightarrow{\Phi(z)} R) \ .$$

THEOREME 1 : " Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} C^{o,\infty}_{z^o}(Z, C^\infty(Y)^G) & \xrightarrow{F^*_*} & C^{o,\infty}_{z^o}(Z, C^\infty(X)^G) \\ \downarrow ev_Y & & \downarrow ev_X \\ C^\infty(Y)^G & \xrightarrow{F(z^o)^*} & C^\infty(X)^G \end{array} \ .$$

Soient : C un $C^{o,\infty}_{z^o}(Z, C^\infty(X)^G)$-module fini, A un $C^{o,\infty}_{z^o}(Z, C^\infty(Y)^G)$-module fini, et

$$A \xrightarrow{\alpha} C$$

un homomorphisme $C^{o,\infty}_{z^o}(Z, C^\infty(Y)^G)$ linéaire.

Dans ces conditions, si :

$$\alpha(A) + Ker(ev_X).C = C \ ,$$

alors : $\alpha(A) = C$. "

Le reste du chapitre sera occupé par la démonstration de ce théorème.

2) LA PROPRIETE DE WEIERSTRASS :

Soit :

$$\begin{array}{ccc} R_1 & \longrightarrow & R_2 \\ \downarrow \epsilon_1 & & \downarrow \epsilon_2 \\ S_1 & \longrightarrow & S_2 \end{array}$$

un diagrammme commutatif dans la catégorie des R-algèbres. Par définition, ce carré possède la "<u>propriété de Weierstrass</u>" si la chose suivante est vraie :

(W) " Chaque fois que l'on se donne un R_2-module fini C on a l'implication suivante :

$$C/\mathrm{Ker}(\epsilon_1).C \text{ est } R_1 \text{ fini} \Longrightarrow C \text{ est } R_1\text{-fini.} "$$

La propriété de Weierstrass est associative, dans le sens que si elle est vraie pour deux carrés commutatifs consécutifs, elle est vraie, aussi, pour le carré composé.

THEOREME 2 : " <u>Le carré commutatif de l'énoncé du théorème 1 possède la propriété de Weierstrass</u>".

La démonstration du théorème 2 sera donnée dans les paragraphes suivants : Pour le moment on va montrer comment le théorème 2 <u>implique</u> le théorème 1 .

LEMME 2.1. : " <u>On a</u> :

$$F_*^*(\mathrm{Ker}(ev_Y)).C^{0,\infty}_{z^0}(Z,C^\infty(X)^G) = \mathrm{Ker}(ev_X)$$

<u>(égalité entre sous-ensembles de</u> $C^{0,\infty}_{z^0}(Z,C^\infty(X)^G)$) ."

<u>Démonstration</u> :

L'inclusion $\subset$ est évidente. Pour prouver l'inclusion $\supset$ on procède comme suit . Soit $(z_1,\ldots\ldots,z_k)$ un système de coordonnées locales de Z_2 , telles que

$$z_i(z_2^0) = 0 \quad .$$

En d'autres termes, si z_i est considéré comme élement de $C^{0,\infty}_{z^0}(Z,C^\infty(Y)^G)$, il appartient à $\mathrm{Ker}\,(ev_Y)$.

Soit $\psi(z^1, z^2, x) \in \mathrm{Ker}(ev_X)$, donc

$$\psi(z_1^0\, , z_2^0\, , x) \equiv 0 \quad .$$

Dans l'anneau $C^{0,\infty}_{z^0}(Z,C^\infty(X)^G)$, l'élément $\psi(z^1,z^2,x) - \psi(z^1,z_2^0\, , x)$ appartient à l'idéal engendré par les $z_1,\ldots,z_k$, donc il est dans $F_*^*(\mathrm{Ker}(ev_Y))\, C^{0,\infty}_{z^0}(Z,C^\infty(X)^G)$.

Pour finir la démonstration du lemme 2.1., il reste à montrer que :

$$\varphi(z^1,x) = \psi(z^1,z_2^o,x) \in F_*^*(\mathrm{Ker}(ev_Y)).C^{o,\infty}_{z^o}(Z,C^\infty(X)^G) \ .$$

Maintenant, on va se donner, une fois pour toutes un système fini de cartes précompactes h_iU_i recouvrant X :

$$\begin{tikzcd} R^n \supset U_i \arrow[r, "h_i"'] & X \end{tikzcd} ,$$

et pour chaque fonction $f \in C^\infty(X)$ on définira

$$\|f\|_m = \sup_{i,\,|\alpha|\leq m} \|D^\alpha f \circ h_i\|$$

où α est un multi-indice $\alpha = (j_1,\ldots\ldots, j_n)$, $\sum_k j_k = |\alpha|$.

Pour notre φ considéré ci-dessus, si $z^1 \in Z^1$, on a :

$$\varphi(z_1^o) \equiv 0 \ .$$

On peut définir le germe de fonction continue sur Z^1 , s'annulant en z_1^o :

$$\rho(z^1) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} \min\left(1 , \sqrt{\|\varphi(z^1)\|_m}\right) \ .$$

Il est clair qu'un tel $\rho(z^1)$ représente un élément de $\mathrm{Ker}(ev_Y)$, ou de $F_*^*(\mathrm{Ker}(ev_Y))$.

Il est clair, aussi, que :

$$\rho(z^1)^{-1}\varphi(z^1,x) \quad \text{a un sens et}$$

représente un élément de $C^o_{o\,z_1}(Z^1,C^\infty(X)^G) \subset C^{o,\infty}_{z^o}(Z,C^\infty(X)^G)$.

Donc

$$\varphi(z^1,x) = \rho(z^1)\,(\rho(z^1)^{-1}\varphi(z^1,x)) \in F_*^*(\mathrm{Ker}(ev_Y)).C^{o,\infty}_{z^o}\ldots\ldots$$

et on a fini la démonstration.

Maintenant, en utilisant le théorème 2 et le lemme 2.1. on va prouver le théorème 1.

Le lemme 2.1. nous permet d'écrire l'hypothèse du théorème 1 sous la forme :

$$\alpha(A) + F_*^*(\mathrm{Ker}(ev_Y)).C = C$$

Ceci veut dire que $C/\mathrm{Ker}(ev_Y).C$ est $C^\infty(Y)^G$ -fini (puisque A l'est). Donc, d'après le théorème 2 , C est $C^\infty(Y)^G$ -fini. La conclusion du théorème 1 résulte maintenant du lemme de Nakayama.

3)DEMONSTRATION DU THEOREME 2 :

On va commencer par prouver le théorème 2 dans un cas particulier .

LEMME 2.2. -"Soit Y une G-variété. On considère l'action triviale de G sur R, et la G-variété produit $Y\times R$. Soit $X \hookrightarrow Y\times R$ une sous-variété compacte (à bord pas nécessairement $\emptyset$), G- invariante.

On considère :

$$\begin{tikzcd} Y\times R \arrow[dr, "\pi"'] & & X \arrow[ll, hook', "i"'] \arrow[dl, "\pi|X"] \\ & Y & \end{tikzcd} \quad .$$

Içi : $\pi \in C^\infty_G(Y\times R, Y)$, donc :

$$\pi \mid X \in C^\infty_G(X,Y) \quad .$$

Dans ces conditions, le carré :

$$\begin{tikzcd} C^{o,\infty}_{Z^o}(Z, C^\infty(Y)^G) \arrow[r, "(\pi|X)^*_*"] \arrow[d, "ev_Y"] & C^{o,\infty}_{Z^o}(Z, C^\infty(X)^G) \arrow[d, "ev_X"] \\ C^\infty(Y)^G \arrow[r, "(\pi|X)^*"] & C^\infty(X)^G \end{tikzcd}$$

possède la propriété de Weierstrass."

(Remarque : En se référant aux notations du théorème 1 ci-dessus, on considère içi l'application constante :

$$Z \longrightarrow \pi|X \in C^\infty_G(X,Y) \quad .$$

Par abus de notation, on l'appelle encore $\pi|X$.)

Démonstration :

On considère le diagramme commutatif d'homomorphismes de R-algèbres :

$$\begin{tikzcd} C^{o,\infty}_{Z^o}(Z, C^\infty(Y\times R)^G) \arrow[rr, "i^*_*"] & & C^{o,\infty}_{Z^o}(Z, C^\infty(X)^G) \\ & C^{o,\infty}_{Z^o}(Z, C^\infty(Y)^G) \arrow[ul, "\pi^*_*"] \arrow[ur, "(\pi|X)^*_*"'] & \end{tikzcd} \quad .$$

On considère, aussi, un $C^{0,\infty}_{z^0}(Z, C^\infty(X)^G)$-module fini, Θ, tel que $\Theta/\mathrm{Ker}(ev_Y).\Theta$ est $C^{0,\infty}_{z^0}(Z, C^\infty(Y)^G)$-fini.

Remarquons que d'après le lemme d'extension 1.5 (du chapitre précédent), le morphisme i^*_* est surjectif. Donc si l'on restreint les scalaires via i^*_*, Θ est un $C^{0,\infty}_{z^0}(Z, C^\infty(Y \times R)^G)$-module <u>fini</u>. C'est avec cet anneau de scalaires que l'on va travailler maintenant. (Les éléments de l'anneau sont des fonctions-germifiées là-bas où il faut et $C^{0,\infty}$ comme il faut :

$$f(z,y,t) = f(z_1, z_2, y, t) .$$

π^*_* est un injection qui consiste à considérer une fonction en (z,y) comme fonction en (z,y,t).) En particulier, on va considérer

$$t \in C^{0,\infty}_{z^0}(Z, C^\infty(Y \times R)^G) .$$

Soit $\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_k \in \Theta$ un système (<u>fini</u>) d'éléments qui engendrent
Θ en tant que $C^{0,\infty}_{z^0}(Z, C^\infty(Y \times R)^G)$-module et
$\Theta/\mathrm{Ker}(ev_Y).\Theta$ en tant que $C^{0,\infty}_{z^0}(Z, C^\infty(Y)^G)$-module.

On peut donc écrire :

$$t\,\alpha_i = \sum_j c_{ij}(z,y)\alpha_j + \sum_j \gamma_{ij}(z,y,t)\,\alpha_j$$

avec $c_{ij} \in C^{0,\infty}_{z^0}(Z, C^\infty(Y)^G)$, $\gamma_{ij} \in C^{0,\infty}_{z^0}(Z, C^\infty(Y \times R)^G)$, et $\gamma_{ij}(z^0,y,t) \equiv 0$.

On considère :

$$\Delta(z,y,t) = \det(\delta_{ij} t - c_{ij}(z,y) - \gamma_{ij}(z,y,t)) = t^k + \sum_0^{k-1} \lambda_i(z,y)t^i + \rho(z,y,t),$$

où $\rho(z^0,y,t) \equiv 0$. (λ et ρ sont G-invariantes donc $\Delta \in C^{0,\infty}_{z^0}(Z, C^\infty(Y \times R)^G)$.)

On introduit un paramètre auxiliaire :

$$u = (u_0, \ldots\ldots, u_{k-1}) \in R^k$$

sur lequel G agit <u>trivialement</u>.

Soit :

$$\Gamma(y,u,t) = t^k + \sum_0^{k-1} (u_i + \lambda_i(z^0,y))t^i \in C^\infty(Y \times R^k \times R)^G .$$

En appliquant le lemme 1.6 (et en utilisant le caractère R-linéaire, $C^{0,\infty}$ des opérateurs quotient et reste), on peut écrire :

$$\rho(z,y,t) = \Gamma(y,u,t)q(z,y,u,t) + \sum_{o}^{k-1} H_i(z,y,u)t^i$$

avec $q \in C^{o,\infty}_{z^o}(Z,C^{\infty}(Y\times R^k)^G)$, et :

$$q(z^o,y,u,t) \equiv O \equiv H_i(z^o,y,u) \quad .$$

En regroupant les termes on trouve :

$$\Delta(z,y,t) = \Gamma(y,u,t)(1+q) + \sum_{o}^{k-1} E_i(z,y,u)t^i \quad ,$$

avec

$$E_i(z,y,u) = \lambda_i(z,y) - \lambda_i(z^o,y) - u_i + H_i(z,y,u) \quad .$$

On remarque que :

a) E_i est G-invariante.

b) $E_i(z^o,y,O) \equiv O$.

c) $\frac{\partial E_i}{\partial u_j}(z^o,y,u) = -\delta_{ij}$.

On peut appliquer le lemme 1.7, qui nous fournit des

$$u_i = \psi_i(z,y) \in C^{o,\infty}_{z^o}(Z,C^{\infty}(Y)^G)$$

tels que :

$$E_j(z,y,\psi(z,y)) \equiv O \quad .$$

Donc

$$\Delta(z,y,t) = (t^k + \sum_{o}^{k-1} (\psi_i(z,y) + \lambda_i(z^o,y))t^i).U(z,y,t)$$

où U est une <u>unité</u> de l'anneau

$$C^{o,\infty}_{z^o}(Z,C^{\infty}(Y\times R)^G) \quad .$$

Une nouvelle application du lemme de division 1.6 . nous dit, maintenant que,

$$A = C^{o,\infty}_{z^o}(Z,C^{\infty}(Y\times R)^G) \,/\, \Delta .\, C^{o,\infty}_{z^o}(Z, C^{o,\infty}(Y\times R)^G)$$

est un $C^{o,\infty}_{z^o}(Z, C^{\infty}(Y)^G)$-module <u>fini.</u>

D'autre part, d'après Cramer, on a :

$$\Delta . \alpha_i = O$$

donc l'action de $C^{o,\infty}_{z^o}(Z,C^{\infty}(Y\times R)^G)$ sur le module Θ (la multiplication scalaire), provient d'une strucutre de A-module de Θ et de la projection canonique

$$C^{o,\infty}_{z^o}(Z,C^{\infty}(Y\times R)^G) \longrightarrow A \quad .$$

$\circledast$ est manifestement A-fini, et comme A est $C^{0,\infty}_{z^0}(Z, C^\infty(Y)^G)$-fini, il résulte que $\circledast$ est $C^{0,\infty}_{z^0}(Z, C^\infty(Y)^G)$-fini.

Ceci finit la démonstration du lemme 2.2.

Pour finir la démonstration du théorème 2, on procède maintenant comme suit :

D'après le "théorème de plongement", il existe un espace euclidien R^n, avec action triviale de G, et une application équivariante :

$$\varphi \in C^\infty_G(X, R^n)$$

telle que

$$C^\infty(X)^G \xleftarrow{\ \varphi^*\ } C^\infty(R^n) \equiv C^\infty(R^n)^G$$

soit <u>surjective</u>. On considère, dans $C^{0,\infty}_{z_1^0, z_2^0}(Z_1 \times Z_2, C^\infty_G(X, R^n))$, l'application constante, de valeur φ. On va la désigner, par abus de notation, avec φ, encore.

Comme conséquence du lemme 1.3.4. (vu que Z_1 est le germe d'un espace <u>métrisable</u> ou d'un espace <u>compact</u>), on voit que l'application φ^*_* est surjective :

$$0 \leftarrow C^{0,\infty}_{z_1^0, z_2^0}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(X)^G) \xleftarrow{\ \varphi^*_*\ } C^{0,\infty}_{z_1^0, z_2^0}(Z_1 \times Z_2, C^\infty(R^n)).$$

Si F est comme dans le théorème 2, on considère

$$F_1 \in C^{0,\infty}_{z^0}(Z, C^\infty_G(X, Y \times R^n)),$$

défini par :

$$F_1(z) = (F(z), \varphi) .$$

Donc puisque φ^*_* est surjectif, $(F_1)^*_*$ l'est aussi. D'après le lemme 1.1, on peut trouver une sous-variété invariante, compacte-à-bord :

$$Q_n \subset Y \times R^n$$

telle que $\dim Q_n = \dim(Y \times R^n)$ et que $\operatorname{Image} F_1 \subset \overset{\circ}{Q}_n$. En d'autres termes on a une factorisation (avec F_2 équivariante) :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "{(F(z),\varphi)}"] \arrow[dr, "F_2(z)"'] & & Y \times R^n \\ & Q_n \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd} .$$

Manifestement, $(F_2)^*_*$ est surjective aussi.

Considérons les projections consécutives :

$$R^i = (y_1, \ldots, y_i) \xrightarrow{\pi_i} (y_1, \ldots, y_{i-1}) = R^{i-1} .$$

On peut construire un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
Y \times R^n \arrow[r, "\pi_n"] & Y \times R^{n-1} \arrow[r, "\pi_{n-1}"] & \ldots\ldots & Y \times R \arrow[r, "\pi_1"] & Y \\
Q_n \arrow[u, hook] \arrow[r, "\pi_n | Q_n"] & Q_{n-1} \arrow[u, hook] \arrow[r, "\pi_{n-1} | Q_{n-1}"] & \ldots\ldots & Q_1 \arrow[u, hook] \arrow[ur, "\pi_1 | Q_1"'] &
\end{tikzcd}$$

où : $Q_i \subset Y \times R^i$ est une sous-variété invariante, compacte-à-bord, avec :

a) $\dim Q_i = \dim (Y \times R^i)$.

b) $\pi_i(Q_i) \subset \overset{\circ}{Q}_{i-1}$.

On a

$$F = (\pi_1 | Q_1) \circ \ldots\ldots\ldots \circ (\pi_n | Q_n) \circ F_2 .$$

Vu que la propriété de Weierstrass est associative, elle est satisfaite pour F si elle l'est pour F_2 et les $\pi_i | Q_i$. Pour F_2 c'est immédiat, à cause de la surjectivité, pour $\pi_i | Q_i$ cela résulte du lemme 2.2.

Le théorème 2 (donc le théorème 1), se trouve ainsi démontré.

4) UNE AUTRE VARIANTE DU THEOREME DE PREPARATION :

[Ce paragraphe ne sera utilisé que dans la seconde partie de ce mémoire].

On va considérer un groupe de Lie compact G , opérant orthogonalement sur $R^p \ni y$. On considère des sous-groupes compacts $G_i \subset G$ $(i=1, \ldots, N)$, en nombre fini, opérant orthogonalement, respectivement, sur $R^{n_i} \ni x_i$. On considère

$$f = (f_1, \ldots\ldots, f_N)$$

où f_i est un germe d'application C^∞ :

$$f_i \in C^\infty_{G_i} (R^{n_i}, R^p) \qquad (f_i(O) = O) .$$

On va considérer l'anneau produit : $\prod_i C^\infty(x_i)^{G_i}$ où $C^\infty(x_i)$ est l'anneau local des germes de fonctions C^{∞} dans R^{n_i}, autour de O.

Soit

$$ev_x : \prod_i C^{\infty}(x_i)^{G_i} \longrightarrow R^N$$

le produit des évaluations :

$$O \longrightarrow \mathfrak{m}\, C^{\infty}(x_i)^{G_i} \longrightarrow C^{\infty}(x_i)^{G_i} \xrightarrow{ev(o)} R \longrightarrow O .$$

THEOREME 3 : "Le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} C^{\infty}(y)^G \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "ev_y(o)=ev_y"] & \prod_i C^{\infty}(x_i)^{G_i} \arrow[d, "ev_x"] \\ R \arrow[r, "\text{diagonale}"'] & R^N \end{tikzcd}$$

possède la propriété de Weierstrass."

Démonstration :

Dans [12] on trouve la démonstration de ce théorème pour le cas $N=1$, $G_1 = G$. En se référant aux notations du paragraphe 6, chapitre I de [12], on peut passer au cas $N=1$, $G_1 \subset G$ comme suit : On considère :

$$C^{\infty}(Y \times R^k)^{G_1} \supset C^{\infty}(Y \times R^k)^G \supset C^{\infty}(R^k) .$$

Pour

$$(f, \rho) \in C^{\infty}_{G_1}(X, Y \times R^k)$$

on a que :

$$O \longleftarrow C^{\infty}(X)^{G_1} \xleftarrow{(f,\rho)^*} C^{\infty}(Y \times R^k)^G$$

est surjective. A partir de là, la démonstration (pour $N=1$), se fait exactement comme dans [12]. Le cas général (N quelconque) résulte immédiatement en travaillant composante par composante. (Un $\prod_i C^{\infty}(x_i)^{G_i}$-module M est le produit des $C^{\infty}(x_i)^{G_i}$-modules $M \otimes C^{\infty}(x_i)^{G_i}$.) .

COROLLAIRE 2.3 : " Dans les conditions du théorème 3, considérons un $C^\infty(y)^G$-module fini A, et un $\prod_i C^\infty(x_i)^{G_i}$-module fini C. Soit $\varphi : A \to C$ un morphisme sur f^* et

$$k = \dim_R A/\mathfrak{m}\, C^\infty(y)^G . A .$$

Alors, si

$$\varphi(A) + [f^* \mathfrak{m}\, C^\infty(y)^G + (\prod_i \mathfrak{m} C^\infty(x_i)^{G_i})^{k+1}] . C = C$$

on a, aussi :

$$\varphi(A) = C ."$$

(Le k du corollaire n'est pas le même que le k d'avant).

5) DEMONSTRATION DU COROLLAIRE 2.3 :

On commence par le :

LEMME 2.3.1. : " $\mathfrak{m}\, C^\infty(x)^G$ est un $C^\infty(x)^G$-module fini."

Démonstration :

Soient $\rho_1, \ldots, \rho_k$ les générateurs homogènes, de degré >0, de $R[x]^G$. Si $f \in \mathfrak{m}\, C^\infty(x)^G$ il existe $g \in C^\infty(z)$ tel que $(z=\rho(x))$

$$f(x) = g(\rho(x)) \qquad \text{(lemme 1.3.2)}$$

Puisque $f(0) = \rho(0) = 0$, il s'en suit que $g \in \mathfrak{m} C^\infty(z)$. On en déduit que $\rho_1, \ldots, \rho_k$ engendrent $\mathfrak{m}\, C^\infty(x)^G$ en tant que $C^\infty(x)^G$-module. Le même argument montre que $C^\infty(x)^G/\mathfrak{m}^n C^\infty(x)^G$ est R-fini pour tout n.

LEMME 2.3.2. : " Soit C un $\prod_i C^\infty(x_i)^{G_i}$-module fini, $\Gamma \subset C$ un sous-module, et $k \geq 0$, quelconque. Alors $(\prod_i \mathfrak{m}^k C^\infty(x_i)^{G_i} . C + \Gamma)$ est un module $\prod_i C^\infty(x_i)^{G_i}$- fini."

Démonstration :

D'après le lemme précédent, $\prod_i \mathfrak{m}^k C^\infty(x_i)^{G_i} . C$ est $\prod_i C^\infty(x_i)^{G_i}$-fini.

On considère maintenant la suite exacte :

$$0 \to \prod_i \mathfrak{m}^k C^\infty(x_i)^{G_i}.C \longrightarrow \prod_i \mathfrak{m}_i^k.C + \Gamma \to (\prod_i \mathfrak{m}_i^k.C+\Gamma)/\prod_i \mathfrak{m}_i^k.C \longrightarrow 0 \ .$$

On a

$$(\prod_i \mathfrak{m}_i^k.C + \Gamma)/\prod_i \mathfrak{m}_i^k.C \hookrightarrow C/\prod_i \mathfrak{m}_i^k.C$$

et ce dernier terme est déjà R-fini. Donc

$$(\prod_i \mathfrak{m}_i^k.C + \Gamma)/\prod_i \mathfrak{m}_i^k.C$$

est, aussi, R-fini, et ainsi de suite ..... .

LEMME 2.3.3. - " <u>Dans les conditions du lemme précédent, si</u> :

$$\dim_R(C/\prod_i \mathfrak{m}_i^{\ell+1}.C + \Gamma) \leq \ell$$

<u>alors</u>

$$\prod_i \mathfrak{m}_i^\ell.C \subset \Gamma \ ."$$

<u>Démonstration</u> :

Notre hypothèse implique l'existance d'un $p \leq \ell - 1$ tel que :

$$\prod_i \mathfrak{m}_i^p.C + \Gamma = \prod_i \mathfrak{m}_i^{p+1}.C + \Gamma$$

La conclusion résulte maintenant du lemme précédent et du lemme de Nakayama.

On revient maintenant au corollaire 2.3.

On a, par hypothèse :

$$C/(\mathfrak{m}C^\infty(y)^G + \prod_i \mathfrak{m}_i^{k+1})C = \varphi(A)/\varphi(A) \cap (\mathfrak{m}C^\infty(y)^G + \prod_i \mathfrak{m}_i^{k+1}).C \ .$$

Mais :

$$\varphi(A) \cap (\ldots\ldots\ldots).C \supset f^*\mathfrak{m}C^\infty(y)^G.\varphi(A) \ .$$

Donc :

$$\dim_R C/(\ldots\ldots).C \leq \dim A/\mathfrak{m}C^\infty(y)^G.A = k$$

D'après le lemme 2.3.3 :

$$\prod_i \mathfrak{m}_i^{k+1}.C \subset \mathfrak{m}C^\infty(y)^G.C \ .$$

On est ainsi réduit au théorème 3 .

CHAPITRE II.- DEMONSTRATION DU THEOREME DE STABILITE EQUIVARIANTE.-

1) FIBRES PARAMETRES.-

On va introduire une nouvelle variété C^∞ compacte, U , sur laquelle G agira trivialement. Z_1 et Z_2 sont comme au chapitre précédent.

On se donne

$$F \in C^{o,\infty}_{z^o}(Z_1 \times Z_2 \ , \ C^\infty_G(X \times U, Y)).$$

On va considérer le fibré :

$$F^* TY \longrightarrow Z_1 \times Z_2 \times X \times U$$

dont les sections s'identifient aux flèches η qui rendent commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & TY \arrow[d] \\ Z_1 \times Z_2 \times X \times U \arrow[ur, "\eta"] \arrow[r, "F"'] & Y \end{tikzcd} .$$

F^*TY est un G-fibré et on va considérer le $C^{o,\infty}_{z^o}(Z_1 \times Z_2 \ , \ C^\infty(X \times U)^G)$-module $\Gamma^{o,\infty}_{z^o}(F^*TY)^G = \{$ les sections $C^{o,\infty}$, invariantes, du fibré $F^*TY\}$.

LEMME 3.1. : " $\Gamma^{o,\infty}_{z^o}(F^*TY)^G$ <u>est un</u> $C^{o,\infty}_{z^o}(Z, C^\infty(X \times U)^G)$-<u>module fini</u>."

<u>Démonstration</u> :

En utilisant le lemme 1.3.4, on peut généraliser la démonstration du lemme 1.4. On laisse les détails au lecteur.

On a une opération d'évaluation naturelle :

$$Ev(z^o) : \Gamma^{o,\infty}_{z^o}(T^* TY)^G \longrightarrow \Gamma^{\infty}(F(z^o)^* TY)^G$$

(je rappelle que $F(z^o) \in C^{\infty}_G(X,Y)$.) .

On considère aussi l'opération d'évaluation :

$$C^{o,\infty}_{z^o}(Z, C^{\infty}(X\times U)^G) \xrightarrow{ev_X} C^{\infty}(X\times U)^G$$

du chapitre précédant .

LEMME 3.2.: " <u>Dans</u> $\Gamma^{o,\infty}_{z^o}(F^* TY)^G$ <u>on a</u> :

$$Ker\, Ev(z^o) = Ker\, ev_X \,.\, \Gamma^{o,\infty}_{z^o}(F^* TY)^G ."$$

<u>Démonstration</u> :

L'inclusion $\supset$ est évidente.

Pour prouver $\subset$ on procède comme suit :

D'après le théorème de plongement de Palais-Mostow, on a un espace R-vectoriel $E \approx R^n$, une représentation fidèle $G \subset O(n)$, donc une structure de G-fibré sur $Y \times E \to Y$ (avec la représentation $G \subset O(n)$), et un monomorphisme dans la catégorie des G-fibrés :

$$\begin{tikzcd} TY \arrow[rr, shift left] \arrow[dr, "\pi"'] & & Y\times E \arrow[ll, dashed, shift left, "p"] \arrow[dl] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

($Y \times E$ est obtenu en considérant un plongement équivariant $Y \subset E$ et en prenant $TE|Y$.).

On va identifier dorénavant TY avec son image dans $Y \times E$.

Pour $y \in Y$ on considère la projection <u>orthogonale</u> :

$$E \equiv y \times E \xrightarrow{p(y)} \pi^{-1}(y) .$$

$p(y)$ dépend, clairement, d'une manière C^∞ du point y. Aussi, si $\theta \in E$, on a :

$$p(g.y)(g.\theta) = g\circ p(y)(\theta) \quad .$$

Soit $\eta(z,x,u) \in \Gamma^{o,\infty}_{z^o}(F^* TY)^G$. On définit $\eta_1(z,x,u)$ par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
& TY \arrow[r, hook] \arrow[d] & Y\times E \arrow[r] \arrow[dl, "\pi"] & E \\
Z_1\times Z_2\times X\times U \arrow[ur, "\eta"] \arrow[r, "F"'] \arrow[urrr, bend left, "\eta_1"] & Y & &
\end{tikzcd}$$

Donc :

$$\eta(z,x,u) = [F(z,x,u),\eta_1(z,x,u)] \in Y\times E \quad .$$

η_1 est manifestement G-équivariante, c'est à dire que :

$$\eta_1 \in C^{o,\infty}_{z^o} \; (Z, C^\infty_G(X\times U, E)).$$

$C^{o,\infty}_{z^o}(Z, C^\infty_G(X\times U, E))$ est un $C^{o,\infty}_{z^o}(Z, C^\infty(X\times U)^G)$-module.

Maintenant, supposons que $\eta \in \operatorname{Ker} Ev(z^o)$.

On a donc : $\eta_1(z^o,x,u) \equiv 0$. En procédant comme dans le lemme 2.1. du chapitre précédent, on peut écrire η_1 sous la forme :

$$\eta_1(z,x,u) = \sum_1^m \psi_i(z,u,x).\ \chi_i(z,x,u)$$

avec

$$\psi_i \in \operatorname{Ker} ev_X \subset C^{o,\infty}_{z^o}(Z, C^\infty(X\times U)^G)$$

$$\chi_i \in C^{o,\infty}_{z^o}(Z, C^\infty_G(X\times U, E)).$$

Puisque p commute avec la multiplication scalaire, on peut écrire :

$$\eta(z,x,u) = p(F(z,x,u))(\eta(z,x,u)) = \sum_1^m \psi_i(z,u,x).p(F(z,x,u))[F(z,x,u),\chi_i(z,x,u)] \quad .$$

Maintenant, si $g \in G$, on remarque que :

$$\begin{aligned}
& p(F(z,gx,u))[F(z,gx,u),\chi_i(z,gx,u)] = \\
& = p(g.F(z,x,u))[g.F(z,x,u), g\circ\chi_i(z,x,u)] = \\
& = g.p(F(z,x,u))[F(z,x,u),\chi_i(z,x,u)] \quad .
\end{aligned}$$

Ceci finit la démonstration du lemme 3.2.

Maintenant, on considère l'homomorphisme de R-algèbres :

$$C^{0,\infty}_{z^0}(Z, C^\infty(X\times U)^G) \xleftarrow{F^*_*} C^{0,\infty}_{z^0}(Z, C^\infty(Y\times U)^G) ,$$

l'homomorphisme (canoniquement défini) de $C^{0,\infty}_{z^0}(Z, C^\infty(X\times U)^G)$-modules :

$$B = \Gamma^{0,\infty}_{z^0}(Z, \Gamma^\infty((TX)\times U)^G) \xrightarrow{\beta_F} \Gamma^{0,\infty}_{z^0}(F^*TY)^G$$

de même que l'homomorphisme (canoniquement défini) de $C^{0,\infty}_{z^0}(Z, C^\infty(Y\times U)^G)$-modules :

$$A = \Gamma^{0,\infty}_{z^0}(Z, \Gamma^\infty((TY)\times U)^G \xrightarrow{\alpha_F} \Gamma^{0,\infty}_{z^0}(F^*TY)^G \quad .$$

LEMME 3.3. : " <u>Si l'application :</u>

$$\Gamma^\infty((TX)\times U)^G + \Gamma^\infty((TY)\times U)^G \xrightarrow{\beta_F(z^0)+\alpha_F(z^0)} \Gamma^\infty(F(z_0)^*TY)^G$$

<u>est surjective, alors</u> :

$$B+A \xrightarrow{\alpha_F+\beta_F} \Gamma^\infty(F(z_0)^*TY)^G$$

<u>est surjective</u> ."

<u>Démonstration</u> :

Notre hypothèse peut se réécrire sous la forme suivante :

$$\text{Image } \alpha_F + \text{Image } \beta_F + \text{Ker Ev}(z^0) = \Gamma^{0,\infty}_{z^0}(F^*TY)^G \quad ,$$

ou, d'après le lemme 3.2. :

$$\text{Image } \alpha_F + \text{Image } \beta_F + (\text{Ker ev}_X)\Gamma^{0,\infty}_{z^0}(F^*TY)^G = \Gamma^{0,\infty}_{z^0}(F^*TY)^G \quad .$$

On peut considérer le $C^{0,\infty}_{z^0}(Z, C^\infty(X\times U)^G)$-module fini :

$$C = \Gamma^{0,\infty}_{z^0}(F^*TY)^G/\text{Image } \beta_F \quad ,$$

et le morphisme canonique :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha_F"] \arrow[rr, bend right, "\alpha"'] & \Gamma^{0,\infty}_{z^0}(F^*TY)^G \arrow[r] & C \end{tikzcd} \quad .$$

Notre hypothèse devient, ainsi :

$$\alpha(A) + \text{Ker ev}_X \,.\, C = C \quad .$$

D'après le théorème 1 du chapitre précédent, ceci implique $\alpha(A) = C$, et notre lemme est démontré.

2) DEMONSTRATION DE i) (Théorème de Stabilité équivariante).-

On va commencer par deux corollaires du lemme que l'on vient de démontrer.

COROLLAIRE 3.3.1. : " Soit

$$f \in C^{\infty}_{G}(X,Y)$$

une application infinitésimalement stable.

Soit V une variété C^{∞} compacte quelconque (avec action triviale de G) et

$h \in C^{\infty}(V, \Gamma^{\infty}(TX)^{G} \oplus \Gamma^{\infty}(TY)^{G})$.

On considère :

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "h"] \arrow[rr, bend right, "\tau(h)"'] & \Gamma^{\infty}(TX)^{G} + \Gamma^{\infty}(TY)^{G} \arrow[r, "\beta_f + \alpha_f"] & \Gamma^{\infty}(f^{*}TY^{G}). \end{tikzcd}$$

L'application τ :

$$C^{\infty}(V, \Gamma^{\infty}(TX)^{G} \oplus \Gamma^{\infty}(TY)^{G}) \xrightarrow{\tau} C^{\infty}(V, \Gamma^{\infty}(f^{*}TY)^{G})$$

est surjective."

Démonstration :

Soit $z_2^o \in V$ un point arbitraire et Z_2 le germe de V au point z_2^o.

On considère la situation du paragraphe précédent, avec :

$Z_1 = pt$, $U = pt$, F = l'application constante de valeur f : Donc $F(z_2) \equiv f$.

L'hypothèse que f est infinitésimalement stable, veut dire, exactement, que $\alpha_{F(z^o)} + \beta_{F(z^o)}$ est surjective. Donc, d'après le lemme 3.3 :

$$C^{\infty}_{z_2^o}(Z_2,\Gamma^{\infty}(TY)^G) + C^{\infty}_{z_2^o}(Z_2,\Gamma^{\infty}(TX)^G) \xrightarrow{\tau_{z_2^o}} C^{\infty}_{z_2^o}(Z_2,\Gamma^{\infty}(f^{*}TY)^G)$$

est, aussi, surjective. Içi $\tau_{z_2^o}$ est le germe de τ en z_2^o. En appliquant une partition C^{∞} de l'unité, sur V on trouve q.e.d. [On utilise içi le fait que

$$C^{\infty}(V) \subset C^{\infty}(V\times X)^G \text{ .] .}$$

COROLLAIRE 3.3.2 : " <u>Soit</u>

$$f \in C^{\infty}_G(X,Y)$$

<u>une application infinitésimalement stable</u>, (Z_1, z_1^o) <u>un germe d'espace topologique qui est ou bien métrisable ou bien compact et</u> (Z_2, z_2^o) <u>le germe d'une variété</u> C^{∞}. <u>On considère un</u>

$$F \in C^{o,\infty}_{z^o}(Z_1\times Z_2\ , C^{\infty}_G(X\times I,Y))$$

<u>(où</u> G <u>agit trivialement sur</u> $I=[0,1]$), tel que :

$$F(z^o)(x,t) \equiv f(x) \text{ .}$$

<u>Alors</u> $\alpha_F + \beta_F$ <u>est surjective</u>."

<u>Démonstration</u> :

D'après le lemme précédent, (appliqué avec $V=I$), l'application :

$$C^{\infty}(I,\Gamma^{\infty}(TX)^G + \Gamma^{\infty}(TY)^G) \xrightarrow{\tau} C^{\infty}(I\ ,\Gamma^{\infty}(f^{*}\ TY)^G)$$

est surjective. Mais, on a :

$$\tau = \alpha_{F(z^o)} + \beta_{F(z^o)} \text{ .}$$

Donc, on peut réappliquer le lemme 3.3 et on trouve c.q.f.à.d.

Soit maintenant

$$(Z,z^o) \xrightarrow{\psi} (C^{\infty}_G(X,Y),f) \text{ ,}$$

comme dans l'énoncé du théorème de stabilité.

En utilisant la "contractibilité locale" de $C^{\infty}_G(X,Y)$ on peut attacher à ψ une application

$$F \in C^{o,\infty}_{z^o}(Z,C^{\infty}_G(X\times I\ ,\ Y))$$

telle que

$$F(z_1,z_2,x,1) = \psi(z_1,z_2,x)$$

$$F(z_1,z_2,x,0) = f(x) = F(z_1^o,z_2^o,x,t) .$$

A F on associe :

$$\frac{\partial F}{\partial t} \in \Gamma^{o,\infty}_{z^o} (F^* TY)^G .$$

[Le lecteur remarquera içi, que si

$$H \in C^\infty_G(X \times I , Y) = C^\infty(I, C^\infty_G(X,Y)),$$

alors, l'application naturelle :

$$\frac{\partial H}{\partial t} \in \Gamma^\infty(H^* TY)$$

est, en fait, dans $\Gamma^\infty(H^* TY)^G$.] .

D'après le corollaire 3.3.2, il existe :

$$\eta \in C^{o,\infty}_{z^o} (Z, \Gamma^\infty((TX) \times I)^G) \text{ et}$$

$$\xi \in C^{o,\infty}_{z^o} (Z, \Gamma^\infty((TY) \times I)^G)$$

tels que :

$$\alpha_F(\xi) + \beta_F(\eta) = \frac{\partial F}{\partial t} .$$

Soient H_1 et H_2 des

$$H_1 \in C^{o,\infty}_{z^o}(Z, \mathrm{Diff}_G(X)) \qquad (H_1(z^o) = \mathrm{id})$$

$$H_2 \in C^{o,\infty}_{z^o} (Z, \mathrm{Diff}_G(Y)) \qquad (H_2(z^o) = \mathrm{id})$$

tels que :

$$\frac{\partial H_1}{\partial t} \circ H_1^{-1} = - \eta \qquad\qquad \frac{\partial H_2}{\partial t} \circ H_2^{-1} = \xi$$

(voir le paragraphe 4) du chapitre O) .

On a :

$$F(z,x,t) = H_2(z,x,t) \circ f(x) \circ H_1^{-1}(z,x,t) ,$$

ce qui finit la démonstration du point i) .

3) REMARQUES FINALES ET QUESTIONS OUVERTES :

Dans le contexte du paragraphe 9, chapitre O ci-dessus, et de [9] les raisons abstraites qui ont fait marcher la théorie ci-dessus sont que :

a) $C^\infty_G(X,Y)$ est une $C^\infty(X)^G$ - variété faible.

b) $\mathrm{Diff}_G(X) \times \mathrm{Diff}_G(Y)$ est un "sous-groupe de Lie" de $\mathrm{Diff}\, X \times \mathrm{Diff}\, Y$ ([9]) .

c) $T_{id}(\mathrm{Diff}_G(X) \times \mathrm{Diff}_G(Y))$ se casse d'une manière naturelle en un $C^\infty(X)^G$ et un $C^\infty(Y)^G$-module.

d) Certaines conditions de finitude (de modules sur les anneaux respectifs) sont vérifiées.

On pourrait chercher d'autres situations où cette machine abstraite fonctionne.

Je signale quelques questions ouvertes :

I) Soit G un groupe de Lie compact qui opère orthogonalement sur R^n .

On considère l'application de Hilbert

$$\begin{tikzcd} R^n \arrow[r, "\rho"] & R^n/G \approx \rho R^n \arrow[l, dashed, bend left] \arrow[r, hook] & R^k \end{tikzcd} .$$

Existe-t-il une section $i : \rho R^n \to R^n$ "suffisamment régulière" pour qu'elle induise un $i^* : C^\infty(R^n) \longrightarrow C^\infty(R^k|\rho R^n)$?

Par exemple, si $G = S(n)$ (le groupe symétrique qui permute les coordonnées) on peut trouver un i continu et semi-algébrique (ce qui redémontre le théorème de Glaeser). Mais dans le cas général il y a des obstructions topologiques à la continuité de i).

II) D'après Hilbert, si $x \in R^n$, $y \in R^k$, l'application

$$\begin{tikzcd} R[x]^G \arrow[r, dashed, bend right] & R[y] \arrow[l, "\rho^*"'] \end{tikzcd}$$

est surjective, donc admet une section.

Dans quelle mesure peut-on rendre cette section "continue". ?

III) Dans le contexte du théorème de stabilité, peut-on construire une application Ψ qui soit continue et faiblement différentiable. ?

IV) Soit $\mathfrak{E}$ la catégorie des E.V.T. localement convexes (pas nécessairement fréchetiques), et de leurs applications linéaires continues.

Pour Z espace topologique, étudier les "foncteurs dérivés" du foncteur :

$$\mathfrak{E} \xrightarrow{C^0(Z,\ldots\ldots)} \mathfrak{E} \ .$$

V) Démontrer la version paramétrée du théorème de stabilité équivariante (voir [11]) .

VI) Dans quelle mesure peut-on remplacer, dans la démonstration du lemme 3.3, le théorème de préparation par les produits tensoriels topologiques ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. BREDON.- "Introduction to compact transformation groups". Acad. Press (1972).

[2] J. DIEUDONNE, J.CARREL.- " Invariant théory,old andnew". Adv. in Math (1970). -

[3] A. GROTHENDIECK.- "Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires". Mem. Amer. Math. Soc. 16(1955).-

[4] K. JÄNICH.- " Differenzierbare G- Mannigfaltigkeiten Springer Lecture Notes 59(1968).-

[5] B. MALGRANGE.- " Idéals of differentiable functions". Oxford (1966).-

[6] J. MATHER. - "Stability of C^∞ mappings".
I. Ann. of Math. 87 (1968) pp. 89-104.
II. Ann. of Math. 89(1969) pp.254-291.
III. Publi. Math. IHES 35(1968)pp.279-308. -

[7] G.D. MOSTOW .- "Equivariant embeddings in euclidean space". Ann.of Math. 65 (1957) pp. 432-446.-

[8] R. PALAIS. - "Embedding of compact differentiable transformation groups in orthogonal representations ". J. Math. Mech. 6 (1957) pp.673-678. -

[9] V. POENARU. - "Un théorème des fonctions implicites pour les espaces d'applications C^∞ ". Publ. Math. IHES 38(I970) pp.93-124.-

[10] V. POENARU. - "Analyse différentielle". Springer Lecture Notes 371 (1974). -

[11] V. POENARU.- "Lectures on the singularities of mappings". CIME (1974) (à paraître).

[12] V. POENARU. - "Déploiement des fonctions G-invariantes". (à paraître)

[13] F. RONGA. - "Stabilité locale des applications équivariantes".-(à paraître)

[14] G. SCHWARZ. - "Smooth fonctions invariant under the action of a compact Lie group". (à paraître).-

[15] F. TREVES .- "Topological vector spaces, distributions and kernels". Ac . Press(1967).-

[16] H. WEYL.- "The classical groups". Princeton (1946).-