UNIVERSITÉ PARIS XI
U.E.R. MATHÉMATIQUE
91405 ORSAY FRANCE

209-76-61

Séminaire d'Analyse Harmonique
1975-1976

Analyse Harmonique d'Orsay
1976

209-76-61

Séminaire d'Analyse Harmonique
1975-1976

Analyse Harmonique d'Orsay
1976

ON SPECTRAL SYNTHESIS FOR CURVES IN R^3.

by Y. Domar

1. $A(\mathbf{R}^n)$ and $PM(\mathbf{R}^n)$ denote the Banach spaces of Fourier transforms of functions in $L^1(\mathbf{R}^n)$ and $L^\infty(\mathbf{R}^n)$, respectively. Thus $PM(\mathbf{R}^n)$ is the dual of $A(\mathbf{R}^n)$. The elements in $PM(\mathbf{R}^n)$ are defined in distribution sense and are called pseudomeasures. For every closed $E \subset \mathbf{R}^n$, $PM(E)$ denotes the (weakly* closed) subspace of $PM(\mathbf{R}^n)$ consisting of all pseudomeasures with support in E, and $M(E)$ is the subspace of $PM(E)$ consisting of all bounded regular Borel measures with support in E. E is said to be <u>sequential spectral synthesis</u> if $PM(E)$ is the sequential weak * closure of $M(E)$.

The image of an injective C^k mapping $\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^n$, where $k \geq 1$, $-\infty < a < b < \infty$, with γ' non-vanishing, is called a <u>simple C^k curve</u> in $\mathbf{R}^n$. The results in [3] imply that a simple C^2 curve in $\mathbf{R}^2$, with non-vanishing curvature, is a set of sequential spectral synthesis. We shall now prove :

THEOREM. <u>A simple C^3 curve in $\mathbf{R}^3$, with non-vanishing torsion, is a set of sequential spectral synthesis.</u>

It should be pointed out that the method in [3] can be adopted to give rather general results on an extended notion of sequential spectral synthesis for $(n-1)$-dimensional smooth manifolds in $\mathbf{R}^n$, $n \geq 3$ (see [4]), but that the corresponding method fails in general if the codimension of the manifold is ≥ 2 (R. Gustavson [5] has shown this for curves in $\mathbf{R}^3$). Thus a new idea has been necessary in the proof of our theorem. It is to be expected that the same approach can be used to prove corresponding results for curves in $\mathbf{R}^n$, $n \geq 4$.

2. $B(\mathbf{R}^n)$ denotes the Banach space of Fourier-Stieltjes transforms of elements in $M(\mathbf{R}^n)$. Let $E \subset \mathbf{R}^n$ be closed and $f \in C(E)$. We put

$$\|f\|^1_{B(E)} = \inf\left\{ \|F\|_{B(\mathbf{R}^n)} : f \in B(\mathbf{R}^n) \cap C^1(\mathbf{R}^n)\, ,\ F\,|_E = f \right\}.$$

If the set to the right is empty, we put $\|f\|^1_{B(E)} = \infty$. The novelty in the new method, in comparison with the method in [3], consists in a refined technique to estimate $\|f\|^1_{B(E)}$, for a special family of functions f on a family of curves $E \subset \mathbf{R}^2$. The main tools in the estimating are the following two elementary lemmas.

LEMMA 1. <u>There is a constant</u> C <u>such that every</u> $f \in C^1(I)$, <u>where</u> $I \subset R$ <u>is a compact interval of length</u> $|I|$, <u>satisfies</u>

$$\|f\|^1_{B(I)} \leq C\left(\|f\|_{L^\infty(I)} + \left(|I|\,\|f\|_{L^\infty(I)}\|f'\|_{L^\infty(I)}\right)^{1/2}\right). \tag{2.1}$$

<u>Proof of Lemma</u> 1. Since the norm in $B(\mathbf{R})$ is invariant under affine mappings of $\mathbf{R}$, we can assume $I = [0,1]$. Then we can extend f to a function $f \in B(\mathbf{R}) \cap C^1(\mathbf{R})$, periodic with period 2π, and such that

$$\|F\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \leq 2\|f\|_{L^\infty(I)}\ ,\quad \|F'\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \leq \|f'\|_{L^\infty(I)}.$$

Then we obtain (2.1) by estimating $\|F\|_{B(\mathbf{R})}$, using for instance Carlson's lemma (Carlson [2]).

LEMMA 2. <u>Let</u> $E \subset \mathbf{R}^2$ <u>be closed, and let</u> (x_n), $n \in \mathbf{Z}$, <u>be a strictly increasing sequence in</u> $\mathbf{R}$, <u>satisfying</u>

$$\delta \leq (x_{n+1} - x_n)(x_n - x_{n-1})^{-1} \leq \delta^{-1}, \qquad n \in \mathbf{Z},$$

<u>for some</u> $\delta > 0$. <u>Put</u>

$$E_m = E \cap \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x_{2m-2} \leq x \leq x_{2m+1}\right\}, \quad m \in \mathbf{Z}.$$

<u>Then there exists a constant</u> C^o, <u>only depending on</u> δ, <u>such that, for every</u> $f \in C(E)$,

$$\|f\|^1_{B(E)} \leq C^o \sum_{-\infty}^{\infty} \|f\|^1_{B(E_m)}.$$

<u>Proof of Lemma</u> 2. It is possible to define functions $\varphi_m \in C^1(\mathbf{R})$, $m \in \mathbf{Z}$, satisfying

$$\operatorname{supp}(\varphi_m) \subset [x_{2m-2}\,, x_{2m+1}],$$

$$0 \leq \varphi_m(x) \leq 1, \quad x \in \mathbf{R},$$

$$\varphi_m(x) = 1, \quad x \in [x_{2m-1}\,, x_{2m}],$$

$$0 \leq \varphi_m'(x) \leq 2(x_{2m-1} - x_{2m-2})^{-1}, \quad x \in [x_{2m-2}\,, x_{2m-1}],$$

$$\varphi_{m+1}(x) = 1 - \varphi_m(x), \quad x \in [x_{2m}\,, x_{2m+1}].$$

Then

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \varphi_m(x) = 1, \quad x \in \mathbf{R}. \tag{2.2}$$

We observe that $\operatorname{supp}(\varphi_m)$ is included in an interval of length $\leq (x_{2m} - x_{2m-1}).(1+2\delta^{-1})$, and that

$$\|\varphi_m\|_{L^\infty(\mathbf{R})} = 1, \quad \|\varphi_m'\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \leq (x_{2m} - x_{2m-1})^{-1}\, 2\delta^{-1}.$$

It follows from this, using for instance a variant of Carlson's lemma (Beurling [1], p. 349), that there exists a constant C^o such that

$$\|\varphi_m\|_{A(\mathbf{R})} \leq C^o, \quad m \in \mathbf{Z}.$$

For every m, Φ_m denotes the function on $\mathbf{R}^2$ defined by $\Phi_m(x,y) = \varphi_m(x)$, $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. Then $\Phi_m \in B(\mathbf{R}^2)$ and

$$(2.3) \qquad \|\Phi_m\|_{B(\mathbf{R}^2)} = \|\varphi_m\|_{A(\mathbf{R})} \leq C^o.$$

Choosing $f_m \in B(\mathbf{R}^2) \cap C^1(\mathbf{R}^2)$ as extensions of $f|_{E_m}$, we obtain $\Sigma f_m \Phi_m \in B(\mathbf{R}^2) \cap C^1(\mathbf{R}^2)$, and by (2.2)

$$\Sigma f_m(x,y)\, \Phi_m(x,y) = \Sigma f(x,y)\, \Phi_m(x,y) = f(x,y), \qquad (x,y) \in \mathbf{R}^2.$$

Thus $\Sigma f_m \Phi_m$ is an extension of f, and since by (2.3)

$$\|\Sigma f_m \Phi_m\|_{B(\mathbf{R}^2)} \leq \Sigma \|f_m\|_{B(\mathbf{R}^2)} \|\Phi_m\|_{B(\mathbf{R}^2)} \leq C^o \Sigma \|f_m\|_{B(\mathbf{R}^2)},$$

a minimization of $\|f_m\|_{B(\mathbf{R}^2)}$ yields the lemma.

In Section 4 we shall prove the theorem using the following lemma. The proof of the lemma is given in Section 3.

LEMMA 3. <u>Let</u> $\varepsilon > 0$, $0 < h < 1$, $t \in \mathbf{R}$, φ, f <u>and</u> g <u>are real-valued functions on</u> $\mathbf{R}$ <u>with the following properties</u> :

φ <u>is a non-negative function in</u> $\mathcal{D}(R)$ <u>with</u> $\mathrm{supp}\,(\varphi) \subset [0,1]$ <u>and satisfying</u> $\int_R \varphi(\sigma)\, d\sigma = 1$.

$$(2.4) \qquad f \in C^1[-1,1], \quad \varepsilon < f'(s) < \varepsilon^{-1}, \quad s \in [-1,1],$$

<u>and either</u>

$$(2.5) \qquad g \in C^2[-1,1], \quad \varepsilon < |g''(s)| < \varepsilon^{-1}, \quad s \in [-1,1],$$

<u>or</u>

$$(2.6) \qquad g \in C^3[-1,1], \quad \varepsilon < |g'''(s)| < \varepsilon^{-1}, \quad s \in [-1,1].$$

<u>Then the function</u> G <u>on the curve</u> $\Gamma_o : \{(f(s),g(s)) : s \in [0,1]\}$ <u>with values</u>

(2.7) $$G(f(s),g(s)) = K(s) = \int_0^1 \exp\left\{it\, g(s-\sigma h)\right\} \varphi(\sigma)\, d\sigma,$$

satisfies

(2.8) $$\|G\|^1_{B(\Gamma_o)} \leq C_o ,$$

for some constant C_o, depending on ε and φ, but not depending on h, t, f and g.

3. Proof of Lemma 3. If $t = 0$, (2.7) takes the value 1, i. e. the left-hand member of (2.8) is 1. Thus we can in the following disregard that case and assume that $t \neq 0$.

It is of course no restriction to assume that f and g are defined on $\mathbf{R}$, and that the conditions (2.4) and (2.5) or (2.6) hold with $[-1,1]$ exchanged to $\mathbf{R}$. Then we can enlarge the set Γ_o to the set

$$\Gamma : \left\{(f(s),g(s)) : s \in \mathbf{R}\right\},$$

and G and K can be extended to Γ and $\mathbf{R}$, respectively, by the formula (2.7). Obviously (2.8) holds if we can prove

$$\|G\|^1_{B(\Gamma)} \leq C_o .$$

For every compact interval $I \subset \mathbf{R}$, we define

$$\Gamma(I) = \left\{(f(s),g(s)), \quad s \in I\right\}.$$

We shall base the proof of Lemma 3 on three different upper estimates of $\|G\|^1_{B(\Gamma(I))}$. Using Lemma 2 we shall then obtain an estimate of $\|G\|^1_{B(\Gamma)}$ by means of a suitably chosen covering of Γ by curves $\Gamma(I)$.

In the following we shall use the letter C to denote any finite positive constant, which may depend on ε and φ, but not on h, t, f and g, and not on I.

1^o. The first estimate is obtained by considering extensions of G on $\Gamma(I)$ such that they only depend on the first variable. Since the norm in $B(\mathbf{R}^2)$ of such a function equals the norm in $B(\mathbf{R})$ of the corresponding function of the first variable, we have by Lemma 1 an upper estimate

$$C(\|H\|_{L^\infty(f(I))} + (|f(I)|\,\|H\|_{L^\infty(f(I))}\,\|H'\|_{L^\infty f(I))})^{1/2}),$$

where $H \circ f = K$, $s \in \mathbf{R}$. The inequalities (2.4) imply that we obtain the estimate

$$\|G\|^1_{B(\Gamma(I))} \leq C(\|K\|_{L^\infty(I)} + (|I|\,\|K\|_{L^\infty(I)}\,\|K'\|_{L^\infty(I)})^{1/2}). \tag{3.1}$$

By (2.7) and the assumptions on φ we have

$$\|K\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \leq 1. \tag{3.2}$$

Furthermore, using a change of variable, we obtain from (2.7)

$$K'(s) = h^{-1}\int_0^1 \exp\{it\, g(s-\sigma h)\}\varphi'(\sigma)\,d\sigma, \qquad s \in \mathbf{R},$$

and hence

$$\|K'\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \leq C\,h^{-1}.$$

Thus (3.1) gives the estimate

$$\|G\|^1_{B(\Gamma(I))} \leq C(1 + (|I|\,h^{-1})^{1/2}). \tag{3.3}$$

2°. The second and third estimates depend on the fact that

$$\|G\|^1_{B(\Gamma(I))} = \|G\chi\|^1_{B(\Gamma(I))},$$

for every bounded continuous character χ on $\mathbf{R}^2$. Taking

$$\chi(x,y) = \exp\{-ity\}, \qquad (x,y) \in \mathbf{R}^2,$$

we can thus as well estimate the norm of extensions to $B(\mathbf{R}^2) \cap C^1(\mathbf{R}^2)$ of the function on $\Gamma(I)$ which for the point corresponding to the parameter value s takes the value

$$G(f(s),g(s))\exp\{-it\, g(s)\} = L(s) = \int_0^1 \exp\{it(g(s-\sigma h) - g(s))\}\,\varphi(\sigma)\,d\sigma. \tag{3.4}$$

By the same arguments as those leading to (3.1) we now get

$$(3.5)\qquad \|G\|^1_{B(\Gamma(I))} \le C(\|L\|_{L^\infty(I)} + (|I|\,\|L\|_{L^\infty(I)}\|L'\|_{L^\infty(I)})^{1/2}).$$

Differentiating (3.4) we obtain

$$(3.6)\qquad L'(s) = ith \int_0^1 \frac{g'(s-\sigma h) - g'(s)}{h} \exp\{it(g(s-\sigma h) - g(s))\}\, \varphi(\sigma)\, d\sigma ,$$

which gives

$$|L'(s)| \le |th|\,\|g''\|_{L^\infty(s+[-h,0])}.$$

Since (3.2) and (3.4) give

$$(3.7)\qquad \|L\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \le 1,$$

we obtain from (3.5)

$$(3.8)\qquad \|G\|^1_{B(\Gamma(I))} \le C(1 + (|I|\,|th|\,\|g''\|_{L^\infty(I+[-h,0])})^{1/2}).$$

3^o. In the third estimate we have to assume that g' does not vanish in $I+[-h,0]$.

Then, for $s\in I$, we can integrate (3.4) partially, obtaining

$$L(s) = \frac{1}{ith}\int_0^1 \left(\frac{\varphi'(\sigma)}{g'(s-\sigma h)} + \frac{h\varphi(\sigma)g''(s-\sigma h)}{(g'(s-\sigma h))^2}\right) \exp\{it(g(s-\sigma h) - g(s))\}d\sigma ,$$

which gives

$$(3.9)\qquad \|L\|_{L^\infty(I)} \le C\,|th|^{-1}\left\|\,\left|\frac{1}{g'}\right| + \left|\frac{hg''}{g'^2}\right|\,\right\|_{L^\infty(I+[-h,0])}.$$

In the same way we change (3.6), obtaining

$$L'(s) = \int_0^1 \left(\varphi'(\sigma)\frac{g'(s-\sigma h) - g'(s)}{hg'(s-\sigma h)} - \frac{\varphi(\sigma)\, g'(s)g''(s-\sigma h)}{(g'(s-\sigma h))^2}\right).$$

$$.\ \exp\{it(g(s-\sigma h) - g(s))\}d\sigma ,$$

which gives

$$(3.10)\qquad \|L'\|_{L^\infty(I)} \le C \sup_{u,v\in I+[-h,0]} \left(\left|\frac{g''(u)}{g'(v)}\right| + \left|\frac{g'(u)g''(v)}{(g'(v))^2}\right|\right).$$

(3.5) and (3.7) give

$$\|G\|^1_{B(\Gamma(I))} \le C\|L\|^{1/2}_{L^\infty(I)}\left(1 + \left(|I|\,\|L'\|_{L^\infty(I)}\right)^{1/2}\right).$$

Assuming that

$$(3.11)\qquad \|g'\|_{L^\infty(I+[-h,0])}\left\|\frac{1}{g'}\right\|_{L^\infty(I+[-h,0])} \le C,$$

for some constant C, we obtain thus from (3.9) and (3.10)

$$(3.12)\qquad \|G\|^1_{B(\Gamma(I))} \le C\left[|th|^{-1}\left\|\frac{1}{g'}\right\|_{L^\infty(I+[-h,0])}\left(1 + \left\|\frac{hg''}{g'}\right\|_{L^\infty(I+[-h,0])}\right)\right]^{1/2}\cdot$$

$$\cdot\left[1 + \left(|I|\,\left\|\frac{g''}{g'}\right\|_{L^\infty(I+[-h,0])}\right)^{1/2}\right].$$

This is our third estimate. We stress that we have to assume that (3.11) holds, for some constant C.

We are now prepared to prove the lemma. We shall first consider the case when (2.5) holds. In this case, the method in [3] can be applied, but we prefer to use an approach analogous to the one needed in the second case.

By (2.5), which we assume true for $s \in \mathbf{R}$, g' has a zero a. The representation

$$g'(s) = (s-a)\int_0^1 g''(a+(s-a)t)\,dt, \qquad s \in \mathbf{R},$$

shows that

$$(3.13)\qquad C|s-a| \le |g'(s)| \le C^{-1}|s-a|, \quad s \in \mathbf{R},$$

for some C.

We introduce, for a number $d > 0$ to be fixed later, the set of points $a \pm d\,2^n$, $n \in \mathbf{N}$, on $\mathbf{R}$. This set satisfies the conditions of Lemma 2 with $\delta = 1/2$. Thus, for some absolute constant C,

$$\|G\|^1_{B(\Gamma)} \le C\sum_{-\infty}^{\infty}\|G\|^1_{B(\Gamma(I_n))},$$

where

$$I_0 = [a - 2d\ ,\ a+2d]\ ,$$

$$I_n = [a+2^{2n-2}d\ ,\ a+2^{2n+1}d]\ , \qquad n \in \mathbb{Z}_+\ ,$$

$$I_{-n} = 2a - I_n, \qquad n \in \mathbb{Z}_+ .$$

Thus it suffices to prove that d can be chosen so that for some C

(3.14) $$\sum_{-\infty}^{\infty} \|G\|^1_{B(\Gamma(I_n))} < C.$$

For the term with index 0 we use the estimates 1^o and 2^o. (3.3) gives

(3.15) $$\|G\|^1_{B(\Gamma(I_0))} < C(1 + (dh^{-1})^{1/2}),$$

and (3.8) and (2.5) give

(3.16) $$\|G\|^1_{B(\Gamma(I_0))} < C(1 + (d\,|th|)^{1/2}).$$

Hence

(3.17) $$\|G\|^1_{B(\Gamma(I_0))} < C\ ,$$

if we choose, say,

$$d = \mathrm{Max}\ (3h\ ,\ \frac{1}{|th|}).$$

For the remaining intervals this choice guarantees, by (3.13), that (3.11) holds, for some C, independent of n, for all the intervals I_n, $n \neq 0$. Thus we can use (3.12). Observing that

$$|I_n|\,.\,\left\|\frac{g''}{g'}\right\|_{L^\infty(I_n + [-h,0])} < C,$$

we obtain

(3.18) $$\|G\|^1_{B(\Gamma(I_n))} < (\,|th|\,.d\ 2^{2n})^{-1/2} < C\ 2^{-n}\ ,$$

for $n \neq 0$, and then (3.14) follows from (3.17) and (3.18).

Next we consider the case when (2.6) holds and g' has at least one zero on $\mathbb{R}$.

Since g''' has a constant sign, we have exactly two zeros which may coincide. We denote them a and b, where $a \le b$. The formulas

$$g'(s) = (s-a)(s-b) \int_0^1 \int_0^1 g'''(a + (b-a)t + (s-b)tu)\, t\, dt\, du$$

and

$$g''(s) = (s-a)^{-1} g'(s) + (s-a) \int_0^1 g'''(a + (s-a)t)\, t\, dt$$

show that

$$C\,|(s-a)(s-b)| \le |g'(s)| \le C^{-1}\,|(s-a)(s-b)| \tag{3.19}$$

and

$$|g''(s)| \le C^{-1}(|s-a| + |s-b|). \tag{3.20}$$

Also in this case we introduce points on $\mathbb{R}$, starting with a basic length d. When $d < b-a$ it is convenient to assume that

$$d = \frac{(b-a)}{12} \cdot 2^{-2M}, \tag{3.21}$$

for some $M \in \mathbb{N}$.

In the case when $d \ge b-a$ we take the set of points of the form $b + d\,2^n$ or $a - d\,2^n$, $n \in \mathbb{N}$. In the case when $d < b-a$ we add to this set all points $a + d\,2^n$ and $b - d\,2^n$, where $n \in \mathbb{N}$, $n \le 2M+2$, M defined by (3.21). In both cases we obtain sets which fulfil the assumptions of Lemma 2 with $\delta = 1/4$. Thus it suffices to prove that, for some C,

$$\sum_{I \subset Q} \|G\|^1_{B(\Gamma(I))} < C, \tag{3.22}$$

where Q <u>in case $d > b-a$</u> is the family of intervals $[a-2d, b+2d]$, $[b + 2^{2n-2}d, b + 2^{2n+1}d]$, $[a - 2^{2n+1}d, a - 2^{2n-2}d]$, $n \in \mathbb{Z}_+$, <u>in case $d < b-a$</u> is the family of intervals $[b-2d, b+2d]$, $[b + 2^{2n-2}d, b + 2^{2n+1}d]$, $n \in \mathbb{Z}_+$,

$\left[b-2^{2n+1}d\ ,\ b-2^{2n-2}d\right]$, $\quad 1 \le n \le M+1$, and their images when reflecting in $s = \frac{b+a}{2}$.

When estimating, we have now to single out the intervals $\left[b-2d\ ,\ b+2d\right]$ and $\left[a-2d\ ,\ a+2d\right]$ in the second case. Exactly as before we can apply (3.3) which gives, with I as any of these intervals,

$$\|G\|^1_{B(\Gamma(I))} \le C(1 + (dh^{-1})^{1/2}) \tag{3.23}$$

(cf. 3.15) and (3.8) which, using (3.20), gives

$$\|G\|^1_{B(\Gamma(I))} \le C(1 + (|th|\,d(d+h+(b-a)))^{1/2}) \tag{3.24}$$

(cf. 3.16).

Choosing $d_0 = \mathrm{Max}(3h\ ,\ \delta)$, where $\delta > 0$ satisfies

$$\delta(\delta + (b-a)) = |th|^{-1},$$

we can easily find a constant C such that the construction, including the condition (3.21), can be performed for some d with

$$C\, d_0 < d < C^{-1}\, d_0.$$

By (3.23) and (3.24) we find that the contribution to (3.22) of the considered terms is then dominated by some constant C.

For the remaining intervals (3.11) is evident by (3.19). Thus (3.12) can be applied, and using (3.19) and (3.20) we obtain for those intervals which are situated at distance $2^{2n-2}d$ from the nearest of the points a and b.

$$\|G\|^1_{B(\Gamma(I))} \le C\left[|th^{-1}|\frac{1}{2^{2n}d(b-a+2^{2n}d)}\left(1+\frac{h}{d\,2^{2n}}\right)\right]^{1/2}$$

$$\cdot\,(1 + (d2^{2n}\cdot\frac{1}{d\,2^{2n}})^{1/2}) \le C\,2^{-n}.$$

All these estimates prove (3.22).

It remains to discuss the case when (2.6) holds but g' does not vanish on $\mathbf{R}$. We assume that $|g'|$ attains its minimum for $s = a$, and define the real-valued function g_0 such that the relation

$$g_0'(s) = g'(s) - g'(a),$$

holds for $s \in \mathbf{R}$. Then g_o is a function for which the previous discussion is applicable. Following the estimating prodedure for g_o but inserting g instead, we find that the obtained estimates hold as well. Hence the lemma holds in this case, too.

4. Proof of the theorem. Let γ be an injective C^3 mapping from $[a,b]$ to $\mathbf{R}^3$. We put $\gamma(s) = (x(s),y(s),z(s))$, $s \in [a,b]$ and assume that

$$(4.1)\qquad \begin{vmatrix} x'(s) & x''(s) & s'''(s) \\ y'(s) & y''(s) & y'''(s) \\ z'(s) & s''(s) & z'''(s) \end{vmatrix} \neq 0 ,$$

$s \in [a,b]$. We have to prove that $\Gamma = \{(x(s),y(s),z(s)) : s \in [a,b]\}$ is a set of sequentia spectral synthesis.

We regard $\mathbf{R}^3$ as an euclidean space with the xyz-coordinates as orthonormal coordinates. Take any $s_o \in [a,b]$, and introduce new orthonormal coordinates ξ, η, ζ such that the ξ-axis has the direction of the tangent vector $(x'(s_o), y'(s_o), z'(s_o))$ at the point $(x(s_o),y(s_o),z(s_o))$. Then the curve gets the equation

$$(4.2)\qquad \begin{cases} \xi = \xi(s) = a_1x(s) + a_2y(s) + a_3z(s) + a_o \\ \eta = \eta(s) = b_1x(s) + b_2y(s) + b_3z(s) + b_o \\ \zeta = \zeta(s) = c_1x(s) + c_2y(s) + c_3z(s) + c_o , \end{cases}$$

where (a_1,a_2,a_3), (b_1,b_2,b_3) and (c_1,c_2,c_3) are orthogonal unit vectors. It follows from the construction and (4.1) that $\eta'(s_o) = 0$ and that $|\xi'(s_o)|$ and $|\eta''(s_o)| + |\eta'''(s_o)|$ have a positive lower bound which does not depend on the choice of the η and ζ coordinate axis. Due to the assumed continuity we can conclude the following :

There is an $\varepsilon > 0$ such that for every orthonormal change of coordinates into coordinates such that the ξ-axis forms an angle $< \varepsilon$ with at least one of the vectors

$$(x'(s) , y'(s) , z'(s)), \quad s \in [s_o-\varepsilon , s_o+\varepsilon],$$

the corresponding functions, defined by (4.2), satisfy

$$\varepsilon < |\xi'(s)| < \varepsilon^{-1}, \qquad s \in [s_o-\varepsilon , s_o+\varepsilon] \tag{4.3}$$

and either

$$\varepsilon < |\eta''(s)| < \varepsilon^{-1}, \qquad s \in [s_o-\varepsilon , s_o+\varepsilon] \tag{4.4}$$

or

$$\varepsilon < |\eta'''(s)| < \varepsilon^{-1}, \qquad s \in [s_o-\varepsilon , s_o+\varepsilon]. \tag{4.5}$$

Furthermore, for every c, $a < c < b$, we can obviously find intervals $[s_n-\varepsilon_n , s_n+\varepsilon_n]$, $n = 1, \dots, N$, of $[a,b]$ such that

$$]c,b[\subset \bigcup_1^N]s_n , \delta_n+\varepsilon_n[,$$

and such that (4.1), (4.2) and (4.3) hold if s_o and ε are changed to s_n and ε_n, respectively.

We have to prove that a pseudomeasure on Γ lies in the sequential weak* closure of $M(\Gamma)$. Any pseudomeasure on Γ can be written as the sum of a pseudomeasure with support in $\Gamma_{[a,d]}$ and a pseudomeasure with support in $\Gamma_{[c,b]}$, if $a < c < d < b$. Here

$$\Gamma_I = \{(x(s)\ ,\ y(s)\ ,\ z(s)) : s \in I\}$$

for every $I \subset [a,b]$. Of course it is enough to discuss a pseudomeasure with support in some $\Gamma[c,d]$, $a < c < b$. By a further partitioning we find that it is enough to study pseudomeasures with support in one of the sets $\Gamma[s_n, s_n+\varepsilon_n]$, as defined above. Changing affinely the parameter, if necessary, we can describe

$$\Gamma^o = \Gamma[s_n-\varepsilon_n\ ,\ s_n+\varepsilon_n]$$

as the set of values of a C^3 function with values $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$, $s \in [-1,1]$, where (4.1) holds for $s \in [-1,1]$. Then, for some $\varepsilon > 0$, whenever new coordinates (ξ, η, ζ) are introduced by an orthonormal transformation, such that the ξ-axis forms an angle $< \varepsilon$ with at least some of the vectors $(x'(s), y'(s), z'(s))$, $s \in [-1,1]$, then the corresponding functions (4.2) satisfy (4.3) and either (4.4) <u>or</u> (4.5). We have reduced the problem to prove sequential sepctral synthesis for a pseudomeasure μ, supported by $\Gamma^o[0,1]$.

We refer to [3] and [4, Theorem 2.9] for the details of the following discussion. The paper [2] concerns just $\mathbf{R}^2$, but many of the arguments hold in any $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$.

μ can be considered as a bounded linear functional on $C^1(\mathbf{R}^3)$, whose value when applied to a function F does only depend on the restriction of F to $\Gamma^o[0,1]$. Given φ and h as in Lemma 3, we define on Γ^o a measure μ_h with a smooth density function with respect to the parameter s. For the parameter value s_o the density function is defined as $\langle H_{s_o}, \mu\rangle$, where H_{s_o} is any function in $C^1(R^3)$, such that

$$H_{s_o}(x(s), y(s)) = \frac{1}{h}\,\varphi\left(\frac{s_o-s}{h}\right), \qquad s \in [0,1].$$

We shall prove that $\mu_h \to \mu$ weakly *, as $h \to +0$. The only difficult part is to prove that there exists a constant C such that for every bounded continuous character χ on $\mathbb{R}^3$, and independently of h, the function on $\Gamma^o_{[0,1]}$ with value

$$\int_{\mathbb{R}} \chi(x(s-\sigma h),\ y(s-\sigma h),\ z(s-\sigma h))\varphi(\sigma)\, d\sigma ,$$

at $(x(s), y(s), z(s))$, $s \in [0,1]$, can be extended to a function in $B(\mathbb{R}^3) \cap C^1(\mathbb{R}^3)$ with its norm in $B(\mathbb{R}^3)$ bounded above by C.

To prove this, let us first consider a character χ which is constant in a plane which forms an angle $< \varepsilon$ with some tangent of Γ^o. Then we change coordinates orthonormally to (ξ, η, ζ), taking the new ξ and ζ coordinate axis parallell to the plane with the ξ-axis forming an angle $< \varepsilon$ with some tangent to Γ^o. Due to the properties (4.3), (4.4), (4.5) of the corresponding representation (4.2) it is natural to restrict to extensions which are independent of ζ, and use Lemma 3 which gives immediately the desired uniform bound.

It remains to discuss the case when the angle between the tangents of Γ^o and the planes where χ is constant are all $> \varepsilon$. Then we introduce a new orthonormal system (ξ, η, ζ), with the η-axis normal to these planes. Then, for some $C > 0$, independent of χ, $\eta \in C^3[-1,1]$ and

(4.6) $$C < |\eta'(s)| < C^{-1}, \qquad s \in [-1,1]$$

(4.7) $$|\eta''(s)| < C^{-1}, \qquad s \in [-1,1].$$

The function to be extended takes the value

$$\int \exp\{it\, \eta(s-\sigma h)\}\, \varphi(\sigma)\, d\sigma$$

at $(\xi(s), \eta(s), \zeta(s))$, $s \in [0,1]$. As in the deduction of the estimates 2^o et 3^o in the proof of Lemma 3 we multiply by the conjugate of χ, and are left with the problem of estimating $\|F\|^1_{B(\Gamma^o_{[0,1]})}$, where F is defined on $\Gamma^o_{[0,1]}$ by

$$(4.8) \qquad F(\xi(s),\eta(s),\zeta(s)) = L(s) = \int_0^1 \exp\{it(\eta(s-\sigma h) - \eta(s))\}\, \varphi(\sigma)\, d\sigma ,$$

if χ takes the values $\exp(it\eta)$ at (ξ,η,ζ). We consider extensions of F which do only depend on the variable η. Due to (4.6) and Lemma 1, it suffices to find a constant C, such that

$$(4.9) \qquad \|L\|_{L^\infty[0,1]} + (\|L\|_{L^\infty[0,1]} \|L'\|_{L^\infty[0,1]})^{1/2} \leq C.$$

A partial integration of (4.8) (cf. (3.9)) shows by (4.6) and (4.7) that

$$\|L\|_{L^\infty[0,1]} \leq \frac{C}{|th|},$$

for some constant C, and obviously

$$\|L\|_{L^\infty[0,1]} \leq 1.$$

Differentiation of (4.8) (cf. (3.6)) shows by (4.6) and (4.7) that

$$\|L'\|_{L^\infty[0,1]} \leq C\,|th|,$$

for some constant C. From these relations we obtain (4.8), and the theorem is proved.

References

[1] BEURLING, A. Sur les intégrales de Fourier absolument convergentes et leur application à une transformation fonctionnelle. IX Congrès des mathématiciens scandinaves, Helsingfors 1938, 345-366.

[2] CARLSON, F. Une inégalité. Ark. Mat. Astr. Fys. 25, B1 (1934).

[3] DOMAR, Y. Sur la synthèse harmonique des courbes de R^2. C. R. Acad. Sc. Paris 270 (1970), 875-878.

[4] DOMAR, Y. On the spectral synthesis problem for $(n-1)$-dimensional subsets of R^n, $n \geq 2$. Ark. mat. 9 (1971), 23-37.

[5] GUSTAVSSON, R. On the spectral synthesis problem for curves in R^3. Uppsala Univ., Dept. Math., report 1974:6.

SOLUTIONS INDEFINIMENT DERIVABLES ET SOLUTIONS PRESQUE-PERIODIQUES D'UNE EQUATION DE CONVOLUTION

par F. Gramain

1. RESULTATS ET PREMIERE REDUCTION.

THEOREME. *Soit* s *un entier* ≥ 2, *et* $A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ *un ensemble de nombres algébriques réels engendrant un* $\mathbf{Z}$*-module libre de rang* 2. *Soit* $\mu = \sum_{k=1}^{s} a_k \delta_{\alpha_k}$ *la mesure complexe de support* A *chargeant le point* α_k *de la masse* a_k *algébrique sur* $\mathbf{Q}$. *Si les zéros de* $\hat{\mu}(z) = \sum_{k=1}^{s} a_k \exp(-2i\pi\alpha_k z)$ *sont tous réels et simples, alors toute solution* $f \in \mathscr{C}^{\infty}(\mathbf{R})$ *de l'équation* $f * \mu(x) = \sum_{k=1}^{s} a_k f(x - \alpha_k) \equiv 0$ *est presque-périodique (au sens de Bohr).*

La condition sur les zéros de $\hat{\mu}$ est nécessaire, car si elle n'est pas vérifiée, il existe une solution de l'équation de convolution $\mu * f = 0$ qui est une exponentielle-polynôme non bornée. Une telle solution est indéfiniment dérivable mais n'est pas presque-périodique. D'autre part, il est nécessaire d'ajouter une hypothèse de type arithmétique.

Pour démontrer ce théorème, nous utiliserons le résultat suivant dû à Yves Meyer ([2]).

LEMME 1. *Soit* μ *une mesure complexe portée par une partie finie de* $\mathbf{R}$. *Si les zéros* $z \in \mathbf{C}$ *de* $\hat{\mu}(z)$ *sont tous réels, alors il existe un entier* $m \geq 0$ *tel que toute solution continue* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ *de* $f * \mu = 0$ *soit* $O(|x|^m)$ *à l'infini.*

Ce lemme permet de se ramener à montrer que l'ensemble des zéros de $\hat{\mu}$ est un ensemble à étranglement lent.

DEFINITION. Une partie Λ de $\mathbb{R}$ est dite à étranglement lent si et seulement s'il existe deux constantes positives C et N telles que λ et $\lambda' \in \Lambda$, $\lambda \neq \lambda'$ et $\lambda \neq 0$ entraîne $|\lambda - \lambda'| \geq \frac{C}{|\lambda|^N}$.

On a alors :

LEMME 2. Soit μ une mesure complexe portée par une partie finie de $\mathbb{R}$. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes.

(i) Les zéros $z \in \mathbb{C}$ et $\hat{\mu}(z)$ sont tous réels et simples, et leur ensemble Λ est à étranglement lent.

(ii) Toute solution $f \in \mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ de $f * \mu = 0$ est presque-périodique.

Dans la démonstration du lemme 2, on notera C toutes les constantes absolues positives, quand il n'y aura pas de confusion possible.

Vérifions que (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit $\psi \in \mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ une fonction positive de support contenu dans $[-1,1]$ telle que $\psi(0) = 1$. On a $f * \mu = 0$ donc le spectre de f est contenu dans l'ensemble Λ des zéros de $\hat{\mu}$. Soit $\lambda \neq 0$ un point du spectre de f et $h \in \left]0,1\right]$ tel que $[\lambda - h, \lambda + h] \cap \Lambda = \{\lambda\}$. Posons $\varphi(x) = \psi(\frac{x-\lambda}{h})$. Alors $\hat{f}(\lambda) = \langle \hat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle$, c'est-à-dire $\hat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(x) f(x) dx =$
$\int_{\mathbb{R}} h \exp(-2i\pi \lambda hx) \hat{\psi}(hx) f(x) dx$.

Si $h = 1$, cette intégrale est, en module, majorée par une constante car f est à croissance lente et $\hat{\psi}$ à décroissance rapide. Si $h < 1$, on utilise la croissance de f donnée par le lemme 1, soit $|f(x)| \leq C(1+|x|)^m$ et la décroissance de $\hat{\psi}$, par exemple $|\hat{\psi}(hx)| \leq \dfrac{C}{h^{m+2}(1+|x|)^{m+2}}$ pour obtenir $|\hat{f}(\lambda)| \leq \dfrac{C}{h^{m+1}}$.

La condition d'étranglement lent permet de choisir $h \geq \dfrac{C}{|\lambda|^N}$. On a donc, dans tous les cas $|\hat{f}(\lambda)| \leq C(1+|\lambda|)^K$ où $K > 0$ est indépendant de f.

Ordonnons Λ en une suite strictement croissante λ_n, $n \in \mathbf{Z}$, telle que $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_{-1} < 0$. On a alors $|\lambda_n| \geq C|n|$. Les coefficients de Fourier de toute solution continue f de $f * \mu = 0$ vérifient $|\hat{f}(\lambda_n)| \leq C(1+|\lambda_n|)^K$. Supposons que f est de classe $\mathscr{C}^{K+2}$ et appliquons l'inégalité précédente à g, dérivée d'ordre $K+2$ de f, qui vérifie la même équation de convolution. On obtient $|\hat{f}(\lambda_n)| \leq C(1+|\lambda_n|)^{-2}$ ce qui assure la convergence absolue de la série de Fourier de f.

La preuve de (ii) $\Rightarrow$ (i) est immédiate. Si Λ n'est pas à étranglement lent, il existe deux suites λ_j et λ'_j tendant vers l'infini, de points de Λ tels que $|\lambda_j - \lambda'_j| \leq \dfrac{2^{-j}}{|\lambda_j|^j}$. Soit alors $f(x) = \sum_{j\geq 0} (e^{i\lambda_j x} - e^{i\lambda'_j x})$. Toutes les séries dérivées convergent uniformément sur tout compact : la fonction f est une solution $\mathscr{C}^\infty$ de $f * \mu = 0$, mais elle n'est pas presque-périodique, et le lemme 2 est démontré.

La nécessité d'hypothèses de type arithmétique est alors justifiée par le résultat suivant : Si $\mu = (\delta_1 - \delta_0) * (\delta_\alpha - \delta_0)$ avec $\alpha \notin \mathbf{Q}$, Λ est à étranglement lent si et seulement si α n'est pas un nombre de Liouville.

Venons en à la preuve du théorème. Une homothétie sur la variable permet de se ramener au cas où le $\mathbf{Z}$-module engendré par Λ est $\mathbf{Z} \oplus \omega\mathbf{Z}$ (avec ω algébrique réel irrationnel) et il suffit de prouver le résultat suivant.

PROPOSITION. Soit s un entier ≥ 2, $\{\alpha_1, \dots \alpha_s\}$ un ensemble de nombres algébriques réels engendrant le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z} \oplus \omega\mathbb{Z}$ libre de rang 2. Soit $a_1, \dots, a_s$ des nombres algébriques non nuls. Si les zéros de $\varphi(z) = \sum_{k=1}^{s} a_k \exp(-2i\pi\alpha_k z)$ sont réels et simples, alors ils forment un ensemble à étranglement lent.

Toute la suite est consacrée à la démonstration de cette proposition. Nous utiliserons les deux lemmes suivants.

LEMME 3. Soit $P \in \mathbb{C}[X,Y]$ un polynôme. L'intersection de la variété de $\mathbb{C}^2$ définie par $P(X,Y) = 0$ avec le bord distingué $\partial D = \{X \in \mathbb{C}\ ;\ |X| = 1\} \times \{Y \in \mathbb{C};\ |Y| = 1\}$ du bidisque unité D, soit est finie, soit contient une courbe de ∂D.

Démonstration. Posons $x = X_1 + iX_2$ et $Y = Y_1 + iY_2$. En séparant le réel de l'imaginaire on se ramène à étudier les solutions réelles d'un système polynômial réel du type suivant :

$$\begin{cases} Q(X_1, X_2, Y_1, Y_2) = R(X_1, X_2, Y_1, Y_2) = 0 \\ X_1^2 + X_2^2 = Y_1^2 + Y_2^2 = 1. \end{cases}$$

On peut paramètrer le cercle unité $\{X_1^2 + X_2^2 = 1\}$ (resp. $\{Y_1^2 + Y_2^2 = 1\}$) privé du point $(-1,0)$ par

$$X_1 = \frac{1-U^2}{1+U^2}, \quad X_2 = \frac{2U}{1+U^2} \quad \left(\text{resp. } Y_1 = \frac{1-V^2}{1+V^2}, \quad Y_2 = \frac{2V}{1+V^2}\right).$$

Or $X = -1$ joint à $P(X,Y) = 0$ et $|Y| = 1$ fournit soit un nombre fini de solutions en Y, soit une courbe de ∂D. On peut donc se ramener à un nouveau système polynômial $Q_1(U,V) = R_1(U,V) = 0$. Si ce système a une infinité de solutions, elles forment une variété algébrique qui correspond à une partie de ∂D contenant une courbe.

Notons $\overline{\mathbb{Q}}$ le corps des nombres algébriques sur $\mathbb{Q}$, et $\mathbb{A} = \overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$ le corps des nombres algébriques réels. On a le résultat suivant

LEMME 4. <u>Soit</u> $P \in \overline{\mathbb{Q}}[X,Y]$ <u>un polynôme tel que le système</u>

$\begin{cases} P(X,Y) = 0 \\ |X| = |Y| = 1 \end{cases}$ <u>ait un nombre fini de solutions</u> $(X,Y) \in \mathbb{C}^2$.

<u>Alors ces solutions sont algébriques.</u> (X et $Y \in \overline{\mathbb{Q}}$).

Démonstration. Comme dans la démonstration précédente, séparons le réel de l'imaginaire. On obtient un système polynômial à coefficients dans $\mathbb{A}$ du type

$$\begin{cases} P(X_1,X_2,Y_1,Y_2) = Q(X_1,X_2,Y_1,Y_2) = 0 \\ X_1^2 + X_2^2 = Y_1^2 + Y_2^2 = 1 \end{cases}$$

et n'ayant qu'un nombre fini de solutions réelles.

Premier cas : $X = -1$. On est ramené à un système $P(Y_1,Y_2) = Q(Y_1,Y_2) = Y_1^2 + Y_2^2 - 1 = 0$ n'ayant qu'un nombre fini de solutions réelles. La valeur $Y = -1$ fournit éventuellement une solution algébrique. En posant $Y_1 = \frac{1-V^2}{1+V^2}$ et $Y_2 = \frac{2V}{1+V^2}$ on se ramène à un système $P(V) = Q(V) = 0$ ayant un nombre fini de solutions réelles. Les coefficients des polynômes sont dans $\mathbb{A}$ donc les solutions en V sont algébriques, et il en est de même de Y.

Deuxième cas : $x \neq -1$ et $Y \neq -1$. On paramètre X et Y comme dans la preuve du lemme 3 et on obtient le système polynômial $P(U,V) = Q(U,V) = 0$ à coefficients dans $\mathbb{A}$ et n'ayant qu'un nombre fini de solutions réelles. En décomposant P et Q

algébrique qui correspond à une partie de ∂D contenant une courbe.

Notons $\overline{\mathbb{Q}}$ le corps des nombres algébriques sur $\mathbb{Q}$, et $\mathbb{A} = \overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$ le corps des nombres algébriques réels. On a le résultat suivant

LEMME 4. Soit $P \in \overline{\mathbb{Q}}[X,Y]$ un polynôme tel que le système $\begin{cases} P(X,Y) = 0 \\ |X| = |Y| = 1 \end{cases}$ ait un nombre fini de solutions $(X,Y) \in \mathbb{C}^2$. Alors ces solutions sont algébriques. (X et $Y \in \overline{\mathbb{Q}}$).

Démonstration. Comme dans la démonstration précédente, séparons le réel de l'imaginaire. On obtient un système polynômial à coefficients dans $\mathbb{A}$ du type

$$\begin{cases} P(X_1,X_2,Y_1,Y_2) = Q(X_1,X_2,Y_1,Y_2) = 0 \\ X_1^2 + X_2^2 = Y_1^2 + Y_2^2 = 1 \end{cases}$$

et n'ayant qu'un nombre fini de solutions réelles.

Premier cas : $X = -1$. On est ramené à un système $P(Y_1,Y_2) = Q(Y_1,Y_2) = Y_1^2 + Y_2^2 - 1 = 0$ n'ayant qu'un nombre fini de solutions réelles. La valeur $Y = -1$ fournit éventuellement une solution algébrique. En posant $Y_1 = \frac{1-V^2}{1+V^2}$ et $Y_2 = \frac{2V}{1+V^2}$ on se ramène à un système $P(V) = Q(V) = 0$ ayant un nombre fini de solutions réelles. Les coefficients des polynômes sont dans $\mathbb{A}$ donc les solutions en V sont algébriques, et il en est de même de Y.

Deuxième cas : $x \neq -1$ et $Y \neq -1$. On paramètre X et Y comme dans la preuve du lemme 3 et on obtient le système polynômial $P(U,V) = Q(U,V) = 0$ à coefficients dans $\mathbb{A}$ et n'ayant qu'un nombre fini de solutions réelles. En décomposant P et Q

en produits de polynômes irréductibles, on se ramène à un nombre fini de systèmes du même type avec P et Q irréductibles. Deux cas se présentent :

a) $P \neq Q$ ou, plus précisément, $(P,Q) = 1$.

Soit (u_o,v_o) une solution avec u_o transcendant. Alors v_o est algébrique sur $\mathbb{A}(u_o)$, donc $P(u_o,V)$ et $Q(u_o,V)$ sont des multiples du polynôme minimal de v_o. Comme u_o est transcendant, $P(U,V)$ et $Q(U,V)$ auraient un diviseur commun non trivial, ce qui est exclu par l'hypothèse. Les solutions sont donc algébriques.

b) $P = Q$.

Soit (u_o,v_o) un zéro de P. S'il existe v_1 et v_2 tels que $P(u_o,v_1) < 0 < P(u_o,v_2)$, par continuité, pour u voisin de u_o, on a $P(u,v_1) < 0 < P(u,v_2)$ donc une solution (u,v) ; cela est exclu par l'hypothèse de finitude du nombre de solutions.

Donc $P(u_o,v)$ a un signe constant et, par suite, $P(u_o,v_o) = P'_V(u_o,v_o) = 0$. Si u_o est algébrique, il en est de même de v_o (finitude du nombre de solutions). Si u_o est transcendant, v_o est algébrique sur $\mathbb{A}(u_o)$ et $P(u_o,V)$ est son polynôme minimal car $P(U,V)$ est irréductible. Or $P'_V(u_o,v_o) = 0$ donc $P(u_o,V)$ divise $P'_V(u_o,V)$, ce qui est absurde pour des raisons de degré. Cela achève la démonstration du lemme(1).

2. INTERPRETATION GEOMETRIQUE DU PROBLEME.

On peut supposer $\omega > 0$. Posons $\alpha_k = m_k + n_k\omega$ avec m_k et $n_k \in \mathbb{Z}$. On a

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{s} a_k \exp(-2i\pi m_k t) \exp(-2i\pi n_k \omega t).$$

(1) Ce résultat est aussi une conséquence d'un théorème récent de Narasimhan [Murthy et Swann Vector bundles over affine surfaces (à paraître)].

Considérons $\Phi(x,y) = \sum_{k=1}^{s} a_k \exp(-2i\pi m_k x) \exp(-2i\pi n_k y)$. Les zéros de φ étant réels, ils sont fournis par le système

$$\begin{cases} \Phi(x,y) = 0 & (1) \\ y = \omega x & (2) \end{cases} \quad \text{où} \quad (x,y) \in \mathbf{R}/\mathbf{Z} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z} = \mathbf{T}^2 .$$

L'équation (1) représente une courbe analytique Γ dans $\mathbf{T}^2$ et les zéros de φ sont obtenus à partir de l'intersection de Γ avec la droite Δ d'équation (2) du tore $\mathbf{T}^2$ (ω est irrationnel, il s'agit donc de l'enroulement dense d'une droite réelle sur $\mathbf{T}^2$). Le fait que les zéros de φ sont simples se traduit de la manière suivante : la droite Δ ne coupe pas Γ en un point singulier (multiple) et ne lui est pas tangente.

Dans tout ce qui suit, nous appellerons "points particuliers" les points singuliers de Γ et les points de Γ où la tangente a pour pente ω. D'après le lemme 3, les points particuliers de Γ sont en nombre fini. En effet, ils sont définis par le système

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} \Phi(x,y) = 0 \\ \Phi'_x(x,y) + \omega\, \Phi'_y(x,y) = 0 \end{cases} \qquad (x,y) \in \mathbf{T}^2$$

ou, en posant $X = \exp(-2i\pi x)$ et $Y = \exp(-2i\pi y)$

$$(\mathrm{II}) \qquad \begin{cases} \sum_{k=1}^{s} a_k X^{m_k} Y^{n_k} = 0 \\ \sum_{k=1}^{s} a_k (m_k + n_k \omega) X^{m_k} Y^{n_k} = 0 \end{cases} \qquad \text{avec} \quad (X,Y) \in \mathbf{C}^2, \quad |X| = |Y| = 1 .$$

Ces deux courbes algébriques de $\mathbf{C}^2$ ont un nombre fini de points d'intersection dans ∂D. Supposons que ce n'est pas vrai. Alors elles ont une composante commune et, d'après le lemme 3, son intersection avec ∂D contient une courbe. Cette dernière correspond, sur $\mathbf{T}^2$, à une courbe $\Gamma_1 \subset \Gamma$ qui rencontre la droite dense Δ en une infinité de points, sauf s'il s'agit d'une droite "parallèle" à Δ (enroulement de pente ω ne rencontrant pas Δ). Mais ce cas est exclu : soit $y = \omega x + b$ l'équation de Γ_1. On aurait identiquement $\phi(x, \omega x+b) = 0$. Cela est impossible car, ω étant irrationnel, les fonctions $e^{-2i\pi x}$ et $e^{-2i\pi \omega x}$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}$.

Considérons alors un point d'intersection de Δ avec Γ_1. Les coordonnées de ce point vérifient le système (I). Il s'agit donc d'un point singulier de Γ ou d'un point de Γ où la tangente a pour pente ω donc est la droite Δ. Ces deux possibilités sont exclues par l'hypothèse de simplicité des zéros de φ.

Le nombre des points particuliers de Γ est donc fini. Montrons que les coordonnées (X, Y) des points correspondants de ∂D sont algébriques. D'après ce qui précède, ou bien le système (II) n'a qu'un nombre fini de solutions dans C^2 et un raisonnement analogue à celui de la démonstration du lemme 4, deuxième cas a) montre qu'elles sont algébriques. Ou bien on est dans les hypothèses du lemme 4 avec $P(X, Y) = 0$, l'équation de la courbe de ∂D correspondant à Γ_1 ; et on obtient bien des points algébriques.

Pour prouver que l'ensemble des zéros de φ est à étranglement lent, il suffit de minorer la distance de deux zéros assez voisins de φ. Deux zéros de φ sont voisins s'ils correspondent à l'intersection de Γ avec un segment de Δ voisin d'un point particulier de Γ (par segment de Δ, on désigne une composante connexe de la trace de Δ sur un carré fondamental représentant T^2). D'après la formule de Taylor, la distance de ces deux zéros voisins est comparable à une puissance de la distance du segment de Δ au point particulier, cette distance pouvant être mesurée parallèlement à l'axe des x. Le nombre des points particuliers étant fini, on peut majorer uniformément les puissances intervenant et minorer uniformément les constantes de proportionnalité par une constante positive. Il suffit donc de minorer la distance d'un segment de Δ à un point particulier par une expression du même type que celle intervenant dans la définition de l'étranglement lent.

3. MINORATION FINALE : UN THEOREME DE BAKER.

Nous effectuerons les calculs dans le carré fondamental $[0,1] \times [0,1]$ représentant le tore $\mathbf{T}^2$. S'il existe des points particuliers de Γ sur le bord de ce carré, il suffit de faire un calcul analogue dans un carré déduit du précédent par une translation rationnelle.

Soit $P_o = (x_o, y_o)$ un point particulier de Γ. Considérons un segment de Δ voisin de P_o. Il s'agit de minorer la distance $|\xi_o - \xi|$, où ξ_o est l'intersection de la parallèle à Δ issue de P_o avec l'axe des x, et ξ est l'intersection du segment de Δ (ou de son prolongement) avec l'axe des x.

On a $\xi_o = x_o - \frac{y_o}{\omega}$.

Supposons que le segment de Δ considéré corresponde à $n \leq |y| < n+1$. On peut supposer $|n| \geq 1$ car les zéros de φ sont isolés donc $n = 0$ n'en fournit qu'un nombre fini et leurs distances mutuelles sont minorées par une constante positive. Le point ξ est l'intersection des droites d'équations $y = n$ et $y = \omega x$. On a donc $\xi \equiv \frac{n}{\omega} \pmod 1$, c'est-à-dire $\xi = \frac{n}{\omega} + p$ avec $p \in \mathbf{Z}$. On cherche le point ξ le plus proche de ξ_o, or $\xi_o \in [-\frac{1}{\omega}, 1]$ et par suite $|p| = O(|n|)$, le O ne dépendant pas du point particulier étudié.

On a $\xi_o - \xi = x_o - \frac{y_o}{\omega} - \frac{n}{\omega} - p.$

Posons $X_o = \exp(-2i\pi x_o)$ et $Y_o = \exp(-2i\pi y_o)$. Il existe des déterminations du logarithme telles que

$$\log X_o = -2i\pi x_o \qquad \log Y_o = -2i\pi y_o \qquad \log(-1) = i\pi .$$

Alors $\xi_o - \xi = \frac{1}{2i\pi} L$ avec

$$L = -\omega \log X_o + \log Y_o - 2(n\omega + p) \log(-1).$$

D'après ce qui précède, L est une forme linéaire à coefficients algébriques en des logarithmes de nombres algébriques, et elle est non nulle. On peut lui appliquer un théorème de Baker ([1]) : les degrés et les hauteurs de -1, X_o et Y_o sont majorés car les points particuliers de Γ sont en nombre fini. Le degré des coefficients est majoré par le degré d de ω, et leur hauteur est majorée par un $0(|n|^d)$ car $|p| = 0(|n|)$. On obtient alors $|L| \geq (C'|n|^d)^{-K}$ soit $|L| \geq C|n|^{-N}$ avec C et N positifs. Or les zéros de φ étudiés sont de l'ordre de $\frac{|n|}{\omega}$; donc la proposition est démontrée.

<u>Remarque</u>. Cette démonstration ne s'étend pas au cas où A engendre un $\mathbb{Z}$-module libre de rang supérieur à 2 car, dans ce cas, les points particuliers ne sont plus en nombre fini.

Bibliographie

[1] BAKER, A. A central theorem in transcendence theory. Diophantine approximation and its applications (edited by C. F. OSGOOD). Academic Press (1973).

[2] MEYER, Y. Comportement asymptotique des solutions de certaines équations de convolution. Analyse Harmonique d'Orsay, n° 111 (1975) et J. Math. Pures Appl. (à paraître).

François GRAMAIN
Université Pierre et Marie Curie
Mathématiques (Tour 45-56, 5ème ét.)
4, place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05

SUR UN CALCUL DE HENRI LEREDDE

par N. Leblanc

1. INTRODUCTION.

Je tiens à remercier d'abord Henri Leredde qui a bien voulu s'intéresser à l'étude informatique du problème que nous allons envisager ici. Les calculs qu'il a effectués m'ont définitivement convaincu des résultats à démontrer, et m'ont donc incité à poursuivre mes recherches. Les méthodes informatiques donnent d'ailleurs des renseignements beaucoup plus précis que la méthode mathématique ; nous y reviendrons.

Les ensembles et les fonctions que nous envisageons ici sont définis sur le tore $\mathbf{T}$. Nous notons E l'ensemble parfait symétrique défini par un rapport de dissection constant et égal à un entier $q > 2$:

$$E = \left\{x \in \mathbf{T} \ ; \ x = \sum_{k \geq 1} 2\pi \varepsilon_k q^{-k}, \quad \varepsilon_k = 0 \text{ ou } 1\right\},$$

μ la mesure unitaire équirépartie sur E, et f la primitive de $2\pi\mu$:

- si $x_o \in E$, $x_o = \sum_{k\geq 1} 2\pi \varepsilon_k q^{-k}$, $f(x_o) = \sum_{k \geq 1} 2\pi\varepsilon_k 2^{-k}$;
- si $x_o \notin E$, si $x_1 = \sup\left\{x \in E \ , \ x < x_o\right\}$, si $x_2 = \inf\left\{x \in E \ , \ x > x_o\right\}$,

$$f(x_o) = f(x_1) = f(x_2).$$

Nous notons en outre $A(\mathbf{T})$ l'algèbre de Banach des fonctions dont la série de Fourier converge normalement sur le tore, munie de la norme correspondante :

$$A(\mathbf{T}) = \left\{ \varphi \,;\, \varphi(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{nix} \,,\, \|\varphi\| = \sum_{-\infty}^{+\infty} |a_n| \right\}.$$

Le but de cet article est de démontrer la propriété suivante :

THEOREME 1. Si q est un entier impair, il existe une constante $C_q < 2$ ne dépendant que de q telle que, pour tout entier positif m assez grand,

$$\sum_{n=1}^{2^m} \|\exp nif\| \leq C_q^m \|\exp 2^m if\|.$$

THEOREME 2. Si q est un entier pair, il existe une constante $C_q > 2$ ne dépendant que de q telle que, pour tout entier positif m assez grand,

$$\sum_{n=1}^{2^m} \|\exp nif\| \geq C_q^m \|\exp 2^m if\|.$$

L'intérêt de ce résultat réside dans le fait que c'est la première fois qu'une famille de fonctions ayant cette propriété est mise en évidence bien que des calculs analogues aient déjà été effectués en grand nombre (voir par exemple [1], [2], [3], [4]).

Pour démontrer cette propriété nous aurons à étudier les suites

$$F(m\,,\,n\,,\,p) = \prod_{m\geq k\geq 1} \left|\cos\left(\frac{n\pi}{2^k} - \frac{n\pi}{q^k}\right)\right|$$

$$G(m,n) = \sum_{p=-q^m+1}^{q^m} \left(\frac{2}{q}\right)^m F(m,n,p)$$

$$H(m,n) = \sum_{p=-q^m+1}^{q^m} \left(\frac{2}{q}\right)^m \frac{F(m,n,p)}{\sin(q^{-m}\, p\pi/2)}.$$

Nous allons montrer auparavant le rapport qui existe entre le problème que nous voulons étudier et les suites F, G, H.

2. ETUDE DES SUITES $\|\exp nif\|$.

Nous établirons tout d'abord :

PROPOSITION 1. <u>Il existe une constante</u> C_1 <u>ne dépendant que de</u> q <u>telle que</u>, <u>si</u> $|n|$ <u>est compris entre</u> 2^{m-2} <u>et</u> 3.2^{m-2},

$$\frac{1}{2} H(m,n) \leq \|\exp nif\| \leq C_1 H(m,n).$$

Démonstration. Considérons l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \left[\exp nif(x + q^{-m}\pi) - \exp nif(x)\right] \exp(-pix)\, dx$$

que l'on peut décomposer en envisageant les 2^m intervalles sur lesquels la fonction à intégrer n'est pas nulle, ce qui nous donne, en notant $(\exp nif)^\wedge$, la transformée de Fourier de $\exp nif$,

$$\frac{|2\pi \sin(q^{-m}p\pi/2).(\exp nif)^\wedge(p)|}{2^m F(m\,,\,n\,,\,p)}$$

$$= \left| \int_{-q^{-m}\pi}^{q^{-m}\pi} \left[\exp nif(x+q^{-m}\pi) - \exp nif(x)\right] \exp(-pix)\, dx \right|.$$

Comme le terme en facteur de $(\exp nif)^\wedge(p)$ ne change pas si l'on remplace p par $p + 2\,q^m$,

$$\|\exp nif\| = \sum_{p=-q^m+1}^{q^m} \left(\frac{2}{q}\right)^m \frac{F(m,n,p)}{|\sin(q^{-m}p\pi/2)|} \|\Phi_{m,n,p}\|,$$

où la transformée de Fourier $\widehat{\Phi_{m,n,p}}(r)$ est égale à

$$\frac{q^m}{2\pi} \int_{-q^{-m}\pi}^{q^{-m}\pi} \left[\exp nif(x + q^{-m}\pi) - \exp nif(x)\right] \exp(-pix) \exp(-2\,q^m rix)\, dx\,,$$

ce qui donne, après changement de variable dans l'intégrale,

$$2\,\Phi_{m,n,p}(x) \exp(q^{-m}pix/2)$$

$$= \exp(2^{1-m} ni\pi) - \exp(q^{-m}pi\pi) + \left[\exp(q^{-m}pi\pi) - 1\right] \exp nif(q^{-m}x/2).$$

Nous remarquons alors que

$$\Phi_{m,n,p}(0) = \Phi_{m,n,p}(2\pi) = \frac{1}{2}\exp(2^{1-m}ni\pi - 1) ;$$

comme $\Phi_{m,n,p}$ est lipschitzienne à variations bornées, $\Phi_{m,n,p}$ appartient alors à l'algèbre $A(\mathbf{T})$ et les conditions

$$|p| \leq q^m \qquad\qquad |n| \leq 3.2^{m-2}$$

nous permettent, en utilisant les techniques de Zygmund [5], de trouver une constante C_1 telle que

$$\|\Phi_{m,n,p}\| \leq C_1.$$

Par ailleurs, les conditions imposées à n impliquent

$$\|\Phi_{m,n,p}\| \geq |\Phi_{m,n,p}(0)| \geq \frac{1}{2},$$

ce qui achève la démonstration.

PROPOSITION 2. Il existe une constante C_2 ne dépendant que de q, telle que, si $|n|$ est compris entre 2^{m-1} et 3.2^{m-1},

$$\frac{1}{2}G(m,n) \leq \|\exp nif\| \leq C_2\, G(m,n).$$

Démonstration. Compte tenu des nouvelles conditions sur n, nous déduisons immédiatement de la proposition 1

$$\|\exp nif\| \geq \frac{1}{2}G(m+1\ ,\ n)$$

et nous remarquons que

$$G(M+1\ ,\ n) = \sum_{p=q^m+1}^{q^m} \left(\frac{2}{q}\right)^{m+1} F(m,n,p)\, a_{m,n}(p)$$

$$a_{m,n}(p) = \sum_{k=1}^{q} \left|\cos\left(\frac{n\pi}{2^{m+1}} - \frac{p\pi}{q^{m+1}} - \frac{k\pi}{q}\right)\right| ,$$

ce qui nous donne

$$\operatorname{cotg} \frac{\pi}{2q} \leq a_{m,n}(p) = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2q}},$$

d'où nous déduisons

$$\frac{q}{2} \leq a_{m,n}(p) \leq q,$$

$$G(m,n) \leq G(m+1\ ,\ n) \leq 2\ G(m\ ,\ n),$$

et donc
$$\|\exp nif\| \geq \frac{1}{2} G(m,n).$$

Pour obtenir la majoration de $\|\exp nif\|$, nous notons alors

$$G(m,n,r) = \sum_{p=-q^r+1}^{q^r} \frac{2^m}{q^r} F(m,n,p), \quad r \leq m,$$

$$\varepsilon_{m,n}(r) = \sup_{-q^r \leq p \leq q^r} \prod_{m \geq k \geq s} \left| \cos\left(\frac{n\pi}{2^k} - \frac{p\pi}{q^k}\right) \right|,$$

où s est un entier compris entre m et r que nous préciserons ultérieurement. Alors, si $2^{m-2} \leq |n| \leq 3.2^{m-2}$, nous notons

$$H(m,n) \leq q \sum_{r=1}^{m} G(m,n,r),$$

$$G(m,n,r) \leq 2^{m-r}\ \varepsilon_{m,n}(r)\ G(r,n),$$

et donc

$$H(m,n) \leq q\ G(m,n) \sum_{r=1}^{m} 2^{m-r}\ \varepsilon_{m,n}(r) \frac{G(r,n)}{G(m,n)}.$$

Nous allons chercher à majorer la somme qui figure au second membre par une progression géométrique de raison supérieure à 1 ; dans ces conditions, la majoration de $\|\exp nif\|$ découlera, pour $2^{m-2} \leq |n| \leq 3.2^{m-2}$, de la Proposition 1 car la somme sera majorée, à une constante près, par son dernier terme. En utilisant alors l'inégalité $G(m+1) \leq 2\ G(m,n)$ que nous avons déjà établie, nous pourrons alors conclure dans le cas où $2^{m-1} \leq |n| \leq 3.2^{m-1}$. Nous supposons donc maintenant $2^{m-2} \leq |n| \leq 3.2^{m-2}$.

$$\varepsilon_{m,n}(r) \leq \left| \prod_{m\geq k\geq s} \cos \frac{n\pi}{2^k} \right| + \sup_{-q^r\leq p\leq q^r} \left| \prod_{m\geq k\geq s} \cos\left(\frac{n\pi}{2^k} - \frac{p\pi}{q^k}\right) - \prod_{m\geq k\geq s} \cos \frac{n\pi}{2^k} \right|$$

peut être majoré en transformant le premier produit en somme en appliquant la formule des accroissements finis à la différence des produits de cosinus et en utilisant l'encadrement de $|n|$:

$$\varepsilon_{m,n}(r) \leq \sqrt{2}\, 2^{s-m} + \sum_{k=s}^{m} q^{r-k}\pi \leq \sqrt{2}\, 2^{s-m} + \frac{\pi}{q-1} q^{r-s}.$$

Dans le cas où $q \geq 8$, nous choisissons alors s tel que

$$0 \leq s - \frac{m+3r}{4} < 1$$

ce qui entraîne

$$\varepsilon_{m,n}(r) \leq 4.2^{3(r-m)/4}.$$

Par ailleurs, l'inégalité $a_{m,n}(p) \geq 2 \operatorname{cotg} \frac{\pi}{q}$, valable quel que soit q, entraîne maintenant, puisque $q \geq 8$,

$$a_{m,n}(p) \geq \frac{q}{4} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{8} = \frac{1+\sqrt{2}}{4} q,$$

et nous obtenons donc

$$G(r+1\ , n) \geq \frac{1+\sqrt{2}}{2} G(r,n)$$

$$G(m,n) \geq \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)^{m-r} G(r,n),$$

ce qui nous donne, en reportant dans la somme que nous étudions,

$$H(m,n) \leq q\, G(m,n) \sum_{r=1}^{m} 2^{5(m-r)/4} (1+\sqrt{2})^{r-m}$$

et nous permet de conclure puisque $1+\sqrt{2} > 2^{5/4}$.

Lorsque $q < 8$ on peut reprendre le calcul précédent à condition de remplacer, dans la majoration de $\varepsilon_{m,n}(r)$, la formule des accroissements finis par un développement limité à l'ordre 3. En choisissant maintenant s tel que $0 \leq s-(m+4r)/5 < 1$, nous obtenons $\varepsilon_{m,n}(r) \leq 180.2^{4(r-m)/5}$, et, comme nous pouvons établir dans ce cas $G(m,n) \geq (2/\sqrt{3})^{m-r}\, G(r,n)$, nous pouvons encore conclure en utilisant l'inégalité

$2^{4/5} > 3^{1/2}$.

Nous avons donc établi que, quel que soit q, l'étude de la croissance de $\|\exp nif\|$ se déduit de celle de $G(m,n)$. Nous allons maintenant évaluer cette dernière suite.

3. ETUDE DES SUITES $G(m,n)$.

Au cours de cette étude, nous serons contraints de séparer le cas où q est impair du cas où q est pair, quoique les méthodes employées soient identiques dans l'un et l'autre cas. Nous allons d'abord expliquer la méthode que nous utilisons pour évaluer $G(m,2^m)$: nous écrivons, en utilisant la périodicité de la fonction cosinus,

$$G(m,2^m) = 2 \sum_{p=1}^{q^{m-1}} \left(\frac{2}{q}\right)^m F(m-1\ ,\ 2^m\ ,\ p)\, g\left(\frac{p\pi}{q^m}\right)$$

$$G(m+1\ ,\ 2^{m+1}) = 2 \sum_{p=1}^{q^{m-1}} \left(\frac{2}{q}\right)^{m+1} F(m-1,2^m,p)\, h\left(\frac{p\pi}{q^m}\right),$$

où les fonctions g et h sont définies par :

$$g(\theta) = \left|\cos\theta\right| + \left|\cos\left(\theta + \frac{\pi}{q}\right)\right| + \ldots + \left|\cos\left(\theta + (q-1)\frac{\pi}{q}\right)\right|$$

$$h(\theta) = \sum_{k=1}^{q^2} \left|\cos\left(\theta + \frac{k\pi}{q}\right)\cos\left(\frac{\theta}{q} + \frac{k\pi}{q^2}\right)\right|.$$

Alors,

$$\inf \frac{2\ h(\theta)}{q\ g(\theta)} \leq \frac{G(m+1\ ,\ 2^{m+1})}{G(m\ ,\ 2^m)} \leq \sup \frac{2\ h(\theta)}{q\ g(\theta)},$$

et nous sommes donc conduits à rechercher les extrema de la fonction h/g.

PROPOSITION 3. <u>Si</u> q <u>est un entier impair</u>,

$$\cos\frac{\pi}{2q^2}\ \frac{\sin\frac{\pi}{q}}{\cos\frac{\pi}{q^2} - \cos\frac{\pi}{q}} \leq \frac{h(\theta)}{g(\theta)} \leq \frac{\sin\frac{\pi}{q}}{\cos\frac{\pi}{q^2} - \cos\frac{\pi}{q}}.$$

Démonstration. Nous remarquons que g et h sont des fonctions périodiques, de période π/q. Quitte à changer de valeur de θ, nous pouvons donc supposer $|\theta| \le \pi/2q$, et écrire

$$g(\theta) = \sum_{-\frac{q}{2}<k<\frac{q}{2}} \cos(\theta - \frac{k\pi}{q}),$$

$$h(\theta) = \sum_{-\frac{q^2}{2}<k<\frac{q^2}{2}} \left|\cos(\theta - \frac{k\pi}{q})\right| \cos(\frac{\theta}{q} - \frac{k\pi}{q^2})$$

$$= \sum_{-\frac{q}{2}<k<\frac{q}{2}} \cos(\theta - \frac{k\pi}{q}) \sum_{-\frac{q}{2}<j<\frac{q}{2}} \cos(\frac{\theta}{q} - \frac{k\pi}{q^2} - \frac{j\pi}{q}),$$

d'où nous déduisons

$$\sin\frac{\pi}{2q}\, g(\theta) = \cos\theta$$

$$\sin\frac{\pi}{2q}\, h(\theta) = \sum_{-\frac{q}{2}<k<\frac{q}{2}} \cos(\theta - \frac{k\pi}{q}) \cos(\frac{\theta}{q} - \frac{k\pi}{q^2}),$$

ce qui nous donne après sommation

$$\sin\frac{\pi}{2q}\, h(\theta) = \frac{\cos\frac{\pi}{2q}\cos\frac{q+1}{q}\theta}{2\sin\frac{q+1}{2q^2}\pi} + \frac{\cos\frac{\pi}{2q}\cos\frac{q-1}{q}\theta}{2\sin\frac{q-1}{2q^2}\pi}\ .$$

Nous pouvons alors majorer facilement h/g en remarquant que la condition $|\theta| \le \pi/2q$ implique que $|\mathrm{tg}\,\theta|$ est majoré par $\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2q}$:

$$\frac{h(\theta)}{g(\theta)} = \frac{\cos\frac{\pi}{2q}\ \sin\frac{\pi}{2q}}{\sin\frac{q+1}{2q^2}\pi\ \sin\frac{q-1}{2q^2}\pi}\left(\cos\frac{\pi}{2q^2}\cos\frac{\theta}{q} + \sin\frac{\pi}{2q^2}\ \sin\frac{\theta}{q}\ \frac{\mathrm{tg}\,\theta}{\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2q}}\right)$$

$$\le \frac{\sin\frac{\pi}{q}}{\cos\frac{\pi}{q^2} - \cos\frac{\pi}{q}}\cos(\frac{\theta}{q} \pm \frac{\pi}{2q^2}) \le \frac{\sin\frac{\pi}{q}}{\cos\frac{\pi}{q^2} - \cos\frac{\pi}{q}}\ .$$

Pour minorer h/g, nous écrivons

$$\frac{h(\theta)}{g(\theta)} = \frac{\cos\frac{\pi}{2q}\sin\frac{\pi}{2q}\cos\frac{\pi}{2q}}{\sin\frac{q+1}{2q^2}\pi\,\sin\frac{q-1}{2q^2}\pi}\left(\cos\frac{\theta}{q} + \operatorname{cotg}\frac{\pi}{2q}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2q^2}\operatorname{tg}\theta\,\sin\frac{\theta}{q}\right)$$

et nous remarquons que la parenthèse est formée d'une somme de deux termes positifs, ce qui nous permet d'écrire :

$$|\operatorname{tg}\theta| \geq q\left|\operatorname{tg}\frac{\theta}{q}\right|, \quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{2q^2} \geq \frac{\pi}{2q^2}, \quad \frac{\pi}{2q}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2q} \geq \frac{\pi}{6}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{6},$$

et, comme $\frac{\pi}{6}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{6}$ est plus grand que $\frac{1}{2}$,

$$\cos\frac{\theta}{q} + \operatorname{cotg}\frac{\pi}{2q}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2q^2}\operatorname{tg}\theta\,\sin\frac{\theta}{q} \geq \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta}{q} + \frac{1}{\cos\frac{\theta}{q}}\right) \geq 1,$$

ce qui nous donne la minoration annoncée, d'après l'expression de h/g.

PROPOSITION 4. Si q est un entier pair,

$$\frac{2\sin\frac{\pi}{2q} - \sin\frac{\pi}{q^2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2q}}{\cos\frac{\pi}{q^2} - \cos\frac{\pi}{q}} \leq \frac{h(\theta)}{g(\theta)} \leq \frac{2\sin\frac{\pi}{2q}\left(\cos\frac{\pi}{2q^2} - \sin\frac{\pi}{2q^2}\cos\frac{\pi}{2q}\right)}{\cos\frac{\pi}{q^2} - \cos\frac{\pi}{q}}.$$

Démonstration. Nous effectuons tout d'abord le changement de variable $\theta \longrightarrow \theta - \frac{\pi}{2q}$, puis, comme dans la démonstration précédente, nous utilisons la périodicité de g et h pour supposer $|\theta| \leq \pi/2q$.

$$g(\theta) = \sum_{\substack{-q<k<q \\ k \text{ impair}}} \cos\left(\theta - \frac{k\pi}{2q}\right)$$

$$h(\theta) = \sum_{\substack{-q^2<k<q^2 \\ k \text{ impair}}} \left|\cos\left(\theta - \frac{k\pi}{2q}\right)\right| \cos\left(\frac{\theta}{q} - \frac{k\pi}{2q^2}\right)$$

$$= \sum_{\substack{-q<k<q \\ k \text{ impair}}} \left|\sin\left(\theta - \frac{k\pi}{2q}\right)\right| \sum_{\substack{-q<j<q \\ j \text{ impair}}} \cos\left(\frac{\theta}{q} - \frac{k\pi}{2q^2} - \frac{j\pi}{2q}\right),$$

d'où nous déduisons encore

$$\sin\frac{\pi}{2q}\, g(\theta) = \cos\theta$$

$$\sin\frac{\pi}{2q}\, h(\theta) = \sum_{\substack{-q<k<q \\ k \text{ impair}}} \left|\sin(\theta - \frac{k\pi}{2q})\right| \cos(\frac{\theta}{q} - \frac{k\pi}{2q^2})$$

ce qui nous donne après sommation, compte tenu de ce que le sinus est du signe de $-k$,

$$\sin\frac{\pi}{2q}\, h(\theta) = \frac{1+\sin\frac{\pi}{2q}}{2\sin\frac{q+1}{2q^2}\pi}\cos\frac{q+1}{q}\theta + \frac{1-\sin\frac{\pi}{2q}}{2\sin\frac{q-1}{2q^2}\pi}\cos\frac{q-1}{q}\theta .$$

Nous obtenons donc dans ce cas

$$\frac{h(\theta)}{g(\theta)} = \frac{\sin^2\frac{\pi}{2q}(\cos\frac{\pi}{2q^2} - \sin\frac{\pi}{2q^2}\cos\frac{\pi}{2q})}{\sin\frac{q+1}{2q^2}\pi\,\sin\frac{q-1}{2q^2}\pi}\cos\frac{\theta}{q}$$

$$- \frac{\sin^2\frac{\pi}{2q}\cos\frac{\pi}{2q^2} - \sin\frac{\pi}{2q^2}\cos\frac{\pi}{2q}}{\sin\frac{q+1}{2q^2}\pi\,\sin\frac{q-1}{2q^2}\pi}\operatorname{tg}\theta\,\sin\frac{\theta}{q}$$

d'où nous déduisons immédiatement

$$\frac{h(\frac{\pi}{2q})}{g(\frac{\pi}{2q})} \le \frac{h(\theta)}{g(\theta)} \le \frac{h(\theta)}{g(\theta)},$$

ce qui est le résultat annoncé.

REMARQUE. Les résultats précédents peuvent être interprétés en terme de probabilités : considérons l'ensemble fini

$$\Omega = \left\{1, 2, 3, \ldots, q^m\right\},$$

où q est un entier supérieur à 2 et m un entier positif, et supposons Ω muni de la loi de probabilité équirépartie. Nous définissons alors sur Ω les variables aléatoires X_k $(1 \le k \le m)$ par

$$X_k(p) = \left|\cos \frac{p\pi}{q^k}\right|$$

et nous pouvons calculer l'espérance mathématique de X_k :

- si q est impair, $E(X_k) = \dfrac{1}{q^k \sin \dfrac{\pi}{2q^k}}$

- si q est pair, $E(X_k) = \dfrac{1}{q^k} \operatorname{cotg} \dfrac{\pi}{2q^k}$.

Nous obtenons donc, quelle que soit la parité de q, l'existence d'une constante K_q, indépendante de m, telle que

$$K_q^{-1} \leq (\tfrac{\pi}{2})^m \prod_{1\leq k\leq m} E(X_k) \leq K_q .$$

Par ailleurs, l'espérance mathématique du produit des variables aléatoires X_k est

$$E(\prod_{1\leq k\leq m} X_k) = q^{-m} \sum_{p=1}^{q^m} F(m\ ,\ 2^m\ ,\ p) = 2^m\, G(m, 2^m).$$

Par un développement limité à l'ordre 3, nous obtenons l'inégalité

$$(x > 0) \qquad\qquad x \cos x - \sin x \geq -\frac{1}{3} x^3 ,$$

et cette inégalité, jointe à la décroissance de $\sin x/x$ pour x positif, et aux inégalités classiques

$$x \geq \sin x \geq x - \frac{x^3}{6} \qquad , \qquad 1 \geq \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} ,$$

nous permet d'établir les inégalités

$$\frac{\cos \dfrac{\pi}{2q^2} \sin \dfrac{\pi}{q}}{\cos \dfrac{\pi}{q^2} - \cos \dfrac{\pi}{q}} > \frac{2q}{\pi} \geqslant \frac{2 \sin \dfrac{\pi}{2q} (\cos \dfrac{\pi}{2q^2} - \sin \dfrac{\pi}{2q^2} \cos \dfrac{\pi}{2q})}{\cos \dfrac{\pi}{q^2} - \cos \dfrac{\pi}{q}}$$

et nous déduisons alors des propositions 3 et 4 l'existence de constantes A_q et B_q indépendantes de m, telles que

- $A_q < 1$, $B_q > 1$
- si q est impair, $A_q^m E(\prod_{1\le k\le m} X_k) \geq K_q^{-1} \prod_{1\le k\le m} E(X_k)$
- si q est pair, $B_q^m E(\prod_{1\le k\le m} X_k) < K_q \prod_{1\le k\le m} E(X_k)$.

Dans le but de calculer $\Sigma\|\exp nif\|$, nous nous proposons maintenant d'évaluer $\Sigma\, G(m,n)$. Nous remarquons tout d'abord que, si nous écrivons q sous la forme $q = 2 + a.2^r$, où a est un entier positif impair et r un entier positif ou nul, si $k \le m$,

$$\left|\cos\left(\frac{n + 2^{m-r}}{2^k}\pi - \frac{p + 2^{-r} q^m}{q^k}\pi\right)\right| = \left|\cos\left(\frac{n\pi}{2^k} - \frac{p\pi}{q^k}\right)\right| .$$

Nous en déduisons que, si $r \le m$,

$$F(m\ ,\ n+2^{m-r}\ ,\ p+2^{-r}q^m) = F(m,n,p),$$

$$G(m\ ,\ n+2^{m-r}) = G(m,n),$$

et nous pouvons alors écrire

$$\sum_{n=1}^{2^m} G(m,n) = 2^r \sum_{n=1}^{2^{m-r}} G(m,n) = 2^r \sum_{n=1}^{2^{m-r}} \sum_{p=1}^{q^m} 2^m q^{-m} F(m,n,p),$$

ce qui nous permet d'établir :

PROPOSITION 5. <u>Quelle que soit la parité de</u> q,

$$\cos\frac{\pi}{4q} \sum_{n=1}^{2^m} G(m,n) \le \frac{q}{2} \sin\frac{\pi}{4q} \sum_{n=1}^{2^m} G(m+1,n) \le \sum_{n=1}^{2^m} G(m,n).$$

Démonstration. Nous écrivons

$$\sum_{n=1}^{2^{m+1}} G(m+1,n) = 2^r \sum_{n=1}^{2^{m-r}} \sum_{p=1}^{q^{m+1}} 2^{m+1} q^{-m-1} \left[F(m+1,n,p) + F(m+1,n+2^{m-r},p+2^{-r}q^m)\right]$$

$$= 2^r \sum_{n=1}^{2^{m-r}} \sum_{p=1}^{q^m} 2^{m+1} q^{-m-1} F(m,n,p)$$

$$\left[\sum_{j=1}^{q} \left|\cos\left(\frac{n\pi}{2^{m+1}} - \frac{p\pi}{q^{m+1}} - \frac{j\pi}{q}\right)\right| + \sum_{j=1}^{q} \left|\cos\left(\frac{n\pi}{2^{m+1}} - \frac{p\pi}{q^{m+1}} + \frac{a\pi}{2q} - \frac{j\pi}{q}\right)\right|\right]$$

et la proposition découle du fait que a est impair et que

$$\sum_{j=1}^{2q} \left|\cos\left(\frac{n\pi}{2^{m+1}} - \frac{p\pi}{q^{m+1}} - \frac{j\pi}{2q}\right)\right| = \frac{\cos\varphi}{\sin\frac{\pi}{4q}}, \qquad |\varphi| \leq \frac{\pi}{4q}.$$

COROLLAIRE. <u>Si</u> q <u>est un entier impair, il existe une constante</u> $C_q < 2$, <u>ne dépendant que de</u> q, <u>telle que, pour tout entier positif</u> m,

$$\sum_{n=1}^{2^m} G(m,n) \leq C_q^m G(m\ ,\ 2^m).$$

Démonstration. D'après les propositions 3 et 5,

$$G(m\ ,\ 2^m) \geq \left(\frac{\frac{2}{q}\cos\frac{\pi}{2q^2}\sin\frac{\pi}{q}}{\cos\frac{\pi}{q^2} - \cos\frac{\pi}{q}}\right)^m$$

$$\sum_{n=1}^{2^m} G(m,n) \leq \left(\frac{2}{q\sin\frac{\pi}{4q}}\right)^m$$

et il nous reste donc à vérifier que

$$\cos\frac{\pi}{q^2} - \cos\frac{\pi}{q} = 2\left(\sin^2\frac{\pi}{2q} - \sin^2\frac{\pi}{2q^2}\right) < 2\sin\frac{\pi}{q}\sin\frac{\pi}{4q}\left(1 - 2\sin^2\frac{\pi}{4q^2}\right),$$

c'est-à-dire

$$\sin^2\frac{\pi}{2q} - \sin\frac{\pi}{q}\sin\frac{\pi}{4q} < \sin^2\frac{\pi}{2q^2} - 2\sin\frac{\pi}{q}\sin\frac{\pi}{4q}\sin^2\frac{\pi}{4q^2}.$$

Pour cela, nous écrivons les inégalités

$$\sin^2\frac{\pi}{2q} - \sin\frac{\pi}{q}\sin\frac{\pi}{4q} = 4\sin\frac{\pi}{2q}\sin\frac{\pi}{4q}\sin\frac{\pi}{8q}\sin\frac{3\pi}{8q} < \frac{3\pi^4}{128\ q^4},$$

$$\sin^2\frac{\pi}{2q^2} - 2\sin\frac{\pi}{q}\sin\frac{\pi}{4q}\sin^2\frac{\pi}{4q^2} > \frac{\pi^2}{4q^4} - \frac{\pi^4}{48q^8} - \frac{\pi^4}{32q^6},$$

et, puisque π^2 est plus petit que 10, il nous suffit de vérifier que

$$\frac{3}{128} < \frac{1}{40} - \frac{1}{48q^4} - \frac{1}{32q^2},$$

inégalité qui est vérifiée pour $q \geq 5$.

Pour conclure, il nous reste donc à vérifier l'inégalité de départ pour $q = 3$, ce qui se fait par un calcul numérique élémentaire. Nous y reviendrons d'ailleurs dans la quatrième partie.

Pour q pair, la proposition 5 ne donne pas une évaluation assez précise. Pour obtenir un meilleur résultat, nous écrivons

$$\sum_{n=1}^{2^m} G(m,n) = 2^{m+r} q^{-m} \sum_{n=1}^{2^{m-r}} \sum_{p=1}^{q^{m-1}} F(m-1,n,p) \sum_{k=1}^{q} \left|\cos\left(\frac{n\pi}{2^m} - \frac{p\pi}{q^m} - \frac{k\pi}{q}\right)\right|.$$

Pour n et p fixés, nous définissons alors θ par l'existence d'un entier k tel que

$$\theta = \frac{n\pi}{2^m} - \frac{p\pi}{q^m} - \frac{k\pi}{q} - \frac{\pi}{2q}, \qquad |\theta| \leq \frac{\pi}{2q}.$$

Alors, comme q est pair,

$$\sum_{n=1}^{2^m} G(m,n) = 2^{m+r} q^{-m} \sum_{n=1}^{2^{m-r}} \sum_{p=1}^{q^{m-1}} F(m-1,n,p) \frac{\cos\theta}{\sin\frac{\pi}{2q}}.$$

Nous allons chercher à comparer cette valeur à

$$\sum_{n=1}^{2^{m+1}} G(m+1,n) = 2^r \sum_{n=1}^{2^{m-r}} G(m+1,n) + G(m+1\ ,\ n+2^{m-r})$$

$$= 2^{m+r+1} q^{-m-1} \sum_{n=1}^{2^{m-r}} \sum_{p=1}^{q^{m-1}} F(m-1,n,p) \sum_{k=1}^{q^2} \left|\cos\left(\frac{n\pi}{2^m} - \frac{p\pi}{q^m} - \frac{k\pi}{q}\right)\right|$$

$$\left[\left|\cos\left(\frac{n\pi}{2^{m+1}} - \frac{p\pi}{q^{m+1}} - \frac{k\pi}{q^2}\right)\right| + \left|\cos\left(\frac{n\pi}{2^{m+1}} - \frac{p\pi}{q^{m+1}} + \frac{a\pi}{2q} - \frac{k\pi}{q^2}\right)\right|\right].$$

Nous obtenons alors, en effectuant la dernière sommation de q en q

$$\sum_{n=1}^{2^{m+1}} G(m+1,n) = 2^{m+r+1} q^{-m-1} \sum_{n=1}^{2^{m-r}} \sum_{p=1}^{q^{m-1}} F(m-1,n,p)$$

$$\sum_{k=1}^{q} \left|\cos\left(\frac{n\pi}{2^m} - \frac{p\pi}{q^m} - \frac{k\pi}{q}\right)\right| \frac{\cos\left(\varphi(k) - \frac{k\pi}{q^2}\right)}{\sin\frac{\pi}{4q}}$$

où $\varphi(k)$ est définie, pour n et p fixés, par l'existence d'un entier j tel que

$$\varphi(k) = \frac{n\pi}{2^{m+1}} - \frac{p\pi}{q^{m+1}} - \frac{j\pi}{2q} - \frac{\pi}{4q}, \qquad \left|\varphi(k) - \frac{k\pi}{q^2}\right| \leq \frac{\pi}{4q}.$$

Notons alors k_o, la valeur de k pour laquelle $k \leq q/2$ et

$$\frac{\pi}{4q} - \varphi(k) + \frac{k\pi}{q^2}$$

est minimum, puis

$$\varphi = \varphi(k_o) - \frac{k_o\pi}{q^2} + \frac{\pi}{2q^2}$$

$$\psi = \frac{n\pi}{2^m} - \frac{p\pi}{q^m} - \frac{k_o\pi}{q} + \frac{\pi}{2q}.$$

Alors,

$$\frac{\pi}{4q} + \frac{\pi}{2q^2} \geq \varphi > \frac{\pi}{4q} - \frac{\pi}{2q^2},$$

$$\sum_{n=1}^{2^{m+1}} G(m+1,n) = 2^{m+r+1}\, q^{-m-1} \sum_{n=1}^{2^{m-r}} \sum_{p=1}^{q^{m-1}} \frac{F(m-1,n,p)}{\sin\frac{\pi}{4q}}\, A(\varphi\,,\,\psi),$$

$$A(\varphi,\psi) = \sum_{0\leq k<\frac{q}{2}} \left[\left|\cos(\psi - \frac{k\pi}{q} - \frac{\pi}{2q})\right| + \left|\sin(\psi - \frac{k\pi}{q} - \frac{\pi}{2q})\right|\right] \cos(\varphi - \frac{k\pi}{q^2} - \frac{\pi}{2q^2})$$

et nous obtenons donc

$$\frac{4}{q}\cos\frac{\pi}{4q}\, \inf B(\varphi,\psi) \leq \frac{\sum\limits_{n=1}^{2^{m+1}} G(m+1\,,\,n)}{\sum\limits_{n=1}^{2^m} G(m,n)} \leq \frac{4}{q}\cos\frac{\pi}{4q} \sup B(\varphi,\psi)$$

$$\cos\theta\; B(\varphi,\psi) = A(\varphi\,,\,\psi)$$

et il existe un entier j tel que $\theta = \psi - j\pi/q$, $|\theta| \leq \pi/2q$.

Il ne nous reste donc plus qu'à évaluer la fonction $B(\varphi,\psi)$:

PROPOSITION 6. <u>Si</u> q <u>est un nombre pair, non multiple de</u> 4,

$$\frac{\sin\frac{\pi}{q} - \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4q}\sin\frac{\pi}{q^2}}{\cos\frac{\pi}{2q}\,(\cos\frac{\pi}{q^2} - \cos\frac{\pi}{q})} \leq B(\varphi,\psi) \leq \frac{\sin\frac{\pi}{q}\cos\frac{\pi}{4q} - \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4q}\sin\frac{\pi}{q^2}\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2q})}{\cos\frac{\pi}{2q^2}\cos\frac{\pi}{2q}(\cos\frac{\pi}{q^2} - \cos\frac{\pi}{q})}$$

<u>si</u> q <u>est un multiple de</u> 4,

$$\frac{\sin\frac{\pi}{q} - \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4q}\sin\frac{\pi}{q^2}}{\cos\frac{\pi}{2q}(\cos\frac{\pi}{q^2} - \cos\frac{\pi}{q})} \leq B(\varphi,\psi) \leq \frac{\sin\frac{\pi}{q}\cos\frac{\pi}{4q} - \sin\frac{\pi}{4q}\sin\frac{\pi}{q^2}}{\cos\frac{\pi}{2q^2}\cos\frac{\pi}{2q}(\cos\frac{\pi}{q^2} - \cos\frac{\pi}{q})}.$$

Démonstration. Nous remarquons tout d'abord qu'il existe un entier j, $|j| \leq q/2$, ayant même parité que $q/2$, et tel que $\theta = \psi - j\pi/2q$ (modulo $\frac{\pi}{2}$),

$$A(\varphi,\psi) = \sqrt{2} \sum_{\substack{0<k<\frac{q}{2}-j \\ k \text{ impair}}} \cos(\theta - \frac{(k+j)\pi}{2q})\cos(\varphi - \frac{k\pi}{2q^2})$$

$$+ \sqrt{2} \sum_{\substack{\frac{q}{2}-j<k<q \\ k \text{ impair}}} \cos(\theta + \frac{\pi}{2} - \frac{(k+j)\pi}{2q})\cos(\varphi - \frac{k\pi}{2q^2}).$$

Nous effectuons la sommation, et nous obtenons ainsi

$$A(\varphi,\psi) = \frac{\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4q}\cos(\theta+\varphi-\frac{\pi}{4q}-\frac{j\pi}{2q}) + \cos(\theta+\varphi-\frac{\pi}{4q}+\frac{j\pi}{2q^2})}{2\sin(\frac{\pi}{2q}+\frac{\pi}{2q^2})}$$

$$+ \frac{\cos(\theta-\varphi+\frac{\pi}{4q}-\frac{j\pi}{2q^2}) - \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4q}\cos(\theta-\varphi+\frac{\pi}{4q}-\frac{j\pi}{2q})}{2\sin(\frac{\pi}{2q}-\frac{\pi}{2q^2})}.$$

Nous constatons alors que, pour φ et j fixés, $B(\varphi,\psi)$ est de la forme $\alpha + \beta \operatorname{tg}\theta$, et ses extrema par rapport à la variable θ sont donc atteints aux valeurs extrêmes $\theta = \pm\frac{\pi}{2q}$. Nous pouvons donc nous borner à la recherche des extrema de $B(\varphi, \frac{j+\varepsilon}{2q}\pi)$, $\varepsilon = +1$ ou $\varepsilon = -1$:

$$\sin\frac{q+1}{2q^2}\pi\sin\frac{q-1}{2q^2}\pi B(\varphi,\frac{j+\varepsilon}{2q}\pi) = \sin\frac{\pi}{2q}\cos(\varphi-\frac{\pi}{4q}+\frac{j-\varepsilon}{2q^2}\pi) - \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4q}$$

$$\left[\cos\frac{j-\varepsilon}{2q}\pi\cos(\varphi-\frac{\pi}{4q})\sin\frac{\pi}{2q^2}+\sin\frac{j-\varepsilon}{2q}\pi\sin(\varphi-\frac{\pi}{4q})\cos\frac{\pi}{2q^2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2q}\right].$$

Pour j fixé, $B(\varphi,\frac{j+\varepsilon}{2q}\pi)/\cos(\varphi-\frac{\pi}{4q})$ est de la forme $\alpha+\beta\operatorname{tg}(\varphi-\frac{\pi}{4q})$, et, ici encore, atteint ses extrema par rapport à la variable φ aux valeurs extrêmes $\varphi-\frac{\pi}{4q}=\pm\frac{\pi}{2q^2}$.

Alors,

$$\inf B(\varphi,\frac{j+\varepsilon}{2q}\pi) = \inf B(\frac{\pi}{4q}+\frac{\varepsilon'\pi}{2q^2},\frac{j+\varepsilon}{2q}\pi),$$

$$\cos\frac{\pi}{2q^2}\sup B(\varphi,\frac{j+\varepsilon}{2q}\pi) \leq \sup B(\frac{\pi}{4q}+\frac{\varepsilon'\pi}{2q^2},\frac{j+\varepsilon}{2q}\pi)$$

avec $\varepsilon' = +1$ ou $\varepsilon' = -1$ et

$$\sin\frac{q+1}{2q^2}\pi\sin\frac{q-1}{2q^2}\pi B(\frac{\pi}{4q}+\frac{\varepsilon'\pi}{2q^2},\frac{j+\varepsilon}{2q}\pi) = \sin\frac{\pi}{2q}\cos\frac{j-\varepsilon+\varepsilon'}{2q^2}\pi$$

$$-\frac{\sin\frac{\pi}{4q}}{\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{2q}}\sin\frac{\pi}{q^2}\cos\frac{j-\varepsilon+\varepsilon'}{2q}\pi.$$

Nous notons

$$D(j) = \frac{\sin\frac{\pi}{q}\cos\frac{j\pi}{q^2}-\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4q}\sin\frac{\pi}{q^2}\cos\frac{j\pi}{2q}}{\cos\frac{\pi}{2q}(\cos\frac{\pi}{q^2}-\cos\frac{\pi}{q})}$$

et nous remarquons que, comme

$$D(j-\varepsilon+\varepsilon') = B(\frac{\pi}{4q}+\frac{\varepsilon'\pi}{2q^2},\frac{j+\varepsilon}{2q}\pi),$$

l'étude de $D(j)$ nous donnera un encadrement de la fonction B, à condition de choisir $|j| \leq 2+q/2$, j ayant même parité que $q/2$. Comme $D(j)$ est une fonction paire, nous nous limiterons aux valeurs positives de j. Alors,

$$D'(j) = \frac{-\frac{\pi}{q}\sin\frac{\pi}{q}\sin\frac{j\pi}{2q^2}+\pi\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4q}\sin\frac{\pi}{q^2}\sin\frac{j\pi}{2q}}{2q\cos\frac{\pi}{2q}(\cos\frac{\pi}{q^2}-\cos\frac{\pi}{q})}$$

$$\geq \frac{\pi\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4q}\sin\frac{\pi}{q^2}(\sin\frac{j\pi}{2q} - 2\frac{j}{q})}{2q\cos\frac{\pi}{2q}(\cos\frac{\pi}{q^2} - \cos\frac{\pi}{q})}$$

est positive si $0 \leq j \leq q/2$, ce qui nous montre que $D(j)$ est croissante sur $\left[0\ ,\ \frac{q}{2}\right]$.

En outre,

$$D(\tfrac{q}{2}+i) - D(\tfrac{q}{2}-i) = \frac{\sin\frac{\pi}{4q}(\sin\frac{\pi}{q^2}\sin\frac{i\pi}{2q} - \sin\frac{\pi}{q}\sin\frac{i\pi}{2q^2})}{\cos\frac{\pi}{2q}(\cos\frac{\pi}{q^2} - \cos\frac{\pi}{q})}$$

est positif si $i = 1$ et nul si $i = 2$, donc, si $\frac{q}{2}$ est pair,

$$\inf D(j) = D(0) \quad , \quad \sup D(j) = D(\tfrac{q}{2}) \ ,$$

et, si $\frac{q}{2}$ est impair,

$$\inf D(j) = D(1) \geq D(0) \quad , \quad \sup D(j) = D(\tfrac{q}{2}+1),$$

ce qui nous donne les encadrements annoncés.

COROLLAIRE. Si q est un entier pair, il existe une constante $C_q > 2$, ne dépendant que de q, telle que, pour tout entier positif m,

$$\sum_{n=1}^{2^m} G(m,n) \geq C_q^m\, G(m\ ,\ 2^m).$$

Démonstration. D'après les propositions 4 et 6,

$$G(m\ ,\ 2^m) \leq \frac{\frac{4}{q}\sin\frac{\pi}{2q}(\cos\frac{\pi}{2q^2} - \sin\frac{\pi}{2q^2}\cos\frac{\pi}{2q}}{\cos\frac{\pi}{q^2} - \cos\frac{\pi}{q}}$$

$$\sum_{n=1}^{2^m} G(m,n) \geq \frac{\frac{4}{q}\cos\frac{\pi}{4q}(\sin\frac{\pi}{q} - \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4q}\sin\frac{\pi}{q^2})}{\cos\frac{\pi}{2q}(\cos\frac{\pi}{q^2} - \cos\frac{\pi}{q})}$$

et il nous reste à vérifier que

$$2\sin\frac{\pi}{2q}(\cos\frac{\pi}{2q^2} - \sin\frac{\pi}{2q^2}\cos\frac{\pi}{2q}) < \frac{\cos\frac{\pi}{4q}}{\cos\frac{\pi}{2q}}(\sin\frac{\pi}{q} - \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4q}\sin\frac{\pi}{q^2})$$

c'est-à-dire

$$2\cos\frac{\pi}{2q}\left(\cos\frac{\pi}{2q^2}-\cos\frac{\pi}{4q}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi}{q^2} < 2\cos^2\frac{\pi}{2q}\sin\frac{\pi}{2q^2}.$$

Si $q \geq 6$, les inégalités $\cos x < 1$, $\sin x < x$, $x - x^3/6 < \sin x$, ainsi que

$$\cos^2\frac{\pi}{2q} \geq \cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4},$$

nous montrent que le corollaire aura lieu si

$$\frac{\pi}{16}+\frac{\sqrt{2}}{2} < \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5000}\right) < \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{10}{48q^4}\right).$$

Comme $0{,}2 + 0{,}71 < 0{,}93 \times 0{,}99$, le corollaire est bien vérifié.

Pour conclure, il nous reste à vérifier l'inégalité de départ pour $q = 4$. Nous reviendrons sur ce calcul élémentaire dans la quatrième partie.

La démonstration des théorèmes 1 et 2 est alors achevée si $q > 4$: le théorème 1 découle de la proposition 2 et du corollaire des propositions 3 et 5, et le théorème 2 de la proposition 2 et du corollaire des propositions 4 et 6. En effet, la proposition 2 nous assure que $G(m\,,\,2^m)$ et $\|\exp 2^m if\|$ croissent de la même façon, ainsi que

$$\sum_{n=2^{m-1}+1}^{2^m} G(m,n) \quad \text{et} \quad \sum_{n=2^{m-1}+1}^{2^m} \|\exp nif\|.$$

Comme $G(m,n) = G(m\,,\,2^m-n)$, nous en déduisons les théorèmes 1 et 2 en remarquant que

$$\sum_{n=1}^{2^m} \|\exp nif\| = \sum_{k=1}^{m} \sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} \|\exp nif\|$$

et que, d'après les propositions 2, 5 et 6

$$\sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} \|\exp nif\|$$

est le terme général d'une suite à croissance exponentielle.

Nous allons maintenant établir les théorèmes 1 et 2 lorsque $q \leq 4$, et étudier ce cas en détails.

4. ETUDE INFORMATIQUE ET MATHEMATIQUE DES CAS $q=3$ ET $q=4$.

Nous traduisons tout d'abord les propositions 3, 4, 5 et 6 dans ces cas :

Si $q=3$, si $m \geq 2$,

$$(1{,}2931)^m \leq G(m,2^m) \leq (1{,}3131)^m$$

$$(1{,}2440)^m \leq 2^{-m} \sum_{n=1}^{2^m} G(m,n) \leq (1{,}2880)^m.$$

Si $q=4$ et $m \geq 2$,

$$(1{,}2506)^m \leq G(m,2^m) \leq (1{,}2650)^m$$

$$(1{,}2670)^m \leq 2^{-m} \sum_{n=1}^{2^m} G(m,n) \leq (1{,}2775)^m.$$

Nous obtenons donc encore les théorèmes 1 et 2 dans ce cas, et nous pouvons en outre préciser le résultat : si m est assez grand, si $N = 2^m$,

si $q=3$

$$N^{0{,}3708} < \|\exp Nif\| < N^{0{,}3930}$$

$$N^{0{,}3149} < \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \|\exp nif\| < N^{0{,}3652}$$

si $q=4$

$$N^{0{,}3226} < \|\exp Nif\| < N^{0{,}3392}$$

$$N^{0{,}3414} < \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \|\exp nif\| < N^{0{,}3534}.$$

Nous pouvons alors constater que la précision obtenue est très éloignée de celle de l'informatique : Henri Leredde a fait calculer par un ordinateur les valeurs numériques des termes des suites $G(m,n)$ pour $q=3$ et $q=4$, lorsque m varie de 1 à 8 ; si l'ensemble des résultats obtenus est trop important pour pouvoir trouver place ici, il nous suffit de retenir :

si $q = 3$, si $1 \leq m \leq 8$,

$$G(m, \left[2^m - (-1)^m\right]/3) \leq G(m,n) \leq G(m,2^m) ;$$

si $q = 4$, si $1 \leq m \leq 8$,

$$G(m,2^m) \leq G(m,n) \leq G(m , \left[2^m - (-1)^m\right]/3) ;$$

ceci nous conduit à prêter une attention particulière aux suites

$$u_m = G(m , 2^m) , v_m = G(m, \left[2^m-(-1)^m\right]/3) , w_m = \sum_{n=1}^{2^m} G(m,n).$$

Ces suites étant de type exponentiel, nous ne donnerons pas les valeurs des termes de ces suites, mais celles des quotients de deux termes consécutifs.

$q = 3$

m	u_{m+1}/u	v_{m+1}/v_m	$\frac{1}{2}\, w_{m+1}/w_m$
1	1,293128414	1,26833	1,265749
2	1,296976862	1,26085	1,273312
3	1,296595028	1,26014	1,273147
4	1,296632933	1,25728	1,273193
5	1,296629166	1,25805	1,273195
6	1,296629540	1,25752	1,273207
7	1,296629504	1,25766	1,273208

$q = 4$

m	u_{m+1}/u_m	v_{m+1}/v_m	$\frac{1}{2}\, w_{m+1}/w_m$
1	1,25066056	1,29186	1,2712586
2	1,25713443	1,27410	1,2735878
3	1,25804718	1,28211	1,2733395
4	1,25817499	1,27730	1,2732882
5	1,25819288	1,27946	1,2732678
6	1,25819538	1,27822	1,2732658
7	1,25819573	1,27886	1,2732647

Ces résultats nous permettent de supposer que, si $m \geq 8$,

si $q = 3$,

$$1{,}29662950 \leq u_{m+1}/u_m \leq 1{,}29662954$$

$$1{,}2575 \leq v_{m+1}/v_m \leq 1{,}2577$$

$$1{,}27321 \leq \frac{1}{2}\, w_{m+1}/w_m \leq 1{,}27324$$

si $q = 4$

$$1{,}258195 \leq u_{m+1}/u_m \leq 1{,}258198$$

$$1{,}2782 \leq v_{m+1}/v_m \leq 1{,}2789$$

$$1{,}27325 \leq \frac{1}{2}\, w_{m+1}/w_m \leq 1{,}27327 .$$

En admettant ces encadrements, nous pouvons en déduire que, si m est assez grand, si $N = 2^m$, si $M = \left[2^{m+1} - (-1)^{m+1}\right]/3 = 2^m - \left[2^m - (-1)^m\right]/3$, si $q = 3$,

$$N^{0,37476630} \le \|\exp Nif\| \le N^{0,37476635}$$

$$M^{0,3305} \le \|\exp Mif\| \le M^{0,3308}$$

$$N^{0,34847} \le \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \|\exp nif\| \le N^{0,34851}$$

si $q = 4$,

$$N^{0,331355} \le \|\exp Nif\| \le N^{0,331360}$$

$$M^{0,3540} \le \|\exp Mif\| \le M^{0,3550}$$

$$N^{0,34851} \le \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \|\exp nif\| \le N^{0,34855}.$$

Ici encore, comme dans la remarque des propositions 3 et 4, il est intéressant de comparer les résultats obtenus aux résultats "prévisibles". Comme $4/\pi \simeq 1,27324 \simeq 2^{0,34850}$, nous constatons que $\|\exp Nif\|$ et $\|\exp Mif\|$ ont une croissance située de part et d'autre de $N^{4/\pi}$, tandis que les résultats concernant $\Sigma\, \|\exp nif\|$ ne permettent pas de conclure avec certitude.

Comme ces résultats ne peuvent être considérés comme rigoureusement démontrés, nous allons maintenant établir, dans les cas $q = 3$ et $q = 4$, une évaluation de $G(m\ ,\ [2^m-(-1)^m]/3)$ par des méthodes mathématiques. Pour cela, nous utiliserons une méthode analogue à celle employée pour démontrer les propositions 3 et 4 : nous écrivons

$$G\left(m,\frac{2^m-(-1)^m}{3}\right) = 2 \sum_{p=1}^{q^{m-1}} \left(\frac{2}{q}\right)^m F\left(m-1\ ,\ \frac{2^m-(-1)^m}{3},p\right) u\left(\frac{p\pi}{q^m},\frac{(-1)^m\pi}{2^m}\right),$$

$$G\left(m+1,\frac{2^{m+1}-(-1)^{m+1}}{3}\right) = 2 \sum_{p=1}^{q^{m-1}} \left(\frac{2}{q}\right)^{m+1} F\left(m-1,\frac{2^{m+1}-(-1)^{m+1}}{3},p\right) v\left(\frac{p\pi}{q^m}\ ,\ \frac{(-1)^m\pi}{2^m}\right)$$

où les fonctions u et v sont définies par

$$u(\theta\,,\alpha) = \sum_{k=1}^{q} \left|\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{3} - \theta - \frac{k\pi}{q}\right)\right|$$

$$v(\theta,\alpha) = \sum_{k=1}^{q^2} \left|\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}-\theta-\frac{k\pi}{q}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{6}-\frac{\theta}{q}-\frac{k\pi}{q^2}\right)\right|.$$

Nous remarquons alors que

$$F\left(m-1,\ \frac{2^{m+1}-(-1)^{m+1}}{3},p\right) = F\left(m-1,\frac{2^m-(-1)^m}{3},q^m-p\right)$$

et que α tend vers 0 lorsque m augmente indéfiniment. Comme u et v sont des fonctions continues, nous obtenons l'encadrement, pour m assez grand,

$$\inf \frac{2\,v(\theta,0)}{q\,u(-\theta,0)} - 10^{-5} \leq \frac{G(m+1,\ \left[2^{m+1}-(-1)^{m+1}\right]/3)}{G(m,\ \left[2^m-(-1)^m\right]/3)} \leq \sup \frac{2\,v(\theta,0)}{q\,u(-\theta,0)} + 10^{-5}\ ,$$

et nous sommes donc conduits à chercher les extrema de la fonction $\dfrac{v(\theta,0)}{u(-\theta,0)}$.

PROPOSITION 7. Si $q=3$, si m est un entier assez grand,

$$1{,}2338 \leq \frac{G(m+1\ ,\ \left|2^{m+1}-(-1)^{m+1}\right|/3)}{G(m,\ \left|2^m-(-1)^m\right|/3}\leq 1{,}2732 < \frac{4}{\pi}.$$

Démonstration. si $-\frac{\pi}{6}\leq\theta\leq\frac{\pi}{6}$,

$$u(-\theta,0) = 2\cos\theta\ ,$$

$$v(\theta,0) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{9}+\frac{\theta}{3}\right) + 2\cos\theta\ \cos\left(\frac{\pi}{9}-\frac{\theta}{3}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)\cos\frac{\theta}{3}\ ,$$

d'où nous déduisons

$$\frac{v(\theta,0)}{u(-\theta,0)} = \cos\left(\frac{\pi}{9}-\frac{\theta}{3}\right) + \cos\frac{\pi}{18}\cos\left(\frac{\pi}{18}+\frac{\theta}{3}\right) - 3\ \mathrm{tg}\,\theta\ \sin\frac{\pi}{18}\sin\left(\frac{\pi}{18}+\frac{\theta}{3}\right).$$

Un calcul rapide nous montre que la dérivée seconde de cette fonction est négative sur tout le segment $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$, ce qui entraîne

$$\frac{v(\theta,0)}{u(-\theta,0)} \geq \frac{v(\pi/6,0)}{u(-\pi/6,0)} = \frac{v(-\pi/6,0)}{u(\pi/6,0)} = \cos\frac{\pi}{18}+\cos\frac{\pi}{6} \simeq 1{,}85083.$$

En outre, la dérivée de $v(\theta,0)/u(-\theta,0)$ vaut à l'origine

$$0 < \frac{\sqrt{3}}{6}\sin\frac{\pi}{9}\left(\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{6} - 3\ \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{18}\right) \leq \frac{\sqrt{3}\pi}{54}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{3\pi}{1000}\ ,$$

et est majorée, au point $\pi/100$ par

$$\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{18}\cos\frac{\pi}{9}\frac{1}{3}\,tg(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{100}) - tg(\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{300}) \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\pi}{18}\cos\frac{\pi}{9}\,(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{100}-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{100})$$

$$= 3\sin\frac{\pi}{18}\cos\frac{\pi}{9}\,\frac{100\sqrt{3}-56\pi}{900} < 0.$$

Nous en déduisons immédiatement que

$$\frac{v(\theta,0)}{u(-\theta,0)} \leq \frac{v(\theta,0)}{u(\theta,0)} + \frac{\sqrt{3}\,\pi}{1000}\,\frac{\pi}{100} \leq \frac{v(\theta,0)}{u(\theta,0)} + 18.10^{-5}$$

et nous obtenons alors la proposition, puisque

$$\frac{v(\theta,0)}{u(\theta,0)} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos\frac{\pi}{9} \simeq 1,90954.$$

PROPOSITION 8. Si $q = 4$, si m est un entier assez grand,

$$\frac{4}{\pi} < 1,2754 \leq \frac{G(m+1, \left[2^{m+1}-(-1)^{m+1}\right]/3)}{G(m, \left[2^{m}-(-1)^{m}\right]/3} \leq 1,2822.$$

Démonstration. Nous effectuons le changement de variable $\theta \to \theta - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{8}$, et nous supposons que la nouvelle variable satisfait $-\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{8}$. Le quotient $v(\theta,0)/u(-\theta,0)$ est alors changé en

$$h(\theta) = \frac{\sum_{k=1}^{16} \left|\cos(\frac{\pi}{8}-\theta-\frac{k\pi}{4})\cos(\frac{43\pi}{96}-\frac{\theta}{4}-\frac{k\pi}{16})\right|}{\sum_{k=1}^{4}\left|\cos(\theta-\frac{\pi}{8}-\frac{k\pi}{4})\right|}$$

$$\frac{\sum_{k=1}^{4}\left|\cos(\frac{\pi}{8}-\theta-\frac{k\pi}{4})\right| \sum_{j=1}^{4}\left|\cos(\frac{\pi}{8}-\frac{j\pi}{4}+\frac{7\pi}{96}-\frac{\theta}{4}-\frac{k\pi}{16})\right|}{2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}\cos\theta}.$$

Nous sommes alors contraints de séparer l'intervalle d'étude en deux segments :

1. si $\theta \in \left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{24}\right]$,

$$h(\theta) = \frac{1}{\cos\theta}\left[\cos(\frac{3\pi}{8} - \theta)\cos(\frac{11\pi}{96} + \frac{\theta}{4}) + \cos(\frac{\pi}{8} - \theta)\cos(\frac{7\pi}{96} - \frac{\theta}{4})\right.$$

$$\left. + \cos(\frac{\pi}{8} + \theta)\cos(\frac{\pi}{96} - \frac{\theta}{4}) + \cos(\frac{3\pi}{8} + \theta)\cos(\frac{5\pi}{96} + \frac{\theta}{4})\right]$$

$$= 2\cos\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{32}\cos(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{12}) + 2\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{32}\cos(\frac{\pi}{24} - \frac{\theta}{4})$$

$$- 2\,\mathrm{tg}\,\theta\left[\sin\frac{3\pi}{8}\ \sin\frac{\pi}{32}\sin(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{12}) + \sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{32}\sin(\frac{\pi}{24} - \frac{\theta}{4})\right]$$

et nous pouvons calculer la dérivée seconde de h, qui reste négative sur le segment $\left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{24}\right]$, ce qui entraîne, comme

$$h(-\frac{\pi}{8}) \simeq 2{,}56161 \qquad \text{et} \qquad h(\frac{\pi}{24}) \simeq 2{,}55100$$

la minoration de $h(\theta)$ sur $\left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{24}\right]$ par $h(\frac{\pi}{24})$.

Pour majorer $h(\theta)$, nous calculons tout d'abord

$$h'(-\frac{\pi}{12}) \simeq 0{,}00595 \qquad , \qquad h'(-\frac{\pi}{15}) \simeq -0{,}00397,$$

et nous déduisons de la concavité de h, et de la valeur

$$h(-\frac{\pi}{12}) = 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}(\cos\frac{\pi}{32}\cos\frac{\pi}{16} + \sin\frac{\pi}{32}\sin\frac{\pi}{16}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{12}) \simeq 2{,}56396$$

la majoration de h sur $\left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{24}\right]$ par

$$h(\theta) \leq h(-\frac{\pi}{12}) + 0{,}006\,\frac{\pi}{60} \leq 2{,}56428\,.$$

2. si $\theta \in \left[\frac{\pi}{24}, \frac{\pi}{8}\right]$,

$$h(\theta) = \frac{1}{\cos\theta}\left[\cos(\frac{3\pi}{8} - \theta)\cos(\frac{13\pi}{96} - \frac{\theta}{4}) + \cos(\frac{\pi}{8} - \theta)\cos(\frac{7\pi}{96} - \frac{\theta}{4})\right.$$

$$\left. + \cos(\frac{\pi}{8} + \theta)\cos(\frac{\pi}{96} - \frac{\theta}{4}) + \cos(\frac{3\pi}{8} + \theta)\cos(\frac{5\pi}{96} + \frac{\theta}{4})\right]$$

$$= 2(\cos\frac{3\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{32} + \cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{32})\cos(\frac{\pi}{24} - \frac{\theta}{4})$$

$$- 2\,(\sin\frac{3\pi}{8}\sin\frac{3\pi}{32} + \sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{32})\,\mathrm{tg}\,\theta\ \sin(\frac{\pi}{24} - \frac{\theta}{4})$$

et nous pouvons calculer la dérivée première de h, qui reste positive sur le segment $\left[\frac{\pi}{24}, \frac{\pi}{8}\right]$, ce qui entraîne

$$h(\tfrac{\pi}{24}) \leq h(\theta) \leq h(\tfrac{\pi}{8}).$$

Comme h est une fonction périodique de période $\frac{\pi}{4}$, $h(\frac{\pi}{8}) = h(-\frac{\pi}{8})$, et nous obtenons donc un encadrement de h sur $\left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right]$ en nous limitant à l'encadrement obtenu sur $\left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{24}\right]$, ce qui nous permet d'obtenir la proposition.

Nous pouvons alors déduire des propositions 7 et 8 des encadrements beaucoup moins précis que ceux que nous avons obtenus par les techniques informatiques, mais rigoureusement démontrés :

si $M = \left[2^{m+1} - (-1)^{m+1}\right]/3 = \left[2^m - (-1)^m\right]/3$, si m est assez grand,

si $q = 3$, $$M^{0,3031} \leq \|\exp Mif\| \leq M^{0,3485},$$

si $q = 4$, $$M^{0,3509} \leq \|\exp Mif\| \leq M^{0,3787}.$$

[1] DOMAR, Y. Publ. Math. Orsay, n° 118 (1974).

[2] KAHANE, J.-P. J. Math. pures et appl. 35(1956), 249-259.

[3] KATZNELSON, Y. Ann. Sc. Ec. Norm. sup. 76 (1958), 83-124.

[4] LEBLANC, N. C. R. Acad. Sc. Paris, série A, 275 (1972), 1069-1072.

[5] ZYGMUND, A. Trigonometric series. Cambridge Univ. Press, vol. 1, éd. 1968, 241-242.

SUR LES ZEROS ET LES INSTANTS DE RALENTISSEMENT DU MOUVEMENT BROWNIEN

par J.-P. Kahane

Soit $X(t) = X_\omega(t)$ la fonction du mouvement brownien linéaire partant de 0 ($t \in \mathbb{R}^+$, $\omega \in \Omega$, $X(t) \in \mathbb{R}$, $X(0) = 0$), et soit

$$E_c = \left\{ t \in \mathbb{R}^+ \ ; \ \overline{\lim_{h \to 0}} \frac{|X(t+h) - X(t)|}{\sqrt{|h|}} < c \right\}.$$

On sait que E_c est p. s. vide quand $c > 0$ est assez petit (A. Dvoretzky[(1)]), non vide quand c est assez grand, et que de plus sa dimension de Hausdorff satisfait à la double inégalité

$$-\alpha c^2 < \log(1 - \dim E_c) < -\beta c^2$$

quand c est assez grand, α et β étant des constantes positives convenables[(2)]. Cela rend plausible que, pour c assez grand, E_c rencontre l'ensemble $\mathcal{E}$ des zéros de X. Nous allons montrer qu'il en est bien ainsi.

THEOREME. <u>Si</u> $c > 0$ <u>est assez grand</u>, $\mathcal{E} \cap E_c \neq \emptyset$ <u>p. s.</u>

La signification graphique est que, lorsque le soleil est assez haut dans le ciel, il existe p. s. des points t de $\mathcal{E}$ auquel le graphe de X^2, convenablement restreint au voisinage de t, ne porte jamais ombre. On va montrer un peu plus. Désignons par $H(t)$ la plus petite fonction $\geq X^2(t)$ sur $\mathbb{R}^+$, et localement constante sur $\mathbb{R} \setminus \mathcal{E}$; il existe des points t de $\mathcal{E}$ auquel le graphe de H, restreint au voisinage de t, ne porte pas ombre quand il est éclairé par des rayons de pente $\pm c^2$.

Démonstration. Rappelons la construction de $\mathcal{E}$ et de H suivant Paul Lévy ([3], chap. 6). Dans le quart de plan $\theta \geq 0$, $t \geq 0$, considérons une mesure de Poisson associée à la mesure $\sigma(d\theta\ dt) = (2\pi)^{-1/2}\, t^{-3/2}\, d\theta\ dt$, c'est-à-dire une mesure aléatoire P_σ qui, à chaque borélien B dans le quart de plan, fait correspondre $P_\sigma(B)$, variable aléatoire de Poisson de paramètre $\sigma(B)$. La mesure P_σ est une somme de masses unités portée par des points (θ_n, t_n). Posons $T(\theta) = \sum_{\theta_n < \theta} t_n$, $e_n =]T(\theta_n+0) - T(\theta_n-0)[$, et prenons pour $\mathcal{E}$ l'adhérence de l'image $T(\mathbb{R}^+)$. Les e_n sont les intervalles contigüs à $\mathcal{E}$; ils sont ordonnés suivant l'ordre des θ_n et la longueur de e_n est t_n. Soit η_n une suite de variables aléatoires positives, mutuellement indépendantes et indépendantes en bloc de P_σ, équidistribuées et ayant pour distribution le carré du maximum du pont brownien construit sur $[0,1]$; on vérifie que $\log \Pr(\eta_n > \lambda) \approx -\lambda$ quand $\lambda \to \infty$. Prenons pour H la fonction égale à $H_n = t_n \eta_n$ sur e_n et à 0 sur $\mathcal{E}$. La distribution de $(\mathcal{E}, H)$ est la distribution voulue.

Au lieu du quart de plan $\theta \geq 0$, $t \geq 0$, nous allons partir de la bande $0 \leq \theta \leq 1$, $t \geq 0$; cela revient à ne considérer $\mathcal{E}$ et H que sur l'intervalle $[0, T(1)]$.

Pour c assez grand, on va construire une suite (aléatoire) d'intervalles fermés I_n contenus dans $[0,1]$ tels que p. s. 1°) θ_n soit intérieur à I_n 2°) I_n soit de l'une des formes $[\theta'_m, \theta''_m]$, $[0, \theta''_m]$, $[\theta'_m, 1]$, avec $t'_m > c^{-2}H_n$ et $t''_m > c^{-2}H_n$ 3°) $]0,1[\setminus \overline{\lim}\, I_n \neq \emptyset$. Soit alors $\theta \in]0,1[\setminus \overline{\lim}\, I_n$. Choisissons $t = T(\theta)$. On a $t \in \mathcal{E}$ et, pour tout n sauf un nombre fini, la distance de t à e_n dépasse $c^{-2}I_n$; c'est le résultat cherché.

Soit N un entier, à choisir plus tard. Supposons $c \geq N^3$. Soit

$$M_o = \left\{ n \ ; \ \eta_n < N^2 \right\}$$

$$M_k = \left\{ n \ ; \ N^{2k} \leq \eta_n < N^{2k+2} \right\} \qquad (k \geq 1)$$

$$M^o = \left\{ n \ ; \ t_n \geq 1 \right\}$$

$$M^j = \left\{ n \ ; \ N^{-2j} \leq t_n < N^{-2j+2} \right\} \quad (j \geq 1).$$

Posons $\Theta_k^j = \left\{ \theta_n \ ; \ n \in M^j \cap M_k \right\}$. C'est le support d'une mesure de Poisson sur $[0, 1]$, associée à la mesure $p_j q_k \, d\theta$ (on dira désormais : ensemble de Poisson de densité $p_j q_k$), où

$$p_o = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_1^\infty t^{-\frac{3}{2}} dt = (8\pi)^{-\frac{1}{2}}$$

$$p_j = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{N^{-2j}}^{N^{-2j+2}} t^{-\frac{3}{2}} dt = (8\pi)^{-\frac{1}{2}} (N-1) N^{j-1}$$

$$q_o = \Pr(\eta_n < N^2)$$

$$q_k = \Pr(N^{2k} \leq q_n < N^{2k+2}) \ ;$$

c'est-à-dire que le nombre de points de Θ_k^j sur un intervalle de longueur ℓ donné (inclus dans $[0, 1]$) est une variable de Poisson de paramètre $\ell p_j q_k$. De plus les Θ_k^j sont mutuellement indépendants.

Mettons en place successivement

$$\Theta_o^o, \ \Theta_1^1, \ \Theta_2^2, \ \ldots$$

$$\Theta_o^1, \ \Theta_1^2, \ \Theta_2^3, \ \ldots$$

$$\Theta_o^2, \ \Theta_2^3, \ \Theta_2^4, \ \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

La réunion des ensembles Θ de la i-ème ligne est un ensemble de Poisson Θ^i de densité $\alpha_i = p_i q_o + p_{i+1} q_1 + p_{i+2} q_2 + \ldots$ (voisine de p_i si N est grand). Quand $\theta_n \in \Theta^i$, on a $n \in M_k \cap M^{i+k}$ pour un k convenable, donc $H_n = t_n \eta_n < N^{-2i+4}$, donc $c^{-2} H_n < N^{-2i-2}$. Pour $\theta_n \in \Theta^i$, définissons I_n comme le sous-intervalle de $[0,1]$ d'extrémités

$$\sup(\theta \in \Theta_o^{i+1}, \theta < \theta_n) \qquad , \qquad \inf(\theta \in \Theta_o^{i+1}, \theta > \theta_n).$$

Les conditions 1°) et 2°) sont visiblement satisfaites. Reste à montrer que, pour N assez grand, 3°) l'est aussi. Pour cela, désignons par E_i le complémentaire de l'ensemble $\cup I_n$ $(\theta_n \in \underset{0\leq j\leq i-1}{} \Theta^j)$ par rapport à $[0,1]$, par $|E_i|$ sa mesure, par a_i le cardinal de $E_i \cap \Theta_o^i$ et par b_i le cardinal de $E_i \cap (\Theta^i \setminus \Theta_o^i)$. Lorsque Θ_o^i est en place (donc aussi E_i), b_i est une variable de Poisson de paramètre $(d_i - p_i q_o)\,|E_i| = \varepsilon\, p_i\,|E_i|$ (ε est petit si N est grand), et $\mathrm{card}(E_i \cap \Theta_o^{i+1})$ une variable de Poisson de paramètre $p_{i+1} q_o |E_i|$, qui majore a_{i+1}. On obtient E_{i+1} à partir de E_i et Θ_o^{i+1} en supprimant de E_i au plus $(a_i + b_i)$ composantes connexes de $E_i \setminus \Theta_o^{i+1}$. On voit ainsi que pour N assez grand on a une probabilité strictement positive d'avoir pour tout i $|E_{i+1}| > \frac{1}{2}|E_i|$ et $a_i + b_i < \frac{3}{N} p_{i+1} |E_i|$ (il est commode d'utiliser le fait que, si δ est assez petit, la mesure de la réunion des $[\delta p]$ plus grandes composantes connexes de $[0,1] \setminus \Theta$, où Θ est un ensemble de Poisson de densité p, dépasse $\frac{1}{2}$ avec une probabilité inférieure à $\frac{1}{p}$). Donc, pour N assez grand, $\Pr(\cap E_i \neq \emptyset) > 0$ et, par la loi du zéro-un la condition 3°) est satisfaite.

Remarques. 1. Soit $d = d(c)$ la dimension de l'ensemble $[0,1] \setminus \overline{\lim}\, I_n$. La dimension de son image par T est p. s. $\frac{1}{2} d$. On obtient ainsi une minoration de la dimension de $E_c \cap \mathcal{E}$.

2. On vérifie plus facilement que $\mathcal{E}$ contient aussi p. s. des points "rapides", c'est-à-dire où $\overline{\lim\limits_{h\to 0}} \dfrac{|X(t+h) - X(t)|}{\sqrt{|h| \log(1/|h|)}} > 0$. Cela tient à ce que, pour un β convenable, on a

$$\Sigma \Pr(H_n > \beta t_n \log \frac{1}{t_n}) = \infty .$$

Des résultats précis sur les points rapides ont été établis par S. Orey et S. J. Taylor[4].

3. La démonstration du théorème peut être illustrée par l'exercice que voici. Soit E_ξ l'ensemble de Cantor $\left\{ \sum\limits_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \xi^m (1-\xi) \; ; \; \varepsilon_n = 0 \text{ ou } 1 \right\}$ $(0 < \xi < 1/2)$ et soit H la fonction, nulle sur E_ξ et hors de $[0,1]$, et égale sur chaque intervalle contigu à E_ξ à la longueur de cet intervalle. Pour quelle inclinaison de rayons le graphe de H porte-t-il ombre sur E_ξ ? On vérifie que l'inclinaison critique est $\xi^3(1-2\xi)^{-1}$, et que les points de E_ξ qui restent éclairés le plus longtemps sont les préimages des points $\dfrac{p}{3 \times 2^n}$ par la fonction de Lebesgue de E_ξ.

4. La signification du théorème est aussi que, pour c assez grand, l'ensemble image $X(E_c)$ est p. s. de mesure pleine sur $\mathbb{R}$. On l'améliorerait en démontrant que pour c assez grand $X(E_c) = \mathbb{R}$ p. s..

(1) A. DVORETZKY Israël J. Math. 1 (1963), 212-214.

(2) J.-P. KAHANE C. R. Acad. Sc. Paris 278, série A (1974).

(3) P. LEVY Processus stochastiques et mouvement brownien. Gauthier-Villars 1948.

(4) S. OREY, S. J. TAYLOR Proc. London Math. Soc. 28 (1974), 174-192.

ON THE THEOREM OF IVASEV-MUSATOV. I.

by T. W. Körner

ABSTRACT. We give a new version of Ivasev-Musatov's construction of a measure whose support has Lebesgue measure zero but whose Fourier transform drops away extremely rapidly.

1. INTRODUCTION. If μ is a measure on the circle $\mathbf{T} = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ and $\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{\mu}(n)|^2$ converges, then μ must be an L^2 function and so have for support a set of Lebesgue measure greater than zero.

If $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(n)|^2$ diverges, can we always find a measure $\mu \neq 0$ with support of Lebesgue measure zero such that $|\varphi(|n|)| \geq |\hat{\mu}(n)|$ $[n \neq 0]$? Standard results on measures with $\hat{\mu}(n) = 0$ except when $|n| = 3^m$ $[m \geq 1]$ show that the answer is no ([5] Vol. I., p. 202). However, in a series of remarkable papers ([1], [2], [3]) Ivasev-Musatov obtained the following result.

THEOREM 1.1'. *If $\varphi(n)$ is a decreasing positive sequence such that $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(n)|^2$ diverges and if the behaviour of $\varphi(n)$ is sufficiently regular, then we can find a positive measure $\mu \neq 0$ with support of Lebesgue measure zero yet with*

$$|\hat{\mu}(n)| = O(\varphi|n|).$$

More precisely, he proved the following theorem (The reader may check that our statement is equivalent to that of Theorem 1.

THEOREM 1.1. Suppose $\varphi(n)$ is a decreasing positive sequence such that

1) $\sum_{1}^{\infty}(\varphi(n))^2$ diverges

2) $n(\varphi(n))^2 \to 0$ as $n \to \infty$

3) $n^{1+\varepsilon}(\varphi(n))^2 \to \infty$ as $n \to \infty$ for all $\varepsilon > 0$

4) We can find an m such that $n^m \varphi(n)$ is an increasing sequence.

Then we can find a positive measure μ with support of Lebesgue measure 0 yet with

$$\hat{\mu}(n) = 0(\varphi(|n|)) \quad \text{as} \quad |n| \to \infty.$$

Although this theorem is deservedly famous, the proof has a reputation for difficulty which has deterred many people from trying to understand it.

In this paper I shall try to simplify and rewrite the proof in the (mathematical) language of Kahane and Salem [4]. I hope that the approach that I have adopted will be found easier and more transparent but, even if this hope is groundless, the existence of two accounts must be helpful.

It turns out that the result we prove is rather stronger and simpler than the original one of Ivasev-Musatov.

THEOREM 1.2. Suppose $\varphi(n)$ is a positive sequence such that

(A) $\sum_{1}^{\infty}(\varphi(n))^2$ diverges

(B) There exists a $K > 1$ such that for all $n \geq 1$ we have $K^{-1}\varphi(n) \leq \varphi(r) \leq K\varphi(n)$ whenever $n \leq r \leq 2n$

(C) $n\varphi(n) \to \infty$ as $n \to \infty$.

Then we can find a positive measure $\mu \neq 0$ with support E of Lebesgue measure zero yet with

$$|\hat{\mu}(n)| = o(\varphi(|n|)) \quad \text{as} \quad |n| \to \infty.$$

By making various modifications, it is possible to weaken condition (C). However, I want to give the proof in its simplest form, and so I shall defer discussion of this to a second paper. (For example, it can be shown that if $\varphi(n)$ is decreasing, then condition (C) can be dropped altogether.)

The reputation for difficulty of the original proof of Ivasev-Musatov of which this is an adaptation, is also the meason why I give my argument in a more detailed and leisurely manner than is customary.

Before starting on the argument proper, we make two conventions. Note first that if $\varphi(n) > 0$ has properties (A), (B) and (C), so does $\min(1, \varphi(n))$. Thus, without loss of généralité, we may suppose for the rest of the paper that $\varphi(n)$ is a fixed positive sequence having properties (A), (B), (C) and

(D) $\varphi(n) \leq 1$ for all $n \geq 1$.

We shall write $|E|$ for the Lebesgue measure of a closed set E.

2. The standard part of the construction.

In this section we show that the construction of μ is quite easy once we have the following lemma.

LEMMA 2.1. Given $\varepsilon, \eta > 0$ we can find an $f \in C(\mathbf{T})$ such that

(i) $f(t) \geq 0$ for all $t \in \mathbf{T}$

(ii) $|\text{supp } f| \leq \eta$

(iii) $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} f(t)\, dt = 1$

(iv) $|\hat{f}(r)| \leq \varepsilon \varphi(|r|)$ for all $r \neq 0$

(v) f is infinitely differentiable.

We start by proving the following consequence of Lemma 2.1.

LEMMA 2.2. We can find a sequence of functions $g_1, g_2, g_3 \ldots \in C(\mathbf{T})$ such that

$(1)_n$ $g_n(t) \geq 0$ for all $t \in \mathbf{T}$

$(2)_n$ $|\text{supp } g_n| \leq 2^{-n}$

$(3)_n$ $2 - 2^{-n} \geq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} g_n(t)\, dt \geq 2^{-1} + 2^{-n}$

$(4)_n$ $|\hat{g}_n(r)| \leq (1-2^{-n}) \varphi(|r|)$ for all $r \neq 0$

$(5)_n$ g_n is infinitely differentiable and, when $n \geq 2$,

$(6)_n$ $\text{supp } g_n \subseteq \text{supp } g_{n-1}$.

Proof. We construct $g_1, g_2, g_3, \ldots$ inductively. The existence of a suitable g_1 follows directly from Lemma 2.1 on setting $\varepsilon = \eta = 1/2$.

Now suppose g_n has been constructed. Since g_n is infinitely differentiable, it follows that $|\hat{g}_n(r)| \leq Ar^{-2}$ for all $r \neq 0$ and some constant A. Choose f as in Lemma 2.1 with $\eta = 2^{-n-1}$ and $\varepsilon > 0$ to be determined. We claim that, provided only that ε is small enough, $g_{n+1} = fg_n$ will satisfy condition $(1)_{n+1}$ to $(6)_{n+1}$.

Indeed, conditions $(1)_{n+1}$, $(2)_{n+1}$, $(5)_{n+1}$, $(6)_{n+1}$ are trivial consequences of $(1)_n$ and (i), (ii), $(5)_n$ and (v), and the relation $\text{supp } g_{n+1} \subseteq \text{supp } f \cap \text{supp } g_n$ respectively. To prove $(3)_{n+1}$ and $(4)_{n+1}$ we note first that

$$
\begin{aligned}
|\hat{g}_{n+1}(r) - \hat{g}_n(r)| &= |(g_n f)\hat{\ }(r) - \hat{g}_n(r)\hat{f}(0)| \\
&= \Big|\sum_{m\neq r} \hat{g}_n(m)\hat{f}(r-m)\Big| \\
&\leq \sum_{m\neq r} |\hat{g}_n(m)|\,|\hat{f}(r-m)| \\
&= \sum_{|m|\leq r/2} |\hat{g}_n(m)|\,|\hat{f}(r-m)| + \sum_{\substack{|m|\geq r/2 \\ m\neq r}} |\hat{g}_n(m)|\,|\hat{f}(r-m)| \\
&\leq \varepsilon \sum_{|m|\leq r/2} |\hat{g}_n(m)|\,|\varphi(|r-m|)| + \varepsilon \sum_{\substack{|m|\geq r/2 \\ m\neq r}} |\hat{g}_n(m)|\,\varphi(|r-m|).
\end{aligned}
$$

If $r = 0$ we observe that, by condition (D), $\varphi(|r-m|) \leq 1$ for $m \neq r$ and so

$$
\begin{aligned}
\Big|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{T}} g_{n+1}(t)\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{T}} g_n(t)\,dt\Big| &= |\hat{g}_{n+1}(0) - \hat{g}_n(0)| \\
&\leq \varepsilon \sum_{m\neq 0} |\hat{g}_n(m)| \\
&\leq \varepsilon A \sum_{m\neq 0} m^{-2} \\
&\leq 10\varepsilon A
\end{aligned}
$$

so, provided only that $\varepsilon \leq 2^{-n-1}/10A$, condition $(3)_{n+1}$ follows from $(3)_n$.

If $r \neq 0$, we also use condition (B) to tell us that $\varphi(|r-m|) \leq K\,\varphi(|r|)$ for all $|m| < r/2$ and thus

$$
\begin{aligned}
|\hat{g}_{n+1}(r) - \hat{g}_n(r)| &\leq \varepsilon K\varphi(|r|) \sum_{|m|<r/2} |\hat{g}_n(m)| + \varepsilon \sum_{|m|\geq r/2} |\hat{g}_n(m)| \\
&\leq \varepsilon K\varphi(|r|) \sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{g}_n(m)| + \varepsilon A \sum_{|m|\geq r/2} m^{-2} \\
&\leq \varepsilon K\varphi(|r|)(10A + 2) + 10\,\varepsilon A\,|r|^{-1} \\
&\leq \varepsilon\varphi(|r|)((10A+2)K + 10A \sup_{k\geq 1} (k\varphi(k))^{-1})
\end{aligned}
$$

so, taking $\varepsilon \leq 2^{-n-1}/((10A+2)K + 10A \sup_{k\geq 1} (k\varphi(k))^{-1})$, we can make condition $(4)_{n+1}$ follow from $(4)_n$. The induction can now be restarted.

Remark. Note that condition (A) was not used in the argument above and that, by tightening the inequalities, we could have used very much weaker conditions than (B) and (C). The key to the proof does not lie in this section.

Using Lemma 2.2 it is easy to prove Theorem 1.2.

Proof of Theorem 1.2. Let $d\mu_n(t) = f_n(t)\frac{dt}{2\pi}$ so that μ_n is a measure on $\mathbf{T}$. By $(3)_n$, $\|\mu_n\| \leq 2$ and so the sequence μ_n must have a weak $*$ limit point μ. (In fact it is easy to see without appealing to general theorems but with a little extra work that the μ_n constructed in the proof of Lemma 2.2 actually have a weak $*$ limit μ).

By $(1)_n$, $\mu_n \in M^+(\mathbf{T})$ for all $n \geq 1$, so $\mu \in M^+(\mathbf{T})$. By $(6)_n$, $\operatorname{supp} \mu \subseteq \operatorname{supp} \mu_m$ for all $m \geq 1$ so that, using $(2)_n$ we have $|\operatorname{supp} \mu| \leq 2^{-m}$ for all $m \geq 1$. Thus $\operatorname{supp} \mu$ has Lebesgue measure 0. By $(4)_n$, $|\hat{\mu}_n(r)| \leq \varphi(|r|)$ for all $n \geq 1$ and so $|\hat{\mu}(r)| \leq \varphi(|r|)$ for all $r \neq 0$. Finally, by $(3)_n$, $\hat{\mu}_n(0) \geq 2^{-1}$ for all $n \geq 1$ so that $\hat{\mu}(0) \geq 2^{-1}$ and μ is a non zero measure.

3. Van der Corput's lemma. It is my opinion that in order to understand the original or the present proof of the theorem of Ivasev-Musatov, it is necessary not merely to know but also to understand the lemma of Van der Corput.

If the reader is clear in his own mind how this lemma works he should skip at once to the next section, pausing only to convince himself of the truth of Lemma 3.3 (the constant $\pi/2$ is not essential and can be replaced by any other). If not, we shall give a leisurely account which should be compared with the standard, much faster, proof in e. g. ([5] Vol. I, p. 197).

LEMMA 3.1.

(i) Dirichlet. If $t_o \geq t_1 \geq t_2 \ldots \geq t_n \geq 0$, then $0 \leq \sum_{r=0}^{n} (-1)^r t_r \leq t_o$.

(ii) If $n \geq m$ and $t_o \geq t_1 \geq \ldots \geq t_n \geq 0$, then

$$\left| \sum_{r=0}^{n} t_r \exp(ir\pi/m) \right| \leq \sum_{r=0}^{m-1} t_r.$$

Proof. (i)
$$\begin{aligned} t_o &\geq t_o - (t_2-t_3) - (t_4-t_5) - \ldots \\ &= \sum_{r=0}^{n} (-1)^r t_r \\ &\geq (t_o-t_1) + (t_2-t_3) + \ldots \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} \left| \sum_{r=0}^{n} t_r \exp(i\, r\pi/m) \right| &\leq \sum_{k=0}^{m-1} \left| \sum_{0\leq k+qm\leq n} t_{k+qm} \exp(i(q+k/m)\,\pi) \right| \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \left| \sum_{0\leq k+qm\leq n} (-1)^q\, t_{k+qm} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{m-1} t_k \end{aligned}$$

using (i).

LEMMA 3.2 (Van der Corput) (i) If $h : [a,b] \to R$ has increasing derivative h' and there exists a $\lambda > 0$ such that $h'(u) \geq \lambda$ for all $u \in (a,b)$ [or $h'(u) \leq -\lambda$ for all $u \in (a,b)$] then

$$\left| \int_a^b \exp(i\,h(u))\, du \right| \leq \frac{\pi}{\lambda}.$$

Proof. We do the case $h'(u) \geq \lambda$. Choose an m and let t_r be the time spent by h between the values $h(a) + \frac{r\pi}{m}$ and $h(a) + \frac{r+1}{m}\pi$. (More formally, let $t_r = h^{-1}(a + \frac{r+1}{m}\pi) - h^{-1}(a + \frac{r\pi}{m})$ when $b \geq a + \frac{r+1}{m}\pi$, $t_n = b - h^{-1}(a + \frac{n\pi}{m})$ when $a + \frac{n+1}{m}\pi \geq b \geq a + \frac{n\pi}{m}$ and $t_r = 0$ otherwise). Then, since $h'(u)$ is increasing, it follows that $t_o \geq t_1 \geq t_2 \geq \ldots$ and so, by Lemma 3.1 (ii)

$$\left|\Sigma\, t_r \exp(ir\pi/m)\right| \leq \sum_{r=1}^{m} t_r .$$

But since $h'(u) \geq \lambda$, $t_r \leq \lambda^{-1}\pi/m$, so

$$\left|\Sigma\, t_r \exp(ir\pi/m)\right| \leq \pi\lambda^{-1}.$$

Letting $m \to \infty$ this gives

$$\left|\int_a^b \exp(ih(u))du\right| \leq \frac{\pi}{\lambda}.$$

LEMMA 3.2 (Van der Corput) (ii). <u>If</u> $h : [a,b] \to R$ <u>is twice differentiable and there exists a</u> $\mu > 0$ <u>such that</u> $h''(u) \geq \mu$ <u>for all</u> $u \in (a,b)$, <u>then</u>

$$\left|\int_a^b \exp(i\, h(u))du\right| \leq 4\left(\frac{\pi}{\rho}\right)^{1/2}.$$

Proof. For each $K > 0$ we can split (a,b) into 3 (possibly empty) intervals I_1, I_2, I_3 such that $h'(u) \leq -K$ for $u \in I_1$, $-K < h'(u) < K$ for $u \in I_2$ and $h'(u) \geq K$ for $u \in I_3$. Since $h''(u) \geq \mu$ it follows that $|I_2| \leq 2K\mu^{-1}$, so that $\left|\int_{I_2} \exp(ih(u))du\right| \leq |I_2| \leq \frac{2K}{\mu}$ whilst, by Lemma 3.2 (i) $\left|\int_{I_j} \exp(ih(u))du\right| \leq \frac{\pi}{K}$ for $j = 1$ or 3. Thus

$$\left|\int_a^b \exp(ih(u))du\right| \leq \frac{2\pi}{K} + \frac{2K}{\mu}$$

and, setting $K = \pi^{1/2}\mu^{-1/2}$, we have the stated result.

In exactly the same spirit we prove the following lemma.

LEMMA 3.3. <u>If</u> $h : (0,2\pi) \to \mathbf{T}$ <u>has increasing derivative</u> h' <u>and there exists a</u> $\lambda > 0$ <u>such that</u> $h'(u) \geq \lambda$ <u>for all</u> $u \in (0,2\pi)$, <u>then, for each interval</u> I <u>in</u> $\mathbf{T}$,

$$\left||h^{-1}(I)| - |I|\right| \leq \frac{\pi}{2\lambda}.$$

Proof. We may suppose $|I| \neq 0, 2\pi$. Write CI for the complement $\mathbf{T} \setminus I$ of I. Suppose $0 \in h^{-1}(I)$. Then we can find $0 = t_0 \leq s_0 < t_1 < s_1 < t_2 < \ldots$ such that

$h(t) \in I$ for $t_j < t < s_j$, $h(t) \notin I$ for $s_j < t < t_{j+1}$. Since h' is increasing

$$\frac{t_1 - s_o}{|CI|} \geq \frac{s_1 - t_1}{|I|} \geq \frac{t_2 - s_1}{|CI|} \geq \frac{s_2 - t_2}{|I|} \geq \ldots . \quad \text{and so}$$

$$\frac{t_1 - s_o}{|CI|} \geq \frac{t_1 - s_o}{|CI|} - \frac{s_1 - t_1}{|I|} + \frac{t_2 - s_1}{|CI|} = \frac{s_2 - t_2}{|I|} \ldots\ldots \geq 0 \quad \text{whence}$$

$$\frac{t_2 - s_o}{|CI|} \geq -\frac{t_o - s_o}{|I|} + \frac{t_1 - s_o}{|CI|} - \frac{s_1 - t_1}{|I|} + \frac{t_2 - s_1}{|CI|} - \ldots \geq -\frac{t_o - s_o}{|I|} .$$

In other words,

$$\frac{t_1 - s_o}{|CI|} \geq \frac{|h^{-1}(I)|}{|I|} + \frac{|h^{-1}(CI)|}{|CI|} \geq -\frac{t_o - s_o}{|I|} .$$

But $h'(u) \geq \lambda$ for all $u \in (0, 2\pi)$, so $\lambda \geq \frac{t_1 - s_o}{|CI|}, \frac{t_o - s_o}{|I|}$ and

$$\left| \frac{|h^{-1}(I)|}{|I|} - \frac{|h^{-1}(CI)|}{|CI|} \right| \leq \frac{1}{\lambda} .$$

Since the formula is symmetric in I and CI, it also holds when $0 \notin I$ (i.e. when $0 \in CI$).

Multiplying up, we obtain (since $|CI| = 2\pi - |I|$)

$$\begin{aligned} \big| |h^{-1}(I)| - |I| \big| &= (2\pi)^{-1} |I| \, |CI| \left| \frac{|h^{-1}(I)|}{|I|} - \frac{|h^{-1}(CI)|}{|CI|} \right| \\ &\leq \frac{(2\pi)^{-1}}{\lambda} |I| (2\pi - |I|) \\ &\leq \frac{\pi}{2\lambda} \end{aligned}$$

as stated.

4. <u>A simple function with small Fourier transform</u>.

How are we going to construct the function f of Lemma 2.1 ? The answer is surprisingly simple.

Let g be a smooth positive function of small support. Then, if h is any smooth function with sufficiently enormous acceleration, $g \circ h(t) = g(h(t))$ will (apart from a few technical details) be a suitable f. Properties (i), (ii), (iii) are (subject to slight technical changes) inherited by $f = g \circ h$ from g. Property (v) is inherited by f from g and h. Finally property (iv) is inherited from h.

How are we going to prove this last statement ? Observe that $g(t) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} a_q \exp(i\, q\, t)$ where $|a_q| \to 0$ quite fast. Thus $f(t) = g \circ h(t) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} a_q h_q(t)$, where $h_q(t) = \exp(i\, q\, h(t))$, and so $\hat{f}(n) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} a_q \hat{h}_q(n)$. If we can show that $\hat{h}_q(n) \to 0$ very rapidly, it will follow that $\hat{f}(n) \to 0$ very rapidly and so property (iv) holds. (It has been pointed out to me that this procedure is reminiscent of that employed by Wiener and Wintner in their original work on this subject ($\boxed{5}$ Vol. II, p. 146).

In Lemma 4.2 we show that the $\hat{h}_q(n)$ can indeed be made small under hypotheses very closely related to conditions (A), (B) and (C). To indicate how closely, we make the following trivial observations.

LEMMA 4.1. (i) <u>Suppose</u> $\psi : [1,\infty) \to R$ <u>is a positive function. Suppose that for some</u> $L \geq 1$ <u>we have</u> $L^{-1}\psi(s) \leq \psi(t)$ <u>for all</u> $1 \leq s \leq t \leq 2s$. <u>Then we can find an integer</u> $m \geq 1$ <u>such that</u> $s^m\psi(s) \leq L\, t^m\psi(t)$ <u>for all</u> $t \geq s \geq 1$.

(ii) If <u>If</u> $t\psi(t) \to \infty$ <u>as</u> $t \to \infty$ <u>then we can find a</u> t_0 <u>such that, if</u> $t \geq t_0$ <u>and</u> $t \geq s > 1$, <u>then</u> $\psi(s) \geq t^{-1}$.

Proof. Obvious.

LEMMA 4.2. Suppose $\psi : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ is a positive function such that

(a) $\int_u^v (\psi(t))^2 dt = 2\pi$ for some $v > u \geq 4$.

(b) There exist an $L \geq 1$ and an integer $m \geq 1$ such that $L^{-1}\psi(s) \leq \psi(t) \leq L\psi(s)$ for all $1 \leq s \leq t \leq 2s$ and $s^m\psi(s) \leq L\, t^m\psi(t)$ for all $t \geq s \geq 1$.

(c)$_1$ $t\psi(t) \geq 1$ for all $t \geq u$.

(c)$_2$ $\psi(t) \geq u^{-1}$ for all $1 \leq t \leq u$.

Write $\Psi(s) = \int_u^s (\psi(t))^2 dt$

$$h(x) = \int_o^x \Psi^{-1}(y)\, dy$$

and $h_q(x) = \exp(i\, q\, h(x))$ $[0 \leq x < 2\pi]$.

Then $|\hat{h}_q(n)| \leq 10\pi\, L^2\, |q|^m\, \psi(|n|)$ for all $n, q \neq 0$

and $|\hat{h}_q(0)| \leq 2\pi/u$ for all $q \neq 0$.

Proof. We wish to bound

$$|\hat{h}_q(n)| = \left| \int_o^{2\pi} \exp i(q \int_o^x \Psi^{-1}(y)\, dy - nx)\, dx \right|.$$

Since $|\hat{h}_{-q}(n)| = |\hat{h}_q(-n)|$ we may suppose $q \geq 1$. If $n \leq -1$ or $0 \leq n \leq u/2$, the estimation is very simple.

CASE 1 : $n \leq -1$. Then, by (c)$_1$ and (c)$_2$, $\dfrac{1}{u+|n|} \leq \psi(|n|)$. Since Ψ^{-1} is increasing, so is $q\Psi^{-1}(x)-n$. Moreover, for $0 \leq x < 2\pi$,

$\frac{d}{dx}(q \int_o^x \Psi^{-1}(y)\, dy - nx) = q\Psi^{-1}(x)-n = q\Psi^{-1}(0) - n = qu + |n|$. Then, by Van der Corput's lemme (lemma 3.2 (i))

$$|\hat{h}_q(n)| \leq \frac{\pi}{qu+|n|} \leq \pi\psi(n) \leq 10\pi L^2\, |q|^m\, \psi(|n|).$$

CASE 2 : $0 \le n \le u/2$. We have

$$\frac{d}{dx}\left(q\int_0^x \Psi^{-1}(y)\,dy - nx\right) = q\Psi^{-1}(x) - n \ge q\Psi^{-1}(0) - n = qu - n \ge u/2.$$

Thus, using Lemma 3.2 (i),

$$|\hat{h}_q(n)| \le \frac{2\pi}{u} \le 2\pi\psi(|n|) \le 10\pi L^2 |q|^m \psi(|n|)$$

if $n \neq 0$, and $|\hat{h}_q(0)| \le \frac{2\pi}{u}$.

The remaining case requires a little more work. The basis of the calculation may become clearer if the reader concentrates on the estimation when $q = 1$ and $F, G, H \neq \emptyset$.

CASE 3 : $n \ge u/2$. Note that $2n \ge u$ and so, using (b) and $(c)_1$, $2L\psi(n) \ge 2\psi(2n) \ge 2(2n)^{-1} = n^{-1}$. We have

$$\hat{h}_q(n) = \int_F + \int_G + \int_H \exp i\left(q\int_0^x \Psi^{-1}(y)\,dy - nx\right) dx$$

where $F = \left\{0 \le x < 2\pi : \Psi^{-1}(x) < n/2q\right\}$

$G = \left\{0 \le x < 2\pi : n/2q \le \Psi^{-1}(x) \le 2n/q\right\}$

$H = \left\{0 \le x < 2\pi : 2n/q \le \Psi^{-1}(x)\right\}$

are (possibly empty) intervals.

The estimation of the integrals over F and H follows the pattern above.

$$\frac{d}{dx}\left(q\int_0^x \Psi^{-1}(y)dy - nx\right) = q\,\Psi^{-1}(x) - n$$

is an increasing function bounded above by $q(n/2q) - n = -n/2$ on F. Thus by Van der Corput's Lemma (Lemma 3.2 (i))

$$\left|\int_F \exp i\left(q\int_0^x \Psi^{-1}(y)\,dy - nx\right)dx\right| \le \frac{2\pi}{n}.$$

Similarly

$$\frac{d}{dx}\left(q\int_0^x \Psi^{-1}(y)\,dy - nx\right) = q\Psi^{-1}(x) - n$$

is an increasing function bounded below by $q(2n/q) - n = n$ on H and so

$$\left|\int_H \exp i(q\int_o^x \Psi^{-1}(y)\,dy - nx)\,dx\right| \le \frac{\pi}{n}.$$

To estimate the integral over G when $G \ne \emptyset$, we use the second version of Van der Corput's Lemma (Lemma 3.2 (ii)). We have, for all $x \in G$,

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}(q\int_o^x \Psi^{-1}(y)\,dy - nx) &= q\frac{d}{dx}(q\,\Psi^{-1}(x) - n)\\ &= \frac{q}{(\psi(\Psi^{-1}(x)))^2}\\ &\ge q(\sup_{t\in G}\psi(\Psi^{-1}(t)))^{-2}\\ &\ge q(\sup_{n/2q\le s\le 2n/q}\psi(s))^{-2}\\ &\ge q(L\,\psi(n/q))^{-2}\\ &\ge q(L^2 q^m \psi(n))^{-2}.\end{aligned}$$

(The last two inequalities use (b). Note that $n/q \ge 1$, since $G \ne \emptyset$). Thus, by Lemma 3.2 (ii),

$$\left|\int_G \exp i(q\int_o^x \Psi^{-1}(y)\,dy - nx)\,dx\right| \le 4\pi^{1/2} L^2 q^{m-1/2}\psi(n).$$

Collecting terms and using the fact stated above that $\psi(n) \ge (2L)^{-1}n^{-1}$, we see that

$$\begin{aligned}|\hat{h}_q(n)| &\le \frac{2\pi}{n} + 4\pi^{1/2} L^2 q^{m-1/2}\psi(n) + \frac{\pi}{n}\\ &\le 6\,L\,\pi\psi(n) + 4\pi^{1/2} L^2 q^{m-1/2}\psi(n)\\ &\le 10\pi L^2 |q|^m \psi(|n|).\end{aligned}$$

Remark. The definition of h and the argument giving a bound on $|\hat{h}_q(n)|$ are, to all intents and purposes, due to Ivasev-Musatov. Our h corresponds to his f

(p. 108 of the English translation of [2]) and our interval G to his interval Δ (p. 119 ibid.).

At first sight it looks as though h has been pulled out of a hat, but once the form of the argument has been grasped, it is possible to see why h was chosen. Let us give a heuristic argument. We want $\int \exp(i(h(t) - \lambda t))\,dt$ to be small. If $\frac{d}{dt}(h(t) - \lambda t)$ is large, then the first form of Van der Corput's lemma deals with the problem. Hence we only have to worry when $h'(t)$ is close to λ. We then want the acceleration $\frac{d^2}{dt^2}(h(t) - \lambda t) = h''(t)$ to be as large as $\frac{2}{(\psi(\lambda))^2}$. Simplifying slightly, we want $h''(t) = \frac{1}{(\psi(\lambda))^2}$ where $h'(t) = \lambda$, i. e. we want to solve $h''(t) = \frac{1}{(\psi(h(t)))^2}$. Multiplying up, we have $h''(t)(\psi(f(t)))^2 = 1$ and integrating gives

$$\int_0^{h'(x)} (\psi(t))^2\,dt = x$$

i. e. $h'(x) = \Psi^{-1}(x)$. The idea is simple, but one can only admire the mathematical clearheadedness of the man who found it

Looking at the proof of Lemma 3.2 (ii) one might ask whether a better choice of G could be found. But to improve our estimates over F and H we would need to take G larger, and if we did this we would no longer know that the acceleration $(\psi(\Psi^{-1}(x)))^{-2}$ was close to $(\psi(n))^{-2}$ on G.

5. Conclusion of the construction. It is easy to find an infinitely differentiable positive function $\varphi_o : [1,\infty) \to R$ such that $\varphi_o(r) = \varphi(r)$ and $\varphi_q(y)$ lies between $\varphi(r)$ and $\varphi(r+1)$ whenever $r \le y \le r+1$ $[r \ge 1$ integral$]$. Trivial estimates then show that

(setting $L = 2K^2$, say)

(A)' $\int_1^\infty (\varphi_o(t))^2 dt$ diverges

(B)' $L^{-1}\varphi_o(s) \leq \varphi_o(t) = L\varphi_o(s)$ for all $1 \leq s \leq t \leq 2s$

(C)' $t\varphi_o(t) \to 0$ as $t \to \infty$.

By Lemma 4.1 (i) we can find an integer $m \geq 1$ such that

$(B)'_1$ $s^m \varphi_o(s) \leq L t^m \varphi_o(t)$ for all $1 \leq s \leq t$.

In the next lemma we shall take φ_o, L and m as fixed once and for all.

LEMMA 5.1. Given $\gamma > 0$ and $\lambda \geq 1$ we can find a continuous function $h : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ such that

(i) h is infinitely differentiable on $(0, 2\pi)$

(ii) $h(0) = 0$, $h(2\pi) = 2p\pi$ for some $p \in \mathbb{Z}$

(iii) $h'(t) \geq \lambda$ for all $t \in (0, 2\pi)$

(iv) Writing $h_q(t) = \exp(i\,q\,h(t))$ $[0 \leq t \leq 2\pi]$ we have $|\hat{h}_q(n)| \leq \gamma |q|^m \varphi(|n|)$ for all $n, q \neq 0$ and

(v) $|\hat{h}_q(0)| \leq \gamma$ for all $q \neq 0$.

Proof. Set $\varepsilon_o = \min((100\pi)^{-1}, \gamma(20\pi L^2)^{-1})$. As in Lemma 4.1 (ii) we can find a u such that

$(c)'_1$ $\varepsilon_o t \varphi_o(t) \geq 1$ for all $t \geq u$

$(c)'_2$ $\varepsilon_o \varphi_o(t) \geq u^{-1}$ for all $1 \leq t \leq u$

and (e) $2\pi u^{-1} \leq \gamma$, $\lambda \leq u$.

Let $\Psi_\alpha(s) = \int_u^s (\alpha\varphi_o(t))^2 dt$

$$w(\alpha) = \int_0^{2\pi} \Psi_\alpha^{-1}(y)\,dy.$$

Now w is a continuous function of α and, since $0 \le \varepsilon_o \varphi_o(t) \le (100\pi)^{-1}$, $w(2\varepsilon_o) - w(\varepsilon_o) \ge 2\pi$. Thus we can find an $2\varepsilon_o \ge \varepsilon \ge \varepsilon_o$ such that $w(\varepsilon) - 2p\pi$ for some integer p.

Set $\psi(t) = \varepsilon\,\varphi_o(t)$ and take v to be the solution of $\int_u^v (\varepsilon\,\varphi_o(t))^2 dt = 2\pi$ (such a solution exists since $\int_u^\infty (\varphi_o(t))^2 dt$ diverges). The function ψ satisfies all the conditions of Lemma 4.2 and so, defining h just as in that lemma, we have

(iv) $\quad |\hat{h}_q(n)| \le \varepsilon\, 10\pi L^2 |q|^m \varphi_o(|n|) \le \gamma |q|^m \varphi_o(|n|) = \gamma |q|^m \varphi(|n|)$

for all $n,q \ne 0$, whilst (using (e))

(v) $\quad |\hat{h}_q(0)| \le 2\pi u^{-1} \le \gamma \quad$ for all $q \ne 0$.

The truth of condition (iii) is an immediate consequence of the definition and the fact that $w(\varepsilon) = 2\,p\,\pi$. Again, it follows from the definition that h is differentiable on $(0\,,\,2\pi)$ with

(iii) $\; h'(t) \ge \Psi^{-1}(t) \ge u \ge \lambda \quad$ for all $t \in (0\,,\,2\pi)$.

Finally, since ψ is infinitely differentiable on $(0\,,\,2\pi)$, so is Ψ^{-1} (observe that $\dfrac{d^2}{dt^2}\Psi^{-1}(t) = \dfrac{1}{\psi(\Psi^{-1}(t))^2}$).

We have now got the estimates which will enable us to carry through the program outlined at the beginning of Section 4, prove Lemma 2.1 and so complete the proof of Theorem 1.2.

Proof of Lemma 2.1. Note first that it suffices to prove Lemma 2.1 with (iii) replaced by (iii)' $\frac{1}{2\pi}\int_T f(t)\,dt \geq 1/2$

and that, without loss of generality, we may suppose $0 < \eta$, $\varepsilon < 1$.

Choose a $g \in C(\mathbf{T})$ such that

(1) g is infinitely differentiable

(2) $g(t) \geq 0$ for all $t \in \mathbf{T}$

(3) $\operatorname{supp} g \subseteq [\pi - \eta/4\ ,\ \pi + \eta/4]$

(4) $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{T}} g(t)\,dt = 1$.

Since g is infinitely differentiable, it follows on integrating by parts $m+2$ times, that

(5) $|\hat{g}(q)| \leq A\,|q|^{-m-2}$ $\quad [q \neq 0]$

for some constant $A \geq 1$ depending on g alone.

Set $\gamma = \varepsilon A^{-1}/100$ and $\lambda = \pi\eta^{-1}$ and construct h as in Lemma 5.1. We claim that $f(t) = g(h(t))$ $[t \in \mathbf{T}]$ defines a continuous function f satisfying the conclusions of Lemma 2.1 with (iii) replaced by (iii)'. (Note that condition (ii) of Lemma 5.1 is needed to make the definition of $f(0)$ unambiguous).

Condition (i) of the lemma follows from (2). Since g is infinitely differentiable everywhere and h is infinitely differentiable on $\mathbf{T} \setminus \{0\}$ it follows that f is infinitely differentiable except possibly at 0. But, by condition (ii) of Lemma 5.1, $h(0) = 0$ and by (3) g is constant in an open interval containing 0, so f is infinitely differentiable at 0 also, and condition (v) is thus verified.

To prove condition (ii), we note that

$$\begin{aligned}\operatorname{supp} f &\subseteq \{x : h(x) \in [\pi-\eta/4\ ,\ \pi+\eta/4]\}\\ &= h^{-1}([\pi-\eta/4\ ,\ \pi+\eta/4])\end{aligned}$$

and that by Lemma 3.3 and condition (iii) of Lemma 5.1

$$\left| \left| h^{-1}\left([\pi-\eta/4\ ,\ \pi+\eta/4] \right) \right| - \eta/2 \right| \leq \pi/(2\lambda) = \eta/2$$

so $\left| h^{-1}\left([\pi-\eta/4\ ,\ \pi+\eta/4] \right) \right| \leq \eta$ and $|\text{supp } f| \leq \eta$ as required.

Next we observe that, since $g \in A(\mathbf{T})$, we have

$$g(t) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \hat{g}(q) \exp i\, q\, t \tag{6}$$

and

$$f(t) = 1 + \sum_{q\neq 0} \hat{g}(q) \exp(i\, q\, h(t)), \tag{7}$$

the convergence being uniform. Thus, in the notation of Lemma 5.1,

$$\hat{f}(r) = \sum_{q\neq 0} \hat{g}(q)\, \hat{h}_q(r) \qquad [r \neq 0] \tag{8}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_T f(t)\, dt = 1 + \sum_{q\neq 0} \hat{g}(q)\, \hat{h}_q(0). \tag{8'}$$

From (8), (5) and condition (iv) of Lemma 5.1 we obtain

$$\begin{aligned} |\hat{f}(r)| &\leq \sum_{q\neq 0} |\hat{g}(q)|\,|\hat{h}_q(r)| \\ &\leq A\,\gamma \sum_{q\neq 0} |q|^{-2}\,\varphi(|r|) \\ &\leq \varepsilon\,\varphi(|r|) \qquad [r \neq 0] \end{aligned}$$

so condition (iv) holds. Similarly (8)', (5) and condition (v) of Lemma 5.1 give

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_T f(t)dt &\geq 1 - \sum_{q\neq 0} |\hat{g}(q)|\,|\hat{h}_q(0)| \\ &\geq 1 - \gamma A \sum_{q\neq 0} |q|^{-2-k} \\ &\geq 1/2 \end{aligned}$$

so condition (iii)' holds.

The proof of our theorem is complete.

REFERENCES.

[1] IVASEV-MUSATOV, O. S. On the Fourier-Stieltjes coefficients of singular functions. Dokl. Akad. Nauk SSSR (N. S.) 82 (1952), 9-11 (Russian).

[2] ______________________ On Fourier-Stieltjes coefficients of singular functions. Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. 20 (1956), 179-196 (Russian). English translation in Amer. Math. Soc. Transl., ser. 2, 10 (1958), 107-124.

[3] ______________________ On the coefficients of trigonometric nul series. Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Nat. 21 (1957), 559-578 (Russian). English translation in Amer. Math. Soc. Trans., ser. 2, 14 (1960), 289-310.

[4] KAHANE, J.-P. et SALEM, R. Ensembles parfaits et séries trigonométriques. Paris, Herman, 1963.

[5] ZYGMUND, A. Trigonometric series. Vol. I and II. Cambridge (1959).

SUR LE THEOREME D'IVASEV-MUSATOV (2ème partie)

par T. W. Körner

Résumé. Grâce au théorème d'Ivasev Musatov, nous savons que si $\varphi(n)$, $n\in\mathbb{Z}$, est une fonction paire, positive, telle que $\Sigma\ \varphi^2(n) = +\infty$ et, de plus, très régulière, alors il existe une mesure μ portée par un compact K de $\mathbb{T}$, de mesure de Lebesgue 0, et telle que $\hat{\mu}(n) = 0(\varphi(n))$, $|n| \to +\infty$. Le contre exemple construit ci-dessous montre que "$\varphi(n)$ convexe" n'est pas une condition de régularité suffisante.

THEOREME 1. <u>Il existe une suite</u> $\varphi(n)$, $n\in\mathbb{Z}$, <u>possédant les propriétés suivantes</u>

(1) φ <u>est paire et la restriction de</u> φ <u>à</u> $\mathbb{N}$ <u>est décroissante et convexe</u>

(2) $\sum\limits_{0}^{\infty} \varphi^2(n) = +\infty$

(3) <u>toute distribution</u> S <u>sur</u> $\mathbb{T}$ <u>telle que</u> $\hat{S}(n) = 0(\varphi(n))$, $|n| \to +\infty$ <u>a pour support le tore tout entier</u>.

Le théorème 1 est une conséquence facile du lemme suivant.

LEMME 1. <u>Soient donnés</u> $\delta > 0$, $\eta > 0$ <u>et un entier</u> $N \geq 1$. <u>On peut alors trouver</u> $\varepsilon > 0$ <u>ayant la propriété suivante : pour toute distribution</u> S <u>vérifiant les deux conditions</u>

(4) $\sum\limits_{-N}^{N} |\hat{S}(n)| \geq \eta$

(5) $|n| \geq N+1 \Rightarrow |\hat{S}(n)| \leq \varepsilon$,

<u>le support de</u> S <u>rencontre tout intervalle de</u> $\mathbb{T}$ <u>de longueur</u> δ.

La preuve du lemme est très simple. On peut tout d'abord se limiter au cas où $0 < \eta \leq 1$. Fixons un entier $A \geq 2\delta^{-1}$ et divisons $\mathbf{T}$ en A intervalles fermés contigus notés I_j, $1 \leq j \leq A$.

Il suffit de prouver que le support de S rencontre chaque intervalle I_j, $1 \leq j \leq A$.

Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe une suite S_q, $q \geq 1$, de distributions portées par $\mathbf{T}$, vérifiant (4), telles que $|\hat{S}_q(n)| \leq 2^{-q}$ pour $|n| \geq N+1$ et que le support K_q de S_q ne rencontre pas l'un des I_j. Quitte à passer à une sous suite (et à changer les indices j), on pourra supposer que tous les supports K_q sont contenus dans $K = I_2 \cup I_3 \cup \ldots \cup I_A$ (ce qui arrive si K_q ne rencontre pas I_1).

De deux choses l'une.

Ou bien $\sup\limits_{\mathbf{Z}} |\hat{S}_q(n)| \leq 1$ pour tout $q \geq 0$. On extrait alors de S_q une sous-suite, notée σ_q, qui, dans la topologie $\sigma(\mathcal{D}'(\mathbf{T}), \mathcal{D}(\mathbf{T}))$ a pour limite une distribution σ.

La distribution σ a les trois propriétés suivantes

(6) $\sum\limits_{-N}^{N} |\hat{\sigma}(n)| \geq \eta$ (et donc σ n'est pas nulle)

(7) $\hat{\sigma}(n) = 0$ si $|n| \geq N+1$ (et donc σ est un polynôme trigonométrique)

(8) $\operatorname{supp} \sigma \subset K$; nous voilà arrivés à une contradiction.

Ou bien $\sup\limits_{\mathbf{Z}} |\hat{S}_q(n)| = m_q > 1$ pour certaines valeurs de q. Puisque $|\hat{S}_q(n)| \leq 2^{-q}$ si $|n| \geq N+1$, on a nécessairement $m_q = \sup\limits_{-N \leq n \leq N} |\hat{S}_q(n)|$. Posons $T_q = m_q^{-1} S_q$.

Il vient $\sum\limits_{-N}^{N} |\hat{T}_q(n)| \geq 1 \geq \eta$; puis, a fortiori, $\sup\limits_{|n| > N} |\hat{T}_q(n)| \leq 2^{-q}$. On est donc ramené au cas précédent.

Preuve du théorème 1. Nous allons construire, par récurrence, une suite (ε_k, N_k) où $\varepsilon_k > 0$ et $N_k \in \mathbb{N}$; la fonction φ sera paire, linéaire sur les intervalles $[N_k, N_{k+1}]$ et telle que $\varphi(N_k) = \varepsilon_k$.

Partons de $\varepsilon_o = 1$ et $N_o = 0$. Supposons que ε et N ont été choisis, pour $1 \leq \ell \leq k$, de façon que

(8) la fonction φ soit décroissante et convexe sur $[0, N_k]$;

(9) le nombre ε_ℓ ne dépasse pas ε obtenu en appliquant le lemme 1 à $\eta = \delta = 2^{-\ell}$ et $N = N_\ell$;

$$\sum_{N_{\ell-1} \leq n < N_\ell} \varphi^2(n) \geq 1 .$$

Montrons comment choisir N_{k+1} et ε_{k+1}.

<u>Choix de</u> N_{k+1}. Si $N_{k+1} \geq N_k + 1$, la pente de la droite joignant (N_k, ε_k) à $(N_{k+1}, 0)$ est, en valeur absolue, égale à $\dfrac{\varepsilon_k}{N_{k+1} - N_k}$; l'équation de cette droite est $y = \ell_k(x) = \varepsilon_k(N_{k+1} - N_k)^{-1}(N_{k+1} - x)$. Si N_{k+1} est choisi assez grand, $\varepsilon_k(N_{k+1} - N_k)^{-1}$ est inférieur aux valeurs absolues de toutes les pentes des parties linéaires du graphe de φ sur $[0, N_k]$.

Alors, pour $0 < \varepsilon_{k+1} < \varepsilon_k$, on définit φ sur $[N_k, N_{k+1}]$ comme une fonction linéaire telle que $\varphi(N_k) = \varepsilon_k$ et $\varphi(N_{k+1}) = \varepsilon_{k+1}$; on a $\varphi(x) \geq \ell_k(x)$. La fonction φ est décroissante et convexe sur $[0, N_{k+1}]$. De plus, en choisissant N_{k+1} assez grand on assure facilement $\sum_{N_k \leq n < N_{k+1}} \ell_k^2(n) \geq 1$; cela entraîne (10) indépendemment du choix de $\varepsilon_{k+1} \in]0, \varepsilon_k[$.

<u>Choix de</u> ε_{k+1}. On applique maintenant le lemme 1 pour $\eta = \delta = 2^{-k-1}$ et $N = N_{k+1}$. Le lemme 1 fournit un ε que l'on appelle ε_{k+1} si $0 < \varepsilon < \varepsilon_k$. Si $\varepsilon \geq \varepsilon_k$, on prend, par exemple, $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k/2$. Soit finalement S une distribution non nulle telle que $|\hat{S}(n)| \leq \varphi(n)$ dès que $|n| \geq n_o$. Quand $k \geq k_o$ on a $\sum_{-N_k \leq n \leq N_k} |\hat{S}(n)| \geq 2^{-k}$ tandis que $\sup_{|n| \geq N_k} |\hat{S}(n)| \leq \varepsilon_k$. Le lemme 1 nous apprend que le support de S rencontre tout intervalle de longueur 2^{-k} ; ce support n'est autre que $\mathbf{T}$.

Le cas général où $\hat{S}(n) = O(\varphi(n))$, $|n| \to +\infty$, se ramène aisément au cas précédent.

UNE REMARQUE SUR LES ENSEMBLES DE HELSON

par N. Varopoulos

Dans cette note on traite une question posée par G. Pisier.

Soit Λ un ensemble d'entiers $\Lambda \subset \mathbf{Z}$ et $E \subset \mathbf{T}$ un sous-ensemble fermé du tore $\mathbf{T} = \mathbf{R} \pmod{2\pi}$.

On note alors

$$\mathbf{C}_\Lambda(\mathbf{T}) = \left\{ f \in \mathbf{C}(\mathbf{T}) \ ; \ f(\theta) \sim \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda e^{i\lambda\theta} \right\}$$

l'espace des fonctions continues à spectre dans Λ. On note par $A(\mathbf{T})$ l'algèbre des séries de Fourier absolument sommables et par $A^+(\mathbf{T})$ l'algèbre des séries de Taylor absolument sommables (i. e. $f \in A^+(\mathbf{T}) \Longleftrightarrow f \in A(\mathbf{T}), \operatorname{Sp} f \subset \mathbf{Z}^+$). On note aussi par $I(E) = \left\{ f \in A(E) \ ; \ f^{-1}(0) \supset E \right\}$; $I^+(E) = I(E) \cap A^+(\mathbf{T})$ les idéaux associés à E et par

$$A(E) = A(\mathbf{T})/I(E) \qquad\qquad A^+(E) = A^+(\mathbf{T})/I^+(E)$$

les algèbres restrictions. Tous ces espaces et algèbres sont munis de leurs normes naturelles.

Pour une étude approfondies de ces espaces, cf. [1]. On a alors :

THEOREME 1. <u>Supposons que l'espace de Banach $\mathbf{C}_\Lambda(\mathbf{T})$ soit isomorphe (en tant qu'espace de Banach) à ℓ^1,</u> <u>alors,</u> Λ <u>est une suite de Sidon, c'est-à-dire, il existe</u> C <u>une constante telle que</u>

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |\alpha_\lambda| \leq C \|f\|_\infty$$

pour tout

$$f \sim \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda e^{i\lambda\theta} \in \mathbf{C}_\Lambda(\mathbf{T}).$$

THEOREME 2. Supposons que $E \subset \mathbf{T}$ est tel que $A(E)$ (resp. $A^+(E)$), en tant qu'espace de Banach, soit isomorphe à un espace de la forme $\mathbf{C}(X)$ où X est un espace topologique compact ; alors $A(E) = \mathbf{C}(E)$ (resp. $A^+(E) = \mathbf{C}(E)$), c'est-à-dire E est un ensemble de Sidon.

L'hypothèse des deux théorèmes peut s'affaiblir. Il suffit par exemple de supposer dans le théorème 2 que $A(E)$ est un espace de type $\mathcal{L}_\infty$ dans le sens de [2].

Les théorèmes 1 et 2 se généralisent dans le cadre de groupes localement compacts.

La preuve des deux théorèmes est basée sur le théorème suivant [3].

THEOREME (de représentation). Soit R une algèbre de Banach. Supposons que R, en tant qu'espace de Banach, soit isomorphe à $\mathbf{C}(X)$ où X est un espace compact. Alors, il existe un espace de Hilbert H et une sous algèbre fermée $\widetilde{R}$ de $\mathcal{L}(H)$ (l'algèbre des opérateurs de H) telle que R soit isomorphe en tant qu'algèbre de Banach à $\widetilde{R}$.

Preuve du théorème 1 et du théorème 2 pour $A(E)$.

Il suffit de démontrer le théorème 2 pour $A(E)$. Le théorème 1, après une dualisation évidente, se démontre de la même manière.

D'après le théorème de représentation, l'hypothèse du théorème 2 entraîne qu'on peut identifier $A(E)$ à une algèbre d'opérateurs $\mathcal{L}(H)$ sur H (un Hilbert) ; l'identification n'est pas isométrique mais elle est topologique. Cette identification induit une représentation bornée r du groupe $\mathbb{Z}$ sur H ; c'est-à-dire

$$r : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{L}(H)$$

où
$$r(n) = L_n = e^{in\theta} \in A(E)$$

est la fonction $e^{in\theta}$ de $A(E)$ considérée comme opérateur. En outre $A(E)$ est engendrée par les opérateurs $\{L_n \ ; \ n\in\mathbb{Z}\}$. En utilisant un théorème bien connu sur les représentations de groupes [Toute représentation bornée d'un groupe abélien est équivalente à une représentation unitaire], on voit qu'il existe un opérateur borné T sur H avec un inverse borné T^{-1} tel que tous les opérateurs

$$T \, L_n \, T^{-1} \qquad\qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

soient des opérateurs unitaires.

Mais alors l'algèbre d'opérateurs

$$T \, A(E) = \left\{T \, L \, T^{-1} \in \mathcal{L}(H) \ ; \ L\in A(E)\right\}$$

qui est isomorphe à l'algèbre $A(E)$, est engendrée par des opérateurs unitaires et est une C^*-algèbre. Ceci entraîne que $A(E)$ est isomorphe en tant qu'algèbre à $\mathbb{C}(E)$ et que E est un ensemble de Helson.

<u>Preuve du théorème 2 pour</u> $A^+(E)$.

La démonstration est basée sur le lemme suivant :

LEMME. *Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur à puissances bornées, c'est-à-dire*

$$\|T^n\|_{op} \leq C \ ; \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

où C est une constante indépendante de n. Soit aussi $p(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$ un polynôme d'une variable. On a alors

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \|T^m p(T)\|_{op} \le C^2 \sup_{|z|\le 1} |p(z)|.$$

Preuve du lemme.

Soient $h,k \in H$ deux éléments de l'espace de Hilbert H tels que $\|h\|, \|k\| \le 1$.

Fixons $m \ge 1$ et considérons les deux fonctions à valeurs dans H

$$f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{m+1}} \sum_{n=0}^{m} T^n h\, e^{in\theta}$$

$$f^*(\theta) = \frac{1}{\sqrt{m+1}} \sum_{n=0}^{m} T^{*n} h\, e^{in\theta}$$

où T^* est l'opérateur adjoint de T ; f et f^* satisfont alors

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|f(\theta)\|_H^2\, d\theta \le C^2 \quad , \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|f^*(\theta)\|_H^2\, d\theta \le C^2$$

et la fonction

$$\varphi(\theta) = \langle f(\theta), f^*(\theta)\rangle_H,$$

où $\langle\ ,\ \rangle_H$ est le produit scalaire dans H, satisfait

$$\begin{cases} \|\varphi(\theta)\|_{L^1(\mathbf{T})} \le C^2 \\ \varphi(\theta) = \displaystyle\sum_{n=0}^{2m} \frac{\gamma_n^{(m)}}{m+1} \langle T^n h, k\rangle e^{in\theta}. \end{cases}$$

Dans cette formule $\gamma_n^{(m)}$ est le nombre d'entiers ν qui vérifient les deux conditions suivantes :

$$0 \le \nu \le m \qquad \text{et} \qquad 0 \le n-\nu \le m.$$

On a

(2) $$\frac{\gamma_{m+n}^{(m)}}{m+1} \xrightarrow[m\to\infty]{} 1, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Soit maintenant $P(\theta) = \sum_{n=0}^{N} a_n e^{in\theta}$ un polynôme fixe ; (1) entraîne alors

$$\left| \sum_{n=0}^{N} \frac{\gamma_{n+m}^{(m)}}{m+1} a_n \langle T^{n+m} a, k\rangle \right| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-im\theta} P(-\theta)\, \varphi(\theta)\, d\theta \right| \leq C^2 \|P\|_\infty .$$

D'autre part,

$$\langle T^m P(T) h, k\rangle = \sum_{n=0}^{N} a_n \langle T^{m+n} h , k\rangle .$$

En faisant tendre $m \to \infty$ et en tenant compte de (2), on obtient donc notre lemme.

Preuve du théorème.

Comme dans la preuve du théorème 1, on identifie $A^+(E)$ à une algèbre d'opérateurs sur un Hilbert. Cette identification associe à $e^{i\theta}|_E \in A^+(E)$ un opérateur T qui satisfait l'hypothèse du lemme.

Fixons un polynôme trigonométrique

$$p(\theta) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{in\theta} ;$$

notre lemme entraîne alors que

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \left\| \sum_{n=-N}^{N} a_n T^{m+n} \right\|_{op} \leq C \|p\|_\infty$$

où C est une constante indépendante du polynôme. Mais ceci entraîne que

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \left\| \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{i(m+n)\theta} |_E \right\|_{A^+(E)} \leq C' \|p\|_\infty$$

pour une autre constante C' indépendante de p. Et ceci à son tour entraîne que

$$\left\| \sum_{n=-M}^{N} a_n e^{in\theta} |_E \right\|_{A(E)} \leq C' \|p\|_\infty .$$

C'est-à-dire que $A(E) = \mathbb{C}(E)$ et que E est un ensemble de Helson. Le théorème de I. Wik [1] (IV, 7) entraîne alors notre théorème.

REMARQUE. Une reformulation du Théorème 1 consiste à dire qu'il caractérise les sous-espaces fermés Σ de $\mathbb{C}(T)$ qui sont invariants par translation (i. e.

$f \in \Sigma \Rightarrow f_t(x) = f(t+x) \in \Sigma)$ et qui sont, en tant qu'espaces de Banach, de type $\mathcal{L}_1$ (dans le sens de [2]).

Dans le même esprit, on peut démontrer le théorème suivant :

THEOREME 3. Soit Γ un groupe abélien localement compact et soit $\Sigma \subset L^\infty(\Gamma)$ un sous-espace qui est faiblement fermé (pour la topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$) et invariant par translation et qui est, en tant qu'espace de Banach, de type $\mathcal{L}_1$. Alors il existe $E \subset \hat{\Gamma}$ un sous-ensemble fermé sans vraie pseudo-mesure tel que

$$\Sigma = \left\{ \hat{\mu} \ ; \ \mu \in M(\hat{\Gamma}), \operatorname{supp} \mu \subset E \right\}.$$

[1] KAHANE, J.-P. Séries de Fourier absolument convergentes. Springer-Verlag (Ergebnisse) 1970.

[2] LINDENSTRAUSS, J. and PELZYNSKI, A. Absolutely summing operators in $\mathcal{L}^p$-spaces and their applications. Studia Math. 29 (1968), 275-326.

[3] VAROPOULOS, N. A theorem on operator algebras. Math. Scand. 37 (1975), 173-182.