THEORIE ELEMENTAIRE

DES

DISTRIBUTIONS DE BEURLING

C. S. HERZ

Faculté des Sciences - Centre d'Orsay

PUBLICATIONS DU SEMINAIRE
DE MATHEMATIQUES D'ORSAY

2ème année : 1962/63

Secrétariat Mathématique d'Orsay

1964

THEORIE ELEMENTAIRE

DES

DISTRIBUTIONS DE BEURLING

C. S. HERZ

THEORIE ELEMENTAIRE DES DISTRIBUTIONS DE BEURLING

par

Carl S. HERZ

PREFACE.- Une bourse de la fondation Alfred P. Sloan m'a permis de passer six mois, 1962-63, à Paris. J'assistais au séminaire de la Faculté des Sciences à Orsay où j'ai eu le plaisir d'exposer le contenu de mon article : Generalized Positive-Definite Functions. Celui-ci était polycopié comme rapport de travaux sous le National Science Foundation Contract G 6136 (1962). J'avais eu l'intention de le publier lorsqu'on m'a demandé de faire une rédaction de mes conférences à Orsay. Des conversations avec des étudiants m'ont convaincu que mon exposition n'était pas assez claire et que, au lieu d'un résumé français de mon article, il fallait faire un ouvrage plus précis et mieux adapté à la pédagogie. Donc, j'ai décidé d'intégrer mes idées dans la théorie de distributions, ce qui ne me semblait pas souhaitable auparavant. Alors, cette tentative d'amélioration de la forme a amené à une importante amélioration du contenu. L'article actuel contient presque tous les résultats qu'il y avait dans le précédent (donc, celui-ci ne sera pas publié) mais en versions beaucoup plus générales et plus fortes. D'ailleurs, j'ai ajouté plusieurs résultats nouveaux.

J'ai essayé, dans l'exposé qui suit, de garder le caractère élémentaire de mes conférences. Ainsi je donne les démonstrations détaillées, et j'évite les considérations étrangères à la ligne du texte. Je reprendrai les connexions avec la théorie du potentiel et les processus stochastiques ailleurs. Ici, elles resteront cachées pour la plupart.

0. INTRODUCTION.- Depuis longtemps on a cherché des critères élémentaires qui pourraient nous aider à démontrer qu'une fonction concrète donnée est définie-positive, ou plus généralement qu'une distribution ainsi donnée est de type positif. Dans ce domaine il y a un résultat classique, voir [8 ; Th. 124].

THEOREME.- Soit k une fonction réelle, paire et continue d'une variable réelle. Si k satisfait aux hypothèses

1º) k est, en dehors de l'origine, une fonction convexe,

2º) $k(x)$ décroit dans $x > 0$,

3º) $\lim\limits_{|x| \to \infty} k(x) = 0$,

alors k est une fonction définie-positive ; plus précisément, pour chaque ξ réelle,

$$\hat{k}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \xi x \, k(x) dx \geqslant 0 \quad \text{et} \quad k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \xi x \, \hat{k}(\xi) d\xi / 2\pi .$$

Si l'on essaie de généraliser ce théorème à plusieurs variables, on trouvera que l'analogie directe est triviale. Il faut en premier lieu renoncer à la continuité de k au moins à l'origine. Autrement, tout marche bien. L'énoncé qui convient est

THEOREME.- Soit k une fonction réelle, paire, continue dans $C\theta$, et localement sommable au voisinage de l'origine. Si k satisfait aux hypothèses

1º) k est une fonction sous-harmonique dans $C\theta$,

2º) la valeur moyenne de k prise sur une sphère de rayon r centrée en θ est une fonction décroissante de r,

3º) $\lim\limits_{|x| \to \infty} k(x) = 0$,

alors k est de type positif, c'est à dire, la distribution $k(x)dx$ est la transformée de Fourier d'une mesure de Radon positive à croissance lente.

(Ce dernier résultat est plus général même en une dimension. Il s'applique, par exemple, aux fonctions $k(x) = |x|^{-p}$, $0 < p < 1$).

Il est commode de formuler le résultat d'une autre manière, un peu plus générale encore.

THEOREME.- *Soit* k *un noyau de Frostman. Si* k *est pair et s'il s'annule à l'infini, alors la distribution* $k(x)dx$ *est de type positif.*

Il faut, bien sûr, expliquer la terminologie *noyau de Frostman*. On rencontrera sa signification précise au numéro 3, ci-dessous. Un noyau de Frostman est une fonction réelle satisfaisant aux hypothèses 1º) et 2º) du théorème plus haut et à une condition supplémentaire notée (F) dans la suite. L'idée génératrice est la suivante. Au sens des distributions on a une équation de la forme $\Delta * k(x)dx = D$, où Δ désigne le laplacien ordinaire, qui est, à peu près (voir théorème 1 ci-dessous) caractéristique pour les noyaux de Frostman k. Ici D désigne une distribution d'un type spécial que nous appelons *laplacien généralisé*. Les distributions de ce type sont bien connues ; elles sont, vues comme opérateurs de convolution, exactement les opérateurs donnant lieu à une bonne théorie du potentiel, les générateurs infinitésimaux des semi-groupes sous-markoviens Les la placiens généralisés méritent donc d'être étudiés pour leur propre compte. Mais on peut aller plus loin. Au lieu de considérer les noyaux de Frostman, on peut passer à l'examen des distributions K satisfaisant à une équation de convolution $A * K = D$ où le laplacien Δ est remplacé par un laplacien généralisé A. L'énoncé précédent reste valable pour ces *distributions de Beurling* (quotients, au sens de la convolution, de deux laplaciens généralisés). Les théorèmes plus haut sont des corollaires du théorème 6 du texte, un résultat concernant les transformées de Fourier de distributions de Beurling paires s'annulant à l'infini. On ne trouvera aucune référence claire dans le littérature pour les distributions de Beurling, mais la nomenclature semble justifiée à cause de quelques remarques, orales et écrites, de A. BEURLING.

Nous considérerons aussi les transformées de Fourier des laplaciens généralisés pour leur intérêt propre. Ce sont les fonctions *définies-négatives*. L'étude de ces fonctions est plus commode dans la pratique que l'étude directe des laplaciens généralisés.
Par exemple, l'idée de la démonstration des théorèmes déjà mentionés est très simple :

il est banal qu'une fonction définie-négative paire est positive ; la transformée de Fourier d'une distribution de Beurling paire, ce qui est le quotient au sens du produit de composition de deux laplaciens généralisés pairs, est donc le quotient de deux fonctions définies-négatives paires ; c'est ainsi quelque chose de positif pourvu qu'on ait ajouté certaines hypothèses pour éviter des difficultés provenant des zéros dans le dénominateur.

Dans notre étude des distributions de type positif il est commode de considérer la classe plus générale constituée par les distributions conditionnellement de type positif. On tombe de nouveau sur les fonctions définies-négatives par une autre voie. Une des propriétés caractéristiques des fonctions définies-négatives ψ est que $-\psi(x)dx$ est une distribution conditionnellement de type positif (voir théorème 8). Nous nous intéressons beaucoup à la recherche des fonctions définies-négatives, et nous espérons avoir évité la confusion habituelle entre les deux rôles joués par de telles fonctions

Il y a six paragraphes

§ 1. DISTRIBUTIONS CONDITIONNELLEMENT POSITIVES.- Soit R^n l'espace vectoriel réel à n dimensions. On note $\mathcal{D}$ l'espace vectoriel des fonctions complexes définies sur R^n, indéfiniment dérivables et à support compact ; on suppose $\mathcal{D}$ muni de la topologie de SCHWARTZ [7]. N désignera toujours un entier positif 0, 1, 2, ..., et on note $\mathcal{D}^N$ l'espace des fonctions à support compact dont les dérivées jusqu'à l'ordre N sont continues. Une distribution est un élément de l'espace dual $\mathcal{D}'$, de $\mathcal{D}$. Etant donné $f \in \mathcal{D}$ et $T \in \mathcal{D}'$ nous notons $\int f\, T$ la valeur de la forme bilinéaire définissant la dualité. Une distribution $T \in \mathcal{D}'$ est d'ordre $\leqslant N$ si elle peut s'étendre à une fonctionnelle linéaire continue sur l'espace $\mathcal{D}^N$. Remarquons que toute distribution à support compact est d'ordre fini et que toute distribution s'exprime comme somme dénombrable de distributions dont les supports sont compacts et s'éloignent indéfiniment.

Notons $\mathcal{D}^+$ le cône des fonctions positives de $\mathcal{D}$. On dit que $T \in \mathcal{D}$ est <u>positive</u> si $\int f\, T \geqslant 0$ pour chaque $f \in \mathcal{D}^+$. Une telle distribution possède nécessairement la forme $T = d\mu$ où μ est une mesure de Radon positive. Une distribution <u>conditionnellement positive</u> est un élément $T \in \mathcal{D}'$ tel que $\int f\, T \geqslant 0$ pour chaque $f \in \mathcal{D}^+$ qui s'annule au voisinage de l'origine Θ. Il est évident qu'une distribution conditionnellement positive se représente hors de l'origine par une mesure de Radon positive sur $C\Theta$. Donc une telle distribution est d'ordre fini, et nous donnerons sa forme générale après que nous aurons introduit quelques notations.

On note $\mathcal{E}$ l'algèbre des fonctions indéfiniment dérivables (à support quelconque) définies sur R^n. Θ^N désigne l'idéal de $\mathcal{E}$ constitué par les fonctions qui s'annulent, ainsi que leurs dérivées d'ordre $< N$, à l'origine. Soit $f \in \mathcal{D}$; alors il existe un polynône unique de degré $< N$, soit f_{N-1}, tel que $f - f_{N-1} \in \Theta^N$ (f_{N-1} est ainsi le début du développement de Taylor de f à l'origine). Soit μ une mesure de Radon sur $C\Theta$ à support borné telle que $\int_{|x|<1} |x|^N d\mu < \infty$ où $|x|$ désigne une norme sur G. En ce cas il existe une distribution $\mathcal{P}^N d\mu \in \mathcal{E}'$ définie par

$$\int f \mathcal{P}^N d\mu = \int_{C\Theta} \{f(x) - f_{N-1}(x)\} d\mu(x).$$

En général, si le support de μ n'est pas borné, le symbole $\mathcal{P}^N d\mu$ est dépourvu de sens même s'il s'agit d'un élément de $\mathcal{D}'$. Pour éviter cette difficulté, on fait intervenir une fonction auxiliaire $U \in \mathcal{D}$ telle que $U_{N-1} \equiv 1$. Définissons $\mathcal{P}_u^N d\mu$ par

$$\int f \mathcal{P}_u^N d\mu = \int_{C\Theta} \{f(x) - f_{N-1}(x) u(x)\} d\mu(x).$$

Notons que $\mathcal{P}_u^N d\mu$ dépend de u mais, quelle que soit μ, $\mathcal{P}_u^N d\mu - \mathcal{P}_v^N d\mu$ est un opérateur de dérivation à l'origine de degré $< N$, $(u, v \in \mathcal{D}$, $u_{N-1} = v_{N-1} = 1)$.

Voici la forme générale des distributions conditionnellement positives.

PROPOSITION 1.- Pour qu'une distribution $T \in \mathcal{D}'$ d'ordre $\leqslant N$ soit conditionnellement positive il faut et il suffit qu'elle possède la forme suivante :

$$T = L_u + T_N + \mathcal{P}_u^N d\mu$$

où

1º) μ est une mesure de Radon positive, définie sur $C\Theta$, pour laquelle $\int_{|x|<1} |x|^N d\mu < \infty$; μ ne dépend que de T ;

2º) T_n est un opérateur de dérivation à l'origine qui est homogène de degré N et ne dépend que de T ;

3º) u est un élément quelconque de $\mathcal{D}$ tel que $u_{N-1} \equiv 1$;

4º) L_u est un opérateur de dérivation à l'origine, de degré $< N$ définie par $\int \varphi L_u = \int \varphi u(T - T_N)$, φ désignant un polynôme quelconque de degré $< N$.

Démonstration. Il est évident qu'une distribution de la forme donnée est conditionnellement positive. Donc, il ne reste à démontrer que la nécessité d'une telle décomposition. T, restreinte à $C\Theta$ est une distribution positive. Donc il existe une mesure de Radon positive, et une seule, μ, définie sur $C\Theta$ telle que $\int f\, T = \int_{C\Theta} f\, d\mu$ pour chaque $f \in \mathcal{D}$ dont le support ne contient pas l'origine. Puisque T est d'ordre

$\leqslant N$, cette égalité(1) persiste pour chaque $f \in \mathcal{D}^N \cap \Theta^{N+1}$. Soit $|x|$ une norme sur R^n, $\varphi \in \mathcal{E}$ une fonction identiquement unité dans $|x| \leqslant 1$ telle que $\varphi(\Theta) = 0$, et $g \in \mathcal{D}$ une fonction égale à 1 dans $|x| \leqslant 1$ telle que $\varphi(\Theta) = 0$, et $g \in \mathcal{D}$ une fonction égale à 1 dans $|x| \leqslant 1$. Pour $0 < \alpha < 1$ posons $f_\alpha(x) = |x|^N \varphi(\alpha^{-1}x)g(x)$. Alors, les f_α appartiennent à $\mathcal{D}^N(S) \cap \Theta^{N+1}$ tandis que leurs normes, dans $\mathcal{D}^N(S)$, sont uniformément bornées, S désignant le support de g. Il s'ensuit que $\int_{\alpha < |x| < 1} |x|^N d\mu \leqslant \int f_\alpha \, d\mu = \int f_\alpha T \leqslant M$, une constante indépendante de α. Ceci entraine $\int_{|x| < 1} |x|^N d\mu < \infty$. Soit maintenant v un élément de $\mathcal{D}$ tel que $v_N \equiv 1$. Or, quelle que soit $f \in \mathcal{D}$, on a $f - f_N v \in \mathcal{D} \cap \Theta^{N+1}$, et donc

$$\int (f - f_N v)T = \int_{C\Theta} (f - f_N v) d\mu = \int f \mathcal{P}_v^{N+1} d\mu .$$

D'autre part, si $u \in \mathcal{D}$ et $u_{N-1} \equiv 1$, $\mathcal{P}_u^N \, d\mu$ est bien définie. On a

$$\int f \, T = \int f_N \, v \, T + \int f \left\{ \mathcal{P}_v^{N+1} \, d\mu - \mathcal{P}_u^N d\mu \right\} + \int f \mathcal{P}_u^N \, d\mu$$

ou, autrement exprimé,

$$T = L + T_N + \mathcal{P}_u^N \, d\mu$$

où

$$\int f \, T_N = \int (f_N - f_{N-1}) v \, T + \int (f_N - f_{N-1}) v \, d\mu$$

et

$$\int f \, L = \int f_{N-1} \, v \, T + \int f \left\{ \mathcal{P}_v^N \, d\mu - \mathcal{P}_u^N \, d\mu \right\}.$$

On voit par là que L est un opérateur de dérivation à l'origine, de degré $< N$, et T_N en est un homogène de degré N. Puisque le choix de u n'intervient pas dans l'expression définissant T_N, cette distribution est indépendante de u. Pour calculer L on note d'abord que

$$L = T - T_N - \mathcal{P}_u^N \, d\mu .$$

---

(1) Il faut provisoirement y entendre une limite convenable définissant l'intégrale.

Soit φ un polynôme de degré $< N$; alors

$$\int \varphi u\, L = \int \varphi\, u(T - T_N) - \int_{C\Theta} \{\varphi u - (\varphi u)_{N-1} u\} d\mu .$$

Or, $(\varphi u)_{N-1} = \varphi$ et la dernière intégrale est nulle. D'autre part, $\int \varphi u\, L = \int \varphi\, L$.
On signale le fait que L dépend du choix de u en écrivant L_u au lieu de L.

§ 2. LAPLACIENS GENERALISES.- Un laplacien ordinaire est un opérateur Δ de dérivation à l'origine qui est homogène de degré 2 et pour lequel on a $\int g \Delta > 0$ quel que soit le polynôme homogène quadratique g non nul et positif partout. (Il ne faut pas dire "le laplacien" sans avoir spécifié une structure euclidienne pour R^n). Plus généralement, nous appelons semi-laplacien un opérateur D de dérivation à l'origine qui est homogène de degré 2 et pour lequel on a $\int g\, D \geqslant 0$ quel que soit le polynôme homogène quadratique g partout positif. Dans la théorie du potentiel, la propriété fondamentale des laplaciens et même des semi-laplaciens, est la suivante : si $f \in \mathcal{D}$ est réelle et atteint son maximum au point x_0 alors on a pour le produit de composition, $D * f(x_0) \leqslant 0$. Pour éviter l'intervention de produit de composition il suffit de supposer que $\int f\, D \leqslant 0$ pour chaque $f \in \mathcal{D}$, réelle, qui atteint son maximum en Θ. Nous appelerons Laplacien généralisé un élément réel $D \in \mathcal{D}'$ jouissant de cette propriété. Enregistrons trois propriétés banales des laplaciens généralisés.

LEMME 1.- Soit D un laplacien généralisé. On a N1) pour chaque polynôme homogène quadratique g, tel que $g(x) > 0$ si $x \neq 0$, $g\, D$ est une distribution conditionnellement positive : N2) $\int f\, D \geqslant 0$ pour chaque $f \in \mathcal{D}^+$ s'annulant en Θ ; N3) $\int |g|^2 D \geqslant 0$ pour chaque $g \in \mathcal{D}$ s'annulant en 0. Nous aurons

LEMME 2.- Les trois propriétés N1), N2), N3) d'une distribution D sont équivalentes.

Le lemme 2 rappelle l'énoncé bien connu que les trois propriétés suivantes d'une distribution T soient équivalentes :

P1) il existe une mesure de Radon positive μ tel que $\int f\, T = \int f(x) d\mu(x)$;

P2) $\int f\, T \geqslant 0$ pour chaque $f \in \mathcal{D}^+$;

P3) $\int |g|^2 T \geqslant 0$ pour chaque $g \in \mathcal{D}$.

L'analogie va plus loin. Nous avons aussi

<u>PROPOSITION</u> 2.- <u>Les distributions</u> D <u>ayant la propriété</u> N)(2) <u>sont exactement les distributions conditionnellement positives</u> D <u>d'ordre</u> $\leqslant 2$ <u>telles que</u> D_2 <u>soit semi-laplacien</u>.

<u>Démonstration du lemme</u> 2 <u>et de la proposition</u> 2. Nous prouverons, pour une distribution D, la chaine d'implications : N2) $\Longrightarrow$ N3) $\Longrightarrow$ N1) $\Longrightarrow$ N4) $\Longrightarrow$ N2) où, provisoirement, N4) signifie que D est une distribution conditionnellement positive d'ordre $\leqslant 2$ telle que D_2 soit un semi-laplacien. L'implication N2) $\Longrightarrow$ N3) est banale. Pour démontrer que N3) entraine N1) supposons que ξ soit une fonctionnelle linéaire sur R^n et que h soit un élément quelconque de $\mathcal{D}$. Alors ξh s'annule en θ ; donc $\int |h|^2 \xi^2 D \geqslant 0$, ce qui entraine que $\xi^2 D$ est une distribution positive (il s'agit ici de la propriété P3)). D'autre part, chaque g de type spécifié est une somme de carrés de fonctionnelles linéaires. Dire que D ait la propriété N1) est dire que $gD = c\delta + d\nu$ où c est une constante positive dépendant de g, δ désigne la distribution de Dirac, et ν est une mesure de Radon positive définie sur $C\theta$ telle que $\int_{|x|<1} d\nu < \infty$. Il existe alors un semi-laplacien D_2 et une mesure de Radon positive μ, définie sur $C\theta$ et pour laquelle $\int_{|x|<1} |x|^2 d\mu < \infty$, tels que $\int g\, D_2 = c$ et $g\, d\mu = d\nu$ quel que soit le polynôme homogène quadratique g qui est strictement positif sauf à l'origine. Il s'ensuit que $gD = g(D_2 + \mathcal{P}^2_u d\mu)$, où $u \in \mathcal{D}$ et $u_1 \equiv 1$. Pour conclure N1) $\Longrightarrow$ N4) il ne reste qu'à prouver le fait que si $T \in \mathcal{D}'$ et $gT = 0$ pour chaque g du type spécifié alors T est un opérateur de dérivation à l'origine de degré < 2. Or, on déduit de l'hypothèse que $gT = 0$ pour un seul g le fait que T est un opérateur de dériva-

---

(2) D'après le lemme 2 on n'a plus besoin de distinguer N1, N2 et N3.

tion à l'origine. D'autre part, chaque polynôme homogène quadratique est combinaison linéaire de tels g. Donc $gT = 0$ quel que soit le polynôme quadratique g et il s'ensuit que T est de degré $\leqslant 2$. Ce qui reste à démontrer est l'implication N4) $\Longrightarrow$ N2). Si $f \in \mathcal{D}^+$ et $f(\theta) = 0$ il s'ensuit que $f_1 \equiv 0$ et $\int f\, D_2 \geqslant 0$ pour chaque semi-laplacien D_2. Donc, pour une D ayant la propriété N4) on a $\int f\, D = \int f\, D_2 + \int f\, d\mu$ qui est positive quand f est positive.

Il est maintenant facile de donner la forme générale d'un laplacien généralisé.

PROPOSITION 3.- Pour qu'une distribution $D \in \mathcal{D}'$ soit un laplacien généralisé il faut et il suffit qu'elle possède la forme

$$D = -p\delta + L_u^* + D_2 + \mathcal{P}_u^* d\mu$$

où

1º) μ est une mesure de Radon positive définie sur $C\theta$ pour laquelle $\int_{|x|<1} |x|^2 d\mu + \int_{|x|\geqslant 1} d\mu < \infty$; μ ne dépend que de D ;

2º) D_2 est un semi-laplacien et ne dépend que de D ;

3º) p est une constante positive ne dépendant que de D ;

4º) u est un élément réel quelconque de $\mathcal{D}$ tel que $u_1 \equiv 1$ et $\mathcal{P}_u^* d\mu$ désigne la distribution définie par

$$\int f \mathcal{P}_u^* d\mu = \int_{C\theta} \{f(x) - f(\theta) - g(x)u(x)\} d\mu(x)$$

où $g = f_1 - f(\theta)$;

5º) L_u^* est un opérateur de dérivation à l'origine qui est réel et homogène de degré 1.

NOTE. Si en outre D est paire, alors la forme générale est réduite à $D = -p\delta + D_2 + \mathcal{P}^1 d\mu$ et l'intervention ennuyeuse d'une fonction arbitraire, u, disparait.

La proposition 3, qui n'est autre que le théorème de représentation des générateurs infinitésimaux des semi-groupes sous-markoviens (processus stables) de Paul Lévy 5, [ch.VII § 62].

ne donne pas un critère très commode pour déterminer si une distribution est un laplacien généralisé ou non. A cette fin, nous donnerons une autre version de la caractérisation des laplaciens généralisés. Auparavant nous avons besoin de la notion de suite unitaire, c'est ainsi définie : une suite $\{u\} \in \mathcal{D}^+$ (on supprime l'indice séquentiel) telle que $u(x) \leqslant u(\theta) = 1$ pour chaque u tandis que $\lim_u u(x) = 1$ uniformément sur tout compact. Nous dirons que la suite unitaire $\{u\}$ est d'ordre N si $u_N \equiv 1$ pour chaque u et $u(x) \longrightarrow 1$ sur tout compact dans la topologie de $\mathcal{D}^N$.

PROPOSITION 4.- Pour qu'une distribution réelle $D \in \mathcal{D}'$ soit un laplacien généralisé il faut et il suffit que

1º) D soit conditionnellement positive ;

2º) D soit d'ordre $\leqslant 2$ et D_2 soit un semi-laplacien ;

3º) il existe une suite unitaire $\{u\}$ telle que $\int uD \leqslant \int u\, D_2$ pour chaque u.

Démonstration des propositions 3 et 4. Encore une fois nous employons une chaine d'implications $A \Longrightarrow B \Longrightarrow C \Longrightarrow A$ où A désigne l'hypothèse que D soit un laplacien généralisé, B signifie que D ait la forme donnée par la proposition 3, et C signifie que D satisfasse aux trois conditions de la proposition 4. Il s'agit toujours d'une distribution réelle D. Du lemme 1 et des propositions 1 et 2 on déduit que chaque laplacien généralisé D possède la forme

$$D = \mathrm{L}u + D_2 + \mathcal{P}_u^2\, d\mu$$

où L_u est un opérateur de dérivation à l'origine de degré < 2, D_2 est un semi-laplacien, et μ est une mesure positive sur $C\theta$ telle que $\int_{|x|<1} |x|^2 d\mu < \infty$. Pour déduire $A \Longrightarrow B$ il reste à faire usage de propriétés de laplaciens généralisés qui ne sont pas incluses dans le lemme 1. Donnons-nous un voisinage U de l'origine et une $v \in \mathcal{D}$ dont le support est contenu dans U et telle que $v(x) \leqslant v(\theta) = 1$. Soit $f \in \mathcal{D}$ une fonction réelle quelconque s'annulant dans U. Soit m le maximum de f. Alors $mv + f$ atteint son maximum en θ. Donc $0 \geqslant \int (mv + f)D = m\int v\, D + \int f\, d\mu$. Il s'ensuit que

$\int_{CU} d\mu \leqslant - \int v\ D$. Nous savons maintenant que $\int (1-u)d\mu$ est finie si $u \in \mathcal{D}$ et $u_1 = 1$. Donc la représentation de D donnée ci-dessus peut se transformer en la forme exigée par B sauf que l'on ne sait pas encore que $p \geqslant 0$. Or, prenons pour $\{w\}$ une suite unitaire d'ordre 2. Alors $\int w\ L'_u = 0$, $\int w\ D_2 = 0$, et $\int w \mathcal{P}^*_u\ d\mu \longrightarrow 0$. Donc $\int w\ D \longrightarrow -p$ mais $\int w\ D \leqslant 0$ pour chaque w parce qui les w atteignent leurs maxima en θ. On a démontré $A \Longrightarrow B$. Que $B \Longrightarrow C$ est banal, on le voit en prenant pour $\{u\}$ une suite unitaire d'ordre 2. Prouver $C \Longrightarrow A$ c'est prouver que $\int f\ D \leqslant 0$ si $f \in \mathcal{D}$, $f(x) \leqslant f(\theta)$, et D satisfait les conditions 1º), 2º), 3º) de la proposition 4. Des conditions 1º) et 2º) on déduit $D = L_u + D_2 + \mathcal{P}^2_u\ d\mu$. Puisque f atteint son maximum en θ, $f_1 = f(\theta)$ et on a

$$\int f\ D = -p\ f(\theta) + \int f\ D_2 + \int \left[f - f(\theta)u\right] d\mu$$

où $p = \int u(D_2 - D)$, voir 4º) de la proposition 1. Ces formules sont valables quelle que soit $u \in \mathcal{D}$ telle que $u_1 = 1$. Prenons donc pour $\{u\}$ une suite unitaire dont l'existence est assurée par la condition 3º). On a $-pf(\theta) \leqslant 0$ parce que $p = \int u(D_2 - D) \geqslant 0$ et $\int(\theta) \geqslant 0$, $\int f\ D_2 \leqslant 0$ évidemment, et enfin $\lim_u \int \left[f - f(0)u\right] d\mu \leqslant 0$. Ainsi $\int f\ D \leqslant 0$ et l'implication $C \Longrightarrow A$ est démontrée.

NOTE. On peut affaiblir la condition 3º) de la proposition 4 en la remplaçant par $\overline{\lim_u} \int u(D_2 - D) \geqslant 0$.

§ 3. <u>NOYAUX DE FROSTMAN</u>. Dans ce numéro on suppose l'espace R^n muni d'une structure euclidienne. On note $|x|$ la norme qui y est associée et Δ le laplacien correspondant. Nous nous posons le problème suivant : déterminer les distributions réelles $K \in \mathcal{D}'$ telle que l'on ait

$$\Delta * K = D$$

où D est un laplacien généralisé.

Il faut remarquer dès le début que l'équation $\Delta * K = D$ a une solution quelle que soit la distribution D donnée. On connait bien l'existence d'une solution élémentaire E, satisfaisant $\Delta * E = -\delta$, qui possède la forme

$$E = \rho(|x|)dx,$$
$$\rho(r) = c_n r^{2-n} \ (= c_2 \log(1/r) \text{ si } n = 2)$$

où $c_1 = -1/2$, $c_2 = (2\pi)^{-1}$, $c_n > 0$ si $n > 2$. En principe la connaissance de la solution élémentaire nous permet de résoudre l'équation $\Delta * K = D$ en posant $K = -D * E$. Cependant, on peut aller très loin sans aucune connaissance de la solution élémentaire.

Pour commencer, il nous faut plusieurs notions. Soit U un ouvert de R^n. On dit qu'une fonction k, définie sur U à valeurs dans $[-\infty, +\infty[$, est <u>sous-harmonique</u> si elle est semi-continue supérieurement et localement sommable dans U et si pour chaque $x \in U$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $k(x) \leqslant \omega_r * k(x)$ quel que soit r, $0 < r < \varepsilon$, où ω_r désigne la distribution qui assigne à une fonction sa valeur moyenne sur la sphère de rayon r centrée à l'origine. Nous appelons <u>quasi-décroissante</u> une fonction de Baire k définie dans $C\theta$ telle que $\tilde{k}(r) = \int k\,\omega_r$ est une fonction décroissante de $r \in]0, \infty[$. Introduisons une

<u>DEFINITION</u>.- <u>Un noyau de Frostman est une fonction réelle définie dans</u> $C\theta$ <u>qui est sous-harmonique et quasi-décroissante et qui remplit la condition</u> (F).

Qu'est-ce que c'est la condition (F) ?

Elle est une condition sur les fonctions k définies dans $C\theta$ et sommable sur tout compact de $C\theta$ qui, dans le cas $n = 1$, équivaut à l'hypothèse que k soit localement sommable à l'origine ; mais qui, si $n > 1$, est une hypothèse moins forte. La condition (F) s'exprime en trois parties dont les deux premières sont

F1) $\displaystyle\int_{|x| \leqslant 1} |\tilde{k}(x)|\,dx < \infty$,

F2) au voisinage de l'origine $k = k_1 + k_2$ où k_1 est sommable et $k_2(x) = \theta(|x|^{-n})$.

Or, si k satisfait à F1) et si $\int_{|x|\leqslant 1} |x|\,|k(x)|\,dx < \infty$ (condition beaucoup plus faible que F2)) on peut définir une distribution VP $k(x)dx$ en posant, pour $f \in \mathcal{D}$

$$\mathrm{VP}\int f(x)k(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} f(x)k(x)dx$$

$$= f(\Theta) \int_{|x|\leqslant 1} \tilde{k}(x)dx + \int_{|x|\leqslant 1} [f(x) - f(\Theta)]\,k(x)dx + \int_{|x|>1} f(x)k(x)dx.$$

Remarquons que VP $k(x)dx$ n'est une distribution d'ordre 0 que si k est localement sommable à l'origine, et en cette circonstance le symbole VP est inutile. La troisième partie de la condition (F) est F3) $\Delta *$ VP $k(x)dx$ est une distribution d'ordre $\leqslant 2$.

La condition F3) n'est pas une conséquence des hypothèses précédentes. On voudrait la remplacer par quelque chose de plus effectif mais cela semble très difficile. La condition (F) elle-même est un tout petit peu plus forte que

(F*) Etant donné k localement sommable sur $C\Theta$, la distribution $k(x)dx \in \mathcal{D}'(C\Theta)$ peut s'étendre à un élément de $\mathcal{D}'(R^n)$, dont le laplacien est une distribution d'ordre $\leqslant 2$.

Si $n > 1$, alors il existe des fonctions harmoniques dans $C\Theta$ dont les valeurs moyennes sur les sphères centrées à l'origine sont nulles qui remplissent la condition (F*) mais ne satisfont pas à F2). Les voici. Soit g un polynôme homogène quadratique de trace zéro, c'est à dire $\Delta * g = 0$, et soit c_n' la constante telle que n/c_n' est l'aire de la sphère unité. Alors, la distribution

$$\mathrm{VP}\ c_n'\ g(x)\ |x|^{-n-2}$$

est une transformation de Hilbert (voir [ ]), d'un type qui n'existe pas en une dimension. son laplacien est l'opérateur de dérivation à l'origine $-g(\partial/\partial x)$ comme on voit sans trop de difficulté.

Nous sommes prêts à énoncer un résultat important.

<u>THEOREME 1.- Pour qu'une distribution réelle</u> $K \in \mathcal{D}'$ <u>satisfasse une équation</u> $\Delta * K = D$ <u>où</u> D <u>est un laplacien généralisé, il faut et il suffit qu'elle possède la forme</u>

$$K = \kappa\delta + c'_n \,\mathrm{VP}\, g(x)|x|^{-n-2}\,dx + \mathrm{VP}\, k(x)dx$$

<u>où</u>

1º) κ <u>est une constante positive,</u>

2º) g <u>est un polynôme homogène quadratique de trace zéro tel que</u> $\kappa|x|^2 \geqslant g(x)$ <u>partout,</u>

3º) k <u>est un noyau de Frostman.</u>

<u>Démonstration.</u> Les solutions de l'équation homogène $\Delta * K = 0$ sont toutes de la forme $K = h(x)dx$ où h est une fonction harmonique partout. Une telle h peut s'absorber dans un noyau de Frostman. Tout semi-laplacien apparait comme laplacien de $\kappa\delta + c'_n \,\mathrm{VP}\, g(x)|x|^{-n-2}dx$ avec κ et g convenablement choisis et satisfaisant à 1º) et 2º). De plus, on ne peut pas entremêler une distribution de cette forme avec une de la forme $\mathrm{VP}\, k(x)dx$ où k remplit la condition F2). Donc, pour établir le théorème il reste à prouver (I) : si k est un noyau de Frostman alors $\Delta * \mathrm{VP}\, k(x)dx = D$ où D est un laplacien généralisé avec $D_2 = 0$, et (II) : si $\Delta * K = D$ où D est comme ci-dessus alors $K = \mathrm{VP}\, k(x)dx$ où k est un noyau de Frostman. Or (I) suit immédiatement de la proposition 4. Il faut prouver que $\Delta * \mathrm{VP}\, k(x)dx$ remplit les trois hypothèses 1º), 2º), 3º) de cette proposition. Evidemment la supposition que k soit sous-harmonique dans $\complement\Theta$ entraine 1º) et la supposition qu'il satisfasse à (F*) entraine 2º). De plus, il résulte de la condition F2) que $(\Delta * \mathrm{VP}\, k(x)dx)_2 = 0$. Montrons maintenant l'existence d'une suite unitaire $\{u\}$ telle que $\mathrm{VP}\int [\Delta * u(x)]\, k(x)dx \leqslant 0$. Nous choisissons les u d'une forme spéciale bien adapté à notre but. Supposons que $u(x)$ ne dépend que de $|x|$ et qu'il existe des nombres $0 < a(u) < c(u) < b(u)$ tels que

$$u(x) = 1 \quad \text{dans} \quad |x| \leqslant a, \qquad u(x) = 0 \quad \text{dans} \quad |x| \geqslant b$$

$$\Delta * u(x) \leqslant 0 \quad \text{dans} \quad |x| \leqslant c, \qquad \Delta * u(x) \geqslant 0 \quad \text{dans} \quad |x| \geqslant c.$$

On a alors

$$\mathrm{VP}\int\left[\Delta * u(x)\right]k(x)dx = \int\left[\Delta * u(x)\right]\tilde{k}(|x|)dx =$$

$$= \int_{a \leqslant |x| \leqslant c} (\Delta * u)\tilde{k}\,dx + \int_{c \leqslant |x| \leqslant b} (\Delta * u)\tilde{k}\,dx$$

$$\leqslant \tilde{k}(c)\int_{a \leqslant |x| \leqslant c} \Delta * u\,dx + \tilde{k}(c)\int_{c \leqslant |x| \leqslant b} \Delta * u\,dx = \tilde{k}(c)\int \Delta * u\,dx = 0$$

car $\tilde{k}$ est décroissante. Il est facile de construire des u convenables ; par exemple, dans le cas $n > 2$ on pose

$$u(x) = 1 + (n-2)^{-1}\int_0^{|x|}\left[r^{2-n} - |x|^{2-n}\right]w(r)dr$$

où w est nulle en dehors de $]a\ ,\ b[$, $w(r) \leqslant 0$ si $r \leqslant c$ et $w(r) \geqslant 0$ sinon, $\int_a^b w(r)dr = 0$, et $\int_a^b w(r)r^{2-n}dr = 2 - n$.

On peut essayer de démontrer (II) au moyen de la proposition 4 également, mais on rencontrera quelques difficultés, et, d'ailleurs, nous voudrons des informations plus détaillées. Donc, nous basons la démonstration de (II) sur la proposition 3. D'abord nous examinons le comportement de $\tilde{k}$ et puis celui de $k - \tilde{k}$. Enfin, nous résoudrons l'équation $\Delta * K = D$.

Il y a une simplification importante pour les fonctions $k(x)$ ne dépendant que de $|x|$ En ce cas la condition (F*) équivaut à $\int_{|x|<1} |k(x)|\,dx < \infty$ parce que, pour étudier la distribution $\mathrm{VP}\,k(x)dx$, on peut se borner aux fonctions testsqui sont fonctions de la distance et, alors, chaque fonction continue de $|x|$ est localement le laplacien d'une fonction appartenant à $\mathcal{D}^2$, ce qui n'est pas vrai en général pour les fonctions continues arbitraires si $n > 1$. Donc le théorème 1 est facile à démontrer moyennant la proposition 4 lorsqu'il s'agit des distributions K invariantes par rotation.

<u>THEOREME</u> 2.- <u>Supposons que</u> $k(x)$ <u>ne dépend que de</u> $|x|$. <u>Pour que</u> k <u>soit un noyau de Frostman il faut et il suffit que, en outre,</u> k <u>soit localement sommable,</u> $k(x) = F\left[\rho_n(|x|)\right]$ <u>où</u> F <u>est une fonction convexe croissante définie sur le contredomaine de</u> ρ_n, <u>celle-ci étant la fonction définie sur</u> $]0\ ,\ \infty[$ <u>par</u> $\rho_n(r) = c_n r^{2-n}$, $c_n > 0$ <u>si</u> $n > 2$, $\rho_2(r) = +(1/2\pi)\log(1/r)$, $\rho_1(r) = -(1/2)r$ (3).

(3) C'est FROSTMAN qui a signalé le rôle joué par les fonctions convexes croissantes de ρ En reconnaissance de ses idées nous introduisons l'appelation "noyau de Frostman" (Voir

THEOREME 2 bis.- Les laplaciens généralisés invariants par rotation possèdent tous la forme

$$D = -p\delta + \kappa\Delta + \mathcal{P}^1\, d\mu$$

où p et κ sont des constantes positives et μ est une mesure de Radon positive, définie sur CO, invariante par rotation, telle que

$$m(r) = \mu\{x : |x| > r\} < \infty \text{ pour } r > 0 \text{ et}$$

$$\int_0^1 m(r)r\, dr < \infty .$$

Alors, la solution générale de l'équation $\Delta * K = D$ est

$$K = \kappa\delta + k(x)dx \text{ où}$$

$$k(x) = c_n(n-2) \int_{|x|}^{\infty} [m(r) + p] r^{1-n} dr + h(x),$$

h étant une fonction harmonique quelconque. (Il faut changer l'intégrale en $-1/(2\pi)\int_1^{|x|}$ si $n = 2$ et en $-(1/2)\int_c^{|x|}$ si $n = 1$ où c est une constante positive).

Il est évident que le théorème 2 bis est plus précis que le théorème 2 et qu'il l'entraine, compte tenu du théorème 1. Cependant le théorème 1 a un caractère plus élémentaire ; rien d'autre que la définition de noyau de Frostman n'y intervient.

Démonstration du théorème 2. Pour $k(x) = \tilde{k}(|x|)$ la condition (F) veut dire que k est localement sommable. Que k soit sous-harmonique équivaut à $d\tilde{k}(r)/d\rho(r)$ croissante Or, dire que k est quasi-décroissante est tout logiquement dire que $\tilde{k}(r)$ soit une fonction de r. Puisque ρ est une fonction strictement décroissante de r, pour que k soit quasi-décroissante il faut et il suffit que $\tilde{k}$ s'exprime sous la forme $\tilde{k}(r) = F[\rho(r)]$ où F est croissante. Donc $d\tilde{k}(r)/d\rho(r) = F'[\rho(r)]$ où F' désigne la dérivée de F. Comme nous avons vu, k est sous-harmonique si et seulement si F' croit, c'est à dire que F est convexe.

Démonstration du théorème 2 bis. La forme générale des laplaciens généralisés ne dépendant que de la distance se déduit immédiatement de la proposition 3. Selon le théorème 1 (la partie déjà prouvée), les distributions possédant la forme $K = \kappa\delta + k(x)dx$, où k est un noyau de Frostman, satisfont à une équation $\Delta * K = D$. Donc, pour démontrer le théorème 2 bis, il ne reste essentiellement qu'à trouver une solution particulière de l'équation

$$\Delta * k(x)dx = \mathcal{P}^1 \, d\mu .$$

Or, $\mathcal{P}^1 \, d\mu = \int_0^\infty (\omega_r - \delta)\left[-dm(r)\right]$ et les solutions de l'équation

$$\Delta * kr(x)dx = \omega_r - \delta$$

sont bien connues. A une fonction harmonique près, elles sont définies par

$$k_r(x) = \rho(|x|) - \rho(r) \quad \text{si} \quad |x| < r$$
$$= 0 \quad \text{sinon.}$$

On a $k(x) = \int_0^s k_r(x)\left[-dm(r)\right]$, d'où résultent les formules énoncées après une intégration par parties.

Soit D un laplacien généralisé tel que $D_2 = 0$. Pour achever la démonstration du théorème 1 il faut étudier la solution générale de $\Delta * K = D$. Il convient d'écrire

$$D = -p\delta + L + \mathcal{P}^1 d\mu' + \mathcal{P}^2 \, d\mu''$$

où $p > 0$, L est une dérivation à l'origine, μ' est une mesure positive de masse totale finie dont le support est disjoint de l'origine, et μ'' est une mesure positive portée par un voisinage compact de l'origine, avec $\int |x|^2 d\mu''(x) < \infty$. Cette décomposition suit immédiatement de la proposition 3. La solution générale se présente sous la forme

$$K = p\,\rho(x)dx + (\xi\, x)|x|^{-n}dx + k'(x)dx + \mathrm{VP}\; k''(x)dx + h(x)dx$$

où ξ est une fonctionnelle linéaire, $(\xi x)|x|^{-n} = -L * \rho(x)$, h est une fonction harmonique, k' est le potentiel du dipôle diffus $\mathcal{P}^1 d\mu' = d\mu' - m'\delta$ où m' est la masse totale de μ', et $\mathrm{VP}\; k''(x)dx = -E * \mathcal{P}^2 d\mu''$. Il est évident que toute les fonctions se comportent bien au voisinage de l'origine sauf, peut être k''. Sa forme explicite est

$$k''(x) = \int \left\{\rho(|x|) - \rho(|x-y|) - \rho'(|x|)(x.y)|x|^{-1}\right\} d\mu''(y)$$

où ρ' est la dérivée de ρ et $x.y$ désigne le produit intérieur des vecteurs x et

y. On pose $k'' = k''_1 + k''_2$ où

$$k''_1(x) = \int_{|x| < 2|y|} w(x,y) d\mu''(y), \quad k''_2(x) = \int_{|x| \geqslant 2|y|} w(x,y) d\mu''(y),$$

w désignant la quantité intégrée par $d\mu''$ dans l'expression pour k''. Remarquons deux faits. Si $t > 0$ alors $w(tx, ty) = t^{2-n} w(x,y)$, et si $|x| \geqslant 2|y|$ alors $|w(x,y)| \leqslant a_n |x|^{-n} |y|^2$, a_n étant une constante. Donc

$$\int |k''_1(x)|\, dx \leqslant \iint_{|x| < 2|y|} |w(x,y)|\, dx\, d\mu''(y)$$

$$= \iint_{|z| < 2} |w(z, y/|y|)|\, dz\, |y|^2\, d\mu''(y)$$

$$= b_n \int |y|^2\, d\mu''(y) < \infty$$

où $b_n = \int_{|z| < 2} |w(z, y/|y|)| dz$, une constante finie. D'ailleurs

$$|k''_2(x)| \leqslant a_n |x|^{-n} \int_{|y| \leqslant |x|/2} |y|^2 d\mu''(y) = O(|x|^{-n}),$$

lorsque $x \longrightarrow 0$. (D'autre part, $k''_2(x) = \Theta(|x|^{-n})$ lorsque $x \longrightarrow \infty$).

Or, la solution K possède la forme $K = \mathrm{VP}\, k(x)dx$ où k remplit la condition (F). Il est évident que k est sous-harmonique dans $C\Theta$, et il suit du théorème 2 bis que k est quasi-décroissante. Le théorème 1 est ainsi démontré.

Nous voulons étudier également le comportement d'un noyau de Frostman à l'infini. Comme nous venons de voir, pour x grand, $k''(x) = k''_2(x) = \Theta(|x|^{-n})$. Donc, à l'infini

$$k(x) = p\, \rho(|x|) + \Theta(|x|^{1-n}) + k'(x) + h(x).$$

La fonction k' n'est pas, en général, finie partout. On évite cette difficulté par passage à une moyenne convanable. Soit σ_r la distribution qui assigne à une fonction sa valeur moyenne sur la boule de rayon r centrée à l'origine. On a

<u>LEMME</u> 3. $k' = k'_1 + k'_2$ <u>où</u> $k'_1 \leqslant 0$, $k'_2(x) = \Theta(|x|^{2-n})$, <u>et pour chaque</u> $r > 0$, $\sigma_r * k'_1(x) = \Theta(\rho(|x|)) + \Theta(1)\, \rho(r)$ <u>lorsque</u> $x \longrightarrow \infty$. <u>D'ailleurs</u>, <u>dans le cas</u> $n = 1$, $k' \leqslant 0$ <u>et</u> $k'(x) = \Theta(|x|)$.

Démonstration. (On écrira k au lieu de k'). Supposons d'abord $n > 2$. Alors on peut poser $k(x)dx = - E * (d\mu - m\delta)$ d'où on trouve la formule

$$k(x) = \int \{\rho(|x|) - \rho(|x-y|)\} d\mu(y).$$

Comme dans la démonstration du théorème 2 bis on en déduit

$$\tilde{k}(|x|) = \int_{|x|<|y|} \{\rho(|x|) - \rho(|y|)\} d\mu(y).$$

Donc on a

$$k(x) - \tilde{k}(|x|) = \int \{\inf [\rho(|x|), \rho(|y|)] - \rho(|x-y|)\} d\mu(y).$$

Cette dernière formule est valable quel que soit n. On partage l'intégrale en deux parties, $g_1(x)$ étendue sur la région où $|x-y| < |x|/2$ et $g_2(x)$, l'intégrale sur le complément. Si $|x-y| \geqslant |x|/2$, alors $\left|\inf [\rho(|x|), \rho(|y|)] - \rho(|x-y|)\right| \leqslant a_n' |x|^{1-n} \inf(|x|,|y|)$ où a_n' est une constante. Il s'ensuit que $g_2(x) = O(|x|^{2-n})$. D'autre part, $g_1(x) \leqslant 0$ parce que ρ est une fonction décroissante. De plus, il est facile de voir que $\sigma_r * \rho(z) = \rho(|z|)$ si $|z| > r$ et $\sigma_r * \rho(z) \leqslant \rho(r)$ toujours. Donc, pour $|x| > r$,

$$\sigma_r * g_1(x) \geqslant \int_{|x-y| \geqslant |x|/2} \{\inf [\rho(|x|), \rho(|y|)] - \rho(r)\} d\mu(y)$$

$$= O(\rho(|x|)) + O(1)\rho(r).$$

Il résulte du théorème 2 bis que $\tilde{k}(x) = O(|x|^{2-n})$ si $n > 2$ et $\tilde{k}(x) = 0$, $\tilde{k}(x) = O(\rho(|x|))$ sinon. On pose $k_1 = g_1$; $k_2 = \tilde{k} + g_2$ si $n > 2$, tandis que $\tilde{k}$ s'absorbe dans k_1 si $n \leqslant 2$. Dans le cas $n = 1$, on peut trouver une expression très simple pour k. Il s'agit de remplacer la mesure μ par la fonction croissante correspondante, également notée μ, avec la normalisation $-\mu(-\infty) = \mu(+\infty) = m/2$. Alors on a

$$k(x) = \int_0^x \{\mu(y) - (m/2)\operatorname{sgn} y\} dy.$$

Le dernier énoncé du lemme s'en déduit immédiatement.

Nous voudrions en tirer la conclusion suivante.

PROPOSITION 6.- *Soit k un noyau de Frostman. Il existe une fonction harmonique h telle que, pour chaque $f \in \mathcal{D}^+$, si l'on pose*

$$g(x) = \int \{k(x-y)-h(x-y)\} f(y)dy,$$

<u>alors</u> $g(x) = \Theta(\rho(|x|))$ <u>et</u> $\overline{\lim}_{x \to \infty} g(x) \leqslant 0.$

On appelera <u>réduit</u> un noyau de Frostman pour lequel cette proposition est valable avec $h = 0$.

§ 4. <u>DISTRIBUTIONS DE BEURLING</u>.- Nous venons d'étudier l'équation $A * K = D$ dans le cas où $A = \Delta$ est un laplacien ordinaire. Ici on généralise cette étude en supposant seulement que A soit un laplacien généralisé non-trivial. Disons qu'une distribution $K \in \mathcal{D}'$ est <u>réduite</u> si elle est réelle et $\overline{\lim}_{x \to \infty} K * f(x) \leqslant 0$ pour chaque $f \in \mathcal{D}^+$. Nous appelons provisoirement(4) distribution de Beurling toute distribution réduite K satisfaisant à une équation non-triviale

$$A * K = D$$

où A et D sont des laplaciens généralisés. Quand le support de A est compact ce produit de composition est bien défini d'une manière non ambigue. Mais même si le support de A n'est pas compact, $\int g A$ a un sens clair si $g \in \mathcal{E}$ est réelle et $\overline{\lim}_{x \to \infty} g(x) \leqslant 0$. Nous pouvons donc toujours interpréter l'équation ci-dessus comme voulant dire $\int (K * f) A^- = \int f D^-$ pour chaque $f \in \mathcal{D}^+$, A^- désignant la distribution $A^-(x) = A(-x)$.

D'une façon pas tout à fait précise, les distributions de Beurling sont essentiellement tous les noyaux-distributions convenables à une théorie du potentiel. Nous ne considérons pas ce sujet ici sauf à indiquer quelques idées fondamentales.

Le rôle de la constante p dans la représentation des laplaciens généralisés donnée par la proposition 3 mérite attention. Nous l'appelons <u>poids</u> de D.

<u>LEMME</u> 4.- <u>Soit</u> D <u>un laplacien généralisé de poids</u> 0 <u>et</u> U <u>un ouvert borné</u>. <u>Si</u> g <u>est une fonction réelle deux fois continûment dérivable telle que</u> $D * g \geqslant 0$ <u>dans</u> U, <u>alors il existe</u> $y \in CU$ <u>tel que</u>, <u>pour chaque</u> $x \in U$, <u>on a</u> $g(x) \leqslant g(y)$.

(4) L'hypothèse que K soit réduite élimine certains cas intéressants. Malheureusement, il faudrait beaucoup compliquer l'exposition pour éviter une telle restriction.

REMARQUE. Dans le cas classique où D est un laplacien ordinaire (plus généralement $D = D_2 + L$, D_2 étant un semi-laplacien et L un opérateur de dérivation d'ordre 1) on constate qu'un y convenable se trouve dans la frontière de U, ce que est faux en général. Quand même, le lemme affirme qu'une fonction sous-harmonique partout (par rapport à D) ne peut pas atteindre un maximum strict.

Démonstration. Soit V l'ensemble, éventuellement vide, où g atteint son maximum. Si μ est la mesure associée à D, alors en chaque $x \in V$ on a $\int [g(x-y) - g(x)] d\mu(y) \leqslant 0$. Donc, si $D * g \geqslant 0$ dans V il s'ensuit que $V - S\mu \subset V$ (différence vectorielle d'ensembles) où $S\mu$ est le support de μ. Une telle inclusion n'est possible pour un compact V que si $S\mu \subset \{0\}$, ce qui entraine $\mu = 0$. Or, supposons l'énoncé du lemme faux. Alors $V \subset U$, d'où il résulte que $\mu = 0$ et enfin que D est de la forme $D = D_2 + L$. Donc nous sommes ramenés au cas classique.

Maintenant on arrive rapidement au

THEOREME 3. Soit K une distribution de Beurling. Si $f \in \mathcal{D}^+$ et $K * f \leqslant 1$ sur le support de f alors $K * f \leqslant 1$ partout(5).

Démonstration. L'hypothèse suppose qu'il existe des laplaciens généralisés A et D tels que pour chaque $f \in \mathcal{D}^+$, $A * g = D * f$ où $g = K * f$. Soit $U = \{x : g(x) > 1\}$. Alors $A * g = D * f \geqslant 0$ en dehors du support de f, en particulier sur U. D'ailleurs U est un ouvert borné. Donc, si A a pour poids 0, le lemme 4 s'applique à A, g, U ; et il en résulte que U est vide. D'autre part, si A a un poids positif, $A * g$ est strictement négative en chaque point où g atteint un maximum strict qui est strictement positif ; alors U est encore vide.

Le théorème 3 dit que les distributions de Beurling satisfont le principe du maximum. D'après des travaux non publiés de MM. Beurling et Deny, on sait que dans le cas $n = 1$ tous les noyaux-distributions satisfaisant à un principe du maximum convenablement

---

(5) Ceci généralise, dans le cas de noyaux de convolution, un résultat de Beurling et Deny (cf. 3).

formulé et à une condition additionnelle de régularité sont des distributions de Beurling et il est raisonnable d'escompter le même résultat pour $n \geq 1$. Naturellement, le principe du maximum cité ci-dessus est trop faible ; d'autre part, il ne faut pas insister sur les distributions réduites. Si K est une distribution de Beurling satisfaisant à $A * K = D$ où $A * 1 = 0$ alors, pour chaque $c > 0$, $K_c = K + c\,dx$ satisfait $A * K_c = D$. Cependant, si K_c n'est pas réduite elle peut ne pas satisfaire le principe du maximum.

<u>EXEMPLE</u>. $n = 1$. On pose $A = \delta'' + \delta'$, δ' étant la dérivée, δ'' la dérivée seconde de δ. Soit $h(x) = -\exp(-x)$. $K = h(x)dx$ est une distribution de Beurling car $A * K = 0$ et $K * f \leq 0$ pour chaque $f \in \mathcal{D}^+$. Quant à K_1, on a

$$K * f(x) < \lim_{y \to +\infty} K * f(y) = \int f(y)dy > 0$$

pour chaque $f \in \mathcal{D}^+$. Donc K satisfait trivialement le principe du maximum tandis que K_1 ne le satisfait pas.

Supposons A fixé. On peut, plus ou moins, caractériser les distributions de Beurling par rapport à A moyennant la proposition 4. Un analogue du théorème 1 en résultera. Un peu plus tard, nous donnerons quelques exemples, mais le cas de A général contient des difficultés profondes. Elles se ramenent à la recherche des solutions élémentaires, les E satisfaisant à

$$A * E = - \delta .$$

On sait (voir au nº 5) que, si A a un poids positif p, on peut prendre $E = d\mu$ où μ est une mesure de Radon positive de masse totale p^{-1}. D'ailleurs si les seules solutions bornées $g \in \mathcal{C}$ de $A * g = 0$ sont des constantes et si $n > 2$, alors il est certain qu'une solution élémentaire réduite existe. Au contraire, si $n \leq 2$, même si l'on suppose A à support compact, ce qui évite des difficultés de technique, il est vraisemblable[(6)] qu'aucune $E \in \mathcal{D}'$ satisfaisant à $A * E = - \delta$ n'existe en général.

Après le cas $A = D$, dans lequel les distributions de Beurling correspondantes sont celles données par le théorème 1 avec pour k un noyau de Frostman réduit, le cas le

(6) Il est certain qu'aucune solution tempérée n'existe.

plus naturel est celui de

$$A = \delta_a - \delta, \quad a \neq 0 \quad \text{où} \quad \delta_a(x) = \delta(x - a).$$

Une solution élémentaire est évidemment donnée par

$$E = -\sum_{j=1}^{\infty} \delta_{-ja}.$$

Ce choix de A ne donne pas lieu aux distributions de Beurling très intéressantes. Il faut ou bien prendre des combinaisons linéaires avec les a différents ou bien passer aux cas limites.

Nous considérons maintenant certains exemples, et entre autres ceux considérés par CHOQUET [2]. Nous nous bornons à une dimension et aux distributions de Beurling de la forme $\Upsilon = k(x)dx$, k étant localement sommable partout. Il s'agit d'appliquer la proposition 4 à $A * k(x)dx$ et de vérifier que $k(x)dx$ est réduite. La condition 1º) de la proposition 4 se traduit en "k soit sous-harmonique dans $C\Theta$ par rapport à A" et la condition 3º) en "k soit quasi-décroissante par rapport à A".

EXEMPLE 1.– $A = \delta'$ [2, p. 6, ex. 2º].

$k(x)dx$ sera une distribution de Beurling par rapport à A si et seulement si k croit(7) sur $]-\infty, 0[$ et $]0, \infty[$ et $k(-\infty) \leqslant k(+\infty) \leqslant 0$. Que k soit sous-harmonique dans $C\Theta$ par rapport à A équivaut au fait qu'elle y croisse. La quasi-décroissance équivaut $k(-\infty) \leqslant k(+\infty)$, et il faut que $k(+\infty) \leqslant 0$ pour que $k(x)dx$ soit réduite. Remarquons que si k est croissante et convexe sur $]-\infty, 0[$, $k(-\infty) \leqslant 0$, et $k(x) = 0$ pour $x > 0$, alors k est à la fois un noyau de Frostman réduit et un noyau pour une distribution de Beurling par rapport à δ'.

EXEMPLE 2.– $A = \delta'' - a\,\delta'$ [2, p. 6 ex. 1º].

On pose $k(x) = g[\exp(ax)]$. Pour que $k(x)dx$ soit une distribution de Beurling il faut et il suffit que g soit convexe croissante sur $[0, 1[$ et convexe décroissante sur $]1, \infty]$ tandis que $g(0) \leqslant 0$, $g(+\infty) \leqslant 0$.

(7) Plus exactement, k est égale presque partout à une fonction croissante sur ces intervalles. Désormais nous ne ferons plus attention aux banalités pareilles. $k(\infty)$ veut dire $\lim_{x\to\infty} k(x)$, etc., (valeurs $\pm\infty$ y comprises).

EXEMPLE 3.- $A = \delta'' + \omega_a - \delta$ [2, p. 7].

Rappelons que $2\omega_a = \delta_a + \delta_{-a}$. Il est trop compliqué de donner les conditions nécessaires et suffisahtes pour que $k(x)dx$ soit une distribution de Beurling par rapport à A. Néanmoins, on voit facilement que des k existent qui sont paires et nulles hors d'un intervalle fini sans être ni convexes, ni décroissantes, ni positives partout.

EXEMPLE 4.- $A = d\mu - m\delta$, μ une mesure positive à support compact de masse totale m. Pour que $k(x)dx$ soit une distribution de Beurling par rapport à A avec k continue il faut que $k(x) \leqslant 0$ partout. Raisonnement : $A * k$ est une fonction continue positive hors de l'origine, donc positive partout. Supposons k strictement positive en un point. Alors il existerait une $f \in \mathcal{D}^+$ telle que $k * f = g$ soit strictement positive en au moins un point. D'autre part, $\overline{\lim}_{x \to \infty} g(x) \leqslant 0$ car k est réduite. Ceci entraine que g ait un maximum strict en contradiction avec le lemme 4 et le fait que $A * g = (A * k) * f \geqslant 0$ partout.

§ 5. TRANSFORMEES DE FOURIER.- On note $\mathcal{S}$ l'anneau des fonctions complexes définies sur R^n indéfiniment dérivables à décroissance rapide. Son espace dual $\mathcal{S}'$, se compose des distributions tempérées, Voir [7, Ch. VII]. Etant donné $f \in \mathcal{S}$, nous définissons sa transformée de Fourier par

$$\hat{f}(\xi) = \int e(\xi x) f(x) dx$$

où $e(u) \equiv \exp(iu)$. Il s'ensuit que $\hat{f} \in \mathcal{S}$ sur l'espace vectoriel dual de R^n, et on a la formule d'inversion

$$f(x) = \int \bar{e}(\xi x) \hat{f}(\xi) d\xi / (2\pi)^n.$$

Soit $T \in \mathcal{S}'$ une distribution tempérée ; on définie sa transformée de Fourier, $\hat{T}$, selon la formule

$$\int f(x) T(x) = \int \hat{f}(\xi) \hat{T}(\xi) / (2\pi)^n.$$

$\hat{T}$ appartient également à $\mathcal{S}'$. Remarquons que si $f \in \mathcal{S}$, alors la transformée de Fourier de la distribution $f(x)dx$ est $\hat{f}(-\xi) d\xi$.

Etant donné $f, g \in \mathcal{S}$ et $T \in \mathcal{S}'$, on a les produits de composition $f * g \in \mathcal{S}$ et $g * T \in \mathcal{S}'$, à savoir

$$f * g(x) = \int f(x-y)g(y)dy$$

$$\int f(g * T) = \int (f * g^{-})T,$$

où $g^{-}(x) = g(-x)$. Les transformées de Fourier de $f * g$ et $g * T$ sont, respectivement, $\hat{f}\,\hat{g}$ et $\hat{g}^{-}\hat{T}$. Certaines distributions $S \in \mathcal{S}'$, en particulier celles à support compact, donnent lieu à des opérateurs de convolution sur $\mathcal{S}$; c'est à dire qu'on a $S * f \in \mathcal{S}$ et $S * T \in \mathcal{S}'$ quelles que soient $f \in \mathcal{S}$ et $T \in \mathcal{S}'$. (Les éléments $S * f \in \mathcal{S}$ et $f * S \in \mathcal{S}'$ sont liés par $(S * f)(x)dx = f * S$). Une telle S est caractérisée par le fait que $\hat{S} = \varphi(\xi)d\xi$ où φ est une fonction indéfiniment dérivable à croissance lente, autrement dit, il existe M tel que $\varphi(\xi) = \theta(|\xi|^{n})$ lorsque $\xi \longrightarrow \infty$. La transformée de Fourier de la fonction $S * f$ est la fonction $\varphi^{-}\hat{f}$; celle de la distribution $S * T$ est la distribution $\varphi\hat{T}$. On peut calculer la fonction φ directement par

$$\varphi(\xi) = \int \bar{e}(\xi x)S(x),$$

formule qui est valable pour chaque distribution $S = S' + S''$ où S' est une dérivée d'une mesure de Radon à masse totale finie et S'' à support compact.

Le théorème de Bochner, [1 ; Satz 23], constate que la transformation de Fourier établit une correspondance biunivoque entre les mesures de Radon positive de masse totale finie et les fonctions définies-positives. Nous(8) appelons <u>définie-positive</u> une fonction continue φ définie sur R^{n} qui satisfait à la condition :

$$\sum \varphi(x_{i} - x_{j})c_{i}\overline{c_{j}} \geqslant 0$$

quelles que soient les suites finies de points $x_{1}, \ldots, x_{k} \in R^{n}$ et de constantes complexes $c_{1}, \ldots, c_{k}$. Pour une telle fonction on a toujours $\varphi = \varphi^{*}$ et $\varphi(\theta) \geqslant 0$. Nous appelons <u>définie-négative</u> une fonction continue ψ définie sur R^{n}, en outre $\psi = \psi^{*}$ et $\psi(\theta) \geqslant 0$, qui satisfait à la condition

(8) Souvent on n'insiste pas sur la continuité, mais les fonctions de type positif non continues ne jouent aucun rôle ni dans la théorie de la transformation de Fourier sur R^{n} ni dans la théorie des distributions.

$$\sum \psi(x_i - x_j)c_i\overline{c_j} \leqslant 0$$

quelles que soient la suite finie de points $x_1, \dots x_k \in R^n$ et la suite finie de nombres complexes $c_1, \dots c_n$ tels que $\sum c_j = 0$. Les fonctions $\psi = c - \varphi$ où φ est définie-positive et $c \geqslant \varphi(\theta)$ est une constante sont des exemples de fonctions définies-négatives. (En fait, chaque fonction définie-négative est la limite, uniforme sur chaque compact, d'une suite de telles fonctions, mais cela ne nous intéresse pas ici). Les fonctions définies-positives sont forcément bornées, $|\varphi(x)| \leqslant \varphi(\theta)$. Pour les fonctions négatives-définies le résultat analogue est

LEMME 5.- Si ψ est une fonction définie-négative alors $|\psi(x-y)|^{\frac{1}{2}} \leqslant |\psi(x)|^{\frac{1}{2}} + |\psi(y)|^{\frac{1}{2}}$ quels que soient $x,y \in R^n$.

Démonstration. On peut supposer $\psi(\theta) = 0$, ce qui est le cas pire. Posons $\varphi(x,y) = \psi(x) + \bar{\psi}(y) - \psi(x-y)$. On voit aisément que ψ est définie-négative si et seulement si φ est définie positive, -

$$\sum \varphi(x_i, x_j)c_i\overline{c_j} \geqslant 0$$

- il suffit d'ajouter $x_o = \theta$, $c_o = - c_1 - \dots - c_k$ aux suites tests. On aura donc $|\varphi(x,y)| \leqslant |\varphi(x,x)|^{\frac{1}{2}} |\varphi(y,y)|^{\frac{1}{2}}$. Après un petit calcul cette dernière inégalité se transforme en la désirée.

Nous pouvons maintenant prouver un résultat important.

THEOREME 4.- Il y a une correspondance biunivoque entre les laplaciens généralisés D et les fonctions définies-négatives ψ donnée par $D \longleftrightarrow \psi$ où $\hat{D} = -\psi(\xi)d\xi$.

Démonstration. D'après la proposition 3, il est facile de voir que la fonction ψ définie par $\psi(\xi) = -\int \bar{e}(\xi x)D$, D étant un laplacien généralisé, est définie-négative. Evidemment $\hat{D} = -\psi(\xi)d\xi$.

Il nous faut un raisonnement plus long pour démontrer la réciproque. Donnons-nous une fonction définie-négative ψ. La forme continue de l'inégalité fondamentale définissant telles fonctions est

$$\int \psi(\xi-\eta)f(\xi)\bar{f}(\eta)d\xi\, d\eta \leqslant 0$$

pour chaque $f \in \mathcal{D}$ telle que $\int f(\xi)d\xi = 0$. D'ailleurs, il suit du lemme 5, que ψ est à croissance lente, et donc $-\psi(\xi)d\xi$ est une distribution tempérée, ce qui nous permet de remplacer la classe $\mathcal{D}$ par $\mathcal{S}$ partout. Soit D la transformée de Fourier de $-\psi(\xi)d\xi$. Si $g \in \mathcal{S} \cap \theta$, alors

$$\int \hat{g}(\xi)d\xi = 0 \quad \text{et} \quad \int |g|^2 D = -\int \hat{g}(\xi)\bar{\hat{g}}(\eta)\,\psi(\xi-\eta)d\xi\, d\eta/(4\pi^2)^n.$$

Cette dernière intégrale est donc positive ; autrement dit, D possède la propriété N), ce qui entraine, selon la proposition 2, que D est une distribution conditionnellement positive d'ordre $\leqslant 2$ telle que D_2 soit un semi-laplacien. D'après la proposition 4, il ne reste qu'à montrer l'existence d'une suite unitaire $\{u\} \in \mathcal{S}$ telle que $\overline{\lim} \int u(D_2-D) \geqslant 0$. Prenons pour $\{\hat{u}\}$ une suite d'éléments pairs et positifs de $\mathcal{D}$ dont les supports parcourent une base des voisinages de l'origine et tels que $\int \hat{u}(\xi)d\xi/(2\pi)^n = 1$. On note u la fonction dont la transformée de Fourier est $\hat{u}$. La transformée de Fourier de D_2 a la forme $\hat{D}_2 = -g(\xi)d\xi$ où g est un polynôme homogène quadratique. Alors

$$\lim_u \int u(D_2-D) = \lim_u \int \hat{u}(\xi)\{\psi(\xi)-g(\xi)\}d\xi/(2\pi)^n = \psi(\theta),$$

une quantité positive.

On en déduira des corollaires.

PROPOSITION 7.- Soit $n > 2$. Pour que $K = \mathrm{VP}\, k(x)dx$, où k est un noyau de Frostman réduit, il faut et il suffit que $\hat{K} = |\xi|^{-2}\psi(\xi)d\xi$ où ψ est une fonction définie-négative telle que $\lim_{\xi \to \infty} |\xi|^{-2}\psi(\xi) = 0$. (L'énoncé reste valable dans les cas $n = 1$ et $n = 2$ si l'on pose $\hat{K} = L_u + \mathcal{P}_u^{3-n}|\xi|^{-2}\psi(\xi)d\xi$ où L_u est un opérateur convenable de dérivation à l'origine d'ordre $\leqslant 2-n$)(9).

Cette proposition admet une vaste généralisation. On peut remplacer le laplacien par n'importe quel laplacien généralisé A à support compact. Alors on a $\hat{A} = \alpha(\xi)d\xi$ où α est une fonction entière définie-négative. Une distribution tempérée K

(9) Ici $|\xi|$ désigne la norme duale associée au laplacien ordinaire par rapport auquel les noyaux de Frostman sont définis.

satisfaisant $A * K = D$ possède une transformée de Fourier $\hat{K}$ satisfaisant $\alpha(\xi)\hat{K}(\xi) = \psi(\xi)d\xi$ où $\hat{D} = -\psi(\xi)d\xi$. La division par α est possible dans $\mathcal{D}'$; c'est banal d'après le lemme 5 qui implique que l'ensemble des zéros de α constitue un sous-groupe de R^n. D'autre part la division par α n'est pas toujours possible dans $\mathcal{S}'$. En voici un exemple dans R^1. Soit $\{\alpha_j\}$ une suite de nombres positifs tendant vers zéro très rapidement, et soit $\{a_j\}$ la suite $a_j = 2^{-j}\pi$. On pose $A = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(\omega_{a_j} - \delta)$. On a $\alpha(\xi) = 2\sum \alpha_j \sin^2 2^{-j-1}\pi\xi$. Alors $0 < \alpha(2^j + \eta) \leqslant 7\eta^2 + 2\beta_j^2$ où $\beta_j^2 = \sum_{i=j}^{\infty} \alpha_i$ (on a supposé chaque $\alpha_j \leqslant 1$). Donc
$\int_{2^j-\beta_j}^{2^j+\beta_j} \alpha^{-1}(\xi)d\xi \geqslant (5\beta_j)^{-1}$. Or l'inverse de $\hat{A}$, qui est une distribution égale à $\alpha^{-1}(\xi)d\xi$ en dehors de l'origine, n'est pas tempérée si les β_j^{-1} croissent rapidement.

Evidemment la division par α est possible dans $\mathcal{S}'$ si α^{-1} est une fonction sommable à croissance lente. Disons qu'un laplacien généralisé D est <u>diffusif</u> si $\hat{D} = -\psi(\xi)d\xi$ où ψ^{-1} est sommable dans un voisinage de l'origine. Cette hypothèse n'est qu'apparamment faible ; on a

<u>LEMME</u> 6.- <u>Soit ψ une fonction définie-négative. Si ψ^{-1} est sommable dans un voisinage de l'origine, alors elle est localement sommable partout et</u>

$$\int_{|\xi-\eta| \leqslant r} |\psi^{-1}(\xi)|d\xi = O(r^n) \text{ lorsque } r \longrightarrow \infty, \text{ uniformément en } \eta.$$

<u>Démonstration</u>. Supposons $\int_{|\xi|<2\varepsilon} |\psi^{-1}(\xi)|d\xi < \infty$ où $\varepsilon > 0$ est donné. Soit B une boule quelconque de rayon ε. La fonction $|\psi|$ étant continue, elle atteint son minimum dans $\bar{B}$ en un point η. Si $\xi \in B$, alors on a, selon le lemme 5, $|\psi(\xi)|^{\frac{1}{2}} + |\psi(\eta)|^{\frac{1}{2}} \geqslant |\psi(\xi-\eta)|^{\frac{1}{2}}$. Donc $4|\psi(\xi)| \geqslant |\psi(\xi-\eta)|$, et ainsi $\int_B |\psi^{-1}(\xi)|d\xi \leqslant 4\int_B |\psi^{-1}(\xi-\eta)|d\xi \leqslant 4\int_{|\zeta|<2\varepsilon} |\psi^{-1}(\zeta)|d\zeta$. L'énoncé s'en déduit.

On dit qu'une distribution $K \in \mathcal{D}'$ s'annule à l'infini si $\lim_{x \to \infty} K * f(x) = 0$ pour chaque $f \in \mathcal{D}$. Nous avons

<u>PROPOSITION</u> 8.- <u>Soit</u> A <u>un laplacien-généralisé diffusif et</u> D <u>une distribution tempérée dont la transformée de Fourier possède la forme</u> $\hat{D} = -\psi(\xi)d\xi$ <u>où</u> ψ <u>est une fonction continue à croissance lente</u>. <u>Alors il existe une</u> $K \in \mathcal{D}'$ <u>s'annulant à l'infini</u>, <u>et une seule</u>, <u>satisfaisant à</u> $A * K = D$. <u>La transformée de Fourier de</u> K <u>est</u> $\hat{K} = \alpha^{-1}(\xi)\psi(\xi)d\xi$ <u>où</u> $\hat{A} = -\alpha(\xi)d\xi$. <u>D'ailleurs</u>, <u>si</u> $-D$ <u>est une distribution positive</u>, <u>alors</u> K <u>l'est également</u>.

<u>Démonstration</u>. Prouvons d'abord l'unicité de K. Nous supposons que $K \in \mathcal{D}$ s'annule à l'infini et $A * K = 0$; il nous faut démontrer que $K = 0$. Donnons-nous $f \in \mathcal{D}$ réelle et posons $g = K * f$. Alors $A * g = 0$ et $g \in \mathcal{C}$ s'annule à l'infini. Il suffit de prouver que $g \leqslant 0$ partout. Or, sinon g atteint son maximum dans un ensemble compact et ce maximum est strictement positif. Si A a un poids positif, $A * g < 0$ en un tel point, d'où une contradiction ; si A a pour poids 0 le lemme 4 fournit une contradiction. L'unicité étant établie, posons $\hat{K} = \alpha^{-1}(\xi)\psi(\xi)d\xi$. Celle-ci est une mesure absolument continue à croissance lente selon le lemme 6. Sa transformée de Fourier, K, s'annule à l'infini d'après le lemme de Riemann-Lebesgue. Donc $A * K$ existe dans le sens que $\int(K * f)A^{-}$ existe pour chaque $f \in \mathcal{D}$. Remarquons que la fonction $K * f$ est la transformée de Fourier de la fonction sommable $\bar{\alpha}^{-1}\bar{\psi}\hat{f}$. Donc

$$\int(K * f)A^{-} = \int(\bar{\alpha}^{-1}\bar{\psi}\hat{f})(-\bar{\alpha})d\xi/(2\pi)^n = -\int\hat{f}\bar{\psi}d\xi/(2\pi)^n = \int f\, D^{-} ;$$

ce qui implique $A * K = D$. Enfin, supposons $-D$ positive. Alors, pour $f \in \mathcal{D}^{+}$, $A * g \leqslant 0$ où $g = K * f$. Le même raisonnement déjà utilisé pour prouver l'unicité montre que g ne peut jamais être négative (il faut considérer le minimum au lieu du maximum) ; c'est à dire, $K * f \geqslant 0$ pour chaque $f \in \mathcal{D}^{+}$.

La proposition 7 est alors un cas spécial de la précédente. La transformée de Fourier d'un laplacien ordinaire Δ possède la forme $\hat{\Delta} = -g(\xi)d\xi$ où g est un polynome homogène quadratique strictement positif hors l'origine. Donc, si $n > 2$, Δ est diffusif. D'ailleurs, si $n > 2$ et k est un noyau de Frostman réduit, la distribution $K = k(x)dx$ s'annule à l'infini. Or $\Delta * K = D$ où D est un laplacien généralisé tel que $D_2 = 0$. Ces D sont caractérisés par la fait que $\hat{D} = -\psi(\xi)d\xi$ où ψ est une fonction définie-négative telle que $\lim_{\xi \to \infty} |\xi|^{-2}\psi(\xi) = 0$.

Si A a un poids positif $p > 0$, alors A est évidemment diffusif. Il est moins banal que, si $n > 2$, n'importe quel laplacien généralisé non-dégénéré est diffusif. On a

<u>PROPOSITION</u> 9.- <u>Soit</u> $n > 2$. <u>Si</u> A <u>est un laplacien généralisé défini sur</u> R^n, <u>alors ou</u> A <u>est diffusif ou</u> A <u>est l'extension triviale à</u> R^n <u>d'un laplacien généralisé non-diffusif défini sur un sous-espace</u> R^{n-1}.

<u>Démonstration</u>. Soit α la fonction définie-négative associée à A par le théorème 4. Nous considérons deux cas : ou bien il existe $a > 0$ tel que $\alpha(\xi) \neq 0$ pour $a \leqslant |\xi| \leqslant 2a$ ou bien aucun tel a n'existe. Dans le premier cas nous constatons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|\alpha(\xi)| \geqslant \varepsilon |\xi|^2$ dans $\{\xi : |\xi| < a\}$, ce qui implique que A est diffusif avec $n > 2$. Supposons au contraire que pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe ξ, $|\xi| < a$, tel que $|\alpha(\xi)| < \varepsilon |\xi|^2$. Il existe alors un nombre naturel $N < 2a|\xi|^{-1}$ tel que $a \leqslant |N\xi| \leqslant 2a$, mais, selon le lemme 5, $|\alpha(N\xi)|^{\frac{1}{2}} \leqslant N|\alpha(\xi)|^{\frac{1}{2}}$, c'est à dire $|\alpha(N\xi)| \leqslant N^2|\alpha(\xi)| < N^2\varepsilon|\xi|^2 < 2a\varepsilon$, ce qui contredit l'hypothèse que la fonction continue α ne s'annule pas dans le compact $\{\xi : a \leqslant |\xi| \leqslant 2a\}$. Dans le second cas, l'origine est un point d'accumulation des zéros de α. D'autre part, il suit du lemme 5 que l'ensemble des zéros d'une fonction définie-négative est un sous-groupe G de R^n et que α est périodique par rapport à G, c'est à dire $\alpha(\xi + \eta) = \alpha(\xi)$ pour $\eta \in G$. Puisque G n'est pas discret, il contient au moins une ligne R passant par l'origine. A est évidemment déterminé sur le sous-espace R^{n-1} orthogonal à R, et l'énoncé s'en déduit.

§ 6. DISTRIBUTIONS CONDITIONNELLEMENT DE TYPE POSITIF.- Nous allons maintenant changer notre point de vue. Au commencement nous avons étudié les distributions conditionnellement positives. Parmi elles, les laplaciens généralisés ont joué un rôle spécial, et la théorie des laplaciens généralisés a conduit à l'étude des distributions de Beurling. Soit K une distribution de Beurling paire et tempérée. On verra bientôt que $\hat{K}$ est conditionnellement positive. Ce fait nous amène à considérer ici les distributions dont les transformées de Fourier sont conditionnellement positives, c'est à dire les distributions conditionnellement de type positif. Bien sûr, le rôle des distributions de Beurling, et spécialement les noyaux de Frostman, dans la théorie des distributions conditionnellement peut être regardé comme accidentel mais il est important quand même.

Pour parvenir au résultat fondamental il nous faut une généralisation de la proposition 2. Notons $\mathcal{P}^N$ l'ensemble constitué par les distributions $T \in \mathcal{D}'$ telles que $\int |f|^2 T \geqslant 0$ pour chaque $f \in \mathcal{D} \cap \mathcal{O}^N$. De la même façon nous notons $(\mathcal{P}^N)$ l'ensemble constitué par les distributions matricielles (T_{ij}) telles que $\sum f_i \bar{f}_j T_{ij} \geqslant 0$ pour chaque fonction vectorielle (f_i) dont les composantes appartiennent à $\mathcal{D} \cap \mathcal{O}^N$. On a

PROPOSITION 10.- Les hypothèses suivantes, sur un élément $T \in \mathcal{D}'$, sont équivalentes où N désigne un entier strictement positif.

1º) $T \in \mathcal{P}^N$,

2º) T est conditionnellement positif d'ordre $\leqslant 2N$ et $\int |\varphi|^2 T_{2N} \geqslant 0$ quel que soit le polynôme φ homogène de degré N (voir la proposition 1),

3º) $(\xi_i \xi_j T) \in (\mathcal{P}^{N-1})$ où $\xi_1, \dots, \xi_n$ sont n fonctionnelles linéaires réelles indépendantes sur R^n.

Démonstration. On procède par induction sur N. De toute façon les implications 2º) $\Longrightarrow$ 1º) et 1º) $\Longrightarrow$ 3º) sont banales. D'ailleurs, le cas $N = 1$ revient à la proposition 2. Il reste donc à prouver $3º)_N \Longrightarrow 2º)_N$, $N > 1$, sous l'hypothèse que $1º)_{N-1}$ entraine $2º)_{N-1}$. Si $(\xi_i \xi_j T) \in (\mathcal{P}^{N-1})$ alors il est évident que $\eta^2 T \in \mathcal{P}^{N-1}$ quelle que soit la fonctionnelle linéaire réelle η. On voit ainsi que $\eta^2 T$ est conditionnellement positif d'ordre $2(N-1)$. Donc, η étant arbitraire, T est conditionnellement positif d'ordre $\leqslant 2N$. Il suit de la proposition 1 que $T = T_{2N} + L_u + \mathcal{P}_u^{2N}\, d\mu$. Soit φ un polynome homogène de degré N. D'après le théorème d'Euler, φ s'exprime sous la forme $\varphi = N^{-1} \sum \xi_i \varphi_i$, chaque φ_i étant homogène de degré $(N-1)$. Soit $\{v\} \subset \mathcal{D}$ une suite de fonctions dont les supports tendent vers l'origine tandis que $v_N = 1$ pour chaque v. Alors

$$\int |\varphi|^2\, T_{2N} = \lim_v \int |\varphi v|^2 T = \lim_v N^{-2} \int \sum (\varphi_i v)(\bar{\varphi}_j \bar{v})\, \xi_i \xi_j\, T \geqslant 0$$

puisque on a supposé $(\xi_i \xi_j T) \in (\mathcal{P}^{N-1})$ et $\varphi_i v \in \mathcal{D} \cap \hat{\theta}^{N-1}$.

Posons $\hat{\theta}^N$ l'idéal de convolution de $\mathcal{S}$ constitué par les éléments dont tous les moments d'ordre $< N$ sont nuls. Autrement dit, $f \in \hat{\theta}^N$ si et seulement si $f \in \mathcal{S}$ et $\int (\xi x)^j f(x)dx = 0$ quels que soient l'entier positif $j < N$ et la fonctionnelle linéaire ξ. On note par f^* la fonction $f^*(x) = \bar{f}(-x)$. Une distribution $T \in \mathcal{D}'$ est <u>N-conditionnellement de type positif</u>, $T \in \hat{\mathcal{P}}^N$, si $\int (f * f^*) T \geqslant 0$ pour chaque $f \in \mathcal{D} \cap \hat{\theta}^N$. Par exemple, une fonction continue φ est définie-positive si et seulement si la distribution $\varphi(x)dx$ est de type positif (10) ; une fonction continue ψ telle que $\psi(0) \geqslant 0$ et $\psi = \psi^*$ est définie-négative si et seulement si la distribution $-\psi(x)dx$ est 1-conditionnellement de type positif. On dit que $T \in \mathcal{D}'$ est conditionnel-
s'il existe N tel que T est N-conditionnellement de type positif.
lement de type positif. Il en résultera que les distributions conditionnellement de type positif sont les transformées de Fourier les distributions tempérées conditionnellement positives.

Auparavant nous avons besoin d'un lemme. Soient $\delta'_1, \ldots, \delta'_n$ un n-triple de dérivation, réelles et indépendantes, à l'origine. Nous notons $(T_{ij}) \in (\hat{\mathcal{P}}^N)$ si T_{ij} est une distribution matricielle telle que $\int \sum (f_i * f_j^*) T_{ij} \geqslant 0$ quel que soit la fonction vectorielle (f_i) dont les composantes appartiennent à $\mathcal{D} \cap \hat{\theta}^N$.

<u>LEMME 7.- Soit</u> $N \geqslant 1$. <u>Si</u> $T \in \hat{\mathcal{P}}^N$ <u>alors</u> $(T_{ij}) \in (\hat{\mathcal{P}}^{N-1})$ <u>où</u> $T_{ij} = -\delta'_i * \delta'_j * T$.

<u>Démonstration</u>. Donnons-nous $f_1, \ldots f_n \in \mathcal{D} \cap \hat{\theta}^{N-1}$. Alors

---

(10) On dit simplement "type positif" si $N = 0$.

$$\int \sum (f_i * f_j^*) T_{ij} = \int \sum (\delta_i' * f_i) * (-\delta_j' * f_j^*) T = \int (g * g^*) T$$

où $g = \sum \delta_i' * f_i$. Il est évident que $g \in \mathcal{D} \cap \hat{\Theta}^N$, et donc la dernière intégrale est positive, car on a supposé $T \in \hat{\mathcal{P}}^N$.

Nous pouvons maintenant énoncer :

PROPOSITION 11.- Pour que $S \in \hat{\mathcal{P}}^N$ il faut et il suffit que $S = \hat{T}$ où $T \in \mathcal{S}' \cap \hat{\mathcal{P}}^N$. Ainsi les distributions conditionnellement de type positif sont exactement les distributions tempérées telles que leurs transformées de Fourier sont conditionnellement positives.

Démonstration. Il est évident que $f \in \mathcal{S} \cap \Theta^N$ équivaut $\hat{f} \in \mathcal{S} \cap \hat{\Theta}^N$. Donc, si $T \in \mathcal{S}' \cap \mathcal{P}^N$ alors

$$\int (\hat{f} * \hat{f}^*) \hat{T}/(2\pi)^n = \int |f|^2 \, T \geqslant 0$$

pour chaque $\hat{f} \in \mathcal{S} \cap \hat{\Theta}^N$, ce qui entraine $\hat{T} \in \hat{\mathcal{P}}^N$. Pour démontrer la récirpoque il faut vérifier qu'une distribution conditionnellement de type positif est tempérée. Nous prouverons que $S \in \hat{\mathcal{P}}^N$ entraine $S \in \mathcal{S}'$, (dès qu'on le sait on voit aisément que $\hat{S} \in \mathcal{P}^N$) par induction sur N. Le cas $N = 0$ est déjà connu ; il revient au théorème de Bochner-Schwartz, voir [7 , Ch. VII, Th. XVIII]. Supposons donc $S \in \hat{\mathcal{P}}^N$ où $N \geqslant 1$. Selon le lemme 7, $-\Delta * S \in \hat{\mathcal{P}}^{N-1}$ quel que soit le semi-laplacien Δ. Alors, suivant l'hypothèse de l'induction, $\Delta * S \in \mathcal{S}'$. Autrement dit, toutes les dérivées secondes de la distribution S sont tempérées. Il s'ensuit que $S \in \mathcal{S}'$ d'après le critère de Schwartz [7, Ch. VII, Th. VI].

Assez souvent, pour montrer qu'une distribution donnée est de type positif il est commode de vérifier d'abord qu'elle est conditionnellement de type positif et puis de faire usage de la proposition qui suit. En fait, nous aurons besoin d'une notion plus générale que celle de "conditionnellement de type positif". Soit G un sous-groupe (fermé) propre de R^n. Dire qu'une distribution $S \in \mathcal{S}'$ soit de type positif modulo G est dire que $\hat{S}$ est, en dehors de G, une mesure de Radon positive. (Conditionnellement de type positif correspond à $G = \Theta$).

PROPOSITION 12.– Soit S une distribution s'annulant à l'infini. Si S est de type positif modulo un sous-groupe propre, alors elle est de type positif.

Démonstration. Puisque S s'annule à l'infini elle est tempérée. Or, il est évident que S est de type positif modulo G si et seulement si $\int (f * f^*)S \geqslant 0$ pour chaque $f \in \mathcal{S}$ telle que $\hat{f}$ est nulle dans un voisinage de G. D'autre part, S, étant tempérée, est d'ordre fini. Autrement dit, il existe un entier N tel que $S \in \hat{\mathcal{P}}^N_G$, ceci désignant l'ensemble constitué par les distributions tempérées T telles que $\int (f * f^*)T \geqslant 0$ pour chaque $f \in \mathcal{S}$ dont la transformée de Fourier est nulle ainsi que ses dérivées d'ordre $\leqslant N$ dans G. Soit $\mathcal{J}^N_G$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{D}$ telles que $\int \bar{e}(\gamma x)(\xi x)^j f(x)dx = 0$ quels que soient l'élément $\gamma \in G$, la fonctionnelle linéaire ξ, et l'entier positif $j \leqslant N$. On voit aisément ceci : pour qu'une distribution tempérée T appartienne à $\hat{\mathcal{P}}^N_G$ il faut et il suffit que $\int (f * f^*)T \geqslant 0$ pour chaque $f \in \mathcal{J}^N_G$. Or, nous savons qu'il existe un entier N tel que $S \in \hat{\mathcal{P}}^N_G$ et nous voulons prouver $S \in \hat{\mathcal{P}} = \hat{\mathcal{P}}^0_G$. Supposons donc $N > 0$ et donnos-nous $f \in \mathcal{J}^{N-1}_G$. Soit $a \in R^n$ tel que $\gamma a = 0$ pour chaque $\gamma \in G$. Evidemment $g_a = f - \delta_a * f \in \mathcal{J}^N_G$. Donc $\int (g_a * g_a^*)S \geqslant 0$. Mais, alors, $g_a * g_a^* = 2f * f^* - \delta_a * f * f^* - \delta_{-a} * f * f^*$. L'hypothèse que S s'annule à l'infini entraine que $\int (\delta_a * f * f^*)S$ tend vers 0 lorsque a s'éloigne indéfiniment de l'origine. Il existe une suite de a convenables tendant vers l'infini parce que G est un sous-groupe non dense. Alors, il en résulte que $\int (f * f^*)S \geqslant 0$, ce qui entraine $S \in \hat{\mathcal{P}}^{N-1}_G$. L'énoncé s'en déduit.

On va tirer de la proposition précédente un corollaire qui était le but initial de ce travail.

THEOREME 6.– Les hypothèses suivantes, sur une distribution $K \in \mathcal{D}'$ qui est réelle et paire, sont équivalentes.

1º) K est une distribution de Beurling s'annulant à l'infini.

2º) Pour la transformée de Fourier on a $\hat{K} = \varphi(\xi)d\xi$ où φ est une fonction positive, localement sommable, à croissance lente qui est égale, sauf peut-être sur un ensemble de mesure nulle, au quotient de deux fonctions définies-négatives.

REMARQUES. En particulier, l'énoncé dit qu'une distribution de Beurling paire s'annulant à l'infini est de type positif. On attend un résultat pareil dans le cas analogue où il ne s'agit pas nécessairement d'opérateur de convolution. Ainsi on voudrait éviter l'intervention de la transformée de Fourier. On peut chercher à s'appuyer sur le principe du maximum, voir le théorème 3. Alors Ninomiya [6] a démontré que tout noyau-fonction symétrique, continu en dehors de la diagonale et positif, qui satisfait au principe du maximum est de type positif. Cependant, comme nous avons vu au numéro 4, exemple 3, il existe des distributions de Beurling de la forme $K = k(x)dx$ où k est une fonction réelle, paire, continue, s'annulant à l'infini, et à signe variable(11).

Démonstration du théorème 6. Prouvons d'abord 2º) $\Longrightarrow$ 1º). Selon le lemme de Riemann-Lebesgue, si $\hat{K} = \varphi(\xi)d\xi$, où φ est une fonction localement sommable à croissance lente, alors K s'annule à l'infini. De plus, on a supposé qu'on ait presque partout $\varphi = \alpha^{-1}\psi$ où $\hat{A} = -\alpha(\xi)d\xi$. $\hat{D} = -\psi(\xi)d\xi$, A et D étant des laplaciens généralisés (voir le théorème 4). Donc $\alpha(\xi)\varphi(\xi)d\xi = \psi(\xi)d\xi$, ce qui entraine, en présence

Démontrons maintenant 1º) $\Longrightarrow$ 2º). On suppose $A * K = D$

du fait que K s'annule à l'infini, $A * K = D$, où A et D sont des laplaciens généralisés, $A \neq 0$. Puisque K est paire, on a également $\check{A} * K = \check{D}$. Donc, sans restreindre la généralité, on peut supposer A et D, tous les deux pairs. Or, $\alpha(\xi)\hat{K}(\xi) = \psi(\xi)d\xi$ où α et ψ sont comme ci-dessus et $\hat{K}$ est la transformée de Fourier de la distribution tempérée K. Suivant le lemme 5, α et ψ sont partout positifs et l'ensemble des zéros de α est un sous-groupe propre G de R^n. Ainsi K est une mesure positive hors de G. Il résulte de la proposition 12 et l'hypothèse que K s'annule à l'infini que K est de type positif, autrement dit, $\hat{K}$ est une mesure positive. Ceci entraine que la fonction $\varphi = \alpha^{-1}\psi$ est localement sommable, et enfin, que $\hat{K} = \varphi(\xi)d\xi + d\mu$ où μ est une mesure de Radon positive à croissance lente portée par le sous-groupe G. Mais la transformée de Fourier d'une mesure portée par un sous-

---

(11) Le principe du maximum utilisé par Ninomiya dans le cas de noyaux à signe variable ne convient pas ici.

groupe propre est périodique modulo le sous-groupe orthogonal, et donc elle ne s'annule pas à l'infini si la mesure n'est pas nulle. Il s'ensuit que $\mu = 0$, et on a ainsi vérifié 1º) $\Longrightarrow$ 2º).

Le théorème 6 a comme corollaire immédiat : si k est un noyau de Frostman pair s'annulant (ou positif) à l'infini alors la distribution $k(x)dx$ est de type positif. Il existe, cependant, une autre généralisation de l'énoncé classique de l'introduction. Pour cela, il faut faire intervenir l'opérateur d'Euler,

$$H = \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial}{\partial x_j} .$$

Si φ est une fonction continument dérivable, alors $H\varphi(x)$ est égal à la dérivée par rapport à t de $\varphi(tx)$ en $t = 1$. Donc, pour qu'une telle φ soit homogène de degré h il faut et il suffit que $H\varphi = h\varphi$. Nous avons le

THEOREME 7.- Soit $K \in \mathcal{S}'(R^n)$ une distribution tempérée, positive, et paire. Si $(H + n-1)K \leqslant 0$ et $(H + n-2))(H + n-1)K \geqslant 0$ alors K est de type positif.

Démonstration. Supposons d'abord que K possède la forme $K = k(x)dx$ où k est une fonction deux fois continûment dérivable. Il suffira alors de prouver que $\int \bar{e}(\xi x)\exp\{-g(x)\}k(x)dx \geqslant 0$ pour chaque $\xi \in R^n$ quel que soit le polynôme g homogène quadratique tel que $g(x) > 0$ si $x \neq 0$. Passons aux coordonnées polaires correspondant à $r^2 = g(x)$. Nous avons

$$2\int \bar{e}(\xi x)\exp\{-g(x)\}k(x)dx = 2\, c''_n \int_{|y|=1} \int_0^{\infty} \bar{e}(r\xi y)\exp(-r^2)k(ry)r^{n-1}\, dr\, \omega_1(y) =$$

$$= c''_n \int \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \cos(r\xi y)\exp(-r^2)k(ry)|r|^{n-1}\, dr \right\} \omega_1(y),$$

où c''_n est l'aire de la sphère-unité et ω_1 la distribution donnant la valeur moyenne sur la sphère-unité. Or, il suffit de prouver que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(r\eta)\exp(-r^2)k_y(r)dr \geqslant 0$$

pour chaque $\eta \in R^1$ quel que soit $y \neq 0$ où k_y désigne la fonction $k_y(r) = k(ry)|r|^{n-1}$. Donc $r > 0$ on a $\frac{d}{dr} k_y(r) = r^{-1} H\{k(ry)r^{n-1}\} = r^{n-2}(H + n-1)k(ry) \leqslant 0$ suivant l'hypothèse

$(H+n-1)k \leqslant 0$. Donc k_y est décroissante dans $r > 0$. De même façon,

$$\frac{d^2}{dr^2} k_y(r) = r^{-1} H \frac{d}{dr} k_y(r) = r^{-1} H\{r^{n-2}(H+n-1)k(ry)\}$$
$$= r^{n-3}(H+n-2)(H+n-1)k(ry) \geqslant 0.$$

Donc k_y est convexe hors de l'origine. Ainsi k_y est un noyau de Frostman dans R^1. Puisqu'il est pair et positif, il est de type positif, et le résultat s'ensuit. Il reste à considérer le cas général. On passe de K aux régularisées $f * K$ où f possède la forme $f(x) = \exp\{-g(x)\}$. Utilisant la formule

$$H(f * K) = (Hf) * K + f * (HK) - nf * K$$

et le fait que $Hf = -2gf$ ici, on voit que $f * K$ satisfait également les hypothèses de l'énoncé. Alors $f * K$ s'exprime sous la forme $f * K = k(x)dx$, et la démonstration est achevée.

Le théorème 7 n'a rien à voir avec les distributions de Beurling parce que l'opérateur H ne commute pas avec les translations. Quand même, il vaut la peine d'une étude approfondie qu'on ne donnera pas ici. Comme cas particulier du théorème 7 on a que <u>toute distribution</u> K <u>homogène de degré</u> h, <u>à savoir</u> $HK = hK$, <u>où</u> $h \leqslant 1-n$, <u>qui est paire et positive est également de type positif</u>.

La démonstration duthéorème 7 signale un défaut du théorème 6 en ce qui concerne la recherche de distributions de type positif. La classe de distributions de type positif est évidemment stable pour l'addition tandis que la classe de distributions de Beurling ne l'est pas. Donc, souvent il faudra une certaine finesse en appliquant le théorème 6 pour montrer qu'une certaine distribution est de type positif.

La proposition 12 donne un critère suffisant pour qu'une distribution conditionnellement de type positif soit de type positif. Nous allons maintenant obtenir le résultat qui convient quand on veut constater que la distribution est N-conditionnellement de type positif. D'abord nous avons besoin du

<u>LEMME</u> 8.- <u>Soit</u> k <u>une fonction continue telle que la distribution</u> $K = k(x)dx$ <u>soit conditionnellement de type positif</u>. <u>Si</u> $r^{-2N}\int |k|\,\sigma_r$ (12) <u>reste borné lorsque</u> r <u>tend vers</u> ∞, <u>alors</u> $\hat{K}$ <u>est une distribution d'ordre</u> $\leqslant 2N$.

<u>Démonstration.</u> La distribution $\hat{K}$ étant conditionnellement positive est d'ordre fini, donc d'ordre $\leqslant 2(N+M)$ pour un entier positif M. Notons $P(N, M)$ l'énoncé où N et M interviennent. Supposons qu'on a démontré $P(N, 1)$ pour chaque N. Il en résultera que $P(N, M)$ est vrai pour chaque N et tout M car $P(N, M)$ et $P(N+M, 1)$ ensemble entrainent $P(N,M+1)$. Voici maintenant la démonstration de $P(N,1)$. D'après la proposition 1 on a $\hat{K} = T_{2N+2} + L_u + \wp_u^{2N+2}\,d\mu$, ou $\int_{|\xi|<1} |\xi|^{2N+2} d\mu < \infty$. La transformée de Fourier de T_{2N+2} est un polynôme homogène de degré $2N+2$ tandis que la transformée de Fourier de $L_u + \wp_u^{2N+2} d\mu$ est $\mathcal{O}(|x|^{2N+2})$ à l'infini. Il résulte de l'hypothèse $\int |k|\,\sigma_r = \mathcal{O}(r^{2N})$ que $T_{2N+2} = 0$. Ainsi $\hat{K} = L_u + \wp_u^{2N+2} d\mu$ où L_u est un opérateur de dérivation à l'origine d'ordre $\leqslant 2N+1$. Pour $t > 0$ posons $g_t(x) = (-\Delta)^N * \exp(-|x|^2/2t)/(2\pi t)^{n/2}$. On a $\hat{g}_t(\xi) = |\xi|^{2N}\exp(-t|\xi|^2/2)$, et ainsi

$$\int g_t(x)k(x)dx = \lambda_u + \int \left\{\exp(-t|\xi|^2/2) - u\right\} |\xi|^{2N} d\mu ,$$

où λ_u est indépendant de t. D'autre part, un calcul élémentaire montre que $\int g_t(x)k(x)dx$ reste bornée lorsque $t \longrightarrow \infty$. Il s'ensuit que $\int u(\xi)\,|\xi|^{2N} d\mu < \infty$. Donc, nous avons $\hat{K} = L' + L''_u + \wp_n^{2N}\,d\mu$ où L' est d'ordre $2N+1$ et L''_u d'ordre $\leqslant 2N$. La transformée de Fourier de L' est un polynôme homogène de degré $2N+1$ tandis que, comme on sait maintenant, la transformée de Fourier de $L''_u + \wp_u^{2N}\,d\mu$ est $\mathcal{O}(|x|^{2N})$ à l'infini. Donc $L' = 0$ et $P(N, 1)$ est démontré.

Dire qu'un polynôme g homogène de degré $2N$ est <u>fortement positif</u> est dire que $p^2(\partial/\partial x)g(x) \geqslant 0$ quel que soit le polynôme p, réel et homogène de degré N. Un polynôme fortement positif est positif ; la récirpoque est exacte si $n \leqslant 1$ ou $N \leqslant 1$ mais pas ailleurs. La distribution $(-1)^N g(x)dx$ est N-conditionnellement de type

---

(12) Rappelons que $\int f\,\sigma_r$ signifie la valeur moyenne de la fonction f sur la boule de rayon r centrée à l'origine.

positif si et seulement si le polynôme g, homogène de degré $2N$, est fortement positif. Plus généralement, on a

PROPOSITION 13.- Soit K une distribution conditionnellement de type positif. Pour que K soit N-conditionnellement de type positif $(N \geqslant 1)$, il faut et il suffit que K possède la forme

$$K = (-1)^N g(x)dx + K_o$$

où

1º) g est un polynôme homogène de degré $2N$ fortement positif,

2º) pour chaque $f \in \mathcal{D}$, $\lim\limits_{r \to \infty} r^{-2N} \int |K_o * f| \, \sigma_r = 0.$

NOTE.- En fait il faut que $K_o * f(x) = \mathcal{O}(|x|^{2N})$ lorsque $x \longrightarrow \infty$ pour chaque $f \in \mathcal{D}$.

Démonstration. D'après les propositions 11, 10 et 1 (dans cet ordre), si K est N-conditionnellement de type positif, alors $\hat{K}$ s'exprime sous la forme

$$\hat{K} = \hat{K}_{2N} + L_u + \mathcal{P}_u^{2N} \, d\mu$$

où K_{2N} est la transformée de Fourier de $(-1)^N g(x)dx$, g comme en 1º), L_u est un opérateur de dérivation à l'origine d'ordre $< 2N$, et μ est une mesure de Radon positive définie sur $C\mathcal{O}$ telle que $\int_{|\xi|<1} |\xi|^{2N} d\mu(\xi) < \infty$. On pose $\hat{K}_o = L_u + \mathcal{P}_u^{2N} \, d\mu$. Si $f \in \mathcal{D}$ alors la transformée de Fourier de $K_o * f$ et $\hat{f}\hat{K}_o = L + \mathcal{P}^{2N} d\nu$ où L est d'ordre $\leqslant 2N-1$ et ν est une mesure de Radon sur $C\mathcal{O}$ telle que $\int |\xi|^{2N} |d\nu| < \infty$. Ainsi $K_o * f(x) = \int \bar{e}(\xi x) L(\xi)/(2\pi)^n + \int [\bar{e}(\xi x) - \bar{e}_{2N-1}(\xi x)] d\nu(\xi)/(2\pi)^n =$ (polynôme de degré $\leqslant 2N-1$) + (fonction continue à croissance $\mathcal{O}(|x|^{2N})$).

Réciproquement, supposons $K = (-1)^N g(x)dx + K_o$ où 1º) et 2º) ont lieu. Il faut démontrer que K, qui est conditionnellement de type positif, est N-conditionnellement de type positif. Soit $f \in \mathcal{D}$ une fonction définie-positive. Alors $f * K = k(x)dx$ où k satisfait aux hypothèses du lemme 8. Donc la transformée de Fourier de $f * K$ est d'ordre $\leqslant 2N$. Puisqu'on peut choisir une suite de f convenables telle que $f * K \longrightarrow K$, il en résulte que $\hat{K}$ est d'ordre $\leqslant 2N$. L'énoncé s'en déduit aisément.

Comme corollaire on obtient

THEOREME 8.- Soit ψ une fonction continue telle que $\psi = \psi^*$ et $\psi(\theta) \geqslant 0$. Pour que ψ soit définie-négative il faut et il suffit que

1º) la distribution $-\psi(x)dx$ soit conditionnellement de type positif,

2º) $\psi(x) = g(x) + \psi_0(x)$ où g est un polynôme homogène quadratique positif et $\psi_0(x) = \theta(|x|^2)$ lorsque x tend vers ∞.

Démonstration. Selon le théorème 4, les fonctions définies-négatives sont les fonctions continues ψ telles que $-\psi(x)dx = \hat{D}$ où D est un laplacien généralisé. Si D est bien un laplacien généralisé il suit immédiatement de la proposition 13 que ψ satisfait aux hypothèses 1º) et 2º). D'autre part, d'après la même proposition, si ψ satisfait à 1º) et 2º) alors $-\psi(x)dx$ est 2-conditionnellement de type positif. Donc sa transformée de Fourier, D, possède la forme

$$D = L_u + D_2 + \mathcal{P}^2 d\mu$$

où D_2 est un semi-laplacien. Puisque la transformée de Fourier de $\mathcal{P}^2 d\mu$ est continue dans un voisinage de l'origine et μ est positive, il en résulte que $\int_{|\xi|>1} d\mu(\xi) < \infty$.
Donc nous avons

$$D = -p\,\delta + L_u^* + D_2 + \mathcal{P}^* d\mu .$$

L_u et p sont réelles parce que $\psi = \psi^*$. Suivant la proposition 3, il reste à démontrer $p \geqslant 0$. Mais on a $p = -\psi(\theta)$.

Nous terminons avec quelques exemples simples de l'application du précédent à la recherche des fonctions définies-négatives.

EXEMPLE 1. $n = 1$, $\psi(x) = |x|^p$, $0 < p \leqslant 1$. Alors $-\psi$ est un noyau de Frostman. Donc $-\psi(x)dx$ est conditionnellement de type positif et le théorème 8 s'applique directement.

EXEMPLE 2. $n = 1$, $\psi(x) = |x|^p$, $1 < p \leqslant 2$. Alors $\Delta * \psi(x)$ est un noyau de Frostman, donc $\Delta * \psi(x)dx$ est conditionnellement de type positif, ce qui entraine que $-\psi(x)dx$ est conditionnellement de type positif.

EXEMPLE 3. $n = 2$, $\psi(x)$ est une fonction paire, positive, convexe, et homogène de degré 1. Alors la distribution $\Delta * \psi(x)dx$ est paire, homogène de degré -1, et positive parce que ψ est convexe. D'après le théorème 7, $\Delta * \psi(x)dx$ est de type positif. Donc $-\psi(x)dx$ est conditionnellement de type positif et le théorème 8 s'applique. (Ce résultat a été déjà obtenu par une voie beaucoup plus compliquée par T. S. Ferguson, Ann. Math. Stat. 33 (1962) p. 1256-1266 et par C. S. Herz, Proc. Amer. Math. Soc. 14 (1963) 670-675).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOCHNER S. : Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Leipzig, 1932.

[2] CHOQUET Gustave : Sur une large classe de noyaux de convolution satisfaisant au principe du maximum, Séminaire B.C.D. (Théorie du Potentiel) Paris 1958/59.

[3] DENY Jacques : Les principes du maximum en théorie du potentiel, Séminaire B.C.D. (Théorie du Potentiel) Paris 1961/62.

[4] FROSTMAN Otto : Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles, Medd. Lund s Univ. Mat. Sem. 3 (1935), 1-118.

[5] LEVY Paul : Théorie de l'Addition des Variables Aléatoires? Paris, 1954.

[6] NINOMIYA Nobuyuki : Etude sur la théorie du potentiel pris par rapport au noyau symétrique, Journal Inst. Polytechnics, Osaka City Univ? 8 (1957) 147-183.

[7] SCHWARTZ Laurent : Théorie des Distributions, Paris 1957 (Tome I) et 1959 (Tome II)

[8] TITCHMARSH E. C. : Fourier Integrals, Oxford 1948.