UNIVERSITÉ PARIS XI

U.E.R. MATHÉMATIQUE

91-ORSAY (FRANCE)

n° 52

Michèle CAPON

"Etude des espaces A(K) qui sont des duaux".

"Etude des fonctions qui vérifient le calcul barycentrique".

(1973-1974)

(Publications Mathématiques d'Orsay).

n° 52

Michèle CAPON

"Etude des espaces $A(K)$ qui sont des duaux".

"Etude des fonctions qui vérifient le calcul barycentrique".

(1973-1974)

(Publications Mathématiques d'Orsay).

Je remercie très sincèrement Monsieur Choquet qui a bien voulu m'acceuillir au sein de l'équipe d'initiation à l'analyse et qui s'est interessé à mon travail.

Je remercie encore très vivement Monsieur Rogalski qui m'a initié à la recherche mathématique. Sur sa proposition j'ai étudié l'espace des fonctions affines continues sur un convexe compact et grace à son aide efficace et a ses nombreux conseils, j'ai pu réaliser ce travail.

SUR LES FONCTIONS QUI VERIFIENT LE CALCUL BARRYCENTRIQUE

On se propose d'étudier les fonctions de Baire sur un convexe compact K, qui vérifient le calcul barycentrique. Rappelons qu'une fonction f sur un convexe compact K, vérifie le calcul barycentrique si pour toute mesure de probabilité m sur K de barycentre x on a l'égalité

$$\int_K f(y)\ dm(y) = f(x)$$

Soit β un ordinal dénombrable et K un simplexe, nous montrerons que toute fonction vérifiant le calcul barycentrique et de classe β de Baire est de classe affine $(\beta + 1)$: C'est à dire qu'elle est dans l'espace obtenu à partir de A(K) par le procédé de limites simples des suites bornées, en itérant β fois cette opération.

I. Introduction

Notons $\mathcal{G}(K)$ l'espace des fonctions qui vérifient le calcul barycentrique sur K. Soit $\mathcal{B}_\beta(K)$ l'espace des fonctions de classe β de Baire et $\mathcal{A}_\beta(K)$ l'espace des fonctions de classe affine β . Rappelons que d'après un résultat de M. Choquet toute fonction affine de première classe de Baire vérifie le calcul barycentrique sur K.

En utilisant ce résultat Mokobodzki démontre (voir [8]) le lemme suivant :

LEMME 0 : Toute fonction affine de première classe de Baire sur un convexe compact K est de première classe affine.

Ce résultat éclaire le lemme précédent car il est sur que $\mathcal{G}(K)$ contient $\mathcal{A}_1(K)$. Cependant on n'en connait pas une démonstration directe. Le lemme 0 montre que pour tout convexe compact on a la relation suivante

$$\mathcal{R}_{(1,1)} \qquad \mathcal{G}(K) \cap \mathcal{B}_1(K) = \mathcal{A}_1(K)$$

Etant donné un convexe compact K, le problème se pose de démontrer une relation du type

$$\mathcal{R}_{(\beta,\beta')} \quad \mathcal{G}(K) \cap \mathcal{B}_\beta(K) \subset \mathcal{A}_{\beta'}$$

Nous dirons que K est de type 0 (resp. : de type 1) si pour tout ordinal dénombrable β , K vérifie la relation $\mathcal{R}_{(\beta,\beta)}$ (resp. : $\mathcal{R}_{(\beta,\beta+1)}$)

Remarquons d'abord, à l'aide d'un exemple, qu'on ne peut espérer démontrer que tout convexe compact est de type 0.

EXEMPLE : Soit E un espace de Banach ; notons E^{σ} (resp. : $E^{\sigma\sigma}$) l'espace des limites dans le bidual E" de suites bornées de E (resp. : E^{σ}) , lorsqu'on munit E" de la topologie $\sigma(E'',E')$. Williams a montré dans [9] que $E^{\sigma\sigma}$ n'est pas toujours fermé en norme dans E". Il construit un espace de Banach E et un élément x_o de E", qui n'appartient pas à $E^{\sigma\sigma}$, mais qui est limite uniforme d'une suite de $E^{\sigma\sigma}$. Considérons la boule unité K du dual E'. Il est immédiat que x_o, en tant que fonction sur K, est de classe 2 de Baire mais n'est que de classe affine 3. Avant d'aborder les résultats généraux rappelons ce qui a déjà été montré. Soit $\mathcal{A}(K) = \bigcup_{\beta<\Omega} \mathcal{A}_\beta(K)$: un simplexe K est dit analytique si pour toute fonction continue f sur K , la fonction affine définie par $Lf(x) = \mu_x(f)$, où μ_x est la mesure maximale de barycentre x, est dans $\mathcal{A}(K)$. Rogalski a démontré dans [8] que Lf est en fait dans $\mathcal{A}_1(K)$. En effectuant une récurrence très simple, il montre que tout simplexe analytique est de type 1. La classe des simplexes analytiques englobe les simplexes métrisables et les simplexes dont les points extrémaux forment un K_σ. Dans [3], on montre plus généralement qu'un simplexe dont l'ensemble des points extrémaux est de Lindelöf est analytique.

Le résultat essentiel que nous allons démontrer est que tout simplexe est de type 1. Par ailleurs nous verrons que dans certains cas on peut affirmer qu'il est de type 0. Nous prolongerons ensuite l'étude à certaines boules unités d'espaces duaux ce qui donnera une classe assez large de convexes compacts de type 1.

§2 . Le résultat pour les simplexes

Pour les simplexes dont les points extrémaux forment un K_σ, on peut améliorer le résultat cité plus haut.

Proposition]: Soit K un simplexe dont l'ensemble des points extrémaux est un K_σ alors, pour tout β :

$$\mathcal{B}_\beta(K) \cap \mathcal{G}(K) = \mathcal{A}_\beta(K)$$

Soit K ce simplexe et $\mathcal{E}(K) = \bigcup_n K_n$. Toute mesure maximale sur K est portée par $\mathcal{E}(K)$. La proposition résultera immédiatement du lemme suivant

LEMME I.1. Soit K un simplexe tel que $\mathcal{E}(K)$ soit un K_σ, alors pour tout $\beta \geqslant 1$ et toute fonction f de $\mathcal{B}_\beta(K)$, la fonction Lf, où $Lf(x) = \mu_x(f)$ (μ_x désigne la mesure maximale de barycentre x), est de classe affine β sur K.

Considérons d'abord le cas $\beta = 1$

$$f = \lim_n f_n \quad \text{où} \quad f_n \in \mathcal{C}(K) \text{ et } \|f_n\| \leqslant M .$$

D'après le théorème d'Edwards, [1], la fonction continue $f_n|_{K_n}$ sur K_n se prolonge en une fonction affine continue F_n sur K, avec $\|F_n\| \leqslant \|f_n\|$. On a alors pour tout x de K

$$|F_n(x) - \mu_x(f)| = |\mu_x(F_n - f)| \leqslant |\mu_x(F_n - f_n)| + |\mu_x(f_n - f)|$$

x étant dixé, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_o tel que $n \geqslant n_o$ implique $1 - \mu_x(K_n) < \varepsilon/4M$ donc

$$\left|\int (F_n - f_n)\, d\mu_x\right| = \left|\int_{\mathcal{E}(K)-K_n} (F_n - f_n)\, d\mu_x\right| \leqslant 2M\, \mu_x\,(\complement K_n) < \varepsilon/2$$

D'autre part il existe un entier n_1 tel que $n \geqslant n_1$ implique $|\mu_x(f_n - f)| < \varepsilon/2$

Donc dès que $n \geqslant \sup(n_o, n_1)$, on a

$$|\mu_x(f) - F_n(x)| < \varepsilon$$

Ceci montre que Lf est de classe affine 1.

Supposons maintenant le lemme vrai pour tout $\beta' < \beta$, et soit f de classe β de Baire. On a donc

$$f = \lim f_n \quad \text{où} \quad f_n \in \mathcal{B}_{\beta_n}(K) \text{ et } \beta_n < \beta$$

D'après le théorème de Lebesgue Lf_n converge simplement vers Lf donc Lf est de classe affine β . C.Q.F.D.

Donnons maintenant le théorème le plus général concernant les simplexes.

THEOREME 2 : Pour tout simplexe K on a la relation $\mathcal{R}_{(\beta,\beta+1)}$

$$\mathcal{R}_{(\beta,\beta+1)} : \quad \mathcal{B}_\beta(K) \cap \mathcal{G}(K) \subset \mathcal{A}_{\beta+1}(K).$$

Pour démontrer ce théorème nous utiliserons les trois lemmes qui vont suivre. Remarquons à l'avance que les lemmes 2.1 et 2.3 sont valables pour tout convexe compact.

Etant donné un sous ensemble D de A(K), nous noterons R_D la relation d'équivalence sur K définie par

"$x \, R_D \, y$ si et seulement si $\phi(x) = \phi(y)$ pour toute ϕ dans D".

Nous noterons $\mathcal{B}_\beta(R_D)$ l'espace obtenu par le procédé de limite simple des suites bornées à partir des fonctions continues sur K constantes sur chaque classe d'équivalence modulo R_D.

LEMME 2.1. Soit K un convexe compact et f une fonction de $\mathcal{B}_\beta(K)$ alors il existe une partie dénombrable D(f) de A(K) telle que f soit dans $\mathcal{B}_\beta(R_{D(f)})$

Supposons d'abord $\beta = 0$: f, étant continue, est limite uniforme d'une suite g_p de la forme suivante :

$$g_p = a_1^{(p)} \vee \ldots \vee a_k^{(p)} - b_1^{(p)} \vee \ldots \vee b_k^{(p)}$$

avec $a_i^{(p)}$ et $b_j^{(p)}$ affines continues sur K.

Prenons pour D(f) toutes les fonctions $a_i^{(p)}$ et $b_j^{(p)}$ qui sont intervenues dans la construction des g_p. Il est clair que f est dans $\mathcal{B}_o(R_{D(f)})$.

Supposons maintenant le lemme démontré pour tout $\beta' < \beta$ et soit f de classe β .

On a donc $f = \lim\limits_n f_n$, où $f_n \in \mathcal{B}_{\beta_n}$ avec $\beta_n < \beta$. Comme f_n est de classe $\beta_n < \beta$ on peut associer à f_n une partie dénombrable $D(f_n)$ de A(K) telle que f_n soit dans $\mathcal{B}_{\beta_n}(R_{D(f_n)})$.

Prenons pour D(f) la réunion des $D(f_n)$. C'est une partie dénombrable de A(K) et il est clair que la relation d'équivalence associée à D(f) est plus fine que celle associée à $D(f_n)$, donc,

$$\mathcal{B}_\gamma(R_{D(f_n)}) \subset \mathcal{B}_\gamma(R_{D(f)}) \text{ pour tout } \gamma$$

Par suite f est dans $\mathcal{B}_\beta(R_{D(f)})$ C.Q.F.D.

Le lemme qui suit va nous permettre de nous ramener au cas d'une simplexe métrisable.

<u>LEMME 2.2.</u>: Sous les hypothèses du lemme 2.1, si le convexe K est un simplexe alors il existe un sous espace fermé H de A(K), séparable, contenant D(f), et qui vérifie le lemme de Riesz.

Prenons pour D_o l'espace sur $\mathbb{Q}$ des combinaisons linéaires à coefficients rationnels d'éléments de D(f). Il est dénombrable.

On suppose que l'on a construit une suite $D_o ,\ldots, D_n$, croissante, d'espaces vectoriels sur $\mathbb{Q}$, chaque D_i étant dénombrable, et que la propriété (P_k) est vérifiée pour tout $k \leq n$.

(P_k) "Si $(a_1 , a_2 ,\ldots, a_p)$, $(b_1 ,\ldots, b_p)$ sont deux suites finies dans D_{k-1} telles que $a_i \leq b_j$ pour tout $i \leq p$ et $j \leq p$, alors il existe une fonction C de D_k telle que $a_i \leq C \leq b_j$ pour tout $\begin{cases} i \leq p \\ j \leq p \end{cases}$ "

Construisons maintenant D_{n+1} : on pose

$$J_{n+1} = \{(a_1 \ldots a_p)(b_1 \ldots b_p) \ ; \ p \in \mathbb{N} \quad a_i \text{ et } b_j \in D_n \ , \ a_i \leq b_j\}$$

Comme A(K) vérifie le lemme de Riesz on peut trouver une fonction C dans A(K) qui séparent les a_i et les b_j. D_{n+1} sera l'espace engendré par D_n et les $(C_\gamma)_{\gamma \in J_{n+1}}$ sur le corps $\mathbb{Q}$.

D_n et J_{n+1} étant dénombrables il en sera de même de D_{n+1} et il est clair que (P_{n+1}) est vérifiée.

.On vérifie très facilement que $\bigcup_n D_n$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$, dénombrable et qui vérifie le lemme de Riesz . Soit H son adhérence : H satisfait aux conditions requises dans le lemme. Le seul point à vérifier est que H vérifie le lemme de Riesz. Il suffit pour cela qu'il vérifie la condition suivante :

(RL) Soit u_1 , u_2 , v_1 , v_2 dans H avec

$$u_i < v_j \qquad i,j \in \{1,2\}$$

alors il existe h dans H telle que

$$u_i < h < v_j \qquad i,j \in \{1,2\}.$$

Soient $u_i < v_j$ $\quad i,j \in \{1,2\}$ et u_i , $v_j \in$ H

On peut trouver un $\varepsilon > 0$ tel que

$$u_i + \varepsilon < v_j - \varepsilon$$

Or $(\bigcup_n D_n)$ est dense dans H donc on peut y trouver des fonctions u_i' et v_j' telles que

$$u_i < u_i' < u_i + \varepsilon$$

$$v_j - \varepsilon < v_j' < v_j$$

Comme $u_i' < v_j'$, il existe une fonction w dans $(\bigcup_n D_n)$ telle que $u_i' \leq w \leq v_j'$

- donc $\quad u_i < w < v_j$

H vérifie donc le lemme de Riesz. C.Q.F.D.

On peut toujours supposer que l'ensemble D(f) du lemme 2.1. contient la constante 1, il en est donc de même de H. Posons alors $Y = H_1'^{+} = \{\ell \in H' \mid \ell \geq 0 \; \ell(1) = 1$

Il est immédiat que Y est un simplexe, d'après le lemme 2.2., et on voit facilement que A(Y) est isomorphe à H. Comme H est séparable, Y est un simplexe métrisable.

Considérons l'application φ de $A'(K)$ sur H' définie par $\varphi(l) = l|_H$.
On voit facilement que $\varphi(K)$ est égal à $H_1'^{+}$ ou toute fonction de H nulle sur $\varphi(K)$ est identiquement nulle. En gardant ces notations nous pouvons énoncer.

LEMME 2.3. : (a) Sous les hypothèses précédentes on peut définir une fonction f sur Y telle que $f = \check{f} \circ \varphi$.

(b) Si f est dans $\mathcal{B}_\beta(K) \cap \mathcal{G}(K)$ alors $\check{f}$ est dans $\mathcal{B}_\beta(Y) \cap \mathcal{G}(Y)$

Pour le (a) il suffit de remarquer que si $\varphi(x) = \varphi(y)$ alors x et y sont équivalents modulos $R_{D(f)}$, donc $f(x) = f(y)$.

On peut poser $\check{f}(\varphi(x)) = f(x)$.

Pour (b) supposons d'abors que f est continue alors il est évident que $\check{f}$ est continue. Une récurrence immédiate nous montre que si f est dans $\mathcal{B}_\beta(R_{D(f)})$ alors $\check{f}$ est dans $\mathcal{B}_\beta(Y)$.

Si on suppose maintenant que f vérifie le calcul barycentrique sur K il faut voir qu'il en est de même pour $\check{f}$. Soit ν_o une mesure sur Y de barycentre $\varphi(x_o)$, on veut démontrer l'égalité

$$\int_Y \check{f}\, d\nu_o = \check{f}(\varphi(x_o)) = f(x_o)$$

Supposons que l'on ait démontré les deux affirmations suivantes

(1) Il existe une mesure μ_o sur K telle que son image $\varphi\mu_o$ par φ soit égale à ν_o

(11) La formule $\int_Y G\, d\nu_o = \int_K G \circ \varphi \; d\mu_o$, vraie pour toute fonction continue, reste valable pour toute fonction de Baire.

On sait alors que pour toute fonction G de A(Y) on a

$$\int_Y G\, d\nu_o = G[\varphi(x_o)] = \int_K G \circ \varphi \; d\mu_o = G \circ \varphi \; (r\mu_o)$$

donc $\varphi(x_o) = \varphi(r\mu_o)$

L'affirmation (11) nous permet d'écrire

$$\int_Y \check{f}\, d\nu_o = \int_K f\, d\mu_o = f[r\mu_o] = \check{f} \circ \varphi \; (r\mu_o) = \check{f}.[\varphi(x_o)]$$

La démonstration est terminée si (1) et (11) sont vrais.
Pour (1) on considère l'application Ψ de $M_1^+(K)$ dans $M_1^+(Y)$ définie par $\Psi(\mu) = \varphi\mu$. Elle est affine continue et l'image de Ψ contient tous les points extrémaux donc elle est surjective ; ν_o est donc dans l'image de Ψ.

Pour (11) il suffit d'appliquer le théorème de Lebesgue et de raisonner par récurrence.
Le théorème 2 est maintenant démontré car si on considère un simplexe K et f dans $\mathcal{B}_\beta(K) \cap \mathcal{G}(K)$, nous avons montré qu'il existe une surjection affine continue φ de K sur un simplexe métrisable Y et une fonction $\tilde{f}$ de $\mathcal{G}(Y) \cap \mathcal{B}_\beta(Y)$ telle que $f = \tilde{f} \circ \varphi$. D'après le résultat déjà cité de Rogalski concernant les simplexes métrisables on sait que $\tilde{f}$ est de classe affine $(\beta+1)$ donc f est de classe affine $(\beta+1)$ C.Q.F.D.

Remarque : La méthode employée par Rogalski pour les simplexes analytiques [8] qui consiste à établir une projection que l'espace $\mathcal{C}(K)$ dans $\mathcal{A}_1(K)$, n'est plus ici valable. En effet il faudrait montrer que pour toute fonction convexe continue, $\hat{f} = \mu_x(f)$ est de Baire.
Ceci est faux si le simplexe K n'est pas analytique. Comme exemple de tels simplexes on peut considérer le compact $[0\Omega]$ et $H = \{f \in \mathcal{C}[0\Omega]$; $f(0) + f(1) = 2 f(\Omega)\}$.
Soit $Y = H_1'^+$. On voit facilement que $\mathcal{E}(Y) = [0,\Omega[$ et que les mesures maximales sont celles qui sont portées par $[0,\Omega[$$\cdot$Y est un simplexe car si une mesure maximale est orthogonale à $A(Y) = H$, alors :

$$\mu = \alpha\left(\frac{\varepsilon_o + \varepsilon_1}{2} - \varepsilon_\Omega\right)$$

μ ne chargeant pas Ω , $\mu = 0$.

Soit alors f définie par

$$f(0) = 1$$
$$f(1) = -1$$
$$f(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \neq 0,1$$

$f \in H$ donc f est dans A(Y). f^+ est convexe continue et on voit facilement que $\hat{f^+}$ vaut 1 en ε_o , 1/2 en ε_Ω , 0 en ε_X , $X \neq 0,\Omega$.Or toute fonction continue sur $[0\Omega]$ étant constante à partir d'un certain $\alpha < \Omega$, il en est de même pour toute fonction de Baire. $\hat{f}^+$ n'est donc pas de Baire.

§ 3 Exemples et cas Particuliers

Pour utiliser les théorèmes nous aurons besoin des deux propositions suivantes qui constituent des propriétés de stabilité pour la relation $\mathcal{R}_{(\beta,\beta')}$

$$\mathcal{R}_{(\beta,\beta')} : \mathcal{G}(K) \cap \mathcal{B}_\beta(K) \subset \mathcal{A}_{\beta'}(K)$$

Proposition 3 : Soit K un convexe compact, contenu dans un hyperplan fermé qui ne passe pas par O. Si K vérifie $\mathcal{R}_{(\beta,\beta')}$ alors X = conv (K $\cup$ 0) vérifie aussi $\mathcal{R}_{(\beta,\beta')}$.

Soit en effet F dans $\mathcal{G}(X) \cap \mathcal{B}_\beta(X)$ et $f = F|_K$

Alors f est dans $\mathcal{G}(K) \cap \mathcal{B}_\beta(K)$, donc f est de classe affine β'.

Or si on suppose que $F(0) = 0$, on a pour tout x et tout λ de $[01]$:

$$F(\lambda x) = \lambda f(x)$$

Il suffit de vérifier que si f est dans $\mathcal{A}_{\beta'}(K)$, la fonction $\tilde{f}$, définie sur X par $\tilde{f}(\lambda x) = \lambda f(x)$, est dans $\mathcal{A}_{\beta'}(X)$.

Ceci est évident pour $\beta' = 0$ et la récurrence est immédiate. C.Q.F.D.

PROPOSITION 4 : Soit K un convexe compact, chapeau universel d'un cône de sommet O. Si K vérifie $\mathcal{R}_{(\beta,\beta')}$ alors X = conv (K $\cup$ -K) vérifie aussi $\mathcal{R}_{(\beta,\beta')}$

Soit F dans $\mathcal{B}_\beta(X) \cap \mathcal{G}(X)$ et $f = F|_K$.

Alors f est dans $\mathcal{B}_\beta(K) \cap \mathcal{G}(K)$, donc f est de classe affine β'.

Or si $F(0) = 0$ on a

$$F(\lambda x - (1-\lambda)\, y) = \lambda f(x) - (1-\lambda)\, f(y)$$

Il suffit de montrer le lemme suivant

LEMME 4.1.: Soit f une fonction de $\mathcal{A}_{\beta'}(K)$, nulle en o, on peut alors définir une fonction $\tilde{f}$ sur X, de classe affine β', en posant

$$\tilde{f}(\lambda x - (1-\lambda)\, y) = \lambda f(x) - (1-\lambda)\, f(y)$$

Cette formule a un sens car si on a

$$\lambda x - (1-\lambda)\, y = \lambda' x' - (1-\lambda')\, y' \text{ où } x, x', y, y' \in K$$
$$\lambda, \lambda' \in [01]$$

On a alors $\lambda x + (1 - \lambda') y' = \lambda' x' \quad (1 - \lambda) y$

En appelant p la jauge de K qui est additive sur le cone engendré par K on obtient

$$\lambda\, p(x) + (1 - \lambda')\, p(y') = \lambda'\, p(x') + (1-\lambda)\, p(y) = k$$

On en tire

$$\frac{\lambda}{k}\, p(x) + \frac{x}{p(x)} + \frac{(1-\lambda')}{k}\, p(y') \frac{y'}{p(y')} = \frac{\lambda'}{k}\, p(x') \frac{x'}{p(x')} + \frac{(1-\lambda)}{k}\, p(y) \frac{y}{p(y)}$$

En applicant f aux deux membres alors on trouve

$$\lambda f(x) - (1-\lambda) f(y) = \lambda' f(x') - (f - \lambda') f(y')$$

La deuxième affirmation du lemme est évidente si $\beta' = 0$. La récurrence est très facile si on remarque que toute fonction de $\mathcal{A}_{\beta'}(X)$ nulle en 0 est limite d'une suite de fonctions de classe affine inférieure à β' et toujours nulles en 0.

C.Q.F.D.

Ceci va nous permettre de donner un exemple intéressant de convexe compact de type 0 :

Exemple 1 : Soit $H = \{ f \in \mathcal{C}[01] \; ; \; \int_0^1 f(t)\, dt = f(1) \}$

Et posons $K = H_1'^{+}$. On vérifie facilement que K est un simplexe dont l'ensemble des points extrémaux s'identifie à $[01[$. C'est un K_σ on peut donc appliquer la proposition 1. En applicant les propositions 3 et 4 on montre alors que la boule unité de H' est un convexe compact de type 0.

Exemple 2 : Considérons la boule unité;de $\ell_1(\mathbb{N})$, dual de $C_0(\mathbb{N})$. On peut appliquer la même méthode, mais en fait nous allons démontrer un résultat beaucoup plus beaucoup plus fort.

Proposition 5 : Toute fonction qui vérifie le calcul barycentrique sur la boule unité de $\ell'(\mathbb{N})$ est de première classe affine.

Soit f une telle fonction qu'on peut supposer nulle en 0. En utilisant le lemme (4.1) il suffit de montrer que f est de première classe affine sur la partie positive de cette boule. Or tout point de $\ell_1^+(\mathbb{N})$ est de la forme

$$x = \sum_1^{\infty} x_n e_n + (1 - \sum x_n) . 0$$

où e_n désigne la suite des points extrémaux de K et $\sum_1^{\infty} x_n \leq 1$. Comme f vérifie le calcul barycentrique on a

$$f(x) = \sum_1^{\infty} x_n . f(e_n) = \lim_N \sum_1^N x_k f(e_k) = \lim_N F_N(x)$$

où $F_N(x) = \sum_1^N x_k f(e_k)$.

Les F_N étant affines continues sur $P_1^+(N)$, f est de classe affine 1

C.Q.F.D.

Nous allons maintenant donner une application du théorème 2 pour les α-polytopes. Rappelons qu'un convexe compact K est un α polytope s'il existe un simplexe S et une surjection affine continue φ de S sur K, telle que $\varphi^{-1}(x)$ soit de dimension finie pour tout x de K. Phelps a démontré dans [7] qu'il est équivalent de dire que l'application linéaire $\tilde{\varphi}$ de A'(S) sur A'(K) qui prolonge φ a un noyau de dimension finie.

<u>Théorème 6</u> : Soit K un α polytope alors on a

$$\mathcal{B}_{\beta}(K) \cap \mathcal{G}(K) \subset \mathcal{A}_{\beta+1}(K)$$

Soit K un α polytope. Il existe un simplexe S et une surjection continue $\tilde{\varphi}$ de A'(S) sur A'(K) dont le noyau est de dimension finie. On voit immédiatement que si on considère A(K) comme sous-espace de A(S) , en identifiant les fonctions f et $f \circ \varphi$, alors A(K) est l'orthogonal dans A(S) du noyau de $\tilde{\varphi}$, donc A(K) admet un supplémentaire topologique H de dimension finie.

On peut, de la même façon identifier $\mathcal{A}_{\beta}(K)$ à un sous espace de $\mathcal{A}_{\beta}(S)$. En procédant par récurrence nous allons démontrer que H et $\mathcal{A}_{\beta}(K)$ sont supplémentaires algébriques dans $\mathcal{A}_{\beta}(S)$ - par suite ils seront supplémentaires topologiques pour toute topologie d'espace vectoriel séparé, puisque H est de dimension finie. Nous savons déjà que l'affirmation est vraie pour $\beta = 0$. Supposons la vérifiée pour tout $\beta' < \beta$.

On pose $E = \bigcup_{\beta' < \beta} \mathcal{A}_{\beta'}(S)$ et $E' = \bigcup_{\beta' < \beta} \mathcal{A}_{\beta'}(K)$.

On vérifie immédiatement que E' et H sont supplémentaires algébriques dans E. Si on munit E de la topologie de la norme, on sait que E est somme directe topologique de E' et H et par conséquent il existe une constante $C_{\beta} > 0$ telle que pour toute f dans E on puisse écrire :

$$f = f_1 + f_2$$

avec $f_1 \in H$, $f_2 \in E'$ et $\|f_1\| \leq C_\beta \|f\|$.

Soit alors g dans $\mathcal{A}_\beta(S)$. Par définition il existe une suite g_n bornée de E telle que $g = \lim_n g_n$

On peut écrire $g_n = g_{n_1} + g_{n_2}$

avec $g_{n_1} \in H$ et $\|g_{n_1}\| \leq C_\beta \|g_n\| \leq K$.

La suite (g_{n_1}) est bornée, donc on peut en extraire une sous-suite convergente dans H, que nous noterons encore g_{n_1}. Par différence la suite g_{n_2} converge simplement vers une fonction g_2 de $\mathcal{A}_\beta(K)$ et on a

$$g = g_1 + g_2 \qquad \text{où} \quad g_1 \in H \text{ et } g_2 \in E'.$$

La décomposition est unique ou toute fonction de $H \cap \mathcal{A}_\beta(K)$ serait continue donc dans $H \cap A(K)$ qui est réduit à zéro.

La démonstration du théorème est alors immédiat : soit f dans $\mathcal{B}_\beta(K) \cap \mathcal{G}(K)$. On vérifie aisément que $f \circ \varphi$ vérifie encore le calcul barycentrique donc $f \circ \varphi$ est dans $\mathcal{B}_\beta(S) \cap \mathcal{G}(S)$. D'après le théorème 2, $f \circ \varphi$ est de classe affine $(\beta+1)$ sur S donc on peut trouver f_1 dans H et f_2 dans $\mathcal{A}_{\beta+1}(K)$ telles que

$$f \circ \varphi = f_1 + f_2 \circ \varphi$$

On a donc $f_1 = (f - f_2) \circ \varphi$.

Cette fonction est dans H, donc continue sur S. De plus elle s'annule sur le noyau de φ , donc elle est dans A(K) .

Or $A(K) \cap H = \{0\}$

donc $f_1 = 0$

On a démontré que $f \circ \varphi = f_2 \circ \varphi$, ce qui implique $f = f_2$ car φ est surjective.

C.Q.F.D.

§4 Extension à la boule unité d'un dual d'espace de Lindenstrauss.

Nous avons déjà traité le cas de la boule unité de $\ell^1(\mathbb{N})$ qui est de la forme $X = \mathrm{conv}(K \cup -K)$ où K est un chapeau universel et un simplexe à points extrémaux K_σ. Nous avons vu que dans ce cas on pourrait appliquer la proposition 1 ; c'est faux en général pour les boules unités d'espaces $L^1(\mu)$ qui sont duaux. Les espaces duaux qui sont isométriques à des espaces $L^1(\mu)$ possèdent des propriétés caractéristiques intéressantes (citons pour cela Effros [2] , Lazar [4] et Lidenstrauß [5] . Nous allons donner une proposition analogue à la propriété $\mathcal{R}_{(\beta,\beta+1)}$ valable pour les simplexes métrisables.

Proposition 7. Soit V un espace de Lidenstrauss séparable et K la boule unité de son dual, on a alors :

$$\mathcal{B}_\beta(K) \cap \mathcal{G}(K) \subset \mathcal{A}_{\beta+1}(K)$$

Rappelons d'abord quelques résultats concernant les duaux d'espaces de Lindenstrauß : soit V un espace de Lindenstrauß et K la boule de son dual. Pour toute fonction f [resp. toute mesure μ] sur K on note σf [resp. : $\sigma\mu$] la fonction [resp. : la mesure] définie par

$$(\sigma f)(x) = f(-x) \quad \text{pour tout } x \text{ de } K$$

[resp. : $(\sigma\mu)(\varphi) = \mu(\sigma\varphi)$ pour toute φ dans $\mathcal{C}(K)$]

Pour toute mesure μ sur K nous noterons $\mathrm{imp}\,\mu$, la mesure définie par $\mathrm{imp}\,\mu = 1/2\,(\mu - \sigma\mu)$

D'après Effros, [2] , nous savons qu'un espace dual V' est isométrique à un espace L^1 si et seulement si pour toutes mesures maximales μ_1 et μ_2 sur la boule unité K, de même barycentre on a $\mathrm{imp}\,\mu_1 = \mathrm{imp}\,\mu_2$.

On peut donc définir une application linéaire L de $\mathcal{C}(K)$ dans $\mathbb{R}^K$ en posant

$Lf(x) = (\mathrm{imp}\,\mu_x)(f)$, où μ_x est une mesure maximale de barycentre x. Cette application est bien définie d'après la remarque précédente. L est linéaire et on a

$$\begin{cases} L1 = 0 \\ Lf = f \quad \text{si } f \text{ est élément de } V \end{cases}$$

D'autre part si f est convexe continue sur K alors

$$(Lf)(x) = \frac{1}{2}[\mu_x(f) - (\sigma\mu_x)(f)] = \frac{1}{2}[\mu_x(f) - \mu_x(\sigma f)] = \frac{1}{2}[\hat{f}(x) - \widehat{\sigma f}(x)]$$

Lf est donc différence de deux fonctions s.c.s. sur un compact métrisable, elle est donc de première classe de Baire. Par densité on en déduit que Lf est de première classe de Baire pour toute fonction continue f sur K et, d'après le lemme 0, elle est de première classe affine. Nous venons donc de montrer que

$$L[\mathcal{B}_0(K)] \subset \mathcal{A}_1(K).$$

Supposons alors que $L[\mathcal{B}_\gamma(K)] \subset \mathcal{A}_{\gamma+1}(K)$ pour tout $\gamma < \beta$.
Soit f dans $\mathcal{B}_\beta(K)$, il existe une suite bornée (f_n) telle que

$$f = \lim_n f_n$$

et $$f_n \in \mathcal{B}_{\gamma_n}(K) \text{ , avec } \gamma_n < \beta$$

D'après le théorème de Lebesgue, (Lf_n) converge simplement vers Lf et comme (Lf_n) est de classe affine (γ_n+1) , Lf est de classe affine $(\beta+1)$.
Nous avons donc $L[\mathcal{B}_\beta(K)] \subset \mathcal{A}_{\beta+1}(K)$.

Soit maintenant une fonction F dans $\mathcal{B}_\beta(K) \cap \mathcal{G}(K)$. Posons $f = F - F(0)$ f est impaire et vérifie le calcul barycentrique donc

$$(Lf)(x) = \frac{1}{2}[\mu_x(f) - \mu_x(\sigma f)] = \mu_x(f) = f(x)$$

donc $Lf = f$ et par conséquent f est de classe affine $(\beta+1)$. Il en est de même pour F.

C.Q.F.D.

Nous allons maintenant donner l'analogue de la proposition 1 qui permet d'améliorer le résultat lorsqu'on sait que les points extrémaux forment un K_σ

Proposition 8 : Soit K la boule unité du dual d'un espace de Lindenstrauß
On suppose que $\mathcal{E}(K)$ est un K_σ, alors on a

$$\mathcal{B}_{(\beta,\beta)} : \mathcal{B}_\beta(K) \cap \mathcal{G}(K) = \mathcal{A}_\beta(K)$$

Pour démontrer cette proposition nous allons avoir besoin des deux lemmes suivants :

LEMME 8.1. : Soit K la boule unité du dual d'un espace de Lindenstrauß V Si $\mathscr{E}(K)$ est fermé alors V s'identifie à l'espace $\mathscr{C}_{\Sigma}(K)$ des fonctions continues impaires sur $\mathscr{E} K$.

Ce lemme est du à Effros [2-théorème 2.3]

LEMME 8.2. : Soit K la boule unité du dual d'un espace de Lindenstrauß V et H un compact symétrique dans $\mathscr{E} K$. Alors $Q = \text{conv } H$ est la boule unité d'un dual d'espace de Lindenstrauß.

On a évidemment $Q = (\text{lin } Q) \cap K$ donc Q est la boule unité du sous espace de V' qu'il engendre. Il suffit alors de démontrer les deux assertions suivantes

(a) (lin Q) est faiblement fermé dans V'

(b) Q vérifie le critère donné par Effros, à savoir : si μ_1 et μ_2 sont deux mesures maximales sur Q de même barycentre, alors $\text{Odd } \mu_1 = \text{Odd } \mu_2$

(a) est immédiat car la trace du sous espace (lin Q) sur la boule unité K est compacte donc faiblement fermée. Cela suffit pour que (lin Q) soit faiblement fermé dans V', donc soit un espace dual.

Pour vérifier (b), on remarque que $\mathscr{E} Q = H$ et par conséquent si μ_1 et μ_2 sont maximales sur Q, elles sont portées par H ; elles sont donc aussi maximales sur K et on a déjà $\text{Odd } \mu_1 = \text{Odd } \mu_2$.

CONSEQUENCES 8.3. Toute fonction f de $\mathscr{C}_{\Sigma}(H)$ se prolonge en une fonction F de A(K) telle que $\|F\| \leq 2\|f\|$.

En effet, d'après le lemme 8.2, Q est la boule unité du dual d'un espace de Lindenstrauß et par conséquent on peut lui appliquer le lemme 8.1 en remarquant que $\mathscr{E} Q = H$. On peut donc prolonger f en une fonction linéaire sur (lin Q), dont la restriction à Q est continue, c'est donc une forme linéaire continue sur (lin Q) muni de la topologie faible. Si on note f ce prolongement on a :

$$\|\tilde{f}\| = \|f\|$$

Posons $A_1 = (K \times \|f\| (1+\varepsilon)) \subset V' \times \mathbb{R}$

$A_2 = \{(x, \tilde{f}(x)) \; ; \; x \in \text{lin } Q\}$

A_1 est convexe compact ; A_2 est convexe fermé faiblement dans $V' \times R$. Ils sont disjoints, donc il existe un hyperplan fermé de $V' \times R$ qui contient A_2 et est disjoint de A_1. Il existe par suite un élément F de V tel que

$$F(x) - \tilde{f}(x) = 0 \qquad \forall x \in \operatorname{lin} Q$$

$$F(x) - \|f\| (1+\varepsilon) < 0 \ \forall x \in K$$

donc $\quad \|F\| < \|f\| (1+\varepsilon) \leq 2\|f\|$

L'affirmation 8.3 est donc démontrée et c'est elle qui va nous permettre de prouver par récurrence, la proposition 8.

En gardant les notations de la proposition 7, on considère l'opérateur L. Nous avons déjà remarqué que L est l'identité sur $\mathcal{B}_\beta(K) \cap \mathcal{G}(K)$. Il suffit de montrer que pour tout $\beta \geq 1$ [la proposition étant évidente pour $\beta = 0$], on a

$$L[\mathcal{B}_\beta(K)] \subset \mathcal{A}_\beta(K)$$

Supposons d'abord $\beta = 1$. Comme $\mathcal{E}K$ est réunion de compacts symétriques H_n on peut leur appliquer la proposition 8.3. Soit f dans $\mathcal{B}_1(K)$ on a $f = \lim\limits_n f_n$ avec $f_n \in \mathcal{C}(K)$ et $\|f_n\| \leq M$. On peut supposer f_n impaire.
Soit F_n dans A(K) telle que F_n prolonge f_n sur H_n et $\|F_n\| \leq 2\|f_n\| \leq 2M$.
f et F_n étant impaires on a : $Lf(x) = \operatorname{imp} \mu_x(f) = \mu_x(f)$

$$LF_n(x) = \mu_x(F_n) = F_n(x)$$

$$|\mu_x(f) - F_n(x)| \leq \left| \int_{\mathcal{E}K-H_n} (f - F_n)\, d\mu_x \right| + \left| \int_{H_n} (f - F_n)\, d\mu_x \right|$$

$$\leq 3 \|f\| \mu_x(\complement H_n) + \left| \int_{H_n} (f - f_n)\, d\mu_x \right|$$

x étant fixé le premier terme tend vers 0 avec n car toute mesure maximale est portée par $\mathcal{E}K$ et le second tend vers 0 en vertu du théorème de Lebesgue. Lf est donc de classe affine 1.

Supposons la proposition établie pour tout $\beta' < \beta$, alors on démontre très facilement que $L[\mathcal{B}_\beta(K)] \subset \mathcal{A}_\beta(K)$ en remarquant que toute fonction impaire, de classe β est limite d'une suite de fonctions f_n de classe β_n, où β_n est un ordinal inférieur à β, et f_n impaire.

C.Q.F.D.

Ayant maintenant la propriété $\mathcal{R}_{(\beta,\beta+1)}$ pour les boules unités métrisables, nous allons procéder de façon analogue à celle du théorème 2 pour obtenir le théorème suivant.

THEOREME 9 : Soit K le boule unité du dual d'un espace de Lindenstrauß alors on a

$$\mathcal{B}_\beta(K) \cap \mathcal{G}(K) \subset \mathcal{A}_{\beta+1}(K)$$

Nous pouvons appliquer le lemme 2.1. : si f est dans $\mathcal{B}_\beta(K)$ on lui associe une partie D(f) de A(K) telle que f soit dans $\mathcal{B}_\beta[R_{D(f)}]$. Il faut maintenant "saturer" D(f) de manière a obtenir un espace séparable H, de Lindenstrauß. Citons un des critères donnés par Lindenstrauß [5] : Pour que H soit de Lidenstrauß, il suffit que pour toute famille finie de boules fermées se coupant deux à deux, il existe un point commun à toutes les boules.

De plus en utilisant le lemme (4.2) de Lidenstrauß [5] , on voit qu'il suffit de montrer que pour toute famille de quatre boules se coupant deux à deux et pour tout ε , il existe un point x_ε tel que

$$\| x_\varepsilon - x_i \| \leqslant r_i + \varepsilon$$

où x_i désigne le centre d'une des quatre boules et r_i son rayon.

Construisons donc un espace H de Banach qui vérifie cette proprété. Nous prenons pour D_0 l'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ engendré par D(f). Il est dénombrable et on peut donc le ranger en une suite $\{q_\alpha ; \alpha \in J_0\}$. Supposons construite une suite croissante D_0 , D_1 ,..., D_n, d'espaces vectoriels sur Q, dénombrables et vérifiant la propriété (P_k) suivante, pour tout $k \leqslant n$:
(P_k)" Pour toute famille finie de boules centrées dans D_{k-1}, de rayons rationnels, qui se coupent deux à deux dans D_{k-1}, alors l'intersection totale est non vide dans D_k".
On construit alors D_{n+1} de la façon suivante :

Soit $J'_{n+1} = \{(x_1, \dots, x_p) , (r_1, \dots, r_p) ; x_i \in D_n , r_i \in \mathbb{Q} , p \in \mathbb{N}$

tels que les boules $B[x_i, r_i]$ se coupent deux à deux dans $D_n\}$.

J'_{n+1} est dénombrable. De plus, si $\gamma = ((x_1 ,\ldots, x_p) , (r_1 ,\ldots, r_p))$ est un élément de J'_{n+1} on peut trouver dans V, qui est de Lindenstrauß, un élément commun a_γ aux boules $B[x_i,r_i]$.

L'espace vectoriel D_{n+1}, engendré sur $\mathbb{Q}$ par D_n et les fonctions a_γ, γ parcourant J'_{n+1}, répond à la propriété P_{n+1}.

Il est clair que l'espace vectoriel (sur $\mathbb{Q}$) $E = \bigcup\limits_n D_n$ est dénombrable et possède la propriété d'intersection finie pour des boules de rayons rationnels.

Soit H son adhérence uniforme dans V. Vérifions pour H les hypothèses du lemme 4.2 de Lidenstrauß [5]: soit x_1 , x_2 , x_3 , x_4 dans H et α_1 ,α_2 ,α_3 ,α_4 dans $\mathbb{R}$ tels que les boules $B[x_i,\alpha_i]$ se coupent deux à deux dans H. Soient a'_i dans E tels que :

$$\|a'_i - x_i\| < \varepsilon/4$$

et soient r_i dans Q tels que $\alpha_i + \varepsilon/4 < r_i < \alpha_i + \varepsilon/2$

On a donc $\|a'_i - a'_j\| \leq \|a'_i - x_i\| + \|x_i - x_j\| + \|x_j - a'_j\|$

$$\|a'_i - a'_j\| < \alpha_i + \alpha_j + \varepsilon/2 < r_i + r_j$$

Les boules ouvertes de centre a'_i et rayon r_i se coupent deux à deux dans H donc dans E qui est dense dans H. Par construction de E, il existe un élément x_ε de E tel que

$$\|x_\varepsilon - a'_i\| \leqslant r_i$$

donc $\quad \|x_\varepsilon - x_i\| \leq \|x_\varepsilon - a'_i\| + \|a'_i - x_i\|$

$$\leqslant r_i + \varepsilon/4 < \alpha_i + \varepsilon$$

On peut donc affirmer que H est un espace de Lidenstrauß.

Prenons pour Y la boule unité de son dual H' et considérons la surjection affine continue φ de K sur Y définie par $(\varphi x)(f) = f(x)$ pour tout x de K et toute f de H.

On peut appliquer le lemme 2.3 : il existe une fonction $\tilde{f}$ de $\mathcal{B}_\beta(Y) \cap \mathcal{G}(Y)$ telle que $\tilde{f} \circ \varphi = f$.

D'après la proposition 7, $\tilde{f}$ est dans $\mathcal{C}^1_{\beta+1}(Y)$ donc il en est de même de f.

C.Q.F.D.

§ 5 - Problème pour les convexes compacts quelconques.

1 - Le cas général se ramène au cas métrisable.

En effet soit K un convexe compact quelconque et f dans $\mathcal{B}_\beta(K) \cap \mathcal{Y}(K)$. D'après le lemme 2.1 on peut lui associer une partie D(f) de A(K) telle que f soit dans $\mathcal{B}_\beta\,[R_{D(f)}]$. On considère l'espace vectoriel fermé H engendré par D(f) et $Y = H_1^{\prime +}$. Comme aux paragraphes précédents désignons par φ la surjection de K sur Y. D'après le lemme 2.3 f est de la forme $\tilde{f} \circ \varphi$ où $\tilde{f}$ est dans $\mathcal{B}_\beta(Y) \cap \mathcal{Y}(Y)$. Si pour tout convexe compact métrisable la propriété $\mathcal{R}_{(\beta,\beta')}$ est vraie alors $\tilde{f}$ est dans $\mathcal{A}_{\beta'}(Y)$, donc f est dans $\mathcal{A}_{\beta'}(K)$.
S'il existe une relation $\mathcal{R}_{(\beta,\beta')}$ vraie pour tout convexe compact métrisable elle est vraie pour tout convexe compact.

2 - Cas des espaces réflexifs.

Proposition 10 : Si K est la boule unité d'un espace réflexifs alors

$$\mathcal{Y}(K) = A(K)$$

En effet toute fonction qui vérifie le calcul barycentrique est affine et bornée donc continue. Cela résoud le problème pour toutes les boules unités d'espace L^p , $1 < p < \infty$.

3 - Le problème pour $L^\infty(\mu)$ ou $l^\infty(\mathbb{N})$ n'est pas résolu.

Remarquons que si K est la boule unité d'un espace L^∞ ou $l^\infty(\mathbb{N})$ alors A(K) est isomorphe à $L'(\mu) \times \mathbb{R}$ [resp. : $l'(\mathbb{N}) \times \mathbb{R}$] ; c'est donc un espace faiblement séquentiellement complet et par suite

$$\mathcal{A}(K) = \bigcup_{\beta<\Omega} \mathcal{A}_\beta(K) = A(K)$$

Deux cas seulement sont possibles : ou bien $\mathcal{B}_\beta(K) \cap \mathcal{Y}(K)$ n'est pas contenu dans $\mathcal{A}(K)$, ou bien, $\mathcal{B}_\beta(K) \cap \mathcal{Y}_\beta(K) = A(K)$.
Le problème n'est pas encore résolu. En particulier pour $K = [-1,1]^{\mathbb{N}}$, le problème peut se ramener à une recherche de limite médiale. Mokobodzki a défini et étudié dans [6] les problèmes concernant ces limites. Donnons quelques définitions.
Soit $K = [-1,1]^{\mathbb{N}}$

f_n la $n^{\text{ième}}$ projection de K sur $\mathbb{R}$

On appelera limite médiale de la suite (f_n) une fonction f sur K universellement mesurable, vérifiant le calcul barycentrique et telle que

$$\liminf f_n \leq f \leq \limsup f_n$$

On a le résultat suivant

Proposition 11 : Soit $K = [-1,1]^{\mathbb{N}}$, les énoncés suivants sont équivalents :

(1) Il existe une limite médiale de la suite fondamentale (f_n) qui est borélienne.

(2) Il existe une fonction non continue, borélienne et vérifiant le calcul barycentrique sur K

(1) $\Longrightarrow$ (2) résulte du fait suivant : une limite médiale n'est jamais continue. En effet notons e_p l'élément de K défini par $f_n(e_p) = \delta_{np}$, et posons

$$X_n = \sum_{n+1}^{\infty} e_p$$

Il est clair que X_n tend vers 0 dans K et $\lim_n \inf \quad f_n(X_k) = 1$. Si f est une limite médiale on a donc $f(X_k) = 1$ pour tout k. Or $f(0) = 0$, donc f est discontinue.

Pour démontrer (2 $\Longrightarrow$ 1) nous utiliserons le lemme suivant

Lemme 11.1. : Soit f une fonction affine sur K telle que f soit positive sur $[01]^{\mathbb{N}}$, vérifie le calcul barycentrique sur K et telle que $f(e_p) = 0$ pour tout p et $f(\sum_0^{\infty} e_p) = 1$, alors f est une limite médiale de la suite (f_n).

En effet, si $\alpha > \limsup f_n(x)$ on peut trouver un indice N tel que $f_n(x) < \alpha$ dès que $n \geqslant N$.

$$x = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)\, e_n + \sum_{N+1}^{\infty} f_n(x)\, e_n$$

$$f(x) = f(\sum_{N+1}^{\infty} f_n(x)\, e_n)$$

Or $\sum_{N+1}^{\infty} f_n(x)\ e_n = (\sum_{N+1}^{\infty} e_n).\alpha - \sum_{N+1}^{\infty} (\alpha - f_n(x)).e_n$

donc $f(\sum_{N+1}^{\infty} f_n(x)\ e_n) < \alpha \quad f(\sum_{N+1}^{\infty} e_n) = \alpha.1$.

on en tire $f(x) < \alpha$

donc $f(x) \leq \lim\sup f_n(x)$.

On ferait de même avec la limite inférieure.

C.Q.F.D.

Etant donnée f dans $\mathcal{G}(K) \cap \mathcal{B}_{\beta}(K)$, non continue il faut se ramener à une fonction du type du lemme précédent. On va pour cela procéder en plusieurs étapes.

1 On peut supposer $f(e_p) = 0$ pour tout p

Soit $J_1 = \{p | f(e_p) \geqslant 0\}$ et $X_1 = \sum_{p \in J_1} e_p$

On a $f(X_1) = \sum_{\substack{p \leq k \\ p \in J_1}} f(e_p) + f(\sum_{\substack{p > k \\ p \in J_1}} e_p)$

donc $\left| \sum_{\substack{p \leq k \\ p \in J_1}} f(e_p) \right| = \sum_{\substack{p \leq k \\ p \in J_1}} |f(e_p)| \leq 2\|f\|$

On en tire $\sum_{p \in J_1} |f(e_p)| \leq 2\|f\|$.

On ferait de même pour les autres indices et on a donc $\sum_{p=1}^{\infty} |f(e_p)| < +\infty$.

Posons $a(x) = \sum_{p=1}^{\infty} f(e_p)\ f_p(x)$.

a est dans $l'(N)$ donc dans $A(K)$ et par suite $(f-a)$ vérifie les mêmes conditions, que f avec en outre $(f-a)(e_p) = 0$ pour tout p.

2 On peut se ramener au cas où f est positive sur $[0 1]^{\mathbb{N}}$.

Identifions K et la boule unité de $\mathcal{C}[\beta\mathbb{N}]$. f est donc un élément du dual $\mathcal{M}[\beta\mathbb{N}]$, que nous noterons μ .

μ se décompose en $\mu^+ - \mu^-$

μ étant dans $\mathcal{B}_{\beta}(K)$ nous allons voir que μ^+ et μ aussi : il existe φ dans $L'(|\mu|)$, égale à 1 ou -1 telle que

$$\mu = \varphi|\mu|$$

d'où $\mu^+ = \varphi^+|\mu|$

et $\mu^+ = \varphi^+/\varphi . \mu = \varphi^+ . \mu$.

φ^+ est dans $L'(|\mu|) \cap L^\infty(|\mu|)$ donc il existe une suite h_n de $\mathcal{C}[\beta\mathbb{N}]$ telles que : $0 \leq h_n \leq 1$

et $\lim h_n(x) = \varphi^+(x)$ $|\mu|$ presque partout.

La suite $(h_n . \mu)$ converge vers μ^+ uniformément sur K car

$$|\langle x ; h_n\mu - \mu^+\rangle| \leq \|x\| \|\varphi^+ - h_n\|_{L'(\mu)} \leq \|\varphi^+ - h_n\|_{L'(\mu)} .$$

donc μ^+ est encore dans $\mathcal{B}_\beta(K)$ et de même pour μ^-.

Il faut montrer que μ^+ vérifie le calcul barycentrique sur K , et il suffit de montrer que $h_n\mu \in \mathcal{G}(K)$:

Soit m une mesure sur K de barycentre x_o , considérons la mesure m' définie par

$$m'(F) = \int_K F(h_n x).dm(x) \quad \text{pour toute } F \in \mathcal{C}(K)$$

Si F est dans $l'(\mathbb{N})$ alors on a la fonction F' définie par

$F'(x) = F(h_n x)$ est aussi dans $l'(\mathbb{N})$ et par conséquent

$m'(F) = F(h_n x_o)$.

La mesure m'a donc pour barycentre $(h_n x_o)$, on a alors, puisque μ vérifie le calcul barycentrique

$$\int_K \mu(h_n x)\, dm(x) = \mu(h_n x_o)$$

soit $$\int_K (h_n\mu)(x)\, dm(x) = (h_n\mu)(x_o)$$

donc $(h_n\mu)$ vérifie le calcul barycentrique et μ^+ aussi. Il en est de même pour μ^-.

Si $\mu = \mu^+ - \mu^-$, et si en outre μ n'est pas continue, l'une des deux au moins n'est pas continue. Supposons que ce soit μ^+ alors μ^+ est une fonction de $\mathcal{B}_\beta(K) \cap \mathcal{G}(K)$, positive sur $[01]^{\mathbb{N}}$ et non continue, d'après le lemme 11.1 c'est une limite médiale borélienne.

C.Q.F.D.

La construction des limites médiales, donnée de Mokobodzki, utilise fortement l'hypothèse du continu ; nous pouvons conjecturer qu'aucune limite médiale n'est borélienne. Si cela est vrai, alors $[-1,1]^{\mathbb{N}}$ est donc de type O.

1 E. ALFSEN : Convex Sets and boundary integrals Springer Verlay 1971;

2 E. EFFROS : A class of real banach spaces.
Israël Journal of Math. vol. 9 - 1971 - p. 430-458

3 A. GOULLET de RUGY, C. SCHOLCHANCELIER, B. TAYLOR MAC GIBBON
Quelques résultats nouveaux sur les points
extrémaux d'un simplexe compact.
Semin. Choquet 1970-71.

4 J. LAZAR : Unit ball in conjugale L' spaces Duke Math. J. 39 (1072) p. 1.8

5 J. LINDENSTAUSS : Extension of compact operators.
Memoirs of the A.M.S. - 1964.

6 G. MOKOBODZKI : fonction médiale d'une suite de fonctions

7 R. PHELPS : Infinite dimensional; compact convex polytopes.
Math. Sccand. n°24 - 1962 p. 5-26.

8 M. ROGALSKI : Operateurs de Lien - projecteurs boréliens simplexes
analytiques.
Journal of functional Analysis - vol. 2 n°4 - 1968
p. 458-488.

9 R.D. WILLIAMS : Iterated sequential closure of a banach space in its
second conjugate. Proc. of the AMS (1965)-16 p. 1195

10 R.D. WILLIAMS : A note on weak sequential convergence Pacific Journal of
Math. 12 (1962) 333-335.

ETUDE DES ESPACES A(K) QUI SONT DES DUAUX.

par Michèle CAPON.

INTRODUCTION .-

Nous allons étudier les propriétés de certains convexes compacts K tels que l'espace $A(K)$ des fonctions affines continues sur K soit un dual. L'espace $A(K)$ sera toujours muni de la norme uniforme et de l'ordre usuel sur les fonctions. L'expression "$A(K)$ est un dual" signifiera que $A(K)$ est le dual pour l'ordre et la norme d'un espace normé ordonné V. Notons ici que l'injection canonique de V dans son bidual permet d'identifier V à un sous espace de $A'(K)$ muni de la norme et de l'ordre induit par $A'(K)$.

A partir de certaines propriétés introduites par Alfsennous ferons l'étude des espaces $A(K)$ qui sont des duaux. Notre étude peut être éclairée par la considération d'un cas particulier, celui de l'espace $\mathscr{C}(X)$ des fonctions continues sur un espace compact X, qui s'identifie à l'espace $A(K)$ où $K= M_1^+(X)$. Les résultats de Dixmier [4] constituent un cas particulier de ceux que nous avons en vue. Rappelons pour cela qu'une mesure μ sur le compact X est dite normale si, lorsque f est l'enveloppe supérieure dans l'espace ordonné $\mathscr{C}(X)$ d'une famille filtrante croissante $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ alors $\mu(f)$ est la limite des $\mu(f_\alpha)$

Dixmier montre dans [4] qu'une condition nécessaire est suffisante pour que $\mathscr{C}(X)$ soit un dual et que X soit un compact hyperstonien, c'est à dire vérifie les deux conditions suivantes:

1°)- L'espace $\mathscr{C}(X)$ est complétement réticulé.

2°)- La réunion des supports des mesures normales sur X est dense dans X.

Dans ces conditions le prédual de $\mathscr{C}(X)$ est unique et s'identifie à l'espace des mesures normales sur X.

Nous commencerons notre étude par le cas où K est un simplexe en montrant que dans ce cas les conditions nécessaires introduites par Alfsen sont aussi suffisantes. L'étude du cas général nous permettra de retrouver et d'améliorer les résultats de Phelps [7] sur les polytopes, et de Behrendts [2] sur les espaces réflexifs.

.../...

§ 1- UNE PROPRIETE INTRODUITE PAR ALFSEN.-

Soit K un convexe compact : par analogie avec les mesures normales nous dirons qu'un point x de K est normal si pour toute f de A(K) qui est borne supérieure dans l'espace ordonné A(K) d'une famille filtrante croissante $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ on a :

$$f(x) = \sup_{\alpha\in I} f_\alpha(x)$$

Nous noterons N l'ensemble des points normaux de K. Nous dirons que K possède la propriété $\mathcal{A}$ s'il vérifie les deux conditions suivantes introduites par Alfsen :

$\mathcal{A}1$: Toute famille filtrante croissante et majorée de A(K) admet une borne supérieure dans l'espace ordonné A(K).

$\mathcal{A}2$: N est dense dans K.

Remarque 1 .-

Ces deux conditions sont exactement celles qui interviennent dans l'exemple cité plus haut d'un espace $\mathcal{B}(X)$. En effet si $K = M_1^+(X)$ ensemble des mesures de probalités sur X, il est équivalent de dire que la réunion des supports des mesures normales sur X est dense dans X ou que l'ensemble des mesures de probalité normales, c'est à dire N, est dense dans K.

Nous dirons que K possède la propriété $\mathcal{A}_f$ si K vérifie $\mathcal{A}$ et si de plus N = K. On peut donner une autre forme de la propriété $_f$.

LEMME 2.-

On a l'équivalence :

(K vérifie $\mathcal{A}_f$) $\Longleftrightarrow$ (Toute fonction affine s.c.i sur K est continue).

.../...

CN : Toute fonction affine s.c.i est l'enveloppe supérieure de la famille filtrante croissante des fonctions affines continues qui la minorent strictement.

D'après $\mathcal{A}_f$ cette enveloppe est aussi la borne supérieure dans A(K) de la famille en question, donc elle est continue.

CS : Soit $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ une famille filtrante croissante majorée de A(K). L'enveloppe supérieure ponctuelle f est une fonction affine s.c.i donc continue par hypothèse. Or f est évidemment la borne supérieure des $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ dans A(K), et la définition d'un point normal montre que $N = K$.

<u>PROPOSITION 3</u> .- (Alfsen)

<u>Lorsque A(K) est un dual, K vérifie $\mathcal{A}$.</u>

Soit V un prédual de A(K). Pour démontrer $\mathcal{A}_1$. Considérons une famille $\mathcal{F}$ filtrante croissante majorée de A(K); lorsque f parcourt $\mathcal{F}$ et g parcourt l'ensemble des majorants de $\mathcal{F}$ Les intervalles d'ordre $[f,g]$ forment, pour la topologie $\sigma(A(K),V)$, une famille de compacts de A(K) dont aucune intersection finie n'est vide; l'intersection totale est non vide et nécessairement réduite à un point F, borne supérieure de $\mathcal{F}$ dans A(K).

Pour $\mathcal{A}_2$ il suffit de démontrer les deux inclusions

$$(V^+\cap K) \subset N \subset \overline{V^+\cap K} = K.$$

Comme A(K) est dual ordonné, la relation $f(x) \geqslant 0$ pour tout x de $V^+\cap K$ implique que f est positive ou nulle. On déduit de là, la densité de $V^+\cap K$, sinon il existerait une fonction f de A(K) telle que :

$$\inf_{x\in K} f(x) < 0 \leqslant \inf_{x\in V^+\cap K} f(x) ,$$

et ceci contradirait l'assertion précédente.

D'autre part, si G est un point adhérent de $\mathcal{F}$ dans A(K) on a :

.../...

(✱) $G(x) = \lim f(x)$ pour tout x de $V^+ \cap K$. Donc $G(x) > f(x)$ pour tout x de $V^+ \cap K$ et toute fonction f de $\mathcal{F}$
Comme $V^+ \cap K$ est dense, G majore chaque fonction de $\mathcal{F}$ donc G majore F.

Mais F étant un majorant de $\mathcal{F}$ on a :

$$F(x) \geqslant \sup_{f \in \mathcal{F}} f(x) \quad \text{pour tout } x \text{ de } K.$$

Soit $F(x) \geqslant G(x)$ pour tout x de $V^+ \cap K$ donc $F \geqslant G$

On en déduit l'égalité $F = G$ et (✱) montre que $V^+ \cap K$ est contenu dans N.

Alfsen a conjecturé que la condition $\mathcal{A}$ était aussi siffisante pour que $A(K)$ soit un dual. En fait cette hypothèse est fausse. On peut énoncer en effet, le théorème suivant :

<u>THEOREME 4.-</u> <u>Tout convexe compact qui possède un point interne relativement à la variété qu'il engendre, vérifie $\mathcal{A}_f$</u>

Pour le montrer nous utiliserons un lemme intéressant en lui-même

<u>LEMME 5.-</u>

Soit K un convexe compact, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1°)- 0 est un point interne de K.

2°)- Il existe $\lambda \geqslant 1$, et un convexe compact symétrique X tel que $X \subset K \subset \lambda X$

$2 \Rightarrow 1$ Pour tout point de x de K on peut en effet trouver un segment fermé I_x contenu dans K et contenant x tel que 0 soit intérieur à I_x, donc 0 est un point interne.

$1 \Rightarrow 2$ Pour tout x de K on peut trouver un segment symétrique I_x dont le support passe par x contenu dans K tel que 0 soit dans $\mathring{I}_x$. Soit S la réunion des I_x ; c'est un ensemble équilibré et absorbant dans K donc aussi dans l'espace engendré (lin K). L'enveloppe convexe fermée X de S est un tonneau et par suite absorbe toutes les parties convexes équilibrées et complétes (voir [3]) X absorbe donc l'enveloppe équilibrée de K et on peut trouver $\lambda \geqslant 1$ tel que λX contienne K.

Avec les notations du lemme on a : $X \subset K \subset \lambda X$.

Pour tout x de K on peut écrire :

$$0 = \frac{\lambda}{1+\lambda}\left(\frac{-x}{\lambda}\right) + \frac{1}{1+\lambda}\, x$$

donc $f(0)\,(1+\lambda) = f(x) + \lambda f\left(\frac{-x}{\lambda}\right) \geqslant f(x)$ pour toute f de $A^{+}(K)$. Si on considère une famille filtrante croissante et majorée $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$, on a alors

$$0 \leqslant f_\beta(x) - f_\alpha(x) \leqslant (1+\lambda)\,[\,f_\beta(0) - f_\alpha(0)\,] \text{ pour tout } \beta \geqslant \alpha$$

donc $\| f_\beta - f_\alpha \| \leqslant (1+\lambda)\,[\,f_\beta(0) - f_\alpha(0)]$

La famille converge donc <u>en norme</u> vers un élément de $A(K)$ qui en est nécessairement la borne supérieure. Il en résulte facilement que $\mathcal{A}_f$ est vérifié.

<u>COROLLAIRE 6.-</u>

<u>Tout convexe compact symétrique vérifie $\mathcal{A}_f$</u>.

<u>Remarque</u> 7 .-

Soit E un espace de Banach, E' dual et K la boule unité de E' munie de la topologie $\sigma(E',E)$

Nous allons expliciter l'espace $A(k)$. Une forme linéaire sur E' étant continue si et seulement si sa restriction à K l'est, $A(K)$ s'identifie à $E \oplus \mathbb{R}$. On vérifie facilement que pour tout (f,λ) de $E \oplus \mathbb{R}$:

$$\|(f,\lambda)\|_K = \sup_{x \in K} |f(x) + \lambda| = \|f\|_E + |\lambda|$$

et que (f,λ) est positive sur K si et seulement si $\lambda \geqslant \|f\|$

<u>COROLLAIRE 8.-</u>

<u>Il existe des convexes compacts vérifiant $\mathcal{A}_f$ et tels que $A(K)$ ne soit pas un dual</u>.

Soit E un espace de Banach qui n'est dual d'aucun autre espace normé, par exemple $C_0(\mathbb{N})$.

En gardant les notations de la remarque 7, supposons que $E \oplus \mathbb{R}$ soit dual, pour l'ordre et la norme, d'un sous-espace V de $A'(K)$ [voir l'introduction]

D'après la proposition 3, $V \cap K$ est dense dans K donc non vide. Soit $(x_\circ, 1)$ un point de $E' \times \mathbb{R}$ (identifié à $A'(K)$) qui est dans $V \cap K$; alors $(-x_\circ, 1)$ y est aussi et $(0,1)$ est dans $V \cap K$. On en tire facilement la relation $V = V_1 \times \mathbb{R}$ où V_1 est la projection de V sur E'.

Comme V est faiblement dense dans $A'(K)$, V_1 est faiblement dense dans E'. De plus la boule unité de $A(K)$ étant $\sigma(A(K),V)$ compacte on montre aisément que la boule unité de E est $\sigma(E,V_1)$ compacte. E serait par conséquent dual de V_1 pour la norme ce qui est impossible.

Nous allons voir que la réciproque de la proposition 3 est vraie dans le cas des simplexes.

PROPOSITION 9.-

Pour tout simplexe K les propriétés suivantes sont équivalentes

1°)- K vérifie $\mathcal{U}$

2°)- $A(K)$ est un dual

De plus si ces conditions sont vérifiées K est un simplexe de BAUER et le prédual de $A(K)$ est l'espace noté $(\text{lin } N)$, engendré par N dans $A'(K)$.

Démonstration : $(2 \Rightarrow 1)$ résulte de la proposition 3.

$(1 \Rightarrow 2)$ Montrons que K est un simplexe de Bauer :

Soient f_1 et f_2 deux éléments de $A(K)$ et $f = \sup(f_1, f_2)$. $\hat{f}$ est affine s.c.s donc enveloppe inférieure de l'ensemble filtrant décroissant $\mathcal{H}$ des fonctions affines continues qui la majorent strictement. Soit F la borne inférieure dans $A(K)$ de $\mathcal{H}$ (qui existe d'après la propriété $\mathcal{U}_1$)

On a : $\hat{f} \geqslant F \geqslant f$

Donc : $F = \hat{f}$

$A(K)$ étant réticulé, K est un simplexe de Bauer et $A(K)$ est isomorphe pour l'ordre et la norme à $\mathcal{C}(\mathcal{E}(K))$. On vérifie aisément que nous sommes dans le cas de Dixmier rappelé dans l'introduction, donc $\mathcal{C}(\mathcal{E}(K))$ est le dual de l'espace des mesures normales sur $\mathcal{E}(K)$. En revenant à $A(K)$ on en déduit la proposition.

.../...

COROLLAIRE 10.-

<u>Un simplexe K vérifie $\mathcal{A}_f$ seulement lorsqu'il est de dimension finie</u>

La condition est évidemment suffisante; réciproquement si $\mathcal{A}_f$ est vraie, chaque mesure δ_x sur $\mathcal{E}(K)$ est une mesure normale sur $\mathcal{E}(K)$ donc x est un point isolé de $\mathcal{E}(K)$.

$\mathcal{E}(K)$ est donc un compact fini et K est de dimension finie.

Nous allons maintenant donner des résultats plus précis concernant la propriété $\mathcal{A}_f$, montrant que sous certaines hypothèses on a une réciproque au théorème 4

DEFINITION 11.-

Soit S un simplexe et K un convexe compact. Nous noterons (a) et (b) les conditions suivantes :

a)- Il existe une application affine continue surjective de S sur K telle que pour tout x de K, $\varphi^{-1}(x)$ soit de dimension finie.

b)- 1) Il existe une sous variété fermée de codimension finie (dans l'espace E qui contient S) telle que $S \cap M = K$.

2) L'ensemble $K^{\perp}$ des f de A(S) qui sont nulles sur K, est de dimension finie

3) K posséde la propriété d'extension dans S : $A(S,K) = A(K)$ (Voir [1]).

<u>Remarque</u> : Suivant Phelps [7] nous dirons que K est un α [resp β] polytope s'il existe un couple (S,K) lié par la relation (a) [resp un couple (S,K) vérifiant (b1)]

Dans le cas (a), φ se prolonge de manière unique en une application linéaire $\tilde{\varphi}$ de A'(S) sur A'(K). Phelps montre en [7] que $\tilde{\varphi}^{-1}(0)$ est de dimension finie.

PROPOSITION 12 :

<u>Soit (S,K) un couple lié par (a) ou par (b) [voir déf. 11]</u>
<u>Si K vérifie $\mathcal{A}_f$ alors S vérifie $\mathcal{A}_f$.</u>

I-<u>Cas (a)</u>: On prolonge φ en $\tilde{\varphi}$ de A'(S) sur A'(K)

D'après la remarque précédente, $\tilde{\varphi}^{-1}(0)$ est de dimension finie. On plonge A(K) dans A(S) par l'application i définie par $i(f) = f \circ \varphi$

<u>LEMME</u> : A(K) est un sous-espace complémentable de A(S).

.../...

Considérons la restriction à A(S) de l'application

$$P : A'(S)^{*} \longrightarrow \frac{A'(S)^{*}}{(\tilde{\varphi}^{-1}(0))^{\perp}} = (\tilde{\varphi}^{-1}(0))^{*}$$

définie par $P(f) = f\,|_{\tilde{\varphi}^{-1}(0)}$ Le noyau de cette restriction est A(K) et par conséquent A(K) est de codimension finie dans A(S). Comme de plus il est fermé tout supplémentaire algébrique est un supplémentaire topologique.

Le lemme étant montré, soit M un supplémentaire de A(K) dans A(S); il existe $\lambda > 0$ tel que toute f de A(S) s'écrive de manière unique

$$f = h\circ\varphi + g \quad h \in A(K), \quad g \in M \quad \text{et}$$

$$\| f \|_S \leqslant \| h \|_K + \| g \|_S \leqslant \lambda \| f \|_S$$

Pour vérifier que S vérifie $\mathcal{Q}_f$, considérons une famille filtrante croissante majorée et montrons que son enveloppe supérieure $f = \sup\limits_{\alpha \in I} f_\alpha$ est continue (voir le lemme 2)

On suppose $0 \leqslant f_\alpha \leqslant 1$ et on écrit $f_\alpha = h_\alpha \circ \varphi + g_\alpha$

Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre plus fin que le filtre des sections de I et soit g la limite (en norme) des g_α suivant $\mathcal{U}$. On peut trouver une suite décroissante A_P de parties de $\mathcal{U}$ telles que $\| g_\alpha - g_\beta \| < \frac{1}{2^P}$ dès que α et β sont dans A_P

On définit un nouvel ensemble I' d'indices

$$I' = (\alpha, P) : P \in N \quad \alpha \in A$$

On vérifie aisément que I' est filtrant croissant pour la relation d'ordre suivante

$$(\alpha, P) \geqslant (\alpha' P') \iff \alpha = \alpha' \text{ et } P = P'$$

$$\text{ou : } P > P' \text{ et } \alpha \geqslant \alpha'$$

Posons alors $\Psi_{\alpha, P} = f_\alpha - g_\alpha + \left(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{P-1}}\right)$

.../...

Un calcul facile montre que $\Psi_{\alpha,P}$ est filtrante croissante majorée dans A(K). Elle converge en norme vers sa borne supérieure Ψ dans A(K), qui est aussi la borne supérieure dans A(S) car c'est la limite simple des $\Psi_{\alpha,P}$. Grâce au choix des indices on montre facilement que l'on a aussi

$$f - g + 1 = \Psi \circ \varphi$$

On déduit de cette égalité la continuité de f.

II-Cas (b): Soit (S,K) un couple lié par la relation (b'). Reprenons les notations et résultats de I :

En considérant l'application ϕ de A(S) sur A(S,K) donnée par $\phi(f) = f_{|K}$, on définit une isométrie entre A(S,K) et $\dfrac{A(S)}{K^{\perp}}$

Si K possède la propriété d'extension dans S, il existe $\rho > 0$ tel que

$$\|g\|_{A(K)} \leqslant \|g\|_{A(S,K)} < \rho \|g\|_{A(K)} \text{ pour toute}$$

g de A(K).

Considérons maintenant une famille $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ de A(S) et son enveloppe supérieure f comme au cas (a).

$(\phi(f_\alpha))_{\alpha\in I}$ est filtrante croissante majorée dans A(K) donc elle converge en norme vers une fonction g de A(K).

1°)- Supposons d'abord que l'on ait $\phi(f_\alpha) \neq g$ pour tout α.

Posons alors $\varepsilon_\alpha = \|g - \phi(f_\alpha)\| = \sup\limits_K (g - \phi(f_\alpha)) > 0$

$(\varepsilon_\alpha)_{\alpha\in I}$ est filtrante décroissante vers 0 et $\varepsilon_\alpha > 0$

Si on note $\overline{g}$ un prolongement de g à S, on a $\phi(\overline{g}) = g$;

donc $\|\phi\overline{g} - \phi f_\alpha\|_{A(S,K)} = \|g - f_\alpha\|_{A(S,K)} \leqslant \rho \|g - f_\alpha\|_{A(K)}$

On peut donc trouver, par définition d'une norme quotient, une h_α de $K^{\perp}$ telle que

$$\|\overline{g} - f_\alpha - h_\alpha\|_{A(S)} \leqslant \rho \|f_\alpha - g\|_{A(K)} + \varepsilon_\alpha = \varepsilon_\alpha(\rho\ 1)$$

Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre plus fin que le filtre des sections de I. La famille $(h_\alpha)_{\alpha\in I}$ est bornée en norme donc elle converge suivant $\mathcal{U}$. On a donc :

.../...

si h est sa limite :

$$\| f_\alpha - \bar{g} - h \|_{A(S)} \leqslant (\rho+1)\, \varepsilon_\alpha + \| h_\alpha - h \|_{A(S)}$$

On tire de là l'égalité : $\lim_{\mathcal{U}} f_\alpha = h + \bar{g} = f$;

donc f est continue.

2°)- Supposons maintenant $\phi(f_\alpha) = g$ pout tout $\alpha \geqslant \alpha_0$

pour tout $\alpha \geqslant \alpha_0$, $\bar{g} - f_\alpha = h_\alpha$ est dans $K^\perp$

Soit h la limite des h_α suivant l'ultrafiltre $\mathcal{U}$

On a $h = \lim_{\mathcal{U}} h_\alpha = \lim_{\mathcal{U}} (\bar{g} - f_\alpha) = \bar{g} - f$

Donc : $f = \bar{g} - h$

Comme $\bar{g}$ et h sont continues, f l'est aussi.

PROPOSITION 13 .-

Soit K un convexe compact tel qu'il existe un couple (S,K) lié par l'une des relations (a) ou (b). Les propriétés suivantes sont alors équivalentes :

1°)- K vérifie $\mathcal{A}_f$;

2°)- K possède un point interne;

3°)- A(K) est un réflexif;

4°)- K est de dimension finie.

(4 ⇒3) est évident, (3 ⇒1) est vrai car si A(K) est réflexif alors K vérifie $\mathcal{A}$ et K = N.

(1⇒4) résulte de la proposition 12

(4⇒2) et (2⇒1) se vérifient facilement avec le théorème 4

Remarque 14.- L'équivalence (3⟺4) se trouve dans [2]

On améliore ainsi les résultats de Phelps [7] qui a montré qu'un α -polytope [resp : un β polytope]de dimension infinie ne peut avoir de centre de symétrie. On peut se demander si un β polytope de dimension infinie qui ne vérifie pas (b) peut posséder un point interne ou vérifier $\mathcal{A}_f$. Nous allons voir que , dans le cas général, un convexe compact peut vérifier $\mathcal{A}_f$ sans posséder de point interne.

PROPOSITION 15 .-

Tout produit de convexes compacts vérifiant $\mathcal{A}_f$, vérifie aussi $\mathcal{A}_f$.

Démonstration : Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille de convexes compacts vérifiant $\mathcal{A}_f$ et soit X leur produit. D'après le lemme 2 il suffit de mon-

.../...

trer que toute fonction affine F s.c.i, sur X, est continue. On peut supposer que X contient 0 et que F atteint son minimum 0 au point 0.

Notons u_i l'injection de X_i dans X

$$u_i(x) = (y_j)_{j\in I} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} y_j = 0 & \text{si } j \neq i \\ y_i = x \end{cases}$$

Posons $F_i = F \circ u_i$. Alors F_i est affine s.c.i sur X_i, donc elle est continue, en vertu du lemme 2. De plus F_i est positive et $F_i(0) = 0$. Montrons que la famille $(\|F_i\|)_{i\in I}$ est sommable :

Soit x_i dans X_i tel que $F_i(x_i) = \|F_i\|$

Pour toute partie finie J de I posons $z_J = \sum_{i\in J} u_i(x_i)$

On a alors $F(z_J) = \sum_{i\in J} F_i(x_i) = \sum_{i\in J} \|F_i\| \leqslant \|F\|$.

Ceci étant vrai pour tout J on a $\sum_{i\in I} \|F_i\| \leqslant \|F\|$.

Notons P_i la projection de X sur X_i et posons

$$H = \sum_{i\in I} F_i \circ P_i$$

La famille $(F_i \circ P_i)_{i\in I}$ est normalement sommable, donc H est continue.

Montrons maintenant que $F = H$: soit $x = (x_i)_{i\in I}$ un point de X. Posons $z_J = \sum_{i\in J} u_i(x_i)$ pour toute partie finie J de I

on a alors $H(z_J) = F(z_J) \leqslant F(x)$

Or $(z_J)_{J\in \mathcal{P}_f I}$ tend vers x suivant le filtre des sections $\mathcal{P}_f(I)$, donc $H(x) \leqslant F(x)$.

D'autre part F étant s.c.i on a $F(x) \leqslant \lim_J F(z_J) = H(x)$

Donc F est égale à H.

.../...

COROLLAIRE 16 .-

Il existe une suite (X_n) de convexes compacts ayant chacun un point interne et tels que $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ soit sans point interne

Posons en effet $X_n = \{\mu \in M[01] : \|\mu\| \leq 1 \text{ et } \mu(1) \geq 1 - \frac{1}{n}\}$

X_n est convexe compact et si μ_o est point de $M_1^+ [01]$

On vérifie aisément que $\mu_{on} = (1 - \frac{1}{2n}) \mu_o$ est point interne de X_n

Si X possédait un point interne $\nu_o = (\nu_{on})_{n \in N}$, cela signifierait que pour toute famille $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec μ_n dans X_n, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $(1+\varepsilon)\nu_{on} - \varepsilon \mu_n$ soit dans X_n pour tout n.

En prenant pour μ_n une masse de Dirac δ_{x_n} étrangère à ν_{on}, ce qui est possible sur $[01]$, on montre facilement que l'on devrait avoir $\varepsilon \leq \frac{1}{2n}$ pour tout n, ce qui est impossible.

C.Q.F.D.

§ 2 - RECHERCHE DE CONDITIONS NECESSAIRES

Nous allons voir qu'il existe une condition nécessaire plus forte que la condition $\mathcal{A}$

THEOREME 17 .-

Soit K un convexe compact et supposons que $A(K)$ soit un dual : alors pour toute famille $(I_\alpha)_{\alpha \in I}$ d'intervalles de $A(K)$ telle que toute sous-famille finie ait une intersection non vide , l'intersection totale est non vide.

Posons en effet $M_J = \bigcap_{\alpha \in J} I_\alpha$;pour toute partie finie J de I. Si $A(K)$ est dual d'un espace V, les M_J ont un point adhérent f dans $A(K)$ (pour $\sigma(A(K),V)$ Comme $A(K)$ est dual de V pour l'ordre, f est dans chacun des I_α.

Remarque : Cette propriété est équivalente à l'énoncé analogue pour des boules B_α de $A(K)$: en effet toute boule est un intervalle,

.../...

mais tout intervalle est intersection de deux boules. Il suffit pour le voir de remarquer que :

$$[f_1,f_2] = B(f_2-r\,;r) \cap B(f_1+r,r) \quad \text{où} \quad r = \|f_2 - f_1\|$$

<u>Remarque</u> : Si K vérifie la condition $\mathcal{A}'$ du théorème 17, K vérifie $\mathcal{A}_1$

Soit en effet $\mathcal{F}$ une famille filtrante croissante majorée de A(K) et soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des majorants de $\mathcal{F}$.

Le théorème 17 appliqué aux intervalles $[f,g]$, lorsque f parcour $\mathcal{F}$ et g parcourt $\mathcal{M}$, montre l'existence d'une borne supérieure.

Par contre, K peut vérifier $\mathcal{A}_1$ sans vérifier $\mathcal{A}'$:

<u>Contre exemple</u> :- Soit K la boule unité de $l_1(\mathbb{N})$ muni de la topologie $\sigma(l_1(\mathbb{N}),C_0(\mathbb{N}))$ alors A(K) s'identifie à $C_0(\mathbb{N}) \times \mathbb{R}$ (Voir remarque 7)

Posons alors $e_n(m) = \delta_{mn}$.

Chaque e_n est dans $C_0(\mathbb{N})$. Considérons maintenant les éléments f_n et g_n de A(K) ainsi définis:

$$g_n = (e_n, -1)$$

$$f_n = (2e_n, 1)$$

On vérifie aisément qu'aucune intersection finie des intervalles $I_n = [f_n, g_n]$ n'est vide. Cependant l'intersection totale est vide, car tout point (h,λ) de cette intersection vérifie pour tout n :

$$1 - \lambda \geqslant \|2e_n - h\| \geqslant 2 - |h(n)|$$

et $\lambda - (-1) \geqslant \|h - e_n\| \geqslant +1 - |h(n)|$

donc $-|h(n)| \leqslant \lambda \leqslant -1 + |h(n)|$

Or h étant dans $C_0(\mathbb{N})$ on ne peut avoir $|h(n)| \geqslant \frac{1}{2}$

K ne vérifie pas la propriété $\mathcal{A}'$ du théorème 17, par contre il vérifie $\mathcal{A}_f$ puisqu'il est symétrique.

Plus généralement considérons les énoncés suivants :

1°)- A(K) est un dual

2°)- Il existe une projection de norme 1 de A"(K) sur A(K)

3°)- A(K) vérifie $\mathcal{A}'$

.../...

On sait, d'après Dixmier [5] que (1) ⇒ (2) et d'après Lindenstrauss [6] que (2) ⇒ (3)

On ignore si (3) ⇒ (2)

Montrons que (2) $\not\Rightarrow$ (1) : soit K la boule unité de $L^\infty[0\,1]$ munie de $\sigma(L^\infty, L^1)$. Alors A(K) s'identifie à $L^1[0\,1] \times \mathbb{R}$ muni de l'ordre et la norme définis à la remarque 7. On sait qu'il existe une projection de $L^{1\,''}$ sur L^1, de norme 1, donc K vérifie (2). Par contre la boule unité de L^1 n'ayant aucun point extrémal, on vérifie aisément que la boule unité de A(K) ne possède que deux points extrémaux, (0,1) et (0,-1), A(K) ne peut donc pas être un dual. Cet exemple montre que la propriété $\mathcal{A}'$, même jointe à N = K n'est pas suffisante pour que A(K) soit un dual.

§ 3 - RECHERCHE DE CONDITIONS SUFFISANTES

Nous avons vu que dans le cas des simplexes le prédual de A(K) est unique. De plus la démonstration de la proposition 3 montre qu'un prédual de A(K) est toujours contenu dans lin N. Montrons par un exemple que ce prédual n'est pas toujours unique. Plus précisement :

EXEMPLE 18 .-

Il existe un convexe compact K tel que A(K) soit dual, pour l'ordre et la norme, de deux espaces E_1 et E_2 tels qu'il n'existe entre E_1 et E_2 aucune isométrie qui soit un isomorphisme d'ordre.

On prend pour K la boule unité de $l^\infty(\mathbb{N})$ munie de $\sigma(l^\infty, l^1)$. A(K) s'identifie à $l^1(\mathbb{N}) \times \mathbb{R}$ muni de l'ordre et la norme définis à la remarque 7. Or $l^1(\mathbb{N})$ est le dual de nombreux espaces, à savoir tous les $\mathcal{C}(X)$ où X est un compact dénombrable.

Soient X_1 et X_2 deux compacts dénombrables, non homéomorphes, $\mathcal{C}(X_1)$ et $\mathcal{C}(X_2)$ ne sont pas isométriques.

On munit $E_i = \mathcal{C}(X_i) \times \mathbb{R}$ de la norme et de l'ordre définis comme suit $\|f,t\| = \sup(\|f\|, |t|)$

$$(f,t) \geqslant 0 \iff t \geqslant \|f\|$$

.../...

On vérifie aisément que $l_1(\mathbb{N}) \times \mathbb{R}$ est dual de E_1 et E_2. Ces deux préduaux ne sont pas isométriques, car en désignant par Φ une isométrie de E_1 sur E_2, on aurait :

$\|\Phi(f,t)\| = \|(f,t)\| = t$ pour tout $t \geq f$, c'est à dire que $\Phi(f,t)$ serait positif.

$$\Phi(f,t) = \Phi(f,0) + t\Phi(0,1) = (h,\mu) + t(h_\circ,\mu_\circ)$$

On en tirerait que : $\mu + t\mu_\circ = t$ pour tout $t \geq \|f\|$;
on aurait donc : $\mu_\circ = 1$ et $\mu = 0$

On pourrait alors en déduire aisément que $\Phi|_{\mathcal{C}(X_1)}$ serait une isométrie de $\mathcal{C}(X_1)$ sur $\mathcal{C}(X_2)$, ce qui est impossible.

Nous allons maintenant donner deux critères :

<u>Notation :</u> Pour tout sous-convexe X de K on définit une relation de préordre sur $A''(K)$ en posant :

$$f \gg g \iff f(x) \geq g(x) \text{ pour tout } x \text{ de } X.$$

On notera $(u,v)_X$ l'ensemble des f de $A''(K)$ vérifiant $u \ll f \ll v$
Pour toute f de $A''(K)$ posons :

$$\hat{\hat{f}}(x) = \inf \{ u(x) \ : \ u \in A(K) \quad u \gg f \}$$

$$\check{\check{f}}(x) = \sup \{ v(x) \ : \ v \in A(K) \quad v \ll f \}$$

Remarquons que si X est dense dans K, la restriction de cette relation, à $A(K)$ n'est autre que la relation d'ordre usuelle

<u>THEOREME 19</u> .-

<u>Pour que $A(K)$ soit un dual il faut et il suffit qu'il existe dans K un convexe X dense dans K tel que</u> :

1°)- <u>Pour toute famille $\left((u_\alpha,v_\alpha)_X\right)$ d'intervalles de $A''(K)$ telle u_α et v_α soient dans $A(K)$ et telle qu'aucune intersection finie dans $A''(K)$ ne soit vide, alors l'intersection totale dans $A(K)$ est non vide</u>

2°)- <u>Pour toute f de $A''(K)$ et tout x de X, $\hat{\hat{f}}(x) = \check{\check{f}}(x)$</u>

<u>CN</u> : On considère K et le prédual V de $A(K)$ comme plongés dans $A'(K)$. La démonstration de la proposition 3 montre que $X = V \cap K$ est dense dans K.

.../...

D'autre part, d'après [5] , si A(K) est dual de V, il est facteur direct dans A"(K) : plus précisement il existe une projection P de norme 1 de A" sur A dont le noyau est l'espace V^o ortnogonal de V.

Pour démontrer (1) considérons une telle famille $\left((u_\alpha, v_\alpha)_X \right)_{\alpha \in I}$.

Pour toute famille finie J de I on choisit h_J dans

$$A''(K) \bigcap_{\alpha \in J} (u_\alpha, v_\alpha)_X$$

On a alors $u_\alpha \leqslant Ph_J \leqslant v_\alpha$ pour tout α de J

On applique alors le théorème 17 pour obtenir la conclusion de (1)

Pour montrer (2), on vérifie que pour toute f de A"(K) on a l'égalité : $\{u : u \in A(K) \quad u >> f\} = \{u : u \in A(K), u \geqslant Pf\}$ et par suite $\hat{\hat{f}} = Pf$

CS : Soit W = linX, espace engendré dans A'(K), et V l'adhérence en norme de W. Alors V est faiblement dense, car X est dense; donc la topologie $\sigma(A,V)$ est séparée. Montrons que la boule unité B_1 de A(K) est compacte pour $\sigma(A,V)$: soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur B_1 et f sa limite dans A"(K) [pour $\sigma(A'',A')$]

Appliquons la propriété 1 à la famille de tous les intervalles $(u,v)_X$ où u et v sont dans A(K) et vérifient $v >> f >> u$:

Il existe h, élément de A(K), contenu dans chacun de ces intervalles. La condition (2) implique aisément que (h-f) est dans V^o et que h est unique, c'est donc la limite de $\mathcal{U}$ pour $\sigma(A,V)$.

En utilisant la densité de X on voit aisément que A(K) est dual pour l'ordre et la norme.

On va maintenant remplacer (1,2) par un (2) renforcé.

THEOREME 20 .-

Pour que A(K) soit un dual il faut et il suffit qu'il existe un convexe X dense dans K tel que pour toute f de A"(K) et tout x de K on ait $\hat{\hat{f}}(x) = \check{\check{f}}(x)$

CN : Même démonstration que pour le théorème 19.

CS : On garde les notations du théorème 19 : on sait que f limite de $\mathcal{U}$ dans A"(K), vérifie $\hat{\hat{f}} = \check{\check{f}}$.

.../...

Cette fonction est à la fois concave scs et convexe sci, donc elle est affine continue. De plus $\hat{\hat{f}}(x) \geqslant f(x) \geqslant \check{\check{f}}(x)$ pour tout x de X donc $(f - \hat{f})$ est dans V^o. On termine comme au théorème 19.

§ 4 - ETUDE DES ESPACES A(K) QUI SONT REFLEXIFS

THEOREME 21 .-

Soit A(K) le dual de V, sous espace de A'(K); soit F un convexe compact contenu dans $(V \cap K)$ et tel que (lin F) soit fermé en norme dans A'(K). Alors A(F) est réflexif.

L'espace (lin F) engendré par F, peut être muni de deux normes : celle induite par A'(K) et notée $\| \ \|$, et celle définie par les boules unité conv $(F \cup -F)$, notée $\| \ \|_F$. De même A(F,K) sera muni de la norme quotient $\| \ \|_q$, de l'espace $\dfrac{A(K)}{(\text{lin } F)^o}$

Rappelons que Alfsen [1] a montré l'équivalence suivante :

1°)- (lin F) est fermé en norme dans A'(K)

2°)- (lin F) est fermé faiblement dans A'(K)

3°)- A(F,K) = A(F)

4°)- A(F,K) = A(F) et $\rho_F = \sup\limits_{f \in A(F)} \dfrac{\|f\|_q}{\|f\|_\infty} < +\infty$

De plus le dual de A(F) s'identifie à lin F, muni de la norne $\| \ \|_F$. Or lorsque l'on munit lin F de la norme $\| \ \|$, qui est celle induite par V, son dual est isométrique à

$$\frac{V'}{(\text{lin } F)^o} \text{ , soit } A(F,K)$$

Comme par hypothèse A(F,K) = A(F) et que de plus les deux normes sur A(F) (la norme uniforme et la norme quotient de A(F,K)) sont équivalentes, on en déduit les égalités suivantes :

$$[A(F), \| \ \|_F]'' = [\text{lin } F, \| \ \|_F]' = [\text{lin } F, \| \ \|]' = A(F,K) = A(F)$$

Ceci montre que les ensembles A(F) et A(F)" sont identiques; A(F) est donc réflexif.

.../...

COROLLAIRE 22 .-

Pour tout convexe compact K, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1°)- A(K) est réflexif

2°)- Il existe un espace de Banach reflexif B et un point extremal x_o de la boule unité de B tel que K soit affinement homéomorphe à $H = \{ \varphi \in B' : \|\varphi\| = \varphi(x_o) = 1 \}$, où(lin H) est fermé dans A'(K).

3°)- Il existe un espace de Banach reflexif B et un sous-convexe compact H de la boule unité B'_1 de B' qui posssède la propriété d'extension dans B'_1 et tel que K soit affinement homéomorphe à H.

(1⇒2) Il suffit de prendre la constante 1 pour B et A(K) lui-même pour x_o

(2⇒3) est trivial d'après les résultats de Alfsen rappelés ci-dessus.

(3⇒1) Soit B'_1 la boule unité de B'. L'espace $A(B'_1)$ s'identifie à B x ℝ, comme dans la remarque 7; Cet espace est reflexif et d'après le théorème précédent, A(K) est reflexif.

L'équivalence entre (1) et (2) est due à Behrendts [2]

Appendice : On peut étudier les espaces $A_o(K)$, où K est un chapeau et O est un point extrémal de $A_o(K)$.

En fait ce cas se ramène aux espaces A(X) où X est convexe compact.

PROPOSITION :Si $A_o(K)$ est un dual, toute famille filtrante croissante (f_α) telle que $\|f_\alpha\| \leqslant 1$ admet une borne supérieure dans $A_o(K)$.

En effet si $\mathcal{F}$ est le filtre engendré par les M_α, où

$$M_\alpha = \{ f \in A_o(K) \ : \ f_\alpha \leqslant f \leqslant 1 \}$$

Soit F un point adhérent au filtre

$F \geqslant f_\alpha$ pour tout α car F est adhérent à M_α

Donc F est un majorant

.../...

Soit G un autre majorant. $G \geqslant f_\alpha$

donc $G(x) \geqslant f_\alpha(x)$ pour tout x de $A_o(K)'^+$

or $F(x) = \sup\limits_{\alpha} f_\alpha(x)$ pour tout x de V^+

donc $G(x) \geqslant F(x)$ pour tout x de V^+

$(G-F)$ est dans $(V^+)^o$ et le polaire de V^+ est $A_o(K)^+$ car $A_o(K)$ est dual pour l'ordre. Donc F est borne supérieure

CONSEQUENCE :

D'après le théorème d'Azimow [8] la boule unité ouverte de $A_o(K)$ est filtrante croissante donc si $A_o(K)$ est dual la boule unité fermée admet un plus grand élément e qui est la borne supérieure de la boule unité ouverte.

LEMME .-

Si la boule unité de $A_o(K)$ admet un plus grand élément e alors e coincide avec la jauge de K.

Démonstration :

Soit P cette jauge, montrons que $P(x) = 1 \iff e(x) = 1$

Si $e(x) = 1$ et $\lambda > 1$ le point λx n'est pas dans K car on aurait $e(\lambda x) \leqslant 1$: donc $P(x) \geqslant 1$, mais comme x était dans K, $P(x)=1$. Réciproquement soit x un point de K tel que $P(x) = 1$

Pour tout $\mu > 1$, μx n'est pas dans K donc on peut trouver g dans $A(K)$ telle que $\begin{cases} \mu g(x) > 1 \\ g(y) < 1 \text{ sur } K \end{cases}$

En considérant $\dfrac{g - g(o)}{\sup\limits_K (g-g(o)) + \varepsilon}$ on peut trouver f dans $A_o(K)$ telle que $\mu f(x) > 1$

et $f \leqslant 1$ sur K

Soit $m = \min\limits_{y \in K} f(y)$

1er CAS : si $m \geqslant -1$ on a $-1 \leqslant f \leqslant 1$ donc $-e \leqslant f \leqslant e$

on en tire $\frac{1}{\mu} < f(x) \leqslant e(x)$

2éme CAS : si $m < -1$ on a $\| f \| = m$. En considérant la fonction

$f - \frac{1+m}{2} e$ qui est de norme inférieure à $\frac{1-m}{2}$

on montre que $m\, e \leqslant f \leqslant e$ donc $\frac{1}{\mu} < f(x) \leqslant e(x)$

Ceci étant vrai pour tout $\mu > 1$ on a $e(x) = 1$

.../...

Ce lemme montre que $L(K)$, ensemble des points de jauge 1 est convexe compact et $A_o(K)$ est isomorphe pour l'ordre et isométrique à $A(L(K))$. On est donc ramené au problème précédent.

Remarque : En copiant la démonstration de la proposition 12 pour un couple (S,K) qui vérifie (b) on montre l'analogue de cette proposition.

On a donc le résultat analogue à la proposition 13 pour les couples convexes compacts K vérifiant (b) et où l'on remplace $A(K)$ par $A_o(K)$.

.../...

[1] F.ALFSEN — Compact convex sets and boundary integrals
Springer Verlag - Berlin Heidelberg (1971)

[2] F.BEHRENDTS — Reflexivität von Räumen steliger affiner
Fonctionen (à paraître)

[3] N.BOURBAKI — Espaces vectoriels topologiques. Chap.III
Actualités Scient. et Indust. Paris, Hermann

[4] J. DIXMIER — Sur certains espaces considérés par M.H.Stone

[5] " " — Sur un théorème de Banach
Dube math J. 15.(1948) p.1057-1071

[6] J.LINDENSTRAUSS — Extension of compact opérators.
Mém. of Am.math.Soc. 48 (1964)

[7] R.PHELPS — Infinite dimensional compact convex polytopes
Math Scand. 24. 1969 - P.5-26

[8] L.AZIMOW — Well capped convex cones
Pacific Journal of Math (26) 421-431 (1968)