

**PUBLICATIONS**

**MATHEMATIQUES**

**D'ORSAY**

85 - 04

**ÉTUDE DYNAMIQUE DES POLYNÔMES COMPLEXES**

---

(Deuxième partie)

A. DOUADY & J.H. HUBBARD

avec la collaboration de P. Lavaurs, Tan Lei & P. Sentenac

**Université de Paris-Sud**  
**Département de Mathématique**

**Bât. 425**

**91405 ORSAY France**

Code matière AMS (1980) : 30 C 20 - C 60 -  
39 B 10

Mots-clefs : Systèmes dynamiques, fonctions holomorphes  
ensembles de Julia, polynômes complexes,  
itération.

**PUBLICATIONS**

**MATHEMATIQUES**

**D'ORSAY**

85 - 04

ÉTUDE DYNAMIQUE DES POLYNÔMES COMPLEXES

(Deuxième partie)

A. DOUADY & J.H. HUBBARD

avec la collaboration de P. Lavaurs, Tan Lei & P. Sentenac

**Université de Paris-Sud**  
**Département de Mathématique**

**Bât. 425**

**91405 ORSAY France**

ETUDE DYNAMIQUE DES POLYNÔMES COMPLEXES

Rappel des exposés

de la

Première partie \*

- [OC] Exposé n° I : OBJET DU COURS.
- [CC] Exposé n° II : COMPACTS DE  $\mathbb{C}$  .
- [CLJ] Exposé n° III : CONNEXITE LOCALE DE CERTAINS  
ENSEMBLES DE JULIA .
- [AH] Exposé n° IV : ARBRES DE HUBBARD.
- [JMN] Exposé n° V : ENSEMBLES DE JULIA DE MESURE NULLE
- [P] Exposé n° VI : POSDRONASVILI.
- [AEJ] Exposé n° VII : ARGUMENTS EXTERNES DANS LES ENSEMBLES  
DE JULIA.
- [AEMM] Exposé n° VIII : ARGUMENTS EXTERNES DANS M DES POINTS  
DE MISUREWICZ.

---

\* Publications Mathématiques d'Orsay, n° 84-02 (1984).

# ETUDE DYNAMIQUE DES POLYNÔMES COMPLEXES

## Deuxième PARTIE

	Page
[PIR] <u>Exposé n° IX</u> : POINTS FIXES MULTIPLES et POINTS PERIODIQUES INDIFFERENTS RATIONNELS.	
I. Points fixes multiples	
1. Ordre d'un point fixe.....	1
2. Un changement de variables.....	2
3. Pétales.....	3
II. Cas des polynômes	
1. Composante de $\overset{\circ}{K}_+$ contenant un pétale.....	5
2. Arguments externes de 0 .....	8
III. Points périodiques indifférents rationnels	
Nombre de pétales.....	9
[CLAJ] <u>Exposé n° X</u> : CONNEXITE LOCALE de CERTAINS AUTRES ENSEMBLES de JULIA.	
1. Résultat.....	12
2. Constructions de $\Omega$ .....	13
3. Construction de $\tilde{U}$ .....	14
4. Construction d'une métrique.....	15
5. Un module de continuité.....	17
6. La convergence.....	18
[TV] <u>Exposé n° XI</u> : UN TOUR de VALSE     A. DOUADY & P. SENTENAC	
1. Introduction.....	19
2. Résultats.....	21
3. Un changement de variables.....	23
4. Valse des compacts.....	24
5. Etude de la famille $(H_U)$ .....	26
6. Perturbation.....	28
7. Démonstration du théorème 1.....	30
8. Compléments.....	31
[ABP] <u>Exposé n° XII</u> : ARRIVER AU BON PORT	
1. Introduction.....	33
2. Définition de $\omega(c, \gamma)$ .....	35
3. Le cylindre de Fatou-Ecalte.....	36
4. Définition de $\check{\omega}(c)$ .....	38
5. Cas de $c_t$ .....	39
6. Définition de $\check{\omega}(c_0)$ .....	40
7. Identification de $\check{\omega}(c_0)$ .....	42
8. Démonstration du théorème 1.....	43

	<u>Exposé n° XIII</u> : ABOUTISSEMENT des RAYONS EXTERNES de M d'ARGUMENT RATIONNEL	
[AREMAR]		
	1. Résultats.....	44
	2. Points d'accumulations de $\mathbb{R}(M, \theta)$ .....	45
	3. Démonstration du théorème 1.....	46
[CH]	<u>Exposé n° XIV</u> : COMPOSANTES HYPERBOLIQUES	
	1. Composantes hyperboliques.....	47
	2. Déformation d'un cycle indifférent rationnel, cas $q \neq 1$ .....	48
	3. Cas $q = 1$ .....	50
	4. Arbre de Hubbard en une racine.....	51
	5. Racines des composantes hyperboliques ; multiplicité.....	53
	6. Décompte.....	55
[OCCH]	<u>Exposé n° XV</u> : L'ORDRE du CONTACT des COMPOSANTES HYPERBOLIQUES de M par TAN LEI	
	1. Résumé des résultats déjà obtenus qui sont utiles pour la démonstration .....	56
	2. Démonstration de la proposition.....	57
[IC]	<u>Exposé n° XVI</u> : IDENTIFICATIONS DE CYLINDRES : ETUDE A LA LIMITE par Pierre LAVAURS	
	1. Notations et position du problème.....	61
	2. Continuité de la projection sur $E$ .....	67
	3. Le germe $F$ .....	72
	4. Comportement limite de $L(c)$ .....	73
	5. Etude de $L(c) \circ G(c)$ ( $c \neq c_0$ ) .....	74
[PC]	<u>Exposé n° XVII</u> : UNE PROPRIETE de CONTINUITÉ par P. LAVAURS	
	1. Cassure des rayons d'argument rationnel.....	76
	2. Énoncé et premiers cas.....	77
	3. Cas des points de Misurewicz.....	78
	4. Cas des points admettant un cycle indifférent rationnel.....	80
[CA]	<u>Exposé n° XVIII</u> : COMPLEMENTS SUR LES ARBRES par P. LAVAURS	
	1. Arbres aux centres et aux racines.....	99
	2. Arbre en une bifurcation.....	102
	3. Calcul des arguments externes dans $M$ .....	104
[S]	<u>Exposé n° XIX</u> : SIMPLICITE des COMPOSANTES HYPERBOLIQUES... 108	

[N]	<u>Exposé n° XX</u> : N E R V U R E S	
	1. Points extrémaux.....	110
	2. Nervures de K .....	111
	3. Nervures combinatoires.....	114
	4. Ordre sur $\mathcal{D}$ .....	116
[AON]	<u>Exposé n° XXI</u> : ARBRE de l'ORIGINE d'une NERVURE de M	
	1. Arbres de Hubbard abstraits.....	119
	2. Résultats et notations.....	120
	3. Rang d'un point de K .....	120
	4. L'arbre $Z_r$ .....	121
	5. Le point $y_r$ .....	122
	6. L'arbre $H^1$ .....	123
	7. Condition de Hubbard pour H .....	124
	8. Arguments externes de $y_1$ .....	125
	9. Démonstration du théorème.....	127
[A]	<u>Exposé n° XXII</u> : A D R E S S E S	
	1. Origine d'une nervure.....	128
	2. Adresses finies.....	135
	3. Point de séparation.....	136
	4. L'implication $MLC \Rightarrow HG2$ .....	137
[RMJ]	<u>Exposé n° XXIII</u> : RESSEMBLANCE ENTRE L'ENSEMBLE DE MANDELBROT ET L'ENSEMBLE DE JULIA par TAN LEI AU VOISINAGE D'UN POINT DE MISUREWICZ	
	1. Notation et énoncé. Introduction.....	139
	2. Distance de Hausdorff.....	140
	3. Le problème de la linéarisation.....	142
	4. Une proposition technique.....	145
	5. Convergence de $\rho(c_0)^n \tau_{-c_0}(M)$ .....	149
	BIBLIOGRAPHIE.....	153

POINTS FIXES MULTIPLES

et

POINTS PERIODIQUES INDIFFERENTS RATIONNELS

I. POINTS FIXES MULTIPLES

Si  $f$  est un polynôme ayant en  $\alpha$  un point périodique de période  $k$ , avec  $(f^k)'(\alpha) = e^{2i\pi p/q}$ , le polynôme  $f^{kq}$  a en  $\alpha$  un point fixe avec dérivée 1. Pour cette raison, nous allons commencer par étudier les points fixes avec dérivée 1.

On peut supposer que le point fixe est 0. Une grande partie de l'étude peut se faire pour les applications holomorphes au voisinage de 0.

1. ORDRE D'UN POINT FIXE.

Soit  $f$  une fonction holomorphe au voisinage de 0, avec  $f(0) = 0$ . L'ordre de 0 comme point fixe de  $f$  est l'ordre  $r$  d'annulation en 0 de  $z \mapsto f(z) - z$ . On dit que 0 est un point fixe multiple si  $r \geq 2$ . On peut alors écrire  $f(z) = z + bz^r + o(z^{r+1})$  avec  $b \neq 0$ . Ceci peut aussi s'écrire  $f(z) = z(1 + bz^{r-1} + o(z^r))$ . Les  $z$  tels que  $bz^{r-1} \in \mathbb{R}_+$  (resp.  $\mathbb{R}_-$ ) forment  $r-1$  demi-droites, faisant entre elles des angles de  $1/r-1$  tour, qu'on appellera les axes de répulsion (resp. axes d'attraction) de 0 pour  $f$ .

Remarques. 1) Si  $\varphi$  est une fonction holomorphe au voisinage de 0 avec  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi'(0) \neq 0$ , qui conjugue  $f$  à  $g$  (i.e.  $g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ ), l'application linéaire tangente  $T_0\varphi: z \rightarrow \varphi'(0).z$  envoie les axes de répulsion (resp. d'attraction) de  $f$  sur ceux de  $g$ .

2) On peut, par une fonction holomorphe tangente à l'identité en 0, conjuguer  $f$  à une fonction  $g$  de la forme  $z \mapsto z + bz^r + o(z^{2r-1})$ , ou même de la forme

$z \mapsto z + bz^r + cz^{2r-1} + O(z^\nu)$  avec  $\nu$  arbitraire Pour les obstructions  
à conjuguer à  $z \mapsto z + bz^r + cz^{2r-1}$ , voir le cours d'Ecale.

## 2. UN CHANGEMENT DE VARIABLES.

Pour étudier  $f$ , on souhaite faire le changement de variable

$z \mapsto \frac{1}{(r-1)bz^{r-1}}$ . Mais cette application n'est pas injective au voisinage de 0, et ceci nous amène à poser certaines conventions.

Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ ,  $\tilde{\Omega}$  un revêtement de  $\Omega$  et  $\pi: \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$  la projection. Pour  $Z \in \tilde{\Omega}$ , on pose  $|Z| = |\pi(Z)|$ . Soient  $Z \in \tilde{\Omega}$  et  $u \in \mathbb{C}$  assez voisin de 0 pour que, pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $\pi(Z) + tu \in \Omega$ . Le chemin  $\gamma: t \mapsto \pi(Z) + tu$  dans  $\Omega$  admet dans  $\tilde{\Omega}$  un unique relèvement  $\tilde{\gamma}$  d'origine  $Z$ ; on notera alors  $Z + u$  le point  $\tilde{\gamma}(1) \in \tilde{\Omega}$ . Pour  $\lambda$  voisin de 1, on définit  $\lambda Z$  par  $\lambda Z = Z + (\lambda - 1)\pi(Z)$ .

Soit  $D_\rho$  un disque contenu dans le domaine de définition de  $f$ . L'application  $z \mapsto \frac{1}{(r-1)bz^{r-1}}$  définit un isomorphisme  $h: z \rightarrow Z$  de  $D_\rho - \{0\}$  sur un revêtement  $\tilde{\Omega}$  de degré  $r-1$  de  $\Omega = \mathbb{C} - \bar{D}_R$ , où  $R = \frac{1}{(r-1)|b|\rho^{r-1}}$ . Notons  $\pi: \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$  la projection et  $F$  l'application  $h \circ f \circ h^{-1}$ , définie sur un ouvert  $\tilde{\Omega}'$  de  $\tilde{\Omega}$  contenant  $\pi^{-1}(\mathbb{C} - \bar{D}_{R'})$  pour  $R'$  assez grand.

PROPOSITION 1. L'application  $F$  est de la forme  $Z \mapsto Z - 1 + O(|Z|^{-1/r-1})$ .

Démonstration. Soient  $Z \in \tilde{\Omega}'$ ,  $z = h^{-1}(Z)$ ,  $z_1 = f(z)$  et  $Z_1 = h(z_1) = F(Z)$ .

On a :

$$z_1 = z + bz^r + O(|z|^{r+1}) = z(1 + bz^{r-1} + O(|z|^r))$$

$$\pi(Z_1) = \frac{1}{(r-1)b} z_1^{-(r-1)} = \pi(Z)(1 + bz^{r-1} + O(|z|^r))^{-(r-1)}$$

$$\pi(Z) \left(1 - \frac{1}{\pi(Z)} + O(|Z|^{-r/r-1})\right)$$

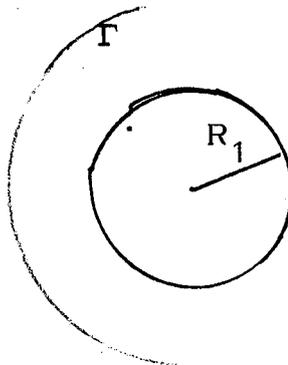
Comme  $z$  et  $z_1$  sont voisins,  $Z$  et  $Z_1$  sont sur le même feuillet et on a :

$$Z_1 = Z \left( 1 - \frac{1}{\pi(Z)} + O(|Z|^{-r/r-1}) \right) = Z - 1 + O(|Z|^{-1/r-1}) . \quad \text{Cqfd.}$$

Remarque 3. Les  $r-1$  axes de répulsion (resp. d'attraction) correspondent aux relèvements dans  $\tilde{\Omega}$  de  $\mathbb{R}_+ \cap \Omega$  (resp.  $\mathbb{R}_- \cap \Omega$ ) .

### 3. PETALES.

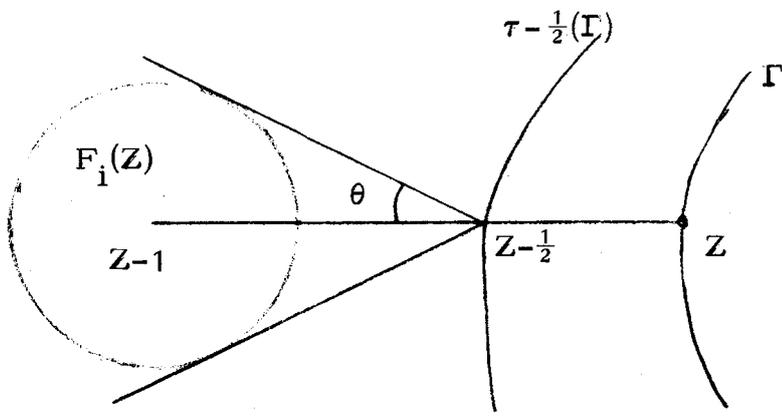
Soient  $R_1$  et  $M$  tels que, pour  $|Z| \geq R_1$ ,  $F(Z)$  soit défini et de la forme  $F(Z) = Z - 1 + \eta(Z)$  avec  $|\eta(Z)| \leq \frac{M}{|Z|^{1/r-1}} \leq \frac{1}{2}$ . Soit  $\Gamma \subset \mathbb{C}$  une courbe de la forme  $\{(x+iy) \mid x = H(y)\}$  où  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction  $C^\infty$  ayant les propriétés suivantes :



- (i)  $H$  est convexe et paire ;
- (ii)  $H(0) < -R_1$  ;
- (iii)  $y \mapsto |H(y) + iy|$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$  ;
- (iv)  $|H'(y)| < \frac{1}{t y \theta}$ , où  $\sin \theta = \frac{2M}{|Z|^{1/r-1}}$ ,  $Z = H(y) + iy$  ;
- (v)  $H'(y) \rightarrow +\infty$  quand  $y \rightarrow \infty$  .

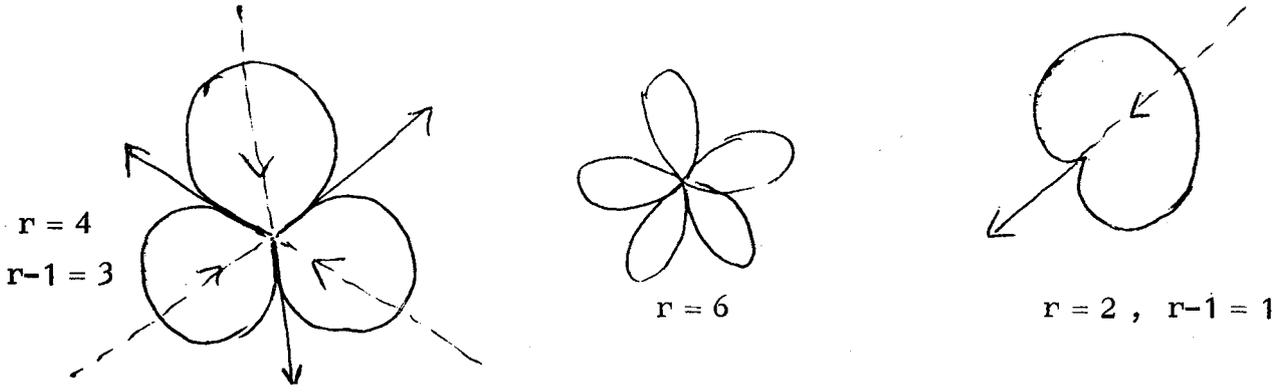
Les conditions (i) et (v) entraînent que  $\Gamma$  a une branche parabolique dans la direction de  $\mathbb{R}_+$ . Les conditions (ii) et (iii) entraînent que  $\Gamma \cap \bar{D}_{R_1} = \emptyset$ .

Soient  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{r-1}$  les relèvements de  $\Gamma$  dans  $\tilde{\Omega}$  et posons  $F_i(\Gamma) = \pi(F(\Gamma_i))$ . La condition (iv) assure que chacune des  $F_i(\Gamma)$  se trouve strictement à gauche de  $\tau_{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ , où  $\tau_{-\frac{1}{2}}$  est la translation  $z \mapsto z - \frac{1}{2}$ .



Soit  $G$  l'ensemble des  $Z = x + iy \in \mathbb{C}$  tels que  $x \leq H(y)$  (région située à gauche de  $\Gamma$ ). L'image réciproque  $G$  dans  $\tilde{\Omega}$  est formée de  $r-1$  copies  $G_1, \dots, G_{r-1}$  de  $G$ , et on a  $F(G_i) \subset \tau_{-\frac{1}{2}} \overset{\circ}{G}_i$ .

Pour chaque  $i$ , on pose  $P_i = h^{-1}(G_i) \cup \{0\}$ . Les  $P_i$  sont des compacts que l'on appelle les pétales de  $f$  en  $0$ . Ils dépendent du choix de  $\Gamma$ . On a  $f(P_i) \subset \overset{\circ}{P}_i \cup \{0\}$ . Chaque  $P_i$  est limité par une courbe  $\gamma_i = h^{-1}(\Gamma_i)$ , image d'un chemin  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ , injectif sur  $]0, 1[$ , qui part de  $0$  tangentiellement à un axe de répulsion, croise un axe d'attraction (appelé axe du pétale) et revient à  $0$  tangentiellement à l'axe de répulsion suivant.



La fleur  $\cup P_i$  est contenue dans le disque  $D_{\rho_1} = \{0\} \cup h^{-1}(\mathbb{C} - \bar{D}_{R_1})$ .

Pour  $\rho' < \frac{1}{|H(0)|^{r-1}}$ , l'ouvert  $D_{\rho'} - \cup P_i$  a  $r-1$  composantes connexes, qu'on appelle les interpétales.

**PROPOSITION 2.** Soient  $P_i$  l'un des pétales de  $f$  en  $0$  et  $z \in P_i - \{0\}$ .

- a)  $f^n(z) \rightarrow 0$  tangentiellement à l'axe de  $P_i$ .
- b)  $f^n \rightarrow 0$  uniformément sur  $P_i$ .

Démonstration. a) Posons  $z_n = f^n(z)$ ,  $Z = h(z)$ ,  $Z_n = h(z_n) = F^n(Z)$ ,

écrivons  $\text{Ré } Z$  pour  $\text{Ré}(\pi(Z))$ , etc... . On a  $\text{Ré } Z_{n+1} \leq \text{Ré } Z_n - \frac{1}{2}$ , donc  $\text{Ré } Z_n \rightarrow -\infty$ , d'où  $|Z_n| \rightarrow \infty$  et  $|z_n| \rightarrow 0$ . On a  $Z_{n+1} - Z_n \rightarrow -1$ , d'où  $\text{Arg } Z_n \rightarrow \frac{1}{2}$ , et l'angle de  $z_n$  avec l'axe de  $P_i$  tend vers 0. Cqfd.

b) On a  $F^n(G_i) \subset \tau_{-n/2}(G_i)$ , donc, pour tout  $R'' > 0$ , il existe un  $n_0$  tel que  $\pi(F^n(G_i)) \cap D_{R''} = \emptyset$  pour  $n \geq n_0$ . Par suite,  $\forall \rho'' > 0$  ( $\exists n_0$ ) ( $\forall n \geq n_0$ )  $f^n(P_i) \subset D_{\rho''}$ . Cqfd.

## II . CAS DES POLYNOMES

On suppose dans cette partie que  $f$  est un polynôme monique de degré  $d$ , ayant en 0 un point fixe d'ordre  $r \geq 2$ . Soient  $P_1, \dots, P_{r-1}$  les pétales de  $f$  en 0.

### 1. COMPOSANTE de $\overset{\circ}{K}_f$ CONTENANT UN PETALE.

Le point 0 appartient à  $J_f = \partial K_f$ . En effet, si  $f(z) = z + bz^r + O(|z|^{r+1})$ , on a :  $f^n(z) = z + nbz^r + O(|z|^{r+1})$ , et la suite  $((f^n)^{(r)}(0))_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas bornée.

Pour chaque  $i$ ,  $P_i - \{0\} \subset \overset{\circ}{K}_f$ . En effet  $P_i \subset K_f$  et  $f(P_i - \{0\}) \in \overset{\circ}{P}_i \subset \overset{\circ}{K}_f$ . Comme l'ensemble  $P_i - \{0\}$  est connexe, il est contenu dans une composante connexe  $U_i$  de  $\overset{\circ}{K}_f$ .

PROPOSITION 3. Pour tout  $x \in U_i$ , il existe un  $n$  tel que  $f^n(x) \in P_i - \{0\}$ .

Démonstration. Soient  $x_0 \in U_i$  et  $y_0 \in P_i$ . Posons  $x_n = f^n(x)$  et  $y_n = f^n(y)$ . On a, pour les distances de Poincaré,  $d_{U_i}(x_n, y_n) \leq d_{U_i}(x_0, y_0)$ , et pour les distances euclidiennes  $d(y_n, \partial U_i) \leq |y_n| \rightarrow 0$ . Par suite,  $|x_n - y_n| \rightarrow 0$  et  $|x_n| \rightarrow 0$ .

Si  $\rho'$  est assez petit, on a  $|f(z)| > |z|$  si  $z \in D_{\rho'} - \cup P_j$ . Les  $x_n$  ne peuvent donc pas être tous dans les interpétales, et  $\exists n_0, \exists j, x_{n_0} \in P_j - \{0\}$ . On a alors  $x_n \in \overset{\circ}{P}_j - \{0\}$  pour  $n > n_0$ .

Notons  $V_j$  l'ensemble des  $x \in U_i$  tels que  $(\exists n) x_n \in \overset{\circ}{P}_j - \{0\}$ . Les  $V_j$  forment une partition de  $U_i$  en ouverts. Comme  $U_i$  est connexe, un seul  $n$  n'est pas vide, et comme  $P_i - \{0\} \subset V_i$ , on a  $U_i = V_i$ . Cqfd.

COROLLAIRE. Les  $U_i$  sont deux à deux distincts.

PROPOSITION 4. a)  $U_i$  contient au moins un point critique de  $f$ .

b)  $f$  induit une application holomorphe propre  $f_i : U_i \rightarrow U_i$  de degré  $d_i \geq 2$

c) Soit  $\varphi : U_i \xrightarrow{\approx} D$  un isomorphisme et posons  $g = \varphi \circ f_i \circ \varphi^{-1}$ . Alors,  $g$  est la restriction à  $D$  d'une fraction rationnelle  $g : \bar{C} \rightarrow \bar{C}$  ayant sur  $S^1$  un point fixe triple  $\alpha$ . Pour tout  $x \in \bar{C} - S^1$ , la suite  $g^n(x) \rightarrow \alpha$ .

LEMME. Soit  $x_0 \in U_i$  et posons  $x_n = f^n(x_0)$ . Alors,  $d_{U_i}(x_n, x_{n+1}) \rightarrow 0$ .

Démonstration.  $x_n \rightarrow 0$  tangentiellement à l'axe de  $P_i$ , donc  $\exists m > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, d(x_n, \partial U_i) \geq m |x_n|$  (en fait, on peut prendre  $m$  arbitrairement voisin de  $\sin(\frac{\pi}{r-1})$  si  $r \geq 3, m = 1$  si  $r = 2$ ).

Pour  $m' > |b|$ , on a  $|x_{n+1} - x_n| \leq m' |x_n|^r$  pour  $m$  assez grand. Par suite,  $\frac{|x_{n+1} - x_n|}{d(x_n, \partial U_i)} \rightarrow 0$ . Or,

$$d_{U_i}(x_n, x_{n+1}) \leq d_{D(x_n, d(x_n, \partial U_i))}(x_n, x_{n+1}) = d_D(0, \frac{x_{n+1} - x_n}{d(x_n, \partial U_i)}),$$

d'où  $d_{U_i}(x_n, x_{n+1}) \rightarrow 0$ . Cqfd.

Démonstration de la proposition. b) L'application  $f$  induit une application holomorphe propre  $f^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$ . Or,  $U_i$  est une composante connexe de  $f^{-1}(U_i)$ , donc  $f$  induit  $f_i : U_i \rightarrow U_i$  holomorphe propre. Soit  $d_i$  son degré. On a  $d_i > 1$  car sinon  $f_i$  serait une isométrie pour la distance de Poincaré de  $U_i$ , ce qui est contredit par le lemme.

a) résulte de b) et de la formule de Riemann-Hurewicz. Plus élémentairement, s'il n'y avait pas de point critique,  $f_i : U_i \rightarrow U_i$  serait un revêtement nécessairement trivial puisque  $U_i$  est simplement connexe, donc de degré 1.

c) L'application  $g : D \rightarrow D$  est holomorphe et propre. Par le principe de réflexion de Schwarz, elle se prolonge en une application  $\bar{C} \rightarrow \bar{C}$ , qui est une fraction rationnelle commutant avec  $z \rightarrow \frac{1}{z}$ . Montrons qu'il y a un point fixe triple sur  $S^1$ . Soit  $x_0 \in D$  et posons  $x_n = g^n(x)$ . Tout point d'accumulation  $\alpha$  de la suite  $(x_n)$  appartient à  $S^1$  et est un point fixe de  $g$ . En effet, si  $x_{n_k} \rightarrow \alpha$ , on a  $|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}| \leq d_D(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) \rightarrow 0$ , et  $g(x_{n_k}) \rightarrow \alpha$  d'où  $\alpha = y(\alpha)$ . Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_\nu$  les points fixes de  $g$  sur  $S^1$ ,  $W_1, \dots, W_\nu$  des voisinages de  $\alpha_1, \dots, \alpha_\nu$  respectivement tels que  $d_D(W_i \cap D, W_j \cap D) > d_D(x_0, x_1)$ . A partir d'un certain rang, tous les  $x_n$  sont dans la réunion des  $W_i$ , mais comme on a  $d_D(x_n, x_{n+1}) \leq d_D(x_0, x_1)$ , ils sont tous dans le même, et la suite n'a qu'un point d'accumulation  $\alpha \in S^1$ . Comme  $\bar{D}$  est compact,  $x_n \rightarrow \alpha$ .

Comme  $d_D(x_n, x_{n+1}) \rightarrow 0$ , on a  $\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - \alpha} \rightarrow 0$  et  $\alpha$  est un point fixe multiple. Soit  $y_0 \in D$  et posons  $y_n = g^n(y_0)$ . On a  $d_D(x_n, y_n) < d_D(x_0, y_0)$ ; comme  $|x_n - \alpha| \rightarrow 0$ , on a  $|y_n - x_n| \rightarrow 0$  et  $y_n \rightarrow \alpha$ .

Soit  $s$  l'ordre de  $\alpha$  comme point fixe de  $g$ ; montrons que  $s = z$ .

Soient  $Q_1, \dots, Q_{s-1}$  les pétales de  $g$  en  $\alpha$ . Au moins la moitié d'entre eux rencontre  $D$ . Mais les  $V_i = \{x \in D \mid g^n(x) \in Q_i - \{\alpha\}\}$  forment une partition de  $D$  en ouverts, donc il y en a au plus 1 non vide et  $s-1 \leq 2$ , d'où  $s = 2$  ou  $3$ .

Posons  $z_n = \varphi^{-1}(x_n) \in U_i$ . La suite  $z_n \rightarrow 0$  tangentiellement à l'axe de  $P_i$ . Si  $\eta : \bar{U}_i \rightarrow [0, 1]$  est une fonction harmonique sur  $\bar{U}_i$ , continue sur  $U_i - \{0\}$ , valant 0 sur  $\partial U_i$  dans un interpétale adjacent à  $P_i$  et 1 dans l'autre,  $(\exists m > 0) (\forall n) m \leq \eta(z_n) \leq 1 - m$ . Par suite,  $x_n \rightarrow \alpha$  non tangentiellement à  $S^1$ , ce qui exclut le cas  $s = 2$ . On a donc  $s = 3$ . Cqfd.

COROLLAIRE 1. Si  $d_i = 2$ , il n'y a qu'un point critique  $\omega \in U_i$ . Si on a pris  $\varphi$  tel que  $\varphi(\omega) = 0$  et  $\alpha = 1$ , alors,  $g$  est donnée par  $g(z) = \frac{3z^2+1}{z+z^2}$ .

## 2. ARGUMENTS EXTERNES DE 0 .

PROPOSITION 5. On suppose que  $K_f$  est connexe et localement connexe.

- a) Tout argument externe de 0 est de la forme  $p/d-1$ .
- b) Dans chaque interpétale arrive au moins un rayon externe qui aboutit en 0.
- c) Entre deux rayons externes aboutissant en 0, il y a un point critique et une valeur critique de  $f$ .

LEMME. Soit  $A \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  un ensemble contenant au moins un point  $\alpha$  de la forme  $p/d-1$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ . On suppose que  $t \mapsto dt$  induit une bijection de  $A$  sur  $A$  préservant l'ordre cyclique. Alors, tout point de  $A$  est de la forme  $p/d-1$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ .

Démonstration. On a  $(d-1)\alpha = 0$ , donc  $d\alpha = \alpha$ , et  $t \mapsto t - \alpha$  commute avec  $t \mapsto dt$ . On peut donc prendre  $\alpha$  comme origine, i.e. supposer que  $\alpha = 0$ . Soit  $t \in A$  et soit  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k, \dots)$  le développement de  $t$  en base  $d$ . Si la suite  $(\epsilon_i)$  est stationnaire,  $\epsilon_i = \epsilon$  pour  $i \geq k_0$ , on a :  $d^k t = \frac{\epsilon}{d-1} \in A$ ,  $d^k \frac{\epsilon}{d-1} = \frac{\epsilon}{d-1} = d^k t$ , d'où  $t = \frac{\epsilon}{d-1}$ . Sinon  $\exists i, j$  tels que  $\epsilon_i < \epsilon_{i+1}$  et  $\epsilon_j > \epsilon_{j+1}$ . Choisissons pour tout élément de  $A$  le représentant dans  $[0, 1[$ . On a  $0 < d^i t < d^{i+1} t$  et  $0 < d^{j+1} t < d^j t$ , ce qui est en contradiction avec le fait que  $t \mapsto d^{j-i} t$  préserve l'ordre cyclique. Cqfd.

Démonstration de la proposition. a) Notons  $A$  l'ensemble des arguments externes de 0. Supposons  $A \neq \emptyset$  et soit  $t \in A$  et  $\alpha$  le plus petit élément de  $A$  correspondant à un rayon  $\mathcal{R}_\alpha$  qui arrive dans le même interpétale que  $\mathcal{R}_t$ . Le rayon  $\mathcal{R}_\alpha$  est stable par  $f$ , donc  $\alpha = d\alpha$  et  $\alpha$  est de la forme  $p/d-1$ . L'application  $f$  induit une permutation des  $(\mathcal{R}_t)_{t \in A}$  préservant l'ordre cyclique. La partie a) résulte alors du lemme.

b) Choisissons dans chaque pétale  $P_i$  un centre  $c_i$  pour  $U_i$  et soit  $H$  l'enveloppe réglementaire de  $\{0, c_1, \dots, c_{r-1}\}$ . Les interpétales sont les accès à 0 relativement à  $H$  (cf. exposé "arguments externes dans les ensembles de Julia"). La partie b) résulte alors de la proposition 1 dudit exposé.

c) Soient  $R = \bar{\mathcal{R}}(f, \theta)$  et  $R' = \bar{\mathcal{R}}(f, \theta')$  deux rayons externes de  $K_f$  aboutissant en 0, et  $V$  une composante connexe de  $C - (R \cup R')$ . D'après la partie a), on peut supposer que  $\theta = 0$ ,  $\theta' = \frac{p}{d-1}$ ,  $p \in \{1, \dots, d-2\}$ , et que  $V$  contient les points de  $C - K_f$  d'argument externe  $t \in ]0, p/d-1[$ . Posons  $W = f^{-1}(V)$ . Le bord  $\partial W$  est la réunion des  $\mathcal{R}(f, t)$  pour  $t \in \{\frac{i}{d}, \frac{p}{d-1} + \frac{i}{d}\}_{i=0, \dots, d-1}$ . Soit  $W_1$  la composante connexe de  $W$  telle que  $\partial W_1 \supset R$ . On a  $W_1 \subset V$  et  $\partial W \supset R \cup \mathcal{R}(f, t_1)$  où  $t_1 = \frac{p}{d-1} - \frac{p}{d} = \frac{p}{d \cdot (d-1)}$ . Le rayon  $R_1 = \mathcal{R}(f, t_1)$  aboutit en un point  $c_1 \neq 0$  puisque  $t_1 \notin \mathbb{Z} \cdot \frac{1}{d-1}$ . L'application  $f$  induit une application holomorphe propre  $f_1 : W_1 \rightarrow V$ , notons  $d_1$  son degré. Soit  $U$  un voisinage de 0, alors  $f^{-1}(U \cap W) \supset (U' \cap W) \cup (U'' \cap W)$  où  $U'$  est un voisinage de 0 et  $U''$  un voisinage de  $c_1$ , qu'on peut supposer disjoints. Par suite,  $d_1 \geq 2$ , donc  $(\exists \omega \in W_1) f'(\omega) = 0$  et  $f(\omega) \in W$ . Cqfd.

### III. POINTS PERIODIQUES INDIFFERENTS RATIONNELS

#### NOMBRE DE PETALES.

Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  un polynôme de degré  $d$ ,  $\alpha$  un point périodique de période  $k$ , tel que  $\lambda = (f^k)'(\alpha) = e^{2i\pi p/q}$ , p.g.c.d.  $(p, q) = 1$ .

PROPOSITION 6. La multiplicité  $r$  de  $\alpha$  comme point fixe de  $f^{kq}$  est de la forme  $\nu q + 1$ , où  $\nu \in \{1, \dots, d-1\}$ .

Démonstration. L'application  $T_\alpha f^k$ , qui est la multiplication par  $\rho$ , opère librement sur les axes de répulsion en  $\alpha$ . Leur nombre, qui est  $r-1$ , est donc de la forme  $q\nu$ . Il y a  $\nu$  orbites disjointes dans  $\pi_0(\overset{\circ}{K}_f)$ , et chacune contient au moins un point critique de  $f^{kq}$ , donc un point critique de  $f$ . Comme  $f$  a au plus  $d-1$  points critiques, on a  $\nu \leq d-1$ . Cqfd.

On pourrait aussi déduire la proposition 5 du lemme suivant, que nous donnons car il nous servira par la suite.

LEMME 1. On peut trouver une coordonnée holomorphe centrée en  $\alpha$  telle que l'expression de  $f^k$  dans cette coordonnée soit de la forme  $\zeta \mapsto \lambda(\zeta + \zeta^r + O(\zeta^{r+1}))$ , avec  $r = \nu q + 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$ .

Autrement dit, on peut trouver un difféomorphisme  $C$ -analytique,  $\psi$  d'un voisinage de  $\alpha$  sur un voisinage de 0, avec  $\psi(\alpha) = 0$ , tel que  $\psi \circ f^k \circ \psi^{-1}$  soit de la forme prescrite.

Démonstration. Nous allons montrer que, si on a une coordonnée  $\zeta_j$  où l'expression  $g_j$  de  $f^k$  est  $\zeta \mapsto \lambda \zeta + b_j \zeta^j + O(\zeta^{j+1})$ , et si  $j$  n'est pas de la forme  $\nu q + 1$ , on peut trouver une coordonnée  $\zeta_{j+1}$ , tangente à l'ordre  $j$  à  $\zeta_j$ , telle que l'expression  $g_{j+1}$  de  $f^k$  dans  $\zeta_{j+1}$  soit  $\zeta \mapsto \lambda \zeta + b_{j+1} \zeta^{j+1} + O(\zeta^{j+2})$ . Prenons  $\zeta_{j+1} = \zeta_j + c \zeta_j^j$ . L'application  $g_{j+1}$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \zeta_{j+1} \mapsto \zeta_j &= \zeta_{j+1} - c \zeta_{j+1}^j + \dots + \xrightarrow{g_j} \lambda \zeta_{j+1} + (b_j - \lambda c) \zeta_{j+1}^j + \dots \\ &\mapsto g_{j+1}(\zeta_{j+1}) = \zeta_{j+1} + (b_j - \lambda c + c \lambda^j) \zeta_{j+1}^j + O(\zeta_{j+1}^{j+1}) \end{aligned}$$

Si  $j$  n'est pas de la forme  $\nu q + 1$ , on a  $\lambda^j - \lambda \neq 0$ , et on peut choisir  $c$  de façon que  $b_j + c(\lambda^j - \lambda) = 0$ .

On peut ainsi chasser de proche en proche le premier terme de  $g_j(\zeta) - \lambda \zeta$  jusqu'à ce que l'on tombe sur un terme de la forme  $b \zeta^{\nu q + 1}$  avec  $b \neq 0$ . Si le processus ci-dessus se poursuivait indéfiniment,  $f^{kq}$  aurait un contact d'ordre  $\infty$  avec l'identité, donc  $f^{kq} = \text{id}$ , ce qui est impossible si  $f$  est un polynôme de

degré  $d > 1$ . On peut donc trouver une coordonnée  $\zeta$  telle que l'expression de  $f^k$  soit  $\zeta \mapsto \lambda \zeta + b \zeta^{\nu q+1} + O(\zeta^{\nu q+2})$  avec  $b \neq 0$ , et par une homothétie on peut obtenir  $b = \lambda$ . Cqfd.

Soit  $\psi$  un difféomorphisme d'un voisinage de  $\alpha$  sur un voisinage de 0. Une fleur  $F$  de  $f^{kq}$  relativement à  $\psi$  est  $F = \psi^{-1}(F')$ , où  $F'$  est une fleur (réunion des pétales) de  $\psi \circ f^{kq} \circ \psi^{-1}$ .

PROPOSITION 7. Soit  $\zeta$  une coordonnée centrée en  $\alpha$  satisfaisant aux conditions du lemme 1, et  $F$  la fleur de  $f^{kq}$  relativement à  $\zeta$  définie à partir d'une courbe  $\Gamma$  comme dans I.3. Pour un choix convenable de  $\Gamma$ , on a  $f^k(F) \subset \overset{\circ}{F} \cup \{\alpha\}$ .

Démonstration. Reprenons le changement de variables  $h : D_\rho \xrightarrow{\approx} \tilde{\Omega}$  défini en I.2, avec  $b = 1$ . Notons  $\sigma$  l'application de changement de feuillet  $\tilde{\Omega} \rightarrow \tilde{\Omega}$  conjuguée par  $h$  de  $z \mapsto \lambda z$ . L'expression  $F = h \circ f^k \circ h^{-1}$  de  $f^k$  est de la forme  $Z \mapsto \sigma(Z - 1 + O(\frac{1}{|Z|^{1/r-1}}))$ . Si  $\Gamma$  satisfait aux conditions (i) à (v), on a  $F(G_i) \subset \tau_{-\frac{1}{2}} \overset{\circ}{G}_{\sigma(i)}$ , d'où  $f(P_i - \alpha) \subset \overset{\circ}{P}_{\sigma(i)}$ . Cqfd.

Remarque. La condition (iv) est plus forte que la condition normalement exigée pour définir la fleur de  $f^{kq}$ , car  $f^{kq}$  correspond à  $b = q$  et non  $b = 1$ .

CONNEXITE LOCALE DE CERTAINS AUTRES ENSEMBLES DE JULIA

1. RESULTAT.

THEOREME. Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  un polynôme de degré  $d > 1$ . On suppose que, pour tout point critique  $\omega$  de  $f$ , l'une des 3 éventualités suivantes se produit :

- a)  $\omega$  est attiré par un cycle attractif ;
- b)  $\omega$  tombe en un temps fini sur un cycle répulsif.
- c)  $\omega$  est attiré par un cycle indifférent rationnel.

Alors,  $K_f$  est connexe et localement connexe.

COROLLAIRE. Soit  $f$  un polynôme de degré 2 admettant un cycle indifférent rationnel. Alors,  $K_f$  est connexe et localement connexe.

Cet exposé est un complément à l'exposé [CLJ] "Connexité locale de certains ensembles de Julia". Nous utiliserons les résultats de l'exposé [PIR] "Points fixes multiples et points périodiques indifférents rationnels".

D'après un théorème de Fatou et/ou Julia, comme tout point critique de  $f$  appartient à  $K_f$ , l'ensemble  $K_f$  est connexe ([CLJ], Proposition 1 étendue). Le cas où seules les éventualités (a) et (b) se présentent est couvert par la Proposition 4 de [CLJ] + Caractérisation des polynômes sous-hyperboliques. Dans le cas où (c) se présente effectivement,  $f$  n'est pas sous-hyperbolique. Pour montrer que  $K_f$  est localement connexe, nous montrerons que la suite  $(\gamma_n)$  de lacets définie dans la Proposition 3 de [CLJ] converge uniformément. Pour cela, nous allons construire, sur une partie  $\Omega$  de  $\mathbb{C}$  une métrique pour laquelle  $f$  est strictement (i.e. augmente strictement la longueur de toute

courbe rectifiable non triviale) mais non fortement dilatante en général. Le raisonnement que nous aurons à faire pour terminer la démonstration sera donc plus délicat que celui de la démonstration de la Proposition 4 de [CLJ] : nous serons amenés à faire quelque chose comme une partition de Markov.

Dans la suite,  $f$  sera un polynôme satisfaisant aux hypothèses du Théorème.

## 2. CONSTRUCTIONS de $\Omega$ .

Notons  $A_-$  l'ensemble des points périodiques attractifs de  $f$ ,  $A_0$  l'ensemble des points périodiques indifférents rationnels et  $C$  la réunion des orbites directes des points critiques. Ecrivons  $C = C_- \cup C_0 \cup C_+$ , où  $C_-$  (resp.  $C_0$ ) correspond aux points critiques attirés par un cycle attractif (resp. indifférent rationnel) et  $C_+$  aux points critiques tombant sur un cycle répulsif.

PROPOSITION 1. On peut trouver un ensemble compact  $\Omega$  tel que :

- a)  $\partial\Omega \supset A_0$ ,  $\Omega \cap A_- = \emptyset$ ,  $C_+ \subset \overset{\circ}{\Omega}$ ,  $(C_0 \cup C_-) \cap \Omega = \emptyset$  ;
- b)  $J_f \subset \overset{\circ}{\Omega} \cup A_0$ ,  $\gamma_n \subset \overset{\circ}{\Omega}$  pour n assez grand ;
- c)  $f^{-1}(\Omega) \subset \overset{\circ}{\Omega} \cup A_0$  ;
- d)  $\overset{\circ}{\Omega}$  connexe ;
- e)  $\overset{\circ}{\Omega} \cap \mathcal{R}(K_f, 0)$  connexe.

Démonstration. Soit  $L$  un disque topologique fermé contenant  $K_f$ , limité par une courbe de niveau du potentiel  $G_f$  de  $K_f$ .

Choisissons pour chaque  $\alpha \in A_-$ , un disque topologique  $\Delta_\alpha$  de façon que  $f(\bar{\Delta}_\alpha) \subset \Delta_{f(\alpha)}$ . Ceci entraîne  $\bar{\Delta}_\alpha \subset \overset{\circ}{K}_f$ . Soit  $n_-$  tel que  $B_- = f^{-n_-}(\bigcup_{\alpha \in A_-} \Delta_\alpha) \supset C_-$ . On a encore  $\bar{B}_- \subset \overset{\circ}{K}_f$ .

Pour chaque  $\alpha \in A_0$ , construisons une fleur  $F_\alpha$  (relativement à une coordonnée  $\zeta_\alpha$  centrée en  $\alpha$ ) de façon que  $f(F_\alpha - \{\alpha\}) \subset \overset{\circ}{F}_{f(\alpha)}$ . Soit  $n_0$  tel que  $B_0 = f^{-n_0}(\bigcup_{\alpha \in A_0} F_\alpha) \supset C_0$ . Ceci entraîne que  $B_0 \subset \overset{\circ}{K}_f$  et  $\bar{B}_0 \subset \overset{\circ}{K}_f \cup A_0$ .

L'ensemble  $\Omega = L - (B_- \cup B_0)$  répond à la question. Cqfd.

### 3. CONSTRUCTION de $\tilde{U}$ .

Posons  $U = \overset{\circ}{\mathbb{R}}$ . Nous allons construire un revêtement ramifié  $\tilde{U}$  de  $U$ . Comme les points périodiques de  $C_+$  sont répulsifs, donc non critiques, on peut trouver une fonction  $\nu : C_+ \rightarrow \mathbb{N}^*$  telle que  $\nu(f(x))$  soit multiple de  $r(x)\nu(x)$ , où  $r(x)$  est le degré local de  $f$  en  $x$  (par exemple,  $\nu(x) = \prod r(y)$ , produit pour  $y$  dans l'orbite inverse stricte de  $x$ ).

On pose  $r(x) = 1$  pour  $x \notin C_+$ . Soient  $U^*$  un revêtement ramifié de  $U$ , avec degré de ramification égal à  $\nu(x)$  pour tout point au-dessus de  $x$ , et  $\tilde{U}$  le revêtement universel de  $U^*$ . Alors,  $\tilde{U}$  est un revêtement ramifié galoisien de  $U$ . Notons  $\pi$  la projection  $\tilde{U} \rightarrow U$ . Soit  $\tilde{\mathcal{R}}_0$  un relèvement de l'arc ouvert  $U \cap \mathcal{R}(K_f, 0)$  dans  $\tilde{U}$ .

PROPOSITION 2. Il existe une application holomorphe  $g : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$  telle que  
 $f \circ \pi \circ g = \pi$  et  $g(\tilde{\mathcal{R}}_0) \subset \tilde{\mathcal{R}}_0$ .

Remarque : La condition  $f \circ \pi \circ g = \pi$  exprime en quelque sorte que  $g$  est un relèvement de  $f^{-1}$ .

Démonstration. Soit  $X$  l'ensemble des couples  $(x, y) \in \tilde{U} \times \tilde{U}$  tels que  $f(\pi(y)) = \pi(x)$ . L'ensemble  $X$  est une courbe  $\mathbb{C}$ -analytique avec singularités. Soit  $(x_0, y_0) \in X$ . Si  $\pi(x_0)$  n'appartient pas à  $\mathbb{C}$ ,  $\pi(y_0)$  non plus,  $X$  est lisse en  $(x_0, y_0)$  et  $\text{pr}_1 : X \rightarrow \tilde{U}$  est un isomorphisme local au voisinage de  $(x_0, y_0)$ . Supposons  $\pi(x_0) \in \mathbb{C}$ , notons  $r$  le degré de ramification en  $\pi(y_0)$  de  $f$ ; posons  $\nu_{x_0} = \nu(\pi(x_0))$  et  $\nu_{y_0} = \nu(\pi(y_0))$ ,  $\deg_{y_0}(f \circ \pi) = r\nu_{y_0}$ , qui est par hypothèse un diviseur de  $\nu_{x_0} = \deg_{x_0} \pi$ . On peut prendre sur  $\tilde{U}$  des coordonnées,  $\xi$  centrée en  $x_0$  et  $\eta$  centrée en  $y_0$ , telles que les expressions de  $\pi$  et  $f \circ \pi$

soient  $\xi \mapsto \xi^{\nu_{x_0}}$  et  $\eta \mapsto \eta^{r\nu_{y_0}}$ . Au voisinage de  $(x_0, y_0)$ , l'ensemble  $X$  devient  $\{(\xi, \eta) \mid \xi^{\nu_{x_0}} = \eta^{r\nu_{y_0}}\} = \cup \{(\xi, \eta) \mid \eta = \lambda \xi^q\}$ , où  $q = \nu_{x_0} / r\nu_{y_0}$ , la réunion étant prise sur les  $\lambda$  tels que  $\lambda^{r\nu_{y_0}} = 1$ . La courbe  $X$  est au voisinage de  $(x_0, y_0)$ , réunion de  $r\nu_{y_0}$  courbes lisses (branches), qui se coupent transversalement, et pour chacune la projection  $\text{pr}_1 : X \rightarrow \tilde{U}$  induit un isomorphisme local.

En remplaçant le point  $(x_0, y_0)$  par  $r\nu_{y_0}$  points, un sur chaque branche, et en procédant de même pour les autres points  $(x, y)$  tels que  $\pi(x) \in C$ , on obtient un espace  $\tilde{X}$  qui est un revêtement de  $\tilde{U}$ . Mais  $\tilde{U}$  est simplement connexe, ce revêtement est donc trivial. Soient  $x_1$  et  $y_1$  des points de  $\mathbb{R}(K_f, 0) \cap U$  tels que  $x_1 = f(y_1)$ ; notons  $\tilde{x}_1$  et  $\tilde{y}_1$  leur relèvement dans  $\tilde{\mathbb{R}}_0$ . Il existe une section unique  $\sigma : \tilde{U} \rightarrow \tilde{X}$  telle que  $\sigma(\tilde{x}_1) = (\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$ . L'application  $g = \text{pr}_2 \circ \pi_{\tilde{X}} \circ \sigma : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$ , où  $\pi_{\tilde{X}} : \tilde{X} \rightarrow X$  est la projection canonique, répond à la question. Cqfd.

#### 4. CONSTRUCTION d'une METRIQUE.

Notons  $\mu_{\tilde{U}}$  la métrique de Poincaré de  $\tilde{U}$  et  $\mu_U$  la métrique riemannienne admissible sur  $U$  telle que la projection  $\pi : \tilde{U} \rightarrow U$  soit une isométrie locale.

Remarques. 1) Si  $A_0 = \emptyset$ ,  $\pi(g(\tilde{U}))$  est relativement compact dans  $U$ , il en résulte que  $g : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$  est fortement contractante pour  $\mu_{\tilde{U}}$ . Par suite,  $f$  est fortement dilatante pour  $\mu_U$  sur  $J_f$ , autrement dit  $f$  est sous-hyperbolique. Le théorème, dans ce cas, résulte alors de [CLJ], Proposition 4.

2) Si  $A_0 \neq \emptyset$ , l'application  $g : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$  est strictement mais non fortement contractante. Soient  $\alpha \in A_0$  et  $\theta$  un argument externe de  $\alpha$  dans  $K_f$ . L'arc ouvert  $U \cap \mathbb{R}(K_f, \theta)$  a une longueur infinie du côté de  $\alpha$  pour  $\mu_U$ , et la suite  $(\gamma_n(\theta))_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas une suite de Cauchy pour  $\mu_U$ . C'est pour ces raisons que nous allons modifier la métrique  $\mu_U$ .

On peut trouver pour chaque point  $\alpha \in A_0$ , un disque topologique  $\Delta_\alpha$  et un isomorphisme  $\zeta_\alpha : \Delta_\alpha \rightarrow D_r$  de façon que l'expression de  $f : \Delta_\alpha \rightarrow \Delta_{f(\alpha)}$

soit de la forme  $\zeta \rightarrow \lambda (\zeta + b_\alpha \zeta^{q_\alpha+1} + \dots)$ ,  $b_\alpha > 0$ ,  $q_\alpha =$  nombre de pétales de la fleur de  $\alpha$ ,  $\lambda^{q_\alpha} = 1$ .

Si les disques  $\Delta_\alpha$  ont été pris assez petits,  $U \cap \Delta_\alpha$  est contenu dans la réunion des interpétales, et l'expression de  $f$  a une dérivée de module  $> 1$ . En outre, on a :  $f(U \cap \Delta_\alpha) \supset U \cap \Delta_{f(\alpha)}$ ,  $f(\bar{\Delta}_\alpha) \cap \bar{\Delta}_\beta = \emptyset$  pour  $\beta \neq f(\alpha)$ , et  $\bar{\Delta}_\alpha \cap C_+ = \emptyset$ .

Notons  $\mu_\alpha$  la métrique  $|d\zeta_\alpha|$  sur  $\Delta_\alpha$ . Choisissons  $M \in \mathbb{R}_+$  grand et définissons sur  $U \cup \bigcup_{\alpha \in A_0} \Delta_\alpha$  une métrique riemannienne  $\mu$  (à coefficient discontinu) par  $\mu = \inf(\mu_U, M\mu_\alpha)$ , la borne inférieure étant prise en chaque point  $z$  sur les métriques définies en ce point.

Considérons le compact  $\Omega' = f^{-1}(\Omega) \subset U \cup A_0$ .

PROPOSITION 3. Si on a choisi  $M$  assez grand,  $f$  est strictement dilatante pour  $\mu$  sur  $\Omega'$ .

Par "strictement dilatante", nous voulons dire que, pour tout chemin rectifiable non trivial  $\gamma : I \rightarrow \Omega'$ , on a  $\text{long}_\mu(f \circ \gamma) > \text{long}_\mu(\gamma)$ .

Démonstration. Pour  $\alpha \in A_0$ ,  $f^{-1}(\Omega \cap \bar{\Delta}_\alpha)$  est un compact de la forme  $L'_\alpha \cup L''_\alpha$ , où  $L'_\alpha \subset \Omega' \cap \Delta_\alpha$  et  $L''_\alpha$  est un compact contenu dans  $U - C_+ = U - C$ . Posons  $m_\alpha = \inf_{z \in L''_\alpha} \|T_z f\|_{\mu_U, \mu_\alpha}$ . On a  $m_\alpha > 0$ . Nous choisissons  $M > \frac{1}{\inf(m_\alpha)}$ . Montrons que, pour  $z \in \Omega' - (A_0 \cup C)$ , on a :

$$(1) \quad \|T_z f\|_\mu > 1 .$$

Il y a 4 cas à considérer :

a)  $\mu_z = \mu_{U,z}$ ,  $\mu_{f(z)} = \mu_{U,f(z)}$  : L'application  $f : f^{-1}(U) \rightarrow U$  est strictement dilatante pour  $\mu_U$  puisque  $g : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$  est strictement contractante, d'où (1) dans ce cas.

b)  $\mu_z = M\mu_{\alpha,z}$ ,  $\mu_{f(z)} = \mu_{U,f(z)}$  : On a  $\mu_z \leq \mu_{U,z}$ , d'où (1) comme dans le cas a).

c)  $\mu_z = M\mu_{\alpha,z}$ ,  $\mu_{f(z)} = M\mu_{f(\alpha),f(z)}$  : L'inégalité (1) résulte du fait que l'expression de  $M$  dans les coordonnées  $\zeta_\alpha, \zeta_{f(\alpha)}$  a une dérivée  $> 1$  en module.

d)  $\mu_z = \mu_{U,z}$ ,  $\mu_{f(z)} = \mu_{f(\alpha),f(z)}$  : Si  $z \in L'_\alpha$ , on a  $\mu_z \leq \mu_{\alpha,z}$ , et on conclut comme dans le cas c). Si  $z \in L''_\alpha$ , l'inégalité (1) résulte de la condition  $M > \frac{1}{m_\alpha}$  imposée à  $M$ . Cqfd.

### 5. UN MODULE de CONTINUITÉ.

Posons  $\Omega'^* = \Omega' \cap U = \Omega' - A_0$ , et soit  $\tilde{\Omega}'^*$  l'image réciproque de  $\tilde{\Omega}'^*$  dans  $\tilde{U}$ . Soit  $\tilde{\mu}$  la métrique sur  $\tilde{\Omega}'^*$  relevant la métrique  $\mu$  sur  $\Omega'^*$ . Notons  $\tilde{\Omega}'$  le complété de  $\tilde{\Omega}'^*$  pour  $\tilde{\mu}$  : il s'obtient en rajoutant un point au bout de chaque relèvement dans  $\tilde{\Omega}'^*$  d'un interpétale en un point de  $A_0$ .

L'application  $g : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$  de la Proposition 2 induit une application  $\tilde{\Omega}'^* \rightarrow \tilde{\Omega}'^*$  qui se prolonge en une application  $\hat{g} : \tilde{\Omega}' \rightarrow \tilde{\Omega}'$ , strictement contractante.

PROPOSITION 4. Il existe une application croissante  $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , vérifiant  $h(s) < s$  pour  $s > 0$  et  $s - h(s) \rightarrow +\infty$ , telle que :

$$(\forall x, y \in \tilde{\Omega}') \quad d_{\tilde{\mu}}(g(x), g(y)) \leq h(d(x, y)) .$$

Démonstration. Le groupe  $\Gamma = \text{Aut}_U(\tilde{U})$  opère sur  $\tilde{\Omega}'$  par des isométries pour  $\tilde{\mu}$ . Soit  $e = \gamma_0(0) \in \mathcal{R}(K_f, 0) \cap U$  (cf. [CLJ], Proposition 3) ; notons  $\tilde{e}$  le relèvement de  $e$  dans  $\tilde{\mathcal{R}}_0$ ,  $\tilde{\gamma}_0$  le relèvement de  $\gamma_0$  d'origine  $\tilde{e}$ , et posons  $\tilde{e}_1 = \tilde{\gamma}_0(1)$ . Notons  $\sigma$  l'élément de  $\Gamma$  tel que  $\sigma(\tilde{e}) = \tilde{e}_1$ . Il existe un élément  $\sigma_1 \in \Gamma$  tel que  $g \circ \sigma^d = \sigma_1 \circ g$ . Soit  $F \subset \tilde{\Omega}'$  un compact tel que  $\Gamma.F = \tilde{\Omega}'$  et posons  $F_1 = \bigcup_{0 \leq i \leq d-1} \sigma^i F$ . Pour  $s \geq 0$ , notons  $B(F_1, s) = \{x \in \tilde{\Omega}' \mid d_{\tilde{\mu}}(x, F_1) \leq s\}$ , c'est un compact. Notons  $h(s)$  la borne supérieure des  $d_{\tilde{\mu}}(g(x), g(y))$  pour  $(x, y) \in \tilde{\Omega}'$ ,  $d_{\tilde{\mu}}(x, y) \leq s$ . On a :

$$h(s) = \sup_{(x,y) \in F_1 \times B(F_1, s), d_\mu^\sim(x,y) \leq s} d_\mu^\sim(g(x), g(y)) < s .$$

Il est clair que la fonction  $h$  est croissante. Choisissons  $s_0 > 0$ . On a  $h(ks_0) \leq kh(s_0)$ , il en résulte que  $s - h(s) \rightarrow +\infty$  quand  $s \rightarrow +\infty$ . Cqfd.

Notons  $E$  l'espace des lacets  $\gamma : T \rightarrow \Omega' - (C_+ \cup A_0)$  tels que  $\gamma(0) \in \mathbb{R}(K_f, 0)$ , homotopes à  $\gamma_0$ . On définit  $G : E \rightarrow E$  en associant à chaque  $\gamma$  l'unique lacet  $\gamma' \in E$  tel que  $\gamma'(t) \in f^{-1}(\gamma(dt))$ ,  $\gamma'(0) \in \mathbb{R}(K_f, 0)$ . En particulier,  $\gamma_{n+1} = G(\gamma_n)$ . En associant à chaque lacet  $\gamma \in E$  le chemin  $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \tilde{\Omega}'$  relevant  $\gamma$ , on identifie  $E$  à une partie  $\tilde{E}$  de  $C(I; \tilde{\Omega}')$ , où  $I = [0, 1]$ . A l'application  $G$  correspond une application  $\tilde{G} : \tilde{E} \rightarrow \tilde{E}$ , définie par  $\tilde{G}(\tilde{\gamma}) = \tilde{\gamma}'$ , avec :

$$\tilde{\gamma}'^{-1}(t) = g(\sigma^i \tilde{\gamma}(s)) \quad \text{si } t = \frac{i+s}{d}, \quad s \in [0, 1] .$$

On munit  $\tilde{E}$  de la distance  $d(\gamma, \eta) = \sup_{t \in I} d_\mu^\sim(\gamma(t), \eta(t))$ .

COROLLAIRE. L'application  $G$  admet comme module de continuité la même fonction  $h$ .

## 6. LA CONVERGENCE.

PROPOSITION 5. La suite  $(\tilde{\gamma}_n)$  est une suite de Cauchy dans  $C(I, \tilde{\Omega}')$ .

Démonstration. Posons  $\ell = d(\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1)$ , et soit  $L \geq \ell$  tel que  $L - h(L) \geq \ell$ . Montrons, par récurrence que, pour tout  $n$ , on a  $d(\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_n) \leq L$ . C'est évident pour  $n = 0$  ou  $1$ . Si  $d(\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_n) \leq L$ , on a  $d(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_{n+1}) \leq h(L)$ , d'où  $d(\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_{n+1}) \leq \ell + h(L) \leq L$ .

Pour  $p \in \mathbb{N}$  et  $q = p+n$ , on a :  $d(\tilde{\gamma}_p, \tilde{\gamma}_q) = d(G^p(\tilde{\gamma}_0), G^p(\tilde{\gamma}_n)) \leq h^p(L)$ .

La suite  $(h^p(L))_{p \in \mathbb{N}}$  est une suite strictement décroissante. Elle a une limite qui est un point fixe de  $h$ , donc  $= 0$ . Par suite,  $(\tilde{\gamma}_n)$  est une suite de Cauchy. Cqfd.

Démonstration du Théorème. La suite  $(\gamma_n)$  est une suite de Cauchy dans  $C(T; \Omega')$ , muni de la distance de la convergence uniforme, pour la distance  $d_\mu$  sur  $\Omega'$ . Elle converge donc uniformément pour  $d_\mu$ , et aussi pour la distance euclidienne  $d_0$ , qui définit la même topologie, puisque  $\Omega'$  est compact. Le théorème résulte alors de la Proposition 3 de [CLJ]. Cqfd.

UN TOUR DE VALSE

[C'est quand même mieux qu'un coup de fouet]

Adrien Douady et Pierrette Sentenac

1. INTRODUCTION.

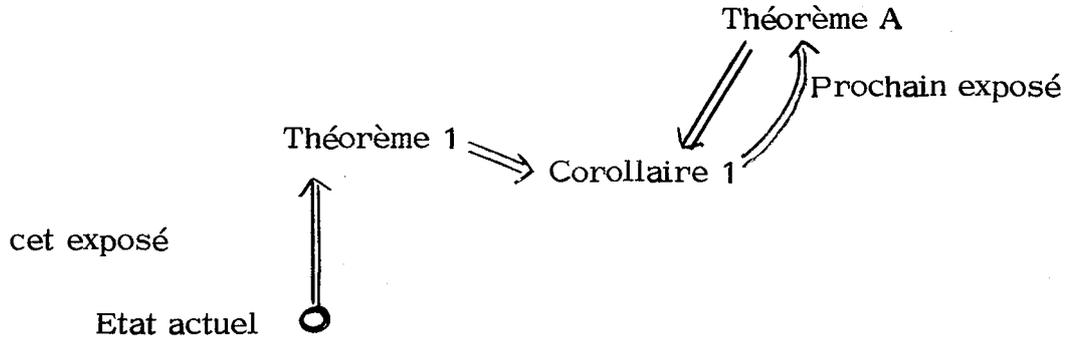
Soit  $c_0 \in M$  tel que le polynôme  $f_{c_0} : z \mapsto z^2 + c_0$  admette un cycle indifférent rationnel  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ , de valeur propre  $\rho = e^{2i\pi p/q}$ ,  $(p, q) = 1$ . D'après l'exposé précédent [CLAJ] (Connexité locale de certains autres ensembles de Julia),  $K_{c_0}$  est localement connexe, et, d'après [PPIR] (points fixes multiples et points périodiques indifférents rationnels), chacun des  $\alpha_i$  a une fleur à  $q$  pétales, et dans chaque interpétale arrive un nombre fini non nul de rayons externes de  $K_{c_0}$ , qui sont fixes par  $f^{kq}$ , donc ont des arguments de la forme  $p/2^{kq} - 1$  (on verra plus tard que ce nombre est 2 si  $q = 1$  et 1 sinon).

Le point  $c_0$ , valeur critique, est attiré pour  $f^{kq}$  par un des points du cycle  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ . On peut supposer que c'est  $\alpha_1$ . La composante connexe  $u_1$  de  $\overset{\circ}{K}_{c_0}$  qui contient  $c_0$  contient aussi un pétale  $P_1$  de  $\alpha_1$ . Nous avons en vue le résultat suivant, qui sera démontré dans l'exposé suivant.

THEOREME A. Soit  $\theta$  l'argument d'un rayon externe de  $K_{c_0}$  qui aboutit en  $\alpha_1$  par un interpétale adjacent à  $P_1$ . Alors, le rayon externe  $\mathcal{R}(M, \theta)$  aboutit en  $C_0$ .

Remarque : Ce théorème fait pendant au Théorème 2 de [AEM] (Arguments externes dans  $M$  des points de Misurewicz). Cependant ce dernier est obtenu en passant à la limite à partir du Corollaire 2 (b) du théorème 1 de [AEM]. Au contraire, le théorème A ci-dessus repose sur une discontinuité du comportement de  $\mathcal{R}(K_c, \theta)$  en  $c = c_0$ .

Nous démontrons dans cet exposé le théorème 1, dont un cas particulier (corollaire 1) est une conséquence du théorème A. Dans le prochain exposé, nous remonterons du corollaire 1 du théorème 1 au Théorème A.



Supposons  $q \neq 1$ . Alors,  $\alpha_1$  est un point périodique simple de  $f_{c_0}$ . Pour tout  $c$  voisin de  $c_0$ , on peut trouver un  $\alpha(x)$  tel que  $f_c^k(\alpha(c)) = \alpha(c)$ , avec  $c \mapsto \alpha(x)$  analytique et  $\alpha(c_0) = \alpha_1$ .

Soit  $\Delta$  un disque centré en  $\alpha(c_0)$ , fixé assez petit (nous préciserons au § 6 ou 7). Soient  $n_0$  assez grand et  $r^* > 1$  assez voisin de 1 pour que  $x(c_0) = f_{c_0}^{n_0 k q}(c_0)$  et  $y(c_0) = \varphi_{c_0}^{-1}(r^* e^{2i\pi\theta})$  appartiennent à  $\Delta$  (où  $\varphi_{c_0} : \mathbb{C} - K_{c_0} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} - \bar{D}$  est la représentation conforme).

Pour  $c$  voisin de  $c_0$ , posons  $x(c) = f_c^{n_0 k q}(c)$  et  $y(c) = \varphi_c^{-1}(r^* e^{2i\pi\theta})$ .

L'énoncé intermédiaire est le suivant :

COROLLAIRE 1 DU THEOREME 1. Pour tout voisinage  $W$  de  $c_0$  dans  $\mathbb{C}$ , il existe un  $N_0 \geq 0$  tel que, pour tout  $N \geq N_0$ , il existe un  $c \in W$  tel que  $f^{Nkq}(x(c)) = y(c)$ .

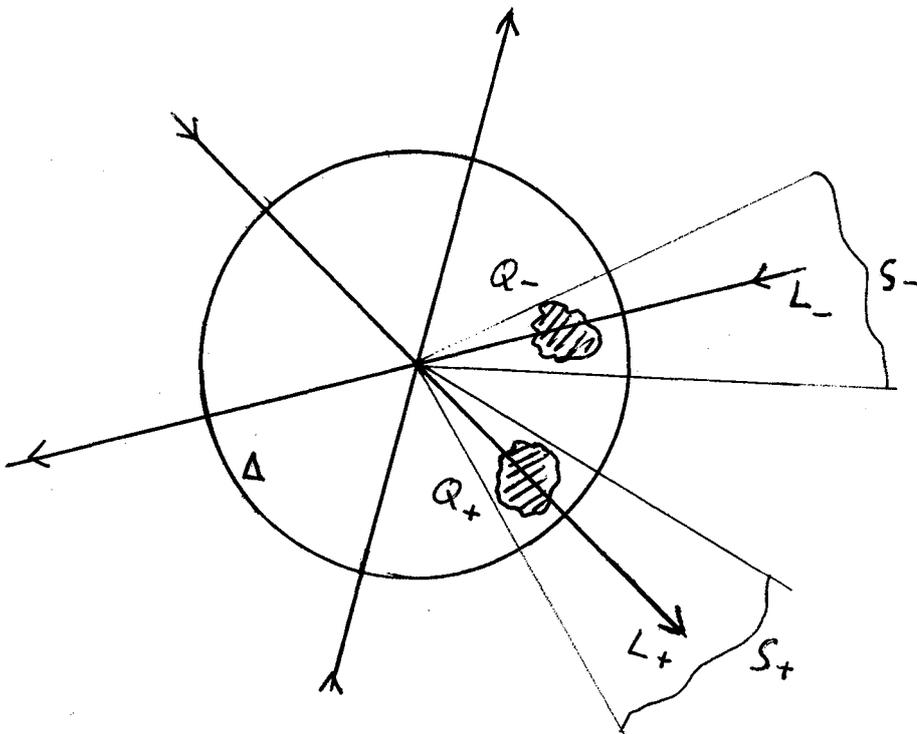
Démonstration de l'implication : Théorème A  $\Rightarrow$  Corollaire 1 du Théorème 1.

Soit  $r_N$  tel que  $r_N^{2^{(n_0+N)kq}} = r^*$  et  $c = \varphi_M^{-1}(r e^{2i\pi\theta})$ . On a  $\varphi_c(c) = \varphi_M(c) = r_N e^{2i\pi\theta}$ , et comme  $2^{kq}\theta = \theta$ ,  $\varphi_c(x(c)) = r_N^{2^{n_0 k q}} e^{2i\pi\theta}$ ,  $\varphi_c(f^{Nkq}(x(c))) = r^* e^{2i\pi\theta}$ , d'où  $f^{Nkq}x(c) = y(c)$ . Quand  $N \rightarrow \infty$ ,  $r_N \rightarrow 1$ , donc  $c \rightarrow c_0$  si on admet le théorème A, et  $(\forall W) (\exists N_0) (\forall N \geq N_0) c \in W$ . Cqfd.

2. RESULTATS.

Voici maintenant l'énoncé du théorème dont la démonstration occupe cet exposé :

Soient  $\Lambda$  et  $V$  des voisinages de 0 dans  $\mathbb{C}$ , et  $(\lambda, z) \mapsto g_\lambda(z)$  une application  $\mathbb{C}$ -analytique de  $\Lambda \times V$  dans  $\mathbb{C}$ . On suppose que  $g_\lambda(0) = 0$  pour tout  $\lambda \in \Lambda$ ,  $g'_0(0) = \rho_0 = e^{2i\pi p/q}$ ,  $p/q \in \mathbb{Q}$ , et que  $\lambda \mapsto \rho(\lambda) = g'_\lambda(0)$  n'est pas constante. On suppose que  $g_0^q$  est de la forme  $z \mapsto z + b_0 z^{q+1} + o(z^{q+2})$  avec  $b_0 \neq 0$ . Soient  $L_+$  et  $L_-$  un axe de répulsion et un axe d'attraction de  $g_0^q$  en 0, consécutifs <sup>(†)</sup>. Notons  $S_+$  et  $S_-$  les secteurs angulaires ouverts, de bissectrices  $L_+$  et  $L_-$  respectivement d'ouverture  $\frac{1}{8q}$  tour.



THEOREME 1. Dans cette situation,

$$\begin{aligned}
 & \left( \begin{array}{c} \exists \Delta \\ \text{disque centré en } 0 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \forall Q \subset \Delta \cap S_+ \\ \text{compact} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \forall Q \subset \Delta \cap S_- \\ \text{compact} \end{array} \right) \\
 & \left( \begin{array}{c} \forall W \\ \text{vois de } 0 \text{ dans } \Lambda \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \exists N_0 \\ \in \mathbb{N} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \forall s \in \mathbb{S}^1 \\ \text{continue} \end{array} : W \rightarrow Q_+ \right)
 \end{aligned}$$

(†) i.e. faisant un angle de  $\pm \frac{1}{2q}$  tour.

$$(\forall \mathfrak{s}_- : W \rightarrow \mathbb{Q}_- \text{ continue}) \quad (\forall N \geq N_0) \quad (\exists \lambda \in W)$$

$$g_\lambda^{Nq}(\mathfrak{s}_-(\lambda)) = \mathfrak{s}_+(\lambda) \quad .$$

Démonstration du Corollaire 1 à partir du Théorème 1 . Si  $q \neq 1$ ,  $\alpha_1$  est un point fixe simple de  $f_{c_0}^k$  . Posons  $c(\lambda) = c_0 + \lambda$  . On peut trouver une fonction analytique  $\lambda \mapsto \alpha(\lambda)$  au voisinage de 0 telle que  $\alpha(0) = \alpha_1$ ,  $f_{c(\lambda)}^k(\alpha(\lambda)) = \alpha(\lambda)$ , en vertu du théorème des fonctions implicites.

Si  $q = 1$ , c'est-à-dire  $\rho = 1$ , le point  $\alpha_1$  est un point fixe double de  $f_{c_0}^k$ , car il y a un seul pétale. Si on pose  $c(\lambda) = c_0 + \lambda^2$ , on peut encore trouver une application  $\lambda \rightarrow \alpha(\lambda)$  analytique au voisinage de 0, telle que  $\alpha(0) = 1$  et  $f_{c(\lambda)}^k(\alpha(\lambda)) = \alpha(\lambda)$ . Cela résulte maintenant du lemme de Morse (ou du théorème de préparation de Weierstrein). Dans les deux cas, on définit  $g_\lambda$  par  $\alpha(\lambda) + g_\lambda(z) = f_{c(\lambda)}^k(\alpha(\lambda) + z)$ . On pose  $\mathfrak{s}_-(\lambda) = x(c(\lambda)) - \alpha(\lambda)$ ,  $\mathfrak{s}_+(\lambda) = y(c(\lambda)) - \alpha(\lambda)$ . Si on a pris  $\Delta$  assez petit,  $n_0$  est assez grand et  $r_0$  assez voisin de 1 pour que  $\mathfrak{s}_-(0) \in S_-$  et  $\mathfrak{s}_+(0) \in S_+$ , puisque  $f_{c_0}^{nkq}$  et  $\varphi_{c_0}^{-1}(r e^{2i\pi\theta})$  tendent vers  $\alpha_1$  tangentiellement à  $L_-$  et  $L_+$  respectivement.

Soient  $Q_-$  et  $Q_+$  des voisinages compacts de  $\mathfrak{s}_-(0)$  et  $\mathfrak{s}_+(0)$  dans  $S_-$  et  $S_+$ , on a encore  $\mathfrak{s}_-(\lambda) \in Q_-$  et  $\mathfrak{s}_+(\lambda) \in Q_+$  quand  $\lambda$  varie dans un voisinage  $\Lambda$  de 0. On peut donc appliquer le théorème 1, et on obtient le corollaire 1.

Cqfd.

La démonstration ci-dessus donne au Corollaire 1 le Complément suivant qui nous servira au prochain exposé :

COMPLEMENT 1 du Corollaire 1 du Théorème 1. On peut prendre  $N_0$  indépendant de  $r^*$  quand  $r^*$  varie dans un compact  $J \subset ]0, +\infty[$  tel que

$$\varphi_{c_0}^{-1}(J \cdot e^{2i\pi\theta}) \subset \Delta - \{0\} \quad .$$

D'autre part, nous verrons que, dans la situation du Théorème 1, si  $\lambda \mapsto \rho(\lambda) - e^{2i\pi p/q}$  a en 0 un zéro d'ordre  $\nu$ , il y a au moins  $\nu$  valeurs

distinctes de  $\lambda$  telles que  $g_\lambda^{Nq}(s_-(\lambda)) = s_+(\lambda)$  dans les conditions du théorème.

Nous utiliserons ce fait au prochain exposé pour voir que, dans la situation du Théorème A, on a nécessairement  $\nu = 1$ .

### 3. UN CHANGEMENT DE VARIABLES.

Nous nous plaçons dans la situation du Théorème 1.

PROPOSITION 1. On peut trouver un difféomorphisme  $\mathbb{C}$ -analytique

$(\lambda, z) \mapsto (\lambda, \zeta_\lambda(z))$  d'un voisinage  $\Lambda' \times V'$  de  $(0,0)$  dans  $\Lambda \times V$  sur un ouvert de  $\Lambda' \times C$ , tel que  $\zeta_\lambda(0) = 0$ , et que pour  $\lambda \in \Lambda'$ , l'expression de  $g_\lambda$  dans la coordonnée  $\zeta_\lambda$  soit de la forme :  $\zeta \mapsto \rho(\lambda)\zeta + \beta(\lambda)\zeta^{q+1} + \mathcal{O}(\zeta^{q+2})$ , avec  $\beta(0) \neq 0$ .

Démonstration (cf. [PPIR], III.1, Lemme 1). Pour  $j \in (2, \dots, q)$ , on a un difféomorphisme  $\mathbb{C}$ -analytique  $(\lambda, z) \mapsto (\lambda, \zeta_{\lambda, j}(z))$  tel que l'expression de  $g_\lambda$  soit  $\zeta \mapsto \rho(\lambda)\zeta + \beta_j(\lambda)\zeta^j + \mathcal{O}(\zeta^{j+1})$ ; en posant  $\zeta_{\lambda, j+1} = \zeta_{\lambda, j} + \frac{\beta_j(\lambda)}{\rho(\lambda) - \rho(\lambda)^j} \zeta_{\lambda, j}^j$  (le dénominateur ne s'annule pas au voisinage de 0), on obtient une coordonnée où l'expression de  $g_\lambda$  est de la forme :  $\zeta \mapsto \rho(\lambda)\zeta + \beta_{j+1}(\lambda)\zeta^{j+1} + \mathcal{O}(\zeta^{j+2})$ . Le difféomorphisme  $(\lambda, z) \mapsto (\lambda, \zeta_{\lambda, q+1}(z))$  répond à la question; on a bien  $\beta_{q+1}(0) \neq 0$  sinon la fleur aurait au moins  $2q$  pétales. Cqfd.

COROLLAIRE. L'expression de  $g_\lambda^q$  dans la coordonnée  $\zeta_\lambda$  est de la forme :  $\zeta \mapsto \rho(\lambda)^q \zeta + b(\lambda)\zeta^{q+1} + \mathcal{O}(\zeta^{q+2})$  avec  $b(0) \neq 0$ .

En fait,  $b = \beta(\rho^q + \rho^{2q} + \dots + \rho^{q^2})$ ,  $b(0) = q\beta(0)$ .

Nous allons maintenant faire le changement de variables défini par

l'application :  $(\lambda, z) \mapsto (\lambda, \frac{\rho(\lambda)^{q(q+1)}}{qb(\lambda)\zeta^q})$ , en reprenant les conventions de [PPIR], I.2.

Si  $\Delta$  est un disque, centré en 0, cette application définit un isomorphisme  $h : \Lambda \times \Delta - \{0\} \rightarrow \tilde{\Omega}$ , où  $\tilde{\Omega}$  est un revêtement de degré  $q$  d'un ouvert  $\Omega$  de  $\Lambda \times \mathbb{C}$  de la forme  $\Omega = \{(\lambda, z) \mid |z| > R(\lambda)\}$ . Nous écrirons  $h : (\lambda, z) \mapsto (\lambda, Z)$ .

PROPOSITION 2. L'expression  $G_\lambda$  de  $g_\lambda^q$  dans la coordonnée  $Z$  est de la forme :  $Z \mapsto (1+U_\lambda)Z - 1 + \eta_*(\lambda, Z)$ , où  $\eta(\lambda, Z)$  est  $\mathcal{O}(\frac{1}{|Z|^{1/q}})$  quand  $|Z| \rightarrow \infty$ , uniformément en  $\lambda \in \Lambda$ .

COMPLEMENT.  $\lambda \mapsto U_\lambda$  est une application analytique donnée par  $1+U_\lambda = \frac{1}{(\rho(\lambda))^{q^2}}$ . On a  $U_0 = 0$ , et la multiplicité  $\nu$  de 0 comme zéro de  $\lambda \mapsto U_\lambda$  est égale à sa multiplicité comme zéro de  $\lambda \mapsto \rho(\lambda) - e^{2i\pi p/q}$ .

Démonstration de la proposition. Posons  $\zeta_1 = \tilde{g}_\lambda^q(\zeta)$ , où  $\tilde{g}_\lambda$  est l'expression de  $g_\lambda$  dans la coordonnée  $\zeta$ , et soient  $Z$  et  $Z_1$  correspondant à  $\zeta$  et  $\zeta_1$ . On a :

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \rho(\lambda)^q \zeta + b(\lambda) \zeta^{q+1} + \dots \\ &= \rho(\lambda)^q \zeta (1 + b(\lambda) \rho(\lambda)^{-q} \zeta^q + \dots) ; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} Z_1 &= \rho(\lambda)^{-q^2} Z (1 - q b(\lambda) \rho(\lambda)^{-q} \zeta^q + \dots) \\ &= \rho(\lambda)^{-q^2} Z (1 - \frac{\rho(\lambda)^{q^2}}{Z} + \dots) \\ &= \rho(\lambda)^{-q^2} Z - 1 + \dots \quad . \quad \text{Cqfd.} \end{aligned}$$

#### 4. VALEUSE DES COMPACTS.

Soient  $K$  et  $K'$  deux compacts de  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ ,  $T$  un espace homéomorphe à  $S^1$  orienté (i.e. muni d'une classe d'homotopie d'homéomorphismes  $S^1 \rightarrow T$ ),  $(\varphi_t)_{t \in T}$  et  $(\varphi'_t)_{t \in T}$  deux familles continues de plongements de  $K$  et  $K'$  respectivement dans  $\mathbb{R}^2$ . On pose  $K(t) = \varphi_t(K)$  et  $K'(t) = \varphi'_t(K')$ .

DEFINITION. On dit que  $K(t)$  et  $K'(t)$  valent  $d$  tours <sup>(†)</sup> quand  $t$  parcourt  $T$  si : a)  $\forall t \in T, K(t) \cap K'(t) = \emptyset$ .

b) Quelles que soient les applications continues  $t \mapsto z(t) \in K(t)$  et  $t \mapsto z'(t) \in K'(t)$ , l'application  $t \mapsto \text{Arg}(z'(t) - z(t))$ , de  $T$  dans  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , est de degré  $d$ .

Remarques. 1) Si  $K$  et  $K'$  sont simplement connexes et si la condition (a) est vérifiée, il suffit de vérifier (b) pour un couple d'applications continues  $t \mapsto (z(t), z'(t))$ . En particulier, il existe toujours un  $d$  tel que  $K(t)$  et  $K'(t)$  valent  $d$  tours.

2) Supposons  $T = \partial\Sigma$ , où  $\Sigma$  est une pièce dans  $\mathbb{R}^2$ , et prolongeons  $t \mapsto z(t)$  et  $t \mapsto z'(t)$  en des applications continues  $\Sigma \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Si  $d \neq 0$ , il existe au moins un  $t \in \overset{\circ}{\Sigma}$  tel que  $z'(t) = z(t)$ . En effet, sinon, l'application  $t \mapsto \text{Arg}(z'(t) - z(t))$  pourrait se prolonger en une application continue  $\Sigma \rightarrow \mathbb{T}$ .

En identifiant  $\mathbb{R}^2$  à  $\mathbb{C}$ , si les prolongements  $t \mapsto z(t)$  et  $t \mapsto z'(t)$  sont holomorphes sur  $\overset{\circ}{\Sigma}$ , le nombre  $d$  est le nombre de zéros de  $t \mapsto z'(t) - z(t)$  dans  $\overset{\circ}{\Sigma}$ , comptés avec leur multiplicité.

3) Soient  $\Omega$  et  $\Omega'$  deux ouverts simplement connexes de  $\mathbb{R}^2$  et  $\Phi: \Omega \rightarrow \Omega'$  un homéomorphisme préservant l'orientation.

Supposons que  $K(t) \subset \Omega$  et  $K'(t) \subset \Omega$  pour tout  $t$ , et que  $K(t)$  et  $K'(t)$  valent  $d$  tours quand  $t$  parcourt  $T$ . Alors,  $\Phi(K(t))$  et  $\Phi(K'(t))$  valent  $d$  tours aussi. En effet, on peut supposer  $T = \partial\Sigma$ , où  $\Sigma$  est un disque dans  $\mathbb{R}^2$ ; si  $t \mapsto z(t) \in K(t)$  et  $t \mapsto z'(t) \in K'(t)$  sont continues, on peut les prolonger en des applications continues  $\Sigma \rightarrow \Omega$ . Le nombre  $d$  est alors le nombre d'intersection dans  $\Sigma \times \Omega$  des graphes de  $t \mapsto z(t)$  et  $t \mapsto z'(t)$ . Il est préservé par  $\text{Id} \times \Phi: \Sigma \times \Omega \rightarrow \Sigma \times \Omega'$ .

---

(†) Le lecteur notera que les conventions habituelles d'orientation de  $\mathbb{R}^2$  ne s'accordent pas avec les usages de la valse. Pour une fois, on dansera la valse à gauche.

Identifiant  $\mathbb{R}^2$  à  $\mathbb{C}$ , nous dirons que  $K(t)$  est à gauche (resp. à droite, au-dessus, au-dessous) de  $K'(t)$  si, pour  $z \in K(t)$  et  $z' \in K'(t)$ , on a  $\text{Ré}(z' - z) > 0$  (resp.  $< 0$ , resp.  $\text{Im}(z' - z) < 0$ , resp.  $> 0$ ).

PROPOSITION 3. On suppose que  $T = \partial\Sigma$ , où  $\Sigma = [-1, 1]^2$ , et que,

pour  $t \in \{-1\} \times [-1, 1]$ ,  $K(t)$  est à gauche de  $K'(t)$ ,

$t \in [-1, +1] \times \{-1\}$ ,  $K(t)$  est au-dessous de  $K'(t)$ ,

$t \in \{1\} \times [-1, +1]$ ,  $K(t)$  est à droite de  $K'(t)$ ,

$t \in [-1, 1] \times \{1\}$ ,  $K(t)$  est au-dessus de  $K'(t)$ .

Alors,  $K(t)$  et  $K'(t)$  valent 1 tour.

Démonstration. Les applications  $t \mapsto \frac{t}{|t|}$  et  $t \mapsto \frac{z'(t) - z(t)}{|z'(t) - z(t)|}$  de  $T$

dans  $S^1$  ne prennent jamais des valeurs opposées. Elles sont donc homotopes. Cqfd.

Pour démontrer le Théorème 1, on pose  $N = N' + N''$ , où  $N' = [\frac{N}{2}]$  et  $N'' = N'$  ou  $N'+1$ ; puis on construit dans  $\Lambda$  des pièces  $\sigma_1, \dots, \sigma_\nu$ , où  $\nu$  est l'ordre de 0 comme zéro de  $\lambda \mapsto \rho(\lambda) - e^{2i\pi p/q}$ , telles que, quand  $\lambda$  parcourt  $\partial\sigma_i$ ,  $g_\lambda^{N'q}(Q_-)$  et  $g_\lambda^{-N''q}(Q_+)$  valent 1 tour.

Pour vérifier cette propriété, grâce à la remarque 3), on peut passer dans le plan des  $Z$ .

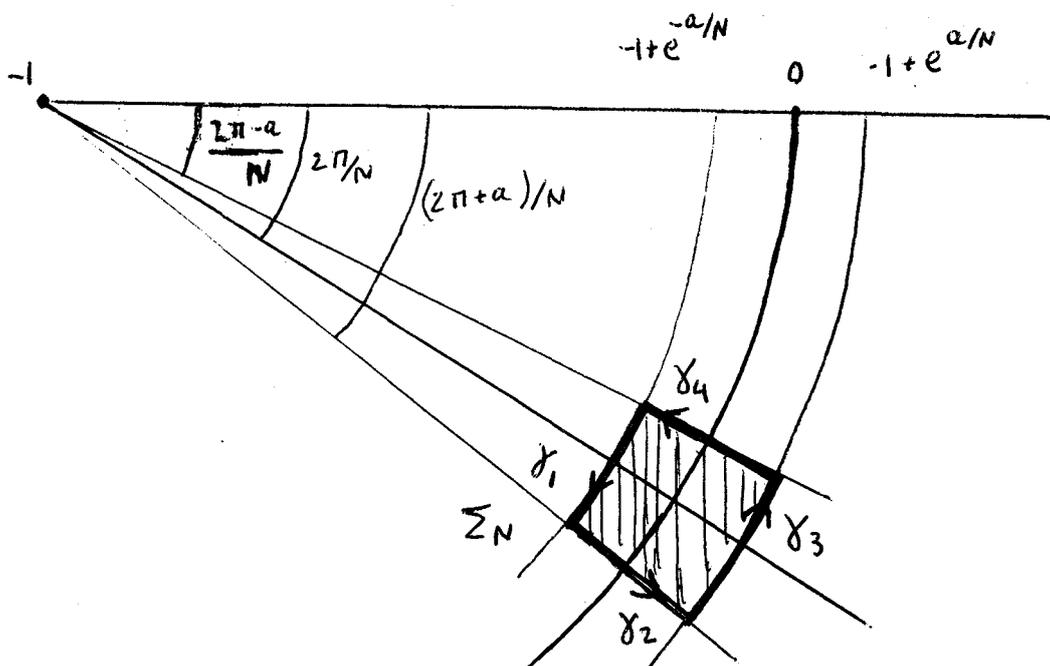
Dans l'espoir de faciliter la compréhension, nous ferons d'abord le calcul en négligeant le terme  $\eta$  de la Proposition 2, c'est-à-dire en remplaçant  $G_\lambda$  par  $H_U : Z \mapsto (1+U)Z - 1$ .

## 5. ETUDE DE LA FAMILLE $(H_U)$ .

On pose  $H_U(z) = (1+U)Z - 1$ . L'application  $H_U$  est la similitude de centre  $A = \frac{1}{U}$  qui transforme 0 en -1.

On se fixe  $a \in ]0, \frac{1}{2}]$ ; on note  $P_a$  le carré  $[-a, +a]^2$ , i.e.

$P_a = \{z \mid |\operatorname{Re} z| \leq a, |\operatorname{Im} z| \leq a\}$  et  $\Sigma_N = \{U \mid N \operatorname{Log}(1+U) + 2\pi i \in P_a\}$ . Le bord de  $\Sigma_N$  est de la forme  $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$  (voir la figure ci-dessous).



Pour  $N \geq 8$ , on a :  $\Sigma_N \subset D_{8/N} - \bar{D}_{4/N}$  et  $|\operatorname{Arg}(iU)| < \frac{1}{12}$  tour =  $30^\circ$  si  $U \in \Sigma_N$ .

**PROPOSITION 4.** Soient  $Q_+$  et  $Q_-$  deux compacts de  $\mathbb{C}$ , et notons  $\delta$  le diamètre de  $Q_+ \cup Q_- \cup \{0\}$ . Soient  $N > \sup(8, 12\delta/a)$ ,  $N'$  et  $N''$  tels que  $N' + N'' = N$ . Alors,  $Q_-(U) = H_U^{N'}(Q_-)$  et  $Q_+(U) = H_U^{-N''}(Q_+)$  valent 1 tour quand  $U$  parcourt  $\partial\Sigma_N$ .

Démonstration. Pour  $A \in \Sigma_N$ ,  $z_- \in Q_-$  et  $z_+ \in Q_+$ , on a

$$\operatorname{Log} \frac{z_- - A}{z_+ - A} = \left| \int_{z_-}^{z_+} \frac{dz}{z - A} \right| \leq \frac{\delta}{A - \delta} \leq \frac{\delta}{N/8 - \delta} < a.$$

Notons  $\tau_{-A}$  la translation  $Z \mapsto Z - A$ , et  $\Phi$  l'application  $Z \mapsto \operatorname{Log} Z$  sur  $\mathbb{C} - e^{+2i\pi(-N'/N + 1/4)} \mathbb{R}_+$ . On pose  $\Phi_A = \Phi \circ \tau_{-A}$ . Dire que  $Q_-(U)$  et  $Q_+(U)$  valent  $d$  tours, ou que  $\tau_{-A}(Q_-(U))$  et  $\tau_{-A}(Q_+(U))$  valent  $d$  tours est équivalent d'après la définition, et d'après la remarque 3 du §4, il est aussi équivalent

de dire que  $\Phi_A(Q_-(U))$  et  $\Phi_A(Q_+(U))$  valent d tours. Mais, pour  $U$  dans  $\gamma_1$ ,  $\Phi_A(Q_-(U))$  est à gauche de  $\Phi_A(Q_+(U))$ , il est au-dessous pour  $U \in \gamma_2$ , à droite dans  $\gamma_3$  et au-dessus dans  $\gamma_4$ . D'après la Proposition 3,  $\Phi_A(Q_-(U))$  et  $\Phi_A(Q_+(U))$  valent 1 tour. Cqfd.

## 6. PERTURBATION.

Dans ce paragraphe, on se donne un voisinage  $\Lambda$  de 0 dans  $\mathbb{C}$ , un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{C}$  de la forme  $\mathbb{C} - (\bar{D}_R U - i\mathbb{R}_+)$ , un  $a \in ]0, \frac{1}{2}]$  et une famille  $(G_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  d'applications holomorphes  $\Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , telle que :

$$G_\lambda(z) = (1 + U_\lambda)Z - 1 + \eta(\lambda, Z) \text{ avec } |\eta(\lambda, Z)| < \frac{a}{100}, \text{ pour } (\lambda, Z) \in \Lambda \times \Omega.$$

On suppose que  $\lambda \mapsto U_\lambda$  est une application holomorphe de  $\Lambda$  dans  $\mathbb{C}$ , avec  $U_0 = 0$ , et que  $G_\lambda$  est injective sur tout demi-plan ne rencontrant pas  $-i\mathbb{R}_+$ .

On note  $S_+$  et  $S_-$  les secteurs angulaires d'ouverture  $\frac{1}{6}$  tour, centrés sur  $\mathbb{R}_+$  et  $\mathbb{R}_-$  respectivement. Soient  $Q_+ \subset S_+ \cap (\mathbb{C} - \bar{D}_{2R})$  et  $Q_- \subset S_- \cap (\mathbb{C} - \bar{D}_{2R})$  des compacts. On note  $\delta$  le diamètre de  $Q_+ \cup Q_- \cup \{0\}$ . Pour  $\lambda \in \Lambda$ , on pose  $A_\lambda = \frac{1}{U_\lambda}$  et  $H_\lambda(Z) = (1 + U_\lambda)Z - 1$ . On définit  $\Sigma_N$  comme au § précédent.

PROPOSITION 5. Soient  $N \geq \sup(8, 24\delta/a)$ ,  $N' = [\frac{N}{2}]$  et  $N'' = N - N'$ .

Soit  $\sigma \subset \Lambda$  un compact tel que  $\lambda \mapsto U_\lambda$  induit un homéomorphisme de  $\sigma$  sur  $\Sigma_N$ . Alors :

- Pour  $\lambda \in \sigma$ ,  $Q_-(\lambda) = G_\lambda^{N'}(Q_-)$  et  $Q_+(\lambda) = G_\lambda^{-N''}(Q_+)$  sont définis.
- Quand  $\lambda$  parcourt  $\partial\sigma$ , les compacts  $Q_-(\lambda)$  et  $Q_+(\lambda)$  valent 1 tour.

Pour faciliter l'exposition de la démonstration de cette Proposition, on prolonge  $G_\lambda$  en posant  $G_\lambda(Z) = H_\lambda(Z)$  pour  $Z \in \mathbb{C} - \Omega$ . Ceci introduit des discontinuités, mais elles ne nous gêneront pas.

Fixons  $\lambda \in \sigma$ , posons  $A = A_\lambda$ ,  $U = U_\lambda$ ,  $G = G_\lambda$ ,  $H = H_\lambda$ . Soient  $Z_0^+ \in Q_+$  et  $Z_0^- \in Q_-$ , posons  $Z_1^- = G^i(Z_0^-)$  et soit  $Z_1^+ \in G^{-i}(Z_0^+)$ .

LEMME 1. Pour  $j \leq N''$ , on a  $|Z_j^+ - A| > \frac{1}{2} |A|$  et  $|Z_j^- - A| > \frac{1}{2} |A|$ .

Démonstration. Ecrivons  $Z_j$  pour  $Z_j^+$  ou pour  $Z_j^-$ . On a  $|Z_0 - A| \geq |A| - \delta$  et  $\delta \leq \frac{Na}{24}$ ; on a aussi  $\frac{N}{8} < |A|$  car  $U \in \Sigma_N \subset D_{8/N}$ .

Par suite,  $|Z_0 - A| > (1 - \frac{a}{3}) |A| > e^{-a/2} |A|$ .

On a :  $|Z_{j+1} - A| > e^{-a/N} |Z_j - A| - \frac{a}{100}$ .

Si  $|Z_j - A| > \frac{1}{2} |A|$ , on a  $\frac{a}{100} < 0.16 \frac{a}{N} |Z_j - A|$ ,

d'où  $|Z_{j+1} - A| > (e^{-a/N} - 0.16 \frac{a}{N}) |Z_j - A| > e^{-(1.02)a/N} |Z_j - A|$ .

On a donc  $\frac{|Z_j - A|}{|A|} \geq e^{-(k/2 + 1.02j/N)a}$  tant que cette quantité est  $> \frac{1}{2}$ . Mais  $\frac{N'}{N} < 0.5625$  pour  $N \geq 8$ , et pour  $a = \frac{1}{2}$ , on obtient  $1.71 \dots < 2$ .

On a donc  $\frac{|Z_j - A|}{|A|} < 2$  pour tout  $j < N''$ . Cqfd.

LEMME 2. Pour  $j \leq N''$ , on a :

$$a) \left| \text{Log} \frac{Z_j^- - A}{Z_0^- - A} - j \text{Log} U \right| \leq j \frac{a}{3N}$$

$$b) \left| \text{Log} \frac{Z_j^+ - A}{Z_0^+ - A} + j \text{Log} U \right| \leq j \frac{a}{3N}$$

$$c) \left| \text{Log} \frac{Z_{N'}^- - A}{Z_{N''}^+ + A} - N \text{Log} U \right| < \frac{3}{4} a$$

Démonstration de a) et b). Ecrivons  $Z_j$  pour  $Z_j^+$  ou  $Z_j^-$ . On a  $Z_{j+1} - A = U^\epsilon (Z_j - A) + \eta_j$ , où  $\epsilon = \pm$  et  $|\eta_j| < \frac{a}{100}$ . D'où

$\text{Log}(Z_{j+1} - A) = \text{Log}(Z_j - A) + \epsilon \text{Log} U + \text{Log}\left(1 + \frac{\eta}{U^\epsilon (Z_j - A)}\right)$ . On a

$$\left| \frac{\eta}{U^\epsilon (Z_j - A)} \right| \leq \frac{a/100}{\frac{1}{2} \cdot N/16} = 0.32 \frac{a}{N}. \text{ Or, } |\text{Log}(1 + 0.32 t)| \leq \frac{t}{3} \text{ pour } |t| \leq \frac{1}{16}.$$

Par suite,  $|\text{Log}(Z_{j+1} - A) - \text{Log}(Z_j - A) - \epsilon \text{Log} U| \leq \frac{a}{3N}$ , d'où a) et b).

L'inégalité c) résulte de a) avec  $j = N'$ , b) avec  $j = N''$  et

$$\left| \text{Log} \frac{Z_0^+ - A}{Z_0^- - A} \right| \leq \frac{\delta}{A - \delta} < \frac{Na/24}{N/8 - Na/24} < \frac{a/24}{1/8 - 1/48} = \frac{2}{5} a ,$$

en remarquant que  $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} < \frac{3}{4}$  .

Démonstration de la Proposition 5.

a) Soit  $\ell_0$  le demi-angle sous lequel on voit  $D_R$  du point  $A$  (les angles sont comptés en tours). Posons  $\ell_+ = \text{Arg } A - \frac{1}{2} + \ell_0$  ,  $\ell_- = \text{Arg } A + \frac{1}{2} - \ell_0$  ,  
 $E_+ = \{Z \mid \text{Arg}(Z - A) \in [\ell_+, \ell_+ + \frac{3}{4}]\}$  et  $E_- = \{Z \mid \text{Arg}(Z - A) \in [\ell_- - \frac{3}{4}, \ell_-]\}$  . On a  $E_- \subset \Omega$  et  $G^j(Q_-) \subset E_-$  pour tout  $j \leq N'$  , donc  $G^{N'}$  est défini et continu sur  $Q_-$  . On a  $E_+ \subset G(\Omega)$  et  $G^{-1}$  admet une détermination holomorphe sur  $E_+$  . Il résulte du lemme 2 que  $G^{-j}(Q_+) \subset E_+$  pour  $j \leq N''$  , donc  $G^{-N''}$  admet une détermination continue sur un voisinage de  $Q_+$  .

b) Le complexe  $L(\lambda) = \text{Log} \frac{Z_{N'}^-(\lambda) - A_\lambda}{Z_{N''}^+(\lambda) - A_\lambda}$  reste à une distance  $\leq \frac{3}{4}a$  de

$-N \text{Log } U_\lambda$  , ou, en changeant de détermination, de  $-N \text{Log } U_\lambda + 2i\pi$  , qui fait 1 tour autour de 0 quand  $\lambda$  parcourt  $\partial\sigma$  , en restant à distance  $\geq a$  de 0 . Par suite,  $L(\lambda)$  fait 1 tour autour de 0 . Cqfd.

7. DEMONSTRATION DU THEOREME 1.

Plaçons-nous dans la situation du théorème 1 , avec  $g_\lambda^q$  de la forme  $\zeta \mapsto \rho(\lambda)^q \zeta + b(\lambda) \zeta^{q+1} + o(\zeta^{q+2})$  , ce qu'on peut supposer vu le corollaire de la Proposition 1. On suppose  $g_\lambda^q$  défini pour tout  $\lambda \in \Lambda$  sur un disque  $\Delta$  . On a  $\text{Arg } L_- = \text{Arg } L_+ \pm \frac{1}{2q}$  ; supposons que  $\text{Arg } L_- = \text{Arg } L_+ + \frac{1}{2q}$  (l'autre cas s'en déduit en transformant toute la situation par  $z \mapsto \bar{z}$  ). Soit

$\Theta = \{z \in \Delta - \{0\} \mid \text{Arg } z \in (\text{Arg } L_+ - \frac{1}{4q}, \text{Arg } L_+ + \frac{3}{4q})\}$  . Le changement de variables  $z \mapsto Z$  induit un isomorphisme de  $\Theta$  sur un ouvert  $\Omega$  comme dans le §6, et  $g_\lambda^q$  devient une fonction  $G_\lambda : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  qui satisfait aux conditions de ce paragraphe, si on rétrécit  $\Delta$  suffisamment, avec  $U_\lambda = \frac{1}{\rho(\lambda)^{2q}}$  .

Si  $\lambda \mapsto \rho(\lambda) = e^{2i\pi p/q}$  a en 0 un zéro de multiplicité  $\nu$  , il en est de même de  $\lambda \mapsto U_\lambda$  , et si  $N$  est assez grand, on peut trouver  $\nu$  compacts disjoints  $\sigma_1, \dots, \sigma_\nu$  tels que  $\lambda \mapsto U_\lambda$  induise pour chaque  $i \in \{1, \dots, \nu\}$  un homéomorphisme de  $\sigma_i$  sur  $\Sigma_N$  .

Aux compacts  $Q_-$  et  $Q_+$  de l'énoncé du théorème correspondent des compacts  $\mathcal{Q}_-$  et  $\mathcal{Q}_+$  dans le plan des  $Z$  . Fixons  $i \in \{1, \dots, \nu\}$  . Si  $N$  est assez grand, quand  $\lambda$  parcourt  $\partial\sigma_i$  ,  $G_\lambda^{N'}(\mathcal{Q}_-)$  et  $G_\lambda^{-N''}(\mathcal{Q}_+)$  valsebt 1 tour, d'après la Proposition 5 ; donc  $g_\lambda^{N'q}(Q_-)$  et  $g_\lambda^{N''q}(Q_+)$  valsent 1 tour d'après la remarque 3 du §4, et il existe un  $\lambda \in \sigma_i$  tel que :

$$g_\lambda^{N'q}(s_-(\lambda)) = g_\lambda^{-N''q}(s_+(\lambda)) \quad \text{Cqfd.}$$

## 8. COMPLEMENTS.

La démonstration du §7 donne les compléments suivants :

COMPLEMENT 1 au Théorème 1. Soit  $\nu$  la multiplicité de 0 comme solution de  $\rho(\lambda) = e^{2i\pi p/q}$  . Dans les conditions du théorème 1, il existe au moins  $\nu$  valeurs distinctes de  $\lambda$  telles que :  $g_\lambda^{Nq}(s_-(\lambda)) = s_+(\lambda)$  .

COMPLEMENT 2. Les valeurs  $\lambda_{N,1}, \dots, \lambda_{N,\nu}$  tendent vers 0 quand  $N \rightarrow \infty$  , uniformément si on varie  $s_+$  et  $s_-$  .

Cela résulte de l'inégalité  $|U_{\lambda_{N,i}}| < 8/N$  que l'on a puisque  $U_{\lambda_{N,i}} \in \Sigma_N$  .

COMPLEMENT 3. On a  $|\text{Arg } U_{\lambda_{N,i}} - \epsilon \frac{1}{4}| < \frac{1}{12}$  si  $\text{Arg } L_- = \text{Arg } L_+ + \frac{\epsilon}{2q}$  ,  $\epsilon = \pm 1$  . (les arguments sont comptés en tours).

Cela résulte de  $U_{\lambda_{N,i}} \in \Sigma_N$ . En fait, on voit facilement que  $|\text{Arg } U_{\lambda_{N,i}} - \frac{1}{4}| \rightarrow 0$  quand  $N \rightarrow \infty$ .

Nous avons donné dans l'introduction un premier complément au Corollaire 1 du Théorème 1. En voici un autre, qui se déduit du Complément 1 au Théorème 1 :

Si  $q \neq 1$ ,  $\alpha_1$  est un point périodique simple de période  $k$ , pour  $c$  voisin de  $c_0$ , il y a un point périodique  $\alpha(c)$  de  $f_c$  de période  $k$ , qui dépend analytiquement de  $c$ , on note  $\rho(c)$  sa valeur propre et  $\nu$  l'ordre de  $c_0$  comme solution de  $\rho(c) = e^{2i\pi p/q}$ . Si  $q = 1$ , le point  $\alpha_1$  est double comme point périodique de période  $k$ , pour  $c$  voisin de  $c_0$ , il y a 2 points  $\alpha(c)$  et  $\beta(c)$  périodiques de période  $k$  voisins de  $\alpha_1$ , et on définit  $\nu$  par  $(\alpha(c) - \beta(c))^2 \sim a(c - c_0)^\nu$ ,  $a \neq 0$ .

COMPLEMENT 2 au Corollaire 1 du Théorème 1. Dans les conditions du Corollaire 1 du Théorème 1, il y a au moins  $\nu$  valeurs distinctes de  $c$  dans  $W$  telles que  $f_c^{Nkq}(x(c)) = y(c)$ .

Démonstration. Dans le cas  $q \neq 1$ , cela résulte immédiatement du Complément 1 au Théorème 1.

Dans le cas  $q = 1$ , on fait le changement de paramètre  $c_\lambda = c_0 + \lambda_2$ , ce qui permet de choisir une détermination analytique pour  $\lambda \mapsto \alpha(\lambda)$ . L'application  $\lambda \mapsto \rho(\lambda) - 1$  a en 0 un zéro d'ordre  $\nu$ . Pour  $N$  assez grand, on trouve au moins  $\nu$  valeurs de  $\lambda$  telles que  $f_\lambda^{Nkq}(x(\lambda)) = y(\lambda)$  en considérant que  $\text{Arg } L_- = \text{Arg } L_+ + \frac{1}{2}$ , et  $\nu$  autres valeurs en considérant que  $\text{Arg } L_- = \text{Arg } L_+ - \frac{1}{2}$ , soient  $2\nu$  en tout. A ces  $2\nu$  valeurs de  $\lambda$  correspondent  $\nu$  valeurs distinctes de  $c$ . Cqfd.

ARRIVER AU BON PORT

1. INTRODUCTION.

Cet exposé fait suite à [TV] "Un tour de valse".

Soit  $c_0 \in M$  tel que le polynôme  $f_{c_0} : z \mapsto z^2 + c_0$  admette un cycle indifférent rationnel  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$  de valeur propre  $\rho = e^{2i\pi p/q}$ . On suppose que la composante connexe  $u_1$  de  $\overset{\circ}{K}_{c_0}$  qui contient  $c_0$  est attirée par  $\alpha_1$  et on note  $P_1$  le pétale de  $\alpha_1$  contenu dans  $u_1$ . Soit  $\theta$  l'argument d'un rayon externe de  $K_{c_0}$  qui aboutit en  $\alpha_1$  par un interpétale adjacent à  $P$ . On a nécessairement  $2^{kq}\theta = \theta$  ([PPIR], II.2, Proposition 4bis, a)).

Pour  $c \in \mathbb{C}$ , notons  $\mathcal{G}_c$  la fonction potentiel  $\mathbb{C} - K_c \rightarrow \mathbb{R}_+$  (prolongée à  $\mathbb{C}$  par 0 sur  $K_c$ ), et notons  $\mathcal{G}_M$  la fonction potentiel de  $M$ , définie par  $\mathcal{G}_M(c) = \mathcal{G}_c(c)$ .

Choisissons  $\Delta$ ,  $n_0$ ,  $r^*$  et définissons  $x(c)$  comme en [TV] §2. Posons  $I^* = [\frac{1}{2^{kq}} s^*, s^*]$ , où  $s^* = \text{Log } r^*$ . Pour  $s \in I^*$  et  $c$  tel que  $s > \mathcal{G}_c(0)$ , définissons  $y(c, s)$  par  $\text{Arg}_{K_c}(y(c, s)) = \theta$ ,  $\mathcal{G}_c(y(c, s)) = s$ . Soit  $W$  un disque centré en  $c_0$  tel que, pour  $c \in W$ , on ait  $x(c) \in \Delta$ ,  $\mathcal{G}_c(0) < \frac{1}{2^{kq}} s^*$  et  $(\forall s \in I^*) y(c, s) \in \Delta$ . Définissons  $\nu$  comme pour le Complément 2 du Corollaire 1 du Théorème 1 de [TV], §8.

Dans l'exposé précédent, nous avons défini un  $N_0 \in \mathbb{N}$  et construit, pour tout  $N \geq N_0$  et tout  $s \in I^*$ ,  $\nu$  valeurs distinctes de  $c$  dans  $W$  telles que :

$$(1) \quad f_c^{Nkq}(x(c)) = y(c, s) \quad .$$

Plus précisément, la condition  $|\text{Arg } U - \epsilon \frac{1}{4}| < \frac{1}{12}$  (cf. [TV], Complément 3 au Théorème 1) définit  $\nu$  secteurs de  $S_1, \dots, S_\nu$  dans  $W$ . Dans chacun d'eux, on trouve une valeur de  $c$  vérifiant (1).

Ayant choisi un de ces secteurs  $S$ , notons  $c_t$  la valeur de  $c$  trouvée dans  $S$  vérifiant (1) pour  $N$  et  $s$  tels que  $t = t_{N,s} = \frac{s}{2(n_0+N)kq}$ . Ceci permet de définir  $c_t$  pour  $0 < t \leq t^* = \frac{s^*}{2(n_0+N_0)kq}$ . (Remarquons que si  $t = t_{N, \frac{s^*}{2kq}} = t_{N+1, s^*}$ , la condition (1) pour  $(N, \frac{s^*}{2kq})$  entraîne (1) pour  $(N+1, s^*)$ .) D'après le Complément 2 au Théorème 1 de [TV],  $c_t \rightarrow c_0$  quand  $t \rightarrow 0$ .

Pour tout polynôme  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , et pour  $x$  et  $y \in \mathbb{C}$ , nous écrirons  $x \underset{f}{\sim} y$  si  $(\exists n) f^n(x) = f^n(y)$ . Nous préciserons  $x \underset{f,n}{\sim} y$  si  $f^n(x) = f^n(y)$ .

Pour  $c \in C-M$ , définissons  $\omega(c) \in C-K_c$  par :

$$\begin{cases} \zeta_c(\omega(c)) = \zeta_c(c) \\ \text{Arg}_{K_c}(\omega(c)) = \theta. \end{cases}$$

Pour  $c = c_t$ , on a  $c \underset{f_c}{\sim} \omega(c)$ . En effet, les points  $f_c^{(n_0+N)kq}(c)$  et  $f_c^{(n_0+N)kq}(\omega(c))$  ont même potentiel  $\zeta_c(c)$  et même argument externe  $\theta$  par rapport à  $K_c$ , donc sont égaux.

Dans cet exposé, nous allons démontrer :

**THEOREME 1.** Pour  $c = c_t$ , avec  $t \in ]0, t^*]$  assez voisin de  $0$ , on a :

$$\omega(c) = c.$$

Tirons tout de suite des conséquences :

**COROLLAIRE 1.** Pour  $c = c_t$ , avec  $t > 0$  assez voisin de  $0$ , on a :

$$c \in C-M, \text{Arg}_M(c) = \theta \text{ et } \zeta_M(c) = t.$$

**COROLLAIRE 2.** On a :  $\nu = 1$ .

Sinon, il y aurait plusieurs points de  $C-M$  ayant même potentiel et même argument externe par rapport à  $M$ .

**COROLLAIRE 3.** Le rayon externe  $\mathcal{R}(M, \theta)$  aboutit en  $c_0$ .

C'est le Théorème A annoncé dans [TV].

Donnons le plan de la démonstration du Théorème 1. Comme dans [TV] pour la démonstration du Corollaire A du Théorème 1 à partir du Théorème 1, on pose  $c(\lambda) = c_0 + \lambda$  si  $q \neq 1$  et  $c(\lambda) = c_0 + \lambda^2$  si  $q = 1$ , ce qui permet de définir  $\alpha(\lambda)$  dépendant analytiquement de  $\lambda$  quand  $\lambda$  parcourt un disque  $\Lambda$  centré en 0. On suppose que  $\lambda \in \Lambda \Rightarrow c(\lambda) \in W$ . Au secteur  $S \subset W$  correspond un secteur  $\tilde{S} \subset \Lambda$ .

Nous allons construire pour chaque  $c \in S$  un point  $\check{\omega}(c)$  tel que  $\check{\omega}(c) \sim_{f_c} c$ . Puis nous montrerons d'une part que  $\omega(c_t) = \check{\omega}(c_t)$  pour  $t > 0$  assez voisin de 0, d'autre part que  $\check{\omega}(c) = c$  pour  $c \in S$  assez voisin de  $c_0$ .

Aveux. 1) Pour les besoins de la démonstration, nous utiliserons non seulement le Théorème 1 de [TV], son Corollaire et leurs compléments, mais aussi les inégalités de [TV] §§6-7, qui ont servi dans la construction de  $c_t$ .

2) On se permettra éventuellement d'augmenter  $n_0$  et de diminuer  $r^*$  (et donc  $s^*$ ), ce qui aura pour effet de rétrécir  $W$ , d'augmenter  $N_0$  et de diminuer  $t^*$ .

## 2. DEFINITION DE $\omega(c, \gamma)$ .

Soient  $W$  et  $n_0$  comme au §1. Pour  $c \in W$ , on pose  $x_n(c) = f_c^{(n_0+n)kq}(c) = f_c^{nkq}(x(c))$ , et on note  $\mathcal{C}(c)$  l'ensemble des  $f_c^i(c)$  pour  $0 \leq i < n_0 kq$ . Soit  $\gamma: \mathbb{T} = [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  un chemin de  $x_1(c)$  à  $x_0(c)$  tel que  $\gamma(\mathbb{T}) \cap \mathcal{C}(c) = \emptyset$ . Il existe alors un chemin unique  $\tilde{\gamma}: [0, n_0+1] \rightarrow \mathbb{C}$  prolongeant  $\gamma$  et tel que  $\tilde{\gamma}(t+1) \in f_c^{-kq}(\tilde{\gamma}(t))$  pour  $t \in [0, n_0]$ . On peut en effet définir  $\tilde{\gamma}|_{[j, j+1]}$  par récurrence sur  $j$ , la condition  $\gamma(\mathbb{T}) \cap \mathcal{C}(c) = \emptyset$  assurant que  $\tilde{\gamma}([j-1, j])$  ne contient pas de valeur critique de  $f_c^{kq}$  pour  $j \leq n_0$ . On pose alors  $\omega(c, \gamma) = \tilde{\gamma}(n_0+1)$ . On a  $\omega(c, \gamma) \sim_{f_c, n_0 kq} c$ . En effet  $f_c^{n_0 kq}(\omega(c, \gamma)) = x(c) = f_c^{n_0 kq}(c)$ . Si  $\gamma$  est homotope à  $\gamma'$  parmi les chemins de  $x_1(c)$  à  $x_0(c)$

évitant  $C(c)$ , on a  $\omega(c, \gamma') = \omega(c, \gamma)$ .

### 3. LE CYLINDRE DE FATOU-ECALLE.

On se place dans les conditions du §7 de [TV] : le changement de variable  $z \mapsto Z$  définit un isomorphisme d'un secteur  $\Theta_\lambda$  de  $\Delta$  sur  $\Omega = C - (D_R \cup -iR_+)$ , et, à  $g_\lambda$  déduit de  $f_{c(\lambda)}^{kq}$  par le changement de variable  $z \mapsto \zeta$ , correspond pour la variable  $Z$  une application  $G_\lambda : \Omega \rightarrow C$  de la forme  $G_\lambda = H_\lambda + \eta_\lambda$ , où  $H_\lambda(Z) = (1+U_\lambda) \cdot Z - 1$  et  $(\forall Z \in \Omega) |\eta_\lambda(Z)| \leq \frac{a}{100}$ . On note  $A_\lambda$  le point fixe de  $H_\lambda$ , soit  $A_\lambda = \frac{1}{U_\lambda}$ . On suppose que  $R > 1$ , et on note  $\Lambda$  un disque tel que, pour  $\lambda \in \Lambda$ , on ait  $c(\lambda) \in W$  et  $|A_\lambda| > 4R$ . L'application  $G_\lambda$  possède un point fixe  $A'_\lambda$  tel que  $|A'_\lambda - A_\lambda| \leq \frac{2a}{100}$ ,  $|A_\lambda| \leq \frac{|A'_\lambda|}{100}$ . Parfois nous écrirons  $A$  pour  $A_\lambda$ , etc...

LEMME 1. Pour  $Z \in \Omega$ , on a :

$$\left| \text{Log} \frac{G(Z) - A'}{(1+U)(Z-A')} \right| \leq \frac{1}{10|A|} .$$

Démonstration.

a) Cas où  $|Z - A| \geq \frac{|A|}{2}$ . On a :

$$\begin{aligned} \text{Log} \frac{H(Z) - A'}{(1+U)(Z-A')} &= \text{Log} \frac{H(Z) - A'}{Z - A'} - \text{Log} \frac{H(Z) - A}{Z - A} = \\ &= \int_A^{A'} \frac{dt}{t - H(Z)} - \frac{dt}{t - Z} = \int_A^{A'} \frac{U(Z - A)}{(t - H(Z))(t - Z)} dt . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où} \quad \left| \text{Log} \frac{H(Z) - A'}{(1+U)(Z-A')} \right| &\leq |A' - A| |U| \left| \frac{Z - A}{t - Z} \right| \frac{1}{|t - H(Z)|} \\ &\leq \frac{|A|}{100} \cdot \frac{1}{|A|} \cdot 1,03 \cdot \frac{1}{0,24|A|} \leq \frac{1}{20|A|} . \end{aligned}$$

$$\text{D'autre part, } \text{Log} \left| \frac{G(Z) - A'}{H(Z) - A'} \right| \leq \frac{|\eta(Z)|}{|H(Z) - A'| - |\eta(Z)|} \leq \frac{0,01}{0,24|A|} \leq \frac{1}{20|A|} ,$$

d'où l'inégalité dans ce cas.

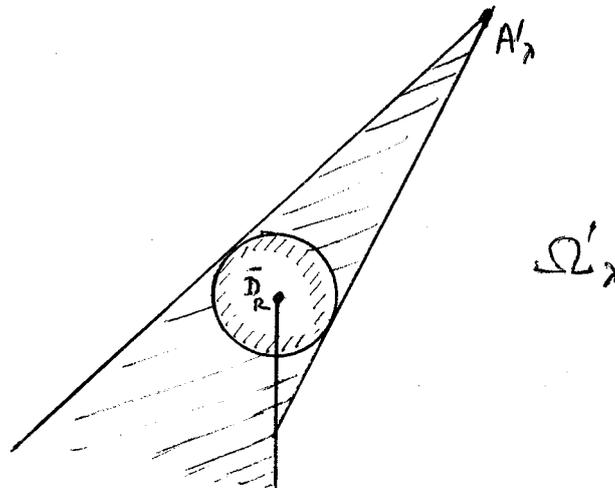
b) Cas où  $|Z-A| \leq \frac{|A|}{2}$ . Sur le disque  $\mathfrak{D} = D_{A, |A|/2}$ , on a  $|\eta'| \leq \frac{2}{100} \cdot \frac{1}{|A|}$ , car tout point de ce disque est centre d'un disque de rayon  $\frac{|A|}{4}$  contenu dans  $\Omega$ , sur lequel  $\eta$  est majorée par  $\frac{a}{100} \leq \frac{1}{200}$ . Pour  $Z \in \mathfrak{D}$ ,

on a :

$$|(G(Z) - A') - (1+U)(Z-A')| = \left| \int_{A'}^Z \eta'(t) dt \right| \leq \frac{1}{50|A|} |Z-A'|,$$

d'où l'inégalité dans ce cas aussi. Cqfd.

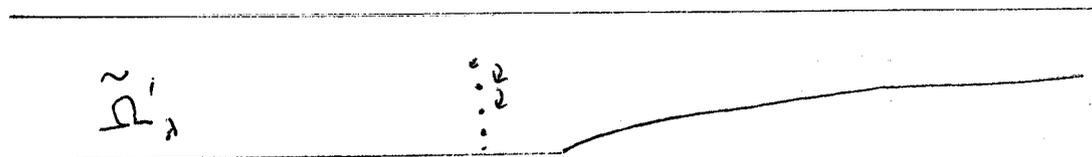
On suppose maintenant  $\lambda$  tel que  $|\text{Arg } A_\lambda - \frac{1}{4}| \leq \frac{1}{12}$ , ce qui entraîne  $\text{Arg}(1+U_\lambda) \leq \frac{-1}{2A_\lambda}$ . On définit un ouvert  $\Omega'_\lambda \subset \Omega$  de la façon suivante : Si  $V$  désigne le plus grand secteur angulaire ouvert de sommet  $A'_\lambda$  ne rencontrant pas  $\bar{D}_R$ , l'ouvert  $\Omega'_\lambda$  est l'ensemble des  $Z \in V$  tels que  $[A'_\lambda, Z] \cap -i\mathbb{R}_+ = \emptyset$ .



Notons  $E_\lambda$  le quotient de  $\Omega'_\lambda$  par la relation d'équivalence identifiant  $Z$  à  $G_\lambda(Z)$  si le segment  $[Z, G_\lambda(Z)]$  est contenu dans  $\Omega'_\lambda$ .

PROPOSITION 2 et DEFINITION. L'espace  $E_\lambda$  est une surface de Riemann isomorphe à  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ , qu'on appellera le cylindre de Fatou-Ecalle de  $G_\lambda$ .

Démonstration. Par le changement de variable  $Z \mapsto \text{Log}(Z - A'_\lambda)$  (on choisit une détermination sur  $\Omega'_\lambda$ ), l'ouvert  $\Omega'_\lambda$  devient une bande  $\tilde{\Omega}'_\lambda$  limitée



par des courbes faisant avec l'horizontale un angle borné par  $\frac{1}{12}$  tour =  $30^\circ$  (+).

L'application  $G_\lambda$  donne une application  $\tilde{G}_\lambda : \tilde{\Omega}'_\lambda \rightarrow \mathbb{C}$  telle que

$$\tilde{G}_\lambda(x+iy) = x_1 + iy_1 \text{ avec } y_1 - y < -0,45 |U| \text{ et } |x_1 - x| < |y_1 - y| < \frac{1}{2}.$$

Comme la bande  $\tilde{\Omega}'_\lambda$  a partout une largeur  $> \pi$ ,  $E_\lambda = \Omega'_\lambda / G_\lambda \approx \tilde{\Omega}'_\lambda / \tilde{G}_\lambda$  est isomorphe à un cylindre. Cqfd.

Remarque. Soit  $\Theta'_\lambda$  l'ouvert  $\Theta_\lambda$  correspondant à  $\Omega'_\lambda$  par  $z \mapsto Z$ . Le quotient  $\Theta'_\lambda / f_c^{kq}$ , où  $c = c(\lambda)$ , s'identifie à  $E_\lambda = \Omega'_\lambda / G_\lambda$ , nous dirons que  $c$  est le cylindre de Fatou-Ecalle de  $f_c^{kq}$  dans le secteur  $\Theta_\lambda$ . L'application  $f_c^{kq}$  a donc  $q$  cylindres de Fatou-Ecalle relatifs au point  $\alpha(\lambda)$ . Celui qui nous intéresse est celui du secteur contenant l'axe de  $P_1$  et le bout de  $\mathbb{R}(c_0, \theta)$ .

#### 4. DEFINITION de $\check{\omega}(c)$ .

Soient  $\lambda \in \tilde{S}$  et  $c = c(\lambda) \in S$ . Notons  $E_\lambda = \Theta'_\lambda / f_c^{kq}$  le cylindre de Fatou-Ecalle de  $f_c^{kq}$ ,  $\chi : \Theta'_\lambda \rightarrow E_\lambda$  l'application canonique et  $\xi = \chi(x_0(\lambda))$ . Un chemin  $\gamma$  de  $x_1(\lambda)$  à  $x_0(\lambda)$  dans  $\Theta'_\lambda$  donne un lacet  $\chi \circ \gamma$  dans  $E_\lambda$ , basé en  $\xi$ . Par abus, nous dirons que  $c$  est un lacet injectif s'il définit une application injective  $\mathbb{T} = \mathbb{I} / 0 \sim 1 \rightarrow E_\lambda$ .

PROPOSITION 3 et DEFINITION. a) Il existe un chemin  $\gamma$  de  $x_1(\lambda)$  à  $x_0(\lambda)$  dans  $\Theta'_\lambda$  donnant un lacet injectif dans  $E_\lambda$ .

b) Deux tels chemins ( $\gamma$  et  $\gamma'$ ) sont homotopes parmi les chemins évitant  $\mathbb{C}(c)$ , et on a  $\omega(c, \gamma) = \omega(c, \gamma')$ .

On note  $\check{\omega}(c)$  le point  $\omega(c, \gamma)$  pour  $\gamma$  un chemin quelconque de  $x_1(\lambda)$  à  $x_0(\lambda)$  donnant un lacet injectif dans  $E_\lambda$ .

---

(+) En fait, l'une de ces deux courbes est une horizontale.

Démonstration. Si on a pris  $n_0$  assez grand et  $\Delta$  assez petit, on a  $\mathcal{C}(c) \cap \Theta_\lambda \subset \{f_c^{mkq}\}_{m < n_0}$ , donc  $\chi(z) = \xi$  pour tout  $z \in \mathcal{C}(c) \cap \Theta_\lambda'$ .

Passons dans la coordonnée  $\text{Log}(Z - A'_\lambda)$  de sorte que  $\Theta'$  devient  $\tilde{\Omega}'$ .

a) Le chemin affine répond à la question.

b) Les lacets  $\eta = \chi(\gamma)$  et  $\eta' = \chi(\gamma')$  sont homotopes parmi les lacets injectifs basés en  $\xi$ , puisque  $E_\lambda$  est un cylindre. L'ouvert  $\tilde{\Omega}'$  se plonge dans le revêtement universel  $\tilde{E}$  de  $E$ ; notons  $\pi$  la projection  $\tilde{E} \rightarrow E$ . On obtient en relevant une homotopie de  $\gamma$  à  $\gamma'$  parmi les chemins de  $x_1$  à  $x_0$  dans  $\tilde{E}$  évitant  $\pi^{-1}(\xi) - \{x_1, x_0\}$ , et en particulier l'image  $\tilde{\mathcal{C}}$  de  $\mathcal{C} \cap \Theta'$  par l'identification  $\Theta' \xrightarrow{\sim} \tilde{\Omega}' \hookrightarrow \tilde{E}$ . Mais on peut rétracter  $\tilde{E} - \tilde{\mathcal{C}}$  sur un compact de  $\tilde{\Omega}' - \tilde{\mathcal{C}}$  contenant les images de  $\gamma$  et  $\gamma'$ . On obtient donc une homotopie de  $\gamma$  à  $\gamma'$  dans  $\tilde{\Omega}' - \tilde{\mathcal{C}}$  c'est-à-dire dans  $\Theta' - \mathcal{C}$ . Ceci établit la première assertion de b). La seconde en résulte (cf. 2). Cqfd.

## 5. CAS DE $c_t$ .

Pour tout  $t \in ]0, t^*]$ , considérons le point  $c_t$  défini au §1.

PROPOSITION 4. Pour  $t > 0$ , on a  $\omega(c_t) = \check{\omega}(c_t)$ .

Posons  $\mathcal{C}_j(c) = \{f_c^m(c)\}_{0 \leq m < (n_0 + j)kq}$ . Si  $\gamma$  est un chemin de  $x_j(c)$  à  $x_{j-1}(c)$  évitant  $\mathcal{C}_{j-1}$ , il existe un chemin  $\tilde{\gamma} : [0, n_0 + j] \rightarrow \mathbb{C}$  unique prolongeant  $\gamma$  et tel que  $\tilde{\gamma}(t+1) \in f_c^{-kq}(\tilde{\gamma}(t))$  pour  $t \in [0, n_0 + j - 1]$ . On pose alors  $\check{\omega}(c, \gamma) = \gamma(n_0 + j)$ , et on a  $\omega(c, \gamma) \sim_{f_c} \check{\omega}(c, \gamma)$ .

LEMME 2. Soit  $c = c(\lambda) \in S$ . Soit  $n$  tel que  $x_j(c) \in \Theta'_\lambda$  pour  $0 \leq j \leq n$ , et soit  $\gamma$  un chemin de  $x_n(c)$  à  $x_{n-1}(c)$  dans  $\Theta'_\lambda$  donnant un lacet injectif dans  $E_\lambda$ . On a : a)  $\gamma(I) \cap \mathcal{C}_{n-1}(c) = \emptyset$ ;

b)  $\omega(c, \gamma) = \check{\omega}(c)$ .

Démonstration. a) On a  $\mathbb{C}_{n-1} \cap \Theta' = \mathbb{C} \cap \Theta' \cup \{x_0, \dots, x_{n-2}\}$ , et a) en résulte.

b) Pour  $j = 1, \dots, n$ , notons  $\gamma_j'$  le chemin de  $x_j$  à  $x_{j-1}$  qui devient affine dans la coordonnée  $\text{Log}(Z - A')$ . Le chemin  $\gamma_j'$  donne un chemin injectif dans  $E$ , ainsi que  $f^{kq}(\gamma_{j-1}')$  si  $j \geq 2$ . La même démonstration que pour la partie b) de la Proposition 3 montre que :

$$\omega(c, \gamma) = \omega(c, \gamma_n') = \omega(c, f^{kq}(\gamma_{n-1}')) = \dots = \omega(c, \gamma_1') = \check{\omega}(c). \quad \text{Cqfd.}$$

Soient  $c = c(\lambda)$ ,  $c \in S$  et  $s \in I^*$  (cf. §1). Définissons le chemin  $\gamma_{c, \mathbb{R}, s}$  par  $\text{Arg}_{K_c} \gamma_{c, \mathbb{R}, s}(t) = \theta$  et  $\zeta_c(\gamma_{c, \mathbb{R}, s}(t)) = 2^{-tkq} s$ . Ce chemin paramètre  $\mathbb{R}(c, \theta)$  de  $y(c, s)$  à un point  $y_1(c, s) = y(c, \frac{s}{2^{kq}}) \in f^{-k}(y(c, s))$ .

Si on a choisi  $r^*$  assez voisin de 1 et  $W$ , donc  $S$  et  $\Lambda$  assez petits, l'image de  $\gamma_{c, \mathbb{R}, s}$  est contenue dans  $\Theta_\lambda'$  pour tout  $s \in I^*$  et tout  $\lambda \in \Lambda$ .

LEMME 3. Si  $\gamma_{c, \mathbb{R}, s}$  est un chemin dans  $\Theta_\lambda'$ , il définit un lacet injectif dans  $E_\lambda$ .

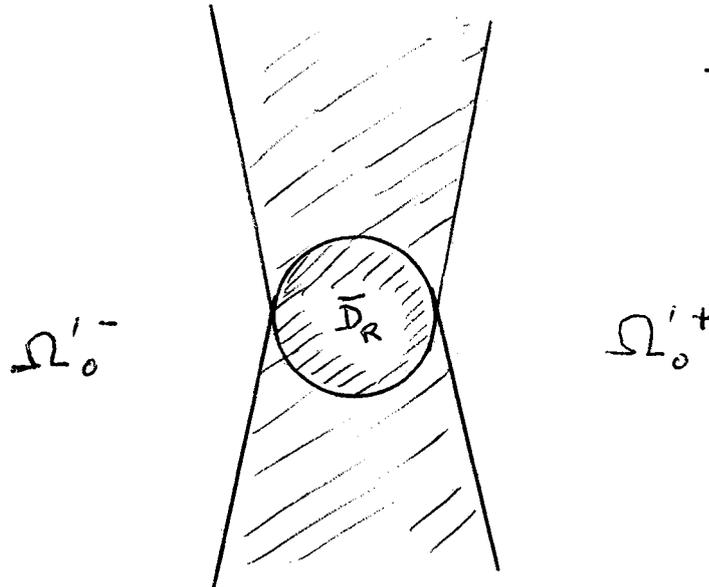
Démonstration. Sinon on pourrait trouver un couple  $(t, t') \in I^2$ , autre que  $(1, 0)$ , et un  $i \geq 1$  tel que  $\gamma_{c, \mathbb{R}, s}(t') = f_c^{ikq}(\gamma_{c, \mathbb{R}, s}(t))$ , d'où  $\zeta_c(\gamma_{c, \mathbb{R}, s}(t')) = 2^i \zeta_c^{ikq}(\gamma_{c, \mathbb{R}, s}(t))$ , ce qui est en contradiction avec la définition de  $\gamma_{c, \mathbb{R}, s}$ . Cqfd.

Démonstration de la Proposition. Pour  $c = c_t$ ,  $t = t_{N, s}$ , on a

$\omega(c) = \omega(c, \gamma_{c, \mathbb{R}, s})$  en vertu des définitions. On a  $\omega(c, \gamma_{c, \mathbb{R}, s}) = \check{\omega}(c)$  en vertu des lemmes 2 et 3, d'où  $\omega(c) = \check{\omega}(c)$ . Cqfd.

6. DEFINITION de  $\check{\omega}(c_0)$ .

Notons  $\Omega_0'$  le plus grand ouvert qui soit contenu dans  $\Omega_\lambda'$  pour tout  $\lambda \in \tilde{S}$ . L'ouvert  $\Omega_0'$  est limité par 4 demi-droites, et a 2 composantes connexes  $\Omega_0'^+$  et  $\Omega_0'^-$  :



Un secteur  $\Theta$  ayant été choisi, à  $f_{c_0}^{kq}$  correspond une application  $G_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  de la forme  $Z \mapsto Z - 1 + \eta$ ,  $\|\eta\| \leq \frac{a}{100}$ . Les quotients  $E_0^+ = \Omega_0'^+ / G_0$  et  $E_0^- = \Omega_0'^- / G_0$  sont isomorphes à ces cylindres. Ce sont les deux cylindres de Fatou-Ecalle de  $G_0$ . En changeant le choix du secteur  $\Theta$ , on obtient ainsi  $2q$  cylindres attachés au point  $\alpha_1$ . Celui qui nous intéresse est le cylindre  $E_0^-$  correspondant au secteur  $\Theta$  contenant l'axe du pétale  $P_1$  au voisinage de  $\alpha_1$ . Nous supposons que c'est ce choix qu'on a fait pour  $\Theta$ . Notons  $\Theta_0'^-$  l'image réciproque de  $\Omega_0'^-$  dans  $\Theta$  par  $z \mapsto Z$ . Si on a choisi  $n_0$  assez grand, on a  $x_n(c_0) \in \Theta_0'^-$  pour tout  $n \geq 0$ , et il existe un chemin  $\gamma$  de  $x_1(c_0)$  à  $x_0(c_0)$  dans  $\Theta_0'^-$  donnant un lacet injectif dans  $E_0^-$ . Ceci permet de définir  $\check{\omega}(c_0)$  (on voit comme dans la Proposition 3 que le résultat ne dépend pas du choix de  $\gamma$ ). On a bien sûr  $\check{\omega}(c_0) \sim_{f_{c_0, n_0 kq}} c_0$ . Cqfd.

PROPOSITION 5. Le point  $\check{\omega}(c)$  tend vers  $\check{\omega}(c_0)$  quand  $c \rightarrow c_0$  dans  $S$ .

Démonstration. Soit  $\gamma_0$  un chemin de  $x_1(c_0)$  à  $x_0(c_0)$  donnant un lacet injectif -par exemple le chemin affine dans la coordonnée  $Z$ . Pour  $\lambda$  voisin de 0, on a un chemin  $\gamma_\lambda$  voisin de  $\gamma_0$  de  $x_1(c(\lambda))$  à  $x_0(c(\lambda))$  donnant un lacet injectif -par exemple encore le chemin affine, dans la coordonnée  $Z$ , ou dans la coordonnée  $\text{Log}(Z - A')$ . En relevant  $n_0$  fois, on obtient  $\check{\omega}(c)$  voisin de  $\check{\omega}(c_0)$ . Cqfd.

7. IDENTIFICATION de  $\check{\omega}(c_0)$ .

PROPOSITION 6. On a  $\check{\omega}(c_0) = c_0$ .

Démonstration. Soit  $U_1$  la composante connexe de  $\overset{\circ}{K}_{c_0}$  contenant le pétale  $P_1$ . On a  $\Theta_0^{1-} \subset P_1$ , ou du moins  $f_{c_0}^{nkq}(\Theta_0^{1-}) \subset P_1$ , pour  $n$  assez grand, donc  $\Theta_0^{1-} \subset U_1$ . D'autre part, pour tout  $z \in U_1$ , la suite  $f_{c_0}^{nkq}(z) \rightarrow \alpha_1$  tangentiellement à l'axe de  $P_1$  ([PPIR], Propositions 3 et 2); donc  $(\exists n) f_{c_0}^{nkq}(z) \in \Theta_0^1$ . Par suite,  $E_{c_0}^- = \Theta_0^1 / f_{c_0}^{kq}$  est aussi  $U_1 / f_{c_0}^{kq}$ . Ceci donne une définition de  $E_{c_0}^-$  indépendante de tout choix, ne dépendant en fait que de la dynamique sur  $U_1$ .

L'application  $f^{kq} : U_1 \rightarrow U_1$  est holomorphe propre de degré 2. Elle a un point critique  $u$ , l'unique point de  $f_{c_0}^{-(kq-1)}(0) \cap U_1$ , et pour valeur critique  $c_0$ . Soit  $\varphi : U_1 \rightarrow D$  l'isomorphisme tel que  $\varphi(u) = 0$  et  $\varphi(c_0) \in ]0,1[$ ; on a :

$$\varphi \circ f^{kq} \circ \varphi^{-1} = h : z \mapsto \frac{3z^2 + 1}{z^2 + 3} \quad ([PPIR], \text{Corollaire 1 de la Prop.4}).$$

Notons  $E_h^-$  le cylindre de Fatou-Ecalle de  $h$  au point 1, relatif à un secteur centré sur l'axe dirigé vers  $\mathbb{R}_-$ . On a de même  $E_h^- = D/h$ , et  $\varphi$  donne par passage au quotient un isomorphisme  $\Phi : E_{c_0}^- \rightarrow E_h^-$ . Posons

$x_n(h) = h^{\frac{n_0+n}{3}} \left(\frac{1}{3}\right) = \varphi(x_n(c_0))$ . On peut définir  $\check{\omega}(h)$  de la façon suivante : On prend un chemin  $\gamma$  de  $x_1(h)$  à  $x_0(h)$  qui donne un lacet injectif dans  $E^-(h)$ , on le prolonge à  $[0, n_0+1]$  en un lacet  $\tilde{\gamma}$  tel que  $\tilde{\gamma}(t+1) \in h^{-1}(\gamma(t))$  pour  $t \in [0, n_0]$ , et on pose  $\omega(h) = \tilde{\gamma}(n_0+1)$ . On a clairement  $\check{\omega}(h) \sim_{h, n_0} 1/3$  et  $\varphi(\check{\omega}(c_0)) = \check{\omega}(h)$ . La proposition 6 résulte maintenant du lemme suivant :

LEMME. On a  $\check{\omega}(h) = 1/3$ .

Démonstration. On a  $h^n(1/3) \in ]0, 1[$  pour tout  $n > 0$  ; on peut prendre pour  $\gamma$  le chemin affine de  $x_1(h)$  à  $x_0(h)$  . Alors,  $\tilde{\gamma}$  est un chemin injectif d'image contenue dans  $]0, 1[$  et  $\tilde{\gamma}(n_0+1) = 1/3 /$  Cqfd.

Ceci achève la démonstration de la Proposition 6 .

## 8. DEMONSTRATION du THEOREME 1.

La Proposition 6 admet le corollaire suivant :

COROLLAIRE. Pour  $c \in S$  assez voisin de  $c_0$  , on a  $\check{\omega}(c) = c$  .

Démonstration. Il y a  $2^{n_0 kq}$  points distincts  $v_i(c_0)$  ,  $i = 1, \dots, 2^{n_0 kq}$  tels que  $v_i(c_0) \sim_{f_{c_0, n_0 kq}} c_0$  . En effet  $f_{c_0}^{n_0 kq}(c_0)$  n'est pas une valeur critique de  $f_{c_0}^{n_0 kq}$  , car ces valeurs critiques sont les  $f_{c_0}^m(c_0)$  pour  $0 \leq m \leq n_0 kq - 1$  , et que  $c_0$  n'est pas prépériodique. On peut supposer  $v_1(c_0) = c_0$  . Soient  $V_i$  ,  $i = 1, \dots, 2^{n_0 kq}$  des voisinages 2 à 2 disjoints des  $v_i(c_0)$  . Pour  $c$  assez voisin de  $c_0$  , il y a dans chaque  $V_i$  un  $v_i(c)$  unique tel que  $v_i(c) \sim_{f_c, n_0 kq} c$  , et  $v_1(c) = c$  . Pour  $c$  assez voisin de  $c_0$  , on a  $\check{\omega}(c) \in V_1$  (Proposition 5), donc  $\check{\omega}(c) = v_1(c) = c$  . Cqfd.

Le Théorème 1 résulte de ce corollaire et de la Proposition 4 .

EXPOSE n° XIII

ABOUTISSEMENT DES RAYONS EXTERNES DE  $M$

D'ARGUMENT RATIONNEL

1. RESULTATS.

THEOREME 1. Soit  $\theta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ . Alors, le rayon externe  $\mathcal{R}(M, \theta)$  aboutit en un point  $c \in M$  qui est soit une racine de composante hyperbolique, soit un point de Misurewicz.

Commentaire. Les racines des composantes hyperboliques de  $\overset{\circ}{M}$  sont les  $c$  tels que  $f_c : z \rightarrow z^2 + c$  admette un cycle indifférent rationnel. Les points de Misurewicz sont les  $c$  tels que  $0$  soit strictement prépériodique pour  $f_c$  ;

Compléments. 1) Si  $\theta$  est à dénominateur impair,  $c$  est une racine d'une composante hyperbolique. Le point  $c$  appartient à une composante  $U_1$  de  $\overset{\circ}{K}_c$  qui est attirée par un point  $\alpha_1$ . Il y a 2 rayons externes de  $K_c$  aboutissant en  $\alpha_1$  dans un interpétale adjacent à  $U_1$  (sauf si  $\theta = 0$ , d'où  $c = 1/4$ , 1 seul rayon), et  $\theta$  est l'argument de l'un d'eux.

2) Si  $\theta$  est à dénominateur pair,  $c$  est un point de Misurewicz, et  $\theta$  est l'un des arguments externes de  $c$  dans  $K_c$ .

Dans cet exposé, nous démontrerons le théorème 1. (Le complément 1 sera démontré à l'exposé suivant). Nous montrerons que, si  $c$  est un point de Misurewicz, alors  $\theta$  est un argument externe de  $c$  dans  $K_c$ , ce qui est une partie du complément 2. Le complément 2 sera démontré dans l'exposé "Une propriété de continuité". Le théorème 1 avec ses compléments est une réciproque au théorème A de [TV] et au théorème 2 de [AEMM].

2. POINTS D'ACCUMULATIONS DE  $\mathcal{R}(M, \theta)$  .

LEMME 1. Soit  $\theta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  et soit  $c_0$  un point d'accumulation de  $\mathcal{R}(M, \theta)$  . Alors, ou bien  $f_{c_0}$  a un cycle indifférent rationnel, ou bien  $c_0$  est un point de Misurewicz.

Démonstration. Mettons  $\theta$  sous la forme  $\frac{p}{2^\ell(2^k-1)}$ , avec  $\ell$  et  $k$  minimaux, et posons  $\theta' = 2^\ell \theta$ . D'après [AEMM, II, proposition 2], le rayon  $\mathcal{R}(K_{c_0}, \theta)$  aboutit en un point  $\alpha_0$  prépériodique,  $\mathcal{R}(K_{c_0}, \theta')$  aboutit en  $\alpha'_0 = f_{c_0}^\ell(\alpha_0)$ , qui est périodique de période  $k'$  divisant  $k$ , répulsif ou indifférent rationnel.

Si  $\alpha'_0$  est périodique indifférent rationnel, on a gagné. Dans la suite, nous le supposons répulsif. On peut donc appliquer la proposition 3 de [AEMM, II]. En vertu de cette proposition, on peut trouver un voisinage  $W$  de  $c_0$  dans  $M$ , une application analytique  $c \rightarrow \alpha'(c)$  de  $W$  dans  $C$  telle que  $f_c(\alpha'(c)) = \alpha'(c)$  et  $\alpha'(c_0) = \alpha'_0$ , et une application continue  $(c, s) \rightarrow \psi_{c, \theta'}(s)$  de  $W \times \mathbb{R}_+$  dans  $C$  telle que  $\psi_{c, \theta'}(0) = \alpha'(c)$  et  $\psi_{c, \theta'}(s) = \varphi_c^{-1}(e^{s+2i\pi\theta'})$ .

Soit  $c_n$  une suite de points de  $\mathcal{R}(M, \theta)$  tendant vers  $c_0$ , et posons  $s_n = \phi_M(c_n)$  (potentiel). On a  $s_n \rightarrow 0$ , et  $\psi_{c_n, \theta'}(2^\ell s_n) = f_{c_n}^\ell(c_n)$ , d'où  $f_{c_0}^\ell(c_0) = \psi_{c_0, \theta'}(0) = \alpha'_0$ . Comme  $\alpha'_0$  est périodique et appartient à  $\partial K_{c_0}$ , le point  $c_0$  est un point de Misurewicz. Cqfd.

COMPLEMENT 1. Si  $c_0$  est un point de Misurewicz,  $\theta$  est un argument externe de  $c_0$  dans  $K_{c_0}$ .

Démonstration. Gardons les notations de la démonstration précédente. Montrons d'abord que  $f_{c_0}^i(\alpha_0) \neq 0$  pour tout  $i \geq 0$  (cf. [AEMM, II, prop.3]). Si on avait  $f_{c_0}^i(\alpha_0) = 0$ , on aurait  $\psi_{c_0, 2^{i+1}\theta}(0) = f_{c_0}^{i+1}(\alpha_0) = c_0$ . Or  $\psi_{c_n, 2^{i+1}\theta}(2^{i+1}s_n) \equiv f_{c_n}^{i+1}(c_n)$  tend vers  $f_{c_0}^{i+1}(c_0)$ . Mais  $c_0$  n'a pas de point critique de  $f_{c_0}$  dans son orbite directe, donc on peut appliquer [AEMM, II, proposition 3], qui donne  $\psi_{c_n, 2^{i+1}\theta}(2^{i+1}s_n) \rightarrow c_0$ , d'où  $f_{c_0}^{i+1}(c_0) = c_0$ . Comme 0 est le seul point dans

$f_{c_0}^{-1}(c_0)$ , on en déduit que  $f_{c_0}^{i+1}(0) = 0$ , ce qui est en contradiction avec le fait que  $c_0$  est un point de Misurewicz.

On peut maintenant appliquer [AEMM, II, proposition 3] à  $\alpha_0 = \psi_{c_0, \epsilon}(0)$ .

On a  $\psi_{c_n, \theta}(s_n) = c_n$ , d'où en passant à la limite  $\psi_{c_0, \theta}(0) = c_0$  et  $c_0 = \alpha_0$ . Cqfd.

COMPLEMENT 2. Si  $c_0$  n'est pas un point de Misurewicz,  $f_{c_0}^2(\alpha_0)$  est un point périodique indifférent rationnel.

### 3. DEMONSTRATION DU THEOREME 1.

L'ensemble des points d'accumulation de  $\mathcal{R}(M, \theta)$  est un compact connexe. D'après le lemme 1, il est contenu dans la réunion de l'ensemble des points de Misurewicz, qui est dénombrable, et de l'ensemble des  $c$  tels que  $f_c$  admette un cycle indifférent rationnel, qui l'est aussi.

Mais, tout compact connexe dénombrable est réduit à un point. Il y a donc un seul point d'accumulation  $c$ , et comme tout se passe dans un compact,  $\mathcal{R}(M, \theta)$  aboutit en  $c$ . Cqfd.

Nous avons démontré le théorème 1 et la partie annoncée de son complément 2.

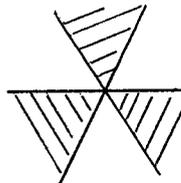
EXPOSE n° XIV

COMPOSANTES HYPERBOLIQUES

1. COMPOSANTES HYPERBOLIQUES.

Notons  $X_k$  l'ensemble des couples  $(c, z)$  tels que  $f_c^k(z) = z$ ,  $\pi$  la projection  $(c, z) \mapsto c$  de  $X_k$  sur  $\mathbb{C}$ , et  $\rho_k$  ou simplement  $\rho$  la fonction  $(c, z) \mapsto (f_c^k)'(z)$  sur  $X_k$ . L'ensemble  $X_k$  est une courbe algébrique sur  $\mathbb{C}$  et  $\pi: X_k \rightarrow \mathbb{C}$  est propre de degré  $2^k$ . En vertu du théorème des fonctions implicites, en tout point de  $X_k$  où  $\rho_k \neq 1$ , la courbe  $X_k$  est lisse et  $\pi$  est un isomorphisme local.

Notons  $A_k$  l'ensemble des  $(c, z) \in X_k$  tels que  $|\rho(c, z)| < 1$ . Comme  $\rho: X_k \rightarrow \mathbb{C}$  est analytique, elle est ouverte (même si  $X_k$  a des points singuliers). Par suite  $\bar{A}_k = \rho_k^{-1}(\bar{D})$ ,  $\partial A_k = \rho_k^{-1}(S^1)$  et l'ensemble des  $(c, z)$  tels que  $z$  soit un point périodique indifférent rationnel de  $f_c$  est dense dans  $\partial A_k$ . L'ensemble  $\partial A_k$  est un ensemble  $\mathbb{R}$ -algébrique, de dimension 1 sur  $\mathbb{R}$ , et ses seules singularités, en dehors des points singuliers de  $X_k$ , sont de la forme



(intersection de  $v$  branches lisses), aux points indiqués de  $\rho_k$ .

Posons  $M_k^! = \pi(A_k)$ . C'est un ouvert de  $\mathbb{C}$ , et l'ensemble des  $c \in \partial M_k^!$  tels que  $f_c$  ait un cycle indifférent rationnel d'ordre divisant  $k$  est dense dans  $\partial M_k^!$ . Or ces points appartiennent à  $\partial M$  (on sait même qu'ils sont le point d'aboutissement d'un rayon externe de  $M$ ). Par suite  $\partial M_k^! \subset \partial M$ , et toute composante connexe de  $M_k^!$  est une composante connexe de  $M$ .

L'ensemble  $M' = \bigcup_k M'_k$  est l'ensemble des  $c$  tels que  $f_c$  ait un cycle attractif. Chaque composante connexe de  $M'$  est une composante connexe de  $\overset{\circ}{M}$ . Les composantes connexes de  $\overset{\circ}{M}$  ainsi obtenues sont les composantes hyperboliques. La question de savoir s'il y a des composantes non-hyperboliques (composantes farfelues) est ouverte. Pour  $c \in M'$ , il y a un seul cycle attractif, et l'ordre de ce cycle reste constant sur chaque composante connexe de  $M'$ .

Si  $W$  est une composante connexe de  $M'$ ,  $W$  est simplement connexe, puisque c'est une composante connexe de  $\overset{\circ}{M}$ ,  $\partial W$  est une réunion d'arcs de courbes algébriques, donc est localement connexe, donc  $\bar{W}$  est homéomorphe à  $\bar{D}$ . Soit  $k$  la période de  $W$ , et soit  $W'$  une composante connexe de  $\mathbb{A}_k$  au-dessus de  $W$ , on définit  $\rho_W: W \rightarrow D$  par  $\rho_W(c) = \rho_k(c, z)$  pour  $(c, z) \in W'$  (indépendant du choix de  $W'$ ). L'application  $\pi$  induit un homéomorphisme de  $\bar{W}'$  sur  $\bar{W}$ , donc  $\rho_W$  se prolonge en une application continue (encore notée  $\rho_W$ ) de  $\bar{W}$  dans  $\bar{D}$  avec  $\rho_W(W) \subset S^1$ . L'application holomorphe  $\rho_W: W \rightarrow D$  est propre. Tout point  $c \in W$  (resp.  $c \in \partial W$ ) tel que  $\rho_W(c) = 0$  (resp.  $\rho_W(c) = 1$ ) est appelé un centre (resp. une racine) de  $W$ . Nous verrons que  $\rho_W: \bar{W} \rightarrow \bar{D}$  est un homéomorphisme. Il en résultera que  $W$  a 1 centre et 1 racine.

## 2. DÉFORMATION D'UN CYCLE INDIFFÉRENT RATIONNEL, CAS $q \neq 1$ .

Soit  $c_0 \in M$  tel que  $f_{c_0}$  admette un point périodique  $\alpha(c_0)$  de période  $k$ , de valeur propre  $\rho_0 = e^{2i\pi p/q}$  avec  $\text{pgcd}(p, q) = 1$ ,  $q \neq 1$ , donc  $\rho_0 \neq 1$ . Posons  $K = kq$ . La courbe algébrique  $X_k$  est au voisinage de  $(c_0, \alpha(c_0))$  le graphe d'une application holomorphe  $c \mapsto \alpha(c)$ . La fonction holomorphe  $c \mapsto \rho_k(c, \alpha(c))$  a en  $c_0$  une dérivée  $\neq 0$ : cela résulte de [ABP], Corollaire 2 du Théorème 1.

PROPOSITION 1. Au voisinage de  $c_0$ , l'ouvert  $M'_k$  est limité par un arc de courbe  $\mathbb{R}$ -analytique.

Démonstration :  $f_{c_0}$  n'admet pas d'autre cycle indifférent que celui de  $\alpha(c_0)$ . On a en effet construit en [CIAJ] un fermé  $B$  attiré par ce cycle et  $r$  sur  $\mathbb{C}-B$ , une métrique pour laquelle  $f_{c_0}$  est strictement expansif. Par suite  $X_k$  induit un revêtement trivial de degré  $2^k$  d'un voisinage  $W$  de  $c_0$ . Parmi les  $2^k$  feuillettes,  $k$  contiennent un point du cycle de  $\alpha(c_0)$ , et  $F: (c, z) \rightarrow (c, f_c(z))$  échange ces feuillettes ; sur les autres on a  $|\rho| > 1$  si on a choisi  $W$  assez petit. On a donc  $M'_k \cap W = \pi(A_k \cap W')$  où  $W'$  est le feuillet contenant  $\alpha(c_0)$ . cqfd.

PROPOSITION 2. Au voisinage de  $(c_0, \alpha(c_0))$ , on a  $X_K = X_k \cup X'_K$ , où

- $X_k \cap X'_K = \{c_0\}$ ,
- $X'_K$  est lisse en  $(c_0, \alpha_0)$  à tangente verticale,
- $\pi_K: X'_K \rightarrow \mathbb{C}$  a pour degré local  $q$  en ce point.
- $\rho_K: X'_K \rightarrow \mathbb{C}$  a aussi pour degré local  $q$  en  $(c_0, \alpha_0)$ .
- Au voisinage de  $c_0$ ,  $M'_K = M'_k \cup M'_K$ , où  $M'_K$  est l'ensemble des  $c$  tels que  $f_c$  a un cycle attractif d'ordre exactement  $K$ . Ces deux ouverts sont limités chacun par un arc de courbe  $\mathbb{R}$ -analytique.
- Ces deux arcs se rencontrent en  $c_0$  seul.

Démonstration : Soit  $\zeta$  une coordonnée satisfaisant aux conditions de [TV], Prop. 1 : l'expression  $g_c$  de  $f_c^k$  dans cette coordonnée est de la forme

$$g_c: \zeta \mapsto \rho(c, \alpha(c))\zeta + \beta(c)\zeta^{q+1} + \dots,$$

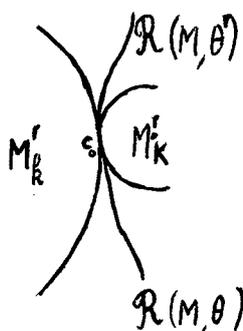
et  $f_c^{kq}$  devient  $g_c^q: \zeta \mapsto (1+u(c))\zeta - b(c)\zeta^{q+1} + \dots$  avec  $u(c_0) = 0$  et  $b(c_0) \neq 0$ . L'équation de  $X_k$  est

$$g_c^q(\zeta) - \zeta = \zeta(u(c) - b(c)\zeta^q + \dots) = 0.$$

Cet ensemble est réunion de  $X_k$  d'équation  $\zeta = 0$  et de  $X'_K$  d'équation  $u(c) = b(c)\zeta^q + \dots$ . Comme  $c \mapsto u(c)$  a un zéro simple en  $c_0$  ([ABP, Cor. 2 du Th. 1]),  $X'_K$  est lisse.

Comme  $b(c_0) \neq 0$ , on a la partie (c). Pour  $(c, z) \in X'_K$ , on a  $\rho_K(c, z) = (g_c^q)'(\zeta) = 1 + u(c) - (q+1) b(c) \zeta^q + \dots - q b(c) \zeta^q + \dots$ , d'où la partie (d). La fonction  $\rho_K$  prend la même valeur aux  $q$  points de  $X'_K$  au-dessus d'un point  $c$  voisin de  $c_0$ . Par suite  $\rho_K : X'_K \rightarrow \mathbb{C}$  se factorise en  $\rho^! \circ \pi$  où  $\rho^!$  est holomorphe sur un voisinage  $W$  de  $c_0$ . Pour  $c \in W$ , on a  $c \in M'_K \iff |\rho_k(c, \alpha(c))| < 1$  ou  $|\rho^!(c)| < 1$ ,  $2^K - (q+1)k$  autres feuilletts donnant de toute façon des points périodiques répulsifs, du moins si on a pris  $W$  assez petit. Puisque  $\pi$  et  $\rho$  ont même degré local,  $\rho^!$  a une dérivée non nulle en  $c_0$ . Ceci donne (e). La partie (f) vient du Cor. 3 du Th. 1 de [ABP], qui donne 2 rayons externes de  $M$  aboutissant en  $c_0$ , l'un dans le secteur des  $\text{Im } u > 0$ , l'autre dans celui des  $\text{Im } u < 0$ , cqfd.

Remarques : 1) On verra dans l'exposé XV que



2) On peut également déduire (e) de [PPIR] III Prop. 6.

3. CAS  $q=1$ .

Soit  $c_0 \in M$  tel que  $f_{c_0}$  admette un point périodique  $\alpha_0$  de période  $k$ , de valeur propre  $\rho_0 = 1$ . Alors  $\alpha_0$  est un point fixe double de  $f_{c_0}^k$  ([PPIR], III, Prop. 6).

- PROPOSITION 3. a)  $X_k$  est lisse en  $(c_0, \alpha_0)$ , à tangente verticale.
- b)  $\pi : X_k \rightarrow \mathbb{C}$  est de degré 2 en ce point.
- c)  $\rho_k : X_k \rightarrow \mathbb{C}$  a une dérivée  $\neq 0$  en ce point.
- d) Au voisinage de  $c_0$ , l'ouvert  $M'_k$  est limité par un arc IR-analytique ayant en  $c_0$  un point de rebroussement.

Démonstration : La partie (a) résulte du Cor. 2 du Th. 1 de [ABP]. La partie (b) du fait que la multiplicité de  $\alpha_0$  comme point fixe de  $f_{c_0}^k$  est 2. La partie (c) vient avec (a). Dans  $X_k$ , l'ouvert  $A_k$  est limité au voisinage de  $(c_0, \alpha_0)$  par une courbe IR-analytique lisse. Comme  $c_0 \in \partial M'_k$  puisque c'est l'aboutissement d'un rayon externe de  $M$ , et comme  $\pi : A_k \rightarrow M'_k$  est injective au voisinage de  $(c_0, \alpha_0)$ , on en déduit (d), cqfd.

#### 4. ARBRE DE HUBBARD EN UNE RACINE.

Soit  $c_0 \in M$  tel que  $f_{c_0}$  admette un point périodique  $\alpha(c_0)$  de période  $k$ , de valeur propre  $\rho_0 = e^{2i\pi p/q}$  avec  $\text{pgcd}(p, q) = 1$ ; on notera  $K = kq$ .

On va définir comme on l'avait fait dans l'exposé [AH] (première partie de ce cours) un arbre associé à  $c_0$ .

Choisissons tout d'abord un système de centres pour les composantes de  $K_{c_0}^0$ ; si  $U_0 \dots U_{K-1}$  est le cycle périodique de composantes de  $K_{c_0}^0$ , indexées par  $\{0, 1, \dots, K-1\}$ , avec  $0 \in U_0$ , on prendra  $f_{c_0}^i(0)$  pour centre de  $U_i$  ( $0 \leq i < K$ ); pour les autres composantes  $V$ , on prend un système de centres de sorte que le centre de  $f_{c_0}(V)$  soit l'image par  $f_{c_0}$  du centre de  $V$ . On posera  $U_K = U_0$ .

DEFINITION. Avec ces conventions, l'arbre de Hubbard  $H_{c_0}$  est l'enveloppe réglementaire des  $f_{c_0}^i(0)$  ( $0 \leq i < K$ ).

Remarque : Si on ignore le théorème de non-errance de Sullivan, le système de centres choisi ci-dessus n'est a priori pas unique. Cependant la structure

combinatoire (classe d'isotopie de plongement d'un arbre dans  $\mathbb{C}$ ) est définie sans ambiguïté.

PROPOSITION 4. Si  $K \neq 1$ ,  $H_{c_0}$  contient le cycle indifférent rationnel, et est stable par  $f_{c_0}$ .

Démonstration : L'image par  $f_{c_0}$  de l'arc réglementaire  $\Gamma$  de  $f_{c_0}^i(0)$  à  $f_{c_0}^j(0)$  (avec  $0 \leq i < K$  et  $0 \leq j < K$ ) est, lorsque  $0 \notin \Gamma$ , l'arc réglementaire de  $f_{c_0}^{i+1}(0)$  à  $f_{c_0}^{j+1}(0)$  et, lorsque  $0 \in \Gamma$ , la réunion de l'arc réglementaire de  $f_{c_0}^{i+1}(0)$  à  $c_0$  et de l'arc réglementaire de  $f_{c_0}^{j+1}(0)$  à  $c_0$ . Si  $\Gamma'$  est l'arc réglementaire de  $0$  à  $f_{c_0}^K(0)$  et  $G = H \cup \Gamma'$ , on a donc  $f_{c_0}(H) \subset G$ . On peut alors réappliquer le raisonnement de la proposition 4 de [AH] pour voir que (si  $K \neq 1$ )  $v(1) \leq \dots \leq v(K-1)$  ( $v(i)$  est le nombre de brins de  $H$  en  $f_{c_0}^i(0)$ ,  $0 \leq i < K$ ) (on n'obtient par contre pas pour l'instant  $v(K-1) \leq v(K)$ ) ; un arbre à plus d'un sommet ayant au moins deux sommets pendants,  $v(1) = 1$ , donc  $H \cap \partial U_1$  est un singleton  $\{\alpha_1\}$ .  $G$  ne rencontre aucun des  $\partial U_i$  ( $0 \leq i < K$ ) donc  $f_{c_0}(H) \subset G$  implique  $f_{c_0}(H \cap \partial U_i) \subset H \cap \partial U_{i+1}$  ( $0 \leq i < K$ ), et donc  $f_{c_0}^K(\alpha_1) = \alpha_1$ .  $\alpha_1$  est donc un point du cycle indifférent rationnel de  $f_{c_0}$ , qui est inclus dans  $H$ . En particulier l'arc de  $0$  à  $\alpha_0$ , point du cycle indifférent rationnel situé sur  $\partial U_0$ , est dans  $H$ . Mais on sait (cf. [PPIR], II, corollaire de la proposition 4) que la dynamique de  $f_{c_0}^K$  sur  $U_0$  est analytiquement conjuguée à celle de  $z \mapsto \frac{3z^2+1}{z^2+z}$  sur  $D$ , donc  $f_{c_0}^K(0)$  est sur l'arc de  $0$  à  $\alpha_0$ , d'où  $\Gamma' \subset H$  et  $f_{c_0}(H) \subset H$ . cqfd.

On pourra dès lors appliquer les résultats des exposés [AH] et [AEJ] à  $c_0$ .

5. RACINES DES COMPOSANTES HYPERBOLIQUES ; MULTIPLICITÉ.

Soit  $c_0 \in M$  tel que  $f_{c_0}$  ait un cycle indifférent d'ordre  $k$ , de valeur propre  $e^{2i\pi p/q}$  avec  $\text{pgcd}(p,q) = 1$ , et posons  $K = kq$ .

PROPOSITION 5. a) Il existe une unique composante hyperbolique  $W$  de  $\overset{\circ}{M}$  tel que  $c_0$  soit une racine de  $W$ . C'est une composante de période  $K$ .

b) Si  $c_0 \neq 1/4$ , le point  $c_0$  a au moins 2 arguments externes dans  $M$ , de la forme  $p/2^{K-1}$ .

Démonstration : La partie (a) résulte des propositions 2 et 3.

(b) Cas  $q \neq 1$  : soient  $U_1$  la composante connexe de  $\overset{\circ}{K}_{c_0}$  contenant  $c_0$ ,  $\alpha_1$  le point du cycle indifférent de  $f_{c_0}$  attirant  $U_1$ . Il y a  $q$  pétales, donc  $q$  interpétales en  $\alpha_1$ , et 2 de ces interpétales sont adjacents à  $U_1$ . Dans chacun d'eux arrive au moins un rayon externe de  $\overset{\circ}{K}_{c_0}$  d'argument de la forme  $p/2^{K-1}$ , et les rayons externes de  $M$  de même argument aboutissent en  $c_0$  ([ABP, Cor. 2 du Th. 1]).

b) Cas  $q = 1$  : il n'y a qu'un pétale en  $\alpha_1$ , donc 1 seul interpétale. Cependant il y a au moins 2 rayons externes de  $\overset{\circ}{K}_{c_0}$  aboutissant en  $\alpha_1$  : en effet  $\alpha_1$  est sur  $H_{c_0}$  sans en être un sommet pendant, donc il y a au moins deux accès à  $\alpha_1$  sur  $H_{c_0}$  et donc, par le corollaire 1 p. 64 de la première partie de ce cours, deux rayons externes de  $\overset{\circ}{K}_{c_0}$  aboutissant en  $\alpha_1$ .

Ces rayons externes ont des arguments de la forme  $p/2^{K-1}$  ([PPIR] II Prop. 5). Les rayons externes de  $M$  de même argument aboutissent en  $c_0$ , cqfd.

Soit  $W$  une composante hyperbolique de  $\overset{\circ}{M}$ , de période  $k$ . Pour  $c \in W$ , notons  $\alpha(c)$  le point périodique attractif de  $f_c$  attirant  $0$ .

PROPOSITION 6. Les nombres suivants sont égaux :

- a) le degré  $\mu$  de l'application holomorphe propre  $\rho_W : W \rightarrow D$ .
- b) Le nombre de zéros dans  $W$  de  $c \mapsto \alpha(c)$ , comptés avec multiplicité.
- c) Le nombre de zéros dans  $W$  de  $c \mapsto f_c^k(0)$ , comptés avec multiplicité.
- d) Le nombre de racines de  $W$  dans  $W$ .

LEMME. Soit  $c_0 \in W$  tel que  $f_{c_0}^k(0) = 0$ . Les fonctions  $c \mapsto f_c^k(0)$ ,  $c \mapsto \alpha(c)$  et  $c \mapsto \rho_W(c) = \rho_k(c, \alpha(c))$  ont même ordre d'annulation en  $c_0$ .

Démonstration : Pour  $c \in W$ , on a  $\rho_W(c) = 2^k \alpha(c) \cdot f_c(\alpha(c)) \dots f_c^{k-1}(\alpha(c))$ , et dans le cycle  $\{\alpha(c), f_c(\alpha(c)), \dots, f_c^{k-1}(\alpha(c))\}$ , seul  $\alpha(c)$  appartient à la composante connexe de  $\overset{0}{K}_c$  contenant 0. Les fonctions  $c \mapsto \alpha(c)$  et  $c \mapsto \rho_W(c)$  ont donc même ordre d'annulation. D'autre part, pour  $c$  voisin de  $c_0$ , on a

$$|f_c^k(0) - \alpha(c)| < \frac{1}{2} |0 - \alpha(c)| = \frac{1}{2} |\alpha(c)|,$$

donc  $c \mapsto f_c^k(0)$  et  $c \mapsto \alpha(c)$  s'annulent en  $c_0$  avec même multiplicité. cqfd.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. Les zéros des fonctions  $c \mapsto \rho_W(c)$ ,  $c \mapsto \alpha(c)$  et  $c \mapsto f_c^k(0)$  sont les mêmes, et d'après le lemme ils ont même multiplicité. Le nombre de zéros de  $c \mapsto \rho_W(c)$ , compté avec multiplicités, est le degré  $\mu$  de  $\rho_W$ . Le bord  $\partial W$  est homéomorphe à  $S^1$  et  $\rho_W : \rho W \rightarrow S^1$  est de degré  $\mu$ . Comme elle est croissante puisque  $\rho_W$  est holomorphe sur  $W$ , le nombre de points dans  $\rho_W^{-1}(1)$  est aussi  $\mu$ , cqfd.

Nous appellerons  $\mu$  la multiplicité de  $W$ . Nous prouverons dans l'exposé "simplicité" que  $\mu = 1$ .

6. DÉCOMPTE. Nous allons démontrer le complément 1 du théorème 1 de [AREMAR].

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Notons

- $m_1(k)$  le nombre de valeurs de  $c$  telles que  $f_c^k(0) = 0$ , compté avec multiplicité.  
 $m_2(k)$  le nombre des composantes hyperboliques de  $\overset{\circ}{M}$  de période divisant  $k$ , compté avec multiplicité.  
 $m_3(k)$  le nombre des racines des composantes hyperboliques de période divisant  $k$ .  
 $m_4(k)$  le nombre des  $t \in \mathbb{T}$  tels que  $2^k t = t$ , i.e. de la forme  $p/2^k - 1$ .

On a  $m_1(k) = m_2(k) = m_3(k)$  d'après la Prop. 5, et  $m_3(k) \geq 2m_4(k) - 1$  d'après la Prop. 4. Mais  $f_c(0) = c$ ,  $f_c^2(0) = c^2 + c$ ,  $f_c^3(0) = (c^2 + c)^2 + c$  etc...  
 $f_c^k(0) = P_k(c)$  où  $P_k$  est un polynôme de degré  $2^{k-1}$  (on le voit par récurrence car  $P_{k+1}(c) = (P_k(c))^2 + c$ ), donc  $m_1(k) = 2^{k-1}$ . D'autre part  $m_4(k) = 2^k - 1$ . Donc on a l'égalité  $m_3(k) = 2m_4(k) - 1$ . Il en résulte d'une part que chaque  $c_0$  racine d'une composante hyperbolique (sauf 1/4) a exactement 2 arguments externes rationnels à dénominateur impair dans  $M$ , d'autre part qu'on obtient ainsi tous les éléments de  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  rationnels à dénominateur impair. Ceci démontre le complément 1 du théorème 1.

EXPOSE N° XV

ORDRE DU CONTACT DES COMPOSANTES HYPERBOLIQUES DE M

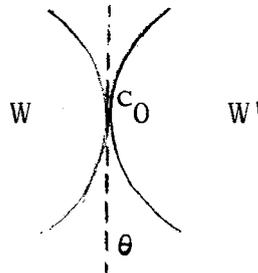
TAN-LEI

Soit  $c_0$  l'intersection des deux composantes hyperboliques  $W$ ,  $W'$  de  $M$  dont l'une est de période  $k$ , l'autre est de période  $kq$ ; alors  $f_{c_0}$  admet un cycle indifférent rationnel avec valeur propre  $e^{2i\pi p/q}$ , de période  $k$ .

PROPOSITION. Le contact de  $W$  et  $W'$  au point  $c_0$  est d'ordre 2.

1. Résumé des résultats déjà obtenus qui sont utiles pour la démonstration de cette proposition.

Soit  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$  le cycle indifférent rationnel de  $f_{c_0}$  dont  $\alpha_1$  est le point attractant  $c_0$ . Soit  $P_1$  le pétale de  $\alpha_1$  qui contient  $c_0$  et  $\mathcal{R}(K_{c_0}, \theta)$  un rayon externe qui aboutit en  $\alpha_1$  dans un interpétale adjacent à  $P_1$ . D'après le théorème A de l'exposé [TV] le rayon externe  $\mathcal{R}(M, \theta)$  aboutit en  $c_0$ .



Comme  $q \neq 1$ , pour tout  $c$  dans un voisinage de  $c_0$ , on peut trouver un  $\alpha(c)$  tel que  $f_c^k(\alpha(c)) = \alpha(c)$  avec  $c \rightarrow \alpha(c)$  analytique et  $\alpha(c_0) = \alpha_1$ .

Posons :  $c(\lambda) = c_0 + \lambda$

$$\rho(\lambda) = (f_{c(\lambda)}^k)(\alpha(c(\lambda))) : \rho(0) = e^{2i\pi p/q}$$

et 
$$\tau(\lambda) = \frac{1}{\rho(\lambda)^{q^2}} - 1 : \tau(0) = 0 ;$$

alors,  $\tau(\lambda)$  a en 0 un zéro simple (de multiplicité 1) ([ABP]), donc  $\lambda \rightarrow \tau(\lambda)$  est un homéomorphisme dans un voisinage de 0.

Pour  $\Delta$  disque centré en  $\alpha(c_0)$  fixé assez petit, on prend  $n_0$  assez grand et  $r^* > 1$  assez voisin de 1 tels que  $x(c_0) = f_{c_0}^{n_0 k q}(c_0)$  et  $y(c_0) = \varphi_{c_0}^{-1}(r^* e^{2i\pi\theta})$  appartiennent à  $\Delta$ . Pour  $c$  voisin de  $c_0$ , posons  $x(c) = f_c^{n_0 k q}(c)$  et  $y(c) = \varphi_c^{-1}(r^* e^{2i\pi\theta})$ . Fixons  $a \in ]0, \frac{1}{2}]$  et notons  $P_a = \{z \mid |\operatorname{Re} z| \leq a, |\operatorname{Im} z| \leq a\}$ . Si on prend  $\Sigma_N = \{U \mid N \operatorname{Log}(1+U) + 2\pi i \in P_a\}$ , on a  $\Sigma_N \subset D_{8/N} - \bar{D}_{4/N}$  quand  $N \geq 8$ .

## 2. DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION.

Pas 1. Pour tout voisinage  $W_{c_0}$  de  $c_0$ , d'après l'exposé [TV], il existe un  $N_0 \geq 0$ , tel que pour tout  $N \geq N_0$ , il existe un  $c_N \in W$  tel que  $f_{c_N}^{Nkq}(\alpha(c_N)) = y(c_N)$  c'est-à-dire  $\forall W$  voisinage de 0,  $\exists N_0 \geq 0$ ,  $\forall N \geq N_0$ , il existe  $\lambda_N \in W$  tel que  $f_{c(\lambda_N)}^{Nkq}(x(c(\lambda_N))) = y(c(\lambda_N))$  et  $\lambda_N$  est dans la pièce  $\sigma_N$  de  $W$  où  $\tau : \sigma_N \rightarrow \Sigma_N$  induit un homéomorphisme (on peut prendre  $W$  assez petit pour que  $\tau(\lambda)$  soit un homéomorphisme sur  $W$ ).

Au voisinage de 0, on peut écrire :  $\tau(\lambda) = a\lambda + o(\lambda^2)$  avec  $|a| \neq 0$ , puisque  $\tau(\lambda)$  a en 0 un zéro simple. Il existe donc un voisinage  $W$  de 0 tel que :  $|\tau(\lambda) - a\lambda| = |o(\lambda^2)| < \epsilon |\lambda|$ ,  $\lambda \in W$ , avec  $0 < \epsilon < |a|$ . Pour ce  $W$ , il existe  $N_1 \geq 0$ , tel que  $\forall N \geq N_1$ ,  $\sigma_N = \tau^{-1}(\Sigma_N) \subset W$ .

$\forall \lambda \in \sigma_N \subset W$ , on a :

$$(|a| - \epsilon)|\lambda| = |a||\lambda| - \epsilon|\lambda| \leq |\tau(\lambda)| \leq |a||\lambda| + \epsilon|\lambda| = (|a| + \epsilon)|\lambda|.$$

Comme  $\frac{4}{N} \leq |\tau(\lambda)| \leq \frac{8}{N}$ , on a :

$$\frac{4}{(|a| + \epsilon)N} \leq |\lambda| \leq \frac{8}{(|a| - \epsilon)N}, \quad \forall \lambda \in \sigma_N.$$

Pas 2. Soit  $U$  un ouvert simplement connexe dans  $C$ .  $\forall x, y \in U$ ,  $a \in U$ , on a l'inégalité :  $|y - x| \leq |x - a| (e^{4d_U(x,y)} - 1)$  où  $d_U(x,y)$  désigne la distance de Poincaré sur  $U$ . Si  $\varphi : U \rightarrow V$  est un isomorphisme entre deux

ouverts simplement connexes, alors :  $d_U(x,y) = d_V(\varphi(x),\varphi(y))$  .

Si  $\varphi : U \rightarrow V$  est une fonction analytique, alors  $\varphi(z)$  est lipschitzien de rapport 1 , i.e.  $d_V(\varphi(x),\varphi(y)) \leq d_U(x,y)$  pour tous  $x, y \in U$  .

L'ouvert  $C - M$  n'est pas simplement connexe, mais si on enlève le rayon externe  $\mathcal{R}(M, \theta')$  , où  $\theta' = \begin{cases} \theta + \frac{1}{2} , & \theta < \frac{1}{2} \\ \theta - \frac{1}{2} , & \theta > \frac{1}{2} \end{cases}$  ,  $C - M - \mathcal{R}(M, \theta') = U$

est ouvert et simplement connexe. Comme  $\mathcal{R}(M, \theta')$  aboutit et ne rencontre pas  $\mathcal{R}(M, \theta)$  ,  $U$  contient  $\mathcal{R}(M, \theta)$  . Si on prend  $V = C - D - \mathcal{R}(D, \theta')$  , alors  $\varphi_M : U \rightarrow V$  est un isomorphisme.

Pour  $N_2 = \max \{N_1, N_0\}$  et  $U_2 = \{z | \operatorname{Re} z > 0, 2\pi\theta - \pi < \operatorname{Im} z < 2\pi\theta + \pi\}$   $\forall N \geq N_2$  , en posant  $c_N = c(\lambda_N)$  , on a :

$$\begin{aligned} d_U(c_N, c_{N+1}) &= d_V(\varphi_M(c_N), \varphi_M(c_{N+1})) \\ &= d_{U_2}(\operatorname{Log} \varphi_M(c_N), \operatorname{Log} \varphi_M(c_{N+1})) \\ &= d_{U_2}(z_N, z_{N+1}) \end{aligned}$$

On peut écrire  $r^* = e^{s_0}$  avec  $s_0 > 0$  .

On a :  $f_{c_N}^{Nkq}(x(c_N)) = \varphi_{c_N}^{-1}(e^{s_0 + 2i\pi\theta})$  ;

donc :  $\varphi_{c_N}^{(N+n_0)kq}(f_{c_N}^{(N+n_0)kq}(c_N)) = e^{s_0 + 2i\pi\theta}$  ;

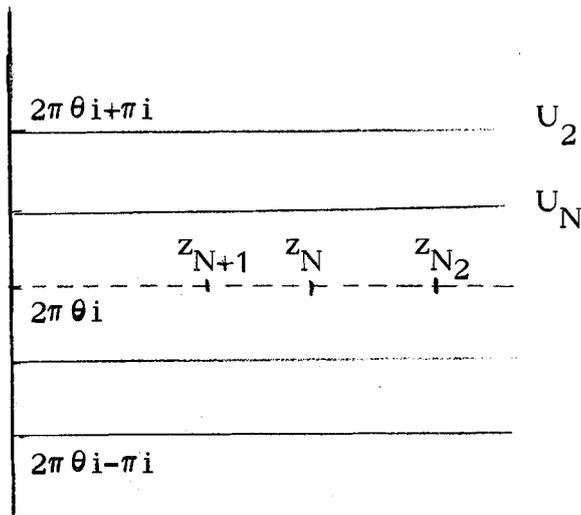
donc :  $[\varphi_{c_N}(c_N)]^{2(N+n_0)kq} = e^{s_0 + 2i\pi\theta}$  ,

et  $\varphi_M(c_N) = \varphi_{c_N}(c_N) = e^{2\frac{s_0}{(N+n_0)kq} + 2i\pi\theta'}$  avec  $2^{(N+n_0)kq}\theta' = \theta$  .

Dans  $K_{c_0}$  ,  $\alpha(c_0) = \alpha_1$  a  $q$  pétales et est fixé par  $f_{c_0}^k$  , donc  $2^{kq\theta} = \theta$  , et on a vu dans [ABP] que, en fait,  $\theta' = \theta$  . Par suite,

$$\varphi_M(c_N) = e^{s_N + 2i\pi\theta} \quad \text{où } s_N = \frac{s_0}{2^{(N+n_0)kq}} ,$$

donc  $c_N$  est dans le rayon externe  $\mathcal{R}(M, \theta)$  et  $c_N \rightarrow c_0$  quand  $N \rightarrow +\infty$  . On en déduit :  $d_U(c_N, c_{N+1}) = d_{U_2}(s_N + 2i\pi\theta, s_{N+1} + 2i\pi\theta)$  .



Pour chaque  $N \geq N_2$ , on prend  $\varphi_N(z) = 2i\pi\theta + \frac{1}{2^{(N-N_2)kq}} (z - 2i\pi\theta)$ ,  
 c'est un isomorphisme qui envoie  $z_{N_2}$  à  $z_N$  et qui envoie  $U_2$  à  $U_N$  avec  $U_N$   
 de la forme :

$$U_N = \{z \mid \operatorname{Re} z > 0, |\operatorname{Im} z - 2\pi\theta| < \epsilon(N)\}, \quad \epsilon(N) = \frac{\pi}{2^{(N-N_2)}},$$

$$\epsilon(N) < \epsilon(N-1) < \dots < \epsilon(N_2) = \pi.$$

L'injection  $U_N \hookrightarrow U_{N+1}$  est une fonction analytique et donc est un  
 lipschitzien de rapport 1 ; on a :

$$d_{U_2}(z_N, z_{N+1}) \leq d_{U_N}(z_N, z_{N+1}) = d_{U_2}(z_{N_2}, z_{N_2+1}) = \text{constante } A.$$

Enfin,

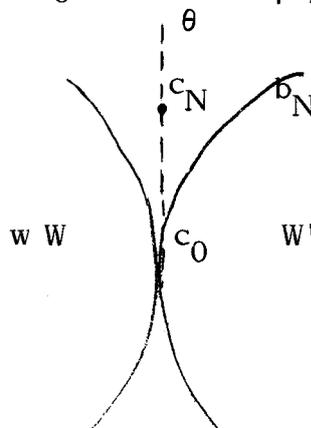
$$d_U(c_N, c_{N+1}) = d_{\mathbf{C}-M-\mathcal{R}(M, \theta')}(c_N, c_{N+1}) = d_{U_2}(z_N, z_{N+1}) \leq A.$$

Pour  $b_N \in \partial W \cup \partial W'$ ,

$$|c_N - c_{N+1}| \leq |c_N - b_N| (e^{4d_U(c_N, c_{N+1})} + 1) \leq B_1 |c_N - b_N|$$

$B_1$  est une constante.

Pas 3. Supposons que le contact de  $W$  et  $W'$  au point  $c_0$  est de degré supé-  
 rieur ou égal à 4, alors pour  $N_3$  assez grand et  $N \geq N_3$ , il existe  
 $b_N \in \partial W \cup \partial W'$  tel que  $|c_N - b_N| \leq B_2 |c_N - c_0|^4$  ; donc, quand  $N \geq N_3$ ,  
 on a  $|c_N - c_{N+1}| \leq B |c_N - c_0|^4$  où  $B = B_1 B_2$ .



Pour  $k \geq N_3$ , on a :

$$|c_k - c_0| \leq \sum_{N=k}^{\infty} |c_k - c_{k+1}| \leq B \sum_{N=k}^{\infty} |c_N - c_0|^4 .$$

Comme  $c_N - c_0 = \lambda_N \in \sigma_N$ , d'après le pas 1, il existe deux constantes positives  $a_1$  et  $a_2$  telles que :  $\frac{a_1}{N} \leq |\lambda_N| \leq \frac{a_2}{N}$ , donc :

$$\frac{a_1}{k} \leq |\lambda_k| = |c_k - c_0| \leq B \sum_{N=k}^{\infty} |\lambda_N|^4 = B a_2^4 \sum_{N=k}^{\infty} \frac{1}{N^4}, \quad \forall k \geq N_3 .$$

Ceci veut dire :

$$0 < \frac{a_1}{B a_2^4} \leq \sum_{N=k}^{\infty} \frac{k}{N^4} < \sum_{N=k}^{\infty} \frac{N}{N^4} = \sum_{N=k}^{\infty} \frac{1}{N^3}, \quad \forall k \geq N .$$

Contradiction, car  $\sum \frac{1}{N^3}$  converge. Cqfd.

EXPOSE N° XVI

IDENTIFICATIONS DE CYLINDRES : ETUDE A LA LIMITE

P. LAVAURS

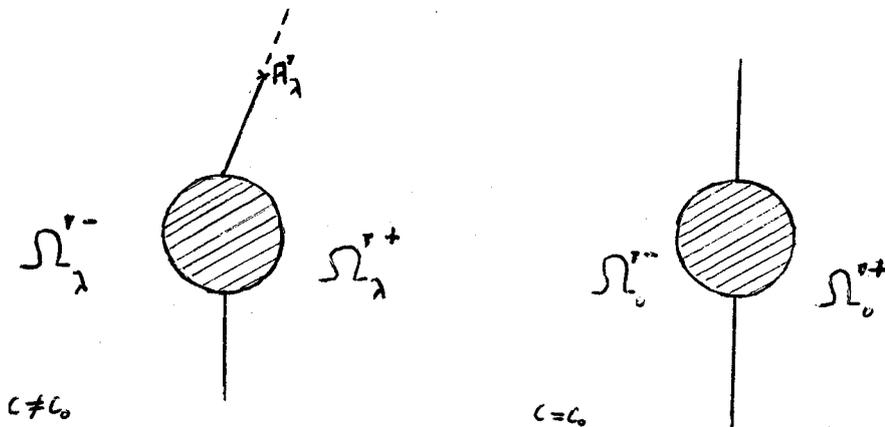
1. NOTATIONS ET POSITION DU PROBLEME.

On se place dans le même cadre que dans "Arriver au bon port" :  
 $f_{c_0} : z \mapsto z^2 + c_0$  a un cycle indifférent rationnel de valeur propre  $e^{2i\pi p/q}$   
 et de période  $k$ ,  $\alpha_1$  est un point du cycle indifférent.

Dans "Arriver au bon port", on a construit, pour  $c$  proche de  $c_0$ ,  
 $q$  cylindres de Fatou-Ecalles ( $2q$  pour  $c = c_0$ ) sous réserve que  $c$  tende  
 vers  $c_0$  en étant astreint à rester dans un certain secteur.

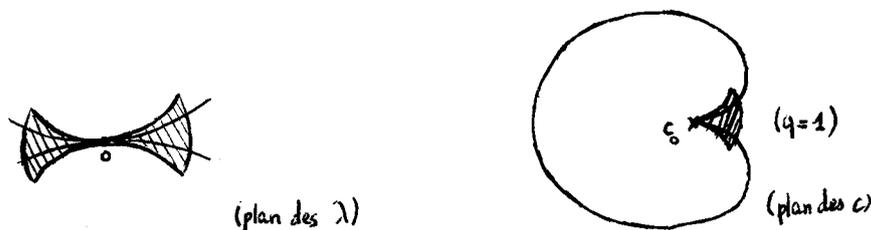
On va modifier légèrement, pour des raisons techniques, la définition  
 des cylindres (sans que cela ne change les cylindres eux-mêmes !) et la zone  
 dans laquelle évolue  $c$  voisin de  $c_0$ .

Au lieu de définir  $\Omega'_\lambda$  comme on l'a fait dans [ABP.3], on le définit  
 en retirant à  $\mathbb{C}$  seulement  $\bar{D}_R$ , le segment de  $A'_\lambda$  à  $iR$  (si  $\text{Im } A'_\lambda > 0$  ;  
 le segment de  $A'_\lambda$  à  $-iR$  sinon) et la demi-droite  $\text{Re } Z = 0$ ,  $\text{Im } Z \leq -R$   
 (si  $\text{Im } A'_\lambda > 0$  ;  $\text{Im } Z > R$  sinon). En prolongeant le segment de  $iR$  (ou  $-iR$ )  
 à  $A'_\lambda$  jusqu'à l'infini, on partitionne  $\Omega'_\lambda$  en  $\Omega_{\lambda'}^{r+}$  et  $\Omega_{\lambda'}^{r-}$ . Enfin, pour  $c = c_0$ , on  
 coupe par les demi-droites  $\text{Re } Z = 0$ ,  $\text{Im } Z \leq -R$  et  $\text{Im } Z \geq R$ .



Les inégalités de [ABP] montrent que les points rajoutés à  $\Omega'_\lambda$  ( $\Omega_0'^+, \Omega_0'^-$ ) sont équivalents à des points des "anciens" ouverts : ce changement des zones quotientées ne modifie donc pas les cylindres-quotients.

Dans [ABP], on s'était astreint à faire tendre  $\lambda$  vers 0 avec  $|\text{Arg } A_\lambda \pm 1/4| \leq \frac{1}{12}$ , ce qui revient, puisque  $\frac{1}{A_\lambda}$  est analytique en  $\lambda$ , à restreindre à des secteurs angulaires privilégiés autour des 2 directions de demi-droites dans le plan des  $\lambda$  correspondant dans le plan des  $c$  aux demi-tangentes, droites aux deux composantes hyperboliques de  $M$  tangentes en  $c_0$  (à la demi-droite pour  $q = 1$ ). Ici, au lieu de faire tendre  $\lambda$  vers 0 dans un secteur angulaire, on le fera tendre entre deux cercles tangents en 0 à la demi-droite privilégiée :

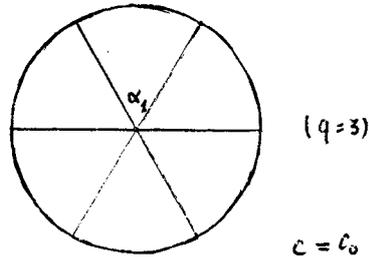


Cette restriction est suffisante pour les applications, car elle laisse  $c$  parcourir tout l'extérieur de  $M$  tendant vers  $c_0$ . Elle a l'avantage suivant : puisque  $\frac{1}{A_\lambda}$  et  $\frac{1}{A'_\lambda}$  sont analytiques en  $\lambda$ , elle impose à  $A_\lambda$  comme à  $A'_\lambda$  de rester entre deux droites  $\text{Re } Z = -K$ ,  $\text{Re } Z = +K$ . De ce fait,  $\{(\lambda, Z) | Z \in \Omega_\lambda'^-\}$  et  $\{(\lambda, Z) | Z \in \Omega_\lambda'^+\}$  sont des ouverts de  $V \times C$  ( $V$  désignant la zone où évolue  $\lambda$ ) : si un point est dans  $\Omega_0'^-$  (resp.  $\Omega_0'^+$ ), il est dans  $\Omega_\lambda'^-$  (resp.  $\Omega_\lambda'^+$ ) pour  $\lambda$  assez proche de 0.

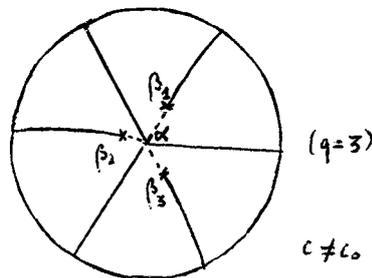
Pour fixer les notations, nous supposons que nous avons choisi dans le plan des  $\lambda$  de rester autour d'une demi-droite correspondant à  $\text{Im } A_\lambda > 0$  (et donc aussi  $\text{Im } A'_\lambda > 0$ ).

Regardons ce que ces motifs fournissent dans le plan des  $z$  :

Pour  $c = c_0$ , les  $2q$  cylindres sont les quotients de  $2q$  secteurs angulaires égaux dans un disque centré en  $\alpha_1$ .



Pour  $c$  voisin de  $c_0$ ,  $\partial D_R$  correspond à un cercle "proche" du précédent ;  $\alpha_1$  se "scinde" en un  $\alpha(c)$  fixe par  $f_c^k$  et un cycle  $\beta_1(c), \dots, \beta_q(c)$  pour  $f_c^k$ ,  $\alpha$  et les  $\beta_i$  étant continues en  $c$  (dans la zone désormais notée  $\Theta$  à laquelle on a restreint  $c$ ).  $\alpha$  correspond à  $\infty$  dans le plan des  $Z$ ,  $\beta_1$  (par exemple) à  $A_\lambda^1$ . On a  $q$  cylindres seulement. Cependant, si on représente aussi (en pointillés sur le schéma ci-dessous) les courbes limitant, quand on les transforme dans le plan des  $Z$ , les  $\Omega_\lambda^{1+}$  des  $\Omega_\lambda^{1-}$ , on voit qu'on peut considérer aussi qu'on a, comme pour  $c = c_0$ ,  $2q$  cylindres qui s'identifient naturellement deux à deux.



Nous allons étudier le cylindre autour de  $\beta_1(c)$ , qui devient donc deux quand  $c$  devient  $c_0$ .

Les zones correspondant à  $\Omega_\lambda^1$  ( $\Omega_\lambda^{1+}, \Omega_\lambda^{1-}$ ) dans le plan des  $z$  seront notés  $U(c)$  ( $U^+(c), U^-(c)$ ).

$u^+ = \{(c, z) / z \in U^+(c)\}$  (resp.  $u^-$ ) sont des ouverts de  $\Theta \times C$ .

Le cylindre  $U(c)/f_c^{kq}$  sera noté  $E(c)$  comme dans [ABP].

Pour  $c = c_0$ , on a un  $E^+(c_0)$  et un  $E^-(c_0)$ ; la zone fournissant  $E^-(c_0)$  est entièrement incluse dans une composante de  $\overset{\circ}{K}_{c_0}$ , celle fournissant  $E^+(c_0)$  contient un interpétale.

La "courbe de sortie" sera la courbe  $\partial U \cap \partial U^+$ .

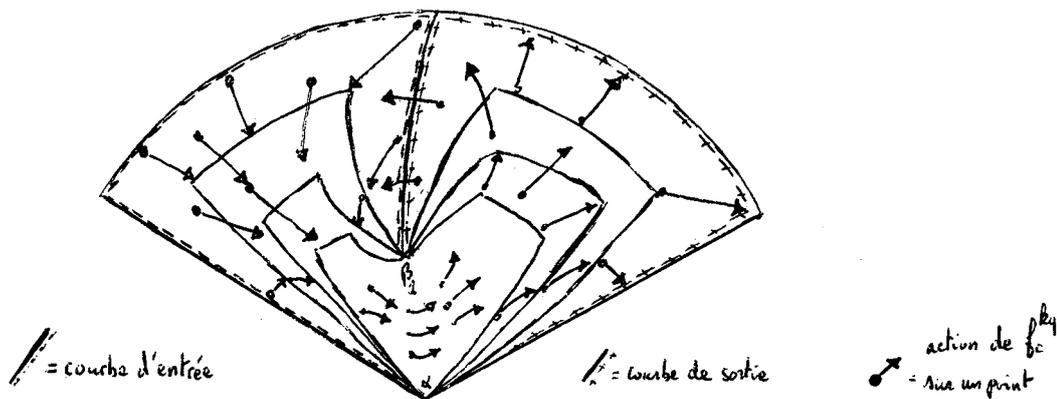
La "courbe d'entrée" sera la courbe  $\partial U \cap \partial U^-$ .

Elles joignent toutes deux  $\alpha$  à  $\beta_1$ .

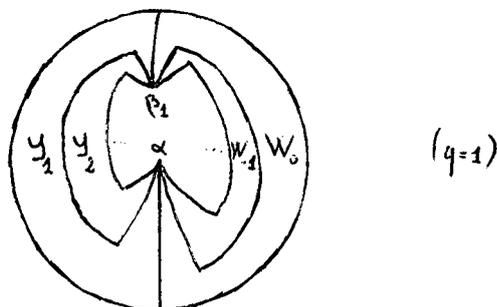
Le "domaine fondamental de sortie"  $W_0$  dans  $U^+$  sera limité par la courbe de sortie et son image réciproque par  $f_c^{kq}$  dans  $U^+$ . De même, le

"domaine fondamental d'entrée"  $Y_1$  dans  $U^-$  sera limité par la courbe d'entrée et son image par  $f_c^{kq}$ .

Le schéma ci-dessous symbolise la dynamique de  $f_c^{kq}$  dans  $U$  :



$W_0$  et  $Y_1$  sont des domaines fondamentaux des cylindres (identifiés pour  $c \neq c_0$ ) de  $f_c$  au voisinage de  $\alpha_1$  (conventionnellement, nous considérerons que ni  $W_0$  ni  $Y_1$  ne contiennent les points  $\alpha$  et  $\beta_1$  et contiennent la courbe d'entrée pour  $Y_1$  et la courbe de sortie pour  $W_0$ ).

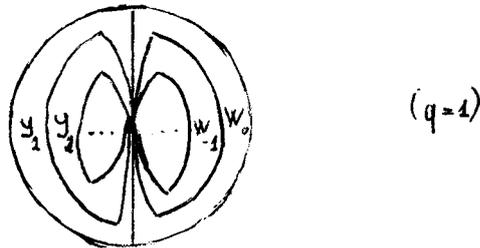


Pour  $i \geq 0$ , la zone  $Y_{i+1}$  sera définie comme  $(f_c^{kq})^i(Y_1)$ .

Pour des  $i < 0$  pas trop petits, on va définir par récurrence un  $W_i$ .

Supposons  $W_{i+1}$  défini comme une partie de  $U$  limitée par deux courbes envoyées l'une sur l'autre par  $f_c^{kq}$ ;  $W_{i+1}$  ne contient alors pas de valeur critique de  $f_c^{kq}$ : on peut définir la détermination de  $(f_c^{kq})^{-1}$  sur  $W_{i+1}$  qui envoie l'une des deux courbes qui le borne sur l'autre; l'image de cette détermination sera  $W_i$  sous réserve qu'elle soit incluse dans  $U$ .

Les inégalités de [ABP] prouvent que  $W_i$  est défini pour  $|i| \leq \frac{0,8|A|}{\pi}$ , donc sur une partie de  $\mathbf{Z}$  qui tend vers  $\mathbf{Z}^-$  quand  $c \rightarrow c_0$ .



Prenons un point marqué  $P^+$  dans  $U^+(c_0)$  et un  $P^-$  dans  $U^-(c_0)$ :

pour  $c$  proche de  $c_0$ , ils sont tous deux dans  $U(c)$ ; ils fournissent donc un point  $\tilde{P}^-(c)$  et un point  $\tilde{P}^+(c)$  dans  $E(c)$  (dans  $E^-(c_0)$  et  $E^+(c_0)$  pour  $c = c_0$ ).

Tous les cylindres  $E^+$  et  $E^-$  peuvent avoir leurs extrémités indexées de façon naturelle: l'une correspond au voisinage de  $\infty$  dans le plan des  $Z$ , l'autre de  $A_\lambda^1$ ; sur le domaine fondamental  $W_0$  ou  $Y_1$ , cela correspond d'un côté au voisinage de  $\alpha$ , de l'autre au voisinage de  $\beta_1$ . Quand  $c$  devient  $c_0$ ,  $\alpha$  et  $\beta_1$  se confondent, mais dans le domaine fondamental correspondant à  $W_0$  ou  $Y_1$  dans le plan des  $Z$ , le bout qui correspondait au voisinage de  $\beta_1$  est représenté par  $\text{Im } Z > 0$ , l'autre par  $\text{Im } Z < 0$ . On peut donc parler, même pour  $c = c_0$ , de "bout en  $\beta_1$ " et de "bout en  $\alpha$ " du cylindre.

Le point marqué et le marquage des bouts du cylindre fournissent alors une identification de  $E^+$  à  $\mathbb{C}^*$  en envoyant  $\tilde{P}^+$  sur 1 et le "bout en  $\beta_1$ " sur le "bout en zéro". De même, on identifiera  $E^-$  à  $\mathbb{C}^*$ .

Il peut être pratique de préférer modéliser les cylindres par  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$  plutôt que par  $\mathbb{C}^*$ . Dans ce modèle,  $\tilde{P}$  est identifié à 0, le "bout en  $\beta_1$ " au bout en "Im  $z < 0$ ".  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{C}^*$  étant identifiables par  $z \mapsto \exp(-2i\pi z)$ , il sera aisé de transcrire les résultats, que nous montrerons dans le "modèle  $\mathbb{C}^*$ ", dans le "modèle  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ ".

Pour  $c \neq c_0$ ,  $E^+$  et  $E^-$  sont en fait le même cylindre qu'on a identifié par deux isomorphismes différents  $\varphi^+$  et  $\varphi^-$  à  $\mathbb{C}^*$ ;  $\varphi^+ \circ (\varphi^-)^{-1}$  fournit alors un isomorphisme de  $\mathbb{C}^*$  sur  $\mathbb{C}^*$  qui respecte la position de 0 et donc de la forme  $z \mapsto G(c).z$ , pour un  $G(c) \in \mathbb{C}^*$ .

$G(c)$  recèle sous forme concise l'information sur la dynamique de  $f_c^{kq}$  entre la courbe d'entrée et la courbe de sortie : partant d'un point de  $Y_1$ , en itérant un grand nombre de fois, on arrive en  $W_0$ . Il risque dès lors d'être difficile de contrôler la stabilité de divers phénomènes au cours de tant d'itérations. Mais, si on regarde  $E^-(c) = Y_1/f_c^{kq}$  et  $E^+(c) = W_0/f_c^{kq}$ , la connaissance de  $G(c)$  fournit le passage "direct" de l'un à l'autre.

Puisqu'il n'y a pas d'identification naturelle entre  $E^-(c_0)$  et  $E^+(c_0)$ , on doit s'attendre à ce que  $G(c)$  n'ait pas de limite quand  $c$  tend vers  $c_0$ . On va en donner un développement limité. L'objet de cet exposé est de prouver le

**THEOREME 1.** Quand  $c$  tend vers  $c_0$ , assujetti à rester dans  $\Theta$ ,  $\lambda$  étant la coordonnée définie dans [TV] (i.e.  $c = c_0 + \lambda$  si  $q \neq 1$ ,  $c = c_0 + \lambda^2$  si  $q = 1$ ), on a :

$$G(c) = \exp\left(g_0 + \frac{k}{\lambda} + o(1)\right) .$$

**COMPLEMENT.**  $\rho_1(\lambda)$  désignant la valeur propre du cycle de  $f_c^{kq}$  issu de  $\beta_1(c)$ ,  $k = \frac{4\pi^2}{\rho_1^2(0)}$ ; ainsi  $\frac{k}{\lambda}$  évolue dans une bande autour de l'axe imaginaire pur positif.

**Remarque.** On a ici énoncé le théorème en prenant pour modèle  $\mathbb{C}^*$ . Si on préfère travailler en termes de  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ , la multiplication par  $G$  est remplacée

par la translation identifiée à un élément  $G$  de  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ , et le développement limité devient :  $G(c) = G_0 + \frac{k}{\lambda} + o(1) \pmod{\mathbb{Z}}$ , où ici  $k = \frac{2i\pi}{\rho_1'(0)}$  est tel que  $\frac{k}{\lambda}$  évolue dans une bande autour de l'axe réel négatif.

Exemple.  $c_0 = \frac{1}{4}$ , les points fixes de  $f_c$  pour  $c$  proche de  $c_0$  sont  $\frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}$ .

Prenons  $\lambda$  proche de l'axe réel positif. Pour avoir  $\text{Im } A_\lambda' > 0$ , on doit choisir  $\alpha = \frac{1+i\lambda}{2}$  et  $\beta = \frac{1-i\lambda}{2}$ ; donc  $\rho_1'(0) = -i$  et  $G(c) = \exp[g_0 + \frac{4\pi^2}{\lambda} i + o(1)]$  ou, dans le modèle  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ ,  $G(c) = G_0 - \frac{2\pi}{\lambda} + o(1)$ .

## 2. CONTINUITÉ DE LA PROJECTION SUR $E$ .

Le choix d'un point de base nous a permis d'identifier tous les  $E^-$  (resp.  $E^+$ ) à  $\mathbb{C}^*$ . On a alors la :

PROPOSITION 1. L'application  $\pi^+ : u^+ \rightarrow \mathbb{C}^*$  (resp.  $\pi^- : u^- \rightarrow \mathbb{C}^*$ ) qui à  $(c, z)$  associe la projection de  $z$  sur  $E^+(c)$  (resp.  $E^-(c)$ ) identifié à  $\mathbb{C}^*$  est continue.

Remarque. Ce que cette proposition exprime (et c'est en ces termes que nous la rappellerons quand nous l'utiliserons), c'est qu'un dessin-limite dans le plan fournit un dessin-limite sur les cylindres.

### Démonstration.

LEMME. Soit  $C_R$  la couronne comprise entre les cercles  $|s| = \frac{1}{R}$  et  $|z| = R$ , avec  $R > e^{2\pi}$ , et soit  $h$  univalente de  $C_R$  dans  $\mathbb{C}^*$  de sorte que l'image de  $C_R$  englobe 0, du même côté que  $C_R$ , avec  $h(1) = 1$ .

Alors, pour  $u \in C_R$ , on a une inégalité  $|h(u) - u| \leq f(u, R)$  où, quand  $u$  varie dans un compact  $K$  de  $\mathbb{C}^*$  et  $R$  tend vers l'infini (donc  $K \subset C_R$  pour  $R$  assez grand),  $f(u, R)$  tend vers zéro uniformément sur  $K$ .

Preuve du lemme. Soit d'abord  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  univalente avec  $f(0) = 0$  et  $f(a) = a$  (pour un  $a \in ]0, 1[$ ). Alors, pour  $|z| \leq r$ , on a une détermination de  $\text{Log} \frac{f(z)}{z}$  qui vérifie :

$$\left| \text{Log} \frac{f(z)}{z} \right| \leq 2 \left| \text{Log} (1-r)(1-a) \right| .$$

En effet, pour  $g : D \rightarrow \mathbb{C}$  univalente avec  $g(0) = 0$  et  $g'(0) = 1$ , on a pour tout  $z \in D$  (cf. [G], p. 117, inégalité (19)) :

$$(1) \quad \left| \text{Log} \frac{g(z)}{z} + \text{Log} (1 - |z|^2) \right| \leq \text{Log} \frac{1 + |z|}{1 - |z|} ,$$

où  $\text{Log} \frac{g(z)}{z}$  est la détermination continue sur  $D$  qui vaut 0 en 0 .

Prenons  $g(z) = \frac{f(z)}{f'(0)}$ . - En appliquant (1) à  $z = a$ , on trouve

$$\left| \text{Log} f'(0) \right| \leq 2 \left| \text{Log} (1-a) \right| \quad \text{pour une détermination bien choisie de } \text{Log} f'(0) ;$$

- En appliquant (1) en  $z$ , on trouve alors une

détermination de  $\text{Log} \frac{f(z)}{z}$  telle que :

$$\left| \text{Log} \frac{f(z)}{z} - \text{Log} f'(0) \right| \leq 2 \left| \text{Log} (1 - |z|) \right| \leq 2 \left| \text{Log} (1-r) \right| ;$$

donc que  $\left| \text{Log} \frac{f(z)}{z} \right| \leq 2 \left| \text{Log} (1-r)(1-a) \right| .$

On va prouver que, pour  $\exp(\sqrt{\text{Log}^2 R - \pi^2})^{-1} \leq |u| \leq \exp(\sqrt{\text{Log}^2 R - \pi^2})$ ,

il y a une détermination de  $\text{Log} h(u)$  telle que,  $\text{Log} u$  étant la détermination principale ,

$$\left| \frac{\text{Log} h(u)}{\text{Log} u} \right| \leq \left(1 - \frac{2\pi}{\text{Log} R}\right)^{-2} \left(1 - \frac{\sqrt{\text{Log}^2 |u| + \pi^2}}{\text{Log} R}\right)^{-2} ,$$

ce qui fournit bien une inégalité de la forme cherchée. On pourrait sans aucun doute raffiner considérablement cette inégalité : la démonstration qui suit utilise en effet très peu d'informations par rapport à ce que peut nous apporter la situation. Cependant cette inégalité nous suffira ici.

$h$  fournit par passage aux logarithmes une application univalente  $g$  de la bande  $-\text{Log} R \leq \text{Im} z \leq \text{Log} R$  dans  $\mathbb{C}$  ; on peut supposer  $h(0) = 0$  : vu

l'hypothèse sur la position relative de zéro et de  $h(C_R)$ , on a  $g(2i\pi) = 2i\pi$  .

Considérons alors l'application  $f : z \mapsto \frac{g(zi \text{Log} R)}{\text{Log} R}$  univalente de  $D$  dans  $\mathbb{C}$  .

On a  $f(0) = 0$  et  $f(\frac{2\pi}{\text{Log } R}) = \frac{2\pi}{\text{Log } R}$ . Les bornes entre lesquelles on laisse varier  $u$  ont été choisies de telle sorte que la détermination principale de  $\text{Log } u$  soit assez petite en module pour qu'on puisse majorer  $\frac{|\text{Log } u|}{\text{Log } R}$  par  $r = \frac{\sqrt{\text{Log}^2 |u| + \pi^2}}{\text{Log } R} \leq 1$ , donc que  $\frac{\text{Log } u}{\text{Log } R} \in D$ . Ce qui précède assure alors l'existence d'une détermination de

$$\text{Log} \frac{f(\frac{\text{Log } u}{i\text{Log } R})}{(\frac{\text{Log } u}{i\text{Log } R})} = \text{Log} \frac{g(\text{Log } u)}{\text{Log } u} = \text{Log} \left( \frac{\text{Log } h(u)}{\text{Log } u} \right)$$

pour une détermination de  $\text{Log } h(u)$ , qui est telle que :

$$\text{Log} \left( \frac{\text{Log } h(u)}{\text{Log } u} \right) \leq 2 \left| \text{Log} \left( 1 - \frac{2\pi}{\text{Log } R} \right) \left( 1 - \frac{\sqrt{\text{Log}^2 |u| + \pi^2}}{\text{Log } R} \right) \right| ;$$

d'où 
$$\frac{\text{Log } h(u)}{\text{Log } u} \leq \left( 1 - \frac{2\pi}{\text{Log } R} \right)^{-2} \left( 1 - \frac{\sqrt{\text{Log}^2 |u| + \pi^2}}{\text{Log } R} \right)^{-2} . \quad \text{Cqfd.}$$

Preuve de la proposition. On va montrer la continuité de  $\pi^-$  en un point  $(c_1, z_1)$  de  $u^-$  (pour  $\pi^+$ , il faudrait simplement remplacer  $Y_i$  par  $W_i$  dans la démonstration ci-dessous ; pour alléger les notations, les indices - de  $\pi^-$  et  $E(c)^-$  seront omis dans cette preuve).

On prend  $i$  tel que  $z_1 \in Y_i(c_1)$ .

Si  $z_1$  n'est pas sur le bord de  $Y_i(c_1)$ , pour  $(c, z)$  assez proche de  $(c_1, z_1)$ ,  $z \in Y_i(c)$ .

S'il est sur le bord de  $Y_i$ , cela ne pose pas de problème essentiel : en augmentant légèrement  $R$  dans la construction de  $[ABP]$ , les cylindres ne sont pas modifiés, mais  $Y_i$  est légèrement décalée, ce qui ramène au cas  $z_1 \in \overset{\circ}{Y}_i(c_1)$ , ce qu'on supposera dorénavant.

Pour  $r > 0$ , on va définir  $Y_i^{(r)}(c) \subset Y_i(c)$  : on prend sur celle des deux courbes limitant  $Y_i(c)$  envoyée sur l'autre par  $f_c^{kq}$  les points sis à distance  $r$  de  $\alpha$  et  $\beta_1$  sur les morceaux de courbe aboutissant en ces points, et on tronque  $Y_i(c)$  par les segments joignant ces points à leurs images :



$Y_i^{(r)}(c)/f_c^{kq}$  est alors un cylindre  $E^{(r)}(c)$  de module fini.

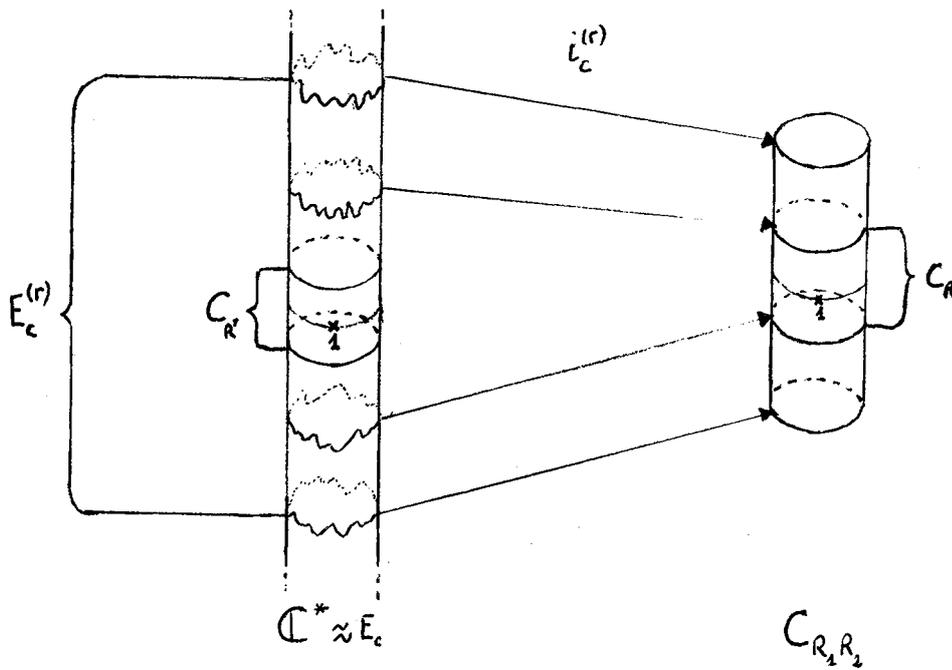
Sur chaque  $Y_i(c)$ ,  $\tilde{P}^+(c)$  fournit un point marqué, qui est donc dans  $Y_i^{(r)}(c)$  pour  $r$  assez petit (il varie continûment avec  $c$  puisqu'image par  $f_c^{kqi}$  d'un point fixe du plan des  $z$ ). Il y a alors une manière unique d'identifier conformément  $E^{(r)}(c)$  à un anneau  $C_{R_1 R_2}$  de la forme  $R_1 < |z| < R_2$  dans  $\mathbb{C}^*$  en envoyant le point marqué en  $1$ , et respectant la position par rapport à zéro de  $E^{(r)}(c)$  plongé dans  $E(c)$  identifié à  $\mathbb{C}^*$ . On notera  $i_c^{(r)}$  l'isomorphisme entre  $E^{(r)}(c)$ , considéré comme une partie de  $\mathbb{C}^*$  et  $C_{R_1 R_2}$ .

Il est évident que  $R_2/R_1$ , module de  $E^{(r)}(c)$ , tend vers  $\infty$  quand  $r$  tend vers zéro ; il l'est un peu moins que  $R_2$  tend vers  $\infty$  et que  $R_1$  tend vers zéro.

C'est une conséquence du problème extrémal de Teichmüller (cf. [AHL], p. 35-37) : pour  $r$  assez petit,  $E^{(r)}(c)$  contient un anneau  $C_R$  symétrique par rapport au cercle unité de module  $2M$  arbitrairement grand.

$i_c^{(r)}$  transporte alors le cercle-unité en une courbe passant par  $1$  : l'anneau limité par cette courbe et le cercle  $|z| = R_2$  est donc de module plus grand que  $M$ . Le problème extrémal de Teichmüller garantit (avec les notations de [AHL] que  $M \leq \frac{1}{2\pi} \text{Log } \psi(R_2) \leq \frac{1}{2\pi} \text{Log } [16(R_2 + 1)]$  (cf. [AHL], p. 47) ; donc  $R_2$  peut être rendu arbitrairement grand. De même,  $R_1$  tend vers zéro avec  $r$ .

On a donc obtenu la garantie que, pour  $r$  assez petit,  $C_{R_1 R_2}$  contient la couronne  $C_R$  pour un  $R$  fixé. Par le même raisonnement appliqué à  $i_c^{(r)-1}(C_R)$ , pour  $R$  assez grand,  $i_c^{(r)-1}(C_R)$  contient  $C_{R'}$  pour un  $R'$  fixé.



On peut envoyer  $\overline{Y_i^{(r)}(c)}$  sur  $\overline{Y_i^{(r)}(c_1)}$  par un morphisme  $\Phi_{(c,c_1)}^{(r)}$  de classe  $C^1$  qui commute avec la dynamique de  $f_c^k$  sur les courbes qui limitent  $\overline{Y_i^{(r)}(c)}$  et  $\overline{Y_i^{(r)}(c_1)}$ , envoie le point marqué sur le point marqué et tend vers Id en norme  $C^1$  quand  $c$  tend vers  $c_1$ .

$\Phi_{(c,c_1)}^{(r)}$  induit une application  $\tilde{\Phi}_{(c,c_1)}^{(r)}$  de  $E_c^{(r)}$  sur  $E_{c_1}^{(r)}$  qui laisse 1 fixe et est quasi-conforme de rapport de dilatation tendant vers 1.

$i_{(c_1)}^{(r)} \circ \tilde{\Phi}_{(c,c_1)}^{(r)} \circ i_{(c)}^{(r)-1}$  est alors une application entre deux "vraies" couronnes, qui fixe 1, et qui est quasi-conforme de dilatation qui tend vers 1.

Elle tend donc vers l'identité uniformément sur tout compact.

Dès lors, si  $\pi^{(r)}(c,z)$  désigne  $i_c^{(r)} \circ \pi(c,z)$  pour  $z \in Y_i^{(r)}(c)$ ,  $\pi^{(r)}(c,z)$  tend vers  $\pi^{(r)}(c_1, z_1)$  quand  $(c,z)$  tend vers  $(c_1, z_1)$ .

Soit alors  $\epsilon > 0$  fixé. On prend un  $R'$  assez grand pour que  $\pi(c_1, z_1) \in C_{R'}$ . On prend alors  $R_1$  assez grand pour que, si  $C_{R_1} \subset i_c^{(r)}(E^{(r)}(c))$ , on ait  $C_{R'} \subset i_c^{(r)-1}(C_{R_1})$ . Puis, on prend  $R_2$  assez grand pour que, pour  $v \in \overline{C_{R_1}}$ ,  $f(v, R_2) < \epsilon/3$ . Enfin, on prend  $r$  assez petit pour que  $i_{c_1}^{(r)}(E^{(r)}(c_1))$  (et donc aussi  $i_c^{(r)}(E^{(r)}(c))$  pour  $c$  assez proche de  $c_1$ ) contienne  $C_{R_2}$ .

Puisque  $\pi(c_1, z_1) \in C_{R_1} \subset i_{c_1}^{(r)-1}(C_{R_1})$ ,  $\pi^{(r)}(c_1, z_1) \in C_{R_1}$ .

Appliquons le lemme à  $i_{c_1}^{(r)-1}$  sur  $C_{R_2}$  : on obtient

$$|\pi(c_1, z_1) - \pi^{(r)}(c_1, z_1)| < \epsilon/3 .$$

Pour  $(c, z)$  assez proche de  $(c_1, z_1)$ , on a alors :  $|\pi^{(r)}(c_1, z_1) - \pi^{(r)}(c, z)| < \epsilon/3$  et  $\pi^{(r)}(c, z)$  est toujours dans  $C_{R_1}$ .

En appliquant le lemme à  $i_c^{(r)-1}$ , on a :  $|\pi(c, z) - \pi^{(r)}(c, z)| < \epsilon/3$ .

D'où  $|\pi(c, z) - \pi(c_1, z_1)| < \epsilon$ . Cqfd.

**COROLLAIRE.**  $G$  est continue (sur  $\Theta - \{c_0\}$ ).

Démonstration. Soit  $c_1$  le point où on veut vérifier la continuité de  $G$ . Il existe alors un  $n$  tel que  $f_{c_1}^n(P^-) \in W_{-1} \subset U^+(c_1)$ . Pour  $c$  assez proche de  $c_1$  pour que  $f_c^n(P^-) \in U^+(c)$ , on a alors  $G(c) = \pi^+(c, f_c^n(P^-))$ . Cqfd.

### 3. LE GERME $F$ .

Par construction des cylindres, un voisinage de  $\beta_1$  dans  $W_0$  est envoyé par  $f_c^{kq}$  sur un voisinage de  $\beta_1$  dans  $Y_1$ ; ce phénomène reste vrai pour  $c = c_0$  ( $\beta_1$  devenant  $\alpha_1$ , et le voisinage étant restreint à une "pointe" de la zone  $W_0$ ).

Par passage aux quotients, on obtient une application  $F(c)$  holomorphe bijective d'un voisinage du "bout en zéro" de  $E^+ = Y_0/f_c^{kq}$  identifié à  $\mathbb{C}^*$  et du "bout en zéro" de  $E = Y_1/f_c^{kq}$  également identifié à  $\mathbb{C}^*$ .

Considérée d'un voisinage de zéro dans  $\mathbb{C}^*$  vers un voisinage de zéro dans  $\mathbb{C}^*$ ,  $F(c)$  est prolongeable par continuité par  $[F(c)](0) = 0$  : ainsi prolongée, elle est alors holomorphe, sans point critique en zéro.

On notera  $L(c)$  l'application de  $\mathbb{C}^* \approx E^+ \rightarrow \mathbb{C}^* \approx E^-$

$$z \longmapsto [F(c)]'(0).z .$$

$C$  est le morphisme de cylindres tangent à  $F(c)$ .

Pour calculer un développement limité de  $G(c)$ , on va étudier  $L(c) \circ G(c)$  (on identifie ici par abus de langage le nombre complexe  $G(c)$  à l'application  $z \rightarrow G(c).z$ ). L'avantage est qu'on a ici un automorphisme d'un cylindre, qu'on peut étudier en regardant son comportement en un bout, et en oubliant l'information contenue au point marqué.

$F(c)$  est défini pour  $c_0$  également : on peut espérer avoir  $L(c) \rightarrow L(c_0)$  quand  $c \rightarrow c_0$ , ce qui permettra de repasser du développement limité de  $L(c) \circ G(c)$  à un développement limité de  $G(c)$ .

#### 4. COMPORTEMENT LIMITE DE $L(c)$ .

PROPOSITION 2. Quand  $c \rightarrow c_0$ ,  $L(c) \rightarrow L(c_0)$  .

Démonstration. Remarquons qu'on peut trouver un  $r$  fixe tel que, dans le plan des  $z$ , l'intersection du disque centré en  $\beta_1$  et de rayon  $r$  et du "bout" de  $W_0$  proche de  $\beta_1$  (i.e. celui qui correspond dans le plan des  $Z$  à  $\text{Im } Z > 0$ ) soit envoyée par  $f_c^{kq}$  dans  $Y_1$ ; "une position limite sur le plan fournissant une position limite sur le cylindre", il y a un voisinage fixe de 0 dans  $\mathbb{C}^*$  où  $F(c)$  est définie.

Prenons une courbe fermée  $\gamma$  d'indice 1 autour de 0 incluse dans ce voisinage. On peut la développer dans  $U^+(c_0)$  en un arc (non fermé)  $\Gamma_{c_0}$ ; par la proposition du §2, on peut la développer pour  $c$  proche de  $c_0$  en un arc  $\Gamma_c$  proche de  $\Gamma_{c_0}$  (au sens de la convergence uniforme).

$L(c)$  peut alors être calculé à l'aide de la formule de Cauchy sur  $\gamma$  par :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{[F(c)](u)}{u^2} du = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_c} \frac{\pi_c^{-kqN}(z)}{[\pi_c^+(z)]^2} \left( \frac{d\pi_c^+}{dz} \right) dz$$

où  $\pi_c$  désigne la fonction  $z \mapsto \pi(c, z)$  et  $N$  est choisi assez grand pour que  $f_c^{kqN}(\Gamma_c) \subset U^-(c)$ . Dans cette intégrale, le chemin d'intégration comme la fonction intégrée varient continûment en  $c$ , d'où le résultat. Cqfd.

5. ETUDE DE  $L(c) \circ G(c)$  ( $c \neq c_0$ ).

$L(c) \circ G(c)$  est l'application tangente à  $F(c) \circ G(c)$  au voisinage de 0 dans  $E(c) \approx \mathbb{C}^*$ . Elle est déterminée par la connaissance purement locale de la dynamique de  $f_c^{kq}$  autour de  $\beta_1$ .

Nous allons voir qu'elle peut être calculée fort simplement.

Comme annoncé au §1,  $\rho_1(\lambda)$  désigne la valeur propre du cycle de  $f_c^{kq}$  issu de  $\beta_1(c)$ ; lorsque  $|\rho_1(\lambda)| \neq 1$ ,  $f_c^{kq}$  est linéarisable au voisinage de  $\beta_1$ . Nous poserons  $\rho_1 = \rho_1(\lambda) = re^{2i\pi\theta}$ . Comme on est dans le cas  $\text{Im } A'_\lambda > 0$ , on a  $\text{Im } \rho_1 < 0$ .

Considérons  $g: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ , et  $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$   
 $z \mapsto \rho_1 z$   $u \mapsto \exp u$  revêtement universel.

$g$  induit une application  $\tilde{g}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ; nous conviendrons qu'elle envoie 0 sur la détermination principale  $\text{Log } \rho_1$  du logarithme de  $\rho_1$ , soit  $\tilde{g}: u \mapsto u + \text{Log } \rho_1$ .  $\tilde{\tau}$  désignera l'application  $u \mapsto u + 2i\pi$  de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  (changement de feuillet). On a  $\tilde{\tau} \circ \tilde{g} = \tilde{g} \circ \tilde{\tau}$ .

On peut identifier le cylindre  $\mathbb{C}/\tilde{g}$  à  $\mathbb{C}^*$  en envoyant le "bout en  $\text{Re } u < 0$ " sur 0 ( $\rho_1$  n'est pas réel);  $\tilde{\tau}$ , qui commute à  $\tilde{g}$ , induit alors un isomorphisme  $K(\rho_1): \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ .

LEMME. Si  $|\rho_1(c)| \neq 1$ ,  $L(c) \circ G(c) = K(\rho_1)$ .

Démonstration. Prenons un voisinage de  $\beta_1$  assez petit pour que  $f_c^{kq}$  y soit linéarisable; on peut conjuguer analytiquement  $f_c^{kq}$  sur ce voisinage à  $g$  au voisinage de zéro. La "fente"  $\Gamma$  séparant  $Y_1$  de  $W_0$  devient une courbe  $\Gamma$  qui admet une tangente en zéro.

$U-\Gamma/f_c^{kq}$  s'identifie alors à  $\mathbb{C}/\tilde{g}$ .

Examinons ce que devient  $F(c) \circ G(c)$  (défini au voisinage de  $\beta_1$ ) dans ce modèle: On part d'un point  $y$  dans le domaine fondamental pour  $g$  limité par  $\Gamma$  et  $g(\Gamma)$ ; on prend les images successives de  $y$  par  $g$  jusqu'à se retrouver

dans ce domaine fondamental en  $n$  itérations. En termes du revêtement universel, partons de  $\text{Log } y$  (détermination principale) et appliquons  $\tilde{g}$   $n$  fois : nous tombons sur  $\text{Log}(g^n(y)) - 2i\pi$  ( $\text{Log}$  désignant encore la détermination principale) qui est donc  $\tilde{g}$ -équivalente à  $\text{Log } y$  ; l'application déduite de  $F(c) \circ G(c)$  en identifiant  $U - \Gamma / f_c^{kq}$  à  $\mathbb{C} / \tilde{g}$  envoie, elle, la projection de  $\text{Log } y$  sur celle de  $\text{Log}(g^n(y))$ , qui est justement  $\tilde{g}$ -équivalente à  $\tilde{\tau}(\text{Log } y)$  : c'est donc la restriction de  $K$  à un voisinage de  $0$ , donc  $L(c) \circ G(c) = K(\rho_1)$ . Cqfd.

Preuve du théorème (énoncé au §1).

Il ne reste donc plus qu'à calculer  $K(\rho_1)$ .  $\mathbb{C} / \tilde{g}$  peut être identifié à  $\mathbb{C}^*$  par  $u \mapsto \exp\left(\frac{-2i\pi u}{\text{Log } \rho_1}\right)$  (compte tenu de  $\text{Im}(\text{Log } \rho_1) < 0$ , le signe - permet bien d'envoyer le "bout"  $\text{Re } u < 0$  sur le "bout" en zéro).  $K(\rho_1)$  envoie la projection de  $0$  sur celle de  $2i\pi$  soit  $1$  sur  $\exp\left(\frac{4\pi^2}{\text{Log } \rho_1}\right)$ , d'où  $L(c) \circ G(c) = \exp\left(\frac{4\pi^2}{\text{Log } \rho_1(\lambda)}\right) \cdot \rho_1(\lambda)$  est de degré  $1$  en zéro ; pour  $q = 1$ ,  $\rho_1(\lambda) = \rho(-\lambda)$  est de degré  $1$  d'après [ABP] corollaire 2 du théorème 1 ; pour  $q > 1$ , cela découle de l'analyse de l'aspect des composantes hyperboliques de  $M$  tangentes en  $c_0$  (et en fait de façon indirecte de ce corollaire 2). On peut donc écrire  $\text{Log } \rho_1(\lambda) = \rho_1(0) \cdot \lambda + o(\lambda)$  avec  $\rho_1(0) \neq 0$  ; d'où  $L(c) \circ G(c) = \exp\left[\frac{4\pi^2}{\rho_1'(0) \cdot \lambda} + K'_0 + o(1)\right]$ .

Comme  $L(c)$  a une limite,  $G(c) = \exp\left[\frac{4\pi^2}{\rho_1'(0) \cdot \lambda} + C_0 + o(1)\right]$ .

Ce développement n'est a priori valable que lorsque  $|\rho_1(\lambda)| \neq 1$ , mais comme  $G(c)$  est continue, il l'est partout. Cqfd.

[AHL] L.V. AHLFORS, Lectures on quasi conformal mappings, Van Nostrand Company, 1966.

[G] G.M. GOLUSIN, Geometric theory of functions of a complex variable, Amer. Math. Soc. (Translations of mathematical monographs), 1969.

EXPOSE N° XVII

UNE PROPRIÉTÉ DE CONTINUITÉ

par P. Lavaurs

1) CASSURE DES RAYONS D'ARGUMENT RATIONNEL.

Pour un  $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  nous noterons  $R_M(\theta)$  le rayon externe de  $M$  d'argument  $\theta$ , et  $R_{K_C}(\theta)$  le rayon externe de  $K_C$  (ensemble de Julia de  $z \mapsto z^2+c$ ) paramétré par le potentiel. Ce dernier peut se casser : dans ce cas, il n'est pas défini sur  $\mathbb{R}^*$  tout entier. Nous conviendrons que les rayons sont orientés dans le sens des potentiels décroissants : avancer sur un rayon, ce sera se déplacer de l'infini vers  $M$  ou  $K_C$ . Enfin, il faut noter que même lorsque  $R_M(\theta)$  ou  $R_{K_C}(\theta)$  a un aboutissement, nous considérons que ce point ne fait pas partie du rayon.

Dans tout cet exposé, on s'intéressera à des  $\theta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ .

PROPOSITION 1. L'ensemble des points  $c$  de  $\mathbb{C}$  pour lesquels le rayon  $R_{K_C}(\theta)$  se casse est  $\bigcup_{n \geq 1} R_M(2^n \theta)$  (et donc puisque  $\theta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  est prépériodique pour la multiplication par deux la réunion d'un nombre fini de rayons externes de  $M$ ).

Démonstration :

\* Si  $c \in R_M(2^n \theta)$  pour un  $n \geq 1$ , l'argument externe de  $c$  pour  $K_C$  est  $2^n \theta$ . De ce fait, le rayon  $R_{K_C}(2^{n-1} \theta)$  arrive sur zéro, et se casse, donc aussi  $R_{K_C}(\theta)$  qui en est une image réciproque  $(n-1)$ ème.

\* Réciproquement si  $c$  n'est sur aucun  $R_M(2^n \theta)$  ( $n \geq 1$ ), soit  $2^\ell \theta, \dots, 2^{\ell+d-1} \theta$  le cycle pour la multiplication par 2 sur lequel tombe  $\theta$ . Les rayons  $R_{K_C}(2^j \theta)$  ( $\ell \leq j \leq \ell+d-1$ ) sont définis au voisinage de l'infini, soit

prenant alors pour chaque  $j$  l'image réciproque par  $z \mapsto z^2+c$  de  $R_{K_C}(2^{j+1} \theta)$

restreint à  $[t, 2t]$  ayant pour extrémité terminale  $R_{K_C}(2^j\theta)(t)$ , on prolonge tous les  $R_{K_C}(2^j\theta)$  ( $l \leq j \leq l+d-1$ ) à  $[\frac{t}{2}, +\infty[$ , sans toujours passer sur  $c$ . En réitérant l'opération, on voit alors que les  $R_{K_C}(2^j\theta)$  peuvent être définis sur  $\mathbb{R}^*$  tout entier pour  $l \leq j \leq l+d-1$ . Il en est alors de même des  $R_{K_C}(2^i\theta)$  ( $0 \leq i \leq l-1$ ) qu'on peut ainsi construire par récurrence sur  $l-i$ , puisqu'ils ne passent pas sur  $c$  pour  $i \geq 1$ . cqfd.

Dès lors pour  $c$  dans  $\mathbb{C} - \bigcup_{n \geq 1} R_M(2^n\theta)$  (qui contient  $M$ ), le rayon  $R_{K_C}(\theta)$  existe.

Par la proposition 2 de [AEMM], il aboutit alors en un point que nous noterons  $\gamma_C(\theta)$ .

Si  $K_C$  est localement connexe,  $\gamma_C(\theta)$  est la valeur en  $c$  du lacet de Carathéodory  $\gamma_C$  défini sur  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ; dans le cas contraire,  $\gamma_C(\theta)$  n'a de sens que sur  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ .

## 2) ÉNONCÉ ET PREMIERS CAS.

L'objet de cet exposé est de prouver le

**THÉORÈME.** Pour  $\theta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ,  $\gamma_C(\theta)$  est une fonction continue de  $c$  sur  $\mathbb{C} - \bigcup_{n \geq 1} R_M(2^n\theta)$ .

La proposition 3 de [AEMM] nous en fournit la preuve dans la plupart des cas : elle affirme en effet que  $\gamma_C(\theta)$  est défini dans un voisinage de  $c_0 \in \mathbb{C}$ , et continu comme fonction de  $c$  dès lors que  $\gamma_{C_0}(\theta)$  est prépériodique répulsif et n'est pas sur l'orbite inverse du point critique (si on note  $f_c : z \mapsto z^2 + c$ , avec les notations de cette proposition,  $\gamma_C(\theta) = \psi_{f_c, \theta}(0)$ ).

Il reste donc deux cas à régler :

\* celui d'un point de Mizurewicz  $c_0$  quand  $\gamma_{C_0}(0)$  est sur l'orbite inverse de zéro ;

\* celui d'une racine de composante hyperbolique  $c_0$  quand  $\gamma_{C_0}(\theta)$  est sur l'orbite inverse du cycle indifférent rationnel (qui contient aussi ce cycle).

Remarque. En utilisant les conclusions de [AEMM] et [ABP], on peut voir aisément que nous connaissons en fait ici déjà la continuité de  $c \mapsto \gamma_c(\theta)$  sur

$$\mathbb{C} - \bigcup_{n \geq 1} \overline{R_M(2^n \theta)} .$$

### 3) CAS DES POINTS DE MISUREWICZ.

Soit  $c_0$  un point de Misurewicz et  $\theta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ .

On suppose donc qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $f_{c_0}^n(\gamma_{c_0}(\theta)) = \gamma_{c_0}(2^n \theta) = 0$ .

Dès lors,  $R_{K_C}(2^{n+1}\theta)$  aboutit en  $c_0$ , et donc  $R_M(2^{n+1}\theta)$  aussi d'après le théorème 2 p. 74 de la première partie de ce cours.

D'après le complément 1 du lemme 1 de [AREMAR], aucun des rayons  $R_M(2^p \theta)$  pour  $p \neq n+1$  n'aboutit en  $c_0$ . Comme ceux-ci sont en nombre fini, il existe un voisinage  $\Lambda$  de  $c_0$  qui ne rencontre aucun d'entre eux.

On a alors l'énoncé suivant, analogue à la proposition 3 de [AEMM].

PROPOSITION 2. L'application  $(c,s) \mapsto \psi_{f_C, \theta}(s)$  de  $[\Lambda - R_M(2^{n+1}\theta)] \times \mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{C}$  est continue.

Démonstration : D'après la Proposition 3 de [AEMM],  $(c,s) \mapsto \psi_{f_C, 2^{n+1}\theta}$  est continue sur  $A \times \mathbb{R}_+$ ; on va alors prouver par récurrence descendante sur  $i$  que  $(c,s) \mapsto \psi_{f_C}(2^i s)$  est continue sur  $\Lambda - R(2^{n+1}\theta) \times \mathbb{R}^+$ .

LEMME. Soient  $f : E \rightarrow F$  un revêtement, avec  $F$  localement connexe  
 $A$  un espace topologique

$g : A \times [0,1] \rightarrow F$  (resp.  $A \times ]0,1[ \rightarrow F$ ) continue.

Soit  $h : A \times [0,1] \rightarrow E$  (resp.  $A \times ]0,1[ \rightarrow E$ ) relevant  $g$  (i.e.  $f \circ h = g$ ) qui est \* continu en la variable  $t$  parcourant  $[0,1]$  (resp.  $]0,1[$ ) en tout point

\* continu aux points  $(a,1)$   $a \in A$ .

Alors  $h$  est continu sur  $A \times [0,1]$  (resp.  $A \times ]0,1[$ ).

Preuve du lemme. Il suffit de montrer que pour tout  $a \in A$ ,  $T_a = \{t/h \text{ est continu au point } (a,t)\}$  est ouvert et fermé dans  $[0,1]$  (resp.  $]0,1[$ ).

\* Il est ouvert : soit  $(a,t)$  en lequel  $h$  est continue ; prenons  $V$  voisinage connexe de  $g(a,t)$  assez petit pour que  $f$  soit trivial au-dessus de  $V$ , et  $f'$  l'unique détermination continue de  $f^{-1}$  sur  $V$  qui vaille  $h(a,t)$  en  $g(a,t)$ . Alors, par continuité de  $h$  au point  $(a,t)$ , pour  $(b,s)$  assez proche de  $(a,t)$ ,  $h(b,s) = f'[g(b,s)]$  donc  $h$  est continue au point  $(a,s)$  pour  $s$  assez proche de  $t$ .

\* Il est fermé : soit  $t \in \bar{T}$ ,  $V$  comme ci-dessus et  $U$  voisinage de  $(a,t)$  de la forme  $W \times I$  avec  $I$  intervalle, tel que  $g(U) \subset V$ . Par continuité de  $h$  en la seconde variable, pour  $s$  dans  $I$ ,  $h(a,s) = f'[g(a,s)]$ ; prenons un tel  $s$  dans  $T$ : par continuité de  $h$  au point  $(a,s)$ , pour  $b$  assez proche de  $a$ ,  $h(b,s) = f'[g(b,s)]$  donc, par continuité en la seconde variable, et comme  $g(\{b\} \times I) \subset V$ ,  $h(b,u) = f'[g(b,u)]$  pour  $b$  assez proche de  $a$  et  $u$  dans  $I$ , d'où la continuité de  $h$  au point  $(a,b)$ . cqfd.

Appliquons alors ce lemme :

on prendra pour  $A$  l'ensemble  $(\Lambda - R_M(2^{n+1}\theta))$ , on remplacera  $[0,1]$  (ou  $]0,1[$ ) par  $[0,\infty]$  (ou  $]0,\infty[$ ) afin de travailler sur le paramétrage par les potentiels,  $E$  et  $F$  seront tous deux  $\mathbb{T}^*$  auquel on rajoute un point à l'infini dans chaque direction de demi-droites, et  $f$  est l'application  $z \mapsto z^2$  prolongée de façon évidente à l'infini.

L'application  $(c,s) \mapsto \psi_{f_c, 2^i\theta}(s)$  se prolonge à  $s = \infty$  en associant à  $(c,\infty)$  le point à l'infini de  $F$  dans la direction  $2^i\theta$ .

Passage de  $i = n+1$  à  $i = n$ .

On peut considérer  $g : A \times ]0,\infty[ \rightarrow F$

$$(c,s) \rightarrow \psi_{f_c, 2^{n+1}\theta}(s) - c$$

puisque  $A \cap R_M(2^{n+1}\theta) = \emptyset$ , cette application ne prend jamais la valeur zéro et est donc bien à valeurs dans  $F$ .

$g$  vérifie alors les hypothèses du lemme.

$$h : A \times ]0,\infty[ \rightarrow E$$

$$(c,s) \rightarrow \psi_{f_c, 2^n\theta}(s)$$

est alors un relèvement de  $g$  qui vérifie les hypothèses du lemme : il est donc continu sur  $A \times ]0,\infty[$ .

De surcroît, si on étend  $g$  à  $[0, \infty]$ , ce qui est possible (elle n'est alors plus à valeurs dans  $F$  mais dans  $F \cup \{0\}$ ), on la sait continue. Dès lors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , pour  $c$  assez proche de  $c_0$  et  $s$  assez petit,  $|\psi_{f_c, 2^{n+1}\theta}(s) - c| < \varepsilon^2$  donc  $|\psi_{f_c, 2^n\theta}(s)| < \varepsilon$ .

Si on prolonge  $h$  en prenant pour  $h(c, 0)$  l'aboutissement du rayon  $R_{K_C}(2^n\theta)$ , la fonction obtenue est bien continue sur  $A \times [0, \infty]$ .

Passage de  $i+1$  à  $i$  pour  $i < n$ .

Pour  $i < n$ , le passage de la proposition pour  $i+1$  à la proposition pour  $i$  est alors plus facile : en effet on peut directement appliquer le lemme sur  $[0, \infty]$  à  $g : (c, s) \mapsto \psi_{f_c, 2^{i+1}\theta}(s) - c$  qui est bien à valeurs dans  $F$ , car  $\Lambda$  a été choisi assez petit pour ne pas rencontrer de  $R_M(2^p\theta)$  autre que  $R_M(2^{n+1}\theta)$ . cqfd.

#### 4) CAS DES POINTS ADMETTANT UN CYCLE INDIFFÉRENT RATIONNEL.

On va se placer dans le même cadre et les mêmes notations que dans [IDC].

$\theta$  est un rationnel à dénominateur impair tel que  $R_{K_C}(\theta)$  aboutisse sur  $\alpha_1$  dans  $K_{C_0}$ .

Afin de simplifier l'exposition, la démonstration sera explicitée dans le cas où  $q=1$ . On montrera à la fin de celle-ci comment la modifier pour  $q$  quelconque.

On se limite à faire tendre  $c$  vers  $c_0$  dans une zone  $\Theta$  limitée par deux courbes tangentes à l'ordre 2 en  $c_0$ , on supposera que  $\Theta$  contient entièrement la zone comprise entre les composantes hyperboliques de  $M$  tangentes en  $c_0$  (pour  $q=1$ , la zone comprise hors de la composante hyperbolique dont le bord admet un point de rebroussement en  $c_0$ ).

On va prouver les trois propositions suivantes, pour  $c$  dans  $\Theta - \bigcup_{n \geq 1} R_M(2^n\theta)$ .

PROPOSITION 3. L'aboutissement de  $R_{K_C}(\theta)$  est  $\alpha$  ou  $\beta$ .

PROPOSITION 4. Pour  $n$  fixé et  $c$  assez proche de  $c_0$ ,  $R_{K_c}(\theta)$  ne passe pas sur  $f_c^n(0)$ .

PROPOSITION 5. Pour  $\theta_1 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  tel qu'il existe  $d \in \mathbb{N}$  tel que  $2^d \theta_1 = \theta$ , l'aboutissement de  $R_{K_c}(\theta_1)$  est continu au point  $c_0$  comme fonction de  $c$  (et en particulier défini pour  $c$  assez proche de  $c_0$ ).

La proposition 5 permettra de conclure le théorème annoncé en 2 : en effet pour un  $\theta_c$  tel que  $2^d \theta_c = \theta$ , elle affirme que  $\gamma_c(\theta_c)$  tend vers  $\gamma_c(\theta_1)$  quand  $c$  tend vers  $c_0$  dans  $\theta - \bigcup_{n \geq 1} R_M(2^n \theta)$ .

Si maintenant on fait tendre  $c$  vers  $c_0$  dans  $M$ , l'aboutissement de  $R_{K_c}(\theta_1)$  est une fonction continue de  $c$ , puisque  $c$  est un point prépériodique répulsif. Comme quand  $c$  tend vers  $c_0$  dans  $M \cap \theta$ , il tend vers  $\gamma_{c_0}(\theta_1)$ , il tend aussi vers  $\gamma_{c_0}(\theta_1)$  quand  $c$  tend vers  $c_0$  dans  $\overset{\circ}{M}$ , d'où la continuité annoncée au point  $c_0$ .

La proposition 3 est un premier pas vers la proposition 5, la proposition 4 est la clef du complément 2 au théorème 1 de [AREMAR].

a) Limitation de la distorsion du rayon dans  $U$ .

Pour  $c = c_0$ , le rayon  $R_{K_{c_0}}(\theta)$  aboutit en  $\alpha_1$  avec une tangente perpendiculaire au diamètre limitant  $U^+$ . Quitte à augmenter  $R$  dans la construction de "Arriver au bon port", on peut dès lors supposer ce rayon transverse à la courbe de sortie (qui est la courbe par laquelle le rayon entre dans  $U^+$ , avec notre convention d'orientation dans le sens des potentiels décroissants !); on prendra  $s(c_0)$  le plus petit paramètre où  $R_{K_{c_0}}(\theta)$  coupe la courbe de sortie ;

pour  $c$  proche de  $c_0$ ,  $R_{K_c}(\theta)$  coupe alors la courbe de sortie en un point correspondant à un paramètre  $s(c)$  proche de  $s(c_0)$ , puisque ce rayon restreint à  $[\frac{s(c_0)}{2}, \infty[$  est une fonction continue de  $c$ .

Sur  $[\frac{s(c_0)}{2^k}, s(c_0)]$ , le rayon  $R_{K_{c_0}}(\theta)$  évolue alors sur un nombre fini de zones  $W_i$  ( $i \leq 0$ ), qu'on notera  $M_1$ .

La restriction de  $R_{K_C}(\theta)$  à  $[\frac{s(c)}{2^k}, s(c)]$  étant continue en fonction de  $c$ , et puisqu'une position limite sur le plan fournit une position limite sur le cylindre (cf. [IDC] Proposition 1), pour  $c$  assez proche de  $c_0$ , cette courbe est encore sur  $M_1+1$  domaines  $W_i$  au plus.

Cet arc de rayon définit sur le cylindre un lacet injectif ; on peut alors reconstituer le rayon de proche en proche tant que l'on reste dans  $U$  : ainsi entre  $s(c)$  et  $\frac{s(c)}{2^k}$ ,  $R_{K_C}(\theta)$  parcourt un chemin sur  $W_{-M_1}, \dots, W_0$  ; sur  $[\frac{s(c)}{(2^k)^2}, \frac{s(c)}{2^k}]$  il parcourra un chemin sur  $W_{-M_1-1}, \dots, W_{-1}$  ; si  $i_0$  est le plus grand entier tel que  $W_{-i_0}$  soit défini, on pourra ainsi remonter jusqu'à un chemin sur  $W_{-i_0}, \dots, W_{-i_0+M_1}$ .

Comme  $i_0 \geq \frac{0,8|A|}{\pi}$ , pour  $c$  assez proche de  $c_0$ , on a au moins un arc de  $R_{K_C}(\theta)$  défini sur un intervalle de la forme  $[\frac{t}{2^k}, t]$  évoluant entre  $W_{j_1}$  et  $W_{j_2}$  pour  $j_1 = E(\frac{-0,3|A|}{\pi})$  et  $j_2 = E(\frac{-0,7|A|}{\pi})$  ( $E$  désigne la partie entière).

Par les inégalités de [ABP], un  $W_j$  pour  $j_2 \leq j \leq j_1$  est entièrement recouvert par des  $Y_i$ , en nombre fini. Dès lors, l'arc  $R_{K_C}(\theta)$  évolue entre  $t$  et  $\frac{t}{2^k}$  sur un nombre fini  $M(c)$  de domaines  $Y_i$ . De plus,  $t$  peut être choisi de telle sorte que  $R_{K_C}(\theta)(t)$  soit sur un  $\partial Y_i$  et qu'entre  $t$  et  $\frac{t}{2^k}$   $R_{K_C}(\theta)$  évolue dans des  $Y_{i'}$ , avec  $i' \leq i$  : il suffit de prendre  $t$  le plus petit possible pour que  $R_{K_C}(\theta)(t)$  soit sur  $Y_i$  parmi les  $t \geq \frac{s(c)}{(2^k)^{i_0-M_1}}$ .

En relevant l'arc un nombre suffisant de fois, on trouve alors un  $w$  tel que  $R_{K_C}(\theta)$  évolue entre  $w$  et  $\frac{w}{2^k}$  sur  $Y_1 \cup \dots \cup Y_{M(c)}$  et ait ses extrémités sur  $\partial Y_{M(c)}$  ( $w$  dépend de  $c$ ).

A priori,  $M(c)$  dépend de  $c$ . Cependant on a le

LEMME. On peut borner  $M(c)$  par une borne  $M$  indépendante de  $c$ .

Démonstration : En mettant un point de base fixe sur  $W_0$  et un sur  $Y_1$ , on sait (cf. [IDC]) que le morphisme entre cylindres marqués identifiés à  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$  défini par l'identification de  $W_0/f_c^k$  et  $Y_1/f_c^k$  admet quand  $c$  tend vers  $c_0$  (dans la région du plan à laquelle nous nous sommes limités) un développement limité de la forme  $G(c) = G_0 + \frac{k}{\lambda} + o(1) \pmod{\mathbb{Z}}$ ;  $G(c)$  évolue dans une bande autour de  $\mathbb{R}^-$ .

Développons alors  $Y_1/f_c^k$  et  $W_0/f_c^k$  sur  $\mathbb{C}$  en envoyant les points marqués sur  $\mathbb{Z}$ .  $R_{K_c}(\theta) \Big| \left[ \frac{s}{2^k}, s \right]$  et  $R_{K_c}(\theta) \Big| \left[ \frac{w}{2^k}, w \right]$  se développent chacun en un arc de courbe (compact),  $\gamma_s$  et  $\gamma_w$  où l'on convient de relever  $W_{-M_1} \cup \dots \cup W_0$  et  $Y_1 \cup \dots \cup Y_{M(c)}$  en relevant en 0 le point marqué de  $W_0$  ou  $Y_1$ .

$R_{K_c}(\theta) \Big| \left[ \frac{s}{2^k}, s \right]$  admet une position limite dans le plan quand  $c$  tend vers  $c_0$ , donc aussi sur le cylindre; dès lors  $\gamma_1$  admet une position limite dans  $\mathbb{C}$ , et reste donc pour  $c$  assez proche de  $c_0$  dans un rectangle autour de 0.

$\gamma_w$  s'obtient à partir de  $\gamma_s$  par une translation de  $-G'$ , où  $G'$  est un relèvement de  $G(c)$ .

Mais le développement limité ci-dessus prouve que la partie imaginaire de  $G$ , donc aussi de  $G'$  est bornée quand  $c$  tend vers  $c_0$ :  $\gamma_w$  reste donc à hauteur bornée, donc dans une bande  $B$  limitée par deux horizontales.

Quand  $c$  tend vers  $c_0$ , le bord de  $Y_1$  admet une position limite sur le plan, donc aussi la courbe qu'elle définit sur le cylindre, uniformément sur tout compact; le relèvement de  $Y_1$  dans  $\mathbb{C}$  restreint à la bande  $B$  admet donc une position limite; comme  $\gamma_w$  le rencontre, il reste en fait à distance bornée de zéro, donc dans un rectangle de  $\mathbb{C}$ .

A la limite, un nombre borné de relèvements de domaines  $Y_i$  ( $i \geq 1$ ) rencontre ce rectangle borné, donc  $M(c)$  est borné. *cqfd*.

Quitte à multiplier  $w$  par une puissance de  $2^k$  pour certains  $c$ , on supposera que  $R_{K_c}(\theta)(w)$  et  $R_{K_c}(\theta)\left(\frac{w}{2^k}\right)$  sont sur  $\partial Y_M$ , et donc qu'entre ces deux valeurs du potentiel,  $R_{K_c}(\theta)$  évolue dans  $Y_1 \cup \dots \cup Y_M$ . Cet arc de rayon s'obtient par développement à extrémités sur  $\partial Y_M$  du lacet défini sur le cylindre par la première entrée du rayon, entre  $s$  et  $\frac{s}{2^k}$ .

On notera  $\omega(c)$  le point critique de  $f_c^k$  variant continûment avec  $c$  et égal pour  $c_0$  au point critique de  $f_{c_0}^k$  situé dans la composante de  $K_{c_0}^0$  adjacente à  $\alpha_1$  : il existe  $i_0$  tel que  $f_c^{i_0}(\omega) = 0$ , avec  $0 \leq i_0 < k$ .

De plus il existe un  $n_0$  tel que  $f_c^{n_0}(\omega)$  soit dans  $Y_i$  pour  $c$  suffisamment proche de  $c_0$  ; on peut enfin supposer, quitte à ne regarder que des  $c$  encore plus proches de  $c_0$ , que pour  $j < k(n_0 + 1)$  et  $j \neq kn_0$ ,  $f_c^j(\omega) \notin U$ . On notera  $\tilde{\omega}$  le point sur le cylindre correspondant à  $(f_c^k)(\omega)$ .

PROPOSITION 6.  $c$  est sur  $R_M(2^{i_0}\theta)$  si et seulement si le lacet injectif défini sur le cylindre par la "première entrée" de  $R_{K_C}(\theta)$  dans  $U$  passé sur  $\tilde{\omega}$ .

Démonstration :

\* Si le lacet défini sur le cylindre par la "première entrée" de  $R_{K_C}(\theta)$  passe sur  $\tilde{\omega}$ , d'après ce qui précède, sur  $[\frac{w}{2^n}, w]$ , le lacet passe sur un point de  $U$  ayant pour projection sur le cylindre  $\tilde{\omega}$  et situé dans un  $Y_i$  ( $1 \leq i \leq M$ ) donc sur un  $(f_c^k)^{n_0+i}(\omega)$  ( $0 \leq i \leq M-1$ ) : le raisonnement de [ABP] montre qu'alors  $R_{K_C}(\theta)$  passe aussi sur  $f_c^k(\omega)$  ; dès lors  $R_{K_C}(2^{i_0}\theta)$  passe sur  $c$ , donc  $c$  est sur  $R_M(2^{i_0}\theta)$ .

\* Réciproquement si  $c$  est sur  $R_M(2^{i_0}\theta)$ ,  $R_{K_C}(\theta)$  passe sur  $f_c^{2k}(\omega) = f_c^{k-i_0}(c)$  donc aussi sur tous les  $f_c^{ki}(\omega)$  ( $i \geq 2$ ) et le lacet défini sur le cylindre par la "première entrée" de  $R_{K_C}(\theta)$  passe sur  $\tilde{\omega}$ . cqfd.

Analysons alors ce qui se passe alors lorsqu'on n'est pas sur  $R_M(2^{i_0}\theta)$  : le lacet sur le cylindre est alors, puisqu'injectif, homotope dans le cylindre privé de  $\tilde{\omega}$  à un parallèle situé soit d'un côté soit de l'autre de  $\tilde{\omega}$  ; en revenant aux développements sur  $Y_1 U \dots U Y_M$ , on voit que cela exprime que l'arc de lacet  $R_{K_C}(\theta) \Big|_{[\frac{w}{2^k}, w]}$  peut être amené dans  $Y_1 \dots Y_M - \{(f_c^k)^{n_0+i}(\omega) \mid 0 \leq i \leq M-1\}$  sur  $\alpha$  ou  $\beta$  en astreignant ses extrémités à glisser sur  $\partial Y_M$ , de sorte que l'une reste l'image de l'autre par  $f_c^k$  tout au long de l'homotopie.

Vu le cadre  $(\theta - \cup_{n \geq 1} R_M(2^i \theta))$  où nous nous sommes placés pour énoncer les propositions 3 à 5, nous sommes hors de  $R_M(2^i \theta)$  donc dans le cas analysé ci-dessus.

b) Retour dans U .

PROPOSITION 7. Il existe un  $N > 1$  (indépendant de c) tel que sur

$\left[ \frac{w}{(2^k)^{N+1}}, \frac{w}{(2^k)^N} \right]$ ,  $R_{K_C}(\theta)$  soit dans  $U^+(c)$ .

Remarque. Cette proposition exprime que le rayon, qui après l'intervalle  $[\frac{w}{2^k}, w]$  va bientôt franchir la courbe d'entrée et quitter la zone U garde un comportement contrôlable hors de U et revient sagement dans  $U^+$  au bout d'un temps borné.

Démonstration :

a) Premières limitations sur l'emplacement du rayon.

Pour un  $n \geq 0$  fixé et tout  $i$  tel que  $1 \leq i \leq M$ ,  $(f_C^k)^{-n}(Y_i)$  a un nombre fini de composantes connexes, au plus  $2^{kn}$ . Elles seront appelées "zones" par la suite.

Entre  $\frac{w}{(2^k)^n}$  et  $\frac{w}{(2^k)^{n+1}}$ ,  $R_{K_C}(\theta)$  évolue alors sur les  $2^{kn} M$  (au plus) zones ainsi définies.

LEMME 1. Il évolue en réalité sur seulement  $M \cdot 2^M$  telles zones au plus, pour c assez proche de  $c_0$  (N.B : la condition de proximité dépend de n, mais ce ne sera pas gênant pour utiliser ce lemme).

Démonstration :

Comme plus haut prenons  $n_0$  tel que  $(f_C^k)^{n_0}(\omega) \in Y_1$ , et supposons c assez proche de  $c_0$  pour qu'aucun  $(f_C^k)^i(\omega')$  pour  $0 \leq i \leq n$  et  $\omega'$  point critique de  $f_C^k$  hormis les  $(f_C^k)^j(\omega)$  ( $n_0 \leq j \leq n_0 + M - 1$ ) ne soit dans  $Y_1 \cup \dots \cup Y_M$ .

Entre  $w$  et  $\frac{w}{2^k}$ ,  $R_{K_C}(\theta)$  évolue sur M zones.

Entre  $\frac{w}{2^k}$  et  $\frac{w}{(2^k)^2}$ , il évolue a priori sur  $2^k \cdot M$  zones au plus : les composantes connexes des images réciproques de  $Y_1 \cup \dots \cup Y_M$  par  $f_C^k$ ; mais (si

$n_0 > 1$ )  $Y_1 \cup \dots \cup Y_M$  ne contient pas de valeur critique de  $f_C^k$  : les  $2^k$  images réciproques de  $Y_1 \cup \dots \cup Y_M$  sont donc disjointes deux à deux et puisque l'arc de rayon correspondant aux  $t \in \left[ \frac{w}{(2^k)^2}, \frac{w}{2^k} \right]$  est connexe, il ne peut évoluer que dans une seule des déterminations de  $(f_C^k)^{-1}(Y_1 \cup \dots \cup Y_M)$ , donc sur  $M$  zones au plus.

Ainsi, chaque fois qu'on prend une image réciproque, on restera sur le même nombre de zones, sauf lorsque la région dont on prend l'image réciproque par  $f_C^k$  contient une valeur critique de  $f_C^k$ . Par les limitations imposées sur la position vis-à-vis de  $Y_1 \cup \dots \cup Y_M$  de l'orbite des points critiques, cela n'arrive que  $M$  fois exactement ; ces fois là, la région dont on prend l'image réciproque par  $f_C^k$  contient une valeur critique exactement, qui est  $f_C^k(\omega)$ . Ses images réciproques sont alors regroupées en  $2^k - 1$  composantes connexes, formées en général de  $M$  zones, sauf celle de  $\omega$  qui est formée de  $2M - 1$  zones. En tout cas, cette opération fait au plus doubler le nombre de zones sur lesquelles évolue le rayon.

Finalement, pour les images réciproques  $n^{\text{èmes}}$ , on a bien la majoration annoncée (par  $M \cdot 2^M$ ). cqfd.

Le rayon, qui ne passe pas par  $\tilde{\omega}$  quand on le regarde sur le cylindre, peut, comme nous l'avons remarqué, être ramené sur  $\alpha$  ou  $\beta$  (en un sens précisé à la fin du a)). Nous allons voir que la seule connaissance de la position du rayon par rapport à  $\tilde{\omega}$  sur le cylindre permet de déterminer  $2^M$  branches (au plus) de  $(f_C^k)^{-n}$  (certaines étant divalues) à appliquer à chacun des  $Y_i$  ( $1 \leq i \leq M$ ) pour obtenir les  $M \cdot 2^M$  (au plus) zones définies plus haut.

Soit en effet  $V$  la région simplement connexe que couvre le rayon quand on le déforme en  $\alpha$  (ou  $\beta$ ) sur  $Y_1 \cup \dots \cup Y_M$  sans rencontrer les points  $(f_C^k)^j(\omega)$  ( $n_0 \leq j \leq n_0 + M - 1$ ).  $(f_C^k)^{-n}(V)$  a alors effectivement  $2^{kn}$  composantes connexes, d'adhérences disjointes ; une seule contient  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ) dans son adhérence. Celle-ci est alors contenue dans la région où évolue effectivement le rayon entre  $\frac{w}{(2^k)^n}$  et  $\frac{w}{(2^k)^{n+1}}$ , car l'homotopie faisant glisser le rayon sur  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ) peut à chaque étape être relevée en une homotopie qui fait glisser le rayon sur  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ) dans  $(f_C^k)^{-i}(Y_1 \cup \dots \cup Y_M)$  ( $0 \leq i \leq n$ ). Les  $2^M$  branches (au plus) de  $(f_C^k)^{-n}$  à considérer sont ainsi celles qui envoient

$Y_1 \cup \dots \cup Y_M$  sur la composante connexe de  $(f_c^k)^{-n}(Y_1 \cup \dots \cup Y_M)$  qui contient  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ) dans son adhérence.

β) Observations sur la dynamique de  $z \mapsto \frac{3z^2+1}{z^2+3}$ .

Nous allons utiliser la conjugaison entre la dynamique de  $f_{c_0}^k$  sur la composante connexe de  $\overset{0}{K}_{c_0}$  adjacente à  $\alpha_1$  et  $F : z \mapsto \frac{3z^2+1}{z^2+3}$  sur  $D$ .

On notera  $\hat{U}^-, \hat{Y}_i$  (pour  $i \geq 0$ ) les transformés de  $U^-(c_0), Y_i(c_0)$  par cette conjugaison ;  $\hat{U}^+$  sera le transformé de l'intersection de  $U^+(c_0)$  avec la composante de  $\overset{0}{K}_{c_0}$  adjacente à  $\alpha_1$ .

Nous serons amenés à introduire une courbe  $\gamma$  dans  $D$  :  $\gamma$  sera définie sur  $\mathbb{R}^*$  et vérifiera :

- (a)  $\text{Im } \gamma \geq 0$
- (b) sur  $[1, 2[$   $\gamma(t) = \frac{t-1}{3-3}$
- (c)  $\gamma(2t) = F[\gamma(t)]$ .

Cette courbe  $\gamma$  est bien définie et unique : en effet (c) permet de la définir sur  $[1, +\infty[$  où elle couvre alors le segment  $[0, 1[$  de l'axe réel ; entre  $\frac{1}{2}$  et 1, la condition (c) laisse deux choix pour chaque valeur de  $\gamma(t)$ , mais (a) fixe alors cette valeur : ainsi sur cet intervalle  $\gamma$  parcourt le segment joignant  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  à 0 ; de même (c) et (a) permettent de déterminer sans ambiguïté  $\gamma$  sur chaque  $[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}[$ . La courbe ainsi obtenue est continue : elle l'est en effet sur chaque intervalle  $[2^p, 2^{p+1}[$ ,  $p \in \mathbb{Z}$  et par construction comme  $\lim_{t \rightarrow 2^-} \gamma(t) = \gamma(2)$ , on a aussi continuité aux points de la forme  $2^p$ .

LEMME 2. Quand  $t$  tend vers zéro,  $\gamma(t)$  tend vers 1 avec tangente verticale.

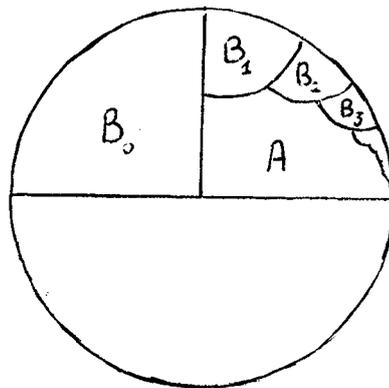
Démonstration : Il sera pratique de faire le changement de variables  $w = \frac{1+z}{1-z}$ . L'application  $F : z \mapsto \frac{3z^2+1}{z^2+3}$  de  $D$  dans  $D$  devient  $F_1 : w \mapsto w + \frac{1}{w}$  du demi-plan  $\text{Re } w > 0$  dans lui-même. La courbe  $\gamma(t)$  est transformée en une courbe  $\eta(t)$  qui vérifie : (a)  $\text{Im } \eta > 0$ , (b) sur  $[1, 2[$   $\eta(t) = t$ , (c)  $\eta(2t) = F_1[\eta(t)]$ . Il est plus pratique de regarder  $\eta'$ , paramétrée par le changement de variables  $\eta'(u) = \eta(2^u)$  : il faut donc montrer que quand  $u \rightarrow -\infty$ ,  $\eta'(u)$  tend vers l'infini dans la direction asymptotique  $y'y$ . Vu l'expression

de  $F_1$ , un point de  $\text{Im } z > 0$  a pour antécédent dans  $\text{Im } z > 0$  un point situé plus à gauche et plus haut ; dès lors pour  $u \leq 1$ ,  $\text{Re } \eta'(u) \leq 2$  : la direction asymptotique sera assurée dès lors que  $\text{Im}[\eta'(u)]$  tendra bien vers  $\infty$  ; par ailleurs, on voit ainsi que si  $\varphi_n(u) = \text{Im}[\eta'(u-n)]$ , la suite  $\varphi_n(u)$  est croissante pour chaque  $u \in [0,1]$ . Mais pour  $u \in [0,1]$  fixé, la suite des  $\eta'(u-n)$  a une limite (éventuellement infinie), puisque sa partie réelle décroît et sa partie imaginaire croît. Cette limite doit être un point fixe de  $F_1$ , donc l'infini : dès lors la suite  $\varphi_n$  tend simplement vers l'infini, donc uniformément par le théorème de Dini, ce qui assure que  $\eta'(u) \rightarrow \infty$  quand  $u \rightarrow -\infty$ . cqfd.

La courbe  $\gamma$  délimite donc une zone  $A$  dans  $D$ .

On notera  $B_0$  le quart supérieur gauche de  $D$

$$B_{i+1} = [F^{-1}(B_i)] \cap (\text{Im } z > 0)$$



LEMME 3. Les  $B_i$  tendent vers 1 quand  $i \rightarrow \infty$  (en ce sens que  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists i_0$  tel que  $\forall i \geq i_0$ ,  $\forall z \in B_i$ ,  $|1-z| < \varepsilon$ ).

Démonstration : Si ce n'était pas le cas, les  $B_i$  auraient un point d'accumulation  $a$  autre que 1 dans  $\bar{D}$ . Ce point ne serait pas sur  $\partial D$  : en effet, la monotonie de l'action de  $F$  sur  $\partial D$  garantit que tout point de  $\partial D$  finit par tomber sur  $\partial B_1$  ; or toute image directe de  $a$  doit être aussi un point d'accumulation de la suite  $B_i$ .

$a$  est donc dans  $D$ , et son orbite est "piégée" dans  $(\text{Im } z > 0) - (B_0 \cup A)$ .

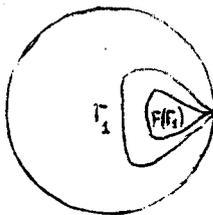
Mais le lemme 2 rend alors impossible que les  $F^n(a)$  tendent vers 0 tangentiellement au rayon, d'où une contradiction, compte tenu de la proposition 2

de [PPIR] . cqfd.

$\gamma$ ) Choix de N .

Nous allons maintenant appliquer ces considérations sur la dynamique de  $F$  pour obtenir des informations sur  $F^{-n}(\hat{Y}_1 \cup \dots \cup \hat{Y}_M)$ .

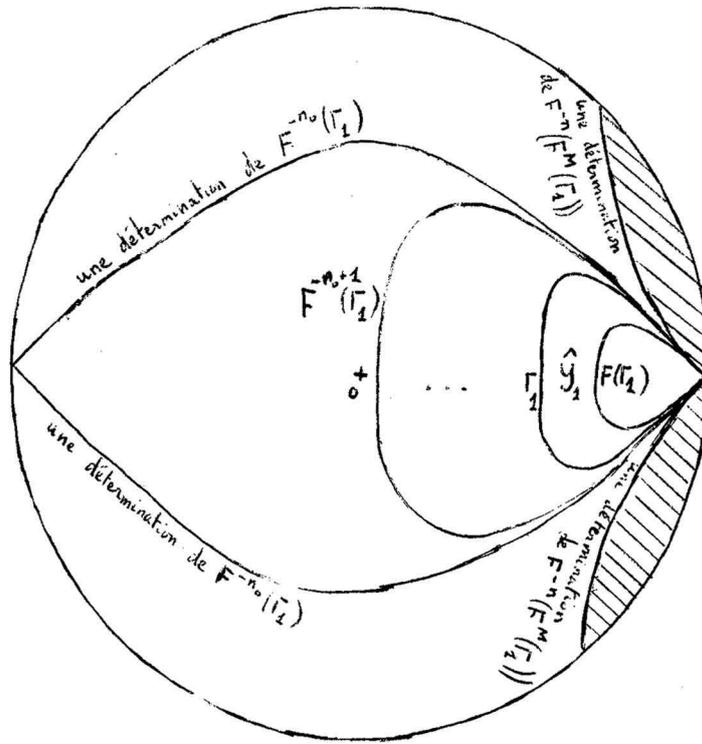
Regardons l'aspect de  $\hat{Y}_1$  : il est limité par deux courbes  $\Gamma_1$  et  $F(\Gamma_1)$  admettant des tangentes en  $1$ , qui font l'angle  $\pm \frac{\pi}{4}$  avec l'axe réel.



Quitte à grossir  $R$ , on peut les supposer incluses dans la réunion de l'adhérence de  $A$  et celle de la région conjuguée de  $A$  (il vaut mieux ne pas essayer de noter cela avec les notations usuelles !), transverses à l'axe réel en un seul point.

Motivés en cela par l'étude faite en  $\alpha$ , on va s'intéresser seulement aux branches de  $F^{-n}$  qui envoient  $\hat{Y}_1 \cup \dots \cup \hat{Y}_M$  dans une région qui contient  $1$  dans son adhérence.

Ces composantes connexes de  $F^{-n}(\hat{Y}_1 \cup \dots \cup \hat{Y}_M)$  sont alors dans les régions limitées par le bord du disque et les deux déterminations de  $F^{-n}(F^M(\Gamma_1))$  qui partent de  $1$  : (cf. zone hachurée dans le schéma ci-dessous).



LEMME 4. Il existe  $N_0$  tel que pour  $N \geq N_0$ , les deux composantes connexes de  $F^{-n}(\hat{Y}_1 \cup \dots \cup \hat{Y}_M)$  qui contiennent 1 dans leur adhérence soient dans  $\hat{U}^+$ .

Démonstration : Il suffit bien évidemment de le montrer pour la composante connexe de  $F^{-n}(\hat{Y}_1 \cup \dots \cup \hat{Y}_M)$  située au-dessus de l'axe réel.

Celle-ci est dans la région limitée par le bord de  $D$  et une courbe, détermination de  $F^{-N}[F^M(\Gamma_1)]$ .

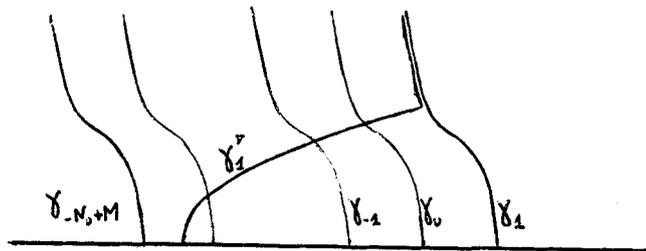
La courbe  $\Gamma_1^+$  qui limite  $\hat{U}^+$  est, elle, formée d'un arc dans  $A$ , qui coïncide avec  $\Gamma_1$  au voisinage de 1, puis la quitte pour rejoindre  $\partial D$ , délimitant ainsi une région (la "moitié" supérieure de  $\hat{U}^+$ ) dans  $D$ .

Il suffit donc de montrer que pour  $N$  assez grand,  $F^{-N+M}(\Gamma_1)$  (où on prend la détermination de partie imaginaire positive issue de 1) est dans cette région.

On va distinguer  $F^{-N+M}(\Gamma_1 \cap A)$  et  $F^{-N+M}(\Gamma_1 \cap \bar{A})$  (ici  $\bar{A}$  désigne la conjuguée de  $A$ ).

$F$  restreint à  $A$  est bijectif : on peut donc conjuguer cette restriction de  $F$  à  $A$  à une transformation bijective  $g$  du demi-plan de Poincaré ;  $F|_A$  a un point fixe indifférent sur  $\partial A$  : on peut donc choisir pour  $g$  la transformation parabolique  $g(Z) = Z+1$ .

La courbe  $\Gamma_1 \cap A$  est alors représentée dans ce modèle comme une courbe  $\gamma_1$  joignant un point de l'axe réel à  $\infty$ , avec une direction asymptotique  $y'y$  (correspondant à la tangente à  $\Gamma_1$  faisant un angle de  $\frac{\pi}{4}$  avec l'axe réel), et  $\Gamma'_1 \cap A$  est représentée comme une courbe  $\gamma'_1$  coïncidant avec  $\gamma_1$  au voisinage de l'infini et aboutissant en un point de l'axe réel plus à gauche que le bout de  $\gamma_1$  ; la détermination de  $F^{-1}$  à appliquer à  $\gamma_1$  pour trouver  $\gamma_{-N+M}$  (correspondant à  $F^{-N+M}(\Gamma_1 \cap A)$ ) est  $Z \rightarrow Z-1$  : il est clair que pour  $N$  assez grand, on est à gauche de  $\gamma'_1$ , et donc  $F^{-N+M}(\Gamma_1 \cap A)$  est dans  $\hat{U}^+$ .



Pour  $F^{-N+M}(\Gamma_1 \cap \bar{A})$ , on va utiliser le lemme 3 : par l'hypothèse faite au début de cette partie  $\gamma$  de la démonstration sur la position de  $\Gamma_1$ ,  $F^{-N+M}(\Gamma_1 \cap \bar{A})$  évolue dans  $B_{N-n_0-M}$  (pour  $N \geq n_0+M$ ), donc est proche de 1 pour  $N$  assez grand, et est donc aussi dans  $\hat{U}^+$ . cqfd.

$\delta)$  Un tel  $N$  convient.

On va prendre un  $N \geq N_0$  (avec en fait la condition supplémentaire  $0,3(N-M) \geq 2K$ , dont la nécessité apparaîtra dans les calculs qui suivent), et vérifier qu'il répond à l'énoncé de la proposition 7.

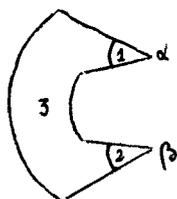
Les branches de  $(f_c^k)^{-N}$  qui, appliquées à  $Y_1, \dots, Y_M$  fournissent des régions dans lesquelles peut évoluer  $R_{K_c}$  entre  $\frac{w}{(2^k)^N}$  et  $\frac{w}{(2^k)^{N+1}}$  sont en nombre fini indépendant de  $c$  ; elles définissent ainsi un certain nombre de

"zones" images de  $Y$  par itération de branches de  $(f_c^k)^{-1}$ . Pour  $c = c_0$ , on a prouvé en  $\gamma$  que ces zones sont toutes dans  $U^+$ .

La plupart de ces régions (toutes sauf  $2M$ ) ne contiennent pas  $\alpha_1$  dans leur adhérence (pour  $c = c_0$ ) : elles sont alors relativement compactes dans  $U^+(c_0)$  et restent incluses dans  $U^+(c)$  pour  $c$  proche de  $c_0$  dans  $\theta$ .

Pour les  $2M$  autres, il faut étudier avec un peu plus d'attention le comportement de  $f_c^k$  au voisinage de  $\alpha$  ou  $\beta$ .

On va couper  $Y_1$  en trois morceaux : deux sont limités par de petits arcs de cercles autour de  $\alpha$  et de  $\beta$  ; le troisième est le reste de  $Y_1$ .



Ce troisième morceau ne posera pas de problèmes : pour  $c = c_0$ , il ne contient pas  $\alpha_1$  dans son adhérence.

Regardons le morceau proche de  $\alpha$  : dans le plan des  $Z$ , il correspond à un secteur proche de  $-\infty$  du côté des  $\text{Im } Z < 0$ . Il est limité par une courbe qui reste à distance  $R'$  de zéro. Quitte à diminuer la taille des petits cercles divisant  $Y_1$  en trois zones, on peut supposer  $R'$  aussi grand que nécessaire, et en particulier  $R' > R$ .

$N$  étant choisi, pour  $R'$  choisi assez grand, la détermination de  $(f_c^k)^{-1}$  à itérer  $i$  fois ( $N-M+1 \leq i \leq N$ ) et à appliquer à  $Y_1$  pour fournir les  $M$  zones proches de  $\alpha$  considérées s'écrit  $Z = (1 + \frac{1}{A_\lambda})^{-1} Z' + 1$  à un terme d'erreur près, dont le module est majoré par  $\frac{a}{100}$  (il suffit de prendre  $R'$  assez grand pour être sûr de rester hors de  $\bar{D}_R$  pendant  $N$  itérations de ce  $(f_c^k)^{-1}$ ). Pour  $R'$  choisi assez grand et  $c$  assez proche de  $c_0$  la partie réelle est augmentée alors d'au moins  $0,9$  à chaque application de  $(f_c^k)^{-1}$  et on est sûr de se retrouver en fin de compte après  $i$  itérations ( $N-M+1 \leq i \leq N$ ) dans  $\text{Re } Z > 0$ ,  $\text{Im } Z < 0$  : le petit secteur autour de  $\alpha$  dans  $Y_1$  est bien envoyé dans  $U^+(c)$  par  $(f_c^k)^{-N-M+1} \dots (f_c^k)^{-N}$  pour  $c$  assez proche de  $c_0$ .

Le calcul est un peu plus délicat près de  $\beta$ . Ici on utilise le fait que  $A'_\lambda$ , donc aussi la coupure faite entre  $A'_\lambda$  et  $iR$ , varie entre deux verticales  $\text{Im } Z = -K$  et  $\text{Im } Z = K$ .

Pour  $|Z-A| > \frac{A}{2}$ ,  $(f_c^k)^{-1}$  est approchée par la similitude  $Z: (1+\frac{1}{A})^{-1} Z'+1$  qui augmente la partie réelle d'au moins 0,4 dans la zone considérée, pour  $c$  assez proche de  $c_0$ ; si on tient compte de l'erreur majorée par  $\frac{a}{100}$  on est sûr que la partie réelle sera augmentée d'au moins 0,3. Ici on va utiliser la condition supplémentaire  $0,3.(N-M) < 2K$ . On choisit  $R'$  assez grand pour être sûr que les  $N$  itérations de  $(f_c^k)^{-1}$  ne laissent pas dans le plan des  $Z$  entrer dans  $\bar{D}_R$  et continuent à augmenter la partie réelle d'au moins 0,3; dès lors on est sûr (pour  $c$  assez proche de  $c_0$ ) qu'en  $i$  itérations ( $N-M+1 \leq i \leq N$ ) on est à droite de  $\text{Im } Z = K$ .

Pour  $|Z-A| \leq \frac{A}{2}$ , les inégalités de "Arriver au bon port" montrent que,  $(f_c^k)^{-1}$  ressemble à la similitude de centre  $A'$  et de rapport  $(1+\frac{1}{A})^{-1}$  à  $\frac{2a}{100|A|} |Z-A'_\lambda|$  près; son itération  $i^{\text{ème}}$  ( $N-M+1 \leq i \leq N$ ) décale donc comme cette similitude à  $\frac{2ai}{100|A|} |Z-A'_\lambda|$  près; ce qui garantit qu'on a effectivement tourné et qu'on est "à droite" de la coupure entre  $A'$  et  $iR$ .

c) Construction d'un piège.

Pour  $c$  proche de  $c_0$ , on a un  $s(c)$  tel que  $R_{K_c}(\theta)(s)$  soit sur la courbe de sortie et qu'entre  $s$  et  $\frac{s}{2^k}$ ,  $R_{K_c}(\theta)$  évolue dans  $U^+(c)$ .

$R_{K_c}(\theta)$  finit par rencontrer la courbe d'entrée pour un potentiel  $w(c)$ .

La proposition 8 montre alors que (pour  $c$  assez proche de  $c_0$ ), il existe alors  $t \leq w(c)$  tel que sur  $[\frac{t}{2^k}, t] R_{K_c}(\theta)$  évolue de nouveau dans  $U^+(c)$ .

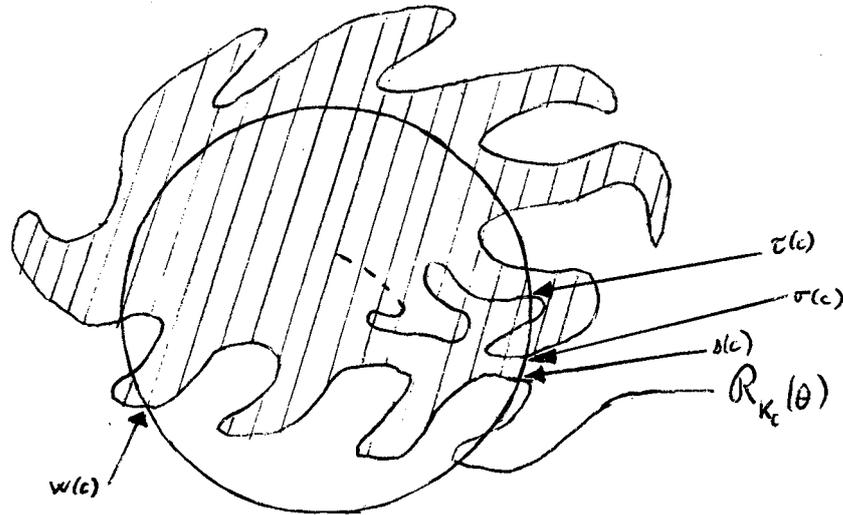
Posons  $\tau(c) = \sup\{t/t \leq w \text{ et sur } [\frac{t}{2^k}, t], R_{K_c}(\theta) \text{ évolue dans } U^+(c)\}$ .

Dès lors  $R_{K_c}(\theta)(\tau(c))$  est sur la courbe de sortie  $\Gamma$ .

Entre  $\tau(c)$  et  $w(c)$  il se peut que  $R_{K_c}(\theta)$  rencontre  $\Gamma$  en un certain nombre de points; j'appelle  $\sigma(c)$  le paramètre compris entre  $\tau(c)$  et  $w(c)$

correspondant au point d'intersection de  $\Gamma$  et de  $R_{K_C}(\theta) | [\tau(c), w(c)]$  le plus proche de  $R_{K_C}(\theta) [s(c)]$  (du même côté que  $R_{K_C}(\theta) [\tau(c)]$ ).

La zone piège  $P$  est alors définie comme l'ouvert limité par  $R_{K_C} | [\sigma(c), s(c)]$  et  $\Gamma$  entre  $R_{K_C}(\theta) [\sigma(c)]$  et  $R_{K_C}(\theta) [s(c)]$ .



Remarquons que pour  $c$  assez proche de  $c_0$ ,  $\bar{P}$  ne contient aucune des valeurs critiques de  $f_c^k$  : en effet en ce qui concerne les  $f_c^k(\omega')$  pour des  $\omega'$  distincts de  $\omega(c)$ , lorsque  $c = c_0$ , ils ne sont pas dans la région couverte par les images des  $2 \cdot 2^M \cdot M$  branches de  $(f_{c_0}^k)^{-1}$  (pour  $N-M+1 \leq i \leq N$ ) dont l'application à  $Y_1$  fournit la région où peut évoluer entre  $\frac{1}{(2^k)^N}$  et  $\frac{1}{(2^k)^{N+1}}$  une courbe continue  $\gamma$  vérifiant  $\gamma(2t) = f_{c_0}^k(\gamma(t))$  et évoluant dans  $Y_1 \cup \dots \cup Y_M$  entre 1 et  $2^k$  ; ils n'y sont donc toujours pas pour  $c$  voisin de  $c_0$ . Ils ne sont pas non plus dans  $U(c)$  pour  $c$  proche de  $c_0$ , donc ne sont pas dans  $\bar{P}$ .

Le même raisonnement montre que les  $\omega''$  distincts de  $\omega$  tels que  $f_c^k(\omega'') = f_c^k(\omega)$  ne sont pas non plus dans  $\bar{P}$ .

De plus, on dispose d'une détermination continue de  $(f_c^k)^{-1}$  sur  $\partial P$  (égale à  $R_{K_C}(\theta)(u) \mapsto R_{K_C}(\theta)\left(\frac{u}{2^k}\right)$  sur la partie de  $P$  formée d'un arc du

rayon  $R_{K_C}(\theta)$  et par la détermination de  $(f_C^k)^{-1}$  qui envoie  $W_0$  sur  $W_{-1}$  sur la partie de  $\partial P$  formée d'un arc de  $\Gamma$ , qui envoie  $\partial P$  sur une courbe fermée simple  $\partial P'$  incluse dans  $\bar{P}$ .

Si  $f_C^k(\omega)$  était dans  $\bar{P}$ , un de ses antécédents devrait être dans  $\bar{P}'$ . Puisqu'aucun des  $\omega'' \neq \omega$  tels que  $f_C^k(\omega'') = f_C^k(\omega)$  n'y est, ce serait forcément  $\omega$ . Mais on a alors une absurdité, car si  $\omega \in P'$ ,  $f_C^k$  envierait  $P'$ , courbe fermée simple enserrant un seul point critique sur une courbe fermée simple, et si  $\omega$  était sur  $\partial P'$ , il serait sur  $R_{K_C}(\theta)$  donc  $c$  serait sur  $R_M(2^i \theta)$ , ce qu'on a exclu.

La détermination continue de  $(f_C^k)^{-1}$  qui envoie  $\partial P$  sur  $\partial P'$  se prolonge alors en une branche holomorphe univaluée de  $(f_C^k)^{-1}$  qui envoie  $P$  dans lui-même.

Remarquons enfin, ce qui sera utile par la suite, que pour  $m \geq 0$  fixé, si on prend  $c$  assez proche de  $c_0$  (la condition de proximité dépend de  $m$ ), on est assuré par le même raisonnement qu'aucun des  $(f_C^k)^i(\omega')$  pour  $\omega'$  point critique de  $f_C^k$  distinct de  $\omega$  et  $1 \leq i \leq m$ , non plus que les  $\omega'' \neq \omega$  tels que  $(f_C^k)^m(\omega'') = (f_C^k)^m(\omega)$  ne sont dans  $\bar{P}$ ; comme  $f_C^k(\omega)$  n'est pas dans  $\bar{P}$  et que tout point de  $\bar{P}$  a un antécédent dans  $\bar{P}$ , on en déduit que les  $(f_C^k)^i(\omega)$  ( $1 \leq i \leq m$ ) n'y sont pas non plus. En termes de  $f_C$ , cela signifie que les  $f_C^i(0)$  ne sont pas dans  $\bar{P}$  pour  $1 \leq i \leq km$ .

Nous avons alors le matériel pour démontrer les trois propositions annoncées :

PREUVE DE LA PROPOSITION 3.

Pour  $t \leq \sigma(c)$ ,  $R_{K_C}(\theta)(t)$  évolue dans  $P$  : en effet, on voit par récurrence sur  $n \geq -1$  que la branche de  $(f_C^k)^{-1}$  à choisir pour passer de

$R_{K_C}(\theta) \left| \left[ \frac{\sigma(c)}{(2^k)^{n+1}}, \frac{\sigma(c)}{(2^k)^n} \right] \right.$  à  $R_{K_C}(\theta) \left| \left[ \frac{\sigma(c)}{(2^k)^{n+2}}, \frac{\sigma(c)}{(2^k)^{n+1}} \right] \right.$  envoie  $R_{K_C}(\theta) \left[ \frac{\sigma(c)}{(2^k)^n} \right]$  qui est

dans  $\bar{P}$  sur  $R_{K_C}(\theta) \left[ \frac{\sigma(c)}{(2^k)^{n+1}} \right]$  qui est aussi dans  $\bar{P}$  et est donc la branche qui

envoie  $\bar{P}$  dans lui-même.

$(f_C^k)^{-1}$ , de degré 1 d'un ouvert de  $\mathbb{C}$  dans un ouvert strictement contenu dans le premier est strictement contractante pour la métrique de Poincaré de  $P$ ; elle a un point fixe qui est  $\alpha$  ou  $\beta$  (selon la position sur le cylindre du lacet correspondant à la première entrée du rayon) : la suite des  $(f_C^k)^{-n}(u)$  converge donc vers  $\alpha$  ou  $\beta$ . cqfd.

PREUVE DE LA PROPOSITION 4.

On a remarqué que  $\bar{P}$  ne contient aucun des  $f_C^i(0)$  ( $1 \leq i \leq km$ ) pour  $c$  assez proche de  $c_0$ ; comme  $R_{K_C}(\theta) \left| \left[ \frac{s(c)}{2^k}, +\infty \right[ \right.$  est continu en  $c$ , il ne passe pour  $c$  proche de  $c_0$  sur aucun des  $f_C^i(0)$  ( $1 \leq i \leq km$ ) et  $R_{K_C}(\theta) \left| \left[ 0, \frac{s(c)}{2} \right] \right.$  non plus, puisqu'il est inclus dans  $\bar{P}$ . cqfd.

PREUVE DU COMPLÉMENT 2 AU THÉORÈME 1 DE [AREMAR].

Nous savons déjà ([AREMAR - Complément 1 au lemme 1]) que si le complément 2 n'était pas exact, ce serait qu'un rayon externe de  $M$  dont l'argument est à dénominateur pour  $\theta_1$  aboutit sur une racine  $c_0$  de composante hyperbolique. Considérons  $n$  tel que  $2^n \theta_1$  soit à dénominateur impair. Il existe alors des  $c$  arbitrairement proches de  $c_0$  tels que  $c \in R_M(\theta_1)$  donc  $c \in R_{K_C}(\theta_1)$  et donc  $f_C^n(c) = f_C^{n+1}(0) \in R_{K_C}(2^n \theta_1)$ .

\* Si  $R_{K_{C_0}}(2^n \theta_1)$  aboutit sur un point d'un cycle répulsif,  $\overline{R_{K_C}(\theta_1)}$  varie continûment comme fonction de  $c$  au voisinage de  $c_0$ , donc  $\overline{R_{K_{C_0}}(\theta_1)}$  passe sur  $c_0$ , ce qui est absurde puisque  $c_0 \in \overset{\circ}{K}_{C_0}$ .

\* Si  $R_{K_{C_0}}(2^n \theta_1)$  aboutit sur un point du cycle indifférent rationnel, on peut (quitte à modifier  $n$ ) supposer que  $c$  est sur  $\alpha_1$ . Mais alors le fait que l'on puisse trouver  $c$  arbitrairement proche de  $c_0$  tel que  $f_C^{n+1}(0) \in R_{K_C}(2^n \theta_1)$  contredit la proposition 4. cqfd.

PREUVE DE LA PROPOSITION 5.

La position du rayon par rapport aux  $f_c^i(0)$  ( $1 \leq i \leq km$ ) ne change pas, à condition que  $c$  soit assez proche de  $c_0$ . Pour donner un sens précis à cette remarque, compactifions  $\mathbb{C}$  par un point à l'infini dans chaque direction de demi-droites et prolongeons les  $R_{K_c}(\theta)$  en prenant pour  $R_{K_c}(\theta)(\infty)$  le point à l'infini dans la direction  $\theta$  : le rayon est alors continu sur  $[0, \infty]$ .

Dans l'espace  $\hat{\mathbb{C}}$  ainsi construit, pour  $c$  assez proche de  $c_0$  et pas sur  $R_M(2^i \theta)$ , le rayon  $R_{K_c}(\theta)$  est homotope à extrémités fixes à une courbe  $\eta_c$  égale à  $R_{K_c}(\theta)$  sur  $[s(c), +\infty]$  et à un segment de droite entre  $\alpha$  ou  $\beta$  et  $R_{K_c}(\theta)[s(c)]$ , sans passer sur les  $f_c^i(0)$  ( $1 \leq i \leq km$ ).

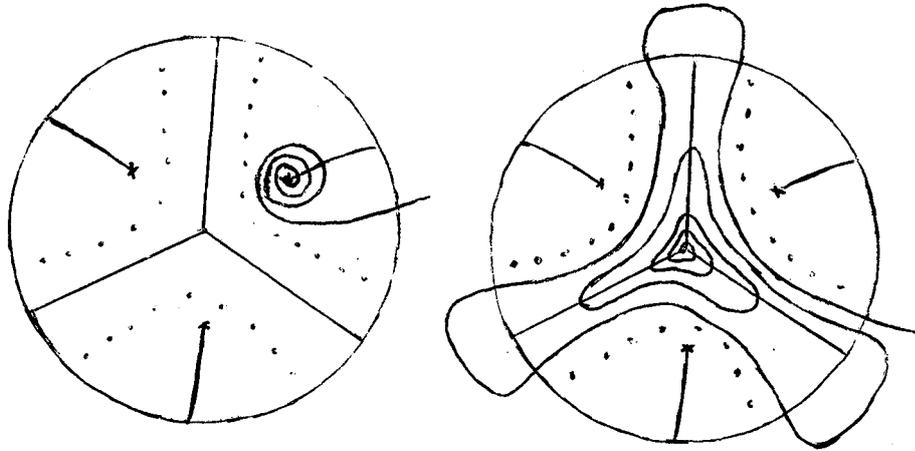
Ainsi  $R_{K_c}(\theta)$  n'est pas continu en fonction de  $c$ , mais est homotope à  $\eta_c$ , qui, elle, est continue en  $c$ . L'extrémité de  $R_{K_c}(\theta_1)$  pour  $2^n \theta_1 = \theta$  (avec  $n \leq km$ ) est alors égale à l'extrémité de la détermination de  $(f_c)^{-n}(\eta_c)$  qui envoie le point à l'infini dans la direction  $\theta$  sur le point à l'infini dans la direction  $\theta_1$ .

Le même raisonnement que dans le cas des points de Misurewicz, compte tenu du fait que l'homotopie se passe à chaque étape dans l'espace  $F$  défini alors, montre que cette extrémité est une fonction continue de  $c$ . cqfd.

Remarque. Lorsque  $q \neq 1$ , on a  $2q$  cylindres et non plus deux. On peut cependant reprendre le même raisonnement à partir de l'entrée du rayon dans l'un des cylindres, et limiter sa distorsion. Si on est du côté de  $\beta_1$ , alors le raisonnement fait dans le cas  $q=1$  montre qu'en un temps borné, on revient dans la zone définissant le premier cylindre, et on peut construire le même piège autour de  $\beta_1$  qu'on avait construit dans le cas  $q=1$ .

Si on est du côté du bout en  $\alpha$  sur le cylindre, après avoir traversé la zone correspondant à un premier cylindre, on tombera en un temps fini sur un deuxième. Mais on sera là encore du côté du bout en  $\alpha$  : pour  $c$  assez proche de  $c_0$ , le rayon évolue en effet dans un pétale de  $K_{c_0}$  pendant son éventuel passage hors des zones fournissant les cylindres : on traverse ainsi un deuxième cylindre, avec de nouveau des limitations sur la distorsion du rayon pendant

cette traversée. Après avoir traversé les  $2q$  zones fournissant des cylindres, le rayon revient dans celle où il avait fait sa première entrée, et un piège se referme autour de  $\alpha$ .



EXPOSE N° XVIII

COMPLÉMENTS SUR LES ARBRES

par P. Lavaurs

1. ARBRES AUX CENTRES ET AUX RACINES.

Soit  $W$  une composante hyperbolique de  $\overset{0}{M}$  de multiplicité  $\mu$ , et  $c_1 \dots c_\mu$  ses racines.

Pour tout point  $c \in M$  et  $\theta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ , le rayon  $R_{K_c}(\theta)$  aboutit en un point  $\gamma_c(\theta) \in K_c$  : on peut donc définir une relation d'équivalence  $\sim_c$  sur  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  par  $\theta \sim_c \theta' \iff \gamma_c(\theta) = \gamma_c(\theta')$ .

PROPOSITION 1.  $\sim_c$  est constante sur  $W \cup \{c_1, \dots, c_\mu\}$ .

Démonstration :

\* Constance sur  $W$  :

Pour  $\theta$  et  $\theta'$  fixés, l'ensemble des  $c \in W$  tels que  $\gamma_c(\theta) = \gamma_c(\theta')$  est fermé dans  $W$  puisque ces deux fonctions sont continues en  $c$  (cf. théorème de [PC] (en fait, sur  $W$ , on est dans le cas "facile" de ce théorème)).

Soit  $c_0 \in W$  fixé ; pour  $c$  proche de  $c_0$  les fonctions  $c \mapsto \gamma_c(\theta)$  et  $c \mapsto \gamma_c(\theta')$  fournissent deux points prépériodiques, variant continûment en  $c$ , et envoyés par un nombre d'itérations  $n$  constant, sans passer par 0 sur un cycle de longueur divisant constamment un entier  $p$  fixe. Ces deux fonctions vérifient donc toutes deux l'équation fonctionnelle  $f_c^{n+p}(\alpha(c)) = f_c^p(\alpha(c))$ . Si on suppose  $\theta \sim_{c_0} \theta'$ , le théorème des fonctions implicites assure alors l'égalité de  $\gamma_c(\theta)$  et  $\gamma_c(\theta')$  pour  $c$  proche de  $c_0$  : l'ensemble des  $c$  tels que  $\theta \sim_c \theta'$  est donc aussi ouvert dans  $W$ .

Pour tout couple  $(\theta, \theta')$ ,  $\theta \sim_c \theta'$  est donc vrai soit pour tout  $c \in W$ , soit pour aucun.

\* Conservation aux racines :

Il est encore vrai, pour les mêmes raisons, que pour  $\theta$  et  $\theta'$  fixés, l'ensemble des  $c \in WU\{c_1, \dots, c_\mu\}$  tels que  $\gamma_c(\theta) = \gamma_c(\theta')$  est formé dans  $WU\{c_1, \dots, c_\mu\}$  : la relation d'équivalence est donc plus grossière en une racine que dans  $W$ .

Prenons  $\theta$  et  $\theta'$  équivalents en  $c_1$  par exemple.

Si  $\gamma_{c_1}(\theta) = \gamma_{c_1}(\theta')$  est prépériodique répulsif, le raisonnement fait sur  $W$  peut-être repris sans modification, et on voit que  $\theta$  et  $\theta'$  sont encore équivalents au voisinage de  $c_1$ , donc dans  $W$ .

Si  $\gamma_{c_1}(\theta) = \gamma_{c_1}(\theta')$  est prépériodique indifférent, il faut analyser plus précisément les cycles qui "fusionnent" en  $c_0$  pour fournir le cycle indifférent. Cette analyse a été réalisée au début de [IDC] ; elle montre que si  $\alpha(c_1)$  est sur le cycle indifférent rationnel de  $f_{c_1}$ , il y a  $q+1$  façons de définir  $\alpha(c)$  continue au voisinage de  $c_1$  dans  $W$  qui soit un point périodique de  $f_c$  (l'une est de période  $kq$ , les  $q$  autres de période  $k$ ). Parmi ces  $q+1$  déterminations,  $q$  sont attractives dans  $W$  donc en fait une seule peut recevoir des rayons. Si  $\gamma_{c_1}(\theta) = \gamma_{c_1}(\theta')$  est sur le cycle indifférent rationnel, la continuité de  $\gamma_c(\theta)$  ou  $\gamma_c(\theta')$  en  $c$  implique alors que pour  $c$  proche de  $c_0$ , on ait encore  $\theta \sim_c \theta'$  ; si  $\gamma_{c_1}(\theta) = \gamma_{c_1}(\theta')$  est prépériodique indifférent rationnel, il existe  $n$  tel que  $\gamma_{c_1}(2^n \theta)$  soit indifférent rationnel : comme  $\gamma_c(\theta)$  et  $\gamma_c(\theta')$  vérifient alors tous deux l'équation fonctionnelle  $f_c^n(\gamma_c(\theta)) = f_c^n(\gamma_c(\theta')) = \gamma_c(2^n \theta)$ , ce sont les mêmes branches de  $f_c^{-n}(\gamma_c(\theta))$  et ils sont donc égaux pour  $c$  assez proche de  $c_1$  dans  $W$ . cqfd.

PROPOSITION 2. Soient  $c$  et  $c'$  centres ou racines de composantes hyperboliques ; si  $\sim_c = \sim_{c'}$ ,  $H_c$  et  $H_{c'}$  sont isomorphes.

Démonstration : Nous associons à  $c$  centre ou racine de composante hyperbolique un sous-ensemble (fini)  $\theta_c$  de  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  composé :

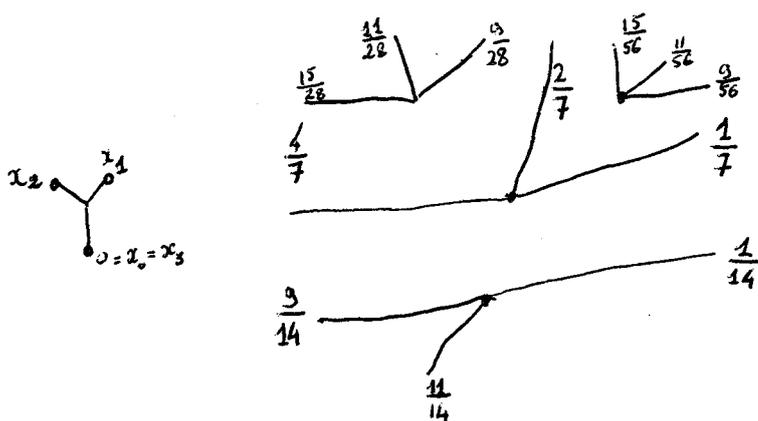
\* des arguments externes des points de branchement de l'arbre de Hubbard de  $f_c$

\* des arguments externes des points de  $\partial U_0, \dots, \partial U_{n-1}$  (où  $U_0 \dots U_{n-1}$  sont les composantes du cycle  $f_c$  périodique pour  $f_c$ ) qui forment un cycle de longueur  $n$

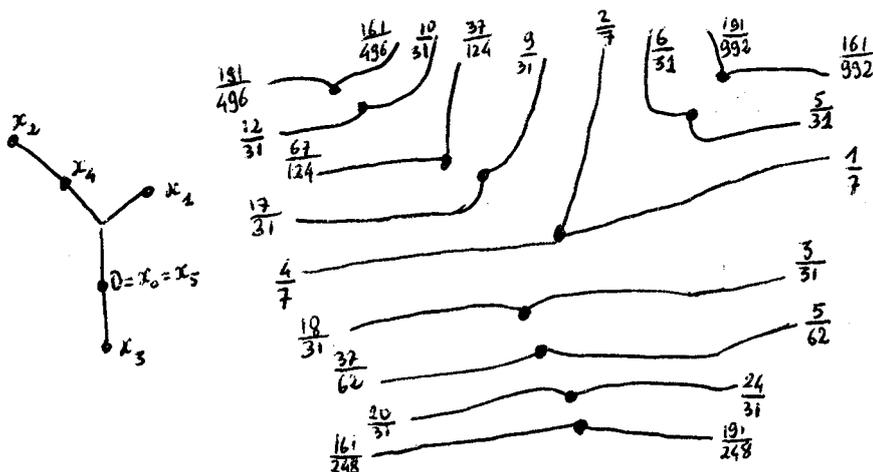
\* des arguments externes des points d'argument interne opposé aux précédents de  $\partial U_0 \dots \partial U_{n-1}$ .

Considérons  $\theta \cup \theta'$  : la restriction de  $\sim$  à cet ensemble est la même pour  $c$  et  $c'$ . Les rayons externes ayant ces arguments dessinent donc le "même" motif dans le plan (au sens de l'existence d'un homéomorphisme du plan conservant les directions à l'infini) pour  $K_c$  et  $K_{c'}$ .

Exemples : \*  $c$  aboutissement du rayon externe de  $M$  d'argument  $\frac{1}{7}$



\*  $c$  aboutissement de rayon externe de  $M$  d'argument  $\frac{5}{31}$



Ce motif divise le plan en un certain nombre de zones.

LEMME. Pour tout  $i > 0$ ,  $f^i(0)$  est dans la même zone pour  $c$  et pour  $c'$ .

Démonstration : On va montrer que pour  $\theta, \theta' \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  équivalents pour  $\sim_c = \sim_{c'}$ , et distincts, on sait placer  $f^i(0)$  par rapport à la courbe allant de  $\infty$  à  $\infty$  par  $R_{K_c}(\theta) \cup R_{K_c}(\theta')$  ou  $R_{K_{c'}}(\theta) \cup R_{K_{c'}}(\theta')$ .

Pour  $i=0$ , c'est évident :  $K_c$  (ou  $K_{c'}$ ) étant symétrique par rapport à  $0$ ,  $0$  est du côté qui laisse le plus grand arc entre  $\theta$  et  $\theta'$  sur le cercle  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

On va ensuite faire une récurrence sur  $i$  :  $R_{K_c} \theta$  et  $R_{K_c} \theta'$  n'aboutissent pas en zéro, donc  $\theta \neq \theta' + \frac{1}{2}$  :  $\theta$  et  $\theta'$  ont au total quatre "moitiés",  $\frac{\theta}{2}$ ,  $\frac{\theta'}{2}$ ,  $\frac{\theta+1}{2}$  et  $\frac{\theta'+1}{2}$ . Les rayons indexés par celles-ci se regroupent sur  $K_c$  en deux points envoyés par  $f_c$  sur l'aboutissement de  $R_c(\theta)$ . Puisque  $\sim_c = \sim_{c'}$ , les rayons pour  $K_{c'}$  se regroupent deux à deux de la même manière, divisant ainsi le plan en trois zones ; par l'hypothèse de récurrence on sait placer  $f^i(0)$  par rapport à ces trois zones ; on en déduit alors le placement de  $f^{i+1}(0)$  par rapport à  $\underline{R_K(\theta)} \cup \underline{R_K(\theta')}$ , qui est donc le même pour  $c$  et pour  $c'$ , cqfd.

On va alors déduire du lemme que  $H$  est le même en  $c$  et  $c'$ .

Remarquons pour cela que : \* il y a au plus un point marqué de  $H_c$  (ou de  $H_{c'}$ , puisque le lemme a montré qu'ils sont placés de la même façon) par zone : c'est dans ce but que l'on a mis dans  $\Theta_c$  des rayons aboutissant en deux points de chacune des composantes du cycle de composantes de  $\overset{O}{K}_c$

\* les points de branchement de  $H_c$  ou  $H_{c'}$  sont tous des points où se regroupent 3 zones au moins des motifs formés par celles-ci.

Dès lors, il n'y a qu'une manière, du point de vue de la topologie et de l'isotopie du plongement dans  $\mathbb{C}$  de joindre les divers points marqués : sur la frontière de chaque zone, formée d'une ou deux courbes on met un point de sortie par courbe, et l'arbre doit passer par ces points de sortie pour joindre les points marqués. cqfd.

## 2. ARBRE EN UNE BIFURCATION.

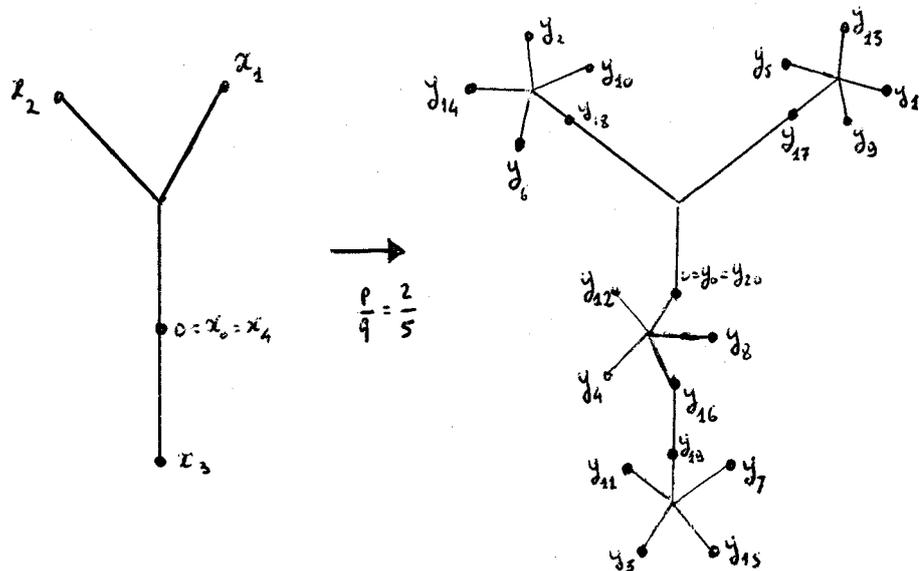
Soit  $W$  une composante hyperbolique de  $\overset{O}{M}$ ,  $\rho(c)$  la valeur propre pour  $f_c$  du cycle qui est attractif dans  $W$ . Nous allons décrire comment obtenir l'arbre  $H'$  d'un point  $c$  de  $\partial W$  où  $\rho(c) = e^{\frac{2i\pi p}{q}}$  avec  $\text{pgcd}(p,q) = 1$ ,  $q \neq 1$  (le cas  $q=1$  a été traité au 1), en fonction de l'arbre de Hubbard  $H$  aux centres de  $W$ . Nous dirons que  $H'$  est obtenu à partir de  $H$  par bifurcation d'argument  $e^{\frac{2i\pi p}{q}}$ . (Pour parler rigoureusement, c'est bien sûr la classe d'isomorphisme de l'arbre que nous construisons).

DESCRIPTION DE LA CONSTRUCTION :

Soient  $(x_i)_{0 \leq i \leq k-1}$  les points marqués de  $H$ . Remplaçons chacun des  $x_i$  par une petite étoile à  $q$  branches, de centre  $x_i$ , d'extrémités  $(y_j)_{j=i+lq}$   $0 \leq l \leq q-1$ , numérotés de façon que la rotation de  $\frac{p}{q}$  tour autour de  $x_i$  applique  $y_j$  sur  $y_{j+k}$  (mod  $kq$ ). On a ainsi des points  $y_0, \dots, y_{kq-1}$ .

Quand un brin de  $H$  arrive en un point  $x_i$ , on le fait arriver en l'un des  $y_j$  avec  $j \equiv i \pmod k$ . Il y a une manière unique de faire cela de façon que l'arbre  $H'$  obtenu, muni des  $y_i$ , satisfasse à la condition de Hubbard :  $\exists F: H' \rightarrow H'$ , continue injective sur chacune des composantes de  $H'$  coupé en  $y_0$ , avec  $F(y_i) = y_{i+1}$ ,  $F(y_{kq-1}) = y_0$ .

Exemple :



JUSTIFICATION DE LA CONSTRUCTION :

Soit  $c_1$  un centre de  $U$ , et considérons  $\Theta_{c_1}$  défini comme au début de la preuve de la proposition 2. Le raisonnement de la proposition 1 montre immédiatement que le graphe de  $\sim_c$  contient celui de  $\sim_{c_1}$ ; de surcroît les points d'aboutissement des rayons indexés par  $\Theta_c$  aboutissent dans  $K_{c_1}$  sur des points périodiques répulsifs ou prépériodiques répulsifs sans être sur l'orbite inverse de zéro, donc qui ne "fusionnent" pas : comme en une racine, nous voyons donc que ces rayons dessinent le "même motif" dans le plan de  $K_{c_1}$  et celui de  $K_c$  (ici,

on n'a à utiliser que le cas "facile" de [PC]). Le lemme de la proposition 2 peut alors être appliqué : on sait placer les  $(y_i)_{0 \leq i \leq kq-1}$  par rapport aux rayons de  $\Theta_c$ . L'arbre  $H'$  s'obtient donc en remplaçant dans l'arbre  $H$  le point  $(x_i)_{0 \leq i \leq k-1}$  par le sous-arbre engendré par les  $(y_j)_{j=i+\ell k} \quad 0 \leq \ell \leq q-1$ . Or ce sous-arbre est associé aux  $q$  composantes adjacentes à un point périodique de période  $k$  : c'est donc bien l'étoile à  $q$  branches décrite.

$H'$ , isomorphe à l'arbre de Hubbard pour un  $c$  racine de composante hyperbolique vérifie la condition de Hubbard.

Il reste à vérifier que cette construction n'est pas ambiguë, c'est-à-dire qu'il y a bien une manière unique de placer les étoiles sur  $H$ . Mais,  $\delta$  désignant le degré, la condition de Hubbard entraîne aisément (cf. [AH Prop. 4]),  $\delta(y_0) = 2$ ,  $\delta(y_1) = 1 \leq \delta(y_2) \dots \leq \delta(y_{kq-1}) \leq 2 = \delta(y_{kq})$  (en posant  $y_{kq} = y_0$ ) ; en  $x_1$ , il sera donc nécessaire d'attacher l'étoile à  $H$  par son sommet ayant le plus grand indice.

Enfin l'injectivité de  $F$  sur les deux composantes de  $H'$  coupé en  $y_0$  permet de déterminer comment les étoiles sont envoyées les unes vers les autres (le chemin partant vers l'étoile contenant  $y_0$  étant envoyé sur le chemin partant vers l'étoile contenant  $y_1$ ), donc de compléter la numérotation des points  $(y_i)_{0 \leq i \leq kq-1}$  sur les étoiles. cqfd.

### 3. CALCUL DES ARGUMENTS EXTERNES DANS $M$ .

Soient  $c_1$  une racine d'une composante hyperbolique  $W$  de  $\overset{\circ}{M}$  et  $H$  son arbre de Hubbard. Nous allons montrer comment on obtient ses arguments externes dans  $M$  au vu de l'arbre  $H$ . Soient  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = c \dots x_k = x_0$  les points marqués de  $H$  (où  $k$  est la période de  $x_0$ ). Choisissons une application  $F: H_c \rightarrow H_c$  continue, telle que  $F(x_i) = x_{i+1}$ , injective sur chaque composante de  $H_c$  coupé en  $0$ . On suppose qu'on a choisi  $F$  de façon qu'elle ait un point périodique  $\alpha_1$  à l'intérieur de l'arête qui mène à  $x_1$  (rappelons que  $x_1$  est une extrémité de  $H_c$ ). La période de  $\alpha_1$  est alors  $k$ . Les arguments  $\theta_- = \text{Arg}_-(c)$  et  $\theta_+ = \text{Arg}_+(c)$  sont alors les deux arguments de  $\alpha_1$ , calculés suivant l'algorithme décrit en [AEJ, §4] (qui n'utilise que les données combinatoires).

Variante. On peut (comme dans la note CRAS de janvier 82) mettre  $\alpha_1$  en  $x_1$ , mais on met seulement 1 bourgeon aux points extrémaux de  $H_C$  (au lieu d'une infinité), et on choisit la dynamique sur les accès aux  $x_i$  (qui n'est pas déterminée pour  $x_0 \mapsto x_1$ ) de façon que ces accès soient périodiques de période  $k$ .

Montrons que cet algorithme convient : il est bien évident que le résultat ne dépend pas de la position du point  $\alpha_1$  sur l'arête qui mène à  $x_1$  ni du  $F$  choisi ; le point périodique indifférent rationnel est dans l'arbre  $H_C$  justement sur l'arête en question, éventuellement en son origine  $a$  (cf. [CH Prop. 4]) ; s'il est strictement sur l'arête le calcul fait ci-dessus donne tous ses arguments externes dans  $K_C$  qui sont donc deux : on est dans le cas  $q=1$  (racine primitive) et on a bien trouvé les arguments externes de  $c$  dans  $M$  ; s'il est en  $a$ , le calcul donne le même résultat que celui qu'on aurait en considérant les accès en  $a$  limitrophes à l'arête  $[a, x_1]$ , c'est-à-dire encore précisément les arguments externes de  $c$  dans  $M$ .

De cet algorithme et celui décrit au 2 on peut déduire un algorithme arithmétique pour donner les arguments externes  $\theta_{\frac{p}{q}}^-$  et  $\theta_{\frac{p}{q}}^+$  dans  $M$  d'un point  $c$  de  $\partial W$  obtenu par bifurcation d'argument  $e^{2i\pi\frac{p}{q}}$  en fonction des arguments externes dans  $M$   $\theta^-$  et  $\theta^+$  du point  $c_1$ .

Si  $c_1 = \frac{1}{4}$ , l'arbre de Hubbard de  $f_C$  est une étoile à  $q$  branches indexées de sorte qu'on passe du point  $y_i$  au point  $y_{i+q}$  par rotation de  $\frac{p}{q}$  pour : on peut à l'aide de l'algorithme ci-dessus calculer les arguments externes de  $c$  dans  $M$  ; on notera leurs représentants dans  $]0,1[$   $f^-(\frac{p}{q})$  et  $f^+(\frac{p}{q})$  avec  $f^-(\frac{p}{q}) < f^+(\frac{p}{q})$  : ainsi  $f^-(\frac{1}{2}) = \frac{1}{3}$ ,  $f^+(\frac{1}{2}) = \frac{1}{3}$ ,  $f^-(\frac{1}{3}) = \frac{1}{7}$ ,  $f^+(\frac{1}{3}) = \frac{2}{7}$ , ... .  $\theta^-$  et  $\theta^+$  désignent les représentants de  $\theta^-$  et  $\theta^+$  dans  $]0,1[$  et on suppose  $\theta^- < \theta^+$ .

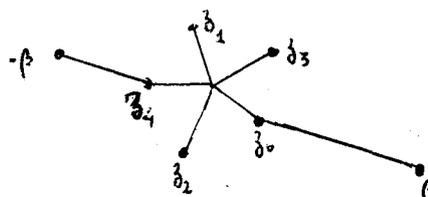
PROPOSITION 3. Les représentants de  $\theta_{\frac{p}{q}}^-$  et  $\theta_{\frac{p}{q}}^+$  dans  $]0,1[$  s'obtiennent de la

manière suivante : on écrit  $\theta^- = \overbrace{.u_1 \dots u_k}^-$  en base 2  
 $\theta^+ = \overbrace{.u_1 \dots u_k}^+$  en base 2

puis, dans le développement dyadique de  $f^-(\frac{p}{q})$  (resp.  $f^+(\frac{p}{q})$ ) en base 2, on remplace les zéros par des  $u_1^- \dots u_k^-$  et les 1 par des  $u_1^+ \dots u_k^+$ .

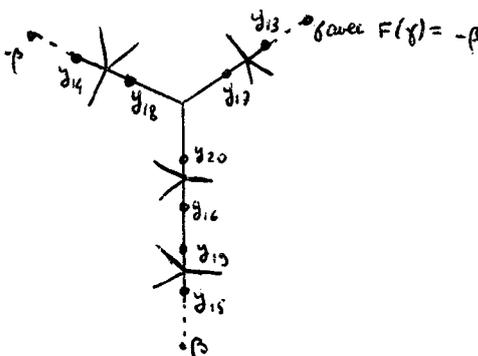
Démonstration : Il suffit d'expliciter ce qui se produit lorsqu'on applique l'algorithme de 3. pour trouver l'arbre associé à  $c$  puis celui de la première partie de ce paragraphe pour calculer les arguments associés.

En effet on peut vérifier que dans l'étoile complétée au sens de [AEJ], l'arc  $[-\beta, \beta]$  passe par  $z_{q-1}$  et  $z_0$  :



(on note  $z_0$  le point critique pour cet arbre,  $z_{i+1}$  est l'image de  $z_i$  pour sa dynamique)

Dans l'arbre en  $c$ , les images réciproques de  $[-\beta, \beta]$  passent dans les étoiles en  $y_{(l-2)q+l}$  et  $y_{(k-1)q+l}$  ( $1 \leq l \leq k$ )



Dès lors, si on prend un point  $\alpha_1$  sur l'arête menant en  $y_1$ , un accès à  $\alpha_1$  évoluera pendant les  $k$  premières itérations comme un accès à  $x_1$  "à droite" quand on va vers  $x_1$  sur  $H_{c_1}$  si  $y_1$  est "à droite" de l'arc de  $y_{kq-1}$  à  $y_{kq-q-1}$ , c'est-à-dire si  $z$  est "à droite" du chemin de  $z_0$  à  $z_{q-1}$ , c'est-à-dire si  $f^-(\frac{p}{q})$  (ou  $f^+(\frac{p}{q})$  selon le bourgeon en  $\alpha_1$  considéré) commence par un 0, comme un accès à  $x_1$  "à gauche" si  $f^-(\frac{p}{q})$  commence par un 1 : on remplace bien le premier chiffre de  $f^-(\frac{p}{q})$  par  $\overbrace{u_1^- \dots u_k^-}$  si c'est un zéro et par  $\overbrace{u_1^+ \dots u_k^+}$  si c'est un 1.

On voit aisément que c'est de nouveau ce qu'il faut faire pour chaque série de  $k$  itérations. cqfd.

PROPOSITION 4. Si  $c_1 \neq \frac{1}{4}$ ,  $0$  et  $W$  sont de part et d'autre de la courbe  
 $L = R(M, \theta_+) \cup R(M, \theta_-) \cup \{c_1\}$ .

Démonstration : En effet  $0$  et  $W$  sont placés par rapport à  $L$  comme  $\frac{1}{4}$   
par rapport à un point  $c$  obtenu à partir de  $c_1$  par bifurcation d'argument  $\frac{1}{2}$ .  
L'algorithme de la Proposition 3 montre que si  $\theta_{\frac{1}{2}}^{\circ-}$  et  $\theta_{\frac{1}{2}}^{\circ+}$  sont les représen-  
tants dans  $]0, 1[$  de  $\theta_{\frac{1}{2}}^-$  et  $\theta_{\frac{1}{2}}^+$ , on a  $0 < \theta^{\circ-} < \theta_{\frac{1}{2}}^{\circ-} < \theta_{\frac{1}{2}}^{\circ+} < \theta^{\circ+} < 1$ , donc  $L$  sépare  
bien  $c$  de  $\frac{1}{4}$ , aboutissement de  $R_M(0)$ . cqfd.

EXPOSE N° XIX

SIMPLICITE DES COMPOSANTES HYPERBOLIQUES

THEOREME 1. Pour toute composante hyperbolique  $W$  de  $\overset{0}{M}$ , l'application  $\rho_W : W \rightarrow D$  est un isomorphisme.

On peut donner de ce théorème plusieurs démonstration. En voici les plans :

1ère démonstration.

LEMME 2 (Gleason). Toute racine de  $P_k$  est simple. ( $\rho_k$  est défini en [CH-6]).

Démonstration : Notons  $A$  l'anneau des  $z \in \mathbb{C}$  qui sont entiers algébriques sur  $\mathbb{Z}$ . Le polynôme  $P_k$  est monique, donc si  $P_k(c) = 0$  on a  $c \in A$ . Mais  $P_k(2) = (P_{k-1}(2))^2 + 2$ , d'où  $P'_k = 2P_{k-1} P'_{k-1} + 1$ , et si  $c$  est racine de  $P_k$ , on a  $P'_k(c) \equiv 1 \pmod{2A}$ , donc  $P'_k(c) \neq 0$ , cqfd.

DEMONSTRATION 1 DU THEOREME 1 : Une composante  $W$  a un seul centre d'après [CA - Proposition 1] et Posdronasvili. Ce centre est simple d'après le lemme 2.

2ème démonstration.

A partir de la proposition 4 de [CA], on démontre :

PROPOSITION 6. Soient  $W_1$  et  $W_2$  deux composantes hyperboliques,  $c_1$  une racine de  $W_1$  et  $c_2$  une racine de  $W_2$ . Si  $c_1 \neq c_2$ , on a  $\bar{W}_1 \cap \bar{W}_2 = \emptyset$ ,  $\{c_1\}$  ou  $\{c_2\}$ .

Démonstration : Pour  $i=1,2$ ,  $c_i$  reçoit 2 rayons  $R_M(\theta_i^+)$  et  $R_M(\theta_i^-)$ . On pose  $L_i = R(\theta_i^+) \cup R(\theta_i^-) \cup \{c_i\}$ . On a  $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ , donc  $\mathbb{C} - L_1 \cup L_2$  a 3 composantes connexes  $U_1, U_2, U_3$  avec  $\partial U_1 = L_1$ ,  $\partial U_2 = L_1 \cup L_2$ ,  $\partial U_3 = L_2$ . Si  $0 \in U_1$  on a  $\bar{W}_2 \subset U_3 \cup \{c_2\}$  et  $\bar{W}_1 \subset U_2 \cup \{c_1, c_2\}$  d'où  $\bar{W}_1 \cap \bar{W}_2 \subset \{c_2\}$ . Si  $0 \in U_2$ , on a  $\bar{W}_1 \subset U_1 \cup \{c_1\}$  et  $\bar{W}_2 \subset U_3 \cup \{c_2\}$ , d'où  $\bar{W}_1 \cap \bar{W}_2 = \emptyset$ . Si  $0 \in U_3$  on a  $\bar{W}_1 \subset U_1 \cup \{c_1\}$  et  $\bar{W}_2 \subset U_2 \cup \{c_1, c_2\}$ , d'où  $\bar{W}_1 \cap \bar{W}_2 = \emptyset$  ou  $\{c_1\}$ . cqfd.

COROLLAIRE. Le Théorème 1.

Car on ne peut avoir  $W_1 = W_2$  et  $c_1 \neq c_2$ .

3ème démonstration.

LEMME 3 (Sullivan). Soit  $c \in W$  tel que  $\rho(c) \neq 0$ . Alors  $\rho'(c) \neq 0$ .

La démonstration utilise le théorème d'intégrabilité de Morrey-Ahlfors-Bers.

Démonstration : Soit  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$  le cycle attractif de  $f_c$ . Le bassin de ce cycle est  $\overset{\circ}{K}$ , posons  $V = \overset{\circ}{K} - \{z \mid \exists n f^n(z) = \alpha_1\}$ . Soit  $E$  le quotient de  $V$  par la relation  $z_1 \sim z_2 \iff \exists (n_1, n_2) f^{n_1}(z_1) = f^{n_2}(z_2)$ . Alors  $E$  est de façon naturelle une surface de Riemann compacte de genre 1. Si  $\sigma$  est une forme de Beltrami continue de norme  $< 1$  sur  $E$ , en notant  $\chi: V \rightarrow E$  l'application canonique,  $\tilde{\sigma} = \chi^*(\sigma)$  prolongée par 0 est une forme de Beltrami invariante par  $f_c$ , mesurable bornée de norme  $< 1$  donc intégrable. Si  $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est tel que  $\frac{\bar{\partial}\varphi}{\partial\varphi} = \tilde{\sigma}$ , l'application  $\varphi \circ f_c \circ \varphi^{-1}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est holomorphe (parce que  $\tilde{\sigma}$  est invariante par  $f$ ) et propre de degré 2, c'est donc un polynôme de degré 2, affinement conjugué à un  $z \mapsto z^2 + c(\sigma)$ . On a  $c(0) = c$ , et  $\text{Log } \rho_w(c(\sigma)) / 2i\pi =$  rapport des périodes de  $(E, \sigma)$ . On peut choisir une application continue  $\rho \mapsto \sigma(\rho)$  de façon que  $\rho \mapsto c(\sigma(\rho))$  soit une section continue de  $c \mapsto \rho_w(c)$ . cqfd.

DÉMONSTRATION 3 DU THÉORÈME 2 : Le lemme 4 et le lemme 2 montrent que  $\rho_w: w \rightarrow D$  est un revêtement. Comme  $D$  est simplement connexe il est trivial. cqfd.

Pour une 4e démonstration, variante de la précédente évitant le lemme de Gleason, voir l'exposé du Séminaire Bourbaki de Novembre 82.

EXPOSE N° XX

N E R V U R E S

Nous donnons d'abord une méthode pour étudier un compact plein connexe localement connexe de  $\mathbb{C}$ . Le compact  $M$  est connexe et plein, mais on ne sait pas montrer qu'il est localement connexe. Nous verrons cependant que, par son aspect combinatoire, la méthode que nous proposons peut lui être appliquée.

1. POINTS EXTREMAUX.

Soit  $K \subset \mathbb{C}$  un compact connexe plein localement connexe, et choisissons un centre pour chaque composante connexe de  $\overset{\circ}{K}$ . Pour  $x$  et  $y \in K$ , on note  $[x,y]_K$  l'arc réglementaire de  $x$  à  $y$ , et si  $x_1, \dots, x_n$  sont des éléments de  $K$ , on note  $[x_1, \dots, x_n]_K$  l'enveloppe réglementaire de  $\{x_1, \dots, x_n\}$  (cf. [CC]).

Notons  $\gamma_K$  le lacet de Carathéodory  $\mathbb{T} \rightarrow \partial K$ . Pour  $x \in K$ , les points de  $\gamma_K^{-1}(x)$  sont les arguments externes de  $x$ .

PROPOSITION 1 et DEFINITIONS. Soit  $x \in K$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $x \in \partial K$  et  $K - \{x\}$  est connexe.
  - (ii)  $x$  a un argument externe et un seul.
  - (iii) On ne peut pas trouver deux points  $y, z \in K - \{x\}$  tels que  $x \in [y,z]_K$ .
- Si  $x$  satisfait à ces conditions, on dit que  $x$  est un point extrémal de  $K$ .

Démonstration. a) (non (i))  $\Rightarrow$  (non (iii)) : Si  $x$  appartient à une composante connexe  $U$  de  $\overset{\circ}{K}$ , on peut trouver  $y$  et  $z \in \partial U$  tels que  $x \in [y,z]$ . Si  $K - \{x\}$  n'est pas connexe, on prend  $y$  et  $z$  dans deux composantes connexes différentes de  $K - \{x\}$ ; alors  $x \in [y,z]$ .

b) (non(iii))  $\Rightarrow$  (non (ii)) : Si  $x \in \overset{\circ}{K}$ , il n'a pas d'argument externe. Si  $x \in \partial K$  et  $x \in ]y, z[_K$ , il y a 2 accès à  $x$  relativement à l'arbre  $[y, z]_K$  (cf. [AEJ]), donc  $x$  a au moins 2 arguments externes.

c) (non (ii))  $\Rightarrow$  (non (i)) : Soient  $t$  et  $t'$  deux arguments externes de  $x$  et  $L = \mathcal{R}(K, t) \cup \mathcal{R}(K, t') \cup \{x\}$ . On peut trouver  $s \in [t, t']$  et  $s' \in [t', t]$  tels que  $y = \gamma(s) \neq x$  et  $z = \gamma(s') \neq x$  (un lacet de Carathéodory n'est jamais constant sur un intervalle). Alors,  $y$  et  $z$  sont de part et d'autre de  $L$  et  $x \in [y, z]_K$ .  
Cqfd.

## 2. NERVURES DE K .

Mêmes hypothèses sur  $K$ . Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de points extrémaux de  $K$ . On note  $t_n$  l'argument externe de  $a_n$ , et on suppose que  $t_0 = 0$ . On pose  $H_n = [a_0, \dots, a_n]_K$  (+). Pour chaque  $n$ ,  $H_n$  est un arbre topologique fini, et pour  $n \geq 1$  on peut écrire  $H_n = H_{n-1} \cup [d_n, a_n]_K$ , avec  $H_{n-1} \cap [d_n, a_n] = \{d_n\}$ . Ceci détermine  $d_n \in K$ .

On note  $n(t_n)$  et on appelle nerovre d'argument externe extrémal  $t_n$ , ou nerovre d'extrémité  $a_n$ , l'arc réglementaire  $[d_n, a_n]_K$ . Le point  $d_n$  s'appelle l'origine de  $n(t_n)$ , et  $n^*(t_n) = ]d_n, a_n[_K = [d_n, a_n]_K - \{d_n\}$  est appelé la nerovre stricte d'extrémité  $a_n$ . Pour  $x$  et  $y \in K$ , nous dirons que  $y$  est après  $x$  et nous écrirons  $x \leq y$  si  $x \in [a_0, y]_K$ .

Nous allons définir, pour tout  $x \in K$ , deux nombres  $\arg_-(x)$  et  $\arg_+(x)$  de  $[0, 1]$ . Pour  $t \in \mathbb{T}$ , notons  $\dot{t}$  le représentant de  $t$  dans  $[0, 1[$ .

---

(+) Si  $a_0 \in \partial U_0$ , où  $U_0$  est une composante de  $\overset{\circ}{K}$  (nécessairement unique puisque  $a_0$  est extrémal), on prend pour  $H_0$  le rayon interne de  $U_0$  d'extrémité  $a_0$  et non l'ensemble  $\{a_0\}$ .

Si  $x \in \partial K - \{a_0\}$ , on pose  $\arg_-(x) = \inf_{t \in \gamma_K^{-1}(x)} \dot{t}$  et  $\arg_+(x) = \sup_{t \in \gamma_K^{-1}(x)} t$ .

Si  $x = a_0$ , on pose  $\arg_-(x) = 0$  et  $\arg_+(x) = 1$ .

Si  $x$  est le centre d'une composante  $U$  de  $\overset{\circ}{K}$ , l'arc  $[a_0, x]_K$  coupe  $\partial U$  en un point unique  $y = \pi_U(a_0)$  (projection de  $a_0$  sur  $\bar{U}$ ), et  $\arg_-(y)$  et  $\arg_+(y)$  correspondent à 2 accès à  $y$  relativement à  $[a_0, x]_K$ . On prend pour  $\arg_-(x)$  le plus grand des  $\dot{t}$  pour  $t$  argument externe de  $y$  dans le même accès que  $\arg_-(y)$ , et on définit  $\arg_+(x)$  symétriquement. On a donc :

$$0 \leq \arg_-(y) \leq \arg_-(x) < \arg_+(x) \leq \arg_+(y) \leq 1.$$

Si  $x$  appartient à  $U$  sans en être le centre, notons  $x_0$  le centre de  $U$  et soit  $[x_0, x_1]_K$  le rayon interne de  $\bar{U}$  passant par  $x$ . On pose :

$$\arg_{\pm}(x) = \arg_{\pm}(x_1) \quad \text{si } x_1 \neq \pi_U(a_0),$$

$$\text{et} \quad \arg_{\pm}(x) = \arg_{\pm}(x_0) \quad \text{si } x_1 = \pi_U(a_0).$$

Dans tous les cas, on note  $I(x)$  l'intervalle  $[\arg_-(x), \arg_+(x)]$ .

On définit également les arguments associés à  $x$ .

si  $x \in \partial K - \{a_0\}$ , les arguments associés à  $x$  sont les  $\dot{t}$ , où  $t$  est un argument externe de  $x$ .

Si  $x = a_0$ , ce sont 0 et 1.

Si  $x$  est le centre d'une composante  $U$  de  $\overset{\circ}{K}$ , ce sont les  $\arg_-(y)$  et les  $\arg_+(y)$  pour  $y \in \partial U - \{\pi_U(a_0)\}$ , ainsi que  $\arg_-(x)$  et  $\arg_+(x)$ .

Si  $x$  appartient à  $U$  sans en être le centre, les arguments associés à  $s$  sont  $\arg_-(x)$  et  $\arg_+(x)$ .

Pour tout intervalle  $I \subset [0, 1]$  contenant l'un des  $\dot{t}_n$ , on appelle chef-lieu de  $I$  le nombre  $t_{n(I)}$ , où  $n(I)$  est le plus petit  $n$  tel que  $\dot{t}_n \in I$  (je n'ose pas dire "centre" de peur qu'on croie que c'est le milieu).

PROPOSITION 2. Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in K$ . On suppose que  $x \in \partial K$  ou que  $x$  est le centre d'une composante de  $\overset{\circ}{K}$ .

a) On a  $x \in h^*(t_n)$  si et seulement si  $t_n$  est le chef-lieu de  $I(x)$  .

b) On a  $x \in h(t_n)$  si et seulement si  $t_n$  est le chef-lieu d'un intervalle de la forme  $[\theta', \theta'']$  , où  $\theta'$  et  $\theta''$  sont des arguments associés à  $x$  .

Démonstration. Posons  $\theta_{\pm} = \arg_{\pm}(x)$  ; soit  $x_1$  le point d'aboutissement commun de  $\mathbb{R}(K, \theta_-)$  et  $\mathbb{R}(K, \theta_+)$  (qui est  $x$  si  $x \in \partial K$ ) . Si  $x$  appartient à une composante  $U$  de  $\overset{\circ}{K}$  , notons  $x_0$  son centre, et si  $x \in \partial K$  on pose  $x_0 = x$  . On pose  $L = \mathbb{R}(\theta_-) \cup \mathbb{R}(\theta_+) \cup \{x_1\}$  .

(a) Cas  $x_1 = a_0$  . Avec les conventions prises, on a  $x \in h^*(t_0) = h(t_0)$  . Or  $I(x) = [0, 1]$  , et le chef-lieu de  $[0, 1]$  est  $0 = t_0$  .

(a)  $x_1 \neq a_0$  ,  $\Leftarrow$  .  $L$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}$  , et  $C-L$  a 2 composantes connexes  $V_0$  et  $V_1$  ,  $V_0 \ni \mathbb{R}(K, 0)$  . Par définition du chef-lieu, on a :  $a_i \in V_0$  pour  $i = 0, \dots, n-1$  , et  $a_n \in V_1 \cup \{x_1\}$  . Comme  $d_n \in H_{n-1}$  , on a  $d_n \in V_0 \cup \{x_1\}$  .

Si  $d_n = x_1$  , soit  $t_i$  tel que  $i < n$  et  $a_i \geq x_1$  ; on a  $t_i \in I(x_1)$  , donc  $I(x_1) \neq I(x)$  , ceci n'est possible que si  $x = x_0$  centre d'une composante  $U$  , et dans ce cas  $x \in ]x_1, a_n]$  .

Si  $d_n \neq x_1$  , on a  $d_n \in V_0$  , et  $x_1 \in ]d_n, a_n]$  , et dans chaque cas on en déduit que  $x \in ]d_n, a_n]$  .

(a)  $x_1 \neq a_0$  ,  $\Rightarrow$  . Gardons les définitions de  $L$  ,  $V_0$  et  $V_1$  . On a  $a_n \geq x$  . On en déduit que  $a_n \in V_1 \cup \{x_1\}$  , d'où  $t_n \in I(x)$  . Pour  $i < n$  , on a  $a_i \neq x$  . On en déduit que  $a_i \in V_0 \cup \{x_1\}$  . On ne pourrait avoir  $a_i = x_1$  que si  $x_0 > x_1$  , mais dans ce cas  $x_1$  n'est pas extrémal, donc nécessairement  $a_i \neq x_1$  ,  $a_i \in V_0$  et  $t_i \notin I(x)$  . Par suite,  $t_n$  est le chef-lieu de  $I(x)$  .

(b)  $\Leftarrow$  . Posons  $L' = \mathbb{R}(\theta') \cup \mathbb{R}(\theta'') \cup [x'_1, x''_1]_K$  , où  $x'_1$  et  $x''_1$  sont les points d'aboutissement de  $\mathbb{R}(\theta')$  et  $\mathbb{R}(\theta'')$  respectivement. Notons  $V'_0$  et  $V'_1$  les composantes connexes de  $C-L'$  , avec  $V'_0 \ni \mathbb{R}(0)$  . On a  $t_n \in [\theta', \theta'']$  , d'où

$a_n \in V_1' \cup \{x_1', x_1''\}$ . Pour  $i < n$ , on a  $t_i \notin [\theta', \theta'']$ , d'où  $a_i \in V_0'$ . Par suite,  $d_n \in V_0' \cup \{x_0\}$ , et dans chaque cas on en déduit  $x \in [d_n, a_n] = h(t_n)$ .

(b)  $\Rightarrow$ . Si  $x \in \partial K$ , soient  $\theta'$  et  $\theta''$  des arguments externes de  $x$  dans des accès à  $H_n$  tels que parmi les points  $a_0, \dots, a_n$ , seul  $a_n$  soit entre  $\mathcal{R}(\theta')$  et  $\mathcal{R}(\theta'')$ . Alors,  $t_n \in [\theta', \theta'']$ ,  $t_i \notin [\theta', \theta'']$  pour  $i < n$  et  $t_n$  est le chef-lieu de  $[\theta', \theta'']$ .

Supposons que  $x$  appartient à une composante  $U$  de  $\overset{\circ}{K}$ , de centre  $x_0$ . Notons  $y$  le point où  $[x, a_n]$  coupe  $\partial U$ . Si  $x \notin ]x_0, \pi_U(a_0)[$ , on prend  $\theta' = \arg_-(y)$  et  $\theta'' = \arg_+(y)$ . Si  $x \in ]x_0, \pi_U(a_0)[$ , on prend  $\theta' = \arg_-(x_0)$  et  $\theta'' = \arg_+(x_0)$ . Dans chaque cas, on a  $t_i \notin [\theta', \theta'']$  pour  $i < n$ , et on a  $t_n \in [\theta', \theta'']$  car  $t_n \geq y$  dans un cas et  $t_n \geq \pi_U(a_0)$  dans l'autre. Donc,  $t_n$  est le chef-lieu de  $[\theta', \theta'']$ . Cqfd.

### 3. NERVURES COMBINATOIRES.

Dans l'ensemble de Mandelbrot  $M$ , définissons une partie dénombrable : on note  $\mathcal{D}_0$  (resp.  $\mathcal{D}_1$ ) l'ensemble des centres (resp. des racines) des composantes hyperboliques de  $\overset{\circ}{M}$ . Notons  $\mathcal{D}_2$  l'ensemble des points de Misurevicz, et posons  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ .

Nous allons définir pour chaque  $c \in \mathcal{D}$  les arguments (combinatoirement) associés à  $c$ .

Si  $c \in \mathcal{D}_2$ , le point  $c$  a dans  $K_c$  un nombre fini d'arguments externes (qui sont des rationnels à dénominateur pair). Ce sont les arguments associés à  $c$ . Le plus petit et le plus grand sont notés  $\arg_-(c)$  et  $\arg_+(c)$ .

Si  $c \in \mathcal{D}_1$ , soit  $\alpha_1$  le point périodique indifférent attirant la composante  $U_1$  de  $\overset{\circ}{K}_c$  contenant  $c$ . Les arguments associés à  $c$  sont les 2 arguments externes de  $\alpha_1$  correspondant aux interpétales adjacents à  $U_1$ . Le plus petit (resp. grand) est noté  $\text{Arg}_-(c)$  (resp.  $\text{Arg}_+(c)$ ).

Si  $c$  est le centre d'une composante hyperbolique  $W$  de  $\overset{\circ}{M}$ , les arguments associés à  $c$  sont les arguments associés aux points de  $\partial W$  d'argument interne rationnel (qui sont des points de  $\mathcal{D}_1$ ). Le plus petit et le plus grand sont respectivement  $\text{Arg}_-(c_1)$  et  $\text{Arg}_+(c_1)$ , où  $c_1$  est la racine de  $W$ . Nous poserons  $\text{Arg}_-(c) = \text{Arg}_-(c_1)$  et  $\text{Arg}_+(c) = \text{Arg}_+(c_1)$ .

Si  $c \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ , pour tout argument  $\theta$  associé à  $c$ , le rayon externe  $\mathcal{R}(M, \theta)$  aboutit en  $c$ .

On note  $(t_n)$  la suite des nombres de  $[0, 1[$  de la forme  $p/2^k$ , ordonnés par  $k$  croissants et pour chaque  $k$  par  $p$  croissants, de sorte que :

$$p/2^k = t_n \quad \text{avec} \quad 2n+1 = 2^k + p.$$

Remarques. 1) Le fait de choisir pour chaque  $k$  l'ordre des  $p$  croissants n'a aucune importance pour ce que nous voulons faire, car l'ordre sert à définir les chef-lieux des intervalles de  $[0, 1[$ . Mais chaque intervalle  $I \subset [0, 1[$  qui contient un point de la forme  $p/2^k$  (en particulier tout intervalle non réduit à un point) en contient un seul avec  $k$  minimum. En effet, si  $p/2^k \in I$  et  $p'/2^k \in I$ , avec  $p$  et  $p'$  impairs et  $p' > p$ ,  $\frac{p+1}{2^k} \in I$ , mais cette fraction se simplifie.

2) Pour tout  $n > 0$ , notons  $a_n$  le point d'aboutissement de  $\mathcal{R}(M, t_n)$ . Le polynôme  $f_{a_n}$  est tel que  $0$  tombe en un temps fini sur le point fixe  $\beta(a_n)$  d'argument externe  $0$ . En particulier,  $a_n \in \mathcal{D}_2$ , et il y a un seul argument associé à  $a_n$ , à savoir  $t_n$ . On obtient ainsi une bijection de  $\{t_n\}_{n>0}$  sur  $\{c \mid (\exists k), f_c^{k+1}(0) = \beta(c)\}$ . [Cela résulte de [AREMAR]].

On a  $a_0 = 1/4 \in \mathcal{D}_1$ .

On pose  $I(c) = [\theta_-(c), \theta_+(c)]$ .

On définit la nervure combinatoire  $N(t_n)$  et la nervure combinatoire stricte  $N^*(t_n)$  par :

$$N^*(t_n) = \{c \in \mathfrak{D} \mid t_n \text{ est le chef-lieu de } I(c)\}$$

$$N(t_n) = \{c \in \mathfrak{D} \mid (\exists \theta', \theta'' \text{ associés à } c) t_n \text{ est le chef-lieu de } [\theta', \theta'']\} .$$

Remarque : Si, comme on l'imagine,  $M$  est localement connexe et tout point  $c \in \mathfrak{D}_1 \cup \mathfrak{D}_2$  n'a pas d'autre argument externe dans  $M$  que ses arguments combinatoirement associés, on a :  $N(t_n) = n(t_n) \cap \mathfrak{D}$  et  $N^*(t_n) = n^*(t_n) \cap \mathfrak{D}$  en vertu de la proposition 2 .

#### 4. ORDRE SUR $\mathfrak{D}$ .

Pour  $c \in \mathfrak{D}$  , posons  $I(c) = [\text{Arg}_-(c), \text{Arg}_+(c)]$  . Nous écrirons  $c < c'$  si  $I(c) \not\supseteq I(c')$  ou si  $c$  est la racine et  $c'$  le centre d'une même composante hyperbolique de  $\overset{\circ}{M}$  . Nous écrirons  $c \leq c'$  si  $c < c'$  ou  $c = c'$  . On définit ainsi un ordre sur  $\mathfrak{D}$  .

PROPOSITION 3. Soient  $c$  et  $c'$  dans  $\mathfrak{D}$  . On a  $I(c) \supset I(c')$  ou  $I(c') \subset I(c)$  ou  $I(c) \cap I(c') = \emptyset$  .

Démonstration. Si  $c$  est le centre d'une composante hyperbolique  $W$  , notons  $c_1$  la racine de  $W$  ; posons  $c_1 = c$  si  $c \in \mathfrak{D}_1 \cup \mathfrak{D}_2$  . Si  $c$  n'est pas extrémal <sup>(†)</sup> ,  $\mathfrak{L}(c) = \mathbb{R}(M, \theta_-(c)) \cup \mathbb{R}(M, \theta_+(c)) \cup \{c_1\}$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}$  , et  $C - \mathfrak{L}(c)$  a 2 composantes connexes  $V_0(c)$  et  $V_1(c)$  (on convient que  $\mathbb{R}(M, 0) \subset V_0(c)$ ) . Si  $c_1 = c'_1$  , on a  $I(c) = I(c')$  . Sinon, on a  $\mathfrak{L}(c) \cap \mathfrak{L}(c') = \emptyset$  , d'où  $V_1(c) \subsetneq V_1(c')$  ou  $V_1(c) \supsetneq V_1(c')$  ou  $V_1(c) \cap V_1(c') = \emptyset$  , d'où la conclusion.

Cqfd.

COROLLAIRE 1. Dans l'ensemble ordonné  $\mathfrak{D}$  , toute partie majorée est totalement ordonnée .

---

(†) Si  $c$  est extrémal ou  $c = 0$  ,  $I(c)$  est réduit à un point ou  $c = [0, 1]$  .

Démonstration. Soit  $X$  une partie majorée par un point  $\hat{c}$ . Pour  $c$  et  $c'$  dans  $X$ , on a  $I(c) \supset I(\hat{c})$ ,  $I(c') \supset I(\hat{c})$ , donc  $I(c) \cap I(c') \neq \emptyset$ , d'où  $c \leq c'$  ou  $c' \leq c$ .

COROLLAIRE 2. Pour tout  $n \neq 0$ , l'ensemble  $N^*(t_n)$  est un ensemble totalement ordonné, dont  $a_n$  est le plus grand élément.

Remarque :  $N(a) = N^*(0) = \{1/4, 0\}$  avec  $a_0 = 1/4$ ,  $0 > 1/4$ .

PROPOSITION 4. Soient  $c$  et  $\tilde{c}$  deux éléments de  $N(t_n)$  avec  $\tilde{c} \in N(t_n) - N^*(t_n)$ ; alors  $\tilde{c} \leq c$ .

Démonstration. Si  $c$  est extrémal,  $c = t_n$  et  $\tilde{c} \leq c$ . On suppose  $c$  non extrémal. Soient  $\theta'$  et  $\theta''$  des arguments associés à  $c$  tels que  $t_n$  soit le chef-lieu de  $[\theta', \theta'']$ . On définit  $\mathcal{L}(\theta', \theta'')$  de la façon suivante :

Si  $c \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ , on pose  $\mathcal{L}(\theta', \theta'') = \mathcal{R}(M, \theta') \cup \mathcal{R}(M, \theta'') \cup \{c\}$ .

Si  $c \in \mathcal{D}_0$ , notons  $c_1'$  et  $c_1''$  les points d'aboutissement de  $\mathcal{R}(M, \theta')$  et  $\mathcal{R}(M, \theta'')$ . On a  $c_1'$  et  $c_1'' \in \partial W$ , où  $W$  est la composante de centre  $c$ .

Si  $c_1' = c_1''$ , on pose  $\mathcal{L}(\theta', \theta'') = \mathcal{R}(M, \theta') \cup \mathcal{R}(M, \theta'') \cup c_1'$ . Sinon, on pose  $\mathcal{L}(\theta', \theta'') = \mathcal{R}(M, \theta') \cup \mathcal{R}(M, \theta'') \cup [c, c_1']_{\overline{W}} \cup [c, c_1'']_{\overline{W}}$ . Dans tous les cas,  $\mathcal{L}(\theta', \theta'')$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}$ , et  $\mathbb{C} - \mathcal{L}(\theta, \theta')$  a deux composantes connexes  $V_0(\theta, \theta')$  et  $V_1(\theta, \theta')$ , avec  $\mathcal{R}(M, 0) \subset V_0(\theta, \theta')$ .

On a  $V_1(\theta, \theta') \cap V_1(\tilde{c}) \neq \emptyset$ , car ces deux ensembles contiennent  $\mathcal{R}(M, t_n)$ , et  $V_1(\theta', \theta'') \not\subset V_1(\tilde{c})$  car  $I(\tilde{c})$  contient un  $t_{n'}$  avec  $n' < n$  et  $[\theta', \theta'']$  non.

Si  $\tilde{c}_1 \neq c_1', c_1''$ , on a  $\mathcal{L}(\theta', \theta'') \cap \mathcal{L}(\tilde{c}) = \emptyset$ , d'où  $V_1(\theta', \theta'') \subset V_1(\tilde{c})$  et  $\tilde{c} \leq c$ .

Si on avait  $\tilde{c}_1 = c_1' \neq c_1''$ , on aurait  $V_1(\tilde{c}) \subset V_1(\theta', \theta'')$

ce qui n'est pas le cas. Si on avait  $\tilde{c}_1 = c_1' = c_1'' = c_1$ , on aurait

$V_1(\theta', \theta'') = V_1(\tilde{c})$ , ce qui est impossible. On est donc dans le cas

$\tilde{c}_1 \neq c_1', c_1''$ , et on a  $\tilde{c} \leq c$ . Cqfd.

COROLLAIRE et DEFINITION. L'ensemble  $N(t_n) - N^*(t_n)$  a au plus un point.  
S'il a un point, c'est le plus petit élément de  $N(t_n)$ , on dit que c'est l'origine  
de la nervure  $N(t_n)$ .

Nous montrerons -c'est le théorème principal de la théorie des nervures-  
que toute nervure  $N(t_n)$  a une origine.

ARBRE DE L'ORIGINE D'UNE NERVURE DE M

1. ARBRES DE HUBBARD ABSTRAITS.

Nous appelons arbre de Hubbard abstrait un arbre topologique fini  $H$ , muni d'une suite finie prépériodique  $(x_n)$  de points, et d'une classe d'isotopie de plongements  $H \rightarrow C$  (ou ce qui revient au même d'un ordre cyclique sur les brins aux points de branchement), satisfaisant aux conditions suivantes :

- (i) Toute extrémités est l'un des  $(x_i)$  ;
- (ii)  $H$  coupé en  $x_0$  a au plus 2 composantes ;
- (iii) Il existe une application continue  $F : H \rightarrow H$  injective et préservant l'ordre cyclique aux points de branchement sur chacune des composantes de  $H$  coupé en  $x_0$ , et telle que  $F(x_i) = x_{i+1}$  pour tout  $i$ .

L'application  $F$  est déterminée de façon unique, à isotopie laissant fixe les points remarquables près.

Un arbre de Hubbard abstrait est dit périodique ou strictement prépériodique suivant que  $x_0$  est périodique ou strictement prépériodique pour  $F$ .

L'arbre de Hubbard d'un polynôme  $f : z \rightarrow z^2 + c$  tel que 0 soit prépériodique a un arbre abstrait sous jacent.

Etant donné un arbre de Hubbard abstrait  $H$ , on peut définir  $\text{Arg}_-(H)$  et  $\text{Arg}_+(H)$ , ainsi que les arguments associés à  $H$ , par les algorithmes décrits en [AEJ], en [N] et en [CA].

## 2. RESULTATS ET NOTATIONS.

Soit  $\tau \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  un élément de la forme  $p/2^k$ . Nous avons l'intention de montrer que la nervure combinatoire  $N(\tau)$  de  $M$  a une origine dans  $\mathfrak{D}_0 \cup \mathfrak{D}_2$ .

Dans cet exposé, nous allons construire un arbre abstrait  $\check{H}$  ayant des propriétés telles que, s'il est l'arbre d'un point  $\check{c} \in \mathfrak{D}_0 \cup \mathfrak{D}_2$ , le point  $\check{c}$  est l'origine de la nervure  $N(\tau)$ .

THEOREME. Il existe un arbre de Hubbard abstrait  $\check{H}$  ayant les propriétés suivantes :

- $\tau$  appartient à  $I(\check{H}) = [\text{Arg}_-(\check{H}), \text{Arg}_+(\check{H})]$  sans en être le chef-lieu.
- Il existe deux arguments  $\theta'$  et  $\theta''$  associés à  $\check{H}$  tels que  $\tau$  soit le chef-lieu de  $[\theta', \theta'']$ .

Dans la suite, on fixe  $\tau = p/2^k$  (avec  $k \geq 1$ ,  $p$  impair,  $0 < p < 2^k$ ). Soit  $c = a_\tau$  le point d'aboutissement de  $\mathfrak{R}(M, \tau)$ . On pose  $f = f_c : z \mapsto z^2 + c$ ,  $K = K_c$ ,  $H = H_c$  (arbre de Hubbard de  $f$ ),  $\beta = \beta_c$  (point fixe de  $f$  d'argument externe 0). On a  $f^k(c) = f^{k+1}(0) = \beta$ ,  $f^{k-1}(c) = -\beta$ , le compact  $K$  est plein, connexe, localement connexe et d'intérieur vide. Pour  $x$  et  $y$  dans  $K$ , on note  $[x, y]$  l'arc de  $x$  à  $y$  dans  $K$ ; plus généralement, pour toute partie finie  $A$  de  $K$ , on note  $[A]$  l'enveloppe connexe de  $A$  dans  $K$ . On pose  $x_n = f^n(0)$ . Si  $X$  est un arbre et  $z \in X$ , on note  $\nu_X(z)$  le nombre de brins de  $X$  en  $z$ .

## 3. RANG D'UN POINT DE K.

Pour  $z \in K$ , on pose  $\text{rg}(z) = \inf \{r \mid f^r(z) \in [\beta, -\beta]\}$ . On a donc  $\text{rg}(z) = \infty$  si  $(\forall r) f^r(z) \notin [\beta, -\beta]$ , et  $\text{rg}(z) = 0$  si  $z \in [\beta, -\beta]$ . Si  $\text{rg}(z) > 0$ , on a  $\text{rg}(f(z)) = \text{rg}(z) - 1$ . On a  $\text{rg}(c) = k-1$ . En effet,  $f^{k-1}(c) = -\beta \in [\beta, -\beta]$ , et si  $k \geq 2$ ,  $f^{k-2}(c) \in f^{-1}(\beta)$ ;  $c$  est un point extrémal de  $K$  distinct de  $\beta$  et  $-\beta$ , donc n'appartenant pas à  $[\beta, -\beta]$ .

Remarques. 1) Si  $\text{rg}(z) = r > 0$ , on a  $f^r(z) \in [0, -\beta]$ . En effet,  $f([\beta, 0]) = [\beta, x] \supset [\beta, 0]$ . Par suite,  $f^{-1}([\beta, 0]) \subset [0, \beta] \cup [0, -\beta] = [\beta, -\beta]$ , et si  $f^s(z) \in [0, \beta]$  avec  $s > 0$ , on a  $f^{s-1}(z) \in [\beta, -\beta]$  et  $s > \text{rg}(z)$ .

2) Si  $\text{rg}(z) = r$ , le point  $z$  a deux arguments externes  $t$  et  $t'$  dans  $K$ , admettant en base 2 des développements  $t = . \epsilon_1 \epsilon_2 \dots \epsilon_n \dots$ ,  $t' = \epsilon'_1 \epsilon'_2 \dots$  tels que  $\epsilon_i = \epsilon'_i$  pour  $i \leq r$ ,  $\epsilon'_{n+1} \neq \epsilon_{r+1}$  (éventuellement  $t = t'$ , mais avec 2 développements différents). En effet, un point de  $[\beta, -\beta]$  a deux arguments externes  $t = . 0 \dots$  et  $t' = . 1 \dots$ , et cela caractérise les points de  $[\beta, -\beta]$ , et les arguments externes de  $f^i(z)$  s'obtiennent à partir des arguments externes de  $z$  par multiplication par  $2^i$ , ce qui se traduit sur l'écriture en base 2 par la suppression des  $i$  premiers chiffres.

#### 4. L'ARBRE $Z_r$ .

Pour tout  $r \in \mathbb{N}$ , on note  $Z_r$  l'ensemble des  $z \in K$  tels que  $\text{rg}(z) \leq r$ . On a :  $Z_{r+1} = f^{-1}(Z_r) \cup [+ \beta, -\beta]$ .

PROPOSITION 1. L'ensemble  $Z_r$  est l'enveloppe connexe dans  $K$  de  $f^{-(r+1)}(\beta)$ .

Démonstration par récurrence sur  $r$ . On a  $Z_0 = [\beta, -\beta] = [f^{-1}(\beta)]$ .

Mettons  $K$  sous la forme  $K_+ \cup K_-$ , avec  $K_+ \cap K_- = \{0\}$ ,  $K_- = -K_+$ , et pour toute partie  $A$  de  $K$  posons  $A_+ = A \cap K_+$ ,  $A_- = A \cap K_-$ . L'application  $f$  induit un homéomorphisme de  $(f^{-1}(Z_r))_+$  sur  $Z_r$  et de même pour  $(f^{-1}(Z_r))_-$ . Si  $Z_r = [f^{-(r+1)}(\beta)]$ , on a  $(f^{-1}(Z_r))_+ = [(f^{-(r+2)}(\beta))_+]$ , et de même avec  $-$ .

Pour toute partie finie  $A$  de  $K$  contenant  $\beta$  et  $-\beta$ , on a

$[A] = [A_+] \cup [A_-] \cup [\beta, -\beta]$ . Par suite,

$$[f^{-(r+2)}(\beta)] = [f^{-1}(Z_r)]_+ \cup (f^{-1}(Z_r))_- \cup [\beta, -\beta] = f^{-1}(Z_r) \cup [\beta, -\beta] = Z_{r+1}.$$

Cqfd.

COROLLAIRE. Pour tout  $r$ , l'ensemble  $Z_r$  est un arbre topologique fini.

PROPOSITION 2. Pour  $r \in \mathbb{N}$ , l'ensemble  $Z_{r+1} - Z_r$  ne contient aucun point de branchement de  $Z_{r+1}$ .

Démonstration par récurrence sur  $r$ . Puisque  $0 \in Z_0$ ,  $f$  induit une application localement injective  $Z_1 - Z_0 \rightarrow Z_0$ . Or,  $Z_0 = [-\beta, \beta]$  n'a pas de point de branchement. Donc,  $Z_1 - Z_0$  n'a pas de point de branchement. Pour chaque  $r \geq 1$ , l'application  $f$  induit une application localement injective de  $Z_{r+1} - Z_r$  dans  $Z_r - Z_{r-1}$ . On voit alors par récurrence que  $Z_{r+1} - Z_r$  n'a pas de point de branchement. Cqfd.

PROPOSITION 3. Pour  $r \geq k-1$ , on a  $f(Z_r) \subset Z_r$ .

Démonstration. Pour tout  $r \in \mathbb{N}$ , on a  $f(Z_r) \subset Z_{r-1} \cup f([\beta, -\beta]) = Z_{r-1} \cup [\beta, x_1]$ , et  $Z_{r-1} \subset Z_r$ . Mais si  $r \geq k-1$ , on a  $[\beta, x_1] \subset Z_r$ , d'où  $f(Z_r) \subset Z_r$ . Cqfd.

## 5. LE POINT $y_1$ .

On a  $x_1 \in Z_{k-1} - Z_{k-2}$  puisque  $\text{rg}(x_1) = k-1$ . Notons  $y_1$  la projection de  $x_1$  sur  $Z_{k-2}$ , c'est-à-dire le premier point (en partant de  $x_1$ ) où l'arc  $[x_1, 0]$  rencontre  $Z_{k-2}$ .

On pose  $y_n = f^{n-1}(y_1)$ .

PROPOSITION 4. Le point  $y_1$  est un point de branchement de  $Z_{k-1}$ .

Démonstration. Pour  $z \in K$ , si  $z \neq 0$  et si  $f(z)$  est extrémal dans  $K$ ,  $z$  est extrémal. Comme  $\beta$  est extrémal ([AEJ], §3, lemme 1), si  $f^n(z) = \beta$  et  $f^i(z) \neq 0$  pour  $0 \leq i \leq n$ , le point  $z$  est extrémal. En particulier, si  $f^k(z) = \beta$ ,  $z$  est extrémal dans  $K$ .

Or  $y_1$  n'est pas un point extrémal de  $Z_{k-1}$  puisque  $y_1 \in x_1 ]\beta, x_1[$ .  
 Donc  $f^k(y_1) \neq \beta$ , et  $y_1$  n'est pas non plus un point extrémal de  $Z_{k-2}$ . Il y a  
 donc au moins deux brins de  $Z_{k-2}$  en  $y_1$ , et  $]y_1, x_1[$  est un brin de  $Z_{k-1}$  en  
 $y_1$ , distincts des précédents puisque  $]y_1, x_1[ \cap Z_{k-2} = \{y_1\}$  par définition de  $y_1$ .  
 Cela fait donc au moins 3 brins de  $Z_{k-1}$  en  $y_1$ . Cqfd.

COROLLAIRE. Le point  $y_1$  est prépériodique pour  $f$ .

Démonstration. Le point  $x_1 = f(0)$  est un point extrémal de  $Z_{k-1}$ . Par  
 suite, 0 n'est pas un point de branchement de  $Z_{k-1}$ , et si  $z$  est un point de  
 branchement de  $Z_{k-1}$  (avec  $\nu_{k-1}(z)$  brins,  $\nu_{k-1}(z) \geq 3$ ), il en est de même de  
 $f(z)$  (avec  $\nu_{k-1}(f(z)) \geq \nu_{k-1}(z)$ ). Comme le nombre de points de branchement de  
 $Z_{k-1}$  est fini, tout point de branchement est prépériodique. Cqfd.

Puisque  $f^{-1}(x_1) = \{0\}$ , l'ensemble  $f^{-1}(]y_1, x_1[)$  est un arc  $]\delta, -\delta[$ .  
 Les points  $\delta$  et  $-\delta$  sont les points de  $f^{-1}(y_1)$ . L'arc ouvert  $]\delta, -\delta[$  ne  
 contient aucun point de branchement  $Z_{k-1}$ , puisque  $f(]\delta, -\delta[) = ]y_1, x_1[$ , et  
 que cet arc, contenu dans  $Z_{k-1} - Z_{k-2}$ , ne contient aucun point de branchement  
 de  $Z_{k-1}$  (proposition 2).

En particulier,  $(\forall n), y_n \notin ]\delta, -\delta[$ .

Nous allons maintenant définir un point  $y_0$ : Si  $y_1$  est périodique de  
 période  $k$ , on a  $y_k = \delta$  ou  $-\delta$ . On pose alors  $y_0 = y_k$ . Si  $y_1$  est strictement  
 prépériodique, on a  $y_n \notin \{\delta, -\delta\}$  pour tout  $n$ , on prend pour  $y_1$  l'un quelconque  
 des points  $\delta$  ou  $-\delta$ .

## 6. L'ARBRE $\check{H}$ .

On note  $\check{H}$  l'enveloppe connexe des  $(y_n)_{n \geq 0}$  dans  $Z_{k-1}$  (ou dans  $K$  ce  
 qui revient au même).

PROPOSITION 6. On a  $f(\check{H}) \subset \check{H} \cup ]y_1, x_1[$  et  $\check{H} \cap ]y_1, x_1[ = \{y_1\}$ .

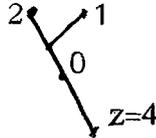
Démonstration. Soient  $(Z_{k-1})_+$  et  $(Z_{k-1})_-$  les composantes de  $Z_{k-1}$  coupé en 0, et posons  $\check{H}_+ = \check{H} \cap (Z_{k-1})_+$ , et de même pour  $H_-$ . L'ensemble  $H_+$  est l'enveloppe connexe des  $(y_n)_{n \in \Lambda_+}$ , où  $\Lambda_+ = \{n | y_n \in (Z_{k-1})_+\}$ , et éventuellement de 0. Alors,

$$f(\check{H}_+) \subset [\{y_{n+1}\}_{n \in \Lambda_+}, x_1], \quad f(\check{H}_-) \subset [\{y_{n+1}\}_{n \in \Lambda_-}, x_1],$$

et  $f(\check{H}) \subset [\{y_n\}, x_1] = \check{H} \cup [y_1, x_1]$ .

La deuxième assertion résulte du fait que  $[y_1, x_1]$  ne contient aucun point de branchement de  $Z_{k-1}$ , donc aucun des  $y_n$ . Cqfd.

Remarque. On peut montrer, en utilisant le fait que  $f$  est sous-hyperbolique, que  $f(\check{H}) = \check{H} \cup [y_1, x_1]$ , sauf si  $\check{H} = \{y_1\}$ , ce qui se produit si  $y_1$  est un point fixe de  $f$  (exemple :  $H =$



PROPOSITION 7. Le point  $y_1$  est un point extrémal de  $\check{H}$ .

Démonstration. On écrira  $\check{\nu}(z)$  pour  $\nu_{\check{H}}(z)$ .

Si  $y_1$  est périodique de période  $K$ , on a :

$\check{\nu}(y_1) \leq \check{\nu}(y_2) \leq \dots \leq \check{\nu}(y_k) \leq \check{\nu}(y_1) + 1$  en vertu de la proposition 6 et du fait qu'aucun des  $y_i$  n'est 0. Or  $\check{H}$  a au moins une extrémité. On a donc :  $\check{\nu}(y_1) \leq 1$ .

Si  $y_1$  est strictement prépériodique, on a :

$\check{\nu}(y_0) - 1 \leq \check{\nu}(y_1) \leq \check{\nu}(y_2) \leq \dots$ . Or  $\check{H}$  n'est pas réduit à un point, il a au moins 2 extrémités, d'où  $\check{\nu}(y_1) = 1$ . Cqfd.

## 7. CONDITION DE HUBBARD POUR $\check{H}$ .

L'arbre  $\check{H}$  est muni de la topologie et du plongement dans  $\mathbb{C}$  induits par ceux de  $K$  (ou de  $Z_{k-1}$ , ou de  $H$ ), et des points  $(y_n)$ .

PROPOSITION 8. L'arbre  $\check{H}$  est un arbre de Hubbard abstrait.

Démonstration. La condition (i) de la définition du §2 résulte du fait que  $\check{H}$  est l'enveloppe connexe des  $y_i$ . On a  $\check{\nu}(y_0) \leq \check{\nu}(y_1) + 1 \leq 2$ , d'où (ii). Nous allons montrer qu'on a la condition (iii).

Posons  $\check{f} = \rho \circ f$ , où  $\rho : Z_{k-1} \rightarrow Z_{k-1}$  coïncide avec l'identité sur  $Z_{k-1} - ]y_1, x_1]$ , et applique  $]y_1, x_1]$  sur  $y_1$ . On a  $\check{f}(\check{H}) \subset \check{H}$  en vertu de la proposition 6, et  $\check{f}(y_n) = y_{n+1}$  pour tout  $n$ . Malheureusement  $f$  est constante sur  $[\delta, -\delta] = [y_0, -y_0]$ .

Si  $\check{H} \cap ]y_0, -y_0] = \emptyset$  (ce qui en fait ne se produit que si  $H = y_1$ ),  $\check{f}$  est injective sur  $\check{H}$  et  $\check{H}$  est un arbre de Hubbard abstrait. On suppose maintenant que cette intersection est  $\neq \emptyset$ , d'où  $[y_0, -y_0] \subset \check{H}$ . Dans le cas périodique comme dans le cas prépériodique, le point  $-y_0$  n'est pas un point marqué de  $\check{H}$ . On a  $\check{\nu}(-y_0) \leq \check{\nu}(y_1) + 1 \leq 2$ , donc c'est un point ordinaire ou une extrémité. Mais, si c'était une extrémité, ce serait un point marqué. C'est donc un point ordinaire ( $\check{\nu} = 2$ ), i.e. un point non remarquable. Soit  $\alpha$  le premier point remarquable après  $-y_0$  en venant de  $y_0$ . L'application  $\check{f}|_{[\alpha, y_0]}$  est injective sur  $[\alpha, -y_0]$  et constante sur  $[-y_0, y_0]$ .

On peut trouver une application continue  $F : \check{H} \rightarrow \check{H}$  qui coïncide avec  $\check{f}$  (donc avec  $f$ ) sur  $\check{H} - ]\alpha, y_0[$ , et au voisinage de  $\alpha$ , et qui est injective sur  $[\alpha, y_0]$  avec  $F([\alpha, y_0]) = \check{f}([\alpha, +y_0]) = \check{f}([\alpha, -y_0])$ . Comme  $\check{f}$  est injective sur chacune des 2 composantes de  $\check{H} - ]-y_0, y_0[$ , l'application  $F$  est injective sur chacune des composantes de  $\check{H}$  coupé en  $y_0$ . On a bien sûr  $F(y_n) = y_{n+1}$  pour tout  $n$ . Par suite,  $\check{H}$  est un arbre de Hubbard abstrait. Cqfd.

## 8. ARGUMENTS EXTERNES DE $y_1$ .

PROPOSITION 9. a) Si  $y_1$  est strictement prépériodique, les arguments externes de  $y_1$  sont les mêmes dans  $H$  et dans  $\check{H}$ .

b) Si  $y_1$  est périodique, tout argument externe de  $y_1$  dans  $H$  appartient à  $I(\check{H}) = [\text{Arg}_-(\check{H}), \text{Arg}_+(\check{H})]$ .

c) Si  $y_1$  est périodique, les arguments dans  $H$  des accès à  $y_1$  adjacents à  $[y_1, x_1]$  sont associés à  $H$ .

Démonstration. Posons  $\tilde{H} = \check{H} \cup [\beta, -\beta]$ . L'application  $\hat{F} : \tilde{H} \rightarrow \tilde{H}$  qui coïncide avec  $F$  sur  $\check{H}$  et avec  $f$  (et  $\check{f}$ ) sur  $[\beta, -\beta]$  -  $\check{H}$  est injective sur chacune des composantes de  $\tilde{H}$  coupé en  $y_0$ , prolonge  $F$  et applique  $\beta$  et  $-\beta$  sur  $\beta$ . Par suite,  $\tilde{H}$  n'est autre que l'arbre obtenu en complétant  $\check{H}$  (cf. [AEJ]).

a) L'orbite directe de  $y_1$  ne rencontre pas  $[\delta, -\delta]$ , donc au voisinage de chacun de ses points,  $F$  coïncide avec  $f$ . L'arbre  $H$  qu'on obtient en faisant bourgeonner  $\tilde{H}$ , comme indiqué en [AEJ] (paragraphe 4) s'identifie à un voisinage de  $\check{H}$  dans  $H$ . Si  $\xi$  est un accès à  $y$ , relativement à  $H$ , ou à  $\check{H}$  ce qui revient au même, les  $f^n(\xi)$  et  $F^n(\xi)$  coïncident, donc les chiffres du développement en base 2 sont les mêmes pour les arguments de  $\xi$  relativement à  $H$  et  $\check{H}$ .

b) Notons  $\Theta$  l'ensemble des arguments externes de  $y_1$  dans  $H$  (i.e. dans  $K$ ). Notons  $\theta_-$  et  $\theta_+$  le plus petit et le plus grand élément de  $\Theta$ , et soit  $\theta \in \Theta$ . Soit  $\kappa$  la période de  $y_1$ , et pour tout  $t \in [0, 1[$  muni d'un développement en base 2 soit  $\epsilon_i(t)$  le  $i$ -ème chiffre après la virgule de ce développement.

Les arguments  $\check{\theta}_- = \text{Arg}_-(\check{H})$  et  $\check{\theta}_+ = \text{Arg}_+(\check{H})$  sont caractérisés par le fait qu'ils ont un développement périodique de période  $\kappa$ , avec  $\epsilon_i(\check{\theta}_-) = \epsilon_i(\theta_-)$  et  $\epsilon_i(\check{\theta}_+) = \epsilon_i(\theta_+)$  pour  $1 \leq i \leq \kappa$ . Pour chaque  $s \in \mathbb{N}$ , on a  $2^{s\kappa}\theta \in \Theta$ , donc  $(\epsilon_{s\kappa+1}(\theta), \dots, \epsilon_{s\kappa+\kappa}(\theta))$  est compris entre  $(\epsilon_{s\kappa+1}(\theta_-), \dots, \epsilon_{s\kappa+\kappa}(\theta_-))$  et  $(\epsilon_{s\kappa+1}(\theta_+), \dots, \epsilon_{s\kappa+\kappa}(\theta_+))$ . Par suite  $\check{\theta}_- \leq \theta \leq \check{\theta}_+$ .

c) Soit  $\kappa$  la période de  $y_1$ . Posons  $q = \nu_{Z_{k-1}}(y_1)$  et définissons  $p_1$  par la condition que le brin  $[y_1, x_1]$  est le  $p_1$ -ème après  $[y_1, \beta]$  en tournant dans le sens direct. Soit  $z_1$  un point sur  $]y_1, x_1[$  voisin de  $y_1$ , posons  $z_n = f^{n-1}(z_1)$  pour  $n \leq \kappa q + 1$ . Le point  $z_{\kappa q + 1}$  est aussi sur  $]y_1, x_1[$ .

Notons  $\check{H}_1$  l'enveloppe connexe de  $\{z_1, \dots, z_{\kappa q}\}$  dans  $Z_{k-1}$ . Définissons  $\alpha$  comme dans la démonstration de la proposition 8. On peut construire  $F_1$  :

$F_1 : Z_{k-1} \rightarrow Z_{k-1}$  coïncidant avec  $f$  sur  $Z_{k-1} - ]y_0, \alpha[$ , ainsi que sur chacun des  $[y_i, z_{i+sq}]$  pour  $0 \leq i \leq \kappa-1$  et  $q$  tel que  $1 \leq i+sq \leq \kappa q-1$ , avec  $F(z_{\kappa q}) = z_1$ , et  $F$  injective sur chacune des composantes de  $\check{H}_1$  coupé en  $Z_0 = z_{\kappa q}$ .

L'arbre  $\check{H}_1$  est un arbre de Hubbard abstrait, qui s'identifie à l'arbre obtenu à partir de  $\check{H}$  par bifurcation d'argument  $p/q_1$ . Comme en (a), les arguments de  $x_1$  sont les mêmes dans  $H$  et dans  $\check{H}_1$ . Les arguments des accès adjacents à  $[x_1, z_1]$  (i.e. à  $[x_1, y_1]$ ) sont donc  $\text{Arg}_-(\check{H}_1)$  et  $\text{Arg}_+(\check{H}_1)$ , ils sont associés à  $\check{H}$ . Cqfd.

## 9. DEMONSTRATION DU THEOREME.

Notons  $\theta_-$  et  $\theta_+$  le plus petit et le plus grand argument externe de  $y_1$  dans  $K$  (ou dans  $Z_{k-1}$ , c'est pareil). Notons  $\theta'$  et  $\theta''$  les arguments externes des accès à  $y_1$  relativement à  $Z_{k-1}$  adjacents à  $[y_1, x_1]$ , avec  $\theta' < \theta''$ . On a donc  $\theta_- \leq \theta' < \theta'' \leq \theta_+$ . Les arguments  $\theta'$  et  $\theta''$  sont associés à  $\check{H}$ .

L'argument externe de  $x_1$  dans  $K$  est  $\tau$  et on a  $\theta' < \tau < \theta''$ . Pour tout  $\tau' = p'/2^{k'}$  avec  $k' < k$ , le point  $\gamma(\tau')$  de  $K$ , d'argument externe  $\tau'$ , est une extrémité de  $Z_{k-2}$ , donc  $\tau' \notin [\theta', \theta'']$ . L'argument  $\tau$  est donc le chef-lieu de  $[\theta', \theta'']$ .

Le point  $y_1$  n'est pas un point extrémal de  $Z_{k-2}$ , donc il existe un point extrémal  $\zeta \in Z_{k-2}$  tel que  $y_1 \in ]\beta, \zeta[$ . On a  $\text{Arg}_K(\zeta) \in [\theta_-, \theta_+]$ , et  $\text{Arg}_K(\zeta)$  est de la forme  $p'.2^{k'}$  avec  $k' < k$  (proposition 1). Par suite,  $\tau$  n'est pas le chef-lieu de  $[\theta_-, \theta_+]$ .

On a  $I(\check{H}) \supset [\theta_-, \theta_+] \supset [\theta', \theta'']$ , donc  $\tau$  appartient à  $I(H)$  sans en être le chef-lieu. Cqfd.

ADRESSES

1. ORIGINE D'UNE NERVURE.

Nous gardons les notations des deux exposés précédents.  $\mathfrak{H}$  est l'ensemble des classes d'isomorphisme d'arbres de Hubbard abstraits. Pour chaque  $H \in \mathfrak{H}$ , on a défini les arguments associés et l'intervalle  $I(H) = [\arg_-(H), \arg_+(H)]$ .

Ceci permet de définir des nervures en termes d'arbres : pour  $\tau = \frac{D}{2^k}$  avec  $k > 0$ ,  $N_{\mathfrak{H}}(\tau) = \{H \in \mathfrak{H} \mid (\exists \theta', \theta'' \text{ associés à } H) \tau \text{ est le chef-lieu de } [\theta', \theta'']\}$

$$N_{\mathfrak{H}}^*(\tau) = \{H \in \mathfrak{H} \mid \tau \text{ est le chef-lieu de } I(H)\} .$$

Nous avons montré dans [AON] le théorème suivant :

THEOREME 1<sub>\mathfrak{H}</sub> . Pour tout  $\tau$  de la forme  $\frac{D}{2^k}$  avec  $k > 0$ , il existe un arbre  $\check{H} \in N_{\mathfrak{H}}(\tau) - N_{\mathfrak{H}}^*(\tau)$  .

Mais nous ne savons pas si le  $\check{H}$  ainsi construit est bien l'arbre d'un point  $c$  de  $\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_2$  .

Cependant, nous allons montrer le

THEOREME 2 . Il existe  $c \in \mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_2$  tel que tout argument associé à  $\check{H}$  soit associé à  $c$  .

Nous en déduisons aussitôt le

THEOREME 1<sub>\mathcal{D}</sub> . Pour tout  $\tau = \frac{D}{2^k}$ ,  $k > 0$ , la nervure  $N_{\mathcal{D}}(\tau)$  a une origine.

La nervure  $N_{\mathcal{D}}(0)$  se compose des points 0 et  $\frac{1}{4}$ . Nous conviendrons que  $\frac{1}{4}$  est l'origine de  $N_{\mathcal{D}}(0)$ , bien qu'il appartienne à  $N_{\mathcal{D}}^*(0)$ . Dans la suite, nous écrirons  $N$  pour  $N_{\mathcal{D}}$ .

Nous appellerons arguments propres d'un arbre abstrait  $H$  ses arguments associés s'il est prépériodique, mais seulement les arguments  $\text{Arg}_-(H)$  et  $\text{Arg}_+(H)$  s'il est périodique ; pour  $c \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ , les arguments propres de l'arbre  $f_c$  sont les arguments associés à  $c$ , c'est-à-dire les arguments externes de  $c$  dans  $M$ .

Nous fixerons un  $\tau = \frac{D}{2^k}$ ,  $k > 0$  ; nous noterons  $c_\tau$  le point de  $M$  d'argument externe  $\tau$ ,  $H$  l'arbre de Hubbard de  $f_{c_\tau}$ .

Construction du point annoncé au théorème 2.

On prend les arguments propres  $\theta_1 \dots \theta_n$  de  $\check{H}$  ; on regarde les points de  $\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_2$  plus petits que  $c_\tau$  (au sens de la relation  $<$  de  $([N], 4)$ ) dont l'arbre admet un  $2^i \theta_j$  ( $i \geq 0$ ,  $1 \leq j \leq n$ ) pour argument propre. Ceux-ci sont en nombre fini ; comme l'ensemble des points de  $\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_2$  plus petits que  $c_\tau$  est totalement ordonné ( $[N]$ , prop. 3, cor. 1), il y a un plus grand élément  $c$  parmi les points avant  $c_\tau$  dont l'arbre admet un  $2^i \theta_j$  pour argument propre : nous montrerons que  $c$  répond à l'énoncé du théorème 2.

Pour  $c_1 \in M$ ,  $\sim_{c_1}$  désigne la relation d'équivalence sur  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  définie par  $\theta \sim_{c_1} \theta' \iff \theta$  et  $\theta'$  sont arguments externes du même point de  $K_{c_1}$ .

Nous allons maintenant montrer comment  $\check{H}$  permet de définir une relation  $\sim_H$  sur  $A = \{2^i \theta_j \mid i \geq 0, 1 \leq j \leq n\} \cup \{\frac{1}{2} + 2^i \theta_j \mid i \geq 0, 1 \leq j \leq n\}$ . La construction de l'arbre complété de  $\check{H}$  au début de la démonstration de la proposition 9 de [AON] et l'algorithme décrit dans [CA.3] permettent, pour tout point prépériodique de  $\check{H}$  de définir des "arguments combinatoires associés" rationnels.

Contrairement à ce qui se produit dans les ensembles de Julia, il se peut que deux points distincts de  $H$  aient des arguments combinatoires égaux.

Pour  $\theta, \theta' \in A$ , on posera  $\theta \sim_H \theta'$  lorsqu'il existe un point de  $\check{H}$  de la forme  $y_i$  ou  $-y_i$  admettant  $\alpha$  et  $\alpha'$  pour arguments combinatoires. (Nous ne prétendons pas pour l'instant que  $\sim_H$  est une relation d'équivalence.)

On a défini  $y_i$  pour tout  $i \geq 0$  avec  $y_{i+1} = f(y_i)$ ,  $f$  étant la dynamique sur  $\check{H}$ ; pour  $i \geq 1$  dans le cas prépériodique,  $i \geq 0$  dans le cas périodique,  $y_i$  est aussi un point bien défini de  $H$ .

La proposition suivante complète la proposition 9 de [AON] :

PROPOSITION 1. a) Tous les éléments de  $A$  sont arguments externes de points  $y_i$  ou  $-y_i$  ( $i \geq 1$ ) de  $H$ .

b) Pour tout  $i > 0$ , les arguments combinatoires de  $y_i$  dans  $\check{H}$  sont des arguments externes de  $y_i$  dans  $H$ .

Démonstration. a)  $\theta_j$  est un argument externe de  $y_1$  ( $1 \leq j \leq n$ ), donc pour  $i \geq 0$ ,  $2^i \theta_j$  est un argument externe de  $y_{i+1}$ ;  $\frac{1}{2} + 2^i \theta_j$  est alors un argument externe de  $-y_i$ .

b) Dans le cas prépériodique comme dans le cas périodique, avec les notations de [AON],  $y_i \notin [-\delta, \delta]$  et on peut recopier la preuve de [AON], proposition 9 a). Cqfd.

COROLLAIRE.  $\tilde{H} = \tilde{c}_\tau|_A$ .

On notera  $\gamma_M(\alpha)$  le point de  $M$  d'argument externe  $\alpha$  pour  $\alpha \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ .

LEMME 1. Soit  $U$  la composante connexe de  $M - \{\gamma_M(2^i \theta_j) \mid i \geq 0, 1 \leq j \leq n\}$  contenant  $c_\tau$ . Sur  $U$ ,  $\tilde{c}|_A$  est constante.

Démonstration. Soient  $\theta, \theta' \in A$ . Montrons que l'ensemble des  $c_1 \in U$  tels que  $\theta \sim_{c_1} \theta'$  est ouvert et fermé dans  $U$ .

Il est fermé car  $\theta \sim_{c_1} \theta' \Leftrightarrow \gamma_{c_1}(\theta) = \gamma_{c_1}(\theta')$  où  $\gamma_{c_1}(\theta)$  (resp.  $\gamma_{c_1}(\theta')$ ) désigne l'aboutissement du rayon d'argument  $\theta$  (resp.  $\theta'$ ) dans  $K_{c_1}$ , et  $\gamma_{c_1}(\theta)$  comme  $\gamma_{c_1}(\theta')$  est une fonction continue de  $c_1$  (cf. [PC]); on n'utilise ici en fait que le cas "facile" du théorème).

Il est ouvert car par le choix des points retirés à  $M$ ,  $\gamma_{c_1}(2^i \theta_j)$  ou

$\gamma_{c_1}(\frac{1}{2} + 2^i \theta_j)$  (pour  $i \geq 0$ ,  $1 \leq j \leq n$ ) est prépériodique répulsif et pas dans l'orbite inverse de zéro pour  $f_{c_1}$ , donc il n'existe au voisinage de  $c_1$  qu'une détermination prépériodique du même type possible pour la fonction continue  $\gamma_{c_1}(2^i \theta_j)$  ou  $\gamma_{c_1}(\frac{1}{2} + 2^i \theta_j)$ . Cqfd.

LEMME 2. Si  $c$  est périodique,  $\tilde{c}_{\tau|A} = \tilde{c}|_A$

Si  $c$  est strictement prépériodique, le graphe de  $\tilde{c}|_A$  contient celui de  $\tilde{c}_{\tau|A}$ .

Démonstration. . Dans le cas périodique,  $U$  définie au lemme 1 contient  $c$ , car sans cela l'un des points  $\gamma_M(2^i \theta_j)$  ( $i \geq 0$ ,  $1 \leq j \leq n$ ) serait compris entre  $c$  et  $c_{\tau}$  au sens de la relation d'ordre sur  $\mathcal{D}$ , ce qui contredirait la construction de  $c$ . Dès lors, le lemme 1 entraîne  $\tilde{c}_{\tau|A} = \tilde{c}|_A$ .

. Dans le cas strictement prépériodique, on peut seulement dire que  $c \in \bar{U}$  par le même raisonnement ; les relations  $\alpha \sim \alpha'$  ouvertes en  $c$  (i.e.  $\alpha \not\sim_c \alpha'$ ) le restent au voisinage de  $c$  donc dans  $U$ , d'où l'inclusion annoncée. Cqfd.

Remarque. Ce qui peut se produire dans ce cas, c'est, si  $c$  est de la forme  $\gamma_M(2^{i_0} \theta_j)$  avec  $i_0 > 0$  et  $1 \leq j \leq n$ , que les  $2^{i_0} \theta_j$  et les  $\frac{1}{2} + 2^{i_0} \theta_j$ , non liés pour  $\tilde{c}_0$  se regroupent pour  $\tilde{c}$  ; pour  $i < i_0$ , les  $2^i \theta_j$  et les  $\frac{1}{2} + 2^i \theta_j$  aboutissent dans  $K_c$  en des points opposés, donc ne se lient pas mutuellement.

On en déduit donc, compte tenu du corollaire de la proposition 1 :

COROLLAIRE. Si  $c$  est dans  $\mathcal{D}_0$ ,  $\tilde{c}_H = \tilde{c}|_A$ .

Preuve du théorème 2.

Cas où  $H$  est périodique. Il y a ici seulement deux  $\theta_j$  :  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , qui sont à dénominateur impair. Par définition de  $c$ , un argument propre au moins de

l'arbre associé à  $c$  est de la forme  $2^i \theta_j$  ( $i \geq 0$ ,  $j = 1, 2$ ) ; quitte à renuméroter  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , nous supposons que  $c$  est  $2^i \theta_1$  qui est dénominateur impair :  $c$  est donc dans  $\mathfrak{D}_0$ .

Vu la construction purement arithmétique des arguments associés à un arbre périodique en fonction des arguments propres faite en [CA.3], il suffit de montrer que l'arbre associé à  $c$  et  $\check{H}$  ont mêmes arguments propres. Puisqu'il est égal à l'arbre associé à  $c$  (cf. [CA] prop. 1 et 2), on pourra regarder l'arbre à la racine  $c_1$  de la composante hyperbolique de  $M$  dont  $c$  est le centre.

. Cas où  $c_1$  est racine d'une composante primitive (i.e. la valeur propre du cycle indifférent rationnel est 1). Dès lors, tout rayon aboutissant au point du cycle indifférent rationnel qui attire  $c_1$  dans  $K_{c_1}$  fournit un argument propre de  $c_1$  ; puisqu'il arrive deux rayons externes de  $M$  en  $c_1$ , il y a exactement deux tels rayons. On a  $2^{i_0} \theta_1 \sim_{\check{H}} 2^{i_0} \theta_2$ , donc  $2^{i_0} \theta_1 \sim_{c_1} 2^{i_0} \theta_2$  et les arguments propres de l'arbre de  $c_1$  sont donc  $2^{i_0} \theta_1$  et  $2^{i_0} \theta_2$  pour un  $i_0 \geq 0$ . Il reste à montrer que  $i_0 = 1$  : sur un cercle, joignons par un segment le point d'argument  $2^i \theta_1$  et le point d'argument  $2^i \theta_2$  d'une part, le point d'argument  $\frac{1}{2} + 2^i \theta_1$  et le point d'argument  $\frac{1}{2} + 2^i \theta_2$  d'autre part, pour chaque  $i$ . Si  $k$  est la période de  $\theta_1$  ou  $\theta_2$  pour la multiplication par 2,  $i_0$  se reconnaît à ce que les segments de  $2^{i_0+k-1} \theta_1$  à  $2^{i_0+k-1} \theta_2$  et de  $\frac{1}{2} + 2^{i_0+k-1} \theta_1$  à  $\frac{1}{2} + 2^{i_0+k-1} \theta_2$  délimitent une région qui contient le centre du cercle ; or  $c$  est précisément le cas pour  $i_0 = 1$  (les rayons d'arguments  $2^k \theta_1$ ,  $2^k \theta_2$ ,  $\frac{1}{2} + 2^k \theta_1$  et  $\frac{1}{2} + 2^k \theta_2$  aboutissant dans  $H$  en  $\varepsilon$  et  $-\varepsilon$  avec les notations de [AON]).

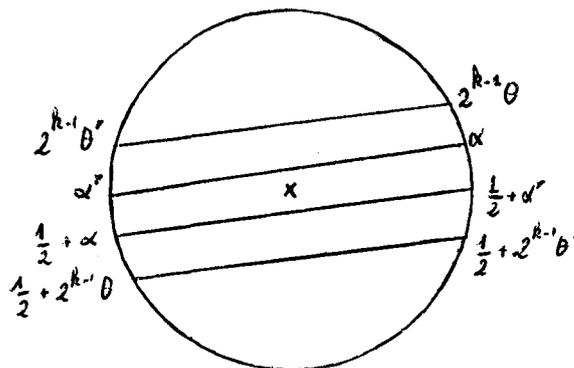
$\theta_1$  et  $\theta_2$  sont bien les arguments propres de  $c_1$ .

. Cas où  $c_1$  n'est pas primitive. Ici  $f_{c_1}$  agit transitivement sur les rayons aboutissant aux points du cycle indifférent rationnel ; comme  $\theta_1 \sim_{\check{H}} \theta_2$ , on a aussi  $\theta_1 \sim_{c_1} \theta_2$ , donc  $\theta_2$  est de la forme  $2^a \theta_1$  pour un  $a \geq 0$ . Comme dans le cas où  $c_1$  est primitive, joignons par un segment les  $2^i \theta_1$  aux  $2^i \theta_2$  et

les  $\frac{1}{2} + 2^i \theta_1$  aux  $\frac{1}{2} + 2^i \theta_2$ . Là encore les segments de  $2^k \theta_1$  à  $2^k \theta_2$  et  $\frac{1}{2} + 2^k \theta_1$  à  $\frac{1}{2} + 2^k \theta_2$  délimitent une région qui contient le centre du cercle, ce qui montre que ce sont bien  $\theta_1$  et  $\theta_2$  qui sont dans  $K_{c_1}$  les rayons adjacents au pétale contenant  $c_1$ , et ce sont bien les arguments propres de  $c_1$ .

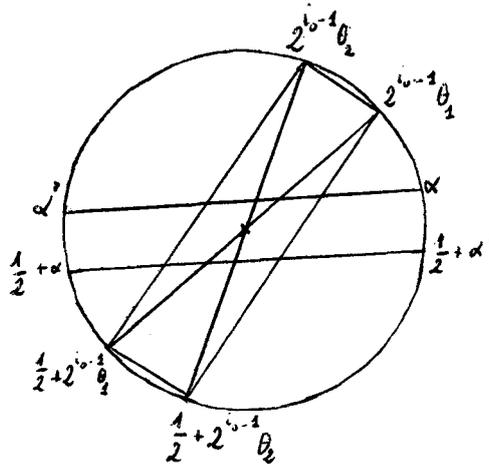
Cas où H est strictement prépériodique. Comme dans le cas précédemment traité, joignons sur un cercle les points d'arguments  $\alpha$  et  $\alpha'$  pour tout couple  $\alpha, \alpha'$  de points de A équivalents par  $\sim_H$ , et qui sont donc aussi équivalents pour  $\sim_c$  (cf. lemme 2).

. Cas où  $c \in \mathcal{D}_0$ . On va montrer que ce cas ne peut se produire. Il ne suffit pas ici de regarder  $\sim_H^v$ , mais il faut revenir à  $\sim_{c_T}$ , égale à  $\sim_c$  sur A d'après le lemme 2. On peut alors, dans le schéma auxiliaire, ajouter des segments entre les arguments externes de  $\delta$  (resp.  $-\delta$ ). Comme  $\delta$  et  $-\delta$  sont de part et d'autre de zéro sur H (cf. [AON.5] : il n'y a pas de point de branchement de  $Z_{k-1}$  sur  $]-\delta, \delta[$ ), on peut donc trouver  $\alpha$  et  $\alpha'$  tels que  $2\alpha$  et  $2\alpha'$  soient un  $\theta_j$  et un  $\theta_{j'}$  ( $1 \leq j \leq n, 1 \leq j' \leq n$ ), dont les rayons associés aboutissent dans  $K_{c_T}$  en  $\delta$ , et tels que sur le schéma auxiliaire, les segments de  $\alpha$  à  $\alpha'$  et de  $\frac{1}{2} + \alpha$  à  $\frac{1}{2} + \alpha'$  séparent le centre du cercle de tous les segments correspondant à  $\sim_H^v|_A$ . On a alors la situation suivante :



Si  $\theta$  et  $\theta'$  sont les arguments propres de l'arbre de  $c$ , et  $k$  l'ordre du cycle de  $f_c$ , on a alors une absurdité, car le raisonnement du lemme 1 montre que  $\mathcal{R}_{K_C}(\alpha)$  et  $\mathcal{R}_{K_C}(\alpha')$  aboutissent encore en un même point, qui devra être sur l'arc réglementaire dans  $K_C$  joignant les aboutissements de  $\mathcal{R}_{K_C}(2^{k-1}\theta)$  et  $\mathcal{R}_{K_C}(\frac{1}{2} + 2^{k-1}\theta)$ ; mais cet arc est dans  $\overset{\circ}{K}_C$ , d'où une contradiction.

. Cas où  $c \in \mathcal{D}_2$ . On peut définir  $\alpha$  et  $\alpha'$  comme ci-dessus. Si un  $2^i\theta_j$  ( $1 \leq j \leq n, i \geq 0$ ) est argument propre de l'arbre de  $c$ , tous les autres  $2^i\theta_{j'}$  ( $1 \leq j' \leq n$ ) le sont aussi, puisqu'ils sont  $\sim_c$  équivalents à  $2^i\theta_j$ . Supposons que ce soit le cas pour un  $i_0 > 0$ . D'après la remarque qui suit le lemme 2, tous les  $2^{i_0-1}\theta_j$  et les  $\frac{1}{2} + 2^{i_0-1}\theta_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) sont alors  $\sim_c$  équivalents. On a donc une situation :



Comme la relation  $\sim_c$  est non croisée, cela impose que  $\mathcal{R}_{K_C}(\alpha)$  aboutisse aussi en zéro, ce qui est impossible puisque  $2^{i_0-1}\theta_j$  est de la forme  $2^p\alpha$  avec  $p \neq 0$  et  $\alpha$  n'est pas périodique pour  $f_c$ .

Comme un  $2^i\theta_j$  ( $i \geq 0, 1 \leq j \leq n$ ) au moins est argument associé à  $c$  par choix de  $c$ , les  $\theta_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) sont bien des arguments propres de l'arbre de  $c$ . Cqfd.

## 2. ADRESSES FINIES.

Soit  $c$  un point de  $\mathcal{D}$ . Une adresse finie pour  $c$  est une suite finie

$(c_0, \tau_0, c_1, \tau_1, \dots, c_{r-1}, \tau_{r-1}, c_r)$  telle que :

- (a)  $c_0 = 1/4$  ;  $\tau_0 = 0$  et  $c_1 = 0$  si  $r \geq 1$ .
- (b)  $c_r = c$ .
- (c)  $c_i$  est l'origine de  $N(\tau_i)$  pour  $i = 0, \dots, r-1$ .
- (d)  $c_{i+1} \in N^*(\tau_i)$  pour  $i = 0, \dots, r-1$ .

PROPOSITION 2. Soit  $c \in \mathcal{D}$  tel que  $I(c)$  ne soit pas réduit à un point, ou soit de la forme  $\{p/2^k\}$ . Alors,  $c$  admet une adresse finie unique.

Démonstration. Posons  $c_0^i = c$ , et définissons  $c_i^i, \tau_i^i$  par récurrence. Pour tout  $i$ ,  $\tau_i^i$  est le chef-lieu de  $I(c_i^i)$ , et  $c_{i+1}^i$  est l'origine de  $N(\tau_i^i)$ . (Remarquons que les  $I(c_i^i)$  vont en croissant, de sorte que le chef-lieu de  $I(c_i^i)$  est défini pour tout  $i$ .) Le nombre  $\tau_i^i$  est de la forme  $p^i/2^{k_i^i}$ , et les  $k_i^i$  vont en décroissant strictement jusqu'à ce qu'ils s'annulent. Il existe donc un  $r$  tel que  $k_{r-1}^i = 0$ , i.e.  $\tau_{r-1}^i = 0$ , d'où  $c_r^i = 1/4$ . On pose alors  $c_i = c_{r-i}^i$  et  $\tau_i = \tau_{r-1-i}^i$ , et  $(c_0, \tau_0, \dots, \tau_{r-1}, c_r)$  est une adresse finie de  $c$ . Il est clair qu'une adresse finie de  $c$  est nécessairement obtenue ainsi, d'om l'unicité. Cqfd.

Remarques. 1) Soit  $c \in \mathcal{D}$  ayant pour adresse  $(c_0, \tau_0, c_1, \tau_1, \dots, c_r)$ . On a

$c_0 < c_1 < \dots < c_r$ . L'ensemble des points antérieurs à  $c$  est

$[c_0, c_1]_{N(\tau_0)} \cup \dots \cup [c_{r-1}, c_r]_{N(\tau_{r-1})}$ . Si  $c' \in ]c_{i-1}, c_i]$ , le point  $c'$  admet pour adresse  $(c_0, \tau_0, \dots, c_{i-1}, \tau_{i-1}, c')$ .

2) On peut définir des adresses infinies, en remplaçant la condition (b) par (b') :  $\bigcap I(c_r) = I(c)$ . On peut alors démontrer que tout point de  $\mathcal{D}$  admet une adresse finie ou infinie.

### 3. POINT DE SEPARATION.

PROPOSITION 3. Soient c et c' deux points de  $\mathcal{D}$  satisfaisant aux conditions de la proposition 2. Alors, c et c' admettent dans  $\mathcal{D}$  une borne inférieure  $c'' = c \wedge c'$ .

Démonstration. Soient  $(c_0, \tau_0, \dots, c_r)$  et  $(c_0^i, \tau_0^i, \dots, c_{r^i}^i)$  les adresses de c et c' respectivement, et soit k le plus grand i tel que  $\tau_i = \tau_i^i$ . Les points  $c_{k+1}$  et  $c_{k+1}^i$  appartiennent à la nervure stricte  $N^*(\tau_i)$ , donc sont comparables ; soit c'' le premier des deux. Il est clair que c'' est le plus grand minorant commun à c et c'. Cqfd.

Remarque. L'hypothèse que c et c' satisfont aux conditions de la proposition 1 n'est pas essentielle : on peut s'en passer en considérant éventuellement des adresses infinies.

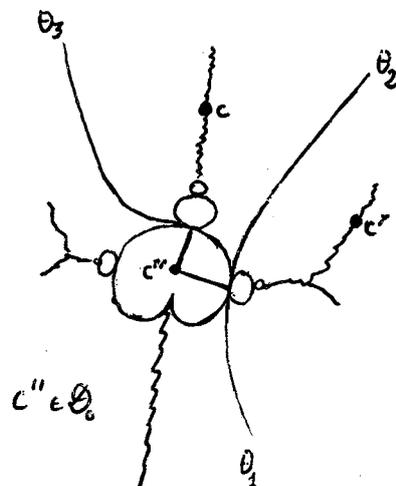
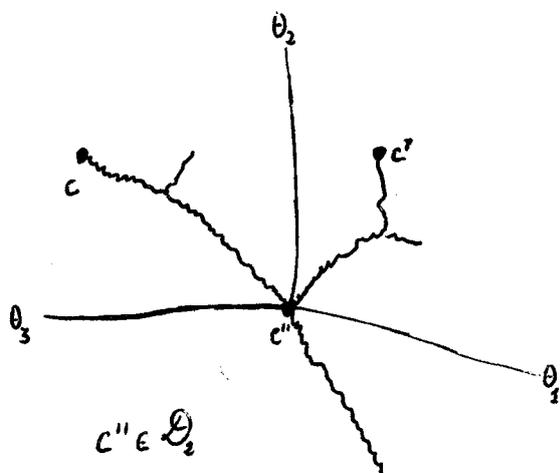
PROPOSITION 4. Soient c et c' deux points de  $\mathcal{D}$  satisfaisant aux conditions de la proposition 1, et posons  $c'' = c \wedge c'$ . On suppose c et c' non comparables (i.e.  $c \not\leq c'$  et  $c' \not\leq c$ , de sorte que  $c'' < c'$  et  $c'' < c$ ). Il existe alors trois arguments  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  associés à c'' tels que, quitte à échanger c et c', on ait  $0 < \theta_1 < \arg_-(c) \leq \arg_+(c) < \theta_2 < \arg_-(c') \leq \arg_+(c') < \theta_3 < 1$ .

Démonstration. Soient  $(c_0, \tau_0, \dots, c_r = c)$  et  $(c_0^i, \tau_0^i, \dots, c_{r^i}^i = c')$  les adresses de c et c', et k le plus grand i tel que  $\tau_i = \tau_i^i$ . On a  $c'' \in N(\tau_k)$ . Posons  $\tau_* = \tau_{k+1}$  si  $c'' = c_{k+1}$  et  $\tau_* = \tau_k$  si  $c'' < c_{k+1}$ , et définissons de même  $\tau_*^i$ . On a  $c'' \in N(\tau_*)$  et  $c'' \in N(\tau_*^i)$ , donc il existe quatre arguments  $\theta_1^*, \theta_2^*, \theta_3^*, \theta_4^*$  associés à c'' tels que  $\tau_*$  soit le chef-lieu de  $[\theta_1^*, \theta_2^*]$  et  $\tau_*^i$  celui de  $[\theta_3^*, \theta_4^*]$ . On a alors  $\theta_1^* < \arg_-(c) \leq \arg_+(c) < \theta_2^*$  et  $\theta_3^* < \arg_-(c') \leq \arg_+(c') < \theta_4^*$ . D'autre part,  $\tau \notin [\theta_3^*, \theta_4^*]$  ou  $\tau^i \notin [\theta_1^*, \theta_2^*]$ . Il en résulte que l'on peut extraire de  $\{\theta_1^*, \theta_2^*, \theta_3^*, \theta_4^*\}$  trois arguments satisfaisant aux conditions requises. Cqfd.

Pour  $c \in \mathcal{D}$  et  $\theta$  un argument associé à  $c$ , on définit  $\hat{\mathcal{R}}(c, \theta)$  de la façon suivante : si  $c \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ ,  $\mathcal{R}(M, \theta)$  aboutit en  $c$  et on pose  $\hat{\mathcal{R}}(c, \theta) = \overline{\mathcal{R}(M, \theta)} = \mathcal{R}(M, \theta) \cup \{c\}$ . Si  $c \in \mathcal{D}_0$ ,  $c$  est le centre d'une composante hyperbolique  $W$  et  $\mathcal{R}(M, \theta)$  aboutit en un point  $c' \in \partial W$ ; on pose alors  $\hat{\mathcal{R}}(c, \theta) = \mathcal{R}(M, \theta) \cup [c, c']_{\overline{W}}$ .

La proposition 3 admet comme complément :

COROLLAIRE. Soient  $c, c', c'', \theta_1, \theta_2, \theta_3$  comme dans la proposition 3. Alors,  $c, c'$  et  $\mathcal{R}(M, 0)$  sont contenus dans trois composantes connexes différentes de  $C - \bigcup_{i=1}^3 \hat{\mathcal{R}}(c'', \theta_i)$ .



4. L'IMPLICATION  $(MLC) \Rightarrow (HG2)$ .

THEOREME. Si  $M$  est localement connexe, toute composante connexe de  $\overset{\circ}{M}$  est hyperbolique.

Démonstration. Supposons  $M$  localement connexe et soit  $W$  une composante connexe non hyperbolique de  $\overset{\circ}{M}$ . L'ensemble  $\partial W$  est infini non dénombrable, et comme  $\mathcal{D}$  est dénombrable, on peut trouver trois points  $x_1, x_2$  et  $x_3$  distincts dans  $\partial W \cap \mathcal{D}$ . Le lacet de Carathéodory  $\mathbb{T} \rightarrow \partial M$  est surjectif; on a  $\partial W \subset \partial M$ , donc on peut trouver  $t_1, t_2, t_3$  tels que  $\mathcal{R}(M, t_i)$  aboutisse

en  $x_i$ . Quitte à permuter les  $x_i$  et les  $t_i$ , on peut supposer que  $0 < t_1 < t_2 < t_3 < 1$ . Soient  $\tau = p/2^k$  et  $\tau' = p'/2^{k'}$  tels que :

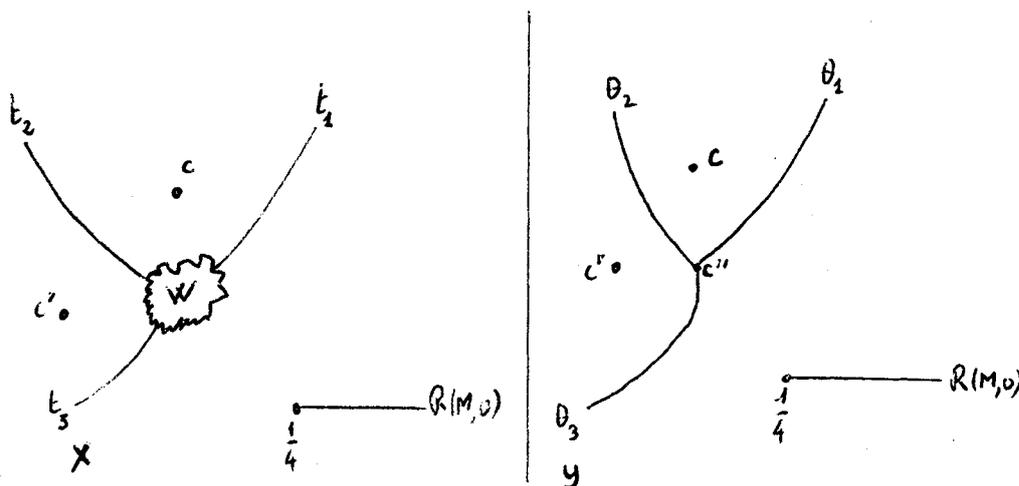
$$\textcircled{1} \quad 0 < t_1 < \tau < t_2 < \tau' < t_3 < 1 ;$$

notons  $c$  et  $c'$  les points d'aboutissement de  $\mathcal{R}(M, \tau)$  et  $\mathcal{R}(M, \tau')$ , et posons  $c'' = c \wedge c'$  (les points  $c$  et  $c'$  satisfont aux hypothèses de la proposition 1).

Comme  $c$  et  $c'$  sont maximaux dans  $\mathcal{D}$ , ils sont non comparables. D'après la proposition 3 et son corollaire, on peut trouver trois arguments  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  associés à  $c''$  tels que  $c, c'$  et  $\mathcal{R}(M, 0)$  soient dans trois composantes distinctes de  $\mathbb{C} - Y$ , où  $Y = \bigcup_{i=1}^3 \hat{\mathcal{R}}(c'', \theta_i)$ . Posons  $X = W \cup \bigcup_{i=1}^3 \mathcal{R}(M, t_i) \cup \{x_i\}$ . L'ensemble

$X$  est connexe. On a  $X \cap Y = \emptyset$  : en effet, les points de  $X$  dans  $\mathbb{C} - M$  ont des arguments externes irrationnels tandis que ceux des points de  $Y \cap (\mathbb{C} - M)$  sont rationnels,  $X \cap \partial M \subset \partial W - \mathcal{D}$  et  $Y \cap \partial M \subset \mathcal{D}$ ,  $X \cap \overset{\circ}{M} \subset W$  non hyperbolique tandis que  $Y \cap \overset{\circ}{M}$  est vide ou contenu dans une composante hyperbolique de centre  $c''$ . La relation  $\textcircled{1}$  montre que  $c, c'$  et  $\mathcal{R}(M, 0)$  sont dans trois composantes connexes distinctes de  $\mathbb{C} - X$ .

Soient  $U$  la composante connexe de  $\mathbb{C} - X$  contenant  $Y$  et  $V$  la composante connexe de  $\mathbb{C} - Y$  contenant  $X$ . Toute composante connexe de  $\mathbb{C} - X$  autre que  $U$  est contenue dans  $V$ , donc  $V$  contient au moins deux des trois ensembles  $\{c\}$ ,  $\{c'\}$  et  $\mathcal{R}(M, 0)$ . Contradiction. Cqfd.



Impossible à réaliser avec  $X \cap Y = \emptyset$

EXPOSE N° XXIII

RESSEMBLANCE ENTRE L'ENSEMBLE DE MANDELBROT

ET L'ENSEMBLE DE JULIA

AU VOISINAGE D'UN POINT DE MISUREWICZ

par Tan-Lei

§1. NOTATION ET ÉNONCÉ. INTRODUCTION.

Soit  $K_c$  l'ensemble de Julia rempli de  $f_c : z \rightarrow z^2+c$ . Soit  $M$  l'ensemble de Mandelbrot, i.e.  $M$  est l'ensemble de  $c$  tels que  $0 \in K_c$ . On rappelle que  $c_0 \in M$  est un point de Misurewicz si le point  $0$  est strictement prépériodique par  $f_{c_0}$ , c'est-à-dire s'il existe deux entiers  $\ell > 0$  et  $k > 0$  tels que  $f_{c_0}^\ell(0) = f_{c_0}^{\ell+k}(0)$  mais  $f_{c_0}^{\ell-1}(0) \neq f_{c_0}^{\ell+k-1}(0)$ , et que  $\rho_0 = (f_{c_0}^k)'(x)$  est la valeur propre du cycle  $\{f_{c_0}^\ell(0), f_{c_0}^{\ell+1}(0), \dots, f_{c_0}^{\ell+k-1}(0)\}$ . En vertu du théorème 1 de [AREMAR] et de ses compléments, on sait que les arguments externes de  $c_0$  dans  $M$  sont ceux de  $c_0$  dans  $K_{c_0}$ . Dans ce mémoire, on va chercher une relation géométrique entre  $M$  et  $K_{c_0}$  au voisinage de  $c_0$ . Plus précisément, on aura :

THÉOREME. Soient  $c_0 \in M$  un point de Misurewicz et  $\rho_0$  la valeur propre du cycle sur lequel tombe  $0$ , alors il existe un sous-ensemble fermé  $Z$  de  $\mathbb{C}$  avec  $\rho_0 Z = Z$  et  $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$  tels que  $\rho_0^n \tau_{-c_0}(K_{c_0}) \rightarrow Z$  et

$$\rho_0^n \tau_{-c_0}(M) \rightarrow \lambda Z$$

lorsque  $n$  tend vers  $\infty$ .

Ici,  $\tau_{-c_0}$  est la translation de  $-c_0$ ; le sens de la convergence sera précisé au §2.

Comme hypothèse générale de ce mémoire, on suppose toujours que  $c_0 \in M$  est un point de Misurewicz et  $\alpha_0$  le premier point du cycle sur lequel tombe  $0$ . On notera  $\ell$  le plus petit entier positif tel que  $f_{c_0}^\ell(0) = \alpha_0$  et  $k$  la

période du cycle. On rappelle que  $K_{c_0}$  est d'intérieur vide et que le point périodique  $\alpha_0$  est répulsif (i.e.  $|\rho_0| > 1$ ). Le théorème ci-dessus est la conjonction du théorème 1 du §3 et du théorème 2 du §5.

## §2. DISTANCE DE HAUSDORFF.

Soit  $E$  un espace métrique localement compact à boules fermées compactes (i.e. pour  $a \in E$ ,  $R \in \mathbb{R}^+$ , la boule fermée  $B(a, R)$  est compacte) avec une métrique  $d$ . Notons  $F$  l'ensemble des sous-ensembles fermés de  $E$  et  $F_1$  l'ensemble des voisinages fermés de  $\infty$  de  $E$ .

DÉFINITION 1. Pour  $A, B \subset E$  fermés "voisinages de  $\infty$ " i.e.  $E-A$  et  $E-B$  sont relativement compacts, on définit  $\delta(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y)$  et une distance  $D(A, B) = \sup\{\delta(A, B), \delta(B, A)\}$ .

Comme il existe  $x_0 \in E$  et  $R \in \mathbb{R}^+$  tel que  $E - B(x_0, R) \subset A \cap B$ , les deux fonctions  $x \rightarrow d(x, A)$  et  $y \rightarrow d(y, B)$  sont continues à support compact. Donc  $\delta(A, B)$  et  $\delta(B, A)$  sont bien définies. Si  $C$  est un autre voisinage fermé de  $\infty$ , pour tout  $z \in C$ , on a  $\delta(A, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y) \leq \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} (d(x, y) + d(z, y)) = \sup_{x \in A} d(x, z) +$

$\inf_{y \in B} d(z, y) \leq \sup_{x \in A} d(x, z) + \delta(C, B)$ . Comme  $E - C$  est relativement compact, il existe

$z_x \in C$  tel que  $d(x, z_x) = d(x, C)$  pour tout  $x \in A$  donc  $\delta(A, B) \leq \delta(A, C) + \delta(C, B) \leq D(A, C) + D(C, B)$ . Idem pour  $\delta(B, A)$ . Tout cela implique

$$D(A, B) \leq D(A, C) + D(C, B) .$$

De plus,  $\delta(A, B) = 0$  implique  $A \subset B$ , et  $\delta(B, A) = 0$  implique  $B \subset A$ , donc une condition nécessaire et suffisante pour  $D(A, B) = 0$  est  $A = B$ . Cela nous dit que  $D$  est une distance bien définie sur  $F_1$ .

Fixons un point  $x \in E$ .

DÉFINITION 2. Pour  $A, B \subset E$  fermés quelconques, et un réel positif  $R$ , on définit  $A_R = A \cup (E - \overset{\circ}{B}(x_0, R))$  et  $B_R = B \cup (E - \overset{\circ}{B}(x_0, R))$ . Comme  $A_R$  et  $B_R$  sont dans  $F_1$ , on peut définir aussi

$$d_R(A, B) = D(A_R, B_R) .$$

DÉFINITION 3. Soit  $\{A_n\}$  une suite dans  $F$  et  $A \in F$ . On dit  $A_n \rightarrow A$  si pour tout  $R > 0$ ,  $d_R(A_n, A) \rightarrow 0$ . Soient  $S$  un espace métrique et  $X: s \rightarrow X(s)$

une application de  $S$  dans  $F$ . On dit que  $X$  est semi continue supérieurement (s.c.s.) au point  $s_0$  si pour tout  $R > 0$  et pour toutes les suites  $\{s_n\}$  dont  $s_n \rightarrow s_0$  on a  $\delta(X_R(s_n), X_R(s_0)) \rightarrow 0$ . Par contre, on dit que  $X$  est semi continue inférieurement (s.c.i.) au point  $s_0$  si  $\delta(X_R(s_0), X_R(s_n)) \rightarrow 0$  pour tout  $R > 0$  et pour toutes les suites  $\{s_n\}$  telles que  $s_n \rightarrow s_0$ . On dit que  $X$  est continue au point  $s_0$  si elle est en même temps s.c.s. et s.c.i. à ce point.

C'est le sens à donner à la convergence dans l'énoncé du théorème du §1.

PROPOSITION 2.1. Soient  $E$  un espace métrique localement compact à boules fermées compactes,  $S$  un espace métrique et  $X \subset S \times E$ . On note  $X(s)$  pour  $s \in S$  l'ensemble des  $x \in E$  tels que  $(s, x) \in X$ . Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- 1)  $X$  est fermé dans  $S \times E$
- 2) pour tout  $s \in S$ ,  $X(s)$  est fermé dans  $E$  et l'application  $s \rightarrow X(s)$  est s.c.s. à ce point.

Démonstration : Fixons un point  $x_0$  dans  $E$  pour tout  $R > 0$ . La boule fermée  $B(x_0, R)$  est compacte dans  $E$  par hypothèse.  $X$  est fermé dans  $S \times E$  si et seulement si  $X \cap S \times B(x_0, R)$  est fermé dans  $S \times B(x_0, R)$  pour tout  $R > 0$ . Donc on se ramène au cas que  $E$  est un espace compact.

1)  $\implies$  2). De  $E$  compact et  $X$  fermé, on déduit directement que  $X(s)$  est fermé pour  $s \in S$ . Si  $X$  n'est pas s.c.s. au point  $s_0$ , alors  $\exists x_n \in X(s_n)$  avec  $s_n \rightarrow s_0$  et  $x_n \rightarrow x_0$  tels que  $d(x_n, X(s_0)) \geq \varepsilon_0$ , où  $\varepsilon_0$  est un constant (pour tout  $n$ ), donc  $d(x_0, X(s_0)) \geq \frac{\varepsilon_0}{2}$ , contradiction avec  $(s_0, x_0) \in X$ .

2)  $\implies$  1). Supposons qu'il existe  $\{(x_n, s_n)\} \subset X$  avec  $(x_n, s_n) \rightarrow (x_0, s_0)$  et que  $(x_0, s_0) \notin X$ . Comme  $X(s_0)$  est fermé, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $d(x_0, X(s_0)) \geq 2\varepsilon$ . Donc quand  $n$  est assez grand on a  $d(x_n, X(s_0)) > \varepsilon$  cela induit  $\delta(X(s_n), X(s_0)) > \varepsilon_0$ , contradiction avec la semi-continuité supérieure de  $X$  au point  $s_0$ . cqfd.

PROPOSITION 2.2. Soient  $U, V$  deux voisinages de  $0$  dans  $\mathbb{C}^n$  et  $\varphi: U \rightarrow V$  un isomorphisme de classe  $C_1$  avec  $\varphi(0) = 0$  et  $T_0\varphi = T$  non singulier. Si  $A \subset U$  est un sous-ensemble fermé et  $B = \varphi(A)$ , alors pour  $\rho \in \mathbb{C}$  variable et pour tout  $R > 0$  fixé, on a  $d_R(\rho(TA), \rho B) \rightarrow 0$  quand  $|\rho| \rightarrow \infty$ .

( $T: z \rightarrow Tz$  est une application linéaire et  $\rho: (z_1, \dots, z_n) \rightarrow (\rho z_1, \dots, \rho z_n)$  est la multiplication par  $\rho$ ).

Démonstration : Pour démontrer  $\delta((\rho(TA))_R, (\rho(B))_R) \rightarrow 0$ , il suffit de démontrer  $\delta((\rho(TA) \cap D_R \cup \partial D_R), (\rho(B) \cap D_R \cup \partial D_R)) \rightarrow 0$ , où  $D_R = \overset{\circ}{B}(0, R)$ . Le résultat est trivial quand  $0 \in \bar{A}$ .

Supposons  $0 \in A$ . Pour  $\varepsilon > 0$ , et  $y \in (\rho(TA) \cap D_R \cup \partial D_R)$ , si  $d(y, \partial D_R) < \varepsilon$ , alors  $d(y, (\rho(B))_R) < \varepsilon$ . Sinon, prenons le point  $z \in A$  tel que  $y = \rho.Tz$ . Alors  $\varphi(z) \in B$  et  $d(y, \rho\varphi(z)) = \|y - \rho\varphi(z)\| = |\rho| \cdot \|z\| \cdot \left\| \frac{\varphi(z) - Tz}{\|z\|} \right\| = \|\rho z\| \cdot \left\| \frac{\varphi(z) - Tz}{\|z\|} \right\| < R \|T^{-1}\| \left\| \frac{\varphi(z) - Tz}{\|z\|} \right\|$ . L'hypothèse  $T \circ \varphi = T$  nous dit qu'il existe  $N > 0$  et  $\tau > 0$  tels que  $|\rho| > N$  entraîne  $\|z\| = |T^{-1}(Tz)| < C \frac{R}{|\rho|} < \tau$  et puis  $R \left\| \frac{\varphi(z) - Tz}{z} \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$  où  $C = \|T\|^{-1}$ . Cette valeur de  $N$  ne dépend pas du choix de  $y$ . De  $d(y, \rho\varphi(z)) < \frac{\varepsilon}{2}$ ; on a  $\rho\varphi(z) \in D_R$ . Donc  $|\rho| > N$  nous donne  $\delta((\rho(TA))_R, (\rho(B))_R) < \varepsilon$ . Idem pour  $\delta((\rho(B))_R, (\rho(TA))_R)$ . cqfd.

### §3. LE PROBLÈME DE LA LINEARISATION.

Pour  $c_0 \in M$  point de Misurewicz, on a

PROPOSITION 3.1. Il existe un voisinage  $W$  de  $c_0$  dans  $\mathbb{C}$  tel que il y ait une fonction holomorphe  $\alpha : W \rightarrow \mathbb{C}$  avec  $\alpha(c_0) = \alpha_0$  et  $f_c^k(\alpha(c)) = \alpha(c)$  pour tout  $c \in W$ . De plus, pour  $\rho(c) = (f_c^k)'(\alpha(c))$

$$\mu = \inf_{c \in W} |\rho(c)| > 1.$$

Démonstration : Notons  $F(c, z) = f_c^k(z) - z$ . Alors  $F(c_0, \alpha_0) = 0$  et  $F'_z(c_0, \alpha_0) = (f_{c_0}^k)'(\alpha_0) - 1 \neq 0$ . Le théorème des fonctions implicites nous emmène à la proposition. cqfd.

LEMME 1. Soient  $U, V$  deux voisinages de  $0$  dans  $\mathbb{C}$  et  $f : U \xrightarrow{\sim} V$  une fonction holomorphe avec  $f(0) = 0$  et  $|f'(0)| < 1$ . Alors il existe  $U_1 \subset U$  tel que  $f(U_1) \subset U_1$  et que  $\left\{ \frac{f^n(z)}{(f'(0))^n} \right\}$  converge uniformément sur tout compact de  $U_1$ .

Démonstration : On a d'abord  $f(z) = f'(0)z + \frac{1}{2}f''(0)z^2 + o(|z|^2) = f'(0)z + f'(0)\omega(z)$  où  $|\omega(z)| < B|z|^2$  avec  $B > \frac{1}{|f'(0)|} \cdot \frac{1}{2}|f''(0)|$ . Pour  $z_0 \in U$ , notons  $z_n = f^n(z_0) = f(z_{n-1})$ , alors  $\frac{f^{n+1}(z_0)}{(f'(0))^{n+1}} = z_0 \frac{f(z_0)}{f'(0)z_0} \cdot \frac{f(z_1)}{f'(0)z_1} \cdots \frac{f(z_n)}{f'(0)z_n} = z_0 \prod_{j=0}^n \left(1 + \frac{\omega(z_j)}{z_j}\right)$ . Si  $z_0 \in D_R \subset U$ , alors  $|z_1| < (|f'(0)| + BR|f'(0)|)|z_0| = a|z_0|$

où  $a = |f'(0)| + BR|f'(0)|$ . Pour que  $a < 1$ , il suffit  $R < \frac{1-|f'(0)|}{B|f'(0)|} = R_1$ .

Fixons  $R_0 \in ]0, R_1[$ , on a  $f(D_{R_0}) \subset D_{R_0}$ . Si  $z_0 \in D_{R_0}$ , alors  $|z_n| < a^n |z_0|$ .

Il en résulte que  $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$  converge uniformément sur tout compact de  $D_{R_0}$ ,

ainsi que  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega(z_n)}{z_n}$  car  $\left| \frac{\omega(z_n)}{z_n} \right| < B|z_n|$ . Cela induit que  $\sum_{n=0}^{\infty} \log\left(1 + \frac{\omega(z_n)}{z_n}\right)$

et puis  $\pi\left(1 + \frac{\omega(z_n)}{z_n}\right)$  convergent uniformément sur tout compact de  $D_{R_0}$ . cqfd.

LEMME 2. Cas de grande dimension. Soit  $U$  un voisinage de  $(c_0, \alpha_0)$  dans  $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} = \{(\lambda, z)\}$ . Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$  une fonction holomorphe avec  $f(\lambda, z) = (\lambda, f_\lambda(z))$  et  $f(c_0, \alpha_0) = (0, 0)$ . Supposons  $|f'_0(0)| < 1$ . Alors la suite des fonctions  $\varphi_n : (\lambda, z) \rightarrow (\lambda, (f'_\lambda(\alpha(\lambda)))^{-n} (f_\lambda^n(z) - \alpha(\lambda)))$  converge sur une fonction holomorphe  $\varphi$  de  $U_1 \subset U$  dans  $\mathbb{C}^{n+1}$ , où  $\alpha(\lambda)$  est la solution implicite de l'équation  $f_\lambda(z) - z = 0$ .  $\varphi$  est de la forme  $\varphi(\lambda, z) = (\lambda, \varphi_\lambda(z))$  avec  $\varphi'_\lambda(\alpha(\lambda)) = 1$  et  $\varphi_\lambda(f_\lambda(z)) = f'_\lambda(\alpha(\lambda)) \varphi_\lambda(z)$ .

Démonstration : La solution implicite  $\alpha$  existe dans un voisinage de  $W$  de  $c_0$ . Quitte à restreindre  $W$ , on peut supposer que  $R_1(\lambda) = \frac{1-|f'_\lambda(\alpha(\lambda))|}{B(\lambda)|f'_\lambda(\alpha(\lambda))|}$  est une fonction continue positive sur  $W$ , où  $B(\lambda)$  est une fonction continue sur  $W$  vérifiant  $B(\lambda) > \frac{1}{|f'_\lambda(\alpha(\lambda))|} \frac{1}{2} |f''_\lambda(\alpha(\lambda))|$ . Donc  $(f'_\lambda(\alpha(\lambda)))^{-n} (f_\lambda^n(z) - \alpha(\lambda))$  converge uniformément sur tout compact de  $U_1 = \bigcup_{\lambda \in W} \{ \lambda \} \times \overset{\circ}{B}(\alpha(\lambda), R_1(\lambda))$  selon le

lemme précédent. En vertu d'un théorème de Weierstrass ([1]), la fonction

$\varphi_\lambda : \overset{\circ}{B}(\alpha(\lambda), R_1(\lambda)) \rightarrow \mathbb{C}$  ( $z \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_\lambda^n(z) - \alpha(\lambda)}{(f'_\lambda(\alpha(\lambda)))^n}$ ) est holomorphe et

$\varphi'_\lambda(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_\lambda^{n'}(z)}{(f'_\lambda(\alpha(\lambda)))^n}$ . Dans notre cas,  $\varphi'_\lambda(\alpha(\lambda)) = 1$ . La relation

$\varphi_\lambda(f_\lambda(z)) = f'_\lambda(\alpha(\lambda)) \varphi_\lambda(z)$  est évidente. cqfd.

PROPOSITION 3.2 (Proposition de la linéarisation). Pour  $c_0, W, f_c, \alpha(c)$  et  $\rho(c)$  de la proposition 3.1, il existe un voisinage  $\Omega$  de  $\{(c, \alpha(c))\}_{c \in W}$  dans  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ , un réel  $R > 0$  et un isomorphisme  $\varphi : \Omega \rightarrow W \times D_R$  ( $D_R$  est le disque ouvert) avec une famille de fonctions holomorphes  $\varphi_c : \Omega_c \rightarrow D_R$  (où  $\Omega_c$  est l'ensemble des  $y \in \mathbb{C}$  tels que  $(c, y) \in \Omega$ ) tels que pour  $c \in W$

a)  $\varphi(c, z) = (c, \varphi_c(z))$

b)  $\varphi_c(\alpha(c)) = 0$

c) si  $(c, z) \in \Omega$  et  $(c, f_c^k(z)) \in \Omega$  , on ait

$$\varphi_c(f_c^k(z)) = \rho(c)\varphi_c(z)$$

d) si  $(c, z) \in \Omega$  et  $\rho(c)\varphi_c(z) \in D_R$  , on ait

$$f_c^k(z) \in \Omega_c \text{ et } \rho(c)\varphi_c(z) = \varphi_c(f_c^k(z))$$

e)  $\varphi_c'(\alpha(c)) = 1$  .

Démonstration : C'est une conséquence immédiate du lemme 2 en remplaçant par les  $\{f_\lambda^{-k}\}_{\lambda \in W}$  les fonctions  $\{f_\lambda\}$  du lemme et en restreignant  $U_1$  en un voisinage plus petit. cqfd.

On dit que  $\varphi_\lambda$  est la coordonnée linéarisante.

Donnons-nous maintenant quelques notations utiles :

a)  $K$  est l'ensemble des  $(c, z) \in W \times \mathbb{T}$  tels que  $z \in K_c$  , donc

$$K = \bigcup_{c \in W} \{c\} \times K_c$$

b)  $Y_R = \varphi(\Omega \cap K) \subset W \times D_R$

c)  $Y_R(c)$  est l'ensemble des  $y \in D_R$  tels que  $(c, y) \in Y_R$  , i.e.

$$Y_R(c) = \varphi_c(\Omega_c \cap K_c)$$

d)  $Y(c) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \rho(c)^n Y_R(c)$

e)  $Y = \bigcup_{c \in W} \{c\} \times Y(c)$  .

PROPOSITION 3.3. Pour tout  $c \in W$  , on a

a)  $\rho(c) Y_R(c) \cap D_R = Y_R(c)$

b)  $\rho(c) Y(c) = Y(c)$  et  $\frac{1}{\rho(c)} Y(c) = Y(c)$  ;

Démonstration :

a) Si  $\rho(c) y \in (\rho(c) Y_R(c)) \cap D_R$  , il existe  $z \in \Omega_c \cap K_c$  tel que  $y = \varphi_c(z)$  , donc  $\rho(c)y = \varphi_c(f_c^k(z)) \in Y_R(c)$  (d), proposition 3.2). Si  $y \in Y_R(c)$  , alors  $y = \varphi_c(z)$  et  $\frac{y}{\rho(c)} = \varphi_c(f_c^{-k}(z)) \in Y_R(c)$  .

b) Evidemment. cqfd.

PROPOSITION 3.4 Pour tout entier  $i \geq 0$ ,  $(f_{c_0}^i)'(c_0) \neq 0$ .

Démonstration : Le fait que  $f_{c_0}(z) = z^2 + c$  induit  $f_{c_0}'(z) = 2z$ , donc  
 $(f_{c_0}^i)'(c_0) = 2^i f_{c_0}^{i-1}(c_0) \cdot f_{c_0}^{i-2}(c_0) \dots f_{c_0}'(c_0) c_0 \neq 0$  car 0 n'est pas périodique  
 i.e. 0 n'est pas dans l'orbite de  $c_0 = f_{c_0}(0)$ . cqfd.

THÉOREME 1. Pour  $c_0 \in M$  un point de Misurewicz, on a

$$\rho(c_0)^{n_{\tau_{-c_0}}(K_{c_0})} \rightarrow \frac{1}{(f_{c_0}^{\ell-1})'(c_0)} Y(c_0).$$

Démonstration : Il existe un voisinage  $U$  de 0 tel que  $f_{c_0}^{\ell-1} \circ \tau_{c_0}$  soit un isomorphisme entre  $U$  et  $\Omega_{c_0}$ ; donc que  $\varphi_1 = \varphi_{c_0} \circ f_{c_0}^{\ell-1} \circ \tau_{c_0}$  soit un isomorphisme de classe  $C_1$  entre  $U$  et  $D_R$  avec  $\varphi_1(0) = 0$  et  $T_0 \varphi_1 = (f_{c_0}^{\ell-1})'(c_0)$ .  
 Suivant la proposition 2.2, on trouve cqfd.

#### §4. UNE PROPOSITION TECHNIQUE.

Supposons que  $\Lambda \subset \mathbb{C}$  est un voisinage de 0 et que  $\rho : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction holomorphe avec  $|\rho(\lambda)| > 1$  pour tout  $\lambda \in \Lambda$ . Soit  $X \subset \Lambda \times \mathbb{C}$  un ensemble invariant par  $(\lambda, x) \rightarrow (\lambda, \rho(\lambda)x)$  et  $(\lambda, x) \rightarrow (\lambda, \frac{1}{\rho(\lambda)}x)$ , on note  $X(\lambda)$  l'ensemble des  $x \in \mathbb{C}$  tels que  $(\lambda, x) \in X$ . Supposons en plus que  $X$  est fermé et qu'il existe un sous-ensemble  $A \subset X(0)$  dense dans  $X(0)$  tel que  $A$  soit invariant par  $x \rightarrow \frac{1}{\rho(0)}x$  et  $x \rightarrow \rho(0)x$ , et que pour tout  $x \in A$ , il existe un ouvert  $U_x$  voisinage de 0 dans  $\Lambda$  avec une fonction holomorphe  $\xi_x : U_x \rightarrow \mathbb{C}$  ( $\lambda \rightarrow \xi_x(\lambda)$ ) tel que  $\xi(0) = x$  et  $\xi(\lambda) \in X(\lambda)$ . Soit  $u : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe avec  $u(0) = 0$  et  $u'(0) \neq 0$ , notons  $M_u$  l'ensemble des  $\lambda \in \Lambda$  tels que  $(\lambda, u(\lambda)) \in X$ .

Sous toutes ces hypothèses-là, on affirme

PROPOSITION 4.1. a)  $X(\lambda) \rightarrow X(0)$  quand  $\lambda \rightarrow 0$ .

b)  $\rho(0)^n M_u \rightarrow \frac{1}{u'(0)} X(0)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

Démonstration : a) Pour  $R > 0$ , il suffit de démontrer  $D(X(\lambda) \cap D_R \cup \partial D_R, X(0) \cap D_R \cup \partial D_R) \rightarrow 0$ . La semi-continuité supérieure est une conséquence immédiate de la proposition 2.1. Pour la semi-continuité inférieure, il suffit de

démontrer

$$\delta(A \cap D_R \cup \partial D_R, X(\lambda) \cap D_R \cup \partial D_R) \rightarrow 0 .$$

Supposons au contraire, qu'il existe un constant  $\varepsilon_0 > 0$  et deux suites  $\{x_n\} \subset A \cap D_R$  et  $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$  tels que  $\lambda_n \rightarrow 0$  et  $d(x_n, X_R(\lambda_n)) \geq 2\varepsilon_0$ . Comme  $X(0) \cap D_R \cup \partial D_R$  est compact, on peut supposer  $x_n \rightarrow x_0$  avec  $x_0 \in X(0) \cap D_R$ . Pour  $n$  assez grand et  $y \in X(\lambda_n) \cap D_R$ , on a

$$2\varepsilon_0 \leq d(x_n, y) \leq d(x_n, x_0) + d(x_0, y) < \varepsilon_0 + d(x_0, y) .$$

Par conséquent  $d(x_0, X_R(\lambda_n)) \geq \varepsilon_0$ , donc il existe  $\tilde{x} \in A \cap D_R$  tel que  $d(\tilde{x}, X_R(\lambda_n)) \geq \frac{1}{2}\varepsilon_0$  quand  $n$  est assez grand. D'autre part, comme il y a un voisinage  $U_{\tilde{x}}$  de 0 associé à  $\tilde{x}$  par l'hypothèse, il existe  $n_1 > 0$ , tel que quand  $n > n_1$ , on ait  $\lambda_n \in U_{\tilde{x}}$  et puis  $\xi_{\tilde{x}}(\lambda_n) \in X(\lambda_n)$ , de plus, il existe aussi  $n_2 \geq n_1$  tel que quand  $n > n_2$ ,  $|\lambda_n|$  soit assez petit pour que  $|\xi_{\tilde{x}}(\lambda_n) - \tilde{x}| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ , donc  $n > n_2$  entraîne  $d(\tilde{x}, X(\lambda_n)) < \frac{\varepsilon_0}{2}$ , i.e.  $d(\tilde{x}, X_R(\lambda_n)) < \frac{\varepsilon_0}{2}$ . Absurde.

b) ① Semi-continuité supérieure. Il faut démontrer

$$\forall R > 0, \delta((\rho(0)^n M_u) \cap D_R \cup \partial D_R, (\frac{1}{u'(0)} X(0)) \cap D_R \cup \partial D_R) \rightarrow 0 .$$

Pour  $\varepsilon > 0$  et  $n$  assez grand, si  $y = \rho(0)^n \lambda \in (\rho(0)^n M_u) \cap D_R$ , on a  $\lambda \in M_u$  et

$|\lambda| \leq \frac{R}{|\rho(0)|^n}$ , donc  $u(\lambda) \in X(\lambda)$  et  $\rho(\lambda)^n u(\lambda) \in X(\lambda)$ . Mais

$$d(\rho(\lambda)^n u(\lambda), \rho(0)^n u'(0) \lambda) = d(\rho(\lambda)^n u(\lambda), u'(0) y) = |y| \cdot \left| \frac{\rho(\lambda)^n u(\lambda)}{\rho(0)^n \lambda} - u'(0) \right| <$$

$$< R \left| \frac{\rho(\lambda)^n u(\lambda)}{\rho(0)^n \lambda} - u'(0) \right| . \text{ Comme } \left| \log \frac{\rho(\lambda)^n}{\rho(0)^n} \right| = \left| n \cdot \lambda \frac{\log \rho(\lambda) - \log \rho(0)}{\lambda} \right| =$$

$$= |y| \cdot \left| \frac{n}{\rho(0)^n} \right| \cdot \left| \frac{\log \rho(\lambda) - \log \rho(0)}{\lambda} \right| < R \left| \frac{\rho'(0)}{\rho(0)} + o(\lambda) \right| \cdot \left| \frac{n}{\rho(0)^n} \right| \rightarrow 0 \text{ quand}$$

$n \rightarrow +\infty$ , donc

$d(\rho(\lambda)^n u(\lambda), \rho(0)^n u'(0) \lambda) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , de plus, cela converge uniformément par rapport à  $y \in (\rho(0)^n M_u) \cap D_R$ . Par conséquent, on peut supposer que

$\rho(\lambda)^n u(\lambda) \in X(\lambda) \cap D_{2|u'(0)|R}$  pour  $n$  assez grand et pour tout  $y \in \rho(0)^n M_u \cap D_R$ .

De  $\delta(X_{2|u'(0)|R}(\lambda), X_{2|u'(0)|R}(0)) \rightarrow 0$ , on déduit qu'il existe  $N_1 > 0$ , tel que

quand  $n > N_1$ ,  $|\lambda|$  soit assez petit pour que  $\delta(X_{2|u'(0)|R}(\lambda), X_{2|u'(0)|R}(0)) < \frac{\varepsilon}{2}$ ,

d'où  $d(\rho(\lambda)^n u(\lambda), X_{2|u'(0)|R}(0)) < \frac{\varepsilon}{2}$ . D'autre part, il existe  $N_2 > 0$  tel que

pour  $n > N_2$  et  $y \in (\rho(0)^n M_u) \cap D_R$ , on ait  $d(u'(0)y, \rho(\lambda)^n u(\lambda)) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Donc quand  $n_1 > \max\{N_1, N_2\}$ , pour tout  $y \in (\rho(0)^n M_u) \cap D_R$ , on a

$$d(u'(0)y, X_{2|u'(0)|R}(0)) \leq d(u'(0)y, \rho(\lambda)^n u(\lambda)) + d(\rho(\lambda)^n u(\lambda), X_{2|u'(0)|R}(0)) < \varepsilon$$

d'où  $\delta((\rho(0)^n M_u)_R, (\frac{1}{u'(0)} X(0))_R) \rightarrow 0$ .

② Semi-continuité inférieure :  $\delta((\frac{1}{u'(0)} X(0))_R, (\rho(0)^n M_u)_R) \rightarrow 0$ .  
On est obligé de démontrer un lemme préalable.

LEMME. Soit  $x \in A \cap D_R$ , et soit  $\xi_x : U_x \rightarrow \mathbb{C}$  l'application associée.

a) Il existe  $\Lambda_x$  voisinage de 0 dans  $U_x$  et  $n_x > 0$ , tels que  $\forall n \geq n_x$ ,

$\exists! \lambda_n \in \Lambda_x$  vérifiant  $\rho(\lambda_n)^n u(\lambda_n) = \xi_x(\lambda_n)$ .

b)  $\lambda_n \in M_u$ ,  $\lambda_n \rightarrow 0$  et  $\rho(0)^n u'(0) \lambda_n \rightarrow x$ .

Démonstration : a) Le fait que  $\xi_x(\lambda) \in X(\lambda)$  induit  $\frac{1}{\rho(\lambda)^n} \xi_x(\lambda) \in X(\lambda)$ . Choisissons  $a > 0$  tel que  $\Lambda_x = D_a \subset U_x$  et que  $u'(\lambda) \neq 0$  pour  $\lambda \in \bar{D}_a$ , donc  $\deg u|_{\partial D_a} = 1$ .

Il existe  $n_x > 0$  tel que quand  $n \geq n_x$ ,  $\left| \frac{\xi_x(\lambda)}{\rho(\lambda)^n} \right|_{\lambda \in \bar{D}_a} < \inf_{\lambda \in \partial D_a} |u(\lambda)|$ . Notons  $h_n$

l'application  $\lambda \rightarrow u(\lambda) - \frac{\xi_x(\lambda)}{\rho(\lambda)^n}$ , alors elle est holomorphe dans  $U_x$  et

$h_n|_{\partial D_a} \neq 0$ , de plus,  $h_n|_{\partial D_a}$  est de degré 1. Cela induit que  $h_n$  possède un

seul zéro dans  $D_a$  ([3], 10.43), i.e. il existe  $\lambda_n(x) \in D_a \subset U_x$  unique tel que

$$u(\lambda_n) = \frac{\xi_x(\lambda_n)}{\rho(\lambda_n)^n} \in X(\lambda_n), \text{ quand } n > n_x.$$

b)  $\lambda_n(x) \in M_u$  et  $\lambda_n(x) \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) sont évidents, donc  $d(\rho(\lambda_n)^n u(\lambda_n), x) \rightarrow 0$ .

Supposons  $x \in A \cap D_R$ , quitte à restreindre  $\Lambda_x$ , on peut supposer

$\xi_x(\lambda) \in D_{2R} \cap X(\lambda)$  pour  $\lambda \in \Lambda_x$ , alors  $|\rho(\lambda_n)^n u(\lambda_n) - \rho(0)^n u'(0) \lambda_n| \approx$

$$\approx |\rho(\lambda_n)^n u(\lambda_n)| \cdot \left| 1 - \frac{\rho(0)^n}{\rho(\lambda_n)^n} \right| = \left| \xi_x(\lambda_n) \right| \cdot \left| 1 - \frac{\rho(0)^n}{\rho(\lambda_n)^n} \right| < 2R \left| 1 - \frac{\rho(0)^n}{\rho(\lambda_n)^n} \right|.$$

$$\left| \log \frac{\rho(\lambda_n)^n}{\rho(0)^n} \right| = \left| n \cdot \lambda_n \left( \frac{\rho'(0)}{\rho(0)} + o(\lambda_n) \right) \right| \text{ et } n \lambda_n = n \left( \frac{u(\lambda_n)}{u'(0)} + o_1(\lambda_n) \right) =$$

$$= n \frac{\xi(\lambda_n)}{\rho(\lambda_n)^n} + n\lambda_n \frac{o(\lambda_n)}{\lambda_n} \quad \text{donc} \quad |n\lambda_n| < 2R \left| \frac{n}{\rho(\lambda_n)^n} \right| \left| \frac{1}{\left(1 - \frac{o(\lambda_n)}{\lambda_n}\right)} \right| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$$

$$\left| \log \frac{\rho(\lambda_n)^n}{\rho(0)^n} \right| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty), \quad \text{d'où} \quad d(\rho(\lambda_n)^n u(\lambda_n), \rho(0)^n u'(0) \lambda_n) \rightarrow 0$$

( $n \rightarrow +\infty$ ), par conséquent,  $\rho(0)^n u'(0) \lambda_n \rightarrow x$ .

Fin du Lemme.

DEMONSTRATION DE (2) b PROPOSITION 4.1.

Pour  $R > 0$  et  $\varepsilon > 0$ , posons

$$V_\varepsilon = D_{R+\frac{\varepsilon}{2}} - \bar{D}_{R-\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Pour tout  $x \in A$ , posons  $D(x, \frac{\varepsilon}{2})$  l'ensemble des  $y \in \mathbb{C}$  tels que  $|y-x| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Alors les  $V_\varepsilon \cup \bigcup_{x \in A \cap D_R} D(x, \frac{\varepsilon}{2})$  forment un recouvrement ouvert de  $X(0) \cap D_R \cup \partial D_R$ ,

donc il existe  $x_1, \dots, x_k \in A \cap D_R$  tels que  $X(0) \cap D_R \cup \partial D_R \subset V_\varepsilon \cup \bigcup_{j=1}^k D(x_j, \frac{\varepsilon}{2})$ . Pour

ces  $x_j \in A$ , d'après le lemme qu'on vient de démontrer, il existe  $\{\lambda_n(x_j)\} \subset M$

avec  $\lambda_n(x_j) \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow +\infty$ ) et  $N_j > 0$  tel que  $n > N_j$  entraîne

$d(x_j, \rho(0)^n u'(0) \lambda_n(x_j)) < \frac{\varepsilon}{2}$ , d'où  $d(x_j, u'(0) \rho(0)^n M_u \cap D_R \cup \partial D_R) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Donc pour

$n > N = \max\{N_1, N_2, \dots, N_k\}$  et  $x \in X(0) \cap D_R \cup \partial D_R$ , si  $x \in V_\varepsilon$ , alors

$d(x, (u'(0) \rho(0)^n M_u)_R) < \frac{\varepsilon}{2}$ ; si  $x \in D(x_j, \frac{\varepsilon}{2})$  pour quelque  $j$ , alors

$$d(x, u'(0) \rho(0)^n \lambda_n(x_j)) \leq d(x, x_j) + d(x_j, u'(0) \rho(0)^n \lambda_n(x_j))$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \text{donc}$$

$$d(x, (u'(0) \rho(0)^n M_u)_R) < \varepsilon.$$

Finalement on a démontré que pour  $R > 0$  et  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N > 0$  tel que

$n > N$  entraîne  $d\left(\frac{x}{u'(0)}, (\rho(0)^n M_u)_R\right) < \varepsilon$  pour  $x \in \left(\frac{1}{u'(0)} X(0)\right)_R$ , d'où

$\delta\left(\left(\frac{1}{u'(0)} X(0)\right)_R, (\rho(0)^n M_u)_R\right) < \varepsilon$ . cqfd.

§5. CONVERGENCE DE  $\rho(c_0)^n \tau_{-c_0} (M)$ .

Revenons à  $K_c$  et à  $M$ .

PROPOSITION 5.1. Soit  $v(c) = \varphi_c(f_c^k(0))$  où  $\varphi_c$  est la coordonnée linéarisante, alors  $v'(c_0) \neq 0$ .

Démonstration : On note  $u(c) = f_c^k(0)$  et  $\Phi(c, z) = \varphi_c(z)$  alors  $u(c_0) = \alpha(c_0) = \alpha_0$  et  $v(c) = \Phi(c, u(c))$ . Les calculs  $v'(c_0) = \Phi'_c(c_0, \alpha_0) + \Phi'_z(c_0, \alpha_0)u'(c_0)$  et  $\Phi'_z(c_0, \alpha_0) = \varphi'_c(\alpha_0) = 1$  nous donnent  $v'(c_0) = \Phi'_c(c_0, \alpha_0) + u'(c_0)$ .

D'autre part,

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow c_0} \frac{\Phi(c, \alpha_0) - \Phi(c_0, \alpha_0)}{c - c_0} &= \lim_{c \rightarrow c_0} \frac{\Phi(c, \alpha_0) - \Phi(c, \alpha(c))}{c - c_0} = \\ &= -\Phi'_z(c_0, \alpha_0) \cdot \alpha'(c_0) = -\alpha'(c_0). \end{aligned}$$

Donc  $v'(c_0) = u'(c_0) - \alpha'(c_0) = \omega'(c_0)$  où  $\omega(c) = u(c) - \alpha(c)$ . En vertu d'un lemme du chapitre V de [2],  $\omega'(c_0) \neq 0$ , d'où  $v'(c_0) \neq 0$ . cqfd.

THÉORÈME 2.  $\rho(c_0)^n \tau_{-c_0} (M) \rightarrow \frac{1}{v'(c_0)} Y(c_0) \quad (n \rightarrow \infty)$ .

Démonstration : Le résultat est en fait une conséquence directe de la proposition 4.1. Il reste seulement à établir la correspondance entre les résultats obtenus de  $M$  et les conditions de cette proposition.

On peut dire que  $M$  est l'ensemble des  $c \in \mathbb{C}$  tels que  $u(c) = f_c^k(0) \in K_c$ . Donc  $W \cap M$  est l'ensemble des  $c \in \mathbb{C}$  tels que  $v(c) = \varphi_c(u(c)) \in Y(c)$ . Quitte à restreindre  $W$ , on peut supposer que  $\Lambda = \tau_{-c_0}(W)$  est un voisinage de 0.

Soient  $X$  l'image de  $Y$  par  $(c, z) \rightarrow (c - c_0, z)$  et  $X(c - c_0) = Y(c)$ . Notons  $\tilde{M} = \tau_{-c_0}(W \cap M)$  l'ensemble des  $c \in \mathbb{C}$  tels que  $\tilde{v}(\lambda) = v(\lambda + c_0) \in X(\lambda)$ , alors

$\tilde{v}(0) = v(c_0)$  et  $\tilde{v}'(0) = v'(c_0) \neq 0$ . Notons en plus  $\tilde{\rho}(\lambda) = \rho(\lambda + c_0)$  pour  $\lambda \in \Lambda$ .

En vertu de la proposition 3.3,  $X(\lambda)$  est invariant par  $x \rightarrow \tilde{\rho}(\lambda)x$  et  $x \rightarrow \frac{1}{\tilde{\rho}(\lambda)}x$ .  $B$  désignera l'ensemble des  $z \in \mathbb{C}$  tels que  $z$  soit un point prépériodique répulsif de  $f_{c_0}$  et que l'orbite de  $z$  par  $f_{c_0}$  ne contienne pas 0, alors  $B$  est dense dans  $K_{c_0}$  par le théorème de Fatou. Pour  $z \in B \cap \Omega_{c_0}$ ,

il existe  $z_1 \in K_{c_0} \cap \Omega_{c_0}$  tel que  $z = f_{c_0}^k(z_1)$  (c, proposition 1.2), donc  $z_1 \in B \cap \Omega_{c_0}$ . D'autre part,  $f_{c_0}^k(z) \in B$ , donc

$A = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \rho(c_0)^p \cdot \varphi_{c_0} (B \cap \Omega_{c_0})$  est invariant par  $y \rightarrow \rho(c_0)y$  et  $y \rightarrow \frac{1}{\rho(c_0)}y$ . De

plus,  $A$  est dense dans  $Y(c_0) = X(0)$ . Pour  $z_0 \in B$ , il existe deux entiers  $m > 0$  et  $n > 0$  vérifiant

$f_{c_0}^{m+n}(z_0) - f_{c_0}^m(z_0) = 0$ . Posons  $F(c, z) = f_c^{m+n}(z) - f_c^m(z)$ , alors  $F(c_0, z_0) = 0$  et

$F'_z(c_0, z_0) = f_{c_0}^{m'}(z_0) (f_{c_0}^{n'}(f_{c_0}^m(z_0)) - 1)$ . Comme l'orbite de  $z_0$  ne contient pas 0

et  $f_{c_0}^m(z_0)$  est périodique répulsif,  $f_{c_0}^{m'}(z_0) = 2^m f_{c_0}^{m-1}(z_0) \dots f_{c_0}(z_0) z_0 \neq 0$  et

$f_{c_0}^{n'}(f_{c_0}^m(z_0)) - 1 \neq 0$ . En utilisant le théorème des fonctions implicites, nous trou-

vons qu'il existe  $V_{z_0}$  un voisinage de  $c_0$  et  $g: V_{z_0} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holo-

morphe avec  $g(c_0) = z_0$  et  $F(c, g(c)) = 0$ , par suite,  $g(c)$  est prépériodique

répulsif pour  $f_c$  et puis  $g(c) \in K_c$ .

Pour un point  $y_0 \in A$ , il existe  $z_0 \in B \cap \Omega_{c_0}$  tel que  $y_0 = \rho(c_0)^n \varphi_{c_0}(z_0)$ .

Posons

$$\eta(c) = \rho(c)^n \varphi_c(g(c)) \text{ pour } c \in V_{z_0}$$

alors  $\eta$  est holomorphe avec  $\eta(c_0) = \rho(c_0)^n \varphi_{c_0}(z_0) = y_0$  et  $\eta(c) \in Y(c)$ .

Posons en plus  $U_{y_0} = \tau_{-c_0}(V_{z_0})$  et  $\xi(\lambda) = \eta(\lambda + c_0)$ , alors  $\xi(0) = \eta(c_0) = y_0$  et

$\xi(\lambda) \in Y(\lambda + c_0) = X(\lambda)$ . C'est-à-dire pour tout  $x \in A \subset X(0)$ , il existe un voisinage

$U_x$  de 0 avec  $U_x \subset \Lambda$  et une fonction holomorphe  $\xi_x: U_x \rightarrow \mathbb{C}$  telle que

$\xi_x(0) = x$  et que  $\xi_x(\lambda) \in X(\lambda)$ , donc toutes les conditions de la proposition 4.1

sont parfaitement remplies, on peut affirmer finalement

$$\tilde{\rho}(0)^{n_{\tilde{M}}} \rightarrow \frac{1}{\tilde{v}'(0)} X(0)$$

i.e.  $\rho(c_0)^n \tau_{-c_0}(W \cap M) \rightarrow \frac{1}{v'(c_0)} Y(c_0)$ . *cofd.*

[1] L.V. AHLFORS.- Complex analysis.

[2] A. DOUADY et J.H. HUBBARD.- On the dynamics of polynomial-like mapping, à paraître aux Annales de l'Ecole Normale Supérieure, 1985, 2.

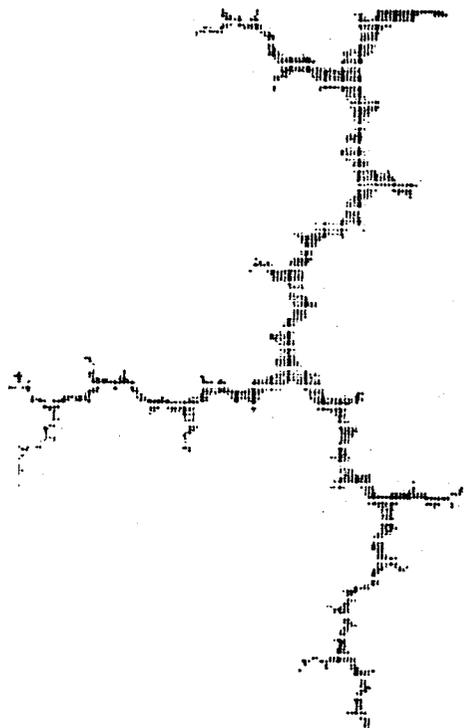
[3] W. RUDIN.- Real and complex analysis.

TAN---l'ensemble de Julia  $w=15$

$c=0+1i$ ,  $p=4+4i$ ,  $m=4$ ,  $p^m=-1024+0i$ ,  $n=100$ ,  $k=15$

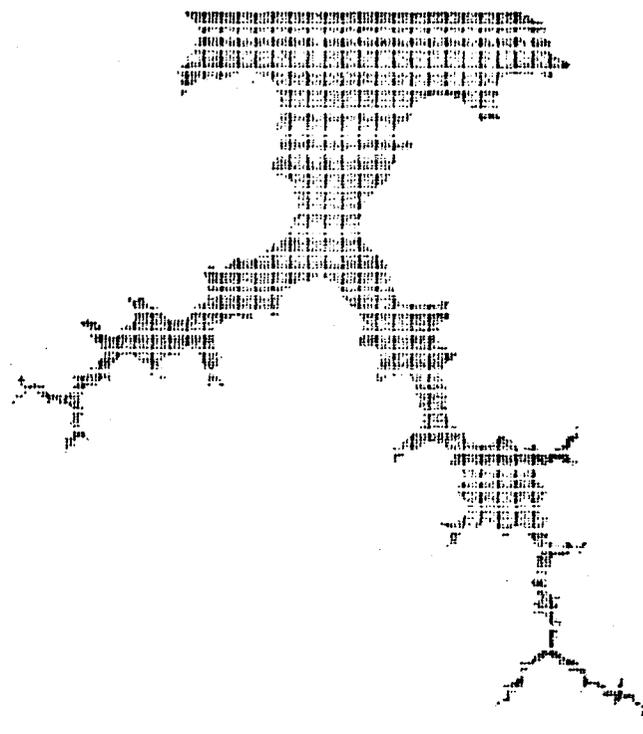
$L=.4614258$

le nombre des points allumés= 1763



TAN---l'ensemble de Mandelbrot

le nombre des points allumés= 6319

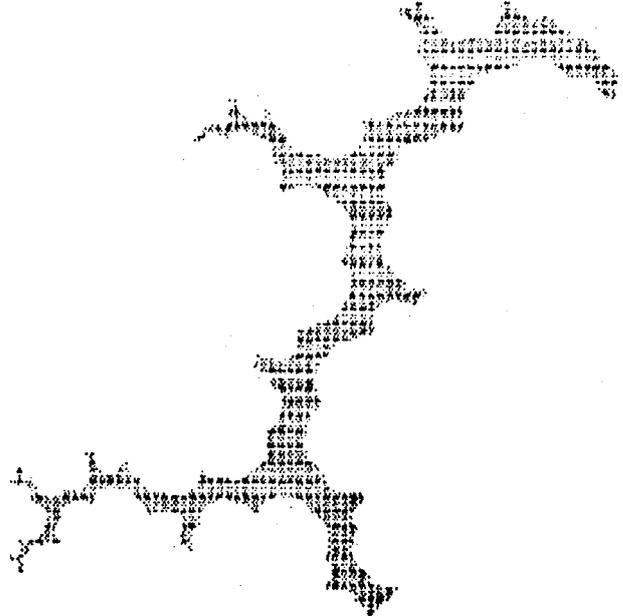


TAN---l'ensemble de Julia w= 15

c= 0 + 1 i, p= 4 + 4 i, m= 5 , p^m=-4096 + -4096 i, n= 100 , k= 15

L= 8.156933E-02

le nombre des points allumés= 3568

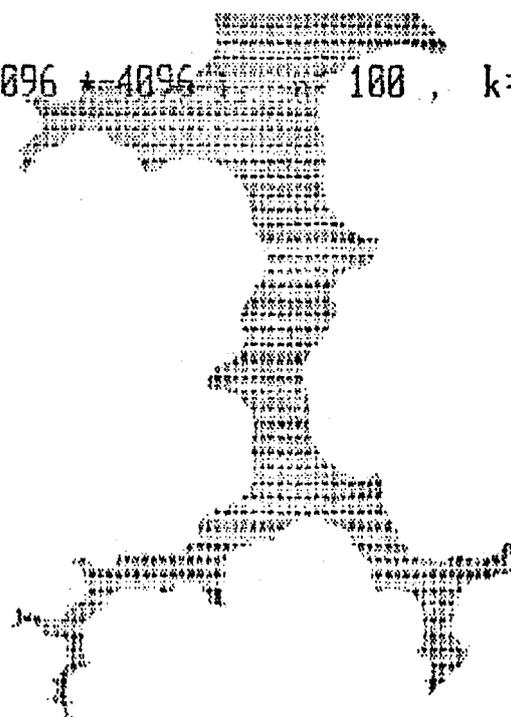


TAN---l'ensemble de Mandelbrot w= 15

c= 0 + 1 i, p= 4 + 4 i, m= 5 , p^m=-4096 + -4096 i, n= 100 , k= 15

L= 8.156933E-02

le nombre des points allumés= 8294



BIBLIOGRAPHIE

- BAKER I., Completely invariant domains of entire functions,  
Mathematical essays dedicated to A.J. MacIntyre, Ohio University Press, 1970.
- BLANCHARD P., Complex analytic dynamics on the Riemann sphere,  
Bull. A.M.S. (cet article contient une bibliographie assez complète  
jusqu'en 1983).
- BROLIN H., Invariant sets under iteration of rational functions,  
Arkiv for Matematik 6 (1965), 103-144.
- CAMACHO C., On the local structure of conformal mappings and holomorphic  
vector fields, Astérisque 59-60 (1978), 83-84.
- COLLET P., Local  $C^\infty$  conjugacy on the Julia set for some holomorphic  
perturbations of  $z \rightarrow z^2$ , IMA Preprint # 18, Institute for Math. and  
its applications, Minneapolis, Minnesota.
- CURRY J., GARNETT L. and SULLIVAN D., On the iteration of a rational  
function : computer experiments with Newton's method, to appear in  
Comm. of Math. Physics.
- DEVANEY R., The structural instability of  $\text{Exp}(z)$ , Preprint.
- DEVANEY R. and KRYCH M., Dynamics of  $\text{Exp}(z)$ , To appear in the Journal  
of Ergodic Theory and Dynamical Systems.
- DOUADY A., Systèmes dynamiques holomorphes, Séminaire Bourbaki, 35e année,  
1982-83, exposé n° 599, novembre 1982.
- DOUADY A., Etude dynamique des polynômes quadratiques complexes et ses  
réinvestissements, Conférence, Journée annuelle SMF, 26 janvier 1985.
- DOUADY A., Veins of the Mandelbrot sets, Abstracts from workshop on rational  
maps, M.S.R.I., Berkeley, CA (USA), 26-30 mars 1984.
- DOUADY A., Algorithms for computing angles in the Mandelbrot sets,  
Proc. of the Conference on chaotic dynamics, Georgia Tech., Atlanta (USA)  
Avril 1985.
- DOUADY A., Itération de polynômes complexes, Image des Mathématiques,  
à paraître au Courrier du C.N.R.S.
- DOUADY A. and HUBBARD J., Iteration des polynômes quadratiques complexes,  
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 294, série I, 123-126.
- DOUADY A. and HUBBARD J., On the dynamics of polynomial like mappings,  
à paraître aux Ann. ENS.
- DOUADY A. and HUBBARD J., A proof of Thurston's topological characterization  
of rational functions, Preprint Institut Mittag-Leffler.

- GUCKENHEIMER J., Endomorphisms of the Riemann sphere,  
Proc. of Symposium of Pure Math., vol. 14, edited by S. Chern and S. Smale  
AMS, Providence, RI (USA), 1970.
- HERMAN M., Exemples de fractions rationnelles ayant une orbite dense sur  
la sphère Riemann, Preprint.
- HERMAN M., Lecture notes on an easy proof of Siegel's theorem, see also  
appendice VII of the preceding.
- JAKOBSON M., Structure of polynomial mappings on a singular set,  
Mat. Sbornik 80 (1968), 105-124 (Russian) ; Math. USSR 6 (1968),  
97-114 (english).
- JAKOBSON M., On the problem of the classification of polynomial endomorphisms  
of the plane, Mat. Sbornik 80 (1969), 365-387 (Russian) ;  
Math. USSR 9 (1969), 345-364 (english).
- MANDELBROT B., Fractal aspects of the iteration of  $z \rightarrow \lambda z(1-z)$  and  $z$  ;  
Annals of NY Acad. Sc. 357 (1980), 249-259.
- MANE R., SAD P. and SULLIVAN D., On the dynamics of rational maps,  
Ann. ENS.
- MANTON N.S., and NAUENBERG M., Universal scaling behavior for iterated  
maps in the complex plane, Preprint.
- MISIUREWICZ M., On iterates of  $e^z$ , Ergodic Theory and Dynamical Systems  
1 (1981), 103-106.
- REES M., Ergodic rational maps with dense critical point forward orbit,  
University of Minnesota, Math. Report 82-140.
- REES M., Positive measure sets of ergodic rational maps, University of  
Minnesota, Math. Report 82-169.
- SULLIVAN D., Quasi conformal homeomorphisms and dynamics I, Preprint.
- SULLIVAN D., Quasi conformal homeomorphisms and Dynamics III : Topological  
conjugacy classes of analytic endomorphisms, Preprint.
- SULLIVAN D. and THURSTON W., Extending holomorphic motions, Preprint.
- THURSTON W., Lecture notes, CBMS Conference, Univ. of Minnesota, Duluth.
- WIDOM M., Renormalization group analysis of quasi periodicity in analytic maps,  
Preprint.

