UNIVERSITÉ PARIS XI

U.E.R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

n° 198

Bases d'exponentielles dans $L^2(R^{+n})$

Denise et Eric Amar

Analyse Harmonique d'Orsay
1976

n° 198

Bases d'exponentielles dans $L^2(R^{+n})$

Denise et Eric Amar

Analyse Harmonique d'Orsay
1976

BASES D'EXPONENTIELLES DANS $L^2(R^{+n})$

par Denise et Eric AMAR

INTRODUCTION.

Soit σ une suite de points dans le demi-plan $P = \{z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Re} z > 0\}$. Appelons Σ la suite d'exponentielles associées à σ i. e. : $\Sigma = \{e^{-zt} ; z \in \sigma\}$, et V_σ le sous-Hilbert engendré par Σ dans $L^2(R^+)$.

J. M. Anderson [1] caractérise les suites σ pour lesquelles Σ est une base de V_σ, et il pose la question : caractériser les suites σ pour lesquelles V_σ possède une base d'exponentielles.

Dans ce travail on généralise cette étude au cas des exponentielles de $L^2(R^{+n})$. L'outil essentiel est le fait que les notions de base et d'interpolation pour une classe de fonctions analytiques dans P^n sont très liées.

On obtient, en particulier, le résultat un peu surprenant suivant : si $n = 1$, une base d'exponentielles normalisées à 1 dans $L^2(R^+)$ est toujours inconditionnelle ; si $n > 1$ cela est encore vrai si le spectre de la base se trouve dans un ensemble de type S (introduit au paragraphe 3). Cela pose donc la question générale : une base d'exponentielles est-elle toujours inconditionnelle pour $n \geq 2$?

Dans le § 0, on établit les notations et principales définitions.

Au § 1, on utilise la transformation de Laplace pour se ramener au cas des fonctions analytiques.

Au § 2, on répond alors, de façon générale, à la question posée par J. M. Anderson, en utilisant les techniques d'opérateurs de Toeplitz.

Dans les § 3 et § 4, on introduit des sous-ensembles de $\mathbb{P}^n$ (en fait de $\mathbb{D}^n$) dans lesquelles on sait caractériser les suites d'interpolation. On obtient des résultats qui généralisent certains résultats de E. P. Kronstadt [2] en utilisant le théorème d'union de suites d'interpolation de N. Th. Varopoulos [3] et celui d'extension linéaire de A. Bernard [4].

Au § 5 on revient aux bases à travers l'interpolation hilbertienne : on caractérise les suites Σ qui forment base, dont le spectre est situé dans les sous-ensembles introduits précédemment.

Enfin, au § 6, on peut lire directement les théorèmes obtenus sur les bases d'exponentielles dans $L(\mathbb{R}^{+n})$.

Une des sources d'inspiration de ce travail fut l'article de A. Shapiro et A. L. Shield [14].

0. DEFINITIONS, NOTATIONS ET PREMIERES PROPRIETES.

Nous aurons besoin des définitions et propriétés ci-dessous se rapportant aux bases d'un espace de Banach [5].

1. Soit E un espace de Banach et $\Sigma = \left\{e_n \,;\, n\in\mathbb{N}\right\}$ une suite de vecteurs de norme un, engendrant E.

On dit que Σ est une base de E si :

$\forall f \in E \,;\, \exists \left\{\alpha_n(f) \,;\, n\in\mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, unique, telle que :

$S_n(f) \equiv \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ converge vers f dans E quand $n \to \infty$.

Soit E un espace de Banach et $\Sigma = \{e_n ; n \in N\}$ une suite de vecteurs de norme 1.

On dit que Σ forme une base dans E si Σ est une base du sous-espace vectoriel fermé engendré par $\{e_n ; n \in N\}$.

On appellera conjugués les éléments $\{\rho_n ; n \in N\}$ de E', dual de E, de norme minimale, telle que :

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \; ; \quad \rho_n(e_m) = \delta_{nm}.$$

Si Σ est une base de E, alors : $\exists\, c \geq 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $\|\rho_n\|_{E'} \leq c$.

2. On dit que Σ est une base inconditionnelle de E si :

i) Σ est une base de E,

ii) $\forall f \in E$, la série $\sum_n \alpha_n(f).e_n$ est commutativement convergente dans E.

Dans ce cas, on a : $\forall \{\beta_n ; n \in N\} \subset \bar{\mathbb{D}}^{\mathbb{N}}$, $\forall f \in E$, la série : $\sum_n \beta_n \alpha_n(f)\, e_n$ est convergente dans E.

3. Si E est un espace de Hilbert, on peut montrer facilement que Σ est base inconditionnelle si et seulement si Σ est équivalente à une base orthonormée i. e. : $\exists \{\varepsilon_n ; n \in \mathbb{N}\}$ base orthonormale et Q un endomorphisme bicontinu de E tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $e_n = Q\varepsilon_n$.

4. On dit que Σ est une <u>base hilbertienne</u> de E si :

i) Σ forme base de E

ii) $\forall \{\lambda_i ; i \in \mathbb{N}\} \in \ell^2(\mathbb{N})$; la suite $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ converge dans E quand n tend vers l'infini.

Dans ce cas la suite $\{\rho_n ; n \in \mathbb{N}\}$ des conjugués de Σ est une <u>base besselienne</u> du sous-espace fermé qu'elle engendre dans E', i. e. :

i) $\{\rho_n ; n \in \mathbb{N}\}$ est une base du sous espace engendré,

ii) Si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \rho_i$ converge dans E' quand n tend vers l'infini, alors :

$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2 < +\infty$.

Même si E est un espace de Hilbert, le fait que Σ est une base hilbertienne n'entraîne pas que Σ est une base inconditionnelle en général [5].

5. On notera :

$$\mathbb{P}^n = \{z \in \mathbb{C}^n \ ; \ z = (z_1, \ldots, z_n), \text{ t. q. } \ \operatorname{Re} z_i > 0 \ ; \forall i \in [1, 2, \ldots, n]\}$$

$$\mathbb{D}^n = \{z \in \mathbb{C}^n \ ; \ z = (z_1, \ldots, z_n), \text{ t. q. } \ |z_i| < 1 \ ; \ \forall i \in [1, 2, \ldots, n]\}$$

$$\mathbb{T}^n = \{z \in \mathbb{C}^n \ ; \ z = (z_1, \ldots, z_n), \text{ t. q. } \ |z_i| = 1 \ ; \ \forall i \in [1, 2, \ldots, n]\}.$$

Les espaces de Hardy classiques seront notés : $H^2(\mathbb{P}^n)$, $H^2(\mathbb{D}^n)$, $H^\infty(\mathbb{P}^n)$, $H^\infty(\mathbb{D}^n)$, i. e. :

$H^2(\mathbb{D}^n) = \{f$ analytique dans $\mathbb{D}^n$, t. q. $f(\underline{z}.\underline{r}) = f(z_1 r_1, \ldots, z_n r_n)$ soit uniformément bornée dans $L^2(\mathbb{T}^n)$ lorsque $r_i < 1\}$.

$H^2(\mathbb{P}^n) = \{f$ analytique dans $\mathbb{P}^n$, t. q. si $\underline{z}_j = x_j + iy_j$ les fonctions : $g(y_1, \ldots, y_n) = f(x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n)$ soient uniformément bornées dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ lorsque $x > 0\}$.

$H^\infty(\mathbb{P}^n) = \{f$ analytique et bornée dans $\mathbb{P}^n\}$.

$H^\infty(\mathbb{D}^n) = \{f$ analytique et bornée dans $\mathbb{D}^n\}$.

6. On note, pour tout $\underline{w} \in \mathbb{D}^n$, $e_{\underline{w}}$ le noyau de Cauchy-Szegö du point $\underline{w}$, normalisé dans $H^2(\mathbb{D}^n)$, i. e. :

$$\forall \underline{\zeta} \in \mathbb{D}^n, \quad e_{\underline{w}}(\underline{\zeta}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{1 - |w_i|^2}}{1 - \bar{w}_i \zeta_i}.$$

De même $\forall \underline{z} \in \mathbb{P}^n$, $\forall \underline{\eta} \in \mathbb{P}^n$, on a

$$\varepsilon_{\underline{z}}(\underline{\eta}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{2 \operatorname{Re} z_i}}{\sqrt{2\pi}\,(\bar{z}_i + \eta_i)}.$$

Soit φ la transformation conforme de $\mathbb{P}^n$ sur $\mathbb{D}^n$ définie par :

$\forall \underline{z} \in \mathbb{P}^n \quad , \quad \underline{w} = \varphi(\underline{z}) \Longleftrightarrow w_i = \dfrac{z_i - 1}{z_i + 1}$ avec $\underline{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ et $\underline{w} = (w_1, \ldots, w_n)$.

On pose alors $V . \varepsilon_{\underline{z}} = \prod_{i=1}^{n} \dfrac{1+\bar{z}_i}{|1+z_i|} \; e_{\underline{w}}$, et on obtient :

PROPOSITION. V <u>s'étend par linéarité en un opérateur unitaire de</u> $H^2(\mathbb{P}^n)$ <u>sur</u> $H^2(\mathbb{D}^n)$.

Preuve. Simple vérification du fait suivant :

$$\langle V.\varepsilon_{\underline{z}} \, , \, V.\varepsilon_{\underline{z}'} \rangle = \langle e_{\underline{w}} \, , \, e_{\underline{w}'} \rangle \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1+z_i}{|1+z_i|}\right)\left(\frac{1+\bar{z}'_i}{|1+z_i|}\right)$$
$$= \langle \varepsilon_{\underline{z}} \, , \, \varepsilon_{\underline{z}'} \rangle .$$

Soit U l'opérateur de Laplace sur $L^2(\mathbb{R}^n_+)$, i. e.

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^n_+), \quad \eta \in \mathbb{P}^n, \quad Uf(\eta) = \int_{\mathbb{R}^n_+} e^{-\underline{\eta}.\underline{t}} \; \overline{f(t)} \, dt_1 \ldots dt_n .$$

Un théorème de Paley-Wiener [6] nous assure que U est anti-unitaire de $L^2(\mathbb{R}^n_+)$ sur $H^2(\mathbb{P}^n)$.

Si $\underline{z} \in \mathbb{P}^n$, $\forall \underline{\eta} \in \mathbb{P}^n$, on a $U(e^{-\underline{z}.\underline{t}})(\underline{\eta}) = \dfrac{1}{\prod_{i=1}^{n} \sqrt{2 \operatorname{Re} z_i}} \; e_{\underline{z}}(\underline{\eta})$.

Ainsi l'image des exponentielles se trouve être les noyaux de Cauchy-Szegö. (Remarque bien classique [6]).

Composant les opérateurs U et V on obtient un opérateur anti-unitaire de $L^2(\mathbb{R}^n_+)$ sur $H^2(\mathbb{D}^n)$ tel que $W = V \circ U$; $W(e^{-\underline{\lambda}.\underline{t}})(\zeta) = c(\underline{\lambda}) \, e_{\underline{\mu}}(\zeta)$;

où l'on a posé :

$$\underline{\mu} = \varphi(\underline{\lambda}) \quad \text{et} \quad c(\underline{\lambda}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1+\bar{\lambda}_i}{|1+\lambda_i|} \, \frac{1}{\sqrt{2 \operatorname{Re} \lambda_i}} .$$

Soit alors $\sigma = \{\underline{\lambda}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\underline{\mu}_k = \varphi(\underline{\lambda}_k)$ et $\tilde{\sigma} = \{\underline{\mu}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$

Utilisant l'isométrie W la question 1 devient donc :

1'. A quelles conditions sur $\tilde{\sigma}$ la suite $\{c(\underline{\lambda}_k)\, e_{\underline{\mu}_k}\}$ est-elle une base du sous-espace $E_{\tilde{\sigma}}$ qu'elle engendre dans $H^2(\mathbb{D}^n)$?

et la question 2 :

2'. A quelles conditions sur $\tilde{\sigma}$ a-t-on que le sous espace $E_{\tilde{\sigma}}$ engendré par $\{e_{\underline{\mu}_k} ; k \in \mathbb{N}\}$ dans $H^2(\mathbb{D}^n)$, possède une base formée de vecteurs $\{e_{\nu_k} ; k \in \mathbb{N}\}$ avec $\forall k \in \mathbb{N}$; $\nu_k \in \mathbb{D}^n$?

2. ETUDE DE LA QUESTION DE J. M. ANDERSON.

Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant.

THEOREME. Soit $\mathcal{V}_\sigma$ le sous-espace engendré par $\{e^{-\underline{\lambda}\cdot\underline{t}} ; \underline{\lambda} \in \sigma\}$ dans $L^2(\mathbb{R}^n_+)$. Si $\mathcal{V}_\sigma$ possède une base d'exponentielles, alors cette base, unique, est constituée de la suite $\{e^{-\underline{\lambda}\cdot\underline{t}} ; \underline{\lambda} \in \sigma\}$ elle-même.

Preuve. Supposons que $\mathcal{V}_\sigma$ possède une base d'exponentielles. Utilisant la formulation 2', cela signifie qu'il existe une suite $s = \{\underline{\nu}_k ; k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{D}^n$, telle que $\{e_{\underline{\nu}} ; \underline{\nu} \in s\}$ est une base pour $E_{\tilde{\sigma}}$ ($\tilde{\sigma}$ est l'image de σ par φ ; § 1). On a alors le lemme suivant :

LEMME. Soit $w \in \mathbb{D}^n \setminus \{s\}$, alors il existe $\delta > 0$ qui minore la distance de Gleason de w aux points de s.

Preuve du lemme. Posons $\forall r < 1$, $\mathbb{D}^n_r = \{\underline{z} \in \mathbb{D}^n ; \underline{z} = (z^1, \dots, z^n) ;$
$|z^i| < r$; $i \in [1, \dots, n]\}$. Si $f \in H^2(\mathbb{D}^n)$, on a alors (formule de Cauchy) :

$$\sup_{\underline{z}\in \mathbb{D}^n_r} |f(\underline{z})| \equiv \|f\|_{H^\infty(\mathbb{D}^n_r)} \leq c(r) \|f\|_{H^2(\mathbb{D}^n)}.$$

D'autre part, puisque $\{e_{\underline{\nu}} ; \underline{\nu}\in s\}$ forme base dans $H^2(\mathbb{D}^n)$, nécessairement les conjugués existent et sont bornés [5], i. e. :

$\exists \{\rho_{\underline{\nu}} ; \underline{\nu}\in s\} \subset H^2(\mathbb{D}^n)$ telle que : 1) $\|\rho_{\underline{\nu}}\|_{H^2(\mathbb{D}^n)} \leq M$

2) $\forall \underline{\nu}, \underline{\nu}'\in s$; on a : $\langle \rho_{\underline{\nu}'}, e_{\underline{\nu}}\rangle = \delta_{\underline{\nu}'\underline{\nu}} \equiv \begin{cases} 1 & \text{si } \underline{\nu} = \underline{\nu}' \\ 0 & \text{si } \underline{\nu} \neq \underline{\nu}'. \end{cases}$

Utilisant la propriété de reproduction de $e_{\underline{\nu}}$, 1) s'écrit :

$\langle \rho_{\underline{\nu}'}, e_{\underline{\nu}}\rangle = \rho_{\underline{\nu}'}(\underline{\nu}) \prod_{i=1}^n \sqrt{1-|\nu^i|^2}$; où $\underline{\nu} = (\nu^1, \dots, \nu^n)$.

Posant : $\forall \underline{\nu}\in s$; $f_{\underline{\nu}'} = \prod_{i=1}^n \sqrt{1-|\nu^i|^2}\, \rho_{\underline{\nu}'}$, il vient :

1) $f_{\underline{\nu}}(\underline{\nu}') = \delta_{\underline{\nu\nu}'}$; $\forall \nu'\in s$; 2) $\|f_{\underline{\nu}}\|_{H^2(\mathbb{D}^n)} \leq M$.

Restreignant tout à $\mathbb{D}^n_r$ il vient alors :

$\forall \underline{\nu}, \underline{\nu}' \in s\cap \mathbb{D}^n_r$; $\exists\ f_{\underline{\nu}} \in H^\infty(\mathbb{D}^n_r)$ t. q. :

1) $\|f_{\underline{\nu}}\|_{H^\infty(\mathbb{D}^n_r)} \leq c(r) M$

2) $f_{\underline{\nu}}(\underline{\nu}') = \delta_{\underline{\nu\nu}'}$.

En particulier, la distance de Gleason [7] de deux points distincts de la suite $s\cap \mathbb{D}^n_r$ est uniformément minorée pour $H^\infty(\mathbb{D}^n_r)$.

On en déduit que $\forall r' < r$; la suite $s\cap \mathbb{D}^n_{r'}$ ne compte qu'un nombre fini de points.

Laissant tendre r' et r vers 1 avec $r' < r < 1$, on en déduit que s ne peut s'accumuler qu'au bord de $\mathbb{D}^n$.

Comme par hypothèse $\underline{w}$ est dans $\mathbb{D}^n$, on en déduit aisément le lemme.

Revenant à la preuve du théorème, considérons alors :

$s' = s\cup \{\underline{w}\}$ et notons $E_{s'}$ l'espace engendré par $\{e_{\underline{\nu}} ; \underline{\nu}\in s'\}$.

Soit alors $\mathcal{A}_{s'}$ l'algèbre des opérateurs bornés sur $E_{s'}$ qui "diagonalisent" dans la suite $\{e_{\underline{\nu}} \, ; \, \underline{\nu} \in s'\}$, i. e. [8]

$$\mathcal{A}_{s'} = \{T \in \mathcal{L}(E_{s'}) \, ; \quad T.e_{\underline{\nu}} = \hat{T}(\underline{\nu}).e_{\underline{\nu}} \quad ; \quad \forall \underline{\nu} \in s'\}.$$

Si $f \in H^{\infty}(\mathbb{D}^n)$, on note $\pi(f)$ l'opérateur de Toëplitz sur $H^2(\mathbb{D}^n)$ associé à $\bar{f}$; i. e. si P_{H^2} désigne la projection orthogonale de $\mathcal{L}^2(\mathbb{T}^n)$ sur $H^2(\mathbb{D}^n)$ on a :

$$\forall h \in H^2(\mathbb{D}^n) \quad ; \quad \pi(f)\, h = P_{H^2}\, \bar{f}.h.$$

Il est facile de voir [8] que $\pi(f)$ laisse $E_{s'}$ invariant, et si on note $\pi_{s'}(f)$ la restriction de $\pi(f)$ à $E_{s'}$, on a que [8] : $\forall f \in H^{\infty}(\mathbb{D}^n)$; $\pi_{s'}(f) \in \mathcal{A}_{s'}$.

puisque $\underline{w}$ est séparé de s on a : $\forall i \in \mathbb{N}$, $\exists\, T_i \in \mathcal{A}_{s'}$ t. q. :

$$\left.\begin{aligned} & T_i.e_{\underline{\nu}_i} = 0 \\ & T_i.e_{\underline{w}} = e_{\underline{w}} \\ & \|T_i\| \leq \frac{1}{\delta} \end{aligned}\right\}$$

il suffit de prendre $\pi_{s'}(f_i)$ avec $f_i \in H^{\infty}(\mathbb{D}^n)$ et remplissant les conditions correspondantes.

Mais $e_{\underline{w}}$ s'écrit de manière unique (les $e_{\underline{\nu}}$; $\underline{\nu} \in s$ formant base) : $e_{\underline{w}} = \sum_{\underline{\nu}_i \in s} a_i\, e_{\underline{\nu}_i} + h$; avec $h \in H^2(\mathbb{D}^n)$; $h \perp E_s$ et $\forall i \in \mathbb{N}$; $a_i \in \mathbb{C}$.

Montrons que $h \neq 0$. En effet, si h était nul, on aurait en choisissant i tel que $a_i \neq 0$:

$$T_i e_{\underline{w}} = e_{\underline{w}} = \sum_{j \neq i} a_j\, T_i e_j = \sum_{j \neq i} a_j\, \hat{T}_i(\underline{\nu}_j).e_{\underline{\nu}_j}$$

ce qui contredit l'unicité du développement de $e_{\underline{w}}$ sur la base $\{e_{\underline{\nu}} \, ; \, \underline{\nu} \in s\}$. Mais h non nul et orthogonal à E_s, il vient : $e_{\underline{w}} \notin E_s$.

Puisque l'on a, par hypothèse, $E_{\tilde{\sigma}} = E_s$ on en déduit donc :

$\forall \underline{\nu} \in \tilde{\sigma} \Longrightarrow e_{\underline{\nu}} \in E_s \Longrightarrow \underline{\nu} \in s\}$ d'où $\tilde{\sigma} \subset s$.

Mais alors $\{e_{\underline{\nu}} \, ; \, \underline{\nu} \in \tilde{\sigma}\}$ forme base pour $E_{\tilde{\sigma}}$ comme sous-base de

$\{e_{\underline{\mu}}\ ;\ \underline{\mu} \in s\}$, d'où par le même raisonnement $s \subset \tilde{\sigma}$; ce qui prouve que $s = \tilde{\sigma}$ et achève la preuve du lemme.

REMARQUE. Dans le cas $n = 1$, la preuve est beaucoup plus simple : il suffit de considérer le produit de Blaschke B_s qui s'annule sur s exactement, puisque $\{e_\nu\ ;\ \nu \in s\}$ forment base, cela impose que s soit un zéro pour $H^2(\mathbb{D})$. On a alors :

$$\left.\begin{array}{ll} \forall \nu \in s & \langle B_s , e_\nu \rangle = 0 \\ & \langle B_s , e_w \rangle \neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow e_w \notin E_s .$$

3. ENSEMBLES DE TYPE S DANS $\mathbb{D}^n$.

Le but de ce paragraphe est d'étudier des ensembles, assez particuliers de $\mathbb{D}^n$, dans lesquels le fait, pour une suite, d'être d'interpolation, se traduit simplement.

On aura besoin des définitions suivantes.

1. On dit qu'une suite $\sigma \subset \mathbb{D}^n$ est d'interpolation pour $H^\infty(\mathbb{D}^n)$ si :

$$\forall \omega \in \ell^\infty(\mathbb{N})\ ;\ \exists f \in H^\infty(\mathbb{D}^n) \text{ t. q. : } \forall n \in \mathbb{N}\ ;\ f(z_n) = w_n\ ;\ z_n \in \sigma .$$

2. On dit qu'une suite $\sigma \subset \mathbb{D}^n$ est séparée si il existe $\delta > 0$, tel que : $\forall \underline{z}, \underline{w} \in \sigma\ ;\ \underline{z} \neq \underline{w}\ ;\ d_g(\underline{z}, \underline{w}) \geq \delta$; où d_g désigne la distance de Gleason dans l'algèbre $H^\infty(\mathbb{D}^n)$. [3].

3. Un ensemble $W \subset \mathbb{D}^n$ est dit de type S si, pour toute suite σ de W on a l'équivalence : σ est d'interpolation pour $H^\infty(\mathbb{D}^n)$ si et seulement si σ est séparée.

Remarque. Utilisant [3], il est clair qu'une union finie d'ensembles de type S est de type S.

4. EXEMPLES D'ENSEMBLES DE TYPE S DANS $\mathbb{D}$.

Le premier exemple étudié fut le rayon $[0,1]$ dans $\mathbb{D}$ [9]. Plus généralement, on dira que Γ_{z_o} est un cône de sommet $z_o \in \mathbb{T}$ et d'angle $\alpha > 0$ si :

$$\bar{\Gamma}_{z_o} \subset \mathbb{D} \cup \{z_o\} \quad \text{et} \quad \forall z \in \Gamma_{z_o} \quad , \quad \operatorname{Arg}(z - z_o) \in [-\alpha, +\alpha].$$

Il est facile de voir que Γ_{z_o} est un domaine de type S, et donc aussi une union finie de tels cônes.

L'exemple suivant généralise cette remarque :

soit $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs tendant vers 0 exponentiellement ; par exemple $2^{-n-1} < \theta_n \leq 2^{-n}$. Soient $\Gamma_n^{(\alpha)}$ une famille de cônes d'angle $\alpha \geq 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma_n^{(\alpha)} \cap \mathbb{T} = \{e^{i\theta_n}\}$ et $\overline{\cup \Gamma_n^{(\alpha)}} \cap \mathbb{T} = \{1\} \bigcup_{n \geq 1} \{e^{i\theta_n}\}$. Posant $W = \bigcup_{n \geq 1} \Gamma_n^{(\alpha)}$, on a alors :

PROPOSITION. W <u>est un domaine de type</u> S.

Preuve. Soit σ une suite séparée dans $W : \sigma = \{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Pour montrer que σ est une suite d'interpolation, il suffit de montrer que la mesure

$\mu = \sum_{k \geq 1} (1 - |z_k|) \delta_{z_k}$, est une mesure de Carleson [10], i. e. :

Soit $K_n = \left\{z \in \mathbb{D},\ |z| \geqslant 1 - 2^{-n},\ \operatorname{Arg} z \in \left[0, \frac{2\pi}{2^n}\right]\right\}$.

Il faut vérifier $\mu(K_n) \leq C\ 2^{-n}$ où C est une constante.

Les données étant stables par une "homotéthie" de centre 1, il suffit de vérifier que μ est bornée sur $\mathbb{D}$.

Soit donc $C_k = \{z \in \mathbb{D}\ ;\ 1-2^{-k} \leq |z| < 1-2^{-k-1}\}$, et pour $0 \leq p < 2^k$ posons

$$C_{k,p} = \left\{z\in C_k \;;\; \operatorname{Arg} z \in \left[p.\frac{2\pi}{2^k}, (p+1)\frac{2\pi}{2^k}\right]\right\}.$$

La suite σ étant séparée, il existe un entier A tel que chaque $C_{k,p}$ contienne au plus A points de σ.

D'autre part, $\Gamma_n \cap C_k$ est inclus dans le domaine

$$R_{k,n} = \left\{z\in C_k \;;\; \operatorname{Arg} z \in \left[2^{-n}-\operatorname{tg}\alpha\, 2^{-k}, 2^{-n}+\operatorname{tg}\alpha\, 2^{-k}\right]\right\}.$$

Soit alors B un entier tel que $B > \operatorname{tg}\alpha$, il y a, au plus, $2AB$ points de σ dans $R_{k,n}$ et on a $R_{k,n} \subset \bigcup_{p=-B}^{B} C_{k,p}$ dès que $2^{-k} + \operatorname{tg}\alpha\, 2^{-k} \le B2^{-k}$;

i. e. dès que $n \ge k + n_o$ avec n_o indépendant de n et k.

Donc $\bigcup_{n\ge k+n_o} R_{k,n}$ contient au plus $2AB$ points de σ.

D'où, dans la couronne C_k, il y aura au plus $2AB(k+n_o)$ points de σ. On en déduit enfin :

$$\mu(\mathbb{D}) \le \sum_k 2^{-k}\left[2AB(k+n_o)\right] < +\infty \;;\; \text{et } \sigma \text{ est bien une suite d'interpolation.}$$

5. EXEMPLES D'ENSEMBLES DE TYPE S DANS $\mathbb{D}^n$.

On va montrer le théorème suivant :

THEOREME. Si, pour $1 \le i \le n$, W_i est de type S pour $H^\infty(\mathbb{D})$, alors $W = W_1 \times W_2 \times \ldots \times W_n$ est de type S pour $H^\infty(\mathbb{D}^n)$.

Preuve. On la fera pour $n = 2$. Soit σ une suite dans $W_1 \times W_2$ telle que il existe $\delta > 0$ avec

$$\forall \underline{z} \in \sigma \quad \text{et} \quad \forall \underline{w} \in \sigma \;;\; \underline{z} \ne \underline{w} \Longrightarrow d_g(\underline{z}, \underline{w}) \ge \delta \;;$$

explicitement, si $\underline{z} = (z_1, z_2)$ et $\underline{w} = (w_1, w_2)$, on a

$$d_g(\underline{z},\underline{w}) = \max\left[d_g(z_1,w_1)\ ,\ d_g(z_2,w_2)\right].$$

Pour $k\in\mathbb{N}$ et $0 \le p < 2^k$ on définit la cellule $C_{k,p}$ par

$$C_{k,p} = \left\{z\in\mathbb{D}\ ;\ \ -2^{-k} \le |z| < 1-2^{-k-1} \quad \text{et} \quad \operatorname{Arg} z \in \left[p\,\frac{2\pi}{2^k}\ ,\ (p+1)\,\frac{2\pi}{2^k}\right[\right\}.$$

On peut supposer, quitte à découper σ en une union finie, que δ est tel que

$z,w \in C_{k,p} \Longrightarrow d_g(z,w) < \delta$. On définit alors la sous-suite $\sigma_{k,p}$ ainsi

$$\sigma_{k,p} = \left\{w\in W_2 \ \text{t. q.}\ (z,w) \in \sigma \ \text{ et } \ z \in C_{k,p}\right\}.$$

Si z et w sont deux points distincts de $\sigma_{k,p}$ on a donc : $d_g(z,w) > \delta$. Donc, pour tout (k,p), la suite $\sigma_{k,p}$ est séparée dans W_2 et donc d'interpolation pour une constante $M_{k,p}$ uniformément majorée par un nombre $M(\delta)$.

La démonstration nécessite deux étapes.

a) <u>Première étape</u>.

On suppose que $\forall (z,w) \in \sigma_{k,p} \Longrightarrow z = z_{k,p}$, i. e. la projection de $\sigma_{k,p}$ sur la première coordonnée est constante. La suite $\left\{z_{k,p}\right\}_{(k,p)}$ étant une suite séparée dans W_1 est d'interpolation pour $H^\infty(\mathbb{D})$ de constante $M(\delta)$. Soit $\left\{e_{k,p}\right\}$ la suite de fonctions de $H^\infty(\mathbb{D})$ réalisant l'extension linéaire [4], [10], i. e. :

$$\begin{cases} e_{k,p}(z_{k',p'}) = \delta_{k,p}^{k',p'} \\ \forall z\in\mathbb{D}\ ;\ \ \displaystyle\sum_{k,p} |e_{k,p}(z)| \le N(\delta). \end{cases}$$

Indiquons les points de $\sigma_{k,p}$: $\sigma_{k,p} = \left\{w_{k,p}(n)\ ;\ n \in J \subset \mathbb{N}\right\}$, et soit $\varpi \in \ell^\infty(\mathbb{N}^3)$.

Pour tout (k,p), il existe une fonction $f_{k,p}(z) \in H^\infty(\mathbb{D})$ telle que

$$\begin{cases} f_{k,p}(w_{k,p}(n)) = \varpi_{k,p,n} \\ \|f_{k,p}\| \le M_{k,p}\|\varpi\|_\infty \le M(\delta)\|\varpi\|_\infty. \end{cases}$$

Posons enfin $\forall(z,w) \in \mathbb{D}^2 : f(z,w) = \sum_{k,p} e_{k,p}(z)\, f_{k,p}(w)$.

Clairement $f \in H^\infty(\mathbb{D}^2)$; $\|f\|_\infty \leq M(\delta)\, N(\delta)$ et f réalise bien l'interpolation pour une constante $M(\delta)\, N(\delta)$.

b) Deuxième étape.

Si, maintenant, la première coordonnée des points de $\sigma_{k,p}$ n'est plus constante on subdivise chaque $c_{k,p}$ en 2^{2N} cellules, i. e. :

$$0 \leq j < 2^N \quad ; \quad 0 \leq \ell \leq 2^N$$

$$I_{p;k,j,} = \Big\{ z \in \mathbb{D} \ ; \ |z| \in \left[1-2^{-k}+j2^{-k-N} \ , \ 1-2^{-k}+(j+1)2^{-k-N}\right[\ \text{et}$$

$$\operatorname{Arg} z \in \left[\frac{2M}{2^k}(p+\ell 2^{-N}) \ ; \ \frac{2M}{2^k}(p+(\ell+1)2^{-N}\right[\Big\}.$$

On choisit N tel que : $\forall z$, $\forall w \in I_{p,k,j,\ell}$ et $\forall g \in H^\infty(\mathbb{D})$, on ait :

$$(*) \qquad |g(z) - g(w)| < \|g\|_\infty \frac{1}{2N(\delta)\, M(\delta)}.$$

Soit alors $s_{j,\ell}$ la sous-suite de σ dont la première coordonnée de ses éléments appartient à $\bigcup_{k,p} I_{k,p,j,\ell}$. On associe à $s_{j,\ell}$ la suite $s'_{j,\ell}$ ainsi construite : on choisit $x_{k,p}^{(j,\ell)}$ un point de $I_{k,p,j,\ell}$ et on pose

$$s'_{j,\ell} = \Big\{ (x_{k,p}^{(j,\ell)} \ , \ y_{k,p}(n)) \quad \text{t. q.} \quad \exists\, x_{k,p}(n) \in \mathbb{D} \quad \text{avec}$$
$$(x_{k,p}(n) \ , \ y_{k,p}(n) \in s_{j,\ell} \Big\}.$$

La suite $s'_{j,\ell}$ est du type de celle étudiée à la première étape, elle est donc d'interpolation. En utilisant (*) et un argument classique de série [11] - [7], on obtient que $s_{j,\ell}$ est d'interpolation.

La suite σ est alors réunion finie de suites d'interpolation et est séparée, on peut donc lui appliquer le théorème de N. Varopoulos [3] : σ est d'interpolation.

4. INTERPOLATION DANS $H^\infty(\mathbb{D}^n)$.

On s'intéresse maintenant aux suites $\sigma \subset \mathbb{D}\times W$ où W est un ensemble de type S dans $\mathbb{D}^{n-1}$.

Comme au § 3 on a que : $\forall \delta > 0$, on peut partitionner W en cellules $\{C_k \,;\, k\in\mathbb{N}\}$ telles que : $\forall k$; $\forall \underline{y}$, $\forall \underline{y}' \in C_k$; $d_g(\underline{y}, \underline{y}') < \delta$.

Soit alors $\sigma \subset \mathbb{D}\times W$. On pose : $\forall k \in \mathbb{N}$; $\sigma^k = \{(x,\underline{y}) \in \sigma$; t. q. $\underline{y} \in C_k\}$ et $\tilde{\sigma}^k = \{x \in \mathbb{D}$ t. q. $\exists\, \underline{y} \in \mathbb{D}^{n-1}$ avec $(x,\underline{y}) \in \sigma^k\}$; i. e. $\tilde{\sigma}^k$ est la projection de σ^k sur la première coordonnée complexe.

Reprenant alors exactement les arguments du § 3 on montre :

PROPOSITION. Soit $\sigma \subset \mathbb{D}\times W$, où W est un ensemble de type S dans $\mathbb{D}^{n-1}$. Pour que σ soit d'interpolation dans $H^\infty(\mathbb{D}^n)$, il faut et il suffit que :

i) σ soit séparée

ii) $\exists\, \delta > 0$ tel que les points de $\tilde{\sigma}^k$ forme une suite d'interpolation pour $H^\infty(\mathbb{D})$ de constante uniforme, i. e. $\forall k \in \mathbb{N}$; $\inf\limits_{x\in\tilde{\sigma}^k} \prod\limits_{x'\in\tilde{\sigma}^k} \left|\dfrac{x - x'}{1-\bar{x}'x}\right| \geq \delta > 0$.

Cette proposition donne une description "concrète" des suites d'interpolation dans $H^\infty(\mathbb{D}^n)$ située dans $\mathbb{D}\times W$.

On va donner une description abstraite basée sur le théorème d'approximation suivant dû à E. P. Kronstadt [2].

THEOREME. [2]. Soit $\sigma = \{x_k \,;\, k\in\mathbb{N}\}$ une suite dans $\mathbb{D}$. Pour tout c positif, il existe ε_o positif tels que σ est d'interpolation pour $H^\infty(\mathbb{D})$ si et seulement si il existe une famille $\{f_k \,;\, k\in\mathbb{N}\}$ de fonctions dans $H^\infty(\mathbb{D})$ avec :

1) $\forall k \in \mathbb{N}$; $\|f_k\|_\infty \leq c$

2) $\forall k,k' \in \mathbb{N}$; $|f_k(x_{k'}) - \delta_{k,k'}| < \varepsilon_o$.

Le théorème abstrait sera le suivant.

THEOREME. Soit $\sigma \subset \mathbb{D} \times W$ où W est de type S dans $\mathbb{D}^{n-1}$. Pour que σ soit d'interpolation dans $H^\infty(\mathbb{D}^n)$, il faut et il suffit que les idempotents élémentaires soient uniformément bornés.

On rappelle que si $\sigma = \{\underline{z}_k \; ; \; k \in \mathbb{N}\}$, les idempotents élémentaires sont des fonctions $\{f_k \; ; \; k \in \mathbb{N}\}$ de $H^\infty(\mathbb{D}^n)$ telles que $\forall k$, $\forall k' \in \mathbb{N}$; $f_k(\underline{z}_{k'}) = \delta_{kk'}$.

La condition est clairement nécessaire.

Preuve de la suffisance. $\forall \varepsilon > 0$, on peut choisir $\delta > 0$ tel que $\forall k$, $\forall \underline{y}, \underline{y}' \in C_k$, $\forall f \in H^\infty(\mathbb{D}^n)$ on ait : $|f(x,\underline{y}) - f(x,\underline{y}')| < \varepsilon \|f\|_\infty$, car $d_g(\underline{y} \; ; \; \underline{y}') < \delta \Longrightarrow d_g((x,y) \; ; \; (x,\underline{y}')) < \delta$.

Choisissons un point $\underline{y}^k$ dans C_k, $\forall k \in \mathbb{N}$. Il vient alors, si l'on note $\{f_{\underline{z}} \; ; \; \underline{z} \in \sigma^k\}$ les idempotents élémentaires associés à σ^k ($\|f_{\underline{z}}\|_\infty \leq C$, $\forall \underline{z} \in \sigma^k$) :

$\forall \underline{z}' = (x',y') \in \sigma^k$; $|f_{\underline{z}}(x',y') - f_{\underline{z}}(x',\underline{y}^k)| < \varepsilon C$.

Posons alors : $\forall \underline{z} \in \sigma^k$; $\forall \varphi \in \mathbb{D}$: $\tilde{f}_{\underline{z}}(\varphi) = f_{\underline{z}}(\varphi,\underline{y}_k)$.

On a : 1) $\tilde{f}_{\underline{z}} \in H^\infty(\mathbb{D})$ et $\|\tilde{f}_{\underline{z}}\|_\infty \leq C$ $\quad \forall \underline{z} \in \sigma^k$

2) $\forall x' \in \tilde{\sigma}^k$; $\forall \underline{z} \in \sigma^k$; $|\tilde{f}_{\underline{z}}(x') - \delta_{xx'}| < \varepsilon C$; $(\underline{z} = (x,\underline{y}))$.

Comme on peut choisir δ assez petit pour que εC soit inférieur au ε_o du théorème de E. P. Kronstadt, on an déduit que $\tilde{\sigma}^k$ est une suite d'interpolation dont la constante est indépendante de k.

La proposition achève alors la preuve du théorème.

Il est clair que les ensembles $\mathbb{D} \times W$ où W est de type S dans $\mathbb{D}^{n-1}$ sont plus généraux que ceux introduits par E. P. Kronstadt [2].

De plus il introduit la notion de suite $\sigma \subset \mathbb{D}^n$ d'interpolation générale.

σ est une suite d'interpolation générale si pour toute algèbre uniforme A, la suite σ est d'interpolation pour l'algèbre des fonctions analytiques à valeur dans A et bornées. En particulier toute suite σ d'interpolation générale est d'interpolation habituelle.

Le corollaire suivant, du théorème d'extension linéaire de A. Bernard [2], montre qu'une suite d'interpolation habituelle est toujours une suite d'interpolation générale, ce qui généralise donc encore certains résultats de E. P. Kronstadt.

COROLLAIRE. <u>Soit</u> $\sigma \subset \mathbb{D}^n$. <u>Pour que</u> σ <u>soit une suite d'interpolation générale</u>, <u>il faut et il suffit que</u> σ <u>soit une suite d'interpolation pour</u> $H^\infty(\mathbb{D}^n)$.

La nécessité est évidente. Voyons la suffisance : $\sigma = \{\underline{z}_k \ ; \ k \in \mathbb{N}\}$ est d'interpolation de constante $c > 0$ pour $H^\infty(\mathbb{D}^n)$. Utilisant alors [4] on sait qu'il existe une suite $\{f_k \ ; \ k \in \mathbb{N}\}$ de fonctions dans $H^\infty(\mathbb{D}^n)$ telle que :

1) $\forall \underline{z} \in \mathbb{D}^n \ ; \ \sum_k |f_k(\underline{z})| \leq c^2$

2) $\forall i, \ \forall k \in \mathbb{N} \ ; \ f_k(\underline{z}_i) = \delta_{k,i}$.

Soit alors A une algèbre uniforme (où un espace de Banach...) et $\{a_k \ ; \ k \in \mathbb{N}\}$ une suite d'éléments de A telle que $\sup_k \|a_k\| \leq 1$.

Il est alors clair que la fonction $G(\underline{z}) = \sum_k f_k(\underline{z})\, a_k$ est

1) analytique à valeur dans A

2) réalise l'interpolation : $\forall i \in \mathbb{N}$; $G(\underline{z}_i) = a_i$

3) $\|G(z)\|_{\infty,A} \leq C^2$.

Cela valant pour toute A, le corollaire est prouvé.

Remarque. L'étude des suites d'interpolation σ situées dans $\mathbb{D} \times W$ est très particulière. En effet, pour ces suites on a

1) σ est d'interpolation pour $H^\infty(\mathbb{D}^n)$ si et seulement si σ est d'interpolation hilbertienne dans $H^2(\mathbb{D}^n)$ comme on le montrera au §5 ; ce qui est faux pour une suite quelconque dans $\mathbb{D}^n$ [12].

2) σ est d'interpolation dans $H^\infty(\mathbb{D}^n)$ si et seulement si

i) σ est séparée

ii) si la mesure d'interpolation associée à σ est de Carleson [15], ce qui est facile à prouver.

Or L. Carleson a montré dans [16] l'exemple d'une suite dans $\mathbb{D}^n$ telle que la mesure associée est de Carleson et ne vérifie pas les inégalités H^p. Donc cette suite ne peut être une suite d'interpolation [8].

5. INTERPOLATION HILBERTIENNE ET BASES.

Soit σ une suite dans $\mathbb{D}^n$. On a le lemme :

LEMME. Si les conjugués de la famille $\Sigma = \left\{ e_{\underline{z}} \; ; \; \underline{z} \in \sigma \right\}$ sont uniformément bornés dans $H^2(\mathbb{D}^n)$, alors la suite σ est séparée.

Preuve. $\exists\, c > 0$, $\forall \underline{z}, \forall z' \in \sigma$ $\exists\, \rho \in H^2(\mathbb{D}^n)$ t. q. :

1) $\|\rho\|_2 \leq c$; $\langle \rho, e_{\underline{z}} \rangle = 1$;

2) $\langle \rho, e_{\underline{z}'} \rangle = 0$

Il est facile de voir que cela implique : $|\langle e_{\underline{z}}, e_{\underline{z}'} \rangle| \leq 1 - \delta$ avec $\delta > 0$ ne dépendant que de c.

D'autre part, si $\underline{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ et $\underline{z}' = (z_1', \ldots, z_n')$, il vient :

$$|\langle e_{\underline{z}}, e_{\underline{z}'} \rangle| = \prod_{i=1}^{n} |\langle e_{z_i}, e_{z_i'} \rangle|.$$

Un calcul classique montre alors que :

$\forall i \in [1, \ldots, n]$; $|\langle e_{z_i}, e_{z_i'} \rangle|^2 = 1 - d_g(z_i, z_i')$ dans le disque,

et que :
$$d_g(\underline{z}, \underline{z}') = \max_{i=1,\ldots,n} d_g(z_i, z_i')$$

d'où : $1 - d_g(\underline{z}, \underline{z}') \leq 1 - d_g(z_i, z_i') = |\langle e_{z_i}, e_{z_i'} \rangle|^2$ $\forall i \in 1, \ldots, n$.

donc
$$[1 - d_g(\underline{z}, \underline{z}')]^n \leq |\langle e_{\underline{z}}, e_{\underline{z}'} \rangle|^2 \leq 1 - \delta.$$

On en déduit : $d_g(\underline{z}, \underline{z}') \geq 1 - (1-\delta)^{1/n} = \gamma > 0$, d'où le lemme.

COROLLAIRE <u>Soit</u> $\sigma \subset W$, <u>où</u> W <u>est de type</u> S <u>dans</u> $\mathbb{D}^n$. <u>Alors</u> $\Sigma = \{e_{\underline{z}}, \underline{z} \in \sigma\}$ <u>forme base si, et seulement si, la suite</u> σ <u>est séparée. De plus, dans ce cas</u>, Σ <u>forme base inconditionnelle</u>.

En effet, si σ est séparée, la définition de W permet d'affirmer que σ est d'interpolation pour $H^\infty(\mathbb{D}^n)$. Or, on sait [8] que cela entraîne que Σ est d'interpolation hilbertienne dans $H^2(\mathbb{D}^n)$, i. e. forme base inconditionnelle.

Réciproquement, si Σ forme base alors les conjugués de Σ sont uniformément bornés dans $H^2(\mathbb{D}^n)$ et le lemme nous assure que σ est séparée, donc en fait que Σ

forme base inconditionnelle.

Soit maintenant une suite σ dans $\mathbb{D}$. On a :

THEOREME. La suite $\Sigma = \left\{e_z\ ;\ z\in\sigma\right\}$ forme base si, et seulement si :

$$(*) \qquad \inf_{z\in\sigma} \prod_{\substack{z'\in\sigma \\ z'\neq z}} \left|\frac{z-z'}{1-z'z}\right| \geq \delta > 0$$

Dans ce cas Σ forme base inconditionnelle.

Preuve. Si Σ forme base, les conjugués sont uniformément bornés dans $H^2(\mathbb{D})$. On a caractérisé ceux-ci dans [8] et l'on a montré qu'alors cela entraînait la condition (*).

Réciproquement, utilisant la caractérisation de L. Carleson [13] on sait que (*) entraîne que σ est d'interpolation pour $H^\infty(\mathbb{D})$ ~~et donc aussi que Σ est d'interpolation pour $H^\infty(\mathbb{D})$~~ et donc aussi que Σ est d'interpolation hilbertienne dans $H^2(\mathbb{D})$ [8], i. e. Σ forme base inconditionnelle.

Soit maintenant le cas mixte : $\sigma \subset D \times W$ où W est de type S dans $\mathbb{D}^{n-1}$.

On va montrer le théorème suivant :

THEOREME. Soit $\sigma \subset \mathbb{D} \times W$ où W est un ensemble de type S dans $\mathbb{D}^{n-1}$. Pour que $\Sigma = \left\{e_{\underline{z}}\ ;\ \underline{z} \in \sigma\right\}$ forme base hilbertienne, il faut et il suffit que σ soit une suite d'interpolation pour $H^\infty(\mathbb{D}^n)$. Dans ce cas Σ forme base inconditionnelle.

Puisque interpolation hilbertienne est équivalent à base inconditionnelle donc entraine base hilbertienne, ce théorème montre que si $\sigma \subset \mathbb{D} \times W$, interpolation hilbertienne et interpolation pour H^∞ caractérisent les mêmes suites.

D'autre part, σ d'interpolation pour $H^\infty(\mathbb{D}^n)$ est décrit "concrètement" dans la proposition du § 4, et "abstraitement" dans le théorème du § 4.

Preuve du théorème. Si σ est d'interpolation pour $H^\infty(\mathbb{D}^n)$, alors Σ forme base inconditionnelle donc hilbertienne.

Réciproquement, puisque Σ forme base, les conjugués de Σ sont uniformément bornés dans $H^2(\mathbb{D}^n)$ et d'après le lemme la suite σ est séparée.

Comme aux § 3 et 4, $\forall \delta > 0$, on peut découper W en cellules $\{c_k \; ; \; k \in \mathbb{N}\}$ telles que : $\forall k \in \mathbb{N}$; $\forall \underline{y}, \underline{y}' \in c_k$; $d_g(\underline{y}, \underline{y}') < \delta$. Avec les notations du § 4, le but est de se ramener aux hypothèses de la proposition du § 3, i. e. de montrer que $\tilde{\sigma}^k$ est une suite d'interpolation de constante indépendante de k dans $H^\infty(\mathbb{D})$.

En reprenant la preuve du lemme, on montre aisément que :

$$(1) \qquad \forall \underline{y}, \underline{y}' \in \mathbb{D}^{n-1} \text{ t. q. } d_g(\underline{y}, \underline{y}') \leq \delta < 1 \text{ alors } |\langle e_{\underline{y}}, e_{\underline{y}'} \rangle| \geq (1-\delta)^{\frac{n-1}{2}}.$$

D'autre part, utilisant l'hypothèse de base hilbertienne, on sait qu'il existe $c > 0$ t. q. : $\forall h \in H^2(\mathbb{D}^n)$, $\sum\limits_{\underline{z} \in \sigma} |\langle h, e_{\underline{z}} \rangle|^2 \leq c^2 \|h\|^2$.

En particulier, si $h = e_{\underline{z}'}$, $z' \in \sigma^k$, il vient : $\sum\limits_{\underline{z} \in \sigma_k} |\langle e_{\underline{z}'}, e_{\underline{z}} \rangle|^2 \leq c^2$.

Ecrivant : $\underline{z} = (x, \underline{y})$; $\underline{z}' = (x', \underline{y}')$, on a que $\underline{y}$ et $\underline{y}'$ sont dans c_k, donc, grâce à (1), il vient :

$$c^2 \geq \sum_{\underline{z} \in \sigma^k} |\langle e_{x'}, e_x \rangle|^2 \, |\langle e_{\underline{y}'}, e_{\underline{y}} \rangle|^2 \geq (1-\delta)^{\frac{n-1}{2}} \sum_{\underline{z} \in \sigma^k} |\langle e_{x'}, e_x \rangle|^2.$$

Les points de σ^k étant séparés on choisit δ assez petit pour que $\tilde{\sigma}^k$ soit séparée, et on a donc (on prend $\delta < \delta_o$ où δ_o est la constante de séparation de σ)

$$(2) \qquad \forall x' \in \tilde{\sigma}^k \; ; \quad \sum_{x \in \tilde{\sigma}^k} |\langle e_{x'}, e_x \rangle|^2 \leq \frac{1}{(1-\delta)^{\frac{n-1}{2}}} c^2.$$

On sait alors [13] que (2) entraîne que la mesure associée est de Carleson. Comme de plus

$\tilde{\sigma}^k$ est séparée, $\tilde{\sigma}^k$ est d'interpolation dans $H^\infty(\mathbb{D})$, la constante ne dépendant que de δ et de c. On est donc ramené à la proposition du § 3 ce qui achève la preuve du théorème.

Remarque. Pour $\sigma \subset \mathbb{D} \times W$ où W est de type S dans $\mathbb{D}^{n-1}$, contrairement au cas où les idempotents élémentaires sont uniformément bornés dans $H^\infty(\mathbb{D}^n)$, nous ne sommes pas arrivés à montrer que : conjugués pour $\Sigma = \{e_{\underline{z}} \ ; \ \underline{z} \in \sigma\}$ uniformément bornés entraîne Σ interpolation hilbertienne.

En effet, pour utiliser une méthode analogue à celle pour $H^\infty(\mathbb{D}^n)$ il faudrait un théorème d'approximation du genre de celui de E. P. Kronstadt, mais pour $H^2(\mathbb{D})$. Or, un tel théorème ne peut exister à cause du contre exemple suivant.

CONTRE-EXEMPLE. $\exists c > 0$; $\forall \varepsilon > 0$, il existe une suite $\sigma = \{x_i \ ; \ i \in \mathbb{N}\}$ dans $\mathbb{D}$ qui n'est pas d'interpolation pour $H^2(\mathbb{D})$ et une famille de fonctions $\{\rho_i \ ; \ i \in \mathbb{N}\}$ bornées par c dans $H^2(\mathbb{D})$ telles que : $\forall i, \forall j \in \mathbb{N}$; $|\langle \rho_i, e_{x_j} \rangle - \delta_{ij}| < \varepsilon$.

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}$. Appelons σ_n la suite constituées de 2^n points équirépartis sur le cercle de rayon $1-2^{-n}$. On sait que la constante d'interpolation de σ_n est un nombre c indépendant de n. D'autre part, une union infinie de telles suites σ_n ne peut être d'interpolation car la mesure associée ne serait pas une mesure de Carleson. Nous allons montrer qu'une union infinie de σ_n vérifie les hypothèses du contre-exemple.

Partons de $n_o \in \mathbb{N}$. On choisit $x \in \sigma_{n_o}$ et on pose :

$$\rho_x(\varphi) = \frac{B_x^{n_o}(\varphi)}{B_x^{n_o}(x)} . e_x(\varphi) \ ; \quad \forall \varphi \in \mathbb{D} \ ;$$

$B_x^{n_o}(\varphi)$ est le produit de Blaschke ayant $\sigma_{n_o} \setminus \{x\}$ comme zéros exactement, et où, comme toujours $e_x(\varphi)$ est le noyau de Cauchy Szegö normalisé à 1 dans $H^2(\mathbb{D})$.

Il est clair que $\|\rho_x\|_{H^2} = \dfrac{1}{|B_x^{n_o}(x)|} \leq C$ car σ_{n_o} est d'interpolation de constante C.

De plus :

$$\forall x, x' \in \sigma_{n_o} \; ; \; \langle \rho_x, e_{x'} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } x = x' \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\varepsilon > 0$ étant donné, $\exists n_1 > n_o$ tel que $\forall n \geq n_1$ on ait :

$\forall x \in \sigma_{n_o}$; $\forall x' \in \sigma_n$ $\quad |\langle e_x, e_{x'} \rangle| < \frac{\varepsilon}{C}$.

En effet, on a

$$|\langle e_x, e_{x'} \rangle| = \frac{\sqrt{1-|x|^2}\sqrt{1-|x'|^2}}{|1-\bar{x}x'|} \leq 2\,\frac{\sqrt{1-|x'|^2}}{\sqrt{1-|x|^2}}$$

et $|x| = 1 - 2^{-n_o}$ et $|x'| = 1 - 2^{-n}$.

On en déduit $\forall x \in \sigma_{n_o}$; $\forall x' \in \sigma_{n_1}$:

$$|\langle \rho_x, e_{x'} \rangle| \leq \left| \frac{B_x^{n_o}(x')}{B_x^{n_o}(x)} \right| |\langle e_x, e_{x'} \rangle| \leq \varepsilon.$$

On recommence évidemment de la même manière et l'on obtient une suite $\{n_o, n_1, \ldots\}$ telle que σ_{n_k} et $\sigma_{n_{k'}}$ vérifie encore les propriétés ci-dessus. Clairement $\sigma = \bigcup_k \sigma_{n_k}$ et $\{\rho_x \; ; \; x \in \sigma\}$ constitue bien le contre exemple, puisque σ n'est pas d'interpolation mais Σ possède bien des conjugués approchés qui sont uniformément bornés.

6. APPLICATION AUX BASES D'EXPONENTIELLES.

Il ne reste plus qu'à utiliser la transformée de Laplace et l'isométrie introduite au début pour transcrire les résultats obtenus sur l'interpolation en résultats sur les bases d'exponentielles.

Puisque les noyaux de Cauchy Szegö étaient normalisés dans H^2, on normalise les exponentielles

$$\forall \underline{z} \in \mathbb{P}^n \; ; \quad \text{on pose} \quad d(\underline{z}) = \frac{1}{\left\| e^{-\underline{z}.\underline{t}} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{+n})}} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} \sqrt{2 \operatorname{Re} z_i}}$$

où $\underline{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{P}^n$.

1) Cas où la suite σ est dans $\mathbb{P} = \left\{ z \in \mathbb{C} \; ; \operatorname{Re} z > 0 \right\}$. On obtient l'amélioration du théorème de J. M. Anderson [1].

THEOREME 1. Soit une suite σ dans $\mathbb{P}$. Pour que l'espace V_σ engendré par la suite $\left\{ e^{-zt} \; ; z \in \sigma \right\}$ dans $L^2(\mathbb{R}^+)$ possède une base d'exponentielles il faut et il suffit que $\inf\limits_{z \in \sigma} \prod\limits_{z' \in \sigma \setminus \{z\}} \left| \dfrac{z - z'}{\bar{z} + z'} \right| = \delta > 0$. Dans ce cas la suite normalisée $\left\{ e^{-zt} \, d(z) \; ; z \in \sigma \right\}$ constitue l'unique (à normalisation près) base d'exponentielles de V_σ et celle-ci est inconditionnelle.

2) Cas où la suite σ est dans W, où W est de type S dans $\mathbb{P}^n$ (voir § 3). On a alors :

THEOREME 2. Soit σ une suite dans W, où W est un ensemble de type S dans $\mathbb{P}^n$. Pour que l'espace V_σ engendré par la suite $\left\{ e^{-\underline{z}.\underline{t}} \; ; \underline{z} \in \sigma \right\}$ dans $L^2(\mathbb{R}^{+n})$ possède une base d'exponentielles, il faut et il suffit que :

$$\inf_{\substack{\underline{z} \in \sigma, \underline{z}' \in \sigma, \\ \underline{z} \neq \underline{z}'}} \left\{ \max_{i=1,\ldots,n} \left| \frac{z_i - z_i'}{\bar{z}_i + z_i'} \right| \right\} = \delta > 0.$$

Dans ce cas, la suite normalisée $\left\{ e^{-\underline{z}.\underline{t}} \, d(\underline{z}) \; ; \underline{z} \in \sigma \right\}$ constitue l'unique (à normalisation près) base d'exponentielles de V_σ et celle-ci est inconditionnelle.

Utilisant le fait que $\mathbb{R}^{+n}$ est un ensemble de type S dans $\mathbb{P}^n$, on en tire le corollaire plus "parlant" suivant :

COROLLAIRE. Soit σ une suite dans $\mathbb{R}^{+n}$. Pour que l'espace V_σ engendré par la suite $\{e^{-\underline{x}.\underline{t}} ; \underline{x}\in\sigma\}$ dans $L^2(\mathbb{R}^{+n})$ possède une base d'exponentielles, il faut et il suffit que

$$\inf_{\substack{\underline{x}\in\sigma ; \underline{x}'\in\sigma \\ \underline{x}\neq\underline{x}'}} \left\{ \max_{i=1,\ldots,n} \left| \frac{x_i - x_i'}{x_i + x_i'} \right| \right\} = \delta > 0.$$

Dans ce cas la suite normalisée $\{e^{-\underline{x}.\underline{t}} d(\underline{x}) ; \underline{x}\in\sigma\}$ constitue l'unique (à normalisation près) base d'exponentielles dans V_σ et celle-ci est inconditionnelle.

3) $\sigma \subset \mathbb{P} \times W$, où W est de type S dans $\mathbb{P}^{n-1}$. Dans ce cas, on ne sait caractériser que les bases hilbertiennes (§ 5) d'exponentielles.

THEOREME 3. Soit σ une suite dans $\mathbb{P}\times W$ où W est un ensemble de type S dans $\mathbb{P}^{n-1}$. Pour que l'espace V_σ engendré par la suite $\{e^{-\underline{z}.\underline{t}} ; \underline{z}\in\sigma\}$ possède une base hilbertienne d'exponentielles normalisées, il faut et il suffit que σ soit d'interpolation pour $H^\infty(\mathbb{P}^n)$. (Donc σ est caractérisée par la proposition du § 3). Dans ce cas, la base unique (à normalisation près) et inconditionnelle est la suite $\{e^{-\underline{z}.\underline{t}} d(\underline{z}) ; \underline{z}\in\sigma\}$ elle-même.

La question qui se pose alors est : est-ce que toute base d'exponentielles normalisées dans $L^2(\mathbb{R}^{+n})$ est inconditionnelle ? Les théorèmes 1 et 2 répondent oui si le spectre de la base est soit dans $\mathbb{P}$ soit dans un ensemble de type S.

Bibliographie

[1] ANDERSON, J. M. A note on a basis problem. Amer. Math. Soc. 51 (1975).

[2] KRONSTADT, E. P. Interpolating sequences in polydiscs. Trans. Amer. Math. Soc. 99 (1974).

[3] VAROPOULOS, N. Th. Sur la réunion de deux ensembles d'interpolation. C. R. Acad. Sc. 272 (1971).

[4] BERNARD, A. Algèbres quotients d'algèbres uniformes. C. R. Acad. Sc. Paris 272 (1971).

[5] SINGER, I. Bases in Banach spaces. Springer Verlag.

[6] SHAPIRO, H. Topics in approximation theory. Lecture Notes in Math., Springer-Verlag 187 (1971).

[7] GAMELIN, T. W. Uniform algebra. Prentice Hall Series in Modern Analysis (1969).

[8] AMAR, E. Méthodes hilbertiennes et interpolation dans le spectre d'une algèbre de Banach. Anal. Harm. Orsay 152 (1975).

[9] NEWMAN, D. L. Interpolation in $H^{\infty}(D)$. Trans. Amer. Math. Soc. 92 (1959).

[10] CARLESON, L. Proceedings Internat. Congress of Mathematicians. Stockholm (1962).

[11] KATZNELSON, Y. The algebra of continuous functions. Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960).

[12] AMAR, Denise et Eric Sur les théorèmes de Schwartz-Pick et Nevanlinna dans C^n. Publ. Anal. Harm. Orsay 167.

[13] CARLESON, L. An interpolation problem for bounded analytic functions. Amer. J. Math. 80 (1958).

[14] SHAPIRO, H. and SHIELDS, A. L. On some interpolations problems for analytic functions. Amer. J. Math. 83 (1961).

[15] CARLESON, L. The Corona theorem. Proceedings of the 15th Scandinavian Congress, Oslo (1968).

[16] CARLESON, L. Publ. Institut Mittag-Leffler, Report n° 7 (1974).