PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

85-02

SEMINAIRE D'ANALYSE HARMONIQUE

1983-1984

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 **ORSAY** France

Code matière AMS (1980) :

A. Ancona 31B15 - 31C15 - 60J45
R. Arocena 47B40 - 47A20 - 47Bxx - 47Dxx - 42A38
P. Assouad 60F17 - 43A56
D. Bekollé 32A07 - 32H10 - 35B65 - 35C15
Ph. Charpentier 32A22 - 32C30 - 35N15
M. A. Jiménez Pozo 41A17 - 41A65

PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

85-02

SEMINAIRE D'ANALYSE HARMONIQUE

1983-1984

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 ORSAY France

SCATTERING FUNCTIONS, FOURIER TRANSFORMS OF MEASURES, REALIZATION OF LINEAR SYSTEMS AND DILATIONS OF OPERATORS TO KREIN SPACES : A UNIFIED APPROACH

Rodrigo AROCENA

INTRODUCTION

The aim of this work is to show that the well known theorem of Naimark on the dilation of Toeplitz kernels, and some of its extensions, allow a unified approach to the four subjects listed in the tittle. This enlarges the scope of the method presented in a previous work [11], where response functions of some linear discrete systems were characterized, and scattering operators and sub-operators, in the sense of Lax-Phillips [50] and Adamjan-Arov [1], were studied. Here the approach is more general, because of the inclusion of other subjects and also because we don't restrict our attention to the group of integers. Of course, we don't assume previous acquaintance with the above mentioned work. In fact, the following pages have been written with the hope that they can be read by a person who is not a specialist in any of the subjects of the title. Although we present some results that are perhaps new, the interest of this work if any lays on the common approach to all of them.

I - SCATTERING FUNCTIONS

In this chapter we consider the basic properties of some operator valued functions in topological groups which constitute a natural generalization of the concept of scattering function. In order to do that we start with a sketch of the Lax-Phillips approach to scattering theory [50].

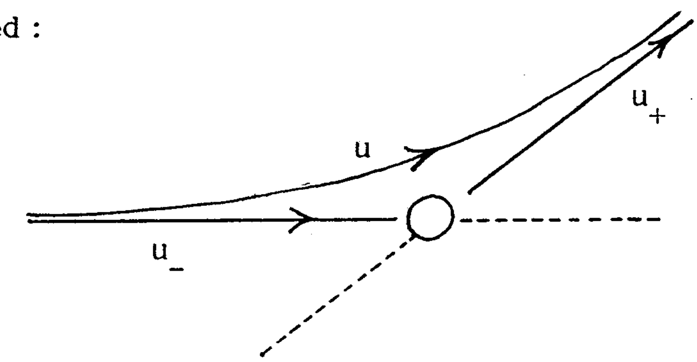
Wave propagation outside an obstacle in the three dimension space is the basic example. It can be proved that the obstacle has very little influence on the wave in the long run. More specifically : given any solution u of the wave equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$$

outside the obstacle and with finite energy, there exist two solutions u_+ and u_- of the same equation in the whole (free) space such that the energy of $(u - u_-)$ and $(u - u_+)$ tends to zero when the time t tends to $(-\infty)$ and $(+\infty)$, respectively. That is, u behaves as u_- in the remote past and as u_+ in the remote future. The scattering operator S associated to the abstacle is then defined by

$$Su_- = u_+ .$$

A similar situation arises when the interaction of atomic nuclei and particles is considered :



observations of the trajectories of the particules, if suitably made before and after an experiment, can be considered as ocurring near $(-\infty)$ and $(+\infty)$, respectively, so their relation will be given by the scattering operator. It follows that this operator is the fundamental observable when the obstacle can't be directly observed. For this reason Heisenberg suggested that all the information on nuclear forces must be implicitly contained in S. How to extract from it information on the obstacle constitutes the fundamental inverse scattering problem.

Now, Lax and Phillips have proved that the classical definition of S by means of wave operators is a particular case of what they call an abstract scattering theory, which we shall now sketch. Let H be the Hilbert space defined by the solutions of the wave equation with obstacle, where the norm is given by energy ; let U be the group of unitary operators $U(t) \in \mathcal{L}(H)$ which relate initial data of a solution with its data at time t ; U_o will be the corresponding group when there is no obstacle. It can be proved that there exist two subspaces D_+ and D_- of H such that U and U_o act in the same way on D_+ (D_-) for every positive (negative) value of t. The properties of the wave equation imply the following :

1) $U(t)D_+ \subset U(s)D_+$ and $U(t)D_- \supset U(s)D_-$ hold for every $t > s$;

2) $\bigcap_{t\geq 0} \{U(t)D_+\} = \bigcap_{t\leq 0} \{U(t)D_-\} = \{0\}$;

3) $\overline{\bigcup_{t\leq 0} \{U(t)D_+\}} = \overline{\bigcup_{t\geq 0} \{U(t)D_-\}} = H$;

4) D_+ and D_- are orthogonal.

The same properties hold when U is replaced by U_o. When properties (1) to (4) are satisfied, it is said that D_- is <u>incoming</u> and D_+ <u>outgoing</u>. Such subspaces can be studied independently of the example which motivated that definition. It is seen that D_- defines a "Fourier representation" of H, i. e. a unitary operator R_- from H onto $L^2(E)$, where E is a Hilbert space, such that $U(t)$ goes into the multiplication by e^{ixt}. In the same way D_+ defines a Fourier representation R_+ of H onto $L^2(F)$. Lax and Phillips say that

$$S \overset{\text{def}}{=} R_+ R_-^{-1}$$

is the <u>abstract scattering operator</u> ; they prove that S is in fact equal to the multiplication by an analytic function whose values are operators from E to F. Going back to the motivating example they also show that their abstract scattering operator is in that case equal to the classic one.

In [11] we showed that the scattering function can be very simply defined in a direct way, that is, without appealing to Fourier representations. Then we obtain a condition that characterizes the $\mathcal{L}(E,F)$-valued functions which can be considered as scattering functions. Since this depends essentially on the existence of a suitable group U, it can be seen a priori why the adequated tool will be in this case a theorem that gives a suitable unitary representation. In this paper we take as our starting point that previously obtained condition, which in this case we formulate in terms of a general group.

Let us still note that the definition of scattering or coupling function proposed in [11] is well suited for the Lax-Phillips approach both to the conservative case - which we have just sketched - and to the dissipative one ([51], [32]), and also for the general theory of couplings of isometries as developed by Adamjan and Arov [1] in order to explain the relation of scattering with model theory in the sense of Nagy and Foias. These subjects and their connections with Mackey's imprimitivity theorem are also studied in [20].

The preceding considerations motivate the following general definition : <u>scattering function</u> is any

$$f : \Gamma \longrightarrow \mathcal{L}(E,F)$$

where Γ is a topological group, E and F are Hilbert spaces, and $\mathcal{L}(E,F)$ is the set of bounded operators from E to F, if f is continuous in the weak topology of operators and there exist two functions, $\varphi : \Gamma \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ and

$\psi : \Gamma \longrightarrow \mathcal{L}(F)$, continuous in the same topology such that the inequality

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left\{ \langle \varphi(\gamma_j^{-1}\gamma_i)\, u_i, u_j \rangle_E + \langle \psi(\gamma_j^{-1}\gamma_i) v_i, v_j \rangle_F \right\} \geq 2 \left| \sum_{i,j=1}^{n} \langle f(\gamma_j^{-1}\gamma_i)\, u_i, v_j \rangle_F \right|$$

holds for any $n = 1, 2, \ldots,$ $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\} \subset \Gamma$, $\{(u_1,v_1), \ldots (u_n,v_n)\} \subset E \times F$. (In order to be brief we shall sometimes say that f is scattering with respect to φ and ψ).

As usual, we say that the family of unitary operators $\{U_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ in a Hilbert space H is a (continuous) unitary representation of the topological group Γ in H if $U_{\gamma\gamma'} = U_\gamma U_{\gamma'}$ holds for any $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ and the function which takes γ to U_γ is continuous in the weak sense (and so in the strong one). We start relating representations with the previous definition.

Let G be the function from Γ to $\mathcal{L}(E \oplus F)$ given by

$$G(\gamma) = \begin{pmatrix} \varphi(\gamma) & f(\gamma) \\ f^*(\gamma^{-1}) & \psi(\gamma) \end{pmatrix}, \quad \gamma \in \Gamma.$$

Then f is scattering with respect to φ and ψ if and only if G is weakly continuous and positive definite, the last meaning that

$$\sum_{i,j=1}^{n} \langle G(\gamma_j^{-1}\gamma_i)\, h_i, h_j \rangle \geq 0$$

holds for any $\gamma_1, \ldots \gamma_n \in \Gamma$, $h_1, \ldots h_n \in E \oplus F$. Those two conditions are precisely the hypothesis of Naimark's dilation theorem. Its thesis says that there exists a unitary representation $\{U_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ of Γ on H such that

$$G(\gamma) = T^* U_\gamma T$$

holds for every $\gamma \in \Gamma$, with $T = (\tau, \lambda) \in \mathcal{L}(E \oplus F, H)$. Then, it must be $f(\gamma) = \tau^* U_\gamma \lambda$ so we obtain one of the implications of the following

(I.1) THEOREM. Let T be a topological group, E and F Hilbert spaces. Then

$$f : \Gamma \longrightarrow \mathcal{L}(E,F)$$

is a scattering function if and only if there exist a unitary representation $\{U_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ of Γ in H and two bounded operators, $\lambda : E \to H$ and $\tau : F \to H$, such that

$$f(\gamma) = \tau^* U_\gamma \lambda$$

holds for every $\gamma \in \Gamma$.

Setting $\varphi(\gamma) = \lambda^* U_\gamma \lambda$, $\psi(\gamma) = \tau^* U_\gamma \tau$, the converse follows.

This dilation-type result has a spectral corollary. Let Γ be a locally compact abelian topological group (LCA group from now on) and $\mathbf{T}$ the unit circle of the complex plane C ; the set $\hat{\Gamma}$ of the continuous homomorphisms from Γ to $\mathbf{T}$, with the usual multiplication of functions and the topology of the uniform convergence on compacts, is also a LCA group, called the dual group of Γ. It is known [53] that for any unitary representation $\{U_\gamma\}$ of Γ there exists a spectral measure P on $\hat{\Gamma}$ such that $U_\gamma = \int_{\hat{\Gamma}} t(\gamma)\, dP(t)$ holds for every $\gamma \in \Gamma$. Then :

(I.2) COROLLARY. If $f : \Gamma \longrightarrow \mathcal{L}(E,F)$ is a scattering function on a LCA group Γ there exist a spectral measure P on the dual group $\hat{\Gamma}$ and two bounded operators λ y τ such that

$$\langle f(\gamma)\, u, v\rangle = \int_{\hat{\Gamma}} t(\gamma)\, d\langle P(t)\, \lambda u, \tau v\rangle$$

holds for every $\gamma \in \Gamma$, $u \in E$, $v \in F$.

From this result it will follow easily that scalar valued scattering functions on a LCA group are the same thing as the Fourier transforms of the finite complex Radon measures on the dual group. Before proving in this way the result which may be called the Bochner-Eberlein-Horn theorem [44], we shall consider with the same ideas the theory of linear systems. This will help perhaps to understand the connection of that subject with scattering, pointed out by Helton [38].

In order to be brief, whenever we have a function $G : \Gamma \to \mathcal{L}(E_1 \oplus E_2)$, since it is obviously given by a 2×2 matrix

$$\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}$$

where G_{jk} goes from Γ to $\mathcal{L}(E_j \oplus E_k)$, $j,k = 1,2$, we shall say that $G = (G_{jk})$ is a matricial Toeplitz kernel.

In this chapter we have studied the relation between matricial Toeplitz kernels and scattering functions.

II - LINEAR SYSTEMS

We start this chapter with a brief description of the subject based on P. A. Fuhrmann's book, "Linear systems and operators in Hilbert space " [34], although we shall change slightly its notation.

A time invariant <u>linear system</u> is a set Σ consisting of three Hilbert spaces, E , X , F , and three linear operators, $A : X \to X$, $B : E \to X$, $C : X \to F$.

In the discrete interpretation, it is assumed that at "time" $n \in \mathbf{Z}$, the system is in the state $x(n) \in X$ and receives an input $u(n) \in E$, which cause an output $y(n) \in F$ and a change of state to $x(n+1)$ in the way indicated by the pair of dynamical equations

$$x(n+1) = A\ x(n) + B\ u(n)$$
$$y(n) = C\ x(n)$$

where all the operators are continuous. We shall say that A is the (state) propagator of the system.

The choice of Hilbert spaces can be justified in some cases by energy considerations. Assume that $\|x\|$ is the energy of Σ in the state x ; then, the energy of the system can only be increased from outside the "black box" X if and only if the state propagator is a contraction (i. e., $\|A\| \leq 1$).

A first question in systems theory is to establish the relation between inputs and outputs. Clearly, $x(1) = A\ x(0) + B\ u(0)$, $x(2) = A^2\ x(0) + AB\ u(0) + B\ u(1)$, ..., $x(n+1) = A^{n+1}\ x(0) + \sum_{j=0}^{n} A^j\ B\ u(n-j)$, so :

$$y(n+1) = C\ A^{n+1}\ x(0) + \sum_{j=0}^{n} C\ A^j\ B\ u(n-j).$$

Consequently the relation between inputs and outputs is given by the so-called <u>weighting pattern</u> or <u>impulse response</u> of Σ,

$$W(j) \stackrel{\text{def}}{=} C\ A^j B, \qquad j \geq 0.$$

The function $T(z) \stackrel{\text{def}}{=} z\ C(I - zA)^{-1}B$, analytic on the set of complex numbers z such that z^{-1} does not belong to the spectrum of A, is called the <u>transfer function</u> of the system. In a sufficiently small neighborhood of the origin it is given by

$$T(z) = \sum_{j=0} z^{j+1} C\ A^j B,$$

so it may be considered as the Fourier transform of the impulse response W. In fact, if $x(0) = 0$ with self explaining notation we could write

$$y = W * u \qquad , \qquad \hat{y} = T.\hat{u}.$$

A second question to be considered is the one of the controllability or reachability of the system. We say that Σ is <u>controllable</u> or <u>reachable</u> (approximately) if given any $x, x' \in X$, a convenient sequence of inputs changes the state of the system from x to one arbitrarily near to x'. We use the following usual notation : if $\{S_\lambda : \lambda \in \Delta\}$ is a family of subspaces of a Hilbert space X, $\bigvee_{\lambda \in \Delta} S_\lambda$ is the smallest closed subspace of X that contains every S_λ. It can easily be seen that X is controllable if and only if the following holds

$$X = \bigvee_{j \geq 0} A^j B E.$$

The question of the observability of the system is to know if its outputs characterize in some sense its internal state. More precisely, we say that Σ is <u>observable</u> if given any different $x', x'' \in X$ there exists a sequence of inputs such that the corresponding outputs with initial state x' or x'' are different. That is the case if and only if $CA^n x(0) = 0$ for every $n \geq 0$ implies $x(0) = 0$, so to say that Σ is observable means that

$$X = \bigvee_{j \geq 0} A^{*j} C^* F.$$

Consequently, the fundamental elements for the study of a system are the operators

$$R(j) \overset{\mathrm{def}}{=} A^j B \quad , \quad W(j) \overset{\mathrm{def}}{=} CA^j B \quad , \quad O(j) \overset{\mathrm{def}}{=} A^{*j} C^j, \quad j \geq 0.$$

Given a system $\Sigma = \{E, X, F \,;\, A, B, C\}$ it is sometimes useful to consider its dual system $\Sigma^* \overset{\mathrm{def}}{=} \{F, X, E \,;\, A^*, C^*, B^*\}$. The preceding considerations lead, with self-explaining notation, to the following

(II.1) REMARK. If the systems Σ and Σ' are such that $R = R'$, $W = W'$ and $O = O'$ hold, there outputs are equal whenever inputs and initial states are equal, and the same happens to the dual systems Σ^* and $\Sigma^{*\prime}$. In this case we say that the systems have the same behavior.

Note that systems with different propagators may have the same behaviour ; concerning this, what really matters are the reachability sequence R, the weighting pattern W and the observability sequence O.

We shall now consider the so-called <u>system's realization problem</u>. Let T be a function, analytic in a neighborhood of the origin in the complex plane and whose values are bounded operators from a Hilbert space to another one ; a realization of T is a system Σ such that T is the transfer function of Σ. The problem is to characterize the functions that have such realizations. Clearly T has that property if and only there exists a positive number ρ such that $T_\rho(z) \overset{\text{def}}{=} T(\rho z)$ has a realization with a contractive propagator, so we restrict our attention to this case.

Our starting point is the following : given a system $\Sigma = \{E,X,F ; A,B,C\}$, with $\|A\| \leq 1$, we associate with it a matricial Toeplitz kernel defined on $\mathbf{Z}$ by

$$G(n) = \begin{pmatrix} B^* A(n) B & CA(n)B \\ [C\,A(-n)B]^* & CA(n)C^* \end{pmatrix},$$

where the following notation is used : given $S \in \mathcal{L}(H)$, set $S(n) = \begin{cases} S^n & \text{if } n \geq 0 \\ S^{*-n} & \text{if } n \leq 0 \end{cases}$

Now, it can be proved [11] that G is positive definite so $f(n) = CA(n)B$ defines a scattering function on Z. Consequently,

$$W : \mathbf{Z}_1 \overset{\text{def}}{=} \{n \in \mathbf{Z} : n \geq 0\} \longrightarrow \mathcal{L}(E,F)$$

is the weighting pattern of a system with a contractive propagator only if it is the restriction to the semigroup $\mathbf{Z}_1$ of a scattering function on the group $\mathbf{Z}$.

In other words, setting

$$\varphi(n) = \begin{cases} R^*(0)\,R(n) & \text{if } n\geq 0 \\ R^*(-n)\,R(0) & \text{if } n\leq 0 \end{cases} \quad \text{and} \quad \psi(n) = \begin{cases} O^*(0)\,O(n) & \text{if } n\geq 0 \\ O^*(-n)\,O(0) & \text{if } n\leq 0 \end{cases}$$

we obtain by means of the fundamental sequences the following necessary condition : there exist two functions on $\mathbb{Z}$, φ and ψ, such that W must satisfy

$$(\#) \quad \sum_{i,j=0}^{n} \left\{ \langle \varphi(i-j)\, u_i, u_j \rangle_E + \langle \psi(i-j) v_i, v_j \rangle_F \right\} \geq 2 \left| \sum_{i,j=0}^{n} \langle W(i+j) u_i, v_j \rangle_F \right| ,$$

for every $n = 1, 2, \ldots,$ $\{(u_o, v_o), \ldots, (u_n, v_n)\} \subset E \times F$.

Thus, the realization problem suggests the consideration of matrices of operator-valued functions

$$\begin{pmatrix} \varphi & W \\ \widetilde{W} & \psi \end{pmatrix}$$

where φ and ψ are defined in a group Γ, W in a semigroup $\Gamma_1 \subset \Gamma$ and $\widetilde{W}$ is the function defined in $\Gamma^{-1} \overset{\text{def}}{=} \{\gamma \in \Gamma : \gamma^{-1} \in \Gamma\}$ by $\widetilde{W}(\gamma) = W(\gamma^{-1})^*$. So, with terminology we shall try to motivate better further on, we call <u>Generalized Toeplitz Kernel</u> (GTK to be brief) on (Γ, Γ_1) any matrix

$$K = (K_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta=1}^{2}$$

of functions such that

$$K_{11} : \Gamma \longrightarrow \mathcal{L}(H_1) \quad , \quad K_{12} : \Gamma_1 \longrightarrow \mathcal{L}(H_1, H_2)$$

$$K_{21} = \widetilde{K}_{12} \quad , \quad K_{22} : \Gamma \longrightarrow \mathcal{L}(H_2) \quad ,$$

where H_1 , H_2 are Hilbert spaces. We say that K is positive definite (p. d.) if

$$\sum_{\alpha,\beta=1,2} \; \sum_{s,t\in\Gamma} \langle K_{\alpha\beta}(t^{-1}s) h_\alpha(s), h_\beta(t) \rangle_{H_\beta} \geq 0$$

holds for any pair of functions with finite support $h_1 : \Gamma_1 \longrightarrow H_1$, $h_2 : \Gamma_1^{-1} \rightarrow H_2$.

An example of p. d. GTK can be obtained by restricting in the obvious way any p. d. matricial Toeplitz kernel on Γ, $G = (G_{\alpha\beta})^{2}_{\alpha,\beta=1}$: set $K_{11} \equiv G_{11}$, $K_{12} = G_{12}\big|_{\Gamma_1}$, $K_{22} \equiv G_{22}$, etc.

With this terminology our previous remark can be reformulated as follows : a function W defined on $\mathbf{Z}_1$ is the weighting pattern of a system with contractive propagator only if there exist φ and ψ such that a p. d. GTK on $(\mathbf{Z},\mathbf{Z}_1)$ is given by

$$\begin{pmatrix} \varphi & W \\ \widetilde{W} & \psi \end{pmatrix}.$$

Now, Naimark's dilation theorem can be extended to Generalized Toeplitz Kernels on the set of integers in the following way [16] : if K is a p. d. GTK on $(\mathbf{Z},\mathbf{Z}_1)$ there exist a unitary operator in a Hilbert space, $U \in \mathcal{L}(F)$, and $\tau_\alpha \in \mathcal{L}(H_\alpha, F)$, $\alpha = 1, 2$, such that the following conditions holds :

i) $K_{\alpha\beta}(n) = \tau^*_\beta U^n \tau_\alpha$, for every n belonging to the domain of $K_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1,2$;

ii) $F = \left[\bigvee_{n \in Z} U^n(\tau_1 H_1)\right] \vee \left[\bigvee_{n \in Z} U^n(\tau_2 H_2)\right]$, (minimality condition).

When (i) and (ii) are satisfied we say that U, or (U,F), belongs to the family $\mathcal{U}(K)$ of the minimal unitary dilations of K.

From that result it follows easily that the previously established necessary condition is also sufficient.

(II.2) THEOREM [11]. The $\mathcal{L}(E,F)$-valued analytic function

$$T(z) = \sum_{n \geq 0} z^{n+1} W(n)$$

is the transfer function of a discrete linear system with contractive propagator if and only if there exist two sequences

$$\{\varphi(n) : n\in\mathbf{Z}\} \subset \mathcal{L}(E) \quad , \quad \{\psi(n) : n\in\mathbf{Z}\} \subset \mathcal{L}(F)$$

such that condition (#) is satisfied.

Since it may be thought that this result is of no practical value, let us remark that it gives a straightforward proof of the following necessary condition.

(II.3) THEOREM (Helton [38]). If $T(z) = \sum_{n\geq 0} z^{n+1} W(n)$ is bounded in the unit disk then T is the transfer function of a linear discrete system.

In fact, if M is a bound of $\|T(z)\|$ for $|z| < 1$, set $\varphi(0) = MI_E$, $\varphi(n) = 0$ if $n \neq 0$ and define ψ in the same way ; from (II.2) the result follows [11].

From Helton's theorem the following general characterization steems immediately, as Fuhrmann shows it.

(II.4) THEOREM [34]. A sequence $\{W(n) : n\geq 0\} \subset \mathcal{L}(E,E)$ is the weighting pattern of a discrete linear system if and only if there exist two positive numbers M and ω such that

$$\|W(n)\| \leq M\omega^n$$

holds for every $n \geq 0$.

The condition is clearly necessary : $W(n) = CA^nB$ implies $\|W(n)\| \leq \|C\| \, \|B\| \, \|A\|^n$. Conversely, take $\rho < \omega^{-1}$ and set $T(z) = \sum_{n\geq 0} W(n)\, z^{n+1}$; then

$$\|T_\rho(z)\| = \Big\| \sum_{n\geq 0} W(n)\rho^{n+1} z^{n+1} \Big\| \leq M\rho(1-\rho\omega)^{-1}$$

holds if $|z| \leq 1$.

Let us still remark that theorem (II.2) is a true complement to (II.3) in the sense that the condition of the last one is not necessary. This can be clearly seen in the scalar case, that is, when $E = F = \{\text{ccmplex numbers}\}$; then the condition is $T \in H^{\infty}(\mathbf{T})$ while - as we shall show in the next chapter - W satisfies (#) if and only if $W = \hat{\mu}|_{\mathbf{Z}_1}$ for some μ, complex Radon measure on T.

A second part of the realization problem is to determine whether the transfer function characterizes the system, that is, if the problem has in some sense only one solution. For the finite dimensional case this question has the following answer : Let $\Sigma = \{E,X,F \; ; \; A,B,C\}$ and $\Sigma_1 = \{E,X_1,F \; ; \; A_1,B_1,C_1\}$ be two realizations of the same function ; assume that all the vector spaces have finite dimension and that both systems are controllable and observable (in which case they are called canonical). Then there exists an isomorphism $P : X \to X_1$ such that the following diagram commutes

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[r, "A"] \arrow[dd, "P"] & X \arrow[dd, "P"'] \arrow[dr, "C"] & \\
E \arrow[ur, "B"] \arrow[dr, "B_1"'] & & & F \\
& X_1 \arrow[r, "A_1"] & X_1 \arrow[ur, "C_1"'] &
\end{tikzcd}$$

This result is called the state space isomorphism theorem (See [34]). Its extension to infinite dimension has been established by Helton in the following terms.

(II.5) THEOREM [38]. Let Σ and Σ_1 be two approximately controllable and observable realizations of the same transfer function. Then there exists an (eventually unbounded) operator M with domain dense in X and range dense in X_1 such that each of the equalities

$$MA = A'M \quad , \quad MB = B' \quad , \quad C'M = C$$

holds in a dense set.

The proof of this theorem can be adapted in such a way as to consider two Lax-Phillips couplings with the same scattering function ([11], theorem E).

Helton's result says that in a certain sense the realization problem has a unique solution in the set of canonical systems. This can be considered satisfactory since it can be shown [38] that given any system Σ, there exists a canonical system Σ' with the same transfer function. Now, Σ' will not necessarily have the same behaviour as Σ ; for example, the outputs effectively produced may be less. For this reason we shall try another approach : instead of considering equivalent two systems when they have the same transfer function (which as noted implies that in each equivalence class there is an essentially unique canonical element) we shall consider a more refined classification such that two systems belonging to the same class will have the same behaviour. Then a relation between realizations and scattering functions may be obtained.

We have already noted that if

$$\Sigma = \{E, X, F \; ; \; A, B, C\}$$

has a contractive propagator then $f(n) = CA(n)B$ defines a scattering function on Z related to the discret system Σ. Nagy's dilation theorem (in a next chapter we shall recall its relation with our key tool, Naimark's theorem) says that there exists a unitary operator U in a Hilbert space H which contains X such that

$$A(n) = P^H_X \, U^n \, i^H_X$$

holds for every $n \in \mathbb{Z}$, where i^H_X is the inclusion of X in H and P^H_X the orthogonal projection of H onto X.

Let Σ_u be the system with a unitary propagator given by

$$\Sigma_u \overset{\text{def}}{=} \{E, H, F \; ; \; U, (i^H_X B), (C P^H_X)\} .$$

Then :

i) Σ and Σ_u have the same scattering functions.

ii) Given an initial state $x(0) \in X \subset H$ and an input sequence $\{u(j) : j \geq 0\}$, both systems produce the same outputs : with self-explaining notation we have

$$y(n+1) = CA^{n+1}\, x(0) + \sum_{j=0}^{n} CA^{j}B\, u(n-j) =$$

$$= (C\, P_X^H)\, U^{n+1}x(0) + \sum_{j=0}^{n} (C P_X^H)\, U^n(i_X^H B)\, u(n-j) = y_u(n+1).$$

iii) The preceding properties are still true when Σ and Σ_u are replaced by their duals.

Given any system Σ, it is said that $X_r \overset{\text{def}}{=} \bigvee_{j\geq 0} A^j BE$ is the reachable space of Σ and that $X_o \overset{\text{def}}{=} \bigvee_{j\geq 0} A^{*j}\, C^*F$ is its observable space ; definitions naturally motivated by the characterizations of reachable and observable systems. We also say that a state of Σ is reachable if it belongs to X_r and observable if it belongs to X_o.

Let us now consider a system with unitary propagator

$$\Sigma_u = \{E, X, F \ ; \ U, B, C\}$$

and its reachable and observable spaces, X_r and X_o ; set $X_1 \overset{\text{def}}{=} \bigvee_{j\in \mathbf{Z}} U^j(X_r + X_o)$, $U_1 \overset{\text{def}}{=} U|_{X_1}$. U_1 is a unitary operator in the space X_1 that contains $B(E)$ and $C^*(F)$. Let Σ_{mu} be defined by

$$\Sigma_{mu} = \{E\ ,\ X_1\ ,\ F\ ;\ U_1, (P_{X_1}^X B), (C\, i_{X_1}^X)\}\ .$$

Given $x(0) \in X$ set $x'(0) = P_{X_1}^X\, x(0) \in X_1$; then $C\, U^n x(0) = (C\, i_{X_1}^X)\, U_1^n\, x'(0)$ holds for every $n \geq 0$.

The preceding remarks establish the following

(II.6) PROPOSITION. If Σ is a system with contractive propagator there exists another system Σ_{mu} with the following properties

a) Σ and Σ_{mu} have the same transfer function and, moreover, the same scattering function.

b) Given any output sequence produced by Σ, it can also be produced by Σ_{mu} as an answer to the same input sequence.

c) Properties a) and b) are still valid when Σ and Σ_{mu} are replaced by their duals.

d) Σ_{mu} has a unitary propagator.

e) The state space of Σ_{mu} is generated by its reachable states and its observable states.

Any system with properties d) and e) will be called a minimal unitary system. Any transfer function has a realization

$\Sigma' = \{E,X,F\ ;\ \omega A,B,C\}$ with $\omega > 0$ and

$\Sigma = \{E,X,F\ ;\ A,B,C\}$ minimal unitary, so from now on we shall only consider realizations of this last type. In this case the remark we made at the beginning of this chapter can be strenghened. In order to do so let us say that the operators

$$R^*(0)\,R(n) \equiv B^*A^nB \quad , \quad W(n) \equiv C\,A^nB \quad , \quad O^*(0)O(n) \equiv CA^{*n}C \quad , \quad n\geq 0,$$

are the parameters of any given system, thus extending the denomination of Markov parameters usually given to the operators $W(n)$ and related to moment problems as we shall recall in the next chapter.

Let $\Sigma^{(\alpha)} = \{E,X^{(\alpha)},F\ ;\ A_\alpha,B_\alpha,C_\alpha\}$, $\alpha = 1,2$, be two minimal unitary systems with the same parameters. We consider the transformation from $X_o^{(1)} \equiv \bigvee_{n\geq 0} A_1^{*n}C_1^* F$ to $X_o^{(2)} \equiv \bigvee_{n\geq 0} A_2^{*n}C_2^*F$ given by

$$M(A_1^{*n}C_1^*f) \overset{\text{def}}{=} A_2^{*n}\,C_2^*\,f \qquad (f\in F)\ ;$$

the definition is correct and it determines an isometry from $X_o^{(1)}$ onto $X_o^{(2)}$ because for any $f,f'\in F$ we have $\langle A_1^{*n}C_1^*f \, , A_1^{*n'}C_1^*f'\rangle =$
$\langle \left[C_1A_1^{n-n'}C_1^*\right]^*f,f'\rangle = \langle A_2^{*n}C_2^*f \, , A_2^{*n'}C_2^*f'\rangle .$

Given any output sequence of $\Sigma^{(1)}$,

$$y(n+1) = C_1A_1^{n+1}x + \sum_{j=0}^{n} C_1A_1^jB_1u(n-j) \, ,$$

setting $x' = MP^{X^{(1)}}_{X_o^{(1)}}x$ we get

$$y(n+1) = C_2A_2^{n+1}x' + \sum_{j=0}^{n} C_2A_2^jB_2\, u(n-j).$$

A dual argument completes the proof of the following

(II.7) PROPOSITION. If two minimal unitary systems have the same parameters, any output sequence of one of them can be produced by the other as an answer to the same input sequence.

So it seems reasonable to consider the family $\mathfrak{F}$ of all the minimal unitary systems with the same given parameters. Now, for such a system its parameters give rise to a p. d. GTK $K = (K_{\alpha\beta})^2_{\alpha,\beta=1}$ defined by

$$K_{11}(.) = B^*A(.)B \quad , \quad K_{12} = W(.) \quad , \quad K_{21} = \widetilde{W}(.) \quad , \quad K_{22}(.) = C^*A(.)C \quad ,$$

so we write $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(K)$. Conversely, if K is a given p. d. GTK, any minimal unitary dilation of K defines a system with parameters

$$\left\{K_{11}(n) \, , \, K_{12}(n) \, , \, K_{22}(n) : n \geq 0\right\} \quad ;$$

in fact, if U is a unitary operator in $X = \bigvee_{n\in\mathbb{Z}} U^n(\tau_1E + \tau_2F)$ such that $K_{\alpha\beta}(.) = \tau_\beta^* U(.)\tau_\alpha$, $\alpha,\beta = 1,2$, holds with $\tau_1\in\mathcal{L}(E,X)$, $\tau_2\in\mathcal{L}(F,X)$, then $\left\{E,X,F \, ; \, U,\tau_1,\tau_2^*\right\}$ belongs to $\mathfrak{F}(K)$.

This interpretation allows us to translate to systems language some properties of generalized Toeplitz kernels. Thus :

(i) The characterization of those kernels K such that the family $\mathcal{U}(K)$ of all minimal unitary dilations of K has essentially only one element ([16], [10]) will say when the parameters determine the associated minimal unitary system.

(ii) The description of all the systems belonging to $\mathfrak{F}(K)$ reduces to that of $\mathcal{U}(K)$; in the scalar case this has been done [8] as an extension of the celebrated parametrization of Adamjan, Arov and Krein ([2], [3], [4]) of the analytic uniform approximations to a given bounded function. Their work on the subject was motivated by questions concerning scattering and, in turn, it inspired a description of contractive intertwining dilations (a subject we shall also consider further on), due to Arsene, Ceausescu and Foias ([21], [22]), which has been applied to inverse scattering problems [33]. So perhaps a unified view of some important results could be obtained by extending the parametrization of $\mathcal{U}(K)$ from the scalar case to the operator valued one.

(iii) From the correspondence between the elements of $\mathcal{U}(K)$ and the p. d. matricial Toeplitz kernels which give K by restriction [10] we obtain the result we now state as a conclusion to the consideration of discrete systems.

(II.8) PROPOSITION. Let $\Sigma = \{E, X, F \ ; A, B, C\}$ and $\Sigma_1 = \{E, X_1, F \ ; A_1, B_1, C_1\}$ be two realizations of the same transfer function ; assume that they are minimal unitary systems with the same parameters. Then there exists a unitary isomorphism $P : X \to X_1$ such that the following diagram commutes

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r, "A"] \arrow[dd, "P"] & X \arrow[dd, "P"'] \arrow[dr, "C"] & \\
E \arrow[ur, "B"] \arrow[dr, "B_1"'] & & & F \\
 & X \arrow[r, "A"] & X_1 \arrow[ur, "C_1"'] &
\end{tikzcd}$$

if and only if Σ and Σ_1 have the same scattering function.

In the continuous interpretation the system

$$\Sigma = \{E, X, F\ ;\ A, B, C\}$$

is taken to represent the equations

$$\dot{x}(t) = A\ x(t) + B\ u(t)$$
$$y(t) = C\ x(t)$$

where t belongs to the set R of real numbers, $x(t) \in X$, $u(t) \in E$ and $y(t) \in F$.

Applying formally the variation of parameters formula we get

$$x(t) = e^{tA}\ x(0) + \int_0^t e^{(t-v)A}\ B\ u(v)dv$$
$$y(t) = C\ e^{tA}\ x(0) + \int_0^t C\ e^{(t-v)A}\ Bu(v)\ dv.$$

If it is assumed that A is the infinitesimal generator of a strongly continuous semigroup, the second pair of equations is the same as a weak interpretation of the first. So we take Σ to be governed by

$$x(t) = T(t)\ x(0) + \int_0^t T(t-v)\ B\ u(v)\ dv$$
$$y(t) = C\ T(t)\ x(0) + \int_0^t C\ T(t-v)B\ u(v)\ dv,$$

where $T(t) \in \mathcal{L}(X)$ for every $t \in R_1 \overset{\text{def}}{=} \{t \in R : t \geq 0\}$ and the following hold :

$T_s T_t = T_{s+t}$, $\forall\ s, t \in R_1$; $T(0) = I$; $\lim_{t \to 0^+} T(t)\ x = x$, $\forall x \in X$.

Since the analogy with the discrete case is obvious we shall be brief. $\{T(t) : t \in R_1\}$ is the state propagator of the system and

$$W(t) \overset{\text{def}}{=} C\ T(t)\ B$$

its weighting pattern. Under adequate assumptions the Fourier transform $\hat{W}$ of W exists ; it is called the transfer function of the system and satisfies $\hat{y} = \hat{W}.\hat{u}$.

When B and C are bounded it is said that Σ is a regular realization of W. It can be shown that the necessary and sufficient condition for W to have a regular realization with contractive propagator (i. e., $\|T(t)\| \leq 1$, $\forall\ t \geq 0$) is analogous to the one stated in the discrete case. A proof can be given in the way we now sketch.

(i) Starting with Nagy's dilation theorem, Nagy and Foias have developped a functional calculus for contractions which includes explicit formulas relating a continuous semigroup $\{T(t) : t\in R_1\}$ with generator A to the discrete semigroup $\{T^n : n\in Z_1\}$ where $T = (A+I)(A-I)^{-1}$. [60]

(ii) The validity of Naimark's dilation theorem for positive definite generalized Toeplitz kernels on (R,R_1) can be deduced from the discrete case by means of the above mentioned functional calculus. [12]

(iii) Then, the realization condition can be proved as for discrete systems.

Summing up : we have seen in this chapter that there is a close connection between generalized Toeplitz kernels and transfer functions.

III - FOURIER TRANSFORMS OF MEASURES

Our aim in the first part of this chapter is to show that the set of scalar-valued scattering functions

$$f : \Gamma \longrightarrow C = \{\text{complex numbers}\}$$

on a LCA group Γ is exactly the same thing as the set $M(\hat{\Gamma})$ of Fourier transforms of bounded complex regular measures on the dual group $\hat{\Gamma}$. We saw this as we read a paper of R. A. Horn [44], so it seems adequate to expose here his approach and to show how his main result steems from what was done in chapter I of this work.

Let us first fix the notation and recall some fundamental theorems. We write $d\gamma$ and dt for the Haar measure on Γ and $\hat{\Gamma}$, respectively, and denote by $t(\gamma) \equiv (\gamma, t)$ the action of a character t (i. e., an element of $\hat{\Gamma}$) on $\gamma \in \Gamma$. The Fourier transform $\hat{\mu}$ of $\mu \in M(\hat{\Gamma})$ is given by

$$\hat{\mu}(\gamma) = \int_{\hat{\Gamma}} (\gamma, t)\, d\mu(t).$$

Set :

$$B(\Gamma) = \left\{\hat{\mu} : \mu \in M(\hat{\Gamma})\right\} \quad ; \quad P(\Gamma) = \left\{\hat{\mu} : \mu \in M(\hat{\Gamma}), \mu \geq 0\right\} \quad ;$$

$$A_p(\Gamma) = \left\{\hat{\mu} : d\mu = F\, dt\ ,\ f \in L_1(\hat{\Gamma}, dt) \cap L_p(\hat{\Gamma}, dt)\right\}, \quad 1 \leq p \leq \infty .$$

We denote additively the group operations in Γ and $\hat{\Gamma}$. A function $f : \Gamma \to C$ is positive definite if

$$\text{(III.1)} \qquad \sum_{i,j=1}^{n} f(\gamma_i - \gamma_j)\, c_i \bar{c}_j \geq 0$$

holds for all $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$, $c_1, \ldots, c_n \in C$, $n = 1, 2, \ldots$ We now quote Horn :

"Bochner's classical characterization of $P(\Gamma)$ is that it is precisely the set of continuous positive definite functions on Γ. Bochner's characterization of $B(\Gamma)$ is of a very different nature however. It does not use the elegant inequalities (III.1) and it does not identify the elements of $P(\Gamma) \cap B(\Gamma)$. Although (III.1) implies that f is continuous on Γ if it is continuous at 0, the usual characterization of $B(\Gamma)$ requires the a priori assumption of continuity everywhere on Γ.

It is the purpose of this note to present simple and similar characterizations of $A_p(\Gamma)$, $B(\Gamma)$ and $P(\Gamma)$ which are in the spirit of the inequalities (III.1)." [44]

However, Horn's proof rests on a characterization (Bochner-Eberlein theorem, to be quoted in the next paragraph) which he considers of a very different nature than (III.1). On the contrary, the proof to be presented here is precisely in the spirit of those inequalities since it is based on Naimark's theorem for positive definite functions. As it is well known, from this theorem the characterization of $P(\Gamma)$ may be deduced ; what we do is nothing but a simple extension of that method.

Let us now recall the classic results.

THEOREM (Herglotz-Bochner-Weil). A complex function on Γ belongs to $P(\Gamma)$ if and only if it is positive definite and continuous at 0.

THEOREM (Bochner-Eberlein). A complex function f on Γ belongs to $B(\Gamma)$ if and only if it is continuous on Γ and there exists a constant k such that

$$\left|\sum_{i=1}^{n} c_i f(\gamma_i)\right| \leq k \sup\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} c_i(\gamma_i,t)\right| : t\in\hat{\Gamma}\right\}$$

holds for all $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$, $c_1, \ldots c_n \in C$, $n = 1, 2\ldots$

A proof of the later statement can be seen in Rudin's book [56] while the one of the former is included in what follows.

If f and φ are complex functions on Γ, Horn writes

(III.2) $$\varphi(x-y) \succ f(x+y) \quad \text{on} \quad \Gamma$$

whenever $\sum_{i,j=1}^{n} \varphi(\gamma_i-\gamma_j)\, c_i \bar{c}_j \geq \left|\sum_{i,j=1}^{n} f(\gamma_i + \gamma_j)\, c_i c_j\right|$ holds for all $\gamma_1,\ldots \gamma_n \in T$, $c_1,\ldots c_n \in C$, $n = 1, 2\ldots$ His main result is the following.

(III.3) THEOREM. Let f be a complex valued function on the locally compact Abelian group Γ. Then :

(a) $f\in P(\Gamma)$ if and only if f is continuous at 0 and $f(x-y) \succ f(x+y)$ on Γ,

(b) $f\in B(\Gamma)$ if and only if f is continuous at 0 and $\varphi(x-y) \succ f(x+y)$ on Γ for some φ which is continuous at zero, and

(c) $f\in A_p(\Gamma)$ if and only if f is continuous at 0 and $\varphi(x-y) \succ f(x+y)$

on Γ for some $\varphi \in A_p(\Gamma)$, $1 \leq p \leq \infty$.

We shall now prove this theorem, and in fact a little more, because it is not necessary to assume the continuity of f at 0 in (III.3.b) and (III.3.c). Its relation with the subject of our chapter I can be seen by noting that every scalar valued scattering function on Γ belongs to $B(\Gamma)$, as it steems immediately from (I.2). So for the time being we admit that

(III.4) LEMMA. Condition (III.2) holds with φ continuous at 0 if and only if f is a (scalar valued) scattering function with respect to φ and $\psi \equiv \varphi$.

Let f belong to $B(\Gamma)$. There exists $\mu \in M(\hat{\Gamma})$ such that $f = \hat{\mu}$. Set $\eta = |\mu|$; if $\mu \geq 0$, it will be $\eta = \mu$ and, if $d\mu = F\,dt$, then $d\eta = |F|\,dt$. Then [44], setting $\varphi = \hat{\eta}$, one has $\sum_{i,j=1}^{n} \varphi(\gamma_i - \gamma_j)\, c_i \bar{c}_j = \int_{\hat{\Gamma}} \left| \sum_{i=1}^{n} c_i(\gamma_i, t) \right|^2 d\eta(t) \geq \left| \int_{\hat{\Gamma}} \left[\sum_{i=1}^{n} c_i(\gamma_i, t) \right]^2 d\mu(t) \right| = \left| \sum_{i,j=1}^{n} f(\gamma_i + \gamma_j)\, c_i\, c_j \right|$. All left to right implications in (III.3) are proved.

Conversely, let $\varphi(x-y) \succ f(x+y)$ on Γ and φ be continuous at 0. The lemma implies that

$$\begin{pmatrix} \varphi & f \\ \tilde{f} & \varphi \end{pmatrix}$$

is a positive definite matricial Toeplitz kernel, so there exists a continuous unitary representation $U = \{U_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ of Γ on H and two bounded operators, λ and τ, from C to H such that

$$\varphi(\gamma) = \lambda^* U_\gamma \lambda = \tau^* U_\gamma \tau \quad , \quad f(\gamma) = \tau^* U_\gamma \lambda$$

hold for all $\gamma \in \Gamma$. Let E be the spectral measure of U and set

$$\mu(.) \stackrel{\text{def}}{=} \langle E(.)\lambda(1), \tau(1) \rangle .$$

Then $f(\gamma) \equiv \langle f(\gamma)1, 1\rangle = \langle U_\gamma \lambda(1), \tau(1)\rangle = \hat{\mu}(\gamma)$ holds, so $f \in B(\Gamma)$. Setting

$$\eta(.) \overset{\text{def}}{=} \langle E(.)\,\lambda(1)\,,\,\lambda(1)\rangle$$

it follows that $\varphi = \hat{\eta}$ and $\eta \geq 0$; thus, if $\varphi = f$, $f \in P(\Gamma)$. Since $\eta(.) = \langle E(.)\,\tau(1)\,,\,\tau(1)\rangle$ it must be $\eta \geq |\mu|$; if $d\eta = F\,dt$ with $F \in L_1(\hat{\Gamma}) \cap L_p(\hat{\Gamma})$, clearly $f \in A_p(\Gamma)$. The proof of (III.3) is over.

Let us go back to the lemma. If $\varphi(x-y) \succ f(x+y)$ on Γ it follows that

$$\begin{aligned} 4\Big|\sum_{i,j=1}^{n} c_i d_j\, f(x_i + x_j)\Big| &= \Big|\sum_{i,j=1}^{n} (c_i+\bar{d}_i)(c_j+\bar{d}_j)\, f(x_i+x_j) - \sum_{i,j=1}^{n} (c_i-\bar{d}_i)(c_j-\bar{d}_j)\, f(x_i+x_j)\Big| \\ &\leq \sum_{i,j=1}^{n} \Big[(c_i+\bar{d}_i)(\bar{c}_j+d_j) + (c_i - \bar{d}_i)(\bar{c}_j - d_j)\Big]\varphi(x_i-x_j) \quad , \end{aligned}$$

so we can prove that $\varphi(x-y) \succ f(x+y)$ is equivalent to

$$(\alpha_1) \qquad 2\Big|\sum_{i,j=1}^{n} f(x_i+x_j)\, c_i \bar{d}_j\Big| \leq \sum_{i,j=1}^{n} \Big[\varphi(x_i-x_j)\, c_i\bar{c}_j + \varphi(x_j-x_i) d_i\bar{d}_j\Big].$$

On the other hand, we say that a continuous f is scattering with respect to φ and $\psi \equiv \varphi$ when it satisfies

$$(\alpha_2) \qquad 2\Big|\sum_{i,j=1}^{n} f(x_i-x_j) c_i \bar{d}_j\Big| \leq \sum_{i,j=1}^{n} \varphi(x_i-x_j)(c_i\bar{c}_j + d_i\bar{d}_j).$$

Evidently (α_1) and (α_2) are consequences of

$$(\beta) \qquad 2\Big|\sum_{k,\ell=1}^{m} f(y_k + z_\ell)\, a_k \bar{b}_\ell\Big| \leq \sum_{k,\ell=1}^{m} \Big[\varphi(y_k-y_\ell)\, a_k\bar{a}_\ell + \varphi(z_\ell-z_k) b_k\bar{b}_\ell\Big].$$

Conversely, setting $n = 2m$

$$x_1 = y_1, \ \ldots, \ x_m = y_m \quad , \quad x_{m+1} = \pm z_1, \ \ldots, \ x_n = \pm z_m \quad ,$$

$$c_1 = a_1, \ \ldots, \ c_m = a_m \quad , \quad c_{m+1} = 0, \ \ldots, \ c_n = 0,$$

$$d_1 = 0, \ \ldots, \ d_m = 0 \quad , \quad d_{m+1} = b_1, \ \ldots, \ d_n = b_m \quad ,$$

(β) can be deduced from (α_1) or (α_2). Only the continuity remains to be considered. From (β), setting $m = 2$, $y_1 = -x$, $y_2 = 0$, $a_1 = -a_2 = 1$, $z_1 = y$, $b_1 = \varepsilon > 0$, $b_2 = 0$, we get

$$2\varepsilon \left| f(y-x) - f(y) \right| \leq 2 \left[\varphi(0) - \mathrm{Re}\,\varphi(x)\right] + \varepsilon^2 \varphi(0) ,$$

because φ p. d. implies $\mathrm{Re}\,\varphi(x) = \mathrm{Re}\,\varphi(-x)$, and then

$$2 \left| f(y-x) - f(y) \right| \leq \left[2 + \varphi(0)\right]\left[\varphi(0) - \mathrm{Re}\,\varphi(x)\right]^{\frac{1}{2}} ,$$

so the continuity of φ at 0 implies the uniform continuity of f.

Having thus finished the proof of the fact that scalar scattering functions and Fourier transforms of measures are the same thing, we may seek for a similar type interpretation of scalar-valued transfer.

Since $f : \mathbf{Z} \to C$ is a scattering function if and only the (trigonometric) moment problem for f has a solution, i. e., there exists $\mu \in M(\mathbf{T})$, $\mathbf{T} = \hat{\mathbf{Z}}$, such that $f = \hat{\mu}$, the following assertion is quite natural : $W : \{n \in \mathbf{Z} : n \geq 0\} \to C$ is the transfer function of a linear system with contractive propagator if and only if there exists $\mu \in M(\mathbf{T})$ such that

$$W(n) = \int_{\mathbf{T}} e^{int}\, d\mu(t)$$

holds for all $n \geq 0$, that is, if the so-called semi reduced moment problem for W has a solution. Moreover, let us consider the following version of a problem of Markov : let a positive measure η on $\mathbf{T}$ and a sequence $\{W(n) : n > 0\} \subset C$ be given ; can we find a complex measure $\mu \in M(\mathbf{T})$ such that $\hat{\mu}(n) = W(n)$, $\forall n > 0$, and $|\mu| \leq \eta$ hold ? The answer [14] is yes if and only if the GTK defined by

$$K_{11} = K_{22} = \hat{\eta} , \quad K_{12} = W$$

is positive definite.

This result motivates the association to each GTK of a family of matrices of measures. Remark that a scalar valued matricial Toeplitz $(G_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta=1}^{2}$ is p. d. if and only if it is given by the Fourier transform of a positive measure matrix ; that is, there exists a necessarily unique set $\{(\mu_{\alpha\beta}) : \alpha,\beta = 1,2\} \subset M(\mathbf{T})$ such that (i) $G_{\alpha\beta} = \hat{\mu}_{\alpha\beta}$, $\alpha,\beta = 1, 2$; (ii) the numerical matrix $(\mu_{\alpha\beta}(A))_{\alpha,\beta=1}^{2}$ is positive definite for every Borel set $A \subset \mathbf{T}$. In the same way, given a GTK on the integers, $K = (K_{\alpha\beta})$, we say that $(\mu_{\alpha\beta})$ is associated with by means of the Fourier transform and write

$$K \sim (\mu_{\alpha\beta})$$

if the following hold :

$$K_{11}(n) = \hat{\mu}_{11}(n), \quad \forall n \quad ; \quad K_{12}(n) = \hat{\mu}_{12}(n), \quad \forall n > 0 \ ;$$

$$K_{21}(n) = \hat{\mu}_{21}(n), \quad \forall n < 0 \ ; \quad K_{22}(n) = \hat{\mu}_{22}(n), \quad \forall n.$$

The following remarks are important for our subject :

a) If $(\mu_{\alpha\beta})$ is positive, K is a p. d. GTK, but the converse is not necessarily true. Nevertheless, since every p. d. GTK on the integers is the restriction of a p. d. matricial Toeplitz kernel, it always has an associated positive matrix.

b) The positive measure matrix associated to a generalized Toeplitz kernel by means of the Fourier transform need not be unique.

Let us see a particular case. Let g belong to $L^{\infty}(\mathbf{T})$ and r be its uniform distance to the analytic functions, that is, to $H^{\infty}(\mathbf{T}) = \{ \psi \in L^{\infty}(\mathbf{T}) : \hat{\psi}(n) = 0, \ \forall n < 0\}$. For each $\varepsilon > 0$ there exists $\psi_{\varepsilon} \in H^{\infty}(\mathbf{T})$ such that $\|f - \psi_{\varepsilon}\|_{\infty} < r + \varepsilon$; this means that the matrix

$$\begin{pmatrix} (r+\varepsilon)dt & (\bar{f} - \bar{\psi}_{\varepsilon})dt \\ (f-\psi_{\varepsilon})dt & (r+\varepsilon)\, dt \end{pmatrix}$$

is positive ; consequently the associated GTK $K^{(\varepsilon)}$, given by

$$K_{11}^{(\varepsilon)}(n) = K_{22}^{(\varepsilon)}(n) = \begin{cases} r+\varepsilon & \text{if} \quad n=0 \\ 0 & \text{if} \quad n \neq 0 \end{cases}, \quad K_{12}^{(\varepsilon)}(n) = (\bar{f} - \bar{\psi}_{\varepsilon})^{\wedge}(n) = \hat{\bar{f}}(n) \quad \text{for all } n>0,$$

is positive definite for every $\varepsilon > 0$; since it does not depend on ψ_{ε}, it follows that $K^{(0)}$ is p. d. too. Then, $\exists (\mu_{\alpha\beta}) \geq 0$ such that $K \sim (\mu_{\alpha\beta})^{\wedge}$; it follows that $d\mu_{21} = (f - \psi_0)dt$ with $\psi_0 \in H^{\infty}(\mathbf{T})$ and $\|f - \psi_0\|_{\infty} = \operatorname{dist}[f, H^{\infty}(\mathbf{T})]$. This example [13] connects GTK with the profound study of Adamjan, Arov and Krein on the best uniform analytic approximations bo bounded functions. Their main results - including the condition for the unicity of the best approximation, the description of canonical elements and the already mentioned parametrization - can be extended to the family of all positive measure matrices associated to a given p. d. GTK by means of Fourier transform. [7], [8]

We have already remarked that $K \sim (\mu_{\alpha\beta})^{\wedge}$ and K p.d. GTK are not enough to ensure the positivity of the matrix ; in that case it is said that $(\mu_{\alpha\beta})$ is weakly positive. For example, if $\mu \in M(\mathbf{T})$ is non trivial and $r \in (0,1)$, then

$$M_{\mu,r} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} r|\mu| & \mu \\ \bar{\mu} & r|\mu| \end{pmatrix}$$

is never positive but it can be weakly positive. The characterization of those μ such that this happens gives a unified proof of the following two important results.

<u>The Helson-Szegö theorem</u> [39]. The Hilbert transform is a bounded operator in $L^2(\mathbf{T},\mu)$ if and only if $d\mu = e^{u+\tilde{v}}dt$ holds with u, v real bounded functions, $\tilde{v}$ the conjugate function of v and $\|v\|_{\infty} < \frac{\pi}{2}$.

<u>The Devinatz-Widom theorem</u> [30], [61]. Let $f \in L^{\infty}(\mathbf{T})$. Then the Toeplitz operator with symbol f is invertible if and only if $f^{-1} \in L^{\infty}(\mathbf{T})$ and $f/|f| = e^{i(c+\tilde{u}+v)}$ holds with c a real number, u, v as in the Helson-Szegö theorem.

In fact, the proof of both theorems can be reduced to the consideration of measures μ such that $M_{\mu,r}$ is weakly positive and (first case) $\mu \geq 0$ or (second case) $d\mu = \frac{f}{|f|} dt$ [17].

As it is well known, the measures characterized by the Helson-Szegö theorem are precisely those that belong to Muckenhoupt's class A_2 (See [52], [45], [27]). As a matter of fact, it was the consideration of this subject that motivated the definition, in [28], of weakly positive measure matrices ; in that paper a characterization of the Fourier transform of those measures was given, starting in that way the study of what were later on called GTK.

Some other problems related to the Hilbert transform in the circle or in the line can be solved in this way. Thus in [15] some theorems of Koosis ([47], [48], [49]) are proved by relating to the problem under consideration a GTK, showing that a solution can be found if and only if the positive matrix associated to the kernel is not unique, and verifying that in this case the general (non) uniqueness condition reduces to those of Koosis. On the same subject, in [18] it is shown how a particular case of a result due to Carleson-Jones [25] and Rubio de Francia [55] can be proved.

The Poisson transform can also be considered under this approach [19], [13], thus connecting it with Carleson's measures, balayage and BMO functions (Definitions and basic results concerning these subjects can be seen in [35] or [58]).

The Helson-Szegö theorem solves a problem of the so-called prediction theory (concerning this see for example [31] or [54]). Our approach to its proof give some complements [6] and, moreover, other results of the same theory [19] which include the Helson-Sarason theorem [40], propositions due to Ibragimov and Rozanov [46] and some refinements.

To end this sort of review we note that Naimark's theorem for GTK solves weighted and moment problems for vector-valued measures too [16], while a Levy-Khinchine formula for GTK is stated in [20].

In this chapter, when speaking of a GTK, we assumed K_{12} to be defined on $\{n>0$ rather than on $\{n\geq 0\}$ as we did before. That implies no important changes, shortens the presentation of some applications and allows us to justify our terminology as follows. Let a kernel K on $\mathbb{Z}$ be given,

$$K : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow C.$$

K is called a Toeplitz kernel if it satisfies

$$K(m,n) = K(m+1\ ,\ n+1), \quad \forall\ m,n \in \mathbb{Z}.$$

Now K is given by four functions, K_{11} and K_{22} defined on Z, K_{12} on $\{n>0\}$ and K_{21} on $\{n<0\}$, by means of

$$K(m,n) = \begin{cases} K_{11}(m-n) & \text{if} \quad m,n \geq 0 \\ K_{12}(m-n) & \text{if} \quad m\geq 0,\ n<0 \\ K_{21}(m-n) & \text{if} \quad m<0,\ n\geq 0 \\ K_{22}(m-n) & \text{if} \quad m,n<0 \end{cases}$$

if and only if the following holds

$$K(m,n) = K(m+1\ ,\ n+1), \quad \forall\ m,n\in\mathbb{Z} \quad , \quad m,n \neq -1.$$

In that case we say that K is a generalized Toeplitz kernel.

In this chapter we have indicated the connection of (matricial and generalized) Toeplitz kernels with problems related to the Fourier transform of measures.

IV - DILATIONS OF OPERATORS TO KREIN SPACES

Let T be a bounded operator in a Hilbert space E. The operator U in a Hilbert space H is called a unitary dilation of T if U is unitary, H contains E as a closed subspace and it satisfies

$$\langle T^n v , w \rangle_E = \langle U^n v , w \rangle_H , \quad \forall\, v,w \in E, \quad n = 0, 1, \ldots$$

which is equivalent to

$$T^n = P_E^H \, U^n \, i_E^H , \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Obviously T has a unitary dilation only if $\|T\| \leq 1$ holds ; that this is also a sufficient condition is the content of Nagy's theorem, which can be deduced from Naimark's theorem as follows : setting as before $T(n) = T^n$ if $n \geq 0$ and $T(n) = T^{*-n}$ if $n \leq 0$ it can be proved that $T(.)$ is positive definite if (and only if) T is a contraction. [60]

Nagy's theorem is the starting point of so rich a theory ("Harmonic Analysis of Operators" in the sense of Nagy and Foias) that it has been natural to consider its extension to not necessarily contractive operators. Now, if one wishes to have

$$\langle Tv , w \rangle = \langle Uv , w \rangle , \quad \forall\, v,w \in E,$$

without being $\|T\| \leq 1$ but with U preserving scalar products, this can't imply $\|U\| \leq 1$, so one is forced to give up the positive definite property of the scalar product in the domain of U. With such a generalization, every operator in a Hilbert space admits a unitary dilation ; we shall state precisely this theorem, due to Davis [29], when we have introduced the necessary concepts.

Our aims in this chapter are the following :

(a) to show that such concepts - which are those related to Krein spaces and their operators - appear naturally when some properties of scattering functions related to Fourier transforms are considered ;

(b) to characterize the functions which have a particularly simple kind of unitary dilations to Krein spaces as scattering functions ;

(c) to relate that with some widely studied questions of operator theory ;

(d) to present what seems to be a reasonable extension of Naimark's dilation theorem to Krein spaces.

We start with the following

(IV) PROPOSITION. Let $f : \Gamma \to \mathcal{L}(E)$ be a scattering function. Then

$$f = g_1 - g_2 + i(g_3 - g_4)$$

holds with $g_j : \Gamma \to \mathcal{L}(E)$ positive definite and continuous in the weak operator topology, $j = 1, 2, 3, 4$.

Clearly, a proof of the Bochner-Eberlein-Horn theorem (III.3.b) by reducing it to Bochner's theorem (III.3.a) steems from this proposition. In order to prove it, we remark that from the definition of scattering function it follows that there exists a continuous $\theta : \Gamma \to \mathcal{L}(E)$ such that

$$\left| \sum_{i,j=1}^{n} \langle f(\gamma_j^{-1}\gamma_i)u_i, v_j\rangle_E \right|^2 \leq \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} \langle \theta(\gamma_j^{-1}\gamma_i)u_i, u_j\rangle_E \right\}\left\{ \sum_{i,j}^{n} \langle \theta(\gamma_j^{-1}\gamma_i)v_i, v_j\rangle_E \right\}$$

holds for all $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$, $u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n \in E$, $n = 1, 2\ldots$ Clearly $f_r(\gamma) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left[f(\gamma) + f^*(\gamma^{-1})\right]$ and $f_i(\gamma) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2i}\left[f(\gamma) + f^*(\gamma^{-1})\right]$ also satisfy such a relation so we may assume that f is hermitean, i. e., $f(\gamma) = f^*(\gamma^{-1})$.

Let $(H, [.,.])$ be the Hilbert space defined by the symbols $e_\gamma v$, $\gamma \in \Gamma$, $v \in E$, and the scalar product

$$\left[e_\gamma v, e_{\gamma'} v'\right] \overset{\text{def}}{=} \langle \theta(\gamma'^{-1}\gamma)v, v'\rangle_E \quad ;$$

setting

$$(e_\gamma v\ ,\ e_{\gamma'}v)\ \stackrel{\text{def}}{=}\ \langle f(\gamma'^{-1}\gamma)v,v'\rangle_E\ ,$$

we define a sesquilinear form $(.,.)$ on H with norm bounded by 1 ; then there exists $T\in\mathcal{L}(H)$ such that $\|T\|\leq 1$, $T=T^*$ and $(h,h')=[Th,h']$, $\forall\ h,h'\in H$, so

$$\langle f(\gamma'^{-1}\gamma)\,v,v'\rangle_E = [T(e_\gamma v),e_{\gamma'}v']$$

holds for all $\gamma,\gamma'\in\Gamma$, $v,v'\in E$.

Let $\{U_\gamma : \gamma\in\Gamma\}$ be the unitary representation of Γ on H given by $U_\gamma(e_{\gamma'}v)\ \stackrel{\text{def}}{=}\ e_{\gamma\gamma'}v$; every U_γ commutes with T, because $[TU_\gamma e_{\gamma'}v'\ ,\ e_{\gamma''}v'']$ $= \langle f(\gamma''^{-1}\gamma\gamma')\,v',v''\rangle_E = [T\,e_{\gamma'}v'\ ,\ U_{\gamma^{-1}}\,e_{\gamma''}v'']$. Thus T can be set as a difference $T=T_1-T_2$ of two bounded positive operators that commute also with all the U_γ. Let $g_j(\gamma,\gamma')$ be the bounded operator in E given by

$$\langle g_j(\gamma,\gamma')v,v'\rangle_E = [T_j e_\gamma v\ ,\ e_{\gamma'}v']\ ,\qquad j=1,\ 2.$$

Since $\langle g_j(\gamma\gamma'\ ,\ \gamma\gamma'')\,v,v'\rangle_E = [T_jU_\gamma e_{\gamma'}v\ ,\ U_\gamma e_{\gamma''}v'] = [T_j e_{\gamma'}v\ ,\ e_{\gamma''}v']$, we may set $g_j(\gamma,\gamma')\equiv g_j(\gamma'^{-1}\gamma)$. Since T_j is positive, g_j is positive definite. Clearly, $\langle f(\gamma)v,v'\rangle_E = [T_1e_\gamma v,v'] - [T_2e_\gamma v,v'] = \langle g_1(\gamma)v,v'\rangle_E$ - $\langle g_2(\gamma)v,v'\rangle_E$, so proposition (IV.1) is proved.

The association of a Hilbert space to a positive definite function is a classical method on which we based the above proof, which in turn leads to the analogous association of a Krein space to an hermitean scattering function. In order to see that we keep the notation and set $T_1=\frac{1}{2}(|T|+T)$, $T_2=\frac{1}{2}(|T|-T)$, where $|T|$ will always indicate the unique positive operator whose square equals T^*T $(=T^2$ in thus case, being T selfadjoint).

Let N be the kernel of T : $x\in N$ if and only if $(x,h)=0$ holds for every $h\in H$. Set $H'=H\ominus N$ (= orthogonal complement of N in H) ;

this subspace is invariant under the action of T, T_1 and T_2 ; we denote with T', etc., the corresponding restrictions. Then we have :

$$(h,h') = [T'h,h'], \quad \forall\, h,h' \in H' \;;$$

$$H' = H_1 \oplus H_2, \text{ with } H_1 \stackrel{\text{def}}{=} \overline{T_1(H')}, \; H_2 \stackrel{\text{def}}{=} \overline{T_2(H')} \;;$$

the form $(.,.)$ is positive definite if restricted to H_1 and negative definite if restricted to H_2. Let K_1 and K_2 be the Hilbert spaces obtained by completing H_1 and H_2 with respect to $(.,.)$ and $-(.,.)$, respectively. Let K be the algebraic direct sum of K_1 and K_2, and extend the form $(.,.)$ to K in the obvious way :

$$(k_1+k_2 \,,\, k_1'+k_2') \stackrel{\text{def}}{=} (k_1,k_1') + (k_2,k_2').$$

Let us summarize.

(IV.2) The vector space K and the sesquilinear form $(.,.)$ on K are such that there exist two subspaces K_1 and K_2 of K with the following properties :

i) K is the algebraic direct sum of K_1 and K_1 ;

ii) K_1 and K_2 are $(.,.)$-orthogonal, that is,

$$(k_1,k_2) = 0$$

holds for all $k_1 \in K_1$, $k_2 \in K_2$.

iii) $(K_1,(.,.))$ and $(K_2,-(.,.))$ are Hilbert spaces.

Now, precisely when the above conditions are satisfied, $(K,(.,.))$ is called a <u>Krein space</u> by J. Bognar [24], whose book is the standard reference on the subject.

If P_1 and P_2 are the projections associated to the decomposition of K as a direct sum of K_1 and K_2, then the operator

$$J \overset{\text{def}}{=} P_1 - P_2$$

is the fundamental symmetry associated to that decomposition ; clearly, $J^2 = I$. Setting $(x,y)_J \overset{\text{def}}{=} (Jx,y)$, the definition of a Krein space implies that $(K,(.,.)_J)$ is a Hilbert space and that in this space J is selfadjoint. Conversely, given a selfadjoint unitary operator J in a Hilbert space K and setting $(x,y) \overset{\text{def}}{=} \langle Jx,y\rangle_K$ it is clear that $(K,(.,.))$ is a Krein space.

Let us remark that, given a Krein space $(K,(.,.))$, its so-called fundamental decomposition (i.e., one with properties (IV.2)) is not in general unique, so neither is the associated symmetry J. Nevertheless, it can be shown that the topology given by $(.,.)_J$ depends only on K and $(.,.)$, so it is called the topology of the Krein space.

An isometry U on a Krein space is a linear operator in K such that $(Ux,Uy)=(x,y)$ holds for every x,y belonging to its domain. It needs not be continuous, but it has that property when its domain and its range are equal to K, in which case U is called a unitary operator in the Krein space.

We have fulfilled the first goal of this chapter - to introduce Krein spaces by means of properties related to the characterization of Fourier transforms of measures - and also stated the facts we need to do the same with the second one, i. e., to study unitary dilations to those spaces of scattering functions. In order to do so let us go back to the proof of proposition (IV.1), assuming also that the hermitean function f takes the value I, identity operator in E, on the neutral element γ_o of Γ.

We recall that the set of vectors $\left\{e_\gamma v : \gamma\in\Gamma , v\in E\right\}$ generates a dense subspace of the Hilbert space H, where we consider the orthogonal direct sum $H = H' \oplus N$, with N equal to the kernel of T. Let P' be the corresponding projection on H' ; since T commute with all the operators U_γ, H' is an invariant subspace of all of them and the following equalities hold :

$$U_{\gamma'} P'(e_\gamma v) = P' U_{\gamma'}(e_\gamma v) = P'(e_{\gamma'\gamma} v) ,$$

$$(e_\gamma v , e_{\gamma'} v') = (P'(e_\gamma v) , P'(e_{\gamma'} v')).$$

So in order to simplify the notation we may set $U_\gamma \equiv U_\gamma |_{H'}$, $e_\gamma v \equiv P'(e_\gamma v)$.

Clearly $H' = H_1 \oplus H_2$ is contained in the vector space K and is dense in $(K , (.,.)_J)$. So in the Krein space we are considering $\{e_\gamma v : \gamma \in \Gamma , v \in E\}$ generates a dense subspace and each U_γ is an isometry, since it is defined in H' and preserves the form $(.,.)$. Now, H_1 and H_2 are invariant under U_γ since it commutes with T_1 and T_2 ; then U_γ can be extended to a unitary operator in the Hilbert space $(K , (.,.)_J)$ that preserves the "scalar product" $(.,.)$. In other words, each U_γ can be considered as a unitary operator in the Krein space $(K , (.,.))$, with the following additional property : the restrictions of U_γ to K_1 and K_2 are unitary operators in the Hilbert spaces $(K_1 , (.,.))$ and $(K_2 , -(.,.))$, respectively. The last is the same as to say that U_γ commutes with J ; in that case U_γ is reduced by the associated fundamental decomposition and it is called fundamentally reducible. Let us still remark that $\gamma_\alpha \to \gamma_o$ in Γ implies $U_{\gamma_\alpha} h \longrightarrow U_{\gamma_o} h$ in H for every $h \in H$; in fact, since θ is p. d. and continuous we have that

$$[U_{\gamma_\alpha} v - U_{\gamma_o} v , U_{\gamma_\alpha} v - U_{\gamma_o} v] = 2\{[v,v] - \mathrm{Re}\,[U_{\gamma_\alpha} v,v]\} =$$

$2\,\mathrm{Re}\,\{\langle\theta(\gamma_o) v,v\rangle_E - \langle\theta(\gamma_\alpha)v,v\rangle_E\} \longrightarrow 0$ for every $v \in E$, so the above assertion follows.

Summing up we may say that $\{U_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ is a continuous fundamentally reducible group of unitary operators in the Krein space we are considering.

Let us see the relation of this space with the one we started with, E. From the identity

$$\langle v,v\rangle_E = \langle f(\gamma_o)v,v\rangle_E = (e_{\gamma_o} v, e_{\gamma_o} v)$$

it follows that the identification $v \equiv e_{\gamma_o} v$ allows us to consider E as a subspace of $(K,(.,.))$; moreover, from

$$\langle v,v\rangle_E = (P_1 v\ ,\ P_1 v) + (P_2 v\ ,\ P_2 v) \leq (v,v)_J$$

it follows that E is closed. We also have

$$(v,v)_J = [T_1 P_1 v\ ,\ P_1 v] + [T_2 P_2 v\ ,\ P_2 v] \leq \|T\|\,[v,v]$$

$$= \|T\|\,\langle \theta(\gamma_o)v,v\rangle_E \leq \|T\|\,\|\theta(\gamma_o)\|\,\langle v,v\rangle_E\ ,$$

so there exists a positive constant c such that

$$(v,v) \geq c(v,v)_J$$

holds for all $v \in E$. In this case it is said that E is uniformly positive which implies ([24] , theorem (V.5.2)) that it is orthocomplemented ; this meaning that K is equal to the direct sum of E and $\{k \in K : (v,k) = 0,\ \forall\ v \in E\}$, its $(.,.)$-orthogonal complement. Thus, there exists an orthogonal projection P of K on E. Clearly,

$$\langle f(\gamma)v,v'\rangle_E = (e_\gamma v,v') = (U_\gamma v,v') =$$

$$= (PU_\gamma v,v') = \langle PU_\gamma v,v'\rangle_E$$

holds for all $v,v' \in E$, so we have

$$f(\gamma) = PU_\gamma \big|_E , \qquad \forall\ \gamma \in \Gamma.$$

In this way we have nearly proved the result we now state.

(IV.3) THEOREM. Let Γ be a topological group, E a Hilbert space and f a function from Γ to the bounded operators in E. Then :

a) The following conditions (i) and (ii) are equivalent.

(i) f is an hermitean scattering function, equal to the identity operator of E on the neutral element of γ.

(ii) There exist a Krein space K that contains E as a closed, uniformly positive and thus orthocomplemented subspace, and a group $U = \{U_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ of unitary operators in K such that all of them are reduced by the same fundamental decomposition, the function $\gamma \longrightarrow U_\gamma k$ is continuous for every $k \in K$ and

$$f(\gamma)\, v = PU_\gamma v$$

holds for all $\gamma \in \Gamma$, $v \in E$, where $P : K \to E$ is the orthogonal projection.

b) K and U can be obtained in such a way as to have the additional property that $\{U_\gamma v : \gamma \in \Gamma\ ,\ v \in E\}$ generates a dense subspace of K.

c) K can be obtained to be a Hilbert space if and only if f is positive definite.

Let us quickly complete the proof.

If (ii) holds, every U_γ is unitary with respect to the Hilbert scalar product given by one and the same fundamental symmetry J. Setting $\varphi(\gamma) = PJU_\gamma$, it is easy to see that f satisfies (i).

Assertion c) stresses the fact that this proposition is nothing but an extension of Naimark's theorem. If K is a Hilbert space, $\gamma \to PU_\gamma \big|_E$ defines a p. d. function on Γ ; conversely, if f is p. d., it follows that $T_2 \equiv 0$ and so $K \equiv K_1$, etc.

As an example we shall apply the previous result to the dilation of a single operator on a Hilbert space. That means that we consider the following case

$$\Gamma = \mathbf{Z}, \quad f(n) \equiv T(n) = \begin{cases} T^n & \text{if } n \geq 0 \\ T^{*-n} & \text{if } n \leq 0 \end{cases}, \quad T \in \mathcal{L}(E).$$

A unitary dilation of T to a Krein space is a unitary operator U on a Krein space K that contains E as an orthocomplemented subspace and such that

$$T(n)v = PU^n v$$

holds for all $n \in \mathbf{Z}$ and $v \in E$, where P is the orthogonal projection of K onto E. If, moreover, $\{U^n v : n \in \mathbf{Z}, v \in E\}$ generates a dense subspace of K, the dilation is called minimal. We have the following.

THEOREM (Davis [29]). Every bounded operator on a Hilbert space has at leat one minimal unitary dilation to a Krein space.

We shall see some examples of operators that have fundamentally reducible minimal unitary dilations.

Let T be such that $\|T^n\| \leq cr^n$ holds for all positive n, where c and r are positive constants and $r < 1$. (That is, assume that the spectral radius of T is less than one). Set $S(0) = I$, $S(n) = 0$ if $n \neq 0$; the, for all $v_1, \dots, v_N \in E$, we have

$$\left| \sum_{m,n=0}^{N} \langle T(m-n)v_m, v_n \rangle \right| = \left| \sum_{k=-N}^{N} \sum_{n=0 \vee (-k)}^{n=(N-k) \wedge N} \langle T(k)\, v_{k+n}, v_n \rangle \right|$$

$$\leq c \sum_{k=-N}^{N} \sum_{n=0 \vee (-k)}^{n=(N-k) \wedge N} r^{|k|} \|v_{k+n}\| \|v_n\| \leq$$

$$\leq c \sum_{k=-N}^{N} r^{|k|} \sum_{n=0}^{N} \|v_n\|^2 \leq \frac{2c}{1-r} \sum_{m,n=0}^{N} \langle S(m-n)\, v_m, v_n \rangle ,$$

so $T(.)$ is a scattering function and from theorem (IV.3) it follows that T has the kind of dilation we said.

Now, J. A. Holbrook has proved [43] that any $T \in \mathcal{L}(E)$ such that its spectral radius is less than one belongs to a class $\mathcal{C}_\rho$ of Nagy and Foias for a sufficiently big number ρ. By definition, $T \in \mathcal{C}_\rho$ if there exists a unitary operator U in a Hilbert space H such that $H \supset E$ and $T^n = \rho P_E^H U^n i_E^H$ holds for all

$n \geq 1$. This suggests the following assertion : every operator T belonging a Nagy-Foias class $\mathcal{C}_\rho$ has a fundamentally reducible minimal unitary dilation (RUD from now on, in order to be brief). In fact set $T_\rho(n) = T(n)$ if $n \neq 0$ and $T_\rho(0) = \rho I$, and let $S(.)$ be as before ; then we have

$$T(.) = T_\rho(.) + (1-\rho)\, S(.)$$

so setting $\varphi = T_\rho(.) + |1-\rho|\, S(.)$ the assertion follows.

Thus $T \in \cup \{ \mathcal{C}_\rho : \rho > 0 \}$ is a sufficient condition for T to have a RUD ; we don't know if it is also necessary, so now we shall give conditions of this last type. The first one is related to the following

THEOREM (Holbrook [41]). An operator $T \in \mathcal{L}(E)$ is similar to a contraction if and only if there exist a Hilbert space H and operators $A \in \mathcal{L}(H)$, $B \in \mathcal{L}(E,H)$, $C \in \mathcal{L}(H,E)$ such that A is a contraction and $\sum_{n=0}^{\infty} \| CA^n B - T^n \|^2 < \infty$ holds.

In particular, $T^n = CA^nB$, $\forall n \geq 0$ implies that T is similar to a contraction; thus : $F(z) \overset{\text{def}}{=} (I - zT)^{-1}$ is the transfer function of a discrete system with contractive propagator if and only if T is similar to a contraction. Also : if $T \in \mathcal{L}(E)$ has a RUD, then T is similar to a contraction. In fact, $T(.)$ must be a scattering function so theorem (I.1) says that $T^n = \tau^* U^n \lambda$ holds for all $n \geq 0$, for a unitary U and bounded τ, λ.

Before noting a second necessary condition for T to have a RUD, let us recall a problem in operator theory. Let $\mathcal{P}$ be the set of trigonometric polynomials ; for each $p(e^{it}) = \sum_n a_n e^{int} \in \mathcal{P}$ we set

$$p(T) \overset{\text{def}}{=} \sum_n a_n\, T(n).$$

If T is a contraction, combining Nagy's dilation theorem and the spectral theorem a simple proof can be given of Von Neumann's inequality

$$\|p(T)\| \leq \|p\|_\infty , \quad \forall\, p \in \mathcal{P}.$$

Let $\mathcal{P}_+ = \left\{ \sum\limits_{n \geq 0} a_n e^{int} \in \mathcal{P} \right\}$ be the set of all analytic polynomials. If T is similar to a contraction, $T = QT_1Q^{-1}$ and $\|T_1\| \leq 1$, then $p(T) = Q\, p(T_1)Q^{-1}$ holds for every $p \in \mathcal{P}_+$ so there exists a constant $c \equiv c(T)$ such that the following is true :

$$\|p(T)\| \leq c\|p\|_\infty , \quad \forall\, p \in \mathcal{P}_+ .$$

When such an inequality holds it is said that T is polynomially bounded, and that is then the case whenever T is similar to a contraction. Whether the converse is true seems to be an open problem although it has interested many people (see Halmos [37] and Holbrook [42]). Now, if $T(n) = \tau^* U^n \lambda$ holds for all $n \in \mathbf{Z}$ and a unitary operator U, it is $p(T) = \sum\limits_n a_n T(n) = \tau^* p(U)\lambda$ and thus from (I.1) we get the following : if T has a reducible unitary dilation then

$$\|p(T)\| \leq c\|p\|_\infty , \quad \forall\, p \in \mathcal{P} .$$

To put an end to this paper we shall summarize its content, indicate its relation with some relevant subjects and suggest possible further developments of the approach we have presented here.

Naimark's dilation theorem - vectorial extension of the classical Herglotz-Bochner result - offers a characterization of Fourier transforms of measures and clarifies their relation with scattering functions.

Its extension to the so-called generzlized Toeplitz kernels enlarges the scope of its applications to harmonic analysis - weighted and moment problems may be considered - and gives a characterization of the transfer functions of some linear systems.

One of the main result of dilation theory is the theorem on the lifting of the commutant, due to Nagy and Foias [59] , which was suggested by a previous particular case, Sarason's general interpolation theorem [57] . If one seeks for a proof of Nagy-Foias theorem in the same spirit as that of Nagy's dilation theorem by means of

Naimark's theorem, then generalized Toeplitz kernels appear quite naturally [9]. Those kernels give in fact such a proof [10], as well as one of the condition for the unicity of the lifting [5], and they also lead to another extension [17] of Sarason's theorem. This last is related to the well known Beurling-Lax-Halmos characterization of the invariant subspaces of the shift on Hilbert spaces. Ball and Helton [23] have given a Krein spaces version of that characterization, indicated several applications to interpolation problems, and showed its connection with lifting theory. Davis has extended Nagy's theorem by considering dilations to Krein spaces. Here we have seen that scattering functions are related with a special kind of those dilations, the fundamentally reducible ones.

So in order to have a unified view of the whole subject it would be perhaps interesting to :

i) Characterize the Toeplitz kernels that have unitary dilations to Krein spaces.

ii) Deduce from that extension of Naimark's theorem the result of Davis on dilations of not necessarily contractive operators.

iii) Obtain similar results for generalized Toeplitz kernels and relate them with lifting and interpolation.

Concerning the first aim we can state the following result.

(IV.4) THEOREM. Let $f : \Gamma \to \mathcal{L}(E)$ be a function defined on a group Γ and whose values are bounded operators in a Hilbert space E. It is assumed that f is hermitean, satisfies $f(e) = I$ with I the identity in E and e the neutral element of Γ, and is such that there exists a kernel $k : \Gamma \times \Gamma \to \mathcal{L}(E)$ with the following properties.

a) k majorizes f, i. e., there exists a positive constant λ such that

$$\left| \sum_{s,t\in\Gamma} \langle f(t^{-1}s)h(s),h(t)\rangle_E \right| \leq \lambda \sum_{s,t\in\Gamma} \langle k(s,t)h(s),h(t)\rangle_E$$

holds for every function with finite support $h : \Gamma \to E$, so k is positive definite.

b) There exists a positive constant δ such that if $h : \Gamma \to E$ has finite support and $\sum_{s,t\in\Gamma} \langle k(s,t)h(s),h(t)\rangle_E \neq 0$ holds then there exists another function of finite support h' that satisfies $\sum_{s,t\in\Gamma} \langle k(s,t)h'(s),h'(t)\rangle_E \neq 0$ and

$$\frac{\left| \sum_{s,t\in\Gamma} \langle f(t^{-1}s)h(s),h'(t)\rangle_E \right|}{\left\{ \sum_{s,t\in\Gamma} \langle k(s,t)h(s),h(t)\rangle_E \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{s,t\in\Gamma} \langle k(s,t)h'(s),h'(t)\rangle_E \right\}^{1/2}} \geq \delta .$$

c) $k(e,e) = I$

d) k satisfies a bounding condition : there exists a function ρ, defined on Γ and whose values are positive numbers, such that

$$\sum_{s,t\in\Gamma} \langle k(us,ut)h(s),h(t)\rangle_E \leq \rho(u) \sum_{s,t\in\Gamma} \langle k(s,t)\, h(s),h(t)\rangle_E$$

holds for all functions $h : \Gamma \to E$ of finite support.

Under those hypothesis there exist a Krein space K that contains E as an orthocomplemented subspace and a representation U of Γ by means of unitary operators in K such that :

(i) $$f(s) = P\, U_s \big|_E , \quad \forall\, s\in\Gamma ,$$

where P is the orthogonal projection of K onto E ;

(ii) the subspace generated by $\left\{ U_s v : s\in\Gamma, \ v\in E \right\}$ is dense in K.

Conversely, if there exist K and U such that (i) and (ii) hold, then there exists k with properties (a), (b), (c) and (d).

If Γ is a topological group, there exists a kernel k with those properties such that ρ is continuous and k is continuous as a function of two variables (or in each variable) with respect to the weak topology of operators, if and only if there exists a representation U with properties (i) and (ii) and moreover continuous in the strong topology of operator (respectively, in the weak topology and such that $\|U_u\|$ depends continuously of $u \in \Gamma$).

This theorem can be proved with the same ideas we have already discussed, but with more work, so we don't give here its proof and refer the interested reader to the appendix.

APPENDIX : An extension of Naimark's dilation theorem

Naimark's classical dilation theorem characterizes those Hilbert space operator-valued kernels which have unitary dilations to another Hilbert space. Here we shall characterize those Hilbert space operator-valued kernels which have unitary dilations to a Krein space.

The following pages can be read independently of the preceding ones, except for the statement of the result we are going to prove, theorem (IV.4), which we don't repeat here.

Let us start by obtaining some necessary conditions. In order to do that we assume that U is a representation of a group Γ by means of unitary operators U_s, $s \in \Gamma$, on a Krein space $(K, (.,.))$ that contains a Hilbert space E as an orthocomplemented subspace. Let $P : K \to E$ be the orthogonal projection and set

$$f(s) \overset{\text{def}}{=} P\, U_s\big|_E, \qquad s \in \Gamma.$$

Obviously, f is a $\mathcal{L}(E)$-valued function on Γ, hermitean (i.e., $f(s) = f^*(s^{-1})$, $\forall\, s \in \Gamma$) and such that $f(e) = I$ holds if e is the neutral element of Γ. If K is a Hilbert space, f must be positive definite ; let us see what weaker properties it has when K is only a Krein space. In this case the topology is given by a Hilbert space inner product in K, $[.,.]$, and there exists τ, a bounded hermitean operator with bounded inverse in $(K, [.,.])$, such that

$$(x, y) = [\tau x, y]$$

holds for all $x, y \in K$. Moreover, $[.,.]$ can be chosen in such a way that it equals

$(.,.)$ on E [24].

Let $h : \Gamma \to E$ be any function with finite support. Then we have

$$\left| \sum_{s,t\in\Gamma} \langle f(t^{-1}s)h(s),h(t)\rangle_E \right| = \left| \sum_{s,t\in\Gamma} (U_s\, h(s)\, ,\, U_t\, h(t)) \right| =$$

$$= \left| \left[\tau(\sum_{s\in\Gamma} U_s h(s))\, ,\, \sum_{s\in\Gamma} U_s h(s)\right] \right| \le \|\tau\| \sum_{s,t\in\Gamma} \left[U_s h(s), U_t h(t)\right]$$

$$= \|\tau\| \sum_{s,t} \left[P'\, U_t^* U_s\, h(s), h(t)\right],$$

where P' is the orthogonal projection in $(K\, ,\, [.,.])$ of K onto E and U_t^* denotes the adjoint in that space of U_t ; this last operator is bounded because it is unitary in $(K\, ,\, (.,.))$ - [24], theorem (VI.4.1)-. Set

$$k(s,t) = P'\, U_t^* U_s \big|_E, \qquad s,t\in\Gamma.$$

Then k is a $\mathcal{L}(E)$-valued positive definite kernel on Γ that majorizes the Toeplitz kernel defined by f :

$$\left| \sum_{s,t\in\Gamma} \langle f(t^{-1}s)h(s),h(t)\rangle_E \right| \le \|\tau\| \sum_{s,t\in\Gamma} \langle k(s,t)h(s),h(t)\rangle_E$$

holds for any function $h : \Gamma \to E$ of finite support.

Clearly, $k(e,e) = I$.

Moreover, setting $\rho(u) \overset{\text{def}}{=} \|U_u\|^2$, $u\in\Gamma$, it follows that k satisfies a <u>bounding condition</u> ·

$$\sum_{s,t\in\Gamma} \langle k(us,ut)h(s),h(t)\rangle_E \le \rho(u) \sum_{s,t\in\Gamma} \langle k(s,t)h(s),h(t)\rangle_E .$$

Now we assume also that the following minimality property holds : $\{U_s v : s\in\Gamma\, ,\, v\in E\}$ generates a dense subspace of K. Let $h : \Gamma \to E$ be a function of finite support such that

$$\sum_{s,t\in\Gamma} \langle k(s,t)h(s),h(t)\rangle_E \neq 0.$$

Set $x = \sum_{s\in\Gamma} U_s h(s)$; it follows that x is not zero, and consequently that

$$(x,\tau x) = [\tau x,\tau x] \geq \|\tau^{-1}\|^{-1}\|x\|\|\tau x\| > \tfrac{1}{2}\|\tau^{-1}\|^{-1}\|x\|\|\tau x\|.$$

So there exists another function of finite support $h' : \Gamma \to E$ such that

$\sum_{s,t\in\Gamma} \langle k(s,t)h'(s),h'(t)\rangle_E \neq 0$ and

$$\frac{\left|\sum_{s,t\in\Gamma} \langle f(t^{-1}s)h(s),h'(t)\rangle_E\right|}{\left\{\sum_{s,t\in\Gamma} \langle k(s,t)h(s),h(t)\rangle_E\right\}^{1/2}\left\{\sum_{s,t\in\Gamma} \langle k(s,t)h'(s),h'(t)\rangle_E\right\}^{1/2}} \geq \delta$$

hold, for a fixed positive constant δ. In fact, by the minimality property, we can take h' such that $\sum_{s\in\Gamma} U_s h'(t)$ is close enough to τx.

Let us now consider some continuity properties.

Assume first that U is continuous in the strong operator topology, i. e. $U_s v \to U_{s_o} v$ in K whenever $s \to s_o$ in Γ and $v\in K$. Then ρ is continuous in Γ. Let $s \to s_o$, $t \to t_o$ in Γ and v,w belong to E ; then :

$$|\langle k(s,t)v,w\rangle_E - \langle k(s_o,t_o)v,w\rangle_E| =$$

$$= \left|[(U_s-U_{s_o})v,U_t w] + [U_{s_o}v,(U_t-U_{t_o})w]\right| \leq$$

$$\leq \|(U_s-U_{s_o})v\| \sqrt{\rho(t)}\|w\| + \|U_{s_o}v\|\|(U_t-U_{t_o})w\| \to 0 ,$$

so k is continuous, as a function of two variables, with respect to the weak operator topology.

Now assume that U is continuous in the weak operator topology (i. e., $[U_s v,w] \to [U_{s_o}v,w]$ whenever $s \to s_o$ in Γ and $v,w\in K$) and that $\|U_s\|$ depends continuously on s. Clearly, ρ is continuous and k is continuous in each variable, with respect to the weak operator topology.

All the assertions concerning the necessity of the conditions have been proved. In order to do the same with the sufficiency we start with a surely well known remark.

LEMMA. Let $k : \Gamma \times \Gamma \to \mathcal{L}(E)$ be a positive definite kernel that satisfies a bounding condition and such that $k(e,e) = I$. Then there exists a (non necessarily unitary) representation U of Γ in a Hilbert space $(K, [.,.])$, determined up to unitary isomorphisms, such that K contains E as a closed subspace and the following hold :

(i) $$k(s,t) = P' U_t^* U_s \big|_E , \quad \forall\, s,t \in \Gamma,$$

where P' denotes the orthogonal projection in $(K, [.,.])$ of K onto E, and

(ii) $$K = \bigvee_{s \in \Gamma} U_s \Gamma.$$

This lemma is an immediate extension of Naimark's theorem. We give its proof in order to fix the notation we shall use from now on.

Let E_o be the vector space of the E-valued functions on Γ with finite support ; setting

$$[h,h'] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{s,t \in \Gamma} \langle k(s,t)h(s), h(t) \rangle_E , \quad \forall\, h,h' \in E_o ,$$

we get a positive semidefinite inner product in E_o. Now set $N_o = \{h \in E_o : [h,h] = 0\}$, $E_1 = E_o \ominus N_o$ and let $p : E_o \to E_1$ be the canonical projection. Then $[.,.]$ can be transferred to E_1 by setting $[ph , ph'] \stackrel{\text{def}}{=} [h,h']$ and the completion K of E_1 with respect to $[.,.]$ is a Hilbert space.

For each $v \in E$ let $h_v \in E_o$ be given by $h_v(e) = v$ and $h_v(s) = 0$ if $s \neq e$; then

$$v \longrightarrow p\, h_v$$

defines an isometry of E to $(K, [.,.])$, because $k(e,e) = I$; thus E can be considered as a close subspace of K.

For each $s \in \Gamma$ let U_s be the linear isomorphism in E_o defined by

$$(U_s h)(t) = h(s^{-1}t) \quad ;$$

then $\left[U_n h, U_u h\right] = \sum_{s,t \in \Gamma} \langle k(s,t)h(u^{-1}s), h(u^{-1}t)\rangle_E = \sum_{s,t} \langle k(us,ut)h(s), h(t)\rangle_E \leq \rho(u)\left[h,h\right]$,

by the bounding condition, so $U \overset{\text{def}}{=} \{U_s : s \in \Gamma\}$ can be considered as a representation of Γ by bounded operators on $(K, [.,.])$, such that $\|U_s\| \leq \sqrt{\rho(s)}$.

Since $(U_s h_v)(t) = 0$ if $t \neq s$ and $(U_s h_v)(s) = v$, for any $v, w \in E$, $s,t \in \Gamma$ we have $\langle k(s,t)v, w\rangle_E = \left[U_s h_v , U_t h_w\right]$ and assertion (i) of the lemma follows.

Obviously $\bigvee_{s \in \Gamma} U_s \Gamma$ contains E_1 which is dense in K, so assertion (ii) follows too.

If K', $[.,.]'$, U' satisfy the same conditions that K, $[.,.]$, U, an isometry V from $(K, [.,.])$ onto $(K', [.,.]')$ is defined by $V(U_s v) = U'_s v$, $s \in \Gamma$, $v \in E$; clearly, $VU_s = U'_s V$. The proof of the lemma is over.

Now we can start proving that the conditions stated in theorem (IV.4) are sufficient for f to have a unitary dilation to a Krein space. (Note that in the above proof we have already used the conditions (c) and (d) satisfied by k).

Let $(.,.)$ be the indefinite scalar product in E_o generated by f, that is

$$(h,h') \overset{\text{def}}{=} \sum_{s,t \in \Gamma} \langle f(t^{-1}s)h(s), h'(t)\rangle_E, \qquad h,h' \in E_o.$$

Then the majorization of f by k-condition (a) - implies

$$|(h,h)| \leq \lambda\left[h,h\right], \qquad \forall\, h \in E_o \quad ;$$

set $\|k\| = \left[k,k\right]^{1/2}$, $\forall k \in K$; it follows ([24], lemma (IV.1.1)) that

$$|(h,h')| \leq 2\lambda \|h\|\|h'\|$$

holds for all $h,h' \in E_o$. Thus $(.,.)$ can also be "transferred" to E_1 by

$(ph,ph') \overset{\text{def}}{=} (h,h')$. Since E_1 is dense in K, the last inequality also implies that $(.,.)$ can be extended to all K.

So we have a bounded sesquilinear form $(.,.)$ defined in the Hilbert space $(K, [.,.])$; consequently in this space there exists a bounded hermitean operator τ such that

$$(x,y) = [\tau x, y]$$

holds for all $x,y \in K$. Now, condition (b) says that for every not zero vector x belonging to E_1, a dense subspace of K, there exists another not zero vector $y \in K$ such that

$$\left|[\tau x, y]\right| \equiv |(x,y)| \geq \delta \|x\| \, \|y\|$$

holds ; thus, $\|\tau x\| \geq \delta \|x\|$ and, since $\tau = \tau^*$, there exists τ^{-1} and $\|\tau^{-1}\| \leq \delta^{-1}$. Il follows from theorem (V.1.3) in [24] that $(K,(.,.))$ is a Krein space.

We have already noted that the subspace generated by $\{U_s v : s \in \Gamma, v \in E\}$ is dense in K, and that E may be considered as a close subspace of the Hilbert space $(K, [.,.])$. Since $f(e) = I$, $(.,.)$, $\langle .,. \rangle_E$ and $[.,.]$ are the same in E ; from theorem (V.3.4) in [24] it follows that E is an orthocomplemented subspace of the Krein space $(K,(.,.))$.

For each $u \in \Gamma$ U_u is a continuous operator in K and, if $h,h' \in E_o$, the following holds :

$$(U_u h \, , \, U_u h') = \sum_{s,t \in \Gamma} \langle f(t^{-1}s)h(u^{-1}s), h'(u^{-1}t) \rangle_E = (h,h').$$

Thus, U_u is a unitary operator. Moreover, if $v,w \in E$, then we have

$$(PU_s v, w) = (U_s h_v, h_w) = \sum_{t,r \in \Gamma} \langle f(r^{-1}t)(U_s h_v)(t), h_w(r) \rangle_E = \langle f(s)v, w \rangle_E .$$

So assertions (i) and (ii) of the theorem have been proved and only the continuity issue remains to be considered. We assume that ρ is continuous.

Suppose that k is continuous with respect to the weak topology of operators ; let $u \to u_o$ in Γ and $y \in K$; take $h \in E_o$; then

$$\|U_u y - U_{u_o} y\| \leq \|(U_u - U_{u_o})(y-h)\| + \|(U_u - U_{u_o})h\| .$$

Now, $\|U_u - U_{u_o}(y-h)\| \leq (\sqrt{\rho(u)} + \sqrt{\rho(u_o)})\|y-h\|$ can be made small because ρ is continuous and E_1 is dense in K. Since $\|(U_u - U_{u_o})h\|^2 =$

$= \sum_{s,t \in \Gamma} \langle \{k(us,ut) + k(u_o s,u_o t) - k(us,u_o t) - k(u_o s,ut)\} h(s),h(t)\rangle_E$ tends to zero when $u \to u_o$, it follows that U is continuous with respect to the strong topology of operators.

The weak continuity of U when k is continuous in one variable (and hence in the other, since $k(s,t) = k(t,s)^*$) follows from the inequality

$$\left|[U_u y,y'] - [U_{u_o} y,y']\right| \leq$$

$$\leq \sqrt{\rho(u)} \left\{\|y-h\|\|y'\| + \left[\|y\| + \|y-h\|\right]\|y'-h'\|\right\} +$$

$$+ \sum_{s,t} \langle \{k(us,t) - k(u_o s,t)\} h(s),h'(t)\rangle_E +$$

$$+ \sqrt{\rho(u_o)}\left\{\|y\|\|y'-h'\| + \left[\|y'\| + \|y'-h'\|\right]\|y-h\|\right\}.$$

The proof of the theorem is finished.

REFERENCES

[1] ADAMJAN, V. M. and AROV, D. Z. On unitary couplings of semi unitary operators. Amer. Math. Soc. Trans. 95 (1970), 75-129.

[2] ADAMJAN, V. M., AROV, D. Z. and KREIN, M. G. Infinite Hankel matrices and Caratheodory-Fejér and Schur problems. Funct. Anal. and Appl. 2 (1968), 1-17.

[3] ______________________ Analytic properties of Schmidt pairs for a Hankel operator and the generalized Schur-Takaji problem. Mat. Sbornik 15 (1971), 31-73.

[4] ______________________ Infinite Hankel block-matrices and related continuation problems. Izv. Akad. Nauk Armjan SSR Mat. 6 (1971), 87-112.

[5] ANDO, T., CEAUSESCU, Z. and FOIAS, C. On interwining dilations. II. Acta Sci. Math. (Szeged) 39 (1977), 3-14.

[6] AROCENA, R. A refinement of the Helson-Szegö theorem and the determination of the extremal measures. Studia Math. 71 (1981), 203-221.

[7] ____________ On generalized Toeplitz kernels and their relation with a paper of Adamjan, Arov and Krein. North Holland Math. Studies 86 (1984).

[8] ____________ On the parametrization of Adamjan, Arov and Krein. Publ. Math. d'Orsay 83-02 (1983), 7-23.

[9] ____________ "Sur le théorème de Sarason et Nagy-Foias". Publ. Math. d'Orsay 83-02 (1983), 24-35.

[10] ____________ Generalized Toeplitz kernels and dilations of intertwining operators, integral equations and operator theory 6 (1983), 759-778.

[11] ____________ A theorem of Naimark, linear systems and scattering operators, preprint.

[12] ____________ Generalized Toeplitz kernels and dilations of intertwining operators (II) : the continuous case, preprint.

[13] AROCENA, R. and COTLAR, M. On a lifting theorem and its relation to some approximation problems. North-Holland Math. Studies 71 (1982).

[14] ______________________ Generalized Toeplitz kernels and Adamjan-Arov-Krein moment problems. Operators theory : Advances and Appl. 4 (1982), 37-55.

[15] ________________ A generalized Herglotz-Bochner theorem and L^2-weighted inequalities with finite measures. Conference on Harmonic Analysis in Honor of Antoni Zygmund (1981), 258-269.

[16] ________________ Dilation of generalized Toeplitz kernels and some vectorial moment and weighted problems. Springer lecture notes in Math. 908 (1982), 169-188.

[17] ________________ Generalized Toeplitz kernels, Hankel forms and Sarason's commutation theorem. Acta Cientifica Venezolana 33 (1982), 89-98.

[18] ________________ Continuous generalized Toeplitz kernels in R. To appear in Portugalia Mathematica.

[19] AROCENA, R., COTLAR, M. and SADOSKY, C. Weighted inequalities in L^2 and lifting properties. Adv. Math. Suppl. Studies 7 (1981), 95-128.

[20] AROCENA, R., COTLAR, M. and LEON, J. to appear in volume honoring Prof. L. Nachbin, North-Holland.

[21] ARSENE, Gr., CEAUSESCU, Z. and FOIAS, C. On intertwining dilations. VII. Lecture Notes in Math. 747.

[22] ________________ On intertwining dilations. VIII. J. Operator Theory 4 (1980), 55-91.

[23] BALL, J. A. and HELTON, J. W. A Beurling-Lax theorem for the Lie group U(m,n) which contains most classical interpolation theory. J. Operator Theory 9 (1983), 107-142.

[24] BOGNAR, J. "Indefinite inner product spaces". Springer-Verlag, New York, 1974.

[25] CARLESON, L. and JONES, P. Weighted norm inequalities and a theorem of Koosis. Mittag-Leffler Inst. Report 2 (1981).

[26] CEAUSESCU, Z. and FOIAS, C. On intertwining dilations. V. Acta Sc. Math. (Szeged) 40 (1978), 9-32. Corrections, 41 (1979).

[27] COIFMAN, R. R. and FEFFERMAN, C. Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals. Studia Math. 51 (1974), 241-250.

[28] COTLAR, M. and SADOSKY, C. On the Helson-Szegö theorem and a related class of modified Toeplitz kernels. Proc. Symp. Pure Math. AMS 35 (1979), 383-407.

[29] DAVIS, Ch. J-unitary dilation of a general operator. Acta Sc. Math. (Szeged) 31 (1970), 75-86.

[30] DEVINATZ, A. Toeplitz operators on H^2 spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 112 (1964), 304-317.

[31] DYM, H. and McKEAN, H. P. "Gaussian Processes, Function Theory, and the Inverse Spectral Problem". Academic Press, New York, 1976.

[32] FOIAS, C. On the Lax-Phillips non conservative scattering theory. J. Funct. Anal. 19 (1975), 273-301.

[33] ________ Contractive intertwining dilations and waves in layered media. Invited Adress at the ICM, Helsinki, 1978.

[34] FUHRMANN, P. A. "Linear systems and operators in Hilbert space". McGraw-Hill, 1981.

[35] GARNETT, J. "Bounded analytic functions". Academic Press, 1981.

[36] HALMOS, P. R. Shifts on Hilbert space. J. reine und angew. Math. 208 (1961), 102-112.

[37] ________ Ten problems in Hilbert space. Bull. Amer. Math. Soc. 76 (1970), 887-933.

[38] HELTON, J. W. Discrete time systems, operator models and scattering theory. J. Funct. Anal. 16 (1974), 15-38.

[39] HELSON, H. and SZEGO, G. A problem in prediction theory. Ann. Mat. Pura Appl. 51 (1960), 107-138.

[40] HELSON, H. and SARASON, D. Past and Future. Math. Scand. 21 (1967), 5-16.

[41] HOLBROOK, J. A. Operators similar to contractions. Acta Sc. Math. (Szeged) 34 (1973), 163-168.

[42] ________ The size of an operator. Op. Theory : Advances and Appl. 11 (1983), 233-241.

[43] ________ On the power-bounded operators of Sz.-Nagy and Foias. Acta Sc. Math. 29 (1968), 299-310.

[44] HORN, R. A. Quadratic forms in harmonic analysis and the Bochner-Eberlein theorem. Proc. Amer. Math. Soc. 52 (1975), 263-270.

[45] HUNT, R. A., MUCKENHOUPT, B. and WHEEDEN, R. L. Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform. Trans. Amer. Math. Soc. 176 (1973), 227-252.

[46] IBRAGIMOV, I. and ROZANOV, Y. "Random Gaussian Processes". Springer Verlag, 1978.

[47] KOOSIS, P. Weighted quadratic means and Hilbert transforms. Duke Math. J. 38 (1971), 609-634.

[48] ________ Moyennes quadratiques de transformées de Hilbert et fonctions de type exponentiel. C. R. Acad. Sc. Paris 276 (1973), 1201-1204.

[49] ________ Moyennes quadratiques pondérées de fonctions périodiques et leurs conjuguées harmoniques. C. R. Acad. Sc. Paris (1980), 255-257.

[50] LAX, P. D. and PHILLIPS, R. S. "Scattering theory". Academic Press, New York, 1967.

[51] ______________________________ Scattering theory for dissipative hyperbolic systems. J. Funct. Anal. 14 (1973), 172-235.

[52] MUCKENHOUPT, B. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function. Trans. Amer. Math. Soc. 165 (1972), 207-226.

[53] NAIMARK, M. A. "Normed rings". P. Noordhoff, 1959.

[54] PELLER, V. V. and HRUSCEV, S. V. Hankel operators, best approximations and stationary Gaussian processes. LOMI preprint E-4-81 Leningrad, 1981.

[55] RUBIO de FRANCIA, J. Weighted inequalities and vector valued inequalities. Springer Lecture Notes in Math. 908 (1982), 86-101.

[56] RUDIN, W. "Fourier analysis in groups". Interscience, New York, 1962.

[57] SARASON, D. Generalized interpolation in H^{∞}. Trans. Amer. Math. Soc. 127 (1967), 179-203.

[58] ____________ "Function theory in the unit circle". Lecture Notes, Virginia Polyt. Inst. and State Univ., 1978.

[59] SZ.-NAGY, B. and FOÏAS, C. Dilatation des commutants. C. R. Acad. Sc. Paris 266 (1968), 493-495.

[60] ____________________________ "Harmonic analysis of operators on Hilbert spaces". North-Holland, 1970.

[61] WIDOM, H. Inversion of Toeplitz matrices. III. Notices Amer. Math. Soc. 7, 63 (1960).

UR UNE CONJECTURE CONCERNANT LA CAPACITE ET L'EFFILEMENT

Alano ANCONA

Dans la première partie de ce travail, on se placera dans le cadre de la théorie classique du Potentiel sur $\mathbb{R}^d$ ([6], [14]) et on indiquera ensuite une généralisation des résultats obtenus à une classe de noyaux-fonctions ; pour simplifier l'exposé, on supposera $d \geq 3$. On posera jusqu'au chapitre VI $G(x,y)=G_x(y) = \|x-y\|^{2-d}$ $(x,y \in \mathbb{R}^d)$; $c(A)$ désignera la capacité extérieure newtonienne de la partie A de $\mathbb{R}^d$, et $e(A)$ l'ensemble des points de A où A est effilé ([6], [14]). En ce qui concerne le cadre classique le but de ce travail est d'établir le théorème suivant :

<u>*THEOREME 1*</u> *: Toute partie compacte, non polaire, $\mathbb{K}$ de $\mathbb{R}^d$ contient un compact non vide $\mathbb{K}'$ tel que $e(\mathbb{K}') = \phi$ (et à fortiori $c(\mathbb{K}') > 0$).*

On montrera ensuite que le théorème 1 entraîne l'énoncé suivant apparemment plus fort :

THEOREME 2. Si $\mathbb{K}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^d$ et si ε est un réel > 0, il existe une partie compacte $\mathbb{K}'$ de $\mathbb{K}$ telle que 1°) $e(K') = \phi$ et 2°) $c(\mathbb{K} \setminus K') < \varepsilon$.

Le théorème 1 résout une question assez ancienne de la théorie du Potentiel ; G. Choquet l'avait mentionnée au Colloque d'Orsay de théorie du Potentiel en 1964 ; elle est aussi signalée dans [10], [12] et [24]. J. Ullman m'a indiqué une démonstration (erronée) du théorème 1 dans [19] (page 175).

Pour établir le théorème 1, il est commode d'observer qu'on peut supposer $\mathbb{K}$ totalement discontinu : comme la mesure d'équilibre λ de $\mathbb{K}$ est diffuse et non nulle, on peut construire un compact totalement discontinu $\mathbb{K}_1$ inclus dans $\mathbb{K}$ et tel que $\lambda(K_1) > 0$: de sorte que K_1 est non polaire. La démonstration du théorème 1 va consister à montrer que l'énoncé (H_1) suivant conduit à une contradiction, après un assez long cheminement (parties II, III et IV) :

(H_1) Il existe un compact K_1 de $\mathbb{R}^d$, totalement discontinu, non polaire, et tel que pour tout compact non vide L de K_1, $e(L) \neq \phi$.

Comme on le verra, la preuve que nous proposons est purement "existentielle" et non constructive (voir toutefois à la fin du V des remarques, sans démonstration, sur certains cas particuliers). Ajoutons que l'emploi de balayés d'un potentiel strict - tel que $e^{-|x|} * |x|^{2-d}$ - aurait permis d'éviter quelques difficultés dans la partie préparatoire I (surtout au lemme 2) ; on a quand même préféré opérer dans le cadre classique avec la capacité et les potentiels d'équilibre classiques.

Dans la partie V, on définit un cadre naturel pour une théorie du Potentiel pourvue d'une "bonne" théorie adjointe sur le même espace de base Y, ce qui revient à la donnée d'un noyau-fonction G sur Y pourvu de propriétés convenables. Dans ce cadre, le théorème 1 tombe en défaut : ainsi pour l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}^{d+1} (d \geq 0)$, toute partie compacte non vide de $\mathbb{R}^{d+1}$ est effilée en au moins un de ses points. Dans la partie VII, on établit l'extension suivante du théorème 1 : Chaque compact K non semi-polaire de Y, contient un compact $\mathbb{K}'$, également non semi-polaire, ne contenant aucun point à la fois irrégulier et co-irrégulier ;

si on considère un processus de Markov sur Y associé à la théorie du Potentiel définie sur Y , on peut dire d'une façon imagée, que sur $\mathbb{K}'$ on a séparé les points de $\mathbb{K}'$ auxquels on accède par l'extérieur de $\mathbb{K}'$, des points de $\mathbb{K}'$ à partir desquels on quitte $\mathbb{K}'$.

Dans la partie VII, on établit des résultats qu'on utilisera pour étendre le théorème 1 ; on introduit en particulier une classe d'ensembles auxquels semble s'étendre un bon nombre d'énoncés classiques, lorsqu'on fait jouer à la fois les deux théories en dualité ; (théorème 4, théorème 7), on a étudié assez systématiquement ces ensembles ; je donne également un théorème, que je dois à Mokobodzki, sur la continuité des potentiels en dehors de leurs supports ; ce théorème permet d'éviter l'hypothèse de continuité en dehors de la diagonale du noyau G ; Une extension du théorème 2 est présentée en IX, et en X on donne une utilisation plus "positive" d'une des idées de la preuve du théorème 1.

Reste à savoir ce qu'on peut faire avec le théorème 1 (ou 6) !

I. QUELQUES LEMMES AUXILIAIRES.

On utilisera dans la suite les notations habituelles pour les réduites, et les réduites régularisées ([6], [14]). On note $G\lambda$ le potentiel newtonien de la mesure positive λ .

LEMME 1. Si $\mathbb{K}$ est un compact totalement discontinu de $\mathbb{R}^d$ et si A est une partie de $\mathbb{K}$, A est effilé au point $x_o \in \mathbb{R}^d$ si et seulement si $\hat{R}_1^A(x_o) < 1$.

Chaque point $x_1 \in K$ admet une base $\{\omega_n\}_{n\geq 1}$ de voisinages ouverts dans $\mathbb{R}^d$ telle que $\partial\omega_n \subset K^c = \mathbb{R}^d \setminus \mathbb{K}$. On en déduit aisement (en considérant le balayage sur les ω_n^c) que deux fonctions surharmoniques sur $\mathbb{R}^d$, égales sur $\mathbb{K}^c$ sont identiques.

On sait par ailleurs que si A est effilé en $x_o \in \mathbb{R}^d$, on a $\hat{R}^A_{G_{x_o}} \not\equiv G_{x_o}$ ([6]) ; de la remarque précédente et de la connexité de $\mathbb{R}^d \setminus \mathbb{K}$, on déduit que $\hat{R}^A_{G_{x_o}} < G_{x_o}$ sur $\mathbb{R}^d \setminus \mathbb{K}$; intégrons par rapport à la mesure superficielle d'une sphère enfermant K et utilisons la formule de réciprocité

$\int \hat{R}^A_{G_\mu}\, d\nu = \int \hat{R}^A_{G_\nu}\, d\mu$ (μ, ν mesures ≥ 0 de potentiels respectifs $G\mu$ et $G\nu$) ; on obtient $\hat{R}^A_1(x_o) < 1$.

En particulier si A et B sont deux parties de K , B étant non polaire et disjointe de la fermeture fine de A , on a : $c(A) < c(A \cup B)$. En effet , $\hat{R}^A_1 < 1$ sur B d'après le lemme 1, d'où $\hat{R}^A_1 \not\geq \hat{R}^{A \cup B}_1$ et par conséquent $c(A) < c(A \cup B)$.

<u>*LEMME 2*</u>. *Soient F un compact de $\mathbb{R}^d$, A une partie bornée de $\mathbb{R}^d$ et $\varepsilon > 0$;*

il existe un réel $\beta < c(A)$ tel que :

$$\forall B \subset A : c(B) \geq \beta \Rightarrow \inf\{\hat{R}^B_1(x) \;;\; x \in F\} \geq \inf\{\hat{R}^A_1(x) \;;\; x \in F\} - \varepsilon \;.$$

Il suffit de voir que si $\{B_n\}_{n \geq 1}$ est une suite de parties de A telle que $\lim_{n\to\infty} c(B_n) = c(A)$ la mesure d'équilibre μ_n de B_n tend vaguement vers celle de A, notée μ , lorsque n tend vers l'infini. En effet, on aura : $\hat{R}^A_1 \leq \liminf_{n\to\infty} \hat{R}^{B_n}_1$, d'après le caractère s.c.i. du noyau G ; d'où, en notant s_n la régularisée s.c.i. de $\inf\{\hat{R}^{B_k}_1 \;;\; k \geq n\}$, $\hat{R}^A_1 \leq \sup_n s_n$ quasi partout et donc partout sur $\mathbb{R}^d$. On déduit alors du lemme de Dini, que pour n assez grand : $s_n \geq \inf\{\hat{R}^A_1(x) \;;\; x \in F\} - \varepsilon$ sur F , et à fortiori la même minoration pour $\hat{R}^{B_n}_1$ sur F .

Soit donc ν une valeur d'adhérence vague de la suite $\{\mu_n\}$; on a $\|\nu\| = \|\mu\|$ et $G\nu \leq G\mu$ puisque $G\nu \leq \liminf_{n\to\infty} G\mu_n$. D'après le principe de continuité d'Evans on peut, pour tout $\eta > 0$ donné, décomposer μ en $\mu = \mu_1 + \mu_2$, où les μ_i sont des mesures ≥ 0 sur $\mathbb{R}^d$, avec $G\mu_1$ continu et $\|\mu_2\| < \eta$; on en déduit que : $\int G\mu\, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int G\mu\, d\mu_{n_i}$ si la sous-suite $\{\mu_{n_i}\}$ converge vers ν ; or, chaque μ_n est concentrée sur la fermeture fine $\tilde{A}$ de A , et $G\mu$ vaut 1 quasi-partout sur $\tilde{A}$. D'où :

$$\int G\mu\, d\nu = \lim_{i\to\infty} \|\mu_{n_i}\| = \|\nu\| = \|\mu\| \;.$$

Ainsi, $\int G\nu\, d\mu = \|\mu\|$, d'où $G\nu = 1$ μ-presque partout et $G\nu \geq G\mu$ d'après le principe de domination. Finalement, $G\mu = G\nu$ et $\mu = \nu$.

<u>LEMME 3</u>. *Soient* A *une partie bornée de* $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{K}$ *une partie compacte de* $\mathbb{R}^d$ *avec* $\bar{A} \cap K = \phi$ *et* $\varepsilon > 0$. *Il existe* $\beta < c(A)$ *tel que :*

$$\forall B \subset A,\ \forall L \text{ compact} \subset K : c(B) > \beta \Rightarrow \sup_{x \in K} (\hat{R}_1^{L \cup A}(x) - \hat{R}_1^{L \cup B}(x)) \leq \varepsilon .$$

On utilise l'inégalité de G. Choquet ([8])

$$\hat{R}_1^{L \cup A}(x) - \hat{R}_1^{L \cup B}(x) \leq \hat{R}_1^{A}(x) - \hat{R}_1^{B}(x) \qquad (1)$$

Au cours de la preuve du lemme 2, on a vu que lorsque $c(B)$ tend vers $c(A)$ ($B \subset A$, B variable) la mesure d'équilibre de B tend vaguement vers celle de A ; de sorte que $\hat{R}_1^B$ tend vers $\hat{R}_1^A$ uniformément sur le compact $\mathbb{K}$ qui est disjoint de $\bar{A}$.

Rappelons pour la commodité du lecteur que (1) se ramène à la sous-additivité forte de la capacité :

$$\hat{R}_1^{A' \cup B'} + \hat{R}_1^{A' \cap B'} \leq \hat{R}_1^{A'} + \hat{R}_1^{B'} \qquad (2)$$

avec $A' = A$, $B' = L \cup B$ (voir [8]) :

On utilisera aussi l'extension suivante du lemme 3 :

<u>LEMME 4</u>. *Soient* $A_1, A_2, \ldots, A_m$ m *parties bornées de* $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{K}$ *un compact de* $\mathbb{R}^d$ *tels que* $\mathbb{K} \cap (\bar{A}_1 \cup \ldots \cup \bar{A}_m) = \phi$. *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\eta > 0$ *tel que :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall B_i \subset A_i ,\ c(B_i) \geq c(A_i) - \eta \ (i = 1,2\ldots m) \\ \qquad \forall L \text{ compact} \subset \mathbb{K} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{R}_1^{L \cup A} - \hat{R}_1^{L \cup B} \leq \varepsilon \ \text{ sur } \mathbb{K}$$

en notant $B = \bigcup_1^m B_i$, $A = \bigcup_1^m A_i$

On peut encore utiliser une variante de la sous-additivité forte de la capacité:

$$c(\bigcup_1^m A_i) - c(\bigcup_1^m B_i) \leq \sum_1^m c(A_i - B_i) \qquad (3)$$

Cette inégalité de Choquet [8] ramène au lemme précédent.

On commence maintenant un raisonnement en trois étapes aboutissant au théorème 1 .

II. UNIFORMISATION DE (H_1) (Première étape).

On montre dans ce paragraphe que (H_1) entraîne l'énoncé suivant :

$$(H_2)\begin{cases} \text{Il existe } \varepsilon > 0 \text{ et un compact discontinu } \mathbb{K}_2 \text{ de } \mathbb{R}^d \text{, non polaire,} \\ \text{tels que, pour chaque compact non vide } L \text{ de } \mathbb{K}_2 \text{, on a :} \\ \inf \{\hat{R}_1^L(x) \; ; \; x \in L\} \leq 1 - \varepsilon . \end{cases}$$

Déduisons d'abord de (H_1) le lemme suivant, où $\mathbb{K}_1$ désigne un compact de $\mathbb{R}^d$ vérifiant (H_1) .

LEMME 5. Il existe $a > 0$, $\varepsilon > 0$ et un compact L_1 de K_1 tels que :

(i) $a < c(L_1)$

(ii) Pour tout compact L de L_1 tel que $c(L) > a$, on a
$\inf \{\hat{R}_1^L(x) , x \in L\} \leq 1 - \varepsilon$.

On raisonne par l'absurde : il existe alors une suite décroissante $\{F_n\}_{n\geq 1}$ de compacts de $\mathbb{K}_1$ et une suite strictement croissante $\{b_n\}_{n\geq 1}$ de réels > 0 telles que :

1°) $c(F_n) > b_n$ $(n \geq 1)$

2°) Pour $n \geq p \geq 0$: $\hat{R}_1^{F_n} > (1-2^{-p})$ sur F_p (on pose $F_o = K_1$) .

Quand les b_i et les F_i ont été construits pour $i < n$, on choisit b_n strictement inférieur à $c(F_{n-1})$ mais assez voisin de celui-ci pour que l'on ait $b_n > b_{n-1}$ si $n \geq 2$ et :

$\forall$ L compact $\subset F_{n-1}$: $c(L) > b_n \Rightarrow \hat{R}_1^L > 1-2^{-p}$ sur F_p pour $p = 0,1,\dots, n-1$.

L'existence d'un tel b_n est une conséquence du lemme 2.

Une fois b_n ainsi fixé, comme on raisonne par l'absurde il existe un compact $F_n \subset F_{n-1}$ avec $c(F_n) > b_n$ et $\hat{R}_1^{F_n} > 1-2^{-n}$ sur F_n .

On construit ainsi de proche en proche une suite de couples $(b_n,F_n)_{n\geq 1}$ vérifiant les 1°) et 2°) ci-dessus. Si on considère $F = \bigcap_1^\infty F_n$, on a $c(F) \geq \sup_{i\geq 1} b_i > b_n$ $(n \geq 1)$. D'où, d'après le choix des b_n successifs, $\hat{R}_1^F \geq (1-2^{-p})$ sur F_p pour $p \geq 1$ et $\hat{R}_1^F \equiv 1$ sur F. Ce qui contredit (H_1)

d'après le lemme 1 .

Montrons alors l'énoncé (H_2) : prenons L_1 , a et $\varepsilon > 0$ comme dans le lemme 5, et posons

$$\mathcal{F} = \{K \; ; \; K \text{ compact} \subset L_1 \, , \, \hat{R}_1^K > 1-\varepsilon \text{ sur } K\}$$

$\mathcal{F}$ est stable par réunion finie, et d'après le lemme 5 :

$$\gamma = \sup \{c(K) \; ; \; K \in \mathcal{F}\} \leq a < c(L_1)$$

Prenons une suite croissante $\{F_n\}_{n \geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{F}$ telle que $\gamma = \sup_{n \geq 1} c(F_n)$ et notons Φ la fermeture fine de la réunion des $F_n (n \geq 1)$.
On a :

$$c(L_1 - \Phi) \geq c(L_1) - a > 0$$

et il suffit de prendre pour K_2 n'importe quel compact contenu dans $L_1 \setminus \Phi$ et de capacité > 0 (il y en a d'après le théorème de capacitabilité, Φ étant borélien) : si L est compact $\subset L_1 \setminus \Phi$ et si $c(L) > 0$, alors
$c(\Phi) < c(\Phi \cup L) = \lim_{n \to \infty} c(F_n \cup L)$. D'où pour n assez grand, $c(F_n \cup L) > \gamma$ et à fortiori $F_n \cup L \notin \mathcal{F}$ puis $L \notin \mathcal{F}$ (puisque $F_n \in \mathcal{F}$) . Si L est polaire, on a aussi évidemment $L \notin \mathcal{F}$.

III. CONSTRUCTION D'UN ENSEMBLE "EN CASCADE" (Deuxième étape)

On montre maintenant que (H_2) entraîne l'assertion suivante :

$$(H_3)\quad \begin{cases} \text{Il existe un compact totalement discontinu } X \subset \mathbb{R}^d \text{, muni d'une relation} \\ \text{d'ordre total notée "} x \leqslant y \text{" et un } \varepsilon > 0 \text{ tels que : 1°) } c(X) > 0 \text{,} \\ \text{2°) la topologie de } X \text{ (induite par } \mathbb{R}^d\text{) est identique à la topologie} \\ \text{de l'ordre } (\leqslant) \text{, et 3°) pour tout } x \in X \text{, on a, si on pose} \\ S_x = \{y \in X \;;\; y \geqslant x\} : \hat{R}_1^{S_x}(x) \leqslant 1-\varepsilon \text{ .} \end{cases}$$

Un tel compact ordonné X est donc effilé "à droite" en chacun de ses points et de capacité > 0. (Ce qui entraîne que chaque partie compacte non vide de X est effilée en au moins un de ses points). Pour construire X à partir du compact $\mathbb{K}_2$ de (H_2), on établit le lemme de "grignotage" suivant :

<u>LEMME 6</u>. *Soient $\varepsilon > 0$, L_1 et L_2 deux compacts totalement discontinus disjoints de $\mathbb{R}^d$ et U un ouvert fin (relatif) de L_1, de capacité > 0. On suppose que pour tout compact non vide $\mathbb{K}$ de U, $\hat{R}_1^{\mathbb{K} \cup L_2}$ atteint des valeurs inférieures à $1-\varepsilon$ sur $\mathbb{K}$. Alors, pour tout $\delta > 0$, il existe U' finement ouvert dans U tel que : 1°) $c(U') > 0$, 2°) $\mathrm{diam}(U') \leqslant \delta$, et 3°) pour tout compact $\mathbb{K}$ de U', $\mathbb{K} \neq \phi$, on a $\inf_{\mathbb{K}} \hat{R}_1^{\mathbb{K} \cup W} \leqslant 1-\varepsilon+\delta$, où $W = L_2 \cup (U \setminus U')$.*

Soit $\{U_i \;;\; 1 \leqslant i \leqslant p\}$ une partition finie de U, en parties ouvertes et fermées (ordinaires) de U de diamètres inférieurs à δ.

a) Remarquons d'abord qu'il existe $i_o \in \{1,2,\dots,p\}$ et $\eta > 0$ tels que :

$$(P)\quad \begin{cases} c(U_{i_o}) > 0 \text{, et pout tout compact } \mathbb{K} \subset U \cup L_2 \text{ tel que } c(\mathbb{K} \cap U_{i_o}) \geqslant c(U_{i_o}) - \eta, \\ \text{on a : } \inf \{\hat{R}_1^{\mathbb{K}}(x) \;;\; x \in \mathbb{K} \cap U_{i_o}\} \leqslant 1-\varepsilon+\delta \text{ .} \end{cases}$$

Pour le voir on raisonne par l'absurde : si notre assertion était en défaut pour $\eta > 0$ donné, on pourrait trouver dans chacun des U_i un compact F_i tel que $c(F_i) \geqslant c(U_i) - \eta$ et que, posant $\Phi_i = F_i \cup L_2 \cup (\bigcup_{j \neq i} U_j)$, on ait : $\hat{R}_1^{\Phi_i} > 1-\varepsilon+\delta$ sur F_i (si U_i est polaire, $F_i = \phi$ convient).

Soit $L = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_p \cup L_2$; dès que η est choisi assez petit (en fonction de $U_1, \ldots, U_p$ et δ) , on aura, d'après le lemme 4 :

$$\hat{R}_1^L \geqslant \hat{R}_1^{\Phi_i} - \delta/2 > 1-\varepsilon+\delta/2 \quad \text{sur} \quad F_i \; .$$

D'où, pour $\eta > 0$ choisi assez petit $\hat{R}_1^L \geqslant 1-\varepsilon+\delta/2$ sur $L \cap L_1$, et $L \cap L_1$ est un compact non ϕ de U . C'est une contradiction avec l'hypothèse.

b) Fixons alors i_o et $\eta > 0$, $1 \leqslant i_o \leqslant p$, vérifiant (P) , posons $V = (U \cup L_2) \setminus U_{i_o}$ et notons $\mathcal{F}$ la famille des compacts non vide L de U_{i_o} tels que :

$$\hat{R}_1^{L \cup V} > 1-\varepsilon+\delta \quad \text{sur} \quad L \; .$$

$\mathcal{F}$ est filtrante croissante et $\gamma = \sup\{c(L) \; ; \; L \in \mathcal{F}\} \leqslant c(U_{i_o}) - \eta < c(U_{i_o})$.

il faut observer que V est borélien à un polaire près, donc capacitable : si $L \in \mathcal{F}$, il existe K compact $\subset V$, tel que $\hat{R}_1^{L \cup K} > 1-\varepsilon+\delta$ sur L (d'après le lemme 3).

Soit $(F_n)_{n \geqslant 1}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{F}$ telle que $\gamma = \sup\limits_{n \geqslant 1} c(F_n)$ et soit Φ la fermeture fine de $\bigcup\limits_1^\infty F_i$: on peut prendre

$$U' = (U_{i_o} \setminus \Phi) \setminus e(U_{i_o} \setminus \Phi) \; .$$

Soit en effet K une partie compacte de U', et supposons d'abord K non polaire : on a $c(K \cup F_n) > \gamma$ pour n assez grand puisque $\gamma = c(\Phi) < c(\Phi \cup K) = \lim\limits_{n\to\infty} c(K \cup F_n)$. Par conséquent, $K \cup F_n \notin \mathcal{F}$ et le potentiel d'équilibre de $K \cup F_n \cup V$ atteint des valeurs inférieures à $1-\varepsilon+\delta$ sur $K \cup F_n$ donc sur K puisque $F_n \in \mathcal{F}$. En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient que le potentiel $\hat{R}_1^{K \cup W}$ atteint aussi des valeurs inférieures à $1-\varepsilon+\delta$ sur K . (On observe que $e(U_{i_o} \setminus \Phi)$ est polaire).

Si K est non vide mais polaire, $K \subset U'$, on remarque que K est intersection d'une suite décroissante de compacts non polaires de U' ; d'où facilement encore la relation (3°) du lemme. Enfin, il est clair que $c(U') = c(U_{i_o} \setminus \Phi) > \eta$.

On établit alors le lemme suivant :

<u>LEMME 7.</u> *Soient* L_1 *et* L_2 *deux compacts totalement discontinus et disjoints de* $\mathbb{R}^d$ *, et* $\varepsilon > 0$ *. On suppose* $c(L_1) > 0$ *et que pour tout compact non vide* $\mathbb{K} \subset L_1$ *,* $\hat{R}_1^{K \cup L_2}$ *atteint sur* K *des valeurs inférieures à* $1-\varepsilon$ *. Pour tout nombre* $\delta > 0$ *donné, il existe une suite finie* $F_1, F_2, \ldots, F_p$ *de compacts de* L_1 *, deux à deux disjoints et tels que :*

1°) $c(F_i) > 0$ *et* $diam(F_i) < \delta$ *pour* $i = 1, 2, \ldots, p$. *2°)* $c(\bigcup_1^p F_i) > c(L_1)-$ *et*

3°) Si L *est un compact non* ϕ *de* $\bigcup_{i=1}^p F_i$ *si* $i_o = \min\{i \; ; \; L \cap F_i \neq \phi$ *et si* $L' = L \cup L_2$ *, on a* $\inf\{\hat{R}_1^{L'}(x) \; ; \; x \in L \cap F_{i_o}\} \leq 1-\varepsilon+\delta$ *.*

<u>Démonstration</u>. A l'aide du lemme 6, on construit par récurrence transfinie une famille $\{U_\alpha\}_{\alpha<\alpha_o}$ d'ouverts fins de L_1 deux à deux disjoints, indexées par le ordinaux inférieurs à l'ordinal α_o , et ayant les propriétés :

1°) $c(U_\alpha) > 0$ et $\mathrm{diam}(U_\alpha) \leq \delta$, pour tout $\alpha < \alpha_o$.

2°) Si K est une partie compacte non vide de $\bigcup_{\alpha<\alpha_o} U_\alpha$, et si β est le premier ordinal tel que $K \cap U_\beta \neq \phi$, alors $\hat{R}_1^{K \cup L_2}$ atteint sur $K \cap U_\beta$ des va leurs inférieures à $1-\varepsilon+\delta$.

3°) Le complémentaire dans L_1 de la fermeture fine de $\bigcup_{\alpha<\alpha_o} U_\alpha$ est polair

Comme $c(\bigcup_{\alpha<\beta} U_\alpha)$ est une fonction strictement croissante de β , α_o est u ordinal dénombrable. On en déduit une suite finie croissante $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_p$ d'ordinaux $< \alpha_o$ telle que : $c(\bigcup_{i=1}^p U_{\alpha_i}) \geq c(L_1) - \delta/2$. Prenant ensuite des compacts $F_1, F_2, \ldots, F_p$ avec $F_p \subset U_{\alpha_i}$ et $c(F_i)$ assez voisins de $c(U_i)$, on aur $c(F_i) > 0$, $c(F_1 \cup \ldots \cup F_p) \geq c(L_1) - \delta$, et la condition 3°) du lemme est manife tement vérifiée.

A partir du lemme 7 et de l'hypothèse (H_2), on construit aisement une famille $\{F_{n_1,\ldots,n_k} \; ; \; 0 \leq n_1 \leq \nu_1, \ldots, \; 0 \leq n_k \leq \nu_k(n_1,\ldots,n_{k-1}) \; , \; k \geq 0\}$ de parties compactes de capacité > 0 de $\mathbb{K}_2$ (le compact de l'énoncé (H_2)) telle que l'on ait :

(on note $\mathfrak{D} = \{\alpha\ ;\ \exists\ k \geq 1\ ,\ \alpha \in \mathbb{N}^k\ ,\ \alpha_i \leq \nu_i(\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1})$ pour $1 \leq i \leq k\}$, $|\alpha|$ la "longueur" d'un multi-indice α , et $\alpha \prec \beta$ la relation "β prolonge α" pour pour $\alpha,\beta \in \mathfrak{D}$)

1°) Si $\alpha,\beta \in \mathfrak{D}$, $|\alpha| = |\beta|$ et $\alpha \neq \beta \Rightarrow F_\alpha \cap F_\beta = \phi$.

2°) Si $\alpha,\beta \in \mathfrak{D}$, $\alpha \prec \beta \Rightarrow F_\beta \subset F_\alpha$.

3°) $\forall\ \alpha \in \mathfrak{D}$, $|\alpha| \geq 1 \Rightarrow \operatorname{diam}(F_\alpha) \leq 2^{-|\alpha|}$.

4°) Posant $\Phi_k = \cup\ \{F_\alpha\ ;\ \alpha \in \mathfrak{D}\ ,\ |\alpha| = k\}$, on a $c(\Phi_k) > \frac{1}{2}\, c(K_2)$ $(k \geq 1)$.

5°) Si K est un compact non ϕ de $\Phi_k (k \geq 1)$, et si α désigne le plus petit multi-indice (pour l'ordre lexicographique) de $\mathfrak{D}$, de longueur k et tel que $K \cap F_\alpha \neq \phi$, alors $\hat{R}_1^K$ atteint sur $K \cap F_\alpha$ des valeurs inférieures à $1 - \varepsilon(1 - \sum\limits_{0}^{k} 2^{-\nu-2})$.

On construit de proche en proche les familles $\mathcal{F}_k = \{F_{n_1,\dots,n_k}\ ;\ 0 \leq n_1 \leq \nu_1,\dots,\ 0 \leq n_k \leq \nu_k(n_1\dots n_{k-1})\}$ (et les fonctions ν_k) par application répétée du lemme 8.

On obtiendra alors un compact X vérifiant l'assertion (H_3) en posant $X = \bigcap\limits_1^\infty \Phi_k$, muni de l'ordre correspondant à l'ordre lexicographique par le plongement canonique de X sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Bien entendu quitte à jetter la partie "clairsemée" de X , on peut supposer que $(X,\leq)$ est isomorphe (pour la topologie et l'ordre) à l'ensemble triadique de Cantor muni de son ordre usuel.

IV. UN COMPACT "EN CASCADE" ET NON POLAIRE EST IMPOSSIBLE (Troisième étape).

On montre dans ce paragraphe que (H_3) conduit à une contradiction. Fixons un point $z_o \in \mathbb{R}^d \setminus X$, d une métrique sur X compatible avec sa topologie et posons, pour $x \in X$ et $\eta > 0$:

$$S_x = \{y \in X \; ; \; y > x\} \quad , \quad S_x^\eta = \{y \in S_x \; ; \; d(x,y) < \eta\} .$$

D'après [6], on déduit de (H_3) que pour chaque $x \in X$ on a :

$$\lim_{\eta \to o} \hat{R}_{G_x}^{S_x^\eta}(z_o) = \lim_{\eta \to o} \hat{R}_{G_{z_o}}^{S_x^\eta}(x) = 0 \qquad (4) .$$

(La deuxième égalité vient de la propriété d'effilement "fort" en théorie classique [6]). Notons aussi le lemme élémentaire suivant :

LEMME 8. Pour tout $\eta > 0$ fixé, l'application : $\varphi : (x,y) \rightsquigarrow \hat{R}_{G_x}^{S_x^\eta}(y)$ est s.c.i. sur $X \times \mathbb{R}^d$.

Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de points de X tendant vers $x_o \in X$; posons $v_n = \hat{R}_{G_{x_n}}^{S_{x_n}^\eta}$ $(n \geq 0)$, et $w_n = \inf\{v_k \; ; \; k \geq n\}$; comme $w = \sup \hat{w}_n$ majore G_x quasi-partout sur $S_{x_o}^\eta$, on voit que $w \geq v_o$; si alors $v_o(y_o) > a$ $(a \geq 0, y_o \in \mathbb{R}^d)$ on aura $w(y_o) > a$ et donc $\hat{w}_{n_o} > a$ sur un voisinage de y_o, pour un certain n_o. D'où si $\{y_n\}$ est une suite de $\mathbb{R}^d$ tendant vers y_o, $\liminf v_n(y_n) > a$: ce qui signifie que φ est s.c.i. en (x_o, y_o).

Ainsi, pour chaque $\eta > 0$, $f_\eta : x \rightsquigarrow \hat{R}_{G_x}^{S_x^\eta}(z_o)$ est s.c.i. On voit alors, à partir de la relation (4) ci-dessus, et en utilisant le théorème d'Egorov pour la mesure d'équilibre de X, et les fonction $f_{1/n}$, qu'il existe une suite $\{\eta_\nu\}_{\nu \geq 1}$ de réels > 0, décroissants vers zéro, et une partie compacte X' de X de capacité > 0 telles que :

$$\forall \, x \in X' : \sum_{\nu=1}^{\infty} \hat{R}_{G_x}^{S_x^{\eta_\nu}}(z_o) \leq 1 \quad .$$

Quitte à remplacer X par X', on supposera que cette relation a lieu pour tout $x \in X$.

Introduisons alors le noyau suivant :

$$\forall\, x \in X \,,\, \forall\, y \in \mathbb{R}^d \qquad H(x,y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} R_{G_x}^{S_x^{\eta_\nu}}(y) \;.$$

H est s.c.i. ≥ 0 sur $X \times \mathbb{R}^d$; posant $H_x(y) = H(x,y)$ $(x \in X, y \in \mathbb{R}^d)$, on voit que H_x est un potentiel newtonien sur $\mathbb{R}^d$ (somme d'une série de potentiels qui converge en au moins un point) dont la mesure associée $-\Delta(H_x)$ est de masse inférieure à une constante finie $c_o > 0$ indépendante de $x \in X$ (ceci d'après $H_x(z_o) \leq 1$) . Une autre propriété essentielle des potentiels H_x est que H_x est "infiniment plus grand que G_x sur la droite de x" $(x \in X)$; plus précisément on a $H_x \geq m\, G_x$ sur $S_x^{\eta_m} \setminus e(X)$.

Fixons alors un entier ≥ 1 , et L un compact de capacité > 0 , $L \subset X$ et L de diamètre inférieur à $(1/2)\eta_m$; notons λ la mesure d'équilibre de L et posons :

$$\begin{cases} H_\lambda(y) = \displaystyle\int_L H(x,y)\, d\lambda(x) \;,\; G_\lambda^1(y) = \int_{\begin{cases} x \leq y \\ x \in X \end{cases}} G_x(y)\, d\lambda(x) \qquad (y \in X) \\ \text{et} \qquad L' = \{y \in L \;;\; G_\lambda^1(y) \geq 1/4\} \;. \end{cases}$$

D'après la symétrie de G , (et le caractère diffus de λ) on a :

$$\int G_\lambda^1\, d\lambda = \iint_{x \leq y} G(x,y)\, d\lambda(x)\, d\lambda(y) = \frac{1}{2} \iint_{L\times L} G(x,y)\, d\lambda(x) d\lambda(y) \;.$$

D'où :

$$\int G_\lambda^1\, d\lambda = \frac{1}{2} \|\lambda\| \;.$$

On en déduit, en notant que $0 \leq G_\lambda^1 \leq 1$, que $\lambda(L') \geq \frac{1}{3} \|\lambda\|$, et par conséquent:

$$(*) \qquad c(L') \geq \frac{1}{3} \|\lambda\| = \frac{1}{3}\, c(L) \;.$$

Comme $H(x,y) \geq m\, G(x,y)$ pour $x,y \in X$, $x < y$ et $d(x,y) < \eta_m$ $(y \notin e(X))$, H_λ est un potentiel newtonien sur $\mathbb{R}^d$, vérifiant pour $y \in L \setminus e(X)$:

$$H_\lambda(y) \geq m\, G_\lambda^1(y)$$

et à fortiori

$$H_\lambda(y) \geq \frac{m}{4} \quad \text{sur} \quad L' \setminus e(X) \;.$$

Comme H_λ est associé à une mesure $-\Delta\, H_\lambda$ de masse inférieure à $c_o \|\lambda\|$ cette dernière relation entraîne

$$(**) \qquad c(L') \leq \frac{4\, c_o}{m} \|\lambda\| \;.$$

Pour m assez grand (*) et (**) sont contradictoires (car $\|\lambda\| \neq 0$). On est ainsi parvenu à la contradiction annoncée et le théorème 1 est établi ! .

V. DEMONSTRATION DU THEOREME 2.

Fixons un potentiel continu et strict q sur $\mathbb{R}^d$ (par exemple $q = G_\mu$, $\mu = e^{-|x|}\, dx_1 \ldots dx_d$) et montrons le lemme suivant :

LEMME 9. Soient $\mathbb{K}$ une partie compacte de $\mathbb{R}^d$ et $\varepsilon > 0$; il existe un compact $\mathbb{K}' \subset \mathbb{K}$ tel que 1°) $c(\mathbb{K} - \mathbb{K}') < \varepsilon$ 2°) $\hat{R}_q^{\mathbb{K}'} \geq (1-\varepsilon)\, q$ sur $\mathbb{K}'$.

On sait que $\mathbb{K}_\varepsilon = \{x \in \mathbb{K}\ ;\ \hat{R}_q^{\mathbb{K}}(x) \leq (1-\varepsilon)\, q(x)\}$ est un compact polaire ([6]); on peut donc trouver un ouvert U de $\mathbb{R}^d$ tel que $\mathbb{K}_\varepsilon \subset U$ et $c(U) < \varepsilon$; notons $\mathcal{F}$ la famille des compacts de la forme $(\mathbb{K} \cap \complement U) \cup L$, où L parcourt l'ensemble des compacts inclus dans $U \cap \mathbb{K}$, avec $e(L) = \phi$. $\mathcal{F}$ est filtrante croissante, et d'après le théorème 1, le réunion des éléments de $\mathcal{F}$ est finement dense dans $\mathbb{K} \setminus e(\mathbb{K})$; on en déduit que $\hat{R}_q^{\mathbb{K}} = \sup\limits_{X \in \mathcal{F}} \hat{R}_q^X$, et, avec le lemme de Dini, qu'il existe $X \in \mathcal{F}$ tel que $\hat{R}_q^X \geq (1-\varepsilon)\, q$ sur $(\mathbb{K} \cap \complement U)$ (et à fortiori puisque $e(X \cap U) = \phi$ sur X tout entier).

Démonstration du théorème 2. Soient $\mathbb{K}$ un compact non polaire de $\mathbb{R}^d$ et $\varepsilon > 0$; d'après le lemme 9 , on peut construire une suite décroissante $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$ de compacts de $\mathbb{K}$ telle que : 1°) $\Phi_0 = \mathbb{K}$ 2°) pour $n \geq 0$, $c(\Phi_n - \Phi_{n+1}) \leq \varepsilon\, 2^{-n-1}$ 3°) pour $n \geq p \geq 0$: $\hat{R}_q^{\Phi_n} > (1-2^{-p})\, q$ sur Φ_p . (On utilise encore le lemme de Dini).

Il suffit alors de poser $\mathbb{K}' = \bigcap\limits_1^\infty \Phi_n$: on aura $R_q^{K'} \geq (1-2^{-p})\, q$ sur Φ_p , et donc $\hat{R}_q^{K'} \geq (1-2^{-p})^2\, q$ sur Φ_p ; ce qui entraîne $\hat{R}_q^{K'} = q$ sur K' c'est-à-dire ([6]) $e(K') = \phi$, et on a évidemment $c(K-K') \leq \varepsilon$

C.Q.F.D.

COROLLAIRE 10. Soit μ une mesure ≥ 0 d'énergie finie sur $\mathbb{R}^d$; il existe une suite $(\mathbb{K}_n)_{n \geq 1}$ de compacts de $\mathbb{R}^d$ telle que : (i) $\forall\, n \geq 1$, $e(K_n) = \phi$ (ii) $\mu(\mathbb{R}^d \setminus \bigcup\limits_1^\infty K_n) = 0$.

Remarquons que lorsque μ est absolument continue par rapport à la mesure e Lebesgue λ sur $\mathbb{R}^d$, on peut établir assez facilement le corollaire (et donc e théorème 1, pour $\mathbb{K}$ de λ-mesure > 0) : on montre en effet que pour tout compact $\mathbb{K}$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $\mathbb{K}' \subset \mathbb{K}$, dont la densité supérieure n chacun de ses points est strictement > 0 (et même $\geqslant 2^{-d}$, si on calcule la ensité à l'aide de cubes) et tel que $\lambda(K-K') < \varepsilon$; ces conditions entraînent ue $e(\mathbb{K}') = \phi$ (par exemple, à l'aide du critère de Wiener). La méthode s'étend u cas où μ est une mesure de Hausdorff d'ordre α sur $\mathbb{K}$, si $\alpha > d-2$, et $(K) > \infty$.

On retrouve ainsi une remarque de B. Fuglede [12] : si $\mathbb{K}$ est un compact e $\mathbb{R}^d$ d'intérieur fin non vide, il contient un compact $\mathbb{K}' \neq \phi$ avec $e(K') = \phi$: n sait en effet qu'un ouvert fin non vide de $\mathbb{R}^d$ est de mesure de Lebesgue > 0 .

I. UNE CLASSE DE NOYAUX FONCTIONS DE LA THEORIE DU POTENTIEL.

On peut facilement étendre les théorèmes 1 et 2 au cadre suivant. E est un es- ace compact métrisable, et $G : E \times E \to [0,+\infty]$ un noyau-fonction s.c.i., continu ors de la diagonale, symétrique et vérifiant le principe de domination [7], [20]. n décrit dans cette partie un type à peu près standart de noyau-fonction beaucoup lus général : G ne sera en général ni symétrique, ni régulier au sens de Choquet 7]. Après quelques rappels et quelques résultats préliminaires, on donnera pour n tel noyau une propriété contenant le théorème 1 comme cas particulier (voir les arties VIII et IX). Dans le paragraphe D ci-dessous, on rappellera quelques kemples où nos hypothèses sont vérifiées.

) Soient E un compact métrisable, ξ une mesure de Radon $\geqslant 0$ sur E de sup- ɔrt E , et $V,\tilde{V}$ deux noyaux fortement felleriens sur E - c'est-à-dire ici que V t $\tilde{V}$ transforment fonctions boréliennes bornées sur E en fonctions finies conti- ɿes sur E . B désignera l'ensemble des fonctions boréliennes bornées sur E , ⊦ le cône des fonctions positives de B . On fait les hypothèses suivantes :

1°) V et $\tilde{V}$ vérifient le principe de domination.

2°) V et $\tilde{V}$ sont en dualité par rapport à ξ : $\forall f,g \in B$:

$\forall f,g \in B : \int V(f)\, g d\xi = \int f.\tilde{V}(g)\, d\xi$.

3°) Le cône $\mathcal{S}_c$ (resp. $\tilde{\mathcal{S}}_c$) des fonctions finies continues sur E , et V surmédianes (resp. et $\tilde{V}$-surmédianes) est linéairement séparant.

Quitte à remplacer ξ par sa restriction à $E' = E \setminus ([V1 = 0] \cup [\tilde{V}1 = 0])$, et E par $\bar{E}'$ on supposera que $\xi([V1 = 0] \cup [\tilde{V}1 = 0]) = 0$. ξ est alors une mesure de référence pour V et $\tilde{V}$: $\forall f \in B_+ \quad Vf = 0 \Leftrightarrow \tilde{V}f = 0 \Leftrightarrow f = 0 \quad \xi$.pp.

Il existe alors deux résolvantes achevées $(V_\lambda)_{\lambda \geqslant 0}$ et $(\tilde{V}_\lambda)_{\lambda \geqslant 0}$ fortement felleriennes, en dualité par rapport à ξ , et telles que $V_o = V$, $\tilde{V}_o = \tilde{V}$. Comme d'habitude, le préfixe co signalera les notions relatives à $\tilde{V}$, où à la résolvante $(\tilde{V}_\lambda)$ ([21]) .

Notons D (resp. $\tilde{D}$) l'ensemble des points de branchements pour V (resp $\tilde{V}$) (voir [20]) : pour $x \in E$, $x \in E \setminus D$ si et seulement si $\varepsilon_x = \lim\limits_{\lambda \to \infty} \varepsilon_x(\lambda V_\lambda)$ (au sens vague). En prenant s_o tel que $\{s \in \mathcal{S}_c \ ; \ \exists\, \alpha > 0 \ \ s_o - \alpha\, s \in \mathcal{S}_c\}$ soit dense dans $\mathcal{S}_c$, et en notant $\hat{s}_o$ la régularisée excessive de s_o on a :
$D = \{x \ ; \ \hat{s}_o(x) < s_o(x)\}$. En particulier $D \cup \tilde{D}$ est un K_σ ξ-négligeable. L'espace "utile" dans la suite est le polonais $Y = E \setminus D \cup \tilde{D}$.

D'après Kunita-Wanatabe ([17], [21]) on peut introduire un noyau fonction G pour représenter V et $\tilde{V}$: il existe $G : E \times E \to [0,+\infty]$ s.c.i. et tel que pour toute mesure $\mu \geqslant 0$ finie sur E , le potentiel $G\mu$ (resp. $\tilde{G}\mu$) est une fonction excessive (resp. co-excessive) telle que $\mu \circ \tilde{V} = (G\mu).\xi$ (resp. $\mu \circ V = (\tilde{G}\mu).\xi$) . On a noté :
$G\mu(x) = \int G(x,y)\, d\mu(y)$, $\tilde{G}\mu(x) = \int G(y,x)\, d\mu(y)$ $(x \in X)$. En particulier, pour $f \in B_+$, $V(f) = G(f\xi)$ et $\tilde{V}(f) = \tilde{G}(f\xi)$.

Un point $x_o \in E$ est de co-branchement si et seulement si $G_{x_o} = G\mu$, (on pose $G_{x_o} = G\varepsilon_{x_o}$) pour une μ ne chargeant pas $\tilde{D}$, et $\mu \neq \varepsilon_{x_o}$. En particulier $\{G_x \ ; \ x \notin \tilde{D}\}$ est l'ensemble des génératrices extrémales du cône des G-potentiels, et si $G\mu = G\mu'$, μ et μ' ne chargeant pas $\tilde{D}$, on a $\mu = \mu'$. Notons aussi que si s est excessive, ξ-intégrable et portée par un compact K (au sens que $s = R_s^K$) disjoint de $\tilde{D}$, alors s est le G-potentiel d'une mesure positive bien déterminée portée par K .

B) Rappelons maintenant quelques résultats clefs de la théorie du Potentiel par rapport à G : pour μ,ν mesures $\geqslant 0$ sur Y, et A partie de Y, on a l'identité fondamentale (due à Hunt en théorie des processus de Markov [4]) :

$$\int \hat{R}^A_{G\mu}\, d\nu = \int \hat{\tilde{R}}^A_{\tilde{G}_\nu}\, d\mu .$$

($\tilde{R}$ désigne l'opérateur de coréduite). On sait déduire de cette relation les équivalences : pour $A \subset Y$, (i) A polaire $\Leftrightarrow$ A copolaire (ii) A semi-polaire $\Leftrightarrow$ A co-semi-polaire (voir [4], [21]).

G. Mokobodzki a défini la notion de fonction excessive régulière, et celle duale de mesure régulière (relative à V) et a établi les équivalences [22] (voir aussi [18])

(i) Si s est excessive, finie ξ-pp : s régulière $\Leftrightarrow$ s est somme d'une série de fonctions excessives, finies et continues sur E.

(ii) Pour μ mesure $\geqslant 0$ finie sur Y : μ régulière $\Leftrightarrow$ μ ne charge pas les boréliens semi-polaires. (Pour l'implication $\Leftarrow$ de (ii), on peut consulter [18]).

On voit donc qu'une mesure $\geqslant 0$ finie sur Y est régulière si et seulement si elle est corégulière et si et seulement si elle est somme d'une série de mesures $\geqslant 0$ μ_n avec $G\mu_n \in \mathscr{C}(E)$.

La propriété suivante remonte à J. Azéma [3] dans le cadre des processus de Markov ; elle a été établie plus récemment par des méthodes purement potentialistes par W. Hansen [13], puis dans [2] dans le cadre des résolvantes.

(iii) Pour A borélien $\subset Y$: A semi-polaire $\Leftrightarrow$ $\forall\, \mu$ mesure régulière sur Y, $\mu(A) = 0$.

Comme dans [13], on notera, pour $A \subset Y$ et s excessive, Q^A_s la réduite "essentielle" de s sur A, c'est-à-dire la plus petite fonction excessive majorant s sur A sauf peut-être sur un semi-polaire ; si A' désigne le plus grand fermé fin relatif de A, qui est non semi-polaire au voisinage fin de chacun de ses points, alors $A \setminus A'$ est semi-polaire et par conséquent $Q^A_s = R^{A'}_s$. Si on note $\tilde{A}'$ l'ensemble analogue relatif à la théorie adjointe, et si on pose $A'' = A \cap A' \cap \tilde{A}'$, on a $Q^A_s = R^{A''}_s$ et de même $\tilde{Q}^A_{s'} = \tilde{R}^{A''}_{s'}$ pour s' co-excessive : on en déduit la formule

$$\forall\, \mu,\nu \text{ mesures } \geqslant 0 \text{ sur } Y : \int Q^A_{G_\mu}\, d\nu = \int \tilde{Q}^A_{\tilde{G}_\nu}\, d\mu .$$

C) Pour mesurer les ensembles, on est amené à utiliser deux fonctions d'ensembles :

a) La capacité : Notant $p_o = V1$, $\tilde{p}_o = \tilde{V}1$, on pose :

$$\forall\, A \subset Y \;:\; c(A) = \int \hat{R}^A_{p_o}\, d\xi = \int \hat{\tilde{R}}^A_{\tilde{p}_o}\, d\xi$$

c est une capacité de Choquet alternée d'ordre 2 sur Y et $c(A) = 0$ équivaut à A polaire.

b) la contenance :

$$\forall\, A \subset Y \quad \mathrm{cont}(A) = \int Q^A_{p_o}\, d\xi = \int \tilde{Q}^A_{\tilde{p}_o}\, d\xi \;.$$

L'égalité $\mathrm{cont}(A) = 0$ signifie que A est semi-polaire. Notons aussi les identités pour A borélien :

$$\begin{cases} c(A) = \sup \{\int_A \tilde{p}_o\, d\mu \;;\; \mu \text{ mesure} \geq 0 \text{ sur } Y \text{ telle que } G\mu \leq p_o\} \\ \mathrm{cont}(A) = \sup\{\int_A \tilde{p}_o\, d\mu \;;\; \mu \text{ mesure} \geq 0 \text{ sur } Y \text{ telle que } G\mu \in \mathcal{C}(E) \text{ et } G\mu \leq p_o\}. \end{cases}$$

D) Exemples. Commençons par étendre un peu le cadre défini en A ; supposons seulement que E est localement compact à base dénombrable, que les noyaux V et $\tilde{V}$ transforment les fonctions boréliennes bornées à support compact en fonctions continues, et reprenons les hypothèses 1°), 2°) et 3°) du A. Les considérations précédentes s'étendent sans difficulté à ce cadre - par exemple en utilisant une suite exhaustive $\{K_n\}_{n \geq 1}$ de compacts, telle que $\overline{\mathring{K}_n} = K_n$ pour $n \geq 1$. Pour définir la capacité et la contenance, on commencera par modifier $V, \tilde{V}$, et ξ en $V', \tilde{V}', \xi'$ tels que $V'1 \in L^1(\xi')$: on prend $\xi' = a\xi$, $V'(f) = V(af)$, $\tilde{V}'(f) = V'(af)$, où $a \in \mathcal{C}(E)$, $0 \leq a \leq 1$, est telle que $\int V(a).a\, d\xi < +\infty$.

Voici alors deux situations classiques où apparaîssent des noyaux fonctions du type considéré :

a) Noyau invariant par translation : Soit N une fonction ≥ 0 sur $\mathbb{R}^d$, à valeurs dans $[0,+\infty]$, localement intégrable par la mesure de Lebesgue λ_d sur $\mathbb{R}^d$. On suppose que $N(x) = \liminf_{y \to x_o} \mathrm{ess}\, N(y)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, que N n'admet aucune pseudo-période non nulle et que le noyau de convolution N vérifie le principe de domination ([20], [9]). Le noyau fonction $G(x,y) = N(x-y)$ $(x,y \in \mathbb{R}^d)$ rentre dans le cadre considéré. Exemples : le noyau de Heaveside sur $\mathbb{R}$ (N est l'indicatrice de $]0,+\infty[)$, les noyaux de Riesz sur $\mathbb{R}^d$ ($N_\alpha(x) = \|x\|^{-\alpha}$, $x \in \mathbb{R}^d$, $d-2 \leq \alpha < d, \alpha > 0$), le noyau de Gauss (ou de la chaleur) sur $\mathbb{R}^n$,

$N(x) = N(x',x_n) = (4\pi\, x_n)^{-\frac{n-1}{2}} \exp(-|x'|^2/4\pi\, x_n)$, si $x_n > 0$, et $N(x) = 0$ si $x_n \leq 0$) ; signalons enfin toute une classe "explicite" de noyaux N du type ci-dessus dans le cas $d = 1$: N est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, tendant vers 0 à l'infini $N(0) = \liminf_{\substack{x \to o \\ x \neq o}} N(x)$, $N \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$ N et $\check{N}$ sont convexes et à dérivées secondes logarithmiquement convexes sur $]0,+\infty[$. Cette classe a été récemment exhibée par M. Ito ([15]). On peut noter en particulier les noyaux de Kishi $N(x) = |x|^{-\alpha}$ si $x \geq 0$, $N(x) = |x|^{-\beta}$ si $x \leq 0$, avec $0 < \alpha,\beta < 1$ ([16]) .

b) <u>Noyau associé à une diffusion</u> : On considère un opérateur différentiel L d'ordre 2 sur un ouvert borné ω de $\mathbb{R}^d$ de la forme :

$$Lu = \sum_{i=1}^{d} X_i^2(u) + Yu \qquad\qquad u \in C_o^\infty(\omega)$$

où les X_i et Y sont des champs de vecteurs de classe C^∞ sur $\bar{\omega}$, engendrant une algèbre de Lie $\mathcal{L}(X_1,..,X_d,Y)$ de rang d en tout point de $\bar{\omega}$; d'après J.M. Bony [5], on peut associer à L une fonction de Green sur $\omega \times \omega$: $G(.,y)$ est une solution ≥ 0 minimale de $Lu = -\delta_y$, de classe C^∞ sur $\omega \setminus \{y\}$, et valant sa limite inférieure en mesure en y . Ce noyau G rentre également dans notre cadre : il est associé à la mesure $\xi = \lambda_{d/\omega}$ et aux noyaux $V,\tilde{V}$ qui prolongent les opérateurs de Green $(-L)^{-1}$, $(-L^*)^{-1}$ qui sont définis sur $C_o^\infty(\omega)$ et à valeurs dans $C^\infty(\omega)$.

VII. <u>QUELQUES NOTIONS ET RESULTATS PRELIMINAIRES</u>.

A) Commençons par une propriété de continuité des fonctions excessives en dehors de leur support ; cette propriété est due à G. Mokobodzki :

<u>*THEOREME 3.*</u> *Si s est une fonction excessive bornée, portée par un compact $\mathbb{K} \subset Y$ ($s = R_s^K$) alors s/Y est continue en tout point de $Y \setminus \mathbb{K}$.*

Voici, assez abrégée, la preuve de Mokobodzki (voir la technique de [23]) :

soient N le noyau de réduction sur $\mathbb{K}$ $(N(\sigma) = R_\sigma^K$ pour $\sigma \in \mathcal{S}_c)$ et V' le noyau $V-NV$, l'espace de base étant Y .

On sait que pour $\sigma \in \mathcal{S}_c$, $\hat{R}_\sigma^K = R_\sigma^K$ sur $Y-K$ (voir, par exemple, [23] p. 181 à 185), de sorte que R_σ^K est à la fois s.c.i. et s.c.s. sur $Y - \mathbb{K}$; on en déduit que V' est fortement fellerien sur $Y \setminus \mathbb{K}$: pour $f \in B_+$, $V'(f)$ est continue sur $Y \setminus K$.

D'autre part, V' est borné et vérifie le principe de domination, et toute fonction V-excessive est V'-excessive sur $Y \setminus K$. Si s_1, s_2 sont V-excessives bornées et $s_1 \leq s_2$, $N(s_2-s_1)$ est V'-excessive sur $Y \setminus \mathbb{K}$, car $N(s_2-s_1)$ est V'-surmédiane et $N(s_2)$, $N(s_1)$ sont V'-excessives sur $Y \setminus K$. On en déduit que $N(s_2-s_1)$ est s.c.i. sur $Y \setminus \mathbb{K}$.

Prenons alors $\sigma \in \mathcal{S}_c$, $\sigma \geq s$: $N(\sigma-s)$ est s.c.i. sur $Y-K$, et comme $N(\sigma) = R_\sigma^K$ est continue sur $Y \setminus K$, $N(s)$ doit être à la fois s.c.i. et s.c.s. sur $Y \setminus K$.

COROLLAIRE 11. *Si μ est une mesure ≥ 0 sur le compact $\mathbb{K} \subset Y$ de potentiel $G\mu$ borné, alors $G\mu$ est continu sur $Y \setminus \mathbb{K}$.*

Posons $f_n = n(G\mu - n V_n G\mu)$, donc $f_n \xi = n \mu \circ \tilde{V}_n$; alors $f_n \xi$ tend vaguement vers μ , et la suite $V(f_n)$ tend en croissant vers $G\mu$. Comme $f_n \xi$ tend vaguement vers μ , on peut trouver des compacts $\mathbb{K}_n \subset Y$ tels que i) $\lim_{n\to\infty} \sup K_n \subset K$ et ii) on a $\lim_{n\to\infty} \xi(f_n 1_{K^c}) = 0$. D'où $G\mu = \sup_{n \geq p} V(f_n 1_{K_n}) = \lim_{n\to\infty} V(f_n 1_{K_n})$ $(p \geq 1)$.

Si on note $\mathbb{K}' = K \cup \bigcup_p^\infty K_j$, on aura $G\mu = R_{G\mu}^{K'_p}$, et par conséquent $G\mu$ est finie continue sur $Y \setminus K'_p$ pour tout $p \geq 1$; d'où le corollaire.

On peut appliquer ces résultats à la convergence d'une suite $G\mu_n$ en dehors de la réunion des supports des μ_n :

PROPOSITION 12. *Soient $\{\mu_n\}_{n \geq 1}$ une suite de mesures ≥ 0 sur le compact $\mathbb{K} \subset Y$, convergeant vaguement vers la mesure μ , et telle que la suite $\{G\mu_i\}$ soit uniformément bornée. Alors :*

1°) $G\mu = \sup_n \widehat{(\inf_{j>n} G\mu_j)}$ sur Y (^ désigne la V-régularisation).

2°) Sur tout compact $Z \subset Y \setminus \mathbb{K}$, $G\mu_i$ converge uniformément vers $G\mu$.

Pour le 1°) les hypothèses sur les supports des μ_j sont inutiles et la propriété est classique ; G étant s.c.i. on a $G\mu \leq \liminf_{n\to\infty} G\mu_n$, soit $G\mu \leq \lim_n \widehat{(\inf_{j\geq n} G\mu_j)}$ sauf sur un semi-polaire, donc partout sur Y .

Comme d'autre part $\int G\mu\, d\xi = \int \tilde{p}_o\, d\mu = \lim_{j\to\infty} \int \tilde{p}_o\, d\mu_j = \lim_{j\to\infty} \int G\mu_j\, d\xi$, on obtient $G\mu = \lim_{n\to\infty} \widehat{(\inf_{j\geq n} G\mu_j)}$ ξ.pp et donc partout ; on voit aussi que $G\mu_j$ tend vers $G\mu$ dans $L^1(\xi)$, et en extrayant au besoin une sous-suite que $G\mu_j$ tend vers $G\mu$ ξ.pp.

Prenons alors sur $Y \setminus \mathbb{K}$ le noyau $V' = V - NV$ (N = noyau de réduction sur K), et soit $\sigma \in \mathcal{S}_c$ telle que $\sigma \geq \sup_j G\mu_j$; alors $\lim_{j\to\infty} \widehat{\inf} (\sigma - G\mu_j)$ ($\wedge$ désigne ici la V'-régularisation) est V'excessive et vaut $\sigma - G\mu$ ξ-pp , donc partout sur $Y - \mathbb{K}$ (V' est de base ξ) .

Ainsi, sur $Y \setminus \mathbb{K}$ $G\mu = \sup_n \widehat{(\inf_{j\geq n} G\mu_j)} = \inf_n \widecheck{(\sup_{j\geq n} G\mu_j)}$ ($\wedge$ et $\vee$ désignant cette fois les régularisations s.c.i. et s.c.s. respectivement). D'où facilement le 2°).

B) On introduit maintenant une classe d'ensembles permettant de faire apparaître dans notre cadre des propriétés qui semblent propre au cas classique (où essentiellement G vérifie le principe de continuité des masses d'Evans, et où plus accessoirement G est symétrique).

<u>Définition 13</u>. Une partie $A \subset Y$ sera dite accessible si $c(A) = \mathrm{cont}(A)$.
Cela équivaut à $\hat{R}^A_{p_o} = Q^A_{p_o}$, ou encore à $\hat{\tilde{R}}^A_{\tilde{p}_o} = \tilde{Q}^A_{\tilde{p}_o}$.

On a la caractérisation suivante de l'accessibilité : on notera $\tilde{e}(A)$, (resp $e(A)$) l'ensemble des points de A où A est effilé (resp. co-effilé).

<u>*PROPOSITION 14*</u>. *Soit A une partie relativement compacte de Y : A est accessible si et seulement si les deux conditions suivantes ont lieu :*

(i) $e(A) \cap \tilde{e}(A)$ est polaire

(ii) Tout ouvert fin (resp. cofin) non vide de $A \setminus e(A)$ (resp. de $A - \tilde{e}(A)$) n'est pas semi-polaire.

On verra ensuite (théorème 4) que pour A compact dans Y , A est accessible si et seulement si $e(A) \cap \tilde{e}(A)$ est polaire.:

Etablissons d'abord la propriété suivante :

<u>LEMME 15</u>. *Soient* $A \subset E$ *tel que* $\bar{A} \subset Y$ *, et* μ *la mesure "d'équilibre" de* A : $G\mu = \hat{R}^A_{p_o}$ *,* μ *portée par* $\bar{A}$ *. Si* B *est une partie* K_σ *de* Y *telle que* $\mu^*(B) = 0$ *, alors* $B \cap e(A)$ *est polaire.*

On peut supposer B compacte, et $B \subset \{x \in \bar{A} \ ; \ \hat{R}^A_{p_o}(x) \leq (1-\alpha)\ p_o(x)\}$ pour un $\alpha > 0$; soit par ailleurs K_o un compact $\subset Y$ tel que $\bar{A} \subset K_o \setminus e(K_o)$; on construit un tel compact de la manière suivante : par une méthode analogue à celle utilisée dans le corollaire 1, on construit une suite $\{f_n\} \subset B_+$, avec i) $\mathrm{supp}(f_n)$ est compact $\subset Y$ ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup \{\mathrm{supp}\ f_n\} \subset \bar{A}$ iii) $V(f_n) \leq p_o$, et $\lim\limits_{n\to\infty} V(f_n) = p_o$ uniformément sur $\bar{A}$. Il suffit alors de prendre $K_o = (\overset{\infty}{\underset{1}{\cup}} \mathrm{supp}(f_n)) \cup \bar{A}$.

Soit $\{s_n\}_{n\geq 1}$ une suite décroissante de fonctions excessives telle que $\hat{R}^A_{p_o} = \widehat{\inf_{n\geq 1} s_n}$, $s_n \leq p_o$ sur E et $s_n = p_o$ sur A . Quitte à remplacer chaque s_n par $\hat{R}^{K_o}_{s_n}$, on peut supposer que $s_n = G\mu_n$, (μ_n mesure positive sur K_o). On a alors $\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n$.

Fixons un voisinage ω de B , et notons $\mu'_n = \mu_n\ 1_{\omega^c}$; après extraction on peut supposer $\{\mu'_n\}$ vaguement convergente de limite μ' ; soit $\mu''_n = \mu_n - \mu'_n$.

On a :
$$G\mu''_n + G\mu'_n \geq R^A_{p_o} \qquad (n \geq 1)$$

d'ou :
$$G\mu''_n \geq R^A_{p_o} - G\mu'_n \geq (R^A_{p_o} - \hat{R}^A_{p_o}) + (G\mu' - G\mu'_n) .$$

Comme $G\mu'_n$ tend vers $G\mu'$ uniformément sur B , on voit que pour $\varepsilon > 0$ donné, on aura pour n assez grand :

$$G\mu''_n \geq \alpha\ p_o - \varepsilon \qquad \text{sur} \qquad B \cap A .$$

En prenant $\varepsilon_o = \frac{\alpha}{2} \cdot \inf\limits_{x\in B} p_o(x)$, on a donc pour n assez grand $G\mu''_n \geq \varepsilon_o\ p_o$ sur $B \cap A$. D'où :

$$c(B \cap A) \leq \frac{1}{\varepsilon_o} \underline{\lim} \int \tilde{p}_o\ d\mu''_n \leq \frac{1}{\varepsilon_o} \int_{\bar{\omega}} \tilde{p}_o\ d\mu .$$

Et comme $\mu(B) = 0$, on obtient $c(B \cap A) = 0$.

Montrons alors la proposition 14 :

a) Les conditions sont nécessaires : si A est accessible, $c(A) = c(A \setminus \tilde{e}(A))$; donc la co-balayée μ de ξ sur A est auss la co-balayée de ξ sur $A \setminus \tilde{e}(A)$, et elle ne charge pas l'ensemble $[\tilde{R}^A_{\tilde{p}_o} < \tilde{p}_o]$ qui est un F_σ dont la trace sur A est $\tilde{e}(A)$; d'après le lemme précédent $e(A) \cap \tilde{e}(A)$ est donc polaire. La nécessité de la condition ii) est immédiate puisque on doit avoir $\hat{R}^A_{p_o} = R^{A \setminus P}_{p_o}$ pour tout semi-polaire $P \supset e(A)$ (et la propriété duale).

b) Les conditions sont suffisantes : on a $c(A) = c(A \setminus \tilde{e}(A))$; en effet, si s est excessive et majore p_o sur $A \setminus \tilde{e}(A)$, alors d'après le ii), on a aussi $s \geqslant p_o$ sur $A \setminus \tilde{e}(A) \cap e(A)$; d'où $c(A \setminus \tilde{e}(A)) = c(A \setminus \tilde{e}(A) \cap e(A))$, quantité encore égale à $c(A)$ d'après le i). De même $c(A \setminus e(A)) = c(A)$.

En utilisant encore le ii), on a $c(A \setminus e(A)) = c(A \setminus e(A) \cup P)$ pour tout semi-polaire P de Y. Finalement $c(A) = c(A \setminus P)$ pour tout semi-polaire P de Y et A est donc accessible.

COROLLAIRE 16. *(1) Si A est accessible, ($\bar{A} \subset Y$) tout ouvert de A est accessible.*

(2) Réciproquement, si tout point de A admet un voisinage (dans A) accessible, A est accessible.

(3) Une réunion finie ou dénombrable A d'ensembles accessibles est encore accessible.

(On suppose dans ces énoncés A relativement compact dans Y).

(1) est évident, de même que le (3) pour une réunion finie : d'où le cas d'une réunion dénombrable, la réunion d'une suite croissante d'ensembles accessibles étant accessible puisque la capacité et la contenance passent à la limite sur les suites croissantes. Enfin, le 2°) est conséquence du 3°).

Les propriétés (1) et (2) signifient que l'accessibilité est une propriété locale.

Si A est compact, $A \subset Y$, l'énoncé de la proposition 14 peut être simplifié :

THEOREME 4. *Si A est compact, $A \subset Y$ (ou si A est seulement relativement compact dans Y, et à la fois G_δ fin, et G_δ co-fin), A est accessible si et seulement si $e(A) \cap \tilde{e}(A)$ est polaire.*

Supposons donc A relativement compact dans Y, à la fois G_δ fin et G_δ cofin, et tel que $e(A) \cap \tilde{e}(A)$ est polaire. Voyons d'abord que $A \setminus \tilde{e}(A)$ ne peut être effilé en un point de $B = \tilde{e}(A) \setminus e(A) \cap \tilde{e}(A)$: sinon, on aurait un ouvert fin ω avec $\omega \cap [A \setminus \tilde{e}(A)] = \phi$, et $\omega \cap B \neq \phi$; $\omega \cap B$ est semi-polaire et comme $\omega \cap B = (\omega \cap A) \setminus e(A) \cap \tilde{e}(A)$, l'ensemble $\omega \cap B$ est un G_δ fin non vide et semi-polaire. On sait alors, $\omega \cap B$ étant de Baire pour la topologie fine, que $\omega \cap B$ est effilé en au moins un de ses points x_1 : mais alors A est à la fois effilé et co-effilé en x_1, ce qui est absurde. (Remarque : Y est tamisable fort pour la topologie fine, ses G_δ sont donc des espaces de Baire).

Comme $A \setminus \tilde{e}(A)$ n'est effilé en aucun point de B, on voit que $c(A \setminus \tilde{e}(A)) = c(A \setminus \tilde{e}(A) \cap \tilde{e}(A))$; d'où puisque $\tilde{e}(A) \cap e(A)$ est polaire $c(A \setminus \tilde{e}(A)) = c(A)$. De même, $c(A \setminus e(A)) = c(A)$. Cela signifie que $\hat{R}_{p_o}^{A \setminus e(A)} = \hat{R}_{p_o}^{A}$, donc aussi que $\hat{R}_{p_o}^{A \setminus e(A)} = p_o$ sur $A \setminus e(A)$. Ainsi $A \setminus e(A)$ n'est effilé en aucun de ses points et on sait qu'alors $A \setminus e(A)$ (qui est encore de Baire pour la topologie fine) est non-semi-polaire au voisinage fin de chacun de ses points. D'où le théorème.

Voici deux énoncés permettant de construire des compacts accessibles ; on donnera plus bas une propriété plus forte que celle du lemme suivant :

<u>LEMME 17</u>. *Pour $\varepsilon > 0$, et pour $\mathbb{K}$ compact $\subset Y$, il existe un compact $\mathbb{K}' \subset \mathbb{K}$ tel que : 1°) $\mathbb{K}'$ est accessible 2°) cont $(\mathbb{K}') \geq$ cont $(\mathbb{K}) - \varepsilon$.*

<u>Preuve</u>. Soit μ_o une mesure régulière sur $\mathbb{K}$ telle que $G\mu_o \leq p_o$ et $\int \tilde{p}_o \, d\mu \geq \text{cont}\ (\mathbb{K}) - \varepsilon/2$, et posons $\mathbb{K}_o = \mathbb{K}$. On peut construire de proche en proche une suite $\{\mu_n\}_{n \geq 1}$ de mesures régulières sur $\mathbb{K}$, et une suite décroissante $\{\mathbb{K}_n\}_{n \geq 1}$ de compacts de $\mathbb{K}_o$ telles que :

i) $\forall n \geq 0$, $\mathbb{K}_{n+1} \subset [Q_{p_o}^{K_n} = p_o] = A_n$

ii) $\forall n \geq 0$, $\forall p \geq n$: $G\mu_n \leq p_o$ et $\int_{K_p} \tilde{p}_o \, d\mu_n > \text{cont}\ (K_n) - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$.

La construction est immédiate en observant que les $K_n \setminus A_n$ sont semi-polaires, et donc μ-négligeables pour toute μ-régulière. Posons $\mathbb{K}' = \bigcap_1^\infty K_n$, la construction est telle que $\text{cont}(K') \geq \sup_{n \geq 1} \int_K \tilde{p}o \, d\mu_n \geq \lim_{n\to\infty} \text{cont}(K_n)$, et que $c(K_n) \leq \text{cont}(K_{n-1})$.

D'où $c(K') = \text{cont}\,(K')$.

Une modification de la construction du lemme, conduit au :

<u>COROLLAIRE 18</u>. *Soient K un compact accessible de Y , F une partie compacte de K et ω un voisinage de F dans K ; il existe un compact accessible K' tel que $F \subset K' \subset \omega$.*

Partant d'un voisinage compact K_o de F dans K , $K_o \subset \omega$, on construira deux suites $(K_n)_{n \geqslant o}$ et $(\mu_n)_{n \geqslant o}$, où, cette fois les K_n forment une suite décroissante de voisinages compacts de F dans K , vérifiant au lieu de la condition (i) la condition :

$$(i')\ \forall\, n \geqslant 0\ ,\ K_{n+1} \subset [Q_{p_o}^{K_n} = p_o] \cup \mathring{K}_n = A'_n$$

$\mathring{K}_n$ désignant l'intérieur de K_n dans K . On pourra prendre $\varepsilon = 1$, l'essentiel est que $c(A'_n) = \text{cont}\,(A'_n) = c(K_{n+1})$.

C. Terminons ces préliminaires par une remarque concernant l'effilement "fort", et l'amélioration annoncée du lemme 17 :

<u>LEMME 19</u>. *Soient A une partie relativement compacte de Y , a un point de Y n'appartenant pas à A ; si A est à la fois effilé et co-effilé en a , A est fortement effilé en a , c'est-à-dire que :*

$$\inf_{V \in \mathcal{V}} R_{p_o}^{A \cap V}(a) = 0\ ,\quad \text{et}\quad \inf_{V \in \mathcal{V}} \hat{R}_{G_a}^{A \cap V} = 0 \qquad \xi\text{-pp}$$

en notant $\mathcal{V}$ l'ensemble des voisinages de a .

Il existe une partie compacte L de Y telle que $A \subset L \setminus e(L) \cup \tilde{e}(L)$ (voir la preuve du lemme 15) ; soit K un compact $\subset L$, voisinage fin et co-fin de a dans L contenu dans $Y \setminus A$; posons $A' = L \setminus K$: A' est effilé et co-effilé en a , $a \notin A'$, et A' est non-effilé et non co-effilé en chaque point de A .

On a donc $\hat{R}_{p_o}^{A'} = G\mu$, où μ est une mesure sur $\bar{A}' \subset L$ ne chargeant pas $\{a\}$ (μ est co-balayée de ξ sur A', et A'^c est voisinage co-fin de a) ; on a $G\mu(a) < p_o(a)$, et $G\mu = p_o$ sur A . Reprenant mot pour mot un argument classique (voir [6]) on construit une mesure $\geqslant 0$ ν sur L, telle que $G\nu(a) < +\infty$, et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} G\nu(x) = +\infty$. De là facilement la première relation ; par la formule de dualité (VI, c)), cette relation s'écrit aussi $\lim\limits_{\mathcal{V}} \hat{R}^{A \cap V}_{\tilde{G}_a} = 0$ ξ-pp, donc dans $L^1(\xi)$.

La méthode utilisée ci-dessus permet d'établir la propriété suivante :

THEOREME 5. *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *et pour tout compact* $K \subset Y$, *il existe un compact accessible* K' *contenu dans* K *et tel que cont* $(K \setminus K') \leqslant \varepsilon$.

Commençons par définir une suite transfinie $\{A_\alpha\}_{\alpha < \Omega}$ indexée par les ordinaux dénombrables, en posant $A_o = K$, $A_{\alpha+1} = A_\alpha \setminus (e(A_\alpha) \cap \tilde{e}(A_\alpha))$ et pour α limite $A_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} A_\beta$: les A_α forment une suite transfinie décroissante de G_δ, de complémentaires semi-polaires dans K ; $c(A_\beta)$ étant une fonction décroissante de β, il existe un $\alpha_o < \Omega$ tel que $c(A_{\alpha_o+1}) = c(A_{\alpha_o})$; ce qui signifie que p_o (resp $\tilde{p}_o$) a même balayée (resp. co-balayée) sur A_{α_o} et sur A_{α_o+1} ; par conséquent $e(A_\beta) \cap \tilde{e}(A_\beta) = \phi$, en notant $\beta = \alpha_o + 1$, et A_β est accessible ; on note $B = A_\beta$, $P_o = K \setminus A_\beta$.

Notons maintenant que pour chaque $\alpha < \beta$, la méthode du lemme précédent permet de déterminer une mesure $\geqslant 0$ (finie) ν_α sur Y telle que :

$$\forall\, a \in e(A_\alpha) \cap \tilde{e}(A_\alpha) \cap \bar{A}_{\alpha+1} \quad \lim_{\substack{x \in A_{\alpha+1} \\ x \to a}} G\nu_\alpha(x) = +\infty .$$

Comme $\{\alpha \,;\, \alpha < \beta\}$ est dénombrable, on en déduit une mesure ν sur Y telle que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in B}} G\nu(x) = +\infty$ pour $a \in P_o \cap \bar{B}$.

D'où un ouvert ω, dont la trace sur B est de la forme $[G\nu > t]$ et tel que (a) $P_o \subset \omega$ (b) $c(\omega \cap B) \leqslant \varepsilon/2$ et à fortiori $\mathrm{cont}(\omega \cap K) \leqslant \varepsilon/2$. Posons $K_o = K$, et $K_1 = K \setminus \omega$; Réitérant la construction, on obtiendra une suite décroissante $(K_n)_{n \geqslant o}$ de compacts de $\mathbb{K}$, et une suite $(P_n)_{n \geqslant o}$ de semi-polaires (de type K_σ) tels que $\mathrm{cont}(K_n - K_{n+1}) \leqslant \varepsilon/2^{n+1}$ $(n \geqslant 0)$, $P_n \subset K_n$, $K_{n+1} \subset K_n \setminus P_n$ et $K_n \setminus P_n$ accessible.

Il suffit maintenant de poser $K' = \bigcap\limits_1^\infty K_n$, puisqu'alors

$\mathrm{cont}(K') = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{cont}(K_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{cont}(K_n \setminus P_n) = \lim\limits_{n\to\infty} c(K_n \setminus P_n) = c(K')$.

VIII. EXTENSION DU THEOREME 1.

Rappelons que pour $L \subset Y$, on note $e(L)$ (resp. $\tilde{e}(L)$) l'ensemble des points de L où L est effilé (resp. co-effilé). On se propose d'établir l'extension suivante du théorème 1 :

THEOREME 6. Si A_o est une partie analytique de Y non semi-polaire, il existe un compact non vide $\mathbb{K}$ contenu dans A_o et tel que $e(\mathbb{K}) \cap \tilde{e}(\mathbb{K}) = \phi$.

Remarquons qu'alors $\mathbb{K}$ est non polaire, et comme il est aussi accessible (d'après le théorème 1) il est non semi-polaire.

On sait que A_o contient un compact non semi-polaire ([11]), et on peut donc supposer A_o compact. Pour établir le théorème 6, on va adapter la preuve du théorème 1 en montrant que l'hypothèse (H_1') suivante conduit à une contradiction.

(H_1') Il existe une partie compacte non-semi-polaire $\mathbb{K}_1$ de Y telle que pour tout compact non vide $L \subset \mathbb{K}_1$, on a $e(L) \cap \tilde{e}(L) \neq \phi$.

Les points de $\mathbb{K}_1$ sont alors semi-polaires et les mesures régulières diffuses ; quitte à remplacer $\mathbb{K}_1$ par un compact plus petit, on pourra donc supposer $\mathbb{K}_1$ totalement discontinu.

Pour mesurer le degré d'effilement et de co-effilement, on introduira la fonctionnelle Φ suivante :

$$\forall A \subset \mathbb{K}_1 \qquad \Phi_A = \sup\left(\frac{1}{p_o} \hat{R}^A_{p_o} \,,\, \frac{1}{\tilde{p}_o} \hat{\tilde{R}}^A_{\tilde{p}_o}\right) .$$

D'après (H_1'), pour chaque compact non vide $L \subset \mathbb{K}_1$, Φ_L atteint des valeurs < 1 sur L. L'énoncé suivant est l'analogue du lemme 5 :

LEMME 20. Il existe un compact accessible $L_1 \subset K_1$, $a > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que :

1) $a < c(L_1)$

2) $\forall L \subset L_1$, L compact accessible : $c(L) > a \Rightarrow \inf\limits_{x \in L} \Phi_L(x) \leq 1-\varepsilon$.

On raisonne par l'absurde : on peut alors construire une suite décroissante $\{F_n\}_{n \geq 1}$ de compacts accessibles, contenus dans $\mathbb{K}_1$, et une suite strictement croissante $\{b_n\}_{n \geq 1}$ de réels > 0 telles que :

(i) $\forall n \geq 1 \quad \mathrm{cont}(F_n) > b_n$

(ii) $\forall L$ compact, $L \subset F_n (n \geq 1)$: $c(L) \geq b_{n+1} \Rightarrow \Phi_L > 1-2^{-p}$ sur F_p , $1 \leq p \leq n$.

La construction de proche en proche des F_n et des b_n se fait comme dans le lemme 5 en tenant compte de la propriété suivante :

> Si A est une partie de $\mathbb{K}_1$, K un compact de Y et $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute partie B de A telle que $c(B) > c(A) - \eta$, on a :
>
> $$\inf_{x \in \mathbb{K}} \Phi_B(x) \geq \inf_{x \in K} \Phi_A(x) - \varepsilon.$$

En effet, si $\{B_n\}_{n \geq 1}$ est une suite de parties de parties de A telle que $\lim c(B_n) = c(A)$ alors $\{\hat{R}_{p_o}^{B_n}\}_{n \geq 1}$ tend vers $\hat{R}_{p_o}^{A}$ dans $L^1(\xi)$; on en déduit

$$\hat{R}_{p_o}^{A} = \sup_{p \geq 1} \widehat{(\inf_{n \geq p} \hat{R}_{p_o}^{B_n})}$$

et la propriété analogue avec les co-réduites. On obtient alors avec le lemme de Dini : $\inf \{\Phi_A(x) \; ; \; x \in K\} = \lim_{n \to \infty} \inf \{\Phi_{B_n}(x) \; ; \; x \in K\}$. D'où l'assertion.

Revenant à la suite $\{F_n\}$ du début, $\bigcap_1^\infty F_n = L$ est un compact non vide, pour lequel $\Phi_L \geq 1-2^{-p}$ sur F_p $(p \geq 1)$ puisque $c(L) \geq b_{p+1}$. D'où $\Phi_L = 1$ sur L en contradiction avec (H_1') .

On considère alors :

$$\mathcal{F} = \{L \; ; \; L \text{ compact accessible} \subset L_1 \; , \; \Phi_L > 1-\varepsilon \text{ sur } L\} \; .$$

$\mathcal{F}$ est stable par réunion finie, et $\gamma = \sup \{c(L) \; ; \; L \in \mathcal{F}\} < c(L_1)$. Soit $\{F_n\}_{n \geq 1}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{F}$ telle que $\gamma = \sup_n c(F_n)$, et soit Z la fermeture fine de $\bigcup_1^\infty L_n$. On peut trouver K_2 accessible non semi-polaire, $K_2 \subset L_1 - Z$, puisque $c(Z) = c(\bigcup_1^\infty F_n) = \mathrm{cont}(\bigcup_1^\infty F_n)$, et à fortiori $c(Z) = \mathrm{cont}(Z) < \mathrm{cont}(L_1)$.

Si $K \subset \mathbb{K}_2$ est non semi-polaire, alors $\mathrm{cont}(K \cup Z) > \mathrm{cont}(Z) = \gamma$, et par conséquent $\mathrm{cont}(K \cup F_n) > \gamma$ pour n assez grand. D'où $K \notin \mathcal{F}$.

Si $K \subset K_2$ est non polaire, K est intersection d'une suite de parties K_n' ouvertes et fermées dans $\mathbb{K}_2$, donc non semi-polaires (K_2 est accessible) ; comme $K'_n \notin \mathcal{F}$ on voit facilement que $\inf_K \Phi_K \leq 1-\varepsilon$.

Si $K \subset K_2$ est polaire, on a $\Phi_K = 0$.

On a ainsi établi – sous l'hypothèse (H'_1) – l'assertion :

(H'_2) | Il existe un compact accessible et non semi-polaire $\mathbb{K}_2 \subset \mathbb{K}_1$ et $\varepsilon > 0$ tels que, pour tout compact non vide $\mathbb{K}$ de $\mathbb{K}_2$, on a $\inf\{\Phi_K(x)\ ;\ x \in K\} \leq 1-\varepsilon$.

A partir de (H'_2), on construit un ensemble "en cascade" analogue à celui du III. On établit d'abord un lemme de grignotage ; on fixe dans toute suite une métrique compatible sur E, notée d.

<u>LEMME 21</u>. *Soient B_1 et B_2 deux boréliens de $\mathbb{K}_2$ d'adhérences disjointes, ε' et δ deux réels > 0 ; on suppose que $cont(B_1) > 0$ et que pour tout compact non vide K de B_1, $\Phi_{K \cup B_2}$ atteint sur $\mathbb{K}$ des valeurs inférieures à $1-\varepsilon'$.*
Il existe alors deux parties boréliennes disjointes A et U de B_1 telles que (1°) A est semi-polaire et U est, à un semi-polaire près, un ouvert fin et co-fin de B_1, 2°) $diam(U) < \delta$, 3°) $cont(U) > 0$ et 4°) Pour tout compact $L \subset U$, on a, en posant $V = B_2 \cup (B_1 \setminus (A \cup U))$;
$\inf_L \Phi_{L \cup V} \leq 1-\varepsilon'+\delta$.

Soit $\{U_j\}_{1 \leq j \leq p}$ une partition de B_1 en ouverts (relatifs) ordinaires de diamètres inférieurs à δ ; quitte à jetter un premier semi-polaire A_1, on peut supposer les U_j accessibles, et non semi-polaires ; comme dans le cas classique (lemme 6), on montre qu'il existe $i_o \in \{1,...p\}$ et $\eta > 0$ tels que, en notant $W = B_2 \cup (\bigcup_{j \neq i_o} U_j)$:

$$\forall\, \mathbb{K} \text{ compact} \subset U_{i_o}\ ,\ c(\mathbb{K}) > c(U_{i_o}) - \eta \Rightarrow \inf_{\mathbb{K}} \Phi_{\mathbb{K} \cup W} \leq 1-\varepsilon+\delta\ .$$

(A noter qu'on utilise le théorème de Mokobodzki – théorème 3 – pour étendre les lemmes 3 et 4) Posons à nouveau :

$$\mathcal{F} = \{L \text{ compact} \subset U_{i_o}\ ;\ \Phi_{L \cup W} > 1-\varepsilon+\delta/2 \text{ sur } L\},\ \gamma = \sup\{c(L)\ ;\ L \in \ \}.$$

Soient $\{F_n\}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{F}$ telle que $\gamma = \sup_n c(F_n)$, et Z (resp Z') la fermeture(*) fine (resp. co-fine) de $\bigcup_1^\infty F_n$; La différence symétrique $A_2 = Z \Delta Z'$ est un semi-polaire ($Z \cup Z'$ ayant même capacité que Z qui

(*) dans U_{i_o}

est finement fermé, $Z \cup Z' \setminus Z$ est semi-polaire) ; notons U_o la différence $U_{i_o} \setminus Z \cup Z'$, U l'intersection des noyaux parfaits fin et co-fin de $U_o^{(*)}$, et $A_3 = U_o \setminus U$; A_3 est encore semi-polaire et U est non semi-polaire au voisinage fin (ou co-fin) de chacun de ses points.

On vérifie immédiatement que : $\mathrm{cont}(U_{i_o} \setminus U) = \mathrm{cont}(Z) \leqslant c(Z) = \gamma < c(U_{i_o}) - \eta$. De sorte que $\mathrm{cont}(U_{i_o} \setminus U) < \mathrm{cont}(U_{i_o})$ et par conséquent $\mathrm{cont}(U) > 0$.

D'autre part, si K est un compact non semi-polaire de U, on a en notant $Z_o = Z \cap Z'$, $\Phi_{K \cup Z_o \cup W} = \sup\limits_n \Phi_{K \cup F_n \cup W}$ sur K ; comme $c(K \cup F_n) > \gamma$ pour n assez grand, $K \cup F_n \notin \mathcal{F}$ et $\Phi_{K \cup F_n \cup W}$ atteint sur K des valeurs inférieures à $1-\varepsilon'+\delta$; d'où la même propriété pour $\Phi_{K \cup Z_o \cup W}$.

Le cas d'un compact semi-polaire K, s'obtient en notant que K est intersection d'une suite décroissante de compacts non semi-polaires de U.

Le lemme précédent permet d'effectuer la construction suivante :

<u>LEMME 22</u>. *Soient L_1 et L_2 deux compacts disjoints de K_1, et ε' un réel > 0 tels que pour tout compact non vide L de L_1, $\inf\limits_L \Phi_{L \cup L_2} \leqslant 1-\varepsilon'$. Pour tout $\delta > 0$ et pour toute mesure régulière μ portée par L_1, il existe une suite finie $\{F_i\}_{1 \leqslant i \leqslant p}$ de compacts deux à deux disjoints de L_1 telle que : (1°) $\mathrm{diam}(F_i) < \delta$ (2°) $\mu(\bigcup\limits_{i=1}^p F_i) \geqslant \mu(L_1) - \delta$, et (3°) pour tout compact non vide $L \subset \bigcup\limits_{i=1}^p F_i$, on a si $i_o = \min\{i \,;\, L \cap F_i \neq \phi\}$: $\inf\{\Phi_{L \cup L_2}(x) \,;\, x \in L \cap F_i\} \leqslant 1-\varepsilon+\delta$.*

On peut supposer $\mu \neq 0$; on sait que μ admet un support fin $B_1 \subset L_1$, et que B_1 est un G_δ ordinaire ; la preuve du lemme s'obtient alors par une construction transfinie consistant en une application répétée du lemme précédent ; elle est toute semblable à celle du lemme 7 et sera omise ici.

(*) plus exactement $U = \left\{x \in U_o \,;\, Q_{p_o}^{U_o}(x) = p_o(x) \text{ et } \tilde{Q}_{\tilde{p}_o}^{U_o}(x) = \tilde{p}_o(x)\right\}$

(**) $\hat{R}_{p_o}^{Z_o \cup L} - \hat{R}_{p_o}^{F_n \cup L} \leqslant \hat{R}_{p_o}^{Z_o} - \hat{R}_{p_o}^{F_n}$ pour L quelconque, $n \geqslant 1$

On obtient ensuite facilement l'énoncé (H'_3) suivant (voir la fin du III)

(H'_3) | Il existe un compact non semi-polaire $X \subset K_1$, muni d'un ordre total $(\leqslant)$ compatible avec la topologie de X, et un $\varepsilon > 0$ tels que : pour tout $x \in X$, on a, en notant $S_x = \{y \in X \; ; \; y > x\}$, $\Phi_{S_x}(x) \leqslant 1-\varepsilon$.

Il reste maintenant à adapter le raisonnement du cas classique pour déduire de (H'_3) une contradiction.

On observe que d'après le lemme 19, S_x est fortement effilé (et co-effilé) en x. Donc, en posant $G_x(y) = G^y(x) = G(y,x)$, $S_x^\eta = \{y \in S_x \; ; \; d(y,x) < \eta\}$:

$$\forall\, x \in X : \lim_{\eta\to o} R_{G_x}^{S_x^\eta} = 0 \quad , \quad \lim_{\eta\to o} \tilde{R}_{G^x}^{S_x^\eta} = 0 \qquad (\text{dans } L^1(\xi)) \; .$$

On en déduit une suite $\{\eta_\nu\}_{\nu>o}$ décroissant vers zéro $(\eta_\nu > 0)$, telle que (après une modification convenable de X - voir le IV -), les séries :

$$\begin{cases} H_y(x) = H(x,y) = \sum\limits_{\nu=o}^{\infty} \hat{R}_{G_y}^{S_y^{\eta_\nu}}(x) & (y \in X \; ; \; x \in E) \\[2ex] H'_y(x) = H'(y,x) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \hat{\tilde{R}}_{G^y}^{S_y^{\eta_\nu}}(x) & (y \in X \; , \; x \in E) \end{cases}$$

convergent normalement dans $L^1(\xi)$, uniformément par rapport à $y \in X$. Lès noyaux H et H' sont s.c.i. sur $X \times Y$, et $H_y \geqslant \nu . G_y$ sur $S_y^{\eta_\nu} \setminus e(X)$. (voir l'addendum)

Prenons un entier $m \geqslant 1$, et un compact accessible $K \subset X$ de diamètre $< \eta_m$ et de capacité > 0 ; soient λ (resp $\tilde{\lambda}$) une mesure régulière sur K telles que $G\lambda \leqslant p_o$ (resp. $\tilde{G}\tilde{\lambda} \leqslant \tilde{p}_o$) et

$$\iint G(x,y)\, d\lambda(y)\, d\tilde{\lambda}(x) \geqslant \frac{1}{2}\, c(K) \; .$$

On peut d'abord choisir $\tilde{\lambda}$ telle que $\int p_o \, d\tilde{\lambda} > 1/2 \text{ cont}(K) = \frac{1}{2}\, c(K)$, puis λ telle que $G\lambda \leqslant p_o$ et $\int G\lambda . d\tilde{\lambda} \geqslant \frac{1}{2}\, c(K)$, en tenant compte de ce que $\tilde{\lambda}$ ne charge pas les semi-polaires et de $p_o = \sup \{G\lambda \; ; \; \lambda \in \mathcal{M}^+(K) \; , \; \lambda \text{ régulière}, G\lambda \leqslant p_o\}$ sur K, sauf peut-être sur un semi-polaire.

On distingue alors deux cas possibles :

<u>1er Cas</u> : $$\iint_{x>y} G(x,y)\, d\lambda(y)\, d\tilde{\lambda}(x) \geqslant \frac{1}{2} \iint G(x,y)\, d\lambda(y)\, d\tilde{\lambda}(x) \geqslant \frac{1}{4}\, c(K)$$

Alors $$\int H_\lambda(x)\, d\tilde{\lambda}(x) \geqslant m \int d\tilde{\lambda}(x) \int_{x>y} G(x,y)\, d\lambda(y) \geqslant \frac{m}{4}\, c(K) \qquad (\alpha)$$

où $$H_\lambda(x) = \int H_y(x)\, d\lambda(x) \; .$$

On vérifie aisemment que H_λ est excessive, et par ailleurs, comme $\tilde{\lambda}$ est balayée de ξ (puisque $\tilde{G}\tilde{\lambda} \leq \tilde{G}\xi = \tilde{p}_o$) :

$$\int H_\lambda(x)\, d\tilde{\lambda}(x) \leq \int H_\lambda(x)\, d\xi(x) \leq c\, \|\lambda\| \qquad (\beta)$$

où $c = \sup_{y \in X} \|H_y\|_{L^1}$.

De (α) et (β) , on déduit : $c(K) \leq \frac{4c}{m} \|\lambda\| \leq \frac{4c}{m} c'\, c(K)$

où $c' = (\inf_{x \in X} \tilde{p}_o(x))^{-1}$; ce qui est absurde pour m assez grand.

2ème Cas : $\iint_{x<y} G(x,y)\, d\lambda(x)\, d\tilde{\lambda}(y) \geq \frac{1}{2} \iint G(x,y)\, d\lambda(y)\, d\tilde{\lambda}(x) = \frac{1}{4} c(K)$.

On aboutit exactement de la même manière à une contradiction en utilisant cette fois le noyau H' .

Il n'y a pas d'autre cas à considérer puisque λ et $\tilde{\lambda}$ sont diffuses et que $\lambda \otimes \tilde{\lambda}$ ne charge pas la diagonale de K . Le théorème 6 est donc établi.

VIII. UNE EXTENSION DU THEOREME 2.

Il est intéressant d'observer que la notion d'ensemble accessible permet d'étendre le théorème 2 au cadre des résolvantes fortement felleriennes en dualité :

THEOREME 7. Si $\mathbb{K}_o$ est une partie compacte accessible de Y , et si ε_o est > 0 , il existe un compact $\mathbb{K}$ contenu dans $\mathbb{K}_o$ tel que : 1°) $c(K_o \setminus K) \leq \varepsilon_o$ 2°) $e(K) \cap \tilde{e}(K) = \phi$.

Soient $\varepsilon > 0$, et $L_\varepsilon = \{x \in K_o \,;\, \Phi_{K_o}(x) \leq 1-\varepsilon\}$. L_ε est un compact polaire, et on peut trouver un ouvert ω de Y avec $c(\omega) < \varepsilon$, $L_\varepsilon \subset \omega$. En utilisant le corollaire 18, on voit qu'en diminuant ω , on peut supposer de plus que $K_o \setminus \omega$ est accessible (considérer $F = \mathbb{K}_o \setminus \omega$, et $\omega' = \mathbb{K} \setminus L_\varepsilon$) . Notant toujours $F = K_o \setminus \omega$, on peut trouver $F' \subset \omega \cap \mathbb{K}_0$, compact tel que : (i) $e(F') \cap \tilde{e}(F') = \phi$ et (ii) posant $K_1 = F \cup F'$, $\Phi_{K_1}(x) > 1-\varepsilon$ sur F (et à fortiori sur $F \cup F'$ puisque $e(F') \cap \tilde{e}(F') = \phi$) ; en effet $\omega \cap K_o$ est accessible et d'après le théorème 6, $c(\omega \cap K_o) = \mathrm{cont}(\omega \cap K_o) = \sup\{\mathrm{cont}(F') \,;\, F' \subset \omega \cap K_o$, F' vérifie (i)$\}$

On construit ainsi un compact accessible $K_1 \subset K_o$ avec $\Phi_{K_1} < 1-\varepsilon_o/2$ sur K_1 et $c(K \setminus K_1) < \varepsilon/2$. Itérant le procédé, on obtient une suite décroissante de compacts accessibles, et des $\varepsilon_n > 0$ tels que 1°) $c(K_n - K_{n+1}) \leq \varepsilon_o . 2^{-(n+1)}$ $(n \geq 0)$,

2°) $c(K_n) > c(K_p) - \varepsilon_p$ pour $n \geq p \geq 1$ et

3°) Pour tout $L \subset K_p$: $c(L) \geq c(K_p) - \varepsilon_p \Rightarrow \Phi_L > 1-2^{-p}$ sur K_p

Le compact $\mathbb{K} = \bigcap_1^\infty K_n$ vérifie alors les propriétés de l'énoncé.

Avec le théorème 5, on en déduit le

COROLLAIRE 23. *Si $\mathbb{K}_o$ est une partie compacte de Y et si ε_o est > 0, il existe une partie compacte K de K_o telle que $cont(K_o \setminus K) \leq \varepsilon_o$ et $e(K) \cap \tilde{e}(K) = \phi$.*

IX. UNE APPLICATION DE LA METHODE DU THEOREME.

Terminons ce travail par un énoncé "positif" qu'on peut obtenir à partir des constructions "absurdes" utilisées pour établir le théorème 6 en modifiant convenablement les hypothèses.

THEOREME 8. *Soit $\mathbb{K}$ un compact de Y tel que pour tout compact non vide L de K, $e(L)$ est non vide ; alors pour toute mesure régulière μ sur $\mathbb{K}$ et tout $\delta > 0$, il existe un compact $X \subset \mathbb{K}$, muni d'un ordre total $(\leq)$ compatible avec sa topologie, et un $\varepsilon > 0$ tels que (1°) $\mu(X) \geq \mu(\mathbb{K}) - \delta$.*

2°) Pour tout $x \in X$, on a en notant $S_x = \{y \in X, y \geq x\}$, $\hat{R}_{p_o}^{S_x}(x) < (1-\varepsilon)p_o(x)$.

Il suffit de reprendre les raisonnements du VIII conduisant à l'énoncé (H_3'), en remplaçant la fonctionnelle Φ par ψ : $\psi_A(x) = \frac{1}{p_o(x)} \hat{R}_{p_o}^A(x)$. On peut d'ailleurs étendre cet énoncé à un cadre plus général, la résolvante duale $\{\tilde{V}_\lambda\}_{\lambda \geq o}$ dévenant inutile.

On notera que le théorème s'applique à tout compact $\mathbb{K}$ de $\mathbb{R}^{d+1}$ pour la théorie associée à l'équation de la chaleur ; il s'applique aussi à tout compact de $\mathbb{R}$ pour le noyau G :

$$G(x,y) = \begin{cases} |x-y|^{-\alpha} & y \leq x \\ |x-y|^{-\beta} & y \geq x \end{cases} \qquad (0 < \beta < \alpha < 1) .$$

ADDENDUM. Vérification du caractère s.c.i. des applications $(x,y) \longrightarrow \hat{R}_{G_y}^{S_y^\eta}(x)$:

A) Il est classique que si K est un compact de X, $(x,y) \longrightarrow \hat{R}_{G_y}^{K}(x)$ est s.c.i. sur $Y \times Y$; en effet si g_λ désigne la fonction de Green d'indice λ (associée à V_λ et $\tilde{V}_\lambda$) :

$$\hat{R}_{G_y}^{K}(x) = \sup_{\lambda>0} \langle \lambda V_\lambda (\hat{R}_{G_y}^{K}), x \rangle = \sup_{\lambda} \int \hat{R}_{G_y}^{K}(z)\, \lambda g_\lambda(x,z)\, d\xi(z).$$

Comme g_λ est s.c.i. sur $E \times E$, il suffit de vérifier le caractère s.c.i. de $y \longrightarrow \hat{R}_{G_y}^{K}(z)$ à z fixé ; cette propriété découle de la formule de dualité $\hat{R}_{G_y}^{K}(z) = \hat{\hat{R}}_{\tilde{G}_z}^{K}(y)$.

B) L'opération $A \longrightarrow \hat{R}_{G_y}^{A}(x)$ monte sur les suites croissantes d'ensembles ; on en déduit, pour y_o, x_o fixés, et pour $a < \hat{R}_{G_{y_o}}^{S_{y_o}^\eta}(x_o)$, ($\eta > 0$ donné) un compact $K \subset S_x^\eta$ tel que $\hat{R}_{G_{y_o}}^{K}(x_o) > a$.

Il est clair que pour $y \in X$ assez voisin de y_o, on a encore $K \subset S_y^\eta$; par ailleurs $\hat{R}_{G_y}^{K}(x)$ est s.c.i. en (x,y), on en déduit qu'au voisinage de (x_o, y_o) on a $\hat{R}_{G_y}^{S_y^\eta}(x) > a$.

REFERENCES

[1] A. ANCONA.

- Démonstration d'une conjecture sur la capacité et l'effilement, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 297 (1983), p. 393-396.

[2] A. ANCONA et G. MOKOBODZKI.

- Dichotomie et contenance Sém. Théorie du Potentiel de Paris, octobre 1981 (exposé non rédigé).

[3] J. AZEMA.

- Une remarque sur les temps de retour, Sém. Probabilités VI, (1972), Lecture Notes 258.

[4] R.M. BLUMETHAL et R.K. GETOOR.

- Markov Processes and Potential Theory, Acad. Press, (New-York and London) 1968.

[5] J.M. BONY.

- Principes du Maximum et inégalités de Harnack pour les opérateurs elliptiques dégénérés, Sém. Théorie du Potentiel de Paris, 12, 1969.

[6] M. BRELOT.

- Eléments de la théorie classique du Potentiel, Paris C D U.

[7] M. BRELOT.

- Lectures on Potential theory, Bombay, Tata Institute of fundamental Research (1960).

[8] G. CHOQUET.

- Theory of capacities, Ann. Inst. Fourier V, (1953-1954) 139-296.

[9] G. CHOQUET et J. DENY.

- Noyaux de convolution et balayage sur tout ouvert, Springer Lecture Notes, 404 (1973).

[10] C. CONSTANTINESCU.

- Problem 6.1 in Bull Lond. Math. Soc. 4 (1972) p. 362.

[11] C. DELLACHERIE.

- Capacité et Processus stochastiques (Springer 1972).

[12] B. FUGLEDE.

- Sur la fonction de Green d'un domaine fin, Ann. Inst. Fourier XXV, (3-4) (1975) p. 201-206.

[13] W. HANSEN.

- Semi polar sets and quasi-balayage, Math. Ann. 257, (1981) p. 495-517.

[14] L.L. HELMS.

- Introduction to Potential Theory (Wiley) 1969.

[15] M. ITO.

- Sur une décomposition des noyaux de Hunt à paraître in Sém. Théorie du Potentiel de Paris, vol VII (1983-84) Springer Lecture Notes.

[16] M. KISHI.

- An example of a positive non symmetric kernel satisfying the complete maximum principle, Nagoya Maths Journal, 48 (1972), 189-196.

[17] H. KUNITA et T. WANATABE.

- Markov Processes and Martin Boundaries I, Illinois Journal of Maths, 9, (1965), p. 485-526.

[18] A. LA PRADELLE.

- Cônes de Potentiels dans les espaces de Banach adaptés et dualité, Sém. Théorie du Potentiel Paris, n°3, Springer Lecture Notes 681, p. 215-233.

[19] C. LA VALLEE POUSSIN.

- Le Potentiel Logarithmique Gauthiers Villars, (1949)

[20] P.A. MEYER.

- Probabilités et Potentiels, (Blaisdell) 1966.

[21] P.A. MEYER.

- Processus de Markov, la frontière de Martin, Springer Lecture Notes 77 (1968).

[22] G. MOKOBODZKI.

- Pseudo quotient de deux mesures, application à la dualité, Sem. Probabilités de Strasbourg VII (1973) Lecture Notes 321, 318-321.

[23] G. MOKOBODZKI.

- Ensembles compacts de fonctions fortement surmédianes, Sém. Théorie du Potentiel de Paris 4, Lecture Notes 713 p. 178-193.

[24] J. SICIAK.

- Coll. Maths. 20 (1969), Problème 675, p. 310.

OBSERVATIONS SUR LES CLASSES DE VAPNIK-CERVONENKIS ET LA DIMENSION COMBINATOIRE DE BLEI

Patrice ASSOUAD

INTRODUCTION.

Soit $\mathscr{S}$ un ensemble de parties d'un ensemble X ; pour chaque $A \subset X$, on note $A \cap \mathscr{S}$ l'ensemble des parties de A de la forme $A \cap S$ avec $S \in \mathscr{S}$; pour chaque $r \in \mathbb{N}$, on pose $\Delta^{\mathscr{S}}(r) = \operatorname{Sup}\{|A \cap \mathscr{S}| \mid |A| = r\}$. On dit que $\mathscr{S}$ est une *classe de Vapnik-Cervonenkis* si la fonction $r \to \Delta^{\mathscr{S}}(r)$ est majorée par un polynôme. Plus précisément nous appellerons *densité de* $\mathscr{S}$ (et nous noterons $\operatorname{dens}(\mathscr{S})$) la borne inférieure des nombres réels $s \geq 0$ pour lesquels la quantité $\operatorname{Sup}_{r \in \mathbb{N}} r^{-s} \Delta^{\mathscr{S}}(r)$ est finie. Je me propose d'indiquer, en donnant une démonstration simple du théorème central limite de Dudley ([4] Théorème 7.1), l'utilité de ces classes en calcul des probabilités. Ma démonstration utilise uniquement l'inégalité de Khintchine, ce qui ne surprendra pas quiconque est familier avec le TCL dans les espaces de Banach (ces notes étaient écrites pour l'essentiel lorsque j'ai eu l'occasion d'entendre un exposé de G. Pisier développant des idées analogues) ; cette démonstration permet de plus, à l'encontre de celle de [4], d'établir au passage un résultat de Statistique (l'évaluation d'un certain risque minimax).

Je signalerai par ailleurs les liens qui existent entre la densité introduite ci-dessus et la dimension combinatoire de Blei.

Ces notes se divisent en deux parties :

I) *Le théorème central limite de Dudley et ses applications en statistique* :

Soient c_1 et α des nombres réels positifs, et soit $\mathscr{S}$ une classe de parties d'un ensemble X vérifiant $|A \cap \mathscr{S}| \leq c_1 |A|^{\alpha}$ quel que soit A fini inclus dans X. On fixe $\beta > \alpha$ et $s > \beta$ $(s \geq 1)$. Par ailleurs on notera $P_n(x)$ la loi discrète $\frac{1}{n}(\delta_{x_1}+\dots+\delta_{x_n})$ et $r_1,\dots,r_n$ les n premières fonctions de Rademacher ou, si on préfère, des v.a. de Bernouilli symétriques indépendantes et de module 1. Pour chaque mesure μ sur la tribu engendrée par $\mathscr{S}$, on pose $\|\mu\|_{\mathscr{S}} = \sup\limits_{S \in \mathscr{S}} |\mu(S)|$.

Je me propose d'évaluer, sous ces hypothèses, les quantités

$$A_n(\mathscr{S},x) = \left(\int_{[0,1]} \left\|\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^{n} r_i(t)\, \delta_{x_i}\right)\right\|_{\mathscr{S}}^{2s} dt\right)^{1/2s}$$

et

$$B_n(\mathscr{S},P) = \left(\int_{X^n} \|\sqrt{n}\, (P_n(x)-P)\|_{\mathscr{S}}^{2s}\, P(dx_1\dots P(dx_n)\right)^{1/2s} ,$$

puis de montrer que ces évaluations conduisent au théorème central limite de Dudley et permettent de majorer un certain risque minimax. Pour présenter les calculs sans être importuné par des questions de mesurabilité (qui interviennent dès la définition de $A_n(\mathscr{S},x)$ et de $B_n(\mathscr{S},P)$), je supposerai d'abord que $\mathscr{S}$ est une classe dénombrable ; puis je montrerai ensuite comment la démonstration s'étend à des cas plus généraux. Voici donc quel sera le plan de cette première partie :

§ 1. Rappels.

§ 2. Evaluation de $A_n(\mathscr{S},x)$ pour une classe dénombrable.

§ 3. Evaluation de $B_n(\mathscr{S},P)$ pour une classe dénombrable.

§ 4. Risque minimax et critère de compacité.

§ 5. Passage à des classes non dénombrables et autres extensions.

II) *Densité et dimension combinatoire* :

Soit $\mathscr{S}$ une classe de parties d'un ensemble X ; pour chaque $A \subset X$, notons $2^A \cap \mathscr{S}$ l'ensemble des parties de A qui appartiennent à $\mathscr{S}$; pour chaque $r \in \mathbb{N}$, on pose $\delta^{\mathscr{S}}(r) = \operatorname{Sup}\{|2^A \cap \mathscr{S}| \mid |A| = r\}$. Suivant Blei [1], on appelle *dimension combinatoire de* $\mathscr{S}$ (et nous noterons $dc(\mathscr{S})$) la borne inférieure des nombres réels $s \geq 0$ pour lesquels la quantité $\displaystyle\operatorname*{Sup}_{r \in \mathbb{N}} r^{-s}\, \delta^{\mathscr{S}}(r)$ est finie. L'étude de la dimension combinatoire est motivée par celle des ensembles de Sidon dans le groupe 2^X (muni de la loi $A,B \to A \Delta B$ et de la topologie produit).

Nous indiquons ses liens avec les classes de Vapnik-Cervonenkis dans une seconde partie dont voici le plan :

§ 1. Une extension du Lemme de Sauer.

§ 2. Dimension combinatoire et densité.

§ 3. Quelques exemples explicites.

I) LE THÉORÈME CENTRAL LIMITE DE DUDLEY ET SES APPLICATIONS EN STATISTIQUE.

§ 1. Rappels.

(1.1) Pour tout entier $N \geq 0$ et toutes v.a. positives $Z_1,\dots,Z_N$, on a

$$\|\operatorname*{Sup}_{i=1}^{N} Z_i\|_{2s} \leq N^{1/2s} \operatorname*{Sup}_{i=1}^{N} \|Z_i\|_{2s} .$$

(1.2) Notons $\sigma\mathscr{S}$ la tribu engendrée par $\mathscr{S}$; pour toute loi P sur $(X,\sigma\mathscr{S})$, on note d_P l'écart $S, S' \to P(S \,\Delta\, S')$. Pour chaque $\varepsilon \in]0,1]$, on note $N_\varepsilon(\mathscr{S},d_P)$ le nombre maximal de points de l'espace $(\mathscr{S},d_P)$ à distances mutuelles $\geq \varepsilon$. On a alors : $N_\varepsilon(\mathscr{S},d_P) \leq c_2\, \varepsilon^{-\beta}$ (où c_2 ne dépend que de c_1, α et β ; Dudley [4] p. 922).

(1.3) En d'autres termes, $N_\varepsilon(\mathscr{S},d_P)$ est la cardinalité maximale d'un ε-réseau dans l'espace $(\mathscr{S},d_P)$. Comme on utilisera des suites de réseaux, quelques notations seront commodes :

(a) soit F une partie d'un groupe commutatif G (noté additivement) ; soit τ une application de G dans $[0,+\infty[$ symétrique et nulle en 0. Soit $\varepsilon > 0$; une partie H de F vérifiant $\tau(h-h') \geq \varepsilon$ pour tout h, $h' \in H$ $(h \neq h')$ est dite *ε-discernable* dans (F,τ) ; une partie ε-discernable maximale est appelée un *ε-réseau* de (F,τ) ;

(b) on suppose maintenant que F est *finie et contient* 0 ; on pose $\delta = \operatorname*{Sup}_{f,f'\in F} \tau(f-f')$ et $H_0 = \{0\}$ (qui est donc un δ-réseau). Puis on choisit inductivement, pour chaque $j \in \mathbb{N}$:

- un $\delta\, 2^{-(j+1)}$ réseau H_{j+1} contenant H_j ,
- une application π_j de H_{j+1} dans H_j vérifiant $\tau(h-\pi_j h) \leq \delta\, 2^{-j}$ quel que soit $h \in H_{j+1}$ (on choisit $\pi_j h = h$ dès que c'est possible),
- et on pose $F_j = \{h - \pi_j h \mid h \in H_{j+1}\}$;

nous dirons alors que la suite $(F_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une *graduation de* F *par* τ (comme F est fini, on a $F_j = \{0\}$ à partir d'un certain rang) ;

(c) la suite $(F_j)_{j\in\mathbb{N}}$ vérifie alors :

- pour chaque $j \in \mathbb{N}$, on a $|F_j| \leq |H_{j+1}|$ et $\tau(f_j) \leq \delta\, 2^{-j}$ quel que soit $f_j \in F_j$,

- tout élément f de F s'écrit $\sum_{j=0}^{+\infty} f_j$ avec $f_j \in F_j$ pour tout $j \in \mathbb{N}$.

De (1.1) et (1.3), on déduit le lemme suivant :

LEMME 1.4. Soit F une partie dénombrable de $L^{2s}(\Omega,\mathcal{A},P)$, contenant 0 et de diamètre δ. Pour chaque $j \in \mathbb{N}$, on note N_j la cardinalité maximale d'un $\delta 2^{-j}$-réseau dans $(F, \|\ \|_{2s})$. On a alors :

$$\|\sup_{Z\in F} |Z|\|_{2s} \leq \delta \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-j} (N_{j+1})^{1/2s} .$$

Démonstration. Il suffit de démontrer le résultat uniformément pour toute partie finie F' de F. Soit donc F' une partie finie de F, contenant 0, et soit δ' son diamètre (on a $\delta' \leq \delta$) ; soit $(F_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une graduation de F' par $\|\ \|_\varphi$ (voir 1.3). Les remarques (1.3.c) et (1.1) impliquent alors :

$$\|\sup_{Z\in F'} |Z|\|_{2s} \leq \sum_{j=0}^{+\infty} \|\sup_{Z\in F_j} |Z|\,\|_{2s}$$

$$\leq \delta \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-j}(N_{j+1})^{1/2s} . \ \square$$

(1.5) Rappelons enfin l'inégalité de Khintchine, dont nous aurons à nous servir : on a

$$\|\sum_{i=1}^{n} a_i r_i\|_{2s} \leq \sqrt{2s}\ \|\sum_{i=1}^{n} a_i r_i\|_2$$

quels que soient l'entier $n \geq 1$ et les nombres réels $a_1,\ldots,a_n$ ($r_1,\ldots,r_n$ désignant, comme dans l'introduction, des v.a. de Bernouilli symétriques indépendantes et de module 1).

§ 2. Evaluation de $A_n(\mathscr{S},x)$ pour une classe dénombrable.

On se propose d'évaluer $A_n(\mathscr{S},x)$ en fonction de $p_n = \|P_n(x)\|_{\mathscr{S}}$.

(2.1) Dans la définition de $A_n(\mathscr{S},x)$ (voir l'introduction), $\mathscr{S}$ n'intervient que par sa trace sur $\{x_1,\dots,x_n\}$. Quitte à remplacer $\mathscr{S}$ par $\{x_1,\dots,x_n\}\cap\mathscr{S}$, on peut supposer que $\mathscr{S}$ est fini (cela ne change, ni c_1, ni α, ni p_n). Par ailleurs, quitte à l'ajouter à $\mathscr{S}$, on va supposer que $\emptyset$ appartient à $\mathscr{S}$ (cela ne change ni α, ni p_n et peut remplacer simplement c_1 par $c_2 = c_1 + 1$.

(2.2) Notons F l'ensemble des v.a. $Z_S(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i(t)1_S(x_i)}{\sqrt{n}}$ (pour $S\in\mathscr{S}$).

L'inégalité de Khintchine (voir 1.5) nous donne, pour tous S, $S'\in\mathscr{S}$:

$$\|Z_S - Z_{S'}\|_{2s} \leq \sqrt{2s}\ \|Z_S - Z_{S'}\|_2 = \sqrt{2s}\ \sqrt{P_n(x)(S\,\Delta\,S')}.$$

On en déduit que le diamètre δ de F dans $L^{2s}([0,1],dt)$ est $\leq \sqrt{4sp_n}$ et que de plus la cardinalité maximale N_j d'un $\delta 2^{-j}$-réseau dans $(F,\|\ \|_{2s})$ est $\leq c_2(\frac{\delta^2\ 2^{-2j}}{2s})^{-\beta}$ (utilisant 1.2). En utilisant 1.4, on trouve :

$$\begin{aligned}\|\sup_{S\in\mathscr{S}} |Z_S|\|_{2s} &\leq \delta \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-j}(N_{j+1})^{1/2s}\\ &\leq c_2^{1/2s}\ \delta^{1-\frac{\beta}{s}}\ (\sqrt{8s})^{\frac{\beta}{s}} \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-j(1-\frac{\beta}{s})} .\end{aligned}$$

La série du second membre étant convergente (car $s > \beta$), on a donc montré :

PROPOSITION 2.3. Il existe un nombre c_3 (ne dépendant que de c_1, α, β et s) tel qu'on ait $A_n(\mathscr{S},x) \leq c_3(\|P_n(x)\|_{\mathscr{S}})^{\frac{1}{2}(1-\frac{\beta}{s})}$ quels que soient n et x.

§ 3. Evaluation de $B_n(\mathscr{S},P)$ pour une classe dénombrable.

On se propose d'évaluer $B_n(\mathscr{S},P)$ en fonction de $p = \|P\|_{\mathscr{S}}$.

Pour chaque entier m, chaque application mesurable $F : X^m \to \mathbb{R}$ et chaque $\varepsilon > 0$, on écrira $\mathbb{E}_P(F(.))$ pour $\int_{X^m} F(x_1, \dots, x_m)\ P(dx_1)\dots P(dx_m)$ et $\mathbb{P}_P(F(.) > \varepsilon)$ pour $\int_{X^m} 1_{F(x_1,\dots,x_m)>\varepsilon} P(dx_1)\dots P(dx_m)$.

(3.1) On pose, pour chaque $x \in X^{2n}$, $P'_n(x) = \frac{1}{n}(\delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_n})$ et

$P''_n(x) = \frac{1}{n}(\delta_{x_{n+1}}+\ldots+\delta_{x_{2n}})$. On a donc :

$$(B_n(\mathcal{S},P))^{2s} = \mathbb{E}_P(\|\sqrt{n}(P'_n(.) - P\|^{2s}_{\mathcal{S}})$$
$$\leq \mathbb{E}_P(\|\sqrt{n}(P'_n(.) - P''_n(.))\|^{2s}_{\mathcal{S}}) \quad \text{(inégalité de Jensen)}$$

on a donc $(B_n(\mathcal{S},P))^{2s} \leq \int_{X^n} \|\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} r_i(t)\ (\delta_{x_i}-\delta_{x_{i+n}})\|^{2s}_{\mathcal{S}}\ P(dx_1)\ldots P(dx_{2n})$

quel que soit $t \in [0,1]$ (par symétrie). On intègre alors le second membre en t puis on échange les intégrations. Par inégalité triangulaire, on trouve donc :

$$B_n(\mathcal{S},P) \leq 2(\mathbb{E}_P(A_n^{2s}(\mathcal{S},.)))^{1/2s} .$$

Une application directe de 2.3 donne alors $B_n(\mathcal{S},P) \leq 2c_3$ (ce qui suffirait à évaluer le risque minimax R_n, voir § 4 ci-dessous).

(3.2) Pour faire intervenir $p = \|P\|_{\mathcal{S}}$, on écrit

$$A_n(\mathcal{S},x) \leq A_n(\mathcal{S},x)\ 1_{\|P_n(x)\|_{\mathcal{S}}\leq 2p} + A_n(\mathcal{S},x)\ 1_{\|P_n(x)-P\|_{\mathcal{S}}>p}$$

(idée qui m'a été indiquée par J. Bretagnolle).

L'espérance de $A_n^{2s}(\mathcal{S},.)\ 1_{\|P_n(.)\|_{\mathcal{S}}\leq 2p}$ est majorée (en appliquant 2.3) par $(c_3)^{2s}\ (2p)^{s-\beta}$. Quant à l'espérance de $A_n^{2s}(\mathcal{S},.)\ 1_{\|P_n(.)-P\|_{\mathcal{S}}>p}$ on la majore par $[\mathbb{E}_P(A_n^{4s}(\mathcal{S},.))\ \mathbb{P}_P(\|P_n(.) - P\|_{\mathcal{S}}>p)]^{1/2}$ et donc par $(c_3)^{2s}\ (\frac{2c_3}{p\sqrt{n}})^s$ (en utilisant l'évaluation de $B_n(\mathcal{S},P)$ obtenue en 3.1 et l'inégalité de Tchebycheff).

On a donc montré :

PROPOSITION 3.3. Il existe deux nombres c_3 et c_4 (ne dépendant que de c_1, α, β et s) tels qu'on ait, quel que soit $n \geq 1$,

(a) $$B_n(\mathcal{S},P) \leq 2c_3$$

et (b) $$B_n(\mathcal{S},P) \leq 2c_3(\|P\|_{\mathcal{S}})^{\frac{1}{2}(1-\frac{\beta}{s})} + c_4(\|P\|_{\mathcal{S}}\sqrt{n})^{-1/2} .$$

§ 4. Risque minimax et compacité en loi.

(4.1) On considère une partie Θ de $\Theta_{\mathscr{S}}$ = {lois de probabilité sur $(X,\sigma\mathscr{S})$} munie de la fonction de perte $P, Q \to \|P-Q\|_{\mathscr{S}}^{2s}$; le risque minimax correspondant est alors la quantité :

$$R_n(\Theta) = \inf_{\hat{P}_n} \operatorname{Sup}_P \int \|\hat{P}_n(x_1,\ldots,x_n) - P\|_{\mathscr{S}}^{2s} P(dx_1)\ldots P(dx_n)$$

où la borne supérieure est prise sur tous les éléments P de Θ et la borne inférieure sur tous les estimateurs $\hat{P}_n$, c'est-à-dire toutes les applications $x_1,\ldots,x_n \to \hat{P}_n(x_1,\ldots,x_n)$ de X^n dans Θ telles que $x_1,\ldots,x_n \to \|\hat{P}_n(x_1,\ldots,x_n) - P\|_{\mathscr{S}}^{2s}$ soit $P^{\otimes n}$ mesurable pour tout $P \in \Theta$.
La loi empirique $P_n : x \to P_n(x)$ est évidemment un estimateur lorsque $\Theta = \Theta_{\mathscr{S}}$ (je rappelle que $\mathscr{S}$ est dénombrable). L'inégalité (3.3.a) implique donc :

PROPOSITION 4.2. Il existe un nombre c_5 (ne dépendant que de c_1, α, β et s) tel qu'on ait

$$\operatorname{Sup}_{n\geq 1} n^{-s} R_n(\Theta_{\mathscr{S}}) \leq c_5.$$

(4.3) On peut tirer parti de l'inégalité (3.3.b) en prenant $\Theta \subset \Theta_p = \{P \in \Theta_{\mathscr{S}} \mid \|P\|_{\mathscr{S}} \leq p\}$. Afin d'éviter toute question de mesurabilité, on va supposer que Θ est *dénombrable*. On projette alors, comme cela est classique (je le crois), la loi empirique $P_n(x)$ sur Θ :

si $Q_0, Q_1, \ldots, Q_j, \ldots$ est une énumération des éléments de Θ, on fixe $\eta > 0$ et on note $\tau(x_1,\ldots,x_n)$ le premier indice j tel que

$$\|P_n(x) - Q_j\|_{\mathscr{S}} \leq \inf_{P\in\Theta} \|P_n(x) - P\|_{\mathscr{S}} + \eta$$

et on pose $\hat{P}_n(x_1,\ldots,x_n) = Q_{\tau(x_1,\ldots,x_n)}$. On a donc, quel que soit $P \in \Theta$,

$$\|\hat{P}_n(x) - P\|_{\mathscr{S}} \leq \|P_n(x) - P\|_{\mathscr{S}} + \|P_n(x) - \hat{P}_n(x)\|_{\mathscr{S}} \leq 2\|P_n(x) - P\|_{\mathscr{S}} + \eta .$$

Comme η peut être pris arbitrairement petit, l'inégalité (3.3b) implique donc :

PROPOSITION 4.4. Il existe un nombre c_6 (ne dépendant que de c_1, α, β et s) tel qu'on ait $\limsup_{n\to+\infty} n^{-s} R_n(\Theta) \leq c_6\, p^{s-\beta}$, quel que soit Θ dénombrable, inclus dans $\Theta_p = \{P \in \Theta_{\mathscr{S}} \mid \|P\|_{\mathscr{S}} \leq p\}$.

Enfin l'inégalité (3.3.b) fournit le *critère de compacité* qui est l'étape essentielle ([4] p. 903) pour établir le théorème central limite de Dudley (théorème central limite pour $\sqrt{n}\,(P_n - P)$ considéré comme fonction de $S \in \mathscr{S}$) :

PROPOSITION 4.5. Soit $P \in \Theta_{\mathscr{S}}$. Pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe alors $\delta > 0$ tel que, pour tout n assez grand, on ait $\mathbb{P}_P(\|\sqrt{n}(P_n(.) - P)\|_{\mathscr{S}(\delta)} > \varepsilon) \leq \varepsilon$ (où $\mathscr{S}(\delta)$ est la classe de Vapnik $\{S \,\Delta\, S' \mid S, S' \in \mathscr{S}, P(S \,\Delta\, S') \leq \delta\}$).

Démonstration. On pose $\alpha' = \mathrm{dens}(\mathscr{S}(1))$ et on choisit $s' > \beta' > \alpha'$. On a donc $\mathbb{P}_P(\|\sqrt{n}(P_n(.)-P)\|_{\mathscr{S}(\delta)} > \varepsilon) \leq \varepsilon^{-2s'}\, B_n(\mathscr{S}(\delta), P)^{2s'}$; soit $\eta = \varepsilon^{1+1/2s'}$; on évalue $B_n(\mathscr{S}(\delta), P)$ par (3.3.b), on choisit δ de façon que le premier terme soit $< \frac{\eta}{2}$; lorsque n est assez grand, le second terme est aussi $< \frac{\eta}{2}$, et on a donc $\mathbb{P}_P(\|\sqrt{n}(P_n(.)-P)\|_{\mathscr{S}(\delta)} > \varepsilon) < \varepsilon$, ce qui établit la Proposition. □

§ 5. Extensions possibles.

(5.1) La remarque (1.1) s'étend, et cela est sûrement bien connu, aux fonctions de Young surmultiplicatives :

- une *fonction de Young* est une application φ de $[0,+\infty[$ dans $[0,+\infty[$ convexe, nulle en 0 et non identiquement nulle ; pour toute v.a. réelle Z sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on pose $\|Z\|_\varphi = \inf\{b \mid E\varphi(\frac{|Z|}{b}) \leq 1\}$ (qui peut être infini) ; comme on sait, $L^\varphi(\Omega, \mathcal{A}, P) = \{Z \mid \|Z\|_\varphi < +\infty\}$ est l'espace d'Orlicz attaché à φ ; sur cet espace $\|\ \|_\varphi$ est une semi-norme ;

- une fonction de Young φ est dite *surmultiplicative dans* $[m, +\infty[$ si elle vérifie $\varphi(uv) \geq \varphi(u)\,\varphi(v)$ pour tout $u, v \in [m,+\infty[$

(exemples : - les fonctions puissances sont surmultiplicatives dans $[0,+\infty[$

- la fonction $x \to e^{x^2}-1$ est surmultiplicative dans $[\sqrt{2},+\infty[$

- plus généralement la fonction $x \to e^{x^\alpha}-1$ $(\alpha > 0)$ est surmultiplicative dans $[2^{1/\alpha}, +\infty[$).

LEMME 5.1.1. Soit φ une fonction de Young surmultiplicative dans $[m,+\infty[$; on a alors $\varphi(\frac{x}{a}) \leq \varphi(m) + \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}$ (pour tout $x \geq 0$ et tout $a \geq m$).

Démonstration. Si $\frac{x}{a} \leq m$, cela provient de ce que φ est croissante ; sinon, cela provient de ce que φ est surmultiplicative dans $[m,+\infty[$. □

LEMME 5.1.2. Soit φ une fonction de Young surmultiplicative dans $[m,+\infty[$; on pose $\varphi^{-1}(x) = \inf\{a \geq 0 | \varphi(a) \geq x\}$.
On a alors, pour tout entier $N \geq 0$ et toutes v.a. positives $Z_1,\dots,Z_N$

$$\|\operatorname*{Sup}_{i=1}^{N} Z_i\|_\varphi \leq (\varphi(m)+1)\ (m+\varphi^{-1}(N))\ \operatorname*{Sup}_{i=1}^{N} \|Z_i\|_\varphi .$$

Démonstration. Quitte à diviser les deux membres par une constante, on va supposer $\operatorname*{Sup}_{i=1}^{N} E\,\varphi(Z_i) \leq 1$; on pose $a = m+\varphi^{-1}(N)$, $b = a(\varphi(m)+1)$ et $Z = \operatorname*{Sup}_{i=1}^{N} Z_i$. On a alors

$$E\,\varphi(\frac{Z}{b}) \leq \frac{a}{b}\ E\,\varphi(\frac{Z}{a}) \leq \frac{a}{b}[\varphi(m)+E(\frac{\varphi(Z)}{\varphi(a)})] \leq \frac{a}{b}[\varphi(m)+\frac{1}{N}\ E(\varphi(Z))] \leq \frac{a}{b}[\varphi(m)+\frac{1}{N}\ E(\operatorname*{Sup}_{i=1}^{N} \varphi(Z_i))]$$
$$\leq \frac{a}{b}(\varphi(m)+1) = 1. \ \square$$

(5.2) Le calcul d'entropie rappelé en 1.2 peut s'étendre assez largement, en remplaçant les lois P sur $(X,\sigma\mathscr{S})$ par d'autres fonctions d'ensemble, et en remplaçant même la famille $S, S' \to S \Delta S'$ par d'autres familles. Nous aurons besoin de quelques définitions.

(5.2.1) Soient $a, r \in]0,+\infty[$ et $(L, \|\ \|_L)$ un treillis normé (en anglais "Banach lattice"). On dira que L a la *propriété* $(C_{a,r})$ si on a $\|x+y\|_L^r \geq \|x\|_L^r + a\|y\|_L^r$ pour tous $x, y \in L^+$ (on appelle L^+ le cone des éléments ≥ 0 de L). A titre d'exemple, tout espace L^p $(p \in [1,+\infty[)$ vérifie la propriété $(C_{1,p})$. Cela nous permettra de remplacer la loi P par la fonction d'ensemble $S \to \|\mu(S)\|_L$, où μ est une mesure additive sur $(X,\sigma\mathscr{S})$ à valeurs dans L^+ (le treillis normé $(L, \|\ \|_L)$ ayant la propriété $(C_{a,r})$).

(5.2.2) Soient I un ensemble d'indices et $\mathscr{I}$ un ensemble de parties finies de I (les notions qui suivent seront relatives à $(I,\mathscr{I})$). Soit $\mathscr{S} = (S_i)_{i\in I}$ une *famille*

de parties de X ; on dit que $\mathscr{S}$ est *de multiplicité* (c_1,α) si on a $\mathrm{Sup}\{|J| \mid J\in\mathscr{J},\ A\cap S_j \neq \emptyset$ pour tout $j\in J\} \leq c_1|A|^{\alpha}$ quel que soit $A\subset X$.
On appelle *multiplicité de* $\mathscr{S}$ la borne inférieure des nombres réels α tels que $\mathscr{S}$ soit de multiplicité (c_1,α) pour un certain c_1.

(5.2.3) A titre d'exemple, soit $\mathscr{S}$ une *classe* de parties de X ; soient $I = \{S,S'\in\mathscr{S} \mid S\neq S'\}$ et $\mathscr{J} = \{I\cap \mathcal{a}^2 \mid \mathcal{a}\subset\mathscr{S},\ \mathcal{a}$ fini$\}$ on note alors $\mathscr{S}_\Delta$ la *famille* $(S\,\Delta\, S')_{(S,S')\in I}$; la multiplicité de la famille $\mathscr{S}_\Delta$ est alors égale à $2\ \mathrm{dens}(\mathscr{S})$.

PROPOSITION 5.2.4. Soient I un ensemble et $\mathscr{J}$ un ensemble de parties finies de I. Soit $\mathscr{S} = (S_i)_{i\in I}$ une famille de parties de X de multiplicité (c_1,α) (relativement à $(I,\mathscr{J})$). Soit $(L,\|\ \|_L)$ un treillis normé vérifiant la propriété $(C_{a,r})$ et soit μ une mesure additive sur $(X,\sigma\mathscr{S})$ à valeurs dans L^+ et vérifiant $\|\mu(X)\|_L = 1$. Fixons $\beta>\alpha$. Il existe alors c_2 (ne dépendant que de c_1, α, a, r, β) tel que, quel que soit $\varepsilon\in\,]0,1]$, on ait :

$$\mathrm{Sup}\{|J| \mid J\in\mathscr{J},\ \|\mu(S_j)\|_L \geq \varepsilon \text{ pour tout } j\in J\} \leq c_2\,\varepsilon^{-\beta r}.$$

Démonstration. Fixons $\varepsilon\in\,]0,1]$; nous démontrerons le résultat pour $a\varepsilon^r \leq r$ (naturellement, quitte à modifier c_2, cela entraînera le résultat pour $a\varepsilon^r > r$). Soit $J\in\mathscr{J}$ tel que $\|\mu(S_j)\|\geq\varepsilon$ pour tout $j\in J$. Nous devons majorer $N = |J|$.

(a) Observons que cela ne dépend que de la restriction de μ à la tribu engendrée par $(S_j)_{j\in J}$; comme cette tribu est finie, on peut trouver une famille finie M d'éléments positifs du dual de L telle que

$$\|\mu(S)\|_L = \sup_{m\in M} \mu_m(S) \quad \text{pour tout } S\in\mathscr{B}$$

(μ_m désignant la mesure $S\to\langle\mu(S),m\rangle$) ; de plus chaque μ_m est σ-additivé sur $\mathscr{B}$. On a d'autre part, pour tout $j\in J$,

$$\|\mu(X\setminus S_j)\|_L^r \leq \|\mu(X)\|_L^r - a\,\|\mu(S_j)\|_L^r \leq 1 - a\,\varepsilon^r.$$

(b) Soit n un entier ≥ 1 à déterminer plus tard. Pour tout $T\in(\mathscr{B})^{\otimes n}$, on pose $\bar{\mu}(T) = \operatorname{Sup}_{m_1,\dots,m_n \in M} \mu_{m_1} \otimes \dots \otimes \mu_{m_n}(T)$. Observons que $\bar{\mu}$ est sous-additive et qu'on a $\bar{\mu}\{(x_1,\dots,x_n) \mid \forall\, k \in \{1,\dots,n\},\ x_k \in S\} = \|\mu(S)\|_L^n$ quel que soit $S \in \mathscr{B}$. On a donc :

$$\bar{\mu}\{(x_1,\dots,x_n) \mid \exists\, j \in J,\ \forall\, k \in \{1,\dots,n\},\ x_k \notin S_j\}$$

$$\leq \sum_{j \in J} \| \mu(X \setminus S_j) \|_L^n \leq N(1-a\varepsilon^r)^{n/r} \leq N \exp(-n\,\eta)$$

(en posant $\eta = \frac{a\varepsilon^r}{r}$).

(c) On choisit l'entier n de sorte que $\frac{1}{\eta} \operatorname{Log} N < n \leq 1 + \frac{1}{\eta} \operatorname{Log} N$. En particulier on a $N \exp(-n\eta) < 1$. Il existe donc $A = \{x_1,\dots,x_n\}$ (les x_i n'étant pas forcément distincts) avec $A \cap S_j \neq \emptyset$ pour tout $j \in J$. On a donc $N \leq c_1|A|^\alpha \leq c_1 n^\alpha \leq c_1(1+\frac{1}{\eta} \operatorname{Log} N)^\alpha \leq 2^\alpha c_1 \operatorname{Sup}(1,(\frac{1}{\eta} \operatorname{Log} N)^\alpha)$. On fixe $t_0 > 1$ tel que $t > t_0$ implique $t^{\alpha/\beta} \leq t(\operatorname{Log} t)^{-\alpha}$. Il y a alors deux possibilités :

- ou bien N est $\leq t_1 = \operatorname{Sup}(t_0, 2^\alpha c_1)$ et on a donc $N \leq t_1\, \eta^{-\beta}$ (car on a supposé $a\varepsilon^r \leq r$, c'est-à-dire $\eta \leq 1$).

- ou bien N est $> t_1$; on a alors :

$$N^{\alpha/\beta} \leq N\,(\operatorname{Log} N)^{-\alpha} \leq 2^\alpha\, c_1\, \eta^{-\alpha}, \quad \text{ce qui implique } N \leq 2^\beta\, c_1^{\beta/\alpha}\, \eta^{-\beta}.$$

Le résultat est donc démontré, puisqu'on a $\eta = \frac{a\varepsilon^r}{r}$. □

Appliqué à la famille $\mathscr{S}_\Delta$ (voir 5.2.3) et à une mesure $\mu = (\mu_1,\dots,\mu_n)$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^n)^+$ ($\mathbb{R}^n$ étant muni de la norme euclidienne), on obtient :

<u>COROLLAIRE 5.2.5</u>. Soient $\mathscr{S}$ une partie de 2^X vérifiant $|A \cap \mathscr{S}| \leq c_1|A|^\alpha$ pour tout $A \subset X$. Soient $\mu_1,\dots,\mu_n$ des mesures additives positives sur $(X,\sigma\mathscr{S})$ vérifiant $\sum_{i=1}^n \mu_i(X)^2 = 1$; on note d_μ l'écart $S,S' \to (\sum_{i=1}^n \mu_i(S \Delta S')^2)^{1/2}$. Pour chaque $\varepsilon \in]0,1]$, on note $N_\varepsilon(\mathscr{S},d_\mu)$ le nombre maximal de points de l'espace $(\mathscr{S},d_\mu)$ à distances mutuelles $\geq \varepsilon$. Fixons $\beta > \alpha$. On a alors $N_\varepsilon(\mathscr{S},d_\mu) \leq c_2\, \varepsilon^{-2\beta}$ (où c_2 ne dépend que de c_1, α et β).

(5.3) Le lemme 1.4 a un analogue dans L_φ, quelle que soit la fonction de Young φ surmultiplicative sur $[m,+\infty[$. Sa démonstration étant semblable à celle de 1.4, nous nous contentons de l'énoncer :

<u>LEMME 5.3.1</u>. Soit φ une fonction de Young surmultiplicative sur $[m,+\infty[$. Soit F une partie dénombrable de $L^\varphi(\Omega,\mathcal{A},P)$ contenant 0 et de diamètre δ. Pour chaque $j \in \mathbb{N}$, on note N_j la cardinalité maximale d'un $\delta 2^{-j}$-réseau dans $(F, \| \ \|_\varphi)$. On a alors :

$$\|\operatorname*{Sup}_{Z\in F} |Z| \|_\varphi \leq \delta(\varphi(m)+1) \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-j}(m + \varphi^{-1}(N_{j+1})).$$

(5.4) Quant aux inégalités de Khintchine (1.5), on sait qu'elles impliquent (et à une constante près sont équivalentes à) l'inégalité :

$$\|\sum_{i=1}^{n} a_i r_i\|_\varphi \leq 2\sqrt{e}\ \|\sum_{i=1}^{n} a_i r_i\|_2$$

où φ est la fonction $x \to e^{x^2} - 1$.

(5.5) Soit $\varphi(x) = e^{x^2} - 1$ et soient $\mu_1,\ldots,\mu_n$ des mesures additives sur $(X,\sigma\mathscr{S})$. Pour tout $S, S' \in \mathscr{S}$, on note $\tilde{d}_\mu$ l'écart $S,S' \to \|\mu(S) - \mu(S')\|_L = (\sum_{i=1}^{n} (\mu_i(S) - \mu_i(S'))^2)^{1/2}$. On se propose d'évaluer $\tilde{A}_n(\mu) = \operatorname{Inf}\{b \mid \int_{[0,1]} \varphi(\frac{1}{b} \operatorname*{Sup}_{S\in\mathscr{S}} |\sum_{i=1}^{n} r_i(t)\, \mu_i(S)|dt) \leq 1\}$ (où $r_1,\ldots,r_n$ sont des fonctions de Rademacher et $\mathscr{S}$ est dénombrable).

(5.5.1) On pose $N(\varepsilon) = N_\varepsilon(\mathscr{S},\tilde{d}_\mu)$. On procède comme en (2.2). Notons F l'ensemble des v.a. $Z_S(t) = \sum_{i=1}^{n} r_i(t)\, \mu_i(S)$ (pour $S \in \mathscr{S}$). L'inégalité de Khintchine (voir 5.4) donne, pour tous $S, S' \in \mathscr{S}$:

$$\|Z_S - Z_{S'}\|_\varphi \leq 2\sqrt{e}\, \|Z_S - Z_{S'}\|_2 = 2\sqrt{e}\ \tilde{d}_\mu(S,S').$$

On pose $p = \operatorname*{Sup}_{S\in\mathscr{S}} \sum_{i=1}^{n} \mu_i(S)^2$. Le diamètre δ de F dans $L^\varphi([0,1], dt)$ est donc $\leq 4\sqrt{ep}$. On utilise alors 5.3.1 (rappelons que, pour la fonction φ, on a $m = \sqrt{2}$, donc $\varphi(m) + 1 \leq 8$) :

$$\|\sup_{S\in\mathscr{S}}|Z_S|\|_\varphi \leq 8\,\delta \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-j}(\sqrt{2}+\sqrt{\mathrm{Log}(1+N(\delta 2^{-(j+1)}))}\ )$$

(*) $$\leq 8\delta\,[2\sqrt{2} + 2\sqrt{\mathrm{Log}\ 2} + \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-j}\sqrt{\mathrm{Log}\ N(\ 2^{-(j+1)})}].$$

On va maintenant faire des hypothèses sur $\mathscr{S}$ et sur μ.

(5.5.2) Les mesures μ_i sont positives et vérifient $\sum_{i=1}^{n} \mu_i(X)^2 = 1$ et on a $|A \cap \mathscr{S}| \leq c_1|A|^\alpha$ pour tout $A\subset X$; on fixe $\beta > \alpha$. On a alors $\tilde{d}_\mu \leq d_\mu$ (c'est-à-dire $\|\mu(S) - \mu(S')\|_L \leq \|\mu(S \,\Delta\, S')\|_L$) et cela implique (en utilisant 5.2.5) que $N(\varepsilon) \leq c_2\,\varepsilon^{-2\beta}$ (où c_2 ne dépend que de c_1, α et β). On en déduit :

<u>PROPOSITION 5.5.3</u>. Soient $\mathscr{S}$ une partie de 2^X vérifiant $|A\cap\mathscr{S}| \leq c_1|A|^\alpha$ pour tout $A\subset X$. Soient $\mu_1,\dots,\mu_n$ des mesures additives positives sur $(X,\sigma\mathscr{S})$ vérifiant $\sum_{i=1}^{n} \mu_i(X)^2 = 1$. Il existe alors deux nombres c_3 et c_4 (ne dépendant que de c_1 et α) tels que :

$$\tilde{A}_n(\mu) = \|\ \|\sum_{i=1}^{n} r_i\mu_i\|_{\mathscr{S}}\|_\varphi \leq c_3\sqrt{p} + c_4\sqrt{p}\ \mathrm{Log}\ (\tfrac{1}{p}),$$

où on a posé $p = \sup_{S\in\mathscr{S}} \sum_{i=1}^{n} \mu_i(S)^2$.

(5.5.4) En général la convergence du second membre de (*) équivaut à la convergebce (en 0) de l'intégrale $\int_0 \sqrt{\mathrm{Log}\ N(\varepsilon)}\ d\varepsilon$; pour être bref, nous dirons qu'un espace $(\mathscr{S},\tilde{d}_\mu)$ vérifiant cette condition a un *exposant d'entropie* $\leq 2^-$. Sans énoncer de résultat, indiquons les faits suivants :

(a) on retrouve par ce calcul le fait bien connu qu'une classe $\mathscr{S}$ de parties de X est une classe de Vapnik dès que $(\mathscr{S},d_P)$ est d'exposant d'entropie $\leq 2^-$ pour toute loi P ;

(b) on peut évidemment remplacer en (5.5.1) la classe $\mathscr{S}$ de parties de X par une classe (dénombrable) $\mathscr{F}$ de fonctions sur X à valeurs réelles ; les calculs restent inchangés dès qu'on dispose de la condition d'entropie convenable ;

(c) on peut même envisager de remplacer $\mathscr{S}$ par une classe (dénombrable) de fonctions sur X à valeurs dans un espace de Banach $(E,\ \|\ \ \|_E)$ (les inégalités de Khintchine restant vraies dans tout espace de Banach) en prenant $\tilde{d}_\mu(f,f') = \|\sum_{i=1}^{n} r_i(\mu_i(f) - \mu_i(f'))\|_2$ en général et $\tilde{d}_\mu(f,f') = (\Sigma \|\mu_i(f)-\mu_i(f')\|^2)^{1/2}$ si $(E, \| \ \|_E)$ est de type 2.

(5.5.5) En général, les calculs effectués au paragraphe 2, reposant sur l'inégalité de Khintchine seule, sont susceptibles de toutes les extensions qu'on peut apporter à cette inégalité :

(a) remplacement des v.a. de Bernouilli r_i par des "chaos de Bernouilli" $r_{i_1} \ldots r_{i_k}$ (cela fait tomber l'intégrabilité de $e^{x^2} - 1$ à $e^{x^{2/k}} - 1$; voir partie II, § 2) ;

(b) remplacement des v.a. de Bernouilli par des caractères formant un ensemble de Sidon ;

(c) remplacement de $\mathscr{S}$ par une famille de fonctions à valeurs dans un espace de Banach (voir ci-dessus).

(5.5.6) On peut noter en fait que l'hypothèse que la classe $\mathscr{S}$ (ou $\mathscr{F}$) est dénombrable est complètement inutile dans le paragraphe 2. En effet la loi de $(r_1,\ldots,r_n)$ est discrète et on peut donc toujours, sans changer la v.a. $\sup_{S\in\mathscr{S}} |\sum_{i=1}^{n} r_i(.)\ \mu_i(S)|$, remplacer $\mathscr{S}$ par une sous-classe dénombrable.

(5.6) Les *questions de mesurabilité* interviennent évidemment aux paragraphes 3 et 4 : la condition (nécessaire et suffisante) pour pouvoir effectuer les calculs indiqués est que $\|P_n - P'_n\|_{\mathscr{S}}$ et $\|P_n - P\|_{\mathscr{S}}$ soient $P^{\otimes n}$-mesurables (on peut ici aussi remplacer $\mathscr{S}$ par une classe $\mathscr{F}$ de fonctions sur X).

(5.6.1) Lorsque $\mathscr{S}$ (ou $\mathscr{F}$) est dénombrable, la mesurabilité est donc automatique.

(5.6.2) Si on veut considérer des classes $\mathscr{S}$ (ou $\mathscr{F}$) non dénombrables, on sait (voir Dudley [5] th. 10.3.2) qu'une condition suffisante pour que $\|P_n - P'_n\|_{\mathscr{F}}$ et $\|P_n - P\|_{\mathscr{F}}$ soient universellement mesurables est que $\mathscr{F}$ soit "image admissible Suslin" ; on renvoie à [5] pour cette notion (signalons que l'argument de [5], donné pour une classe $\mathscr{F}$ de fonctions à valeurs réelles, s'étend surement aux classes de fonctions à valeurs dans un espace de Banach séparable).

(5.7) Pour certaines classes $\mathscr{S}$, on peut montrer qu'il existe une sous-classe dénombrable $\mathscr{T}$ telle que tout élément de $\mathscr{S}$ soit limite simple d'une suite d'éléments de $\mathscr{T}$ (c'est le cas par exemple pour la classe $\mathscr{S}$ des demi espaces affines ouverts de $\mathbb{R}^d$) ; dans ce cas on a $\|P_n - P'_n\|_{\mathscr{S}} = \|P_n - P'_n\|_{\mathscr{T}}$ et $\|P_n - P\|_{\mathscr{S}} = \|P_n - P\|_{\mathscr{T}}$ et on se ramène à (5.6.1).

(5.8) Les propositions 4.2 et 4.5 s'étendent donc aussi à des classes $\mathscr{S}$ non dénombrables, mais on doit alors remplacer $\Theta_{\mathscr{S}}$ par l'ensemble des lois P telles que $\|P_n - P'_n\|_{\mathscr{S}}$ et $\|P_n - P\|_{\mathscr{S}}$ soient $P^{\otimes n}$-mesurables pour tout n (ensemble qui peut d'ailleurs être égal à $\Theta_{\mathscr{S}}$, voir (5.6.2)).

Elles s'étendent aussi à des classes de fonctions.

II) DENSITÉ ET DIMENSION COMBINATOIRE

§ 1. Une extension du lemme de Sauer.

Notons $\{0,\ldots,k\}^X$ l'ensemble des applications de X dans $\{0,\ldots,k\}$ et $\varphi_k(X,n)$ l'ensemble des éléments f de $\{0,\ldots,k\}^X$ tels que $|f^{-1}(\{1,\ldots,k\})| \leq n$. Soit $\mathscr{F}$ une partie de $\{0,\ldots,k\}^X$. Si A est une partie de X, on note $A \cap \mathscr{F}$ l'ensemble des restrictions à A des éléments de $\mathscr{F}$; si on a $|A \cap \mathscr{F}| \geq 2^{|A|}$, on dit que A est pulvérisé par $\mathscr{F}$. On note $\mathrm{Dens}(\mathscr{F})$ la borne supérieure des cardinaux des parties pulvérisés par $\mathscr{F}$.

PROPOSITION. Soit $\mathscr{F}$ une partie de $\{0,\ldots,k\}^X$ avec $\mathrm{Dens}(\mathscr{F}) \leq n$. Si X est fini, il existe alors une injection φ de $\mathscr{F}$ dans $\varphi_k(X,n)$ avec $\varphi(f) \leq f$ pour tout $f \in \mathscr{F}$.

Démonstration. On fait une récurrence sur $|X|$. Si $|X| = 0$, le résultat est trivial. Soit maintenant $|X| = r$ (et supposons le résultat démontré pour $|X| = r-1$) ; soient $s \in X$ et $Y = X \setminus \{s\}$; on note alors $\mathscr{F}_2$ l'ensemble des éléments de $Y \cap \mathscr{F}$ qui sont restriction d'au moins deux éléments de $\mathscr{F}$ et on pose $\mathscr{F}_1 = Y \cap \mathscr{F}$. On a $\mathrm{Dens}(\mathscr{F}_1) \leq n$ et $\mathrm{Dens}(\mathscr{F}_2) \leq n-1$; il existe donc une injection φ_1 de $\mathscr{F}_1$ dans $\varphi_k(Y,n)$ avec $\varphi_1(f) \leq f$ pour tout $f \in \mathscr{F}_1$ et une injection φ_2 de $\mathscr{F}_2$ dans $\varphi_k(Y,n-1)$ avec $\varphi_2(f) \leq f$ pour tout $f \in \mathscr{F}_2$.

Soit $f \in \mathscr{F}$; posons $g_1 = \varphi_1(f|_Y)$ et $g_2 = \varphi_2(f|_Y)$; on définit alors $g = \varphi(f)$ de la façon suivante :

- si $f|_Y \in \mathscr{F}_2$ et $f(s) \neq 0$, on prend $g(y) = g_2(y)$ pour $y \in Y$ et $g(s) = f(s)$;
- sinon, on prend $g(y) = g_1(y)$ pour $y \in Y$ et $g(s) = 0$.

Il est clair que φ répond à la question. □

COROLLAIRE. Soit $\mathscr{F}$ une partie de $\{0,\dots,k\}^X$ avec $\mathrm{Dens}(\mathscr{F}) \leq n$ et soit $A \subset X$. On a alors $|A \cap \mathscr{F}| \leq \sum_{j=0}^{n} \binom{|A|}{j} k^j$. En particulier $|A \cap \mathscr{F}|$ est majoré par une fonction polynomiale de $|A|$ (de degré n).

Démonstration. $|\varphi_k(A,n)| = \sum_{j=0}^{n} \binom{|A|}{j} k^j$. □

Pour $k = 1$, on retrouve le lemme de Vapnik-Cervonenkis-Sauer [9],[10].

§ 2. Dimension combinatoire et densité.

L'inégalité de Khintchine pour les "chaos de Bernouilli" se formule de la façon suivante :

soit $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de v.a. de Bernouilli symétriques indépendantes, pour chaque β partie finie de $\mathbb{N}$, on pose $r_\beta = \prod_{i\in\beta} r_i$ (fonctions de Walsh-Paley, ou caractères du groupe compact $2^{\mathbb{N}}$).

Soit $\beta \to a_\beta$ une application de $\binom{\mathbb{N}}{k}$ dans $\mathbb{R}$ (autrement dit $\sum_{|\beta|=k} a_\beta r_\beta$ est une fonction sur $2^{\mathbb{N}}$ à spectre porté par $\binom{\mathbb{N}}{k}$)). On a alors, quel que soit $p \geq 1$, $\|\sum_{|\beta|=k} a_\beta r_\beta\|_p \leq p^{k/2} \|\sum_{|\beta|=k} a_\beta r_\beta\|_2$. Cela a amené Blei [1] à étudier la notion suivante :

soit $\mathscr{S}$ une partie de $\binom{\mathbb{N}}{j}$ (où j est un entier fixé) ;

soit $dc(\mathscr{S})$ la borne inférieure des nombres réels α tels qu'il existe c avec

$$(*) \qquad \|\sum_{\beta\in\mathscr{S}} a_\beta r_\beta\|_p \leq c\, p^{\alpha/2} \|\sum_{\beta\in\mathscr{S}} a_\beta r_\beta\|_2$$

(pour toute application $\beta \to a_\beta$ de $\mathscr{S}$ dans $\mathbb{R}$, et pour tout $p \geq 1$) ; il montre que $dc(\mathscr{S})$ est la borne inférieure des nombres réels α tels qu'il existe c avec $|\{S\in\mathscr{S} \mid S\subset A\}| \leq c|A|^\alpha$ pour tout $A\subset X$; il appelle ce nombre $dc(\mathscr{S})$ la *dimension combinatoire de* $\mathscr{S}$.

Voici quelques observations que j'ai fait à ce sujet :

(a) On a toujours $dc(\mathscr{S}) \leq \mathrm{dens}(\mathscr{S})$.

(b) Soit $\mathscr{S}\subset\binom{\mathbb{N}}{j}$ avec $\mathrm{dens}(\mathscr{S}) > j-1$, on a alors $dc(\mathscr{S}) = \mathrm{dens}(\mathscr{S})$.

(c) $dc(\mathscr{S})$ ne prend jamais de valeur dans $]0,1[$.

(d) Certains graphes extrémaux du problème de Zarankiewicz (voir § 3 ci-dessous, exemples (a) et (b)) fournissent explicitement des parties de $\binom{\mathbb{N}}{2}$ de densité, et donc, par (b), de dimension combinatoire, égale à $\frac{3}{2}$ ou $\frac{5}{3}$.

(e) Blei ne construit pas d'exemple explicite dans $\binom{\mathbb{N}}{2}$.

Par contre il construit (voir Blei, Körner [2]), par une méthode de graphe probabiliste, donc non explicite, une partie $\mathscr{S}$ de $\binom{\mathbb{N}}{2}$ de dimension combinatoire α, pour chaque $\alpha \in]1,2[$.

Voici une conséquence qui me semble intéressante :

PROPOSITION. Pour chaque $s \in [1,+\infty[$, il existe une classe $\mathscr{S}$ de densité s.

Démonstration. Si s est entier, c'est connu (prendre par exemple $\mathscr{S} = \binom{\mathbb{N}}{s}$). Sinon on peut écrire $s = k+\alpha$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in]1,2[$.

On considère une partie $\mathscr{S}_0$ de $\binom{\mathbb{N}}{2}$ de dimension combinatoire α, donc (grâce à (b)) de densité α. Alors $\mathscr{S} = \{S \in \binom{\mathbb{Z}}{k+2} \mid S \cap \mathbb{N} \in \mathscr{S}_0$ et $|S \setminus \mathbb{N}| = k\}$ est de densité $k+\alpha = s$. $\square$

(f) Blei construit cependant des exemples explicites de parties de $\binom{\mathbb{N}}{j}$ de dimension combinatoire $\frac{j}{k}$ (pour tout $j, k \in \mathbb{N}$, $1 < k < j$). Comme on n'a jamais $\frac{j}{k} > j-1$, il n'y a pas de résultat de densité correspondant.

Pour la compréhension du paragraphe 3 ci-dessous, je précise qu'une partie F de $\mathbb{N}^j$ peut toujours être considérée comme une partie de $\binom{X}{j}$ (en prenant pour X la réunion disjointe de j copies de $\mathbb{N}$) ou même comme une partie de $\binom{\mathbb{N}}{j}$ (en identifiant $\mathbb{N}$ et X).

Blei présente d'ailleurs la dimension combinatoire selement pour des parties F de $\mathbb{N}^j$, (pour $j = 2$, il est commode de considérer les parties de $\binom{\mathbb{N}}{2}$ comme des graphes et les parties de $\mathbb{N}^2$ comme des graphes bipartis).

Indiquons enfin le résultat suivant (dû à Rudin [8], Pisier [7]) : si on définit par (*), la dimension $dc(\Lambda)$ d'un ensemble Λ de caractères d'un groupe compact commutatif, on a alors :

Λ est un ensemble de Sidon si et seulement si $dc(\Lambda) = 1$.

§ 3. Quelques exemples explicites.

(a) *Une partie de* $\mathbb{N}^2$ *de dimension combinatoire* $\frac{3}{2}$ (Kövari, Sos, Turan [6]) : pour tout corps fini F_q, on note $P_q = (F_q)^2$ et L_q l'ensemble des droites affines de P_q ; on identifie $\mathbb{N}^2$ à $(\sum_q P_q) \times (\sum_q L_q) = P \times L$. On définit F par $(p,\ell) \in F$ s'il existe q avec $p \in \ell \in L_q$.

(b) *Une partie de* $\mathbb{N}^2$ *de dimension combinatoire* $\frac{5}{3}$ (Brown [3]) : pour p premier ≥ 3, on note $V_p = (F_p)^3$ et on choisit un élément α_p de F_p tel que :

α_p est un résidu quadratique non nul si $p \equiv 3 \pmod 4$,

α_p n'est pas un résidu quadratique sinon ;

on identifie $\mathbb{N}$ à $(\sum_p V_p) = V$.

On définit F par $(x,y) \in F$ s'il existe p avec $x, y \in V_p$, $\|x-y\|^2 = \alpha_p$.

(c) *Une partie de* $\mathbb{N}^j$ *de dimension combinatoire* $\frac{j}{k}$ (Blei [1]) :

on identifie $\mathbb{N}$ à $D = \mathbb{N}^k$.

On définit F par : $(d_1,\dots,d_j) \in F$ s'il existe $(n_1,\dots,n_j) \in \mathbb{N}^j$ avec $d_1 = (n_1,\dots,n_k)$, $d_2 = (n_2,\dots,n_{k+1}),\dots\dots$, $d_j = (n_j,n_1,\dots,n_{k-1})$.

Observations :

- Pour établir (c), Blei montre en fait que :

$$\sum_{(n_1,\dots,n_j)\in F} x_{1,n_1}\, x_{2,n_2} \cdots\cdots x_{j,n_j} \leq \|x_1\|_2 \, \|x_2\|_2 \cdots \|x_j\|_2 \,.$$

- Je sais montrer, pour (a) (et en général pour tout graphe sans $K_{2,r}$, $r \geq 2$) qu'on a de même :

$$\sum_{(p,\ell)\in F} x_p y_\ell \leq c(\|x\|_2 \, \|y\|_1 + \|x\|_1 \, \|y\|_2)$$

- (a) et (b) sont les deux cas du problème de Zarankiewicz actuellement résolus (respectivement graphes sans $K_{2,2}$ et graphes sans $K_{3,3}$).

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. BLEI : *Fractional cartesian products of sets*, *Ann. Institut Fourier* 29 (1979), 79-105.

[2] R. BLEI, T. KÖRNER : *Combinatorial dimension and random sets*, (*preprint*).

[3] W. G. BROWN : *On graphs which do not contain a Thomsen graph*, *Can. Math. Bull.* 9 (1966), 281-285.

[4] R.M. DUDLEY : *Central limit theorems for empirical measures*, *Ann. of Proba.* 6 (1978), 899-929.

[5] R.M. DUDLEY : *Cours de S^t Flour 1982.*

[6] T. KÖVARI, V.T. SOS, P. TURAN : *On a problem of K. Zarankiewicz*, *Colloq. Math.* 3 (1954), 50-57.

[7] G. PISIER : *Ensembles de Sidon et processus gaussiens*, *C.R. Acad. Sc. Paris* 286 (1978), 671-675.

[8] W. RUDIN : *Trigonometric series with gaps*, *J. Math. Mech.* 9 (1960), 203-227.

[9] N. SAUER : *On the density of families of sets*, *J. Comb. Th.* A 13 (1972), 145-147.

[10] V.N. VAPNIK, A. Ya. CERVONENKIS : *On the uniform convergence of relative frequencies of events to their probabilities*, *Theor. Prob. Appl.* 16 (1971), 264-280.

Patrice ASSOUAD
Université de Paris-Sud
Centre d'Orsay
Bâtiment 425

91405 ORSAY Cedex

SOLUTIONS AVEC ESTIMATIONS DE L'EQUATION DES ONDES

David BEKOLLE

Nous désignons par Ω le complexifié $\mathbb{R}^{n+1}+i\Gamma$ du cône sphérique Γ de $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\Gamma = \{(y_o, y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : y_o y_1 - y_2^2 - \ldots - y_n^2 > 0 , \ y_o > 0\} .$$

L'opérateur des ondes $\square$ est défini sur Ω par :

$$\square_z = 4 \frac{\partial^2}{\partial z_o \partial z_1} - \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial z_n^2} , \quad z = (z_o, z_1, z_2, \ldots, z_n) ,$$

et $H(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions holomorphes dans Ω .

Le résultat suivant est démontré dans le livre de F. Trèves [7] :

THEOREME A. <u>Quelle que soit la fonction</u> $g \in H(\Omega)$, <u>il existe une fonction</u> $f \in H(\Omega)$ <u>telle que</u> $\square f = g$.

Nous désignons par V la mesure de Lebesgue dans Ω ; la classe de Bergman $A^p(\Omega)$, $0 < p \leq +\infty$, est définie par $A^p(\Omega) = H(\Omega) \cap L^p(dV)$ et la classe de Bergman avec poids $A^{p,r}(\Omega)$ est définie par

$$A^{p,r}(\Omega) = H(\Omega) \cap L^p(B^{-r}(z,z)\, dV(z)) .$$

Le but de ce travail est de donner des solutions avec estimations de l'équation $\square f = g$, $g \in A^p$, $0 < p \leq +\infty$. Dans un certain sens, ceci revient à généraliser des théorèmes bien connus, relatifs à l'équation $\frac{d}{dz} f = g$ dans le disque unité du plan complexe (cf. P.L. Duren [4]) ; en particulier, nous verrons qu'en dimension supérieure, l'analogue de l'opérateur $\frac{d}{dz}$ est l'opérateur $\square$.

Les estimations que nous obtenons pourraient être comparées à celles obtenues pour l'opérateur $\bar{\partial}$ dans les domaines strictement pseudo-convexes (cf. S.G. Krantz [6]) : suivant les valeurs de p, la solution f appartiendra à une classe de Bergman, à la classe de Bloch ou à une classe de Lipschitz.

Le premier paragraphe est consacré au cas $n = 0$: Ω est alors le demi-plan supérieur du plan complexe et $\square = \frac{d}{dz}$. Le schéma de la résolution de ce cas élémentaire sera à nouveau utilisé en dimension supérieure. D'ailleurs, le cas $n = 1$, où Ω est le produit de deux demi-plans se déduit aisément du cas $n = 0$.

Au paragraphe deux, nous considérons le cas $n = 2$. Dans ce cas, Ω n'est plus un produit de demi-plans. Nous généraliserons, en utilisant des résultats de [1], des théorèmes bien connus pour $n = 0$ (voir [3]). Plus précisément, nous déterminerons des valeurs de $p \in \left]1,+\infty\right[$ pour lesquelles le projecteur de Bergman de Ω s'étend en un opérateur continu de L^p dans lui-même et nous en déduirons un théorème de décomposition atomique des fonctions de A^p ; nous établirons également une caractérisation du dual de A^p pour certaines valeurs de p. Par ailleurs, la résolution de ce cas utilise une primitive de $\square$ définie dans [1].

Enfin, au paragraphe trois, nous donnerons des indications pour le cas $n \geq 3$.

Nous adoptons la convention habituelle de désigner par la même lettre "C" des constantes qui peuvent être différentes d'une ligne à l'autre.

1. LES CAS $n = 0$ ET $n = 1$.

Dans le cas $n = 0$, Ω est le demi-plan supérieur Π^+ du plan complexe, $\Omega = \Pi^+ = \{z = x+iy \in C, y > 0\}$ et $\square_z = \frac{d}{dz}$.

Nous rappelons la définition de la classe de Bloch de Π^+. Une fonction $f \in H(\Pi^+)$ est dite fonction de Bloch si $\|f\|_* = \sup \{|f'(z)|y\} < +\infty$;

la classe de Bloch $\mathcal{B}(\Pi^+)$ est l'espace-quotient des fonctions de Bloch par les constantes.

Le théorème suivant est démontré dans [3] :

THEOREME B. <u>Munie de la norme induite par</u> $\|\ \|_*$, <u>la classe de Bloch</u> $\mathcal{B}(\Pi^+)$ <u>est un espace de Banach qui coincide avec le dual de</u> $A^1(\Pi^+)$.

Les solutions avec estimations de l'équation $\frac{d}{dz} f = g$, $g \in A^p(\Pi^+)$, sont données par le théorème suivant :

THEOREME. <u>Quel que soit</u> $p \in]0,+\infty[$, <u>il existe un opérateur linéaire</u> T_p <u>défini sur</u> A^p , <u>vérifiant</u> $\square T_p = \mathrm{Id}_{A^p}$, <u>et des constantes</u> C_p <u>telles que si</u> $g \in A^p$, <u>alors</u> :

1° <u>pour</u> $0 < p < 2$, $T_p g \in A^{\frac{2p}{2-p}}(\Pi^+)$ <u>et</u> $\|T_p g\|_{A^{\frac{2p}{2-p}}} \leq C_p \|g\|_{A^p}$;

2° <u>pour</u> $p = 2$, $T_2 g \in \mathcal{B}(\Pi^+)$ <u>et</u> $\|T_2 g\|_* \leq C_2 \|g\|_{A^2}$;

3° <u>pour</u> $2 < p \leq +\infty$, $T_p g$ <u>est dans la classe de Lipschitz</u> $\Lambda_{1-\frac{2}{p}}$ <u>et</u> $\|T_p g\|_{\Lambda_{1-\frac{2}{p}}} \leq C_p \|g\|_{A^p}$.

Nous rappelons la notation : $\|\ \|_{A^q} = \|\ \|_{L^q}$ et $\|\ \|_{A^{q,r}} = \|\ \|_{L^q(B^{-r}(z,z)dV(z))}$

<u>Démonstration</u>. Le noyau de Bergman $B(\zeta,z)$ de Π^+ est donné par $B(\zeta,z) = C(\zeta-\bar{z})^{-2}$.

Nous supposons d'abord $0 < p < 2$. On démontre facilement que pour un tel p , $A^p \subset A^{2,-1+\frac{2}{p}}$ et quel que soit $g \in A^p$, on a :

$$g(\zeta) = C_p \int_{\Pi^+} B^{\frac{2}{p}}(\zeta,z)\, g(z)\, B^{1-\frac{2}{p}}(z,z)\, dV(z) .$$

Dans ce cas, on prend pour T_p la primitive de $\frac{d}{dz}$ qui s'annule à l'infini ; plus précisément, comme

$$B^{\frac{2}{p}}(\zeta,z) = C_p \frac{d}{d\zeta} B^{\frac{2}{p}-\frac{1}{2}}(\zeta,z) ,$$

on définit T_p sur A^p par

$$T_p g(\zeta) = C_p \int_{\Pi^+} B^{\frac{2}{p}-\frac{1}{2}}(\zeta,z)\, g(z)\, B^{1-\frac{2}{p}}(z,z)\, dV(z) \quad .$$

On conclut en utilisant le théorème de décomposition atomique des fonctions de $A^p(\Pi^+)$, démontré dans [3] :

THEOREME C. Etant donnés $p \in]0,+\infty[$ et $\theta > \max\{-1, p-2\}$, il existe dans Π^+ une suite de points $\{\zeta_i\}$ telle que la classe de Bergman $A^p(\Pi^+)$ se décompose de la façon suivante :

(a) Si $F \in A^p$, il existe une suite de nombres complexes $\{\lambda_i\}$ telle que F s'écrit :

(1) $$F(\zeta) = \sum_i \lambda_i \frac{B^{\frac{2+\theta}{p}}(\zeta,\zeta_i)}{B^{\frac{1+\theta}{p}}(\zeta_i,\zeta_i)} \quad , \text{ avec } \sum_i |\lambda_i|^p \leq C_p \|F\|^p_{A^p} \quad ;$$

(b) Réciproquement, si $\sum_i |\lambda_i|^p < +\infty$, alors l'expression F donnée par (1) définit une fonction de A^p et

$$\|F\|^p_{A^p} \leq C_p \sum_i |\lambda_i|^p \quad .$$

Passons maintenant à la démonstration du théorème pour $p = 2$. Quel que soit $g \in A^2$ et quel que soit $\epsilon \geq 0$, on a :

$$g(\zeta) = C_\epsilon \int_{\Pi^+} B^{1+\epsilon}\,(g(z)\, B^{-\epsilon}\,(z,z)\, dV(z) \quad .$$

Mais si l'on considère la primitive T utilisée dans le cas précédent,

$$T g(\zeta) = C_\epsilon \int_{\Pi^+} B^{\frac{1}{2}+\epsilon}\,(\zeta,z)\, g(z)\, B^{-\epsilon}\,(z,z)\, dV(z) \quad ;$$

on ne sait pas lui donner un sens sur A^2 parce que $B^{\frac{1}{2}+\epsilon}\,(\zeta,z)\, B^{-\epsilon}\,(z,z)$ n'appartient pas à $L^2(dV(z))$.

Néanmoins, pour $\epsilon = \frac{1}{2}$, on donne un sens à la primitive T sur A^2 en retranchant du noyau de Bergman $B(\zeta,z)$ le noyau $B_o(\zeta,z) = B(i,z)$ qui vérifie $\frac{d}{d\zeta} B_o(\zeta,z) \equiv 0$, c'est-à-dire que l'on prend

$$T_2\, g(\zeta) = C_\epsilon \int_{\Pi^+} [B(\zeta,z) - B(i,z)]\, g(z)\, B^{-\frac{1}{2}}(z,z)\, dV(z) \quad .$$

T_2 est alors la primitive qui s'annule en $\varphi = i$; on a l'égalité :

$$T_2\, g(\zeta) = \int_i^\zeta g(z)\, dz \quad .$$

Enfin, lorsque $2 < p \leq +\infty$, on conclut à nouveau en prenant

$$T_p\, g(\zeta) = \int_i^\zeta g(z)\, dz \quad .$$

Le théorème est ainsi démontré.

Nous considérons ensuite le cas $n = 1$. Ω est alors le produit $(\Pi^+)^2$ de deux demi-plans et l'opérateur $\Box$ est défini par :

$$\Box_z = \frac{\partial^2}{\partial z_0\, \partial z_1} \quad .$$

La résolution de ce cas se déduit facilement du cas $n = 0$ et on obtient un théorème identique au précédent.

2. LE CAS $n = 2$.

Ω est maintenant le complexifié $\mathbb{R}^3 + i\Gamma$ du cône

$$\Gamma = \{(y_0, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3 : y_0 y_1 - y_2^2 > 0 \,,\, y_0 > 0\} \quad ,$$

et l'opérateur $\Box$ est défini sur Ω par

$$\Box_z = 4\,\frac{\partial^2}{\partial z_0\, \partial z_1} - \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \quad , \quad z = (z_0, z_1, z_2) \quad .$$

Le noyau de Bergman $B(\zeta, z)$ de Ω est donné par

$$B(\zeta, z) = C\,[(\zeta_0 - \bar{z}_0)(\zeta_1 - \bar{z}_1) - (\zeta_2 - \bar{z}_2)^2]^{-3}.$$

Nous allons distinguer trois cas : (i) $0 < p < \frac{12}{7}$; (ii) $\frac{12}{7} \leq p \leq 3$; (iii) $3 < p \leq +\infty$.

(i) Nous supposons d'abord $0 < p < \frac{12}{7}$; les solutions avec estimations de l'équation $\Box f = g$, $g \in A^p$ sont données par le théorème suivant :

THEOREME 1. <u>Quel que soit</u> $p \in \left]0,\frac{12}{7}\right[$, <u>il existe un opérateur linéaire</u> T_p , <u>défini sur</u> A^p , <u>vérifiant</u> $\square T_p = Id_{A^p}$, <u>et des constantes</u> C_p <u>telles que si</u> $g \in A^p$, <u>alors</u> $T_p g \in A^{\frac{3p}{3-p}}$ <u>et</u>

$$\|T_p g\|_{A^{\frac{3p}{3-p}}} \leq C_p \|g\|_{A^p} .$$

La preuve du théorème 1 utilise un théorème de décomposition atomique des fonctions de $A^p(\Omega)$, dont la démonstration due à R. Coifman et R. Rochberg [3] s'appuie sur le fait qu'un noyau reproduisant de A^p de la forme $B^{1+\varepsilon}(\zeta,z)B^{-\varepsilon}(z,z)$, $\varepsilon \geq 0$, définit un opérateur continu de L^p dans lui-même, $1 < p < +\infty$. Mais, en vertu du lemme suivant démontré dans [2] , ce fait ne peut être vrai que pour $1 < p < 7$.

LEMME 1. <u>Quel que soit</u> $\varepsilon \geq 0$, <u>le noyau</u> $B^{1+\varepsilon}(\zeta,z)\,B^{-\varepsilon}(z,z)$ <u>appartient à</u> L^p <u>si et seulement si</u> $p > \frac{7}{6}$.

On déduit facilement du lemme le corollaire suivant :

COROLLAIRE. <u>Le projecteur de Bergman</u> P <u>de</u> Ω <u>ne s'étend pas en un opérateur continu de</u> L^p <u>dans lui-même si</u> $1 < p \leq \frac{7}{6}$ <u>ou</u> $7 \leq p < +\infty$.

Ainsi, en vertu du lemme précédent, pour obtenir le théorème de décomposition atomique des fonctions de $A^p(\Omega)$, il suffit de déterminer les valeurs de $p \in]1,7[$ pour lesquelles il existe un nombre ε positif tel que le noyau $B^{1+\varepsilon}(\zeta,z)\,B^{-\varepsilon}(z,z)$ définit un opérateur continu de L^p dans lui-même ; en particulier, en vertu du corollaire précédent, le problème se pose de déterminer les valeurs de $p \in \left]\frac{7}{6},7\right[$ pour lesquelles le projecteur de Bergman P s'étend en un opérateur continu de L^p dans lui-même. Une réponse partielle est donnée par le théorème suivant :

THEOREME D. <u>Soient</u> p <u>et</u> ε <u>deux nombres réels positifs vérifiant l'une ou l'autre des hypothèses suivantes</u> :

(I) $1 < p < 4$ <u>et</u> $\varepsilon > -\frac{1}{2} + \frac{1}{2(p-1)}$;

(II) $1 < p < 2$ et $\frac{2}{3p} - \frac{1}{2} < \epsilon < \frac{1}{3} - \frac{p}{6}$.

Alors, la transformation linéaire T_ϵ définie dans Ω par

$$T_\epsilon(\zeta) = \int_\Omega |B(\zeta,z)|^{1+\epsilon} f(z)\, B^{-\epsilon}(z,z)\, dV(z)$$

est un opérateur continu de L^p dans lui-même. En particulier, le projecteur de Bergman P s'étend en un opérateur continu de L^p dans lui-même si $\frac{4}{3} < p < 4$.

La démonstration de ce théorème est donnée en appendice. On comparera le théorème D avec le fait que le projecteur de Szegö de Ω ne s'étend pas en un opérateur continu de $L^p(\mathbb{R}^3)$ dans lui-même si $p \neq 2$.

Le théorème de décomposition atomique des fonctions de $A^p(\Omega)$, $0 < p < 4$, s'obtient alors comme corollaire du théorème **D** :

COROLLAIRE. Soient p et θ deux nombres réels vérifiant $0 < p < 4$ et $\theta > \max\{-1, \frac{p}{2} - 2 + \frac{1}{2(p-1)}\}$. Il existe dans Ω une suite de points $\{\zeta_i\}$ telle que les fonctions de $A^p(\Omega)$ se décomposent de la façon suivante :

(a) Si $F \in A^p(\Omega)$, il existe une suite de nombres complexes $\{\lambda_i\}$ telle que F s'écrit :

(1) $$F(z) = \sum_i \lambda_i \frac{B^{\frac{2+\theta}{p}}(z,\zeta_i)}{B^{\frac{1+\theta}{p}}(\zeta_i,\zeta_i)} \quad \text{avec} \quad \sum_i |\lambda_i|^p \leq C_p \|F\|^p_{A^p} \;;$$

(b) Si $\sum_i |\lambda_i|^p < +\infty$, alors l'expression F donnée par (1) définit une fonction de A^p et on a : $\|F\|^p_{A^p} \leq C_p \sum_i |\lambda_i|^p$.

Pour démontrer le théorème 1, on raisonne exactement comme pour le cas $0 < p < 2$ en dimension un $(n = 0)$.

(ii) Nous supposons ensuite $\frac{12}{7} \leq p \leq 3$. En vertu du théorème 1 , quel que soit $p \in [1, \frac{4}{3}]$, il existe un opérateur linéaire T de A^p dans A^q , où $q \in [\frac{3}{2}, \frac{12}{5}]$. Désignons par $(A^p)^*$ (resp. $(A^q)^*$) le dual de A^p (resp. A^q) ; il est clair que $A^{q'}$ est contenu dans $(A^q)^*$, q' étant l'exposant conjugué de q

Si l'on désigne par T^* l'opérateur adjoint de T, on obtient que T^* envoie $A^{q'}$ dans $(A^p)^*$, $\frac{12}{7} \leq q' \leq 3$.

Ceci pose le problème de la caractérisation du dual $(A^p)^*$ de A^p, $1 \leq p \leq \frac{4}{3}$. Nous allons rappeler la définition de la classe de Bloch $\mathcal{B}$ de Ω (cf. [1]) et introduire une nouvelle classe de fonctions notée C^p, $0 < p < +\infty$. Dans la suite, $\mathcal{N}$ désigne l'ensemble des fonctions holomorphes dans Ω qui annulent l'opérateur $\Box$.

Une fonction g, holomorphe dans Ω, est dite fonction de Bloch si elle vérifie

$$\|g\|_* = \sup_{z \in \Omega} \left\{ B^{-\frac{1}{3}}(z,z) \left| \Box g(z) \right| \right\} < +\infty .$$

La classe de Bloch $\mathcal{B}$ de Ω est l'espace-quotient des fonctions de Bloch par $\mathcal{N}$; munie de la norme induite par $\| \ \|_*$, la classe $\mathcal{B}$ est un espace de Banach.

Une fonction g, holomorphe dans Ω, est dite fonction C^p, $0 < p < +\infty$, si elle vérifie

$$\|g\|_{C^p} = \left\| B^{-\frac{1}{3}}(z,z) \Box g(z) \right\|_{L^p} < +\infty .$$

La classe C^p est l'espace-quotient des fonctions C^p par $\mathcal{N}$; munie de la norme induite par $\| \ \|_{C^p}$, la classe C^p est un espace de Banach.

Nous démontrons le théorème suivant :

THEOREME E. 1° <u>Le dual de</u> A^p <u>coincide avec</u> $A^{p'}$ <u>si</u> $\frac{4}{3} < p < 4$.

2° <u>Pour</u> $p \in \left]1, \frac{4}{3}\right]$, <u>le dual de</u> A^p <u>coincide avec la classe</u> $C^{p'}$.

3° $(p = 1)$ <u>Le dual de</u> A^1 <u>coincide avec la classe de Bloch</u> $\mathcal{B}$.

La démonstration du théorème E est donnée en appendice.

<u>Remarque</u>. En fait, pour $p \in \left]\frac{4}{3}, 4\right[$, les espaces de Banach $C^{p'}$ et $A^{p'}$ coincident. Mais pour $p \in \left]1, \frac{4}{3}\right]$, s'il est facile d'établir l'inclusion de $A^{p'}$ dans $C^{p'}$, nous ne savons pas démontrer l'inclusion inverse ; on remarquera que pour $p \in \left]\frac{7}{6}, \frac{4}{3}\right]$, l'identité entre $A^{p'}$ et $C^{p'}$ équivaudrait au fait que le projecteur de Bergman de Ω s'étend en un opérateur continu de $L^{p'}$ dans lui-même (comparer avec le théorème D) .

Les solutions avec estimations de l'équation $\Box f = g$, $g \in A^p$, $\frac{12}{7} \leq p \leq 3$, sont données par le théorème suivant :

THEOREME 2. 1° <u>Quel que soit</u> $p \in \left[\frac{12}{7}, 3\right[$, <u>il existe un opérateur linéaire</u> T_p <u>défini sur</u> A^p , <u>vérifiant</u> $\Box T_p = Id_{A^p}$ <u>et une constante</u> C_p <u>telle</u>

<u>que si</u> $g \in A^p$, <u>alors</u> $T_p g \in C^{\frac{3p}{3-p}}$ et $\|T_p g\|_{C^{\frac{3p}{3-p}}} \leq C_p \|g\|_{A^p}$

2° ($p = 3$) <u>Il existe un opérateur linéaire</u> T_3 <u>défini sur</u> A^3 <u>vérifiant</u> $\square T_3 = \mathrm{Id}_{A^3}$ <u>et une constante</u> C <u>telle que si</u> $g \in A^3$, <u>alors</u> $T_3 g \in \mathcal{B}$ <u>et</u> $\|T_3 g\|_* \leq C \|g\|_{A^3}$.

<u>Démonstration</u>. On prend pour T_p , $\frac{12}{7} \leq p \leq 3$, la primitive de l'opérateur $\square$ définie dans [1] :

$$T_p g(\zeta) = C \int_{\Omega} (B - B_o)(\zeta, z)\, g(z)\, B^{-\frac{1}{3}}(z,z)\, dV(z) \quad ,$$

où $$(B - B_o)(\zeta, z) = \frac{(i - \bar{z}_o)^{5/2} - (\zeta_o - \bar{z}_o)^{5/2}}{(i - \bar{z}_o)^{5/2}} \left[B(\zeta, z) - B((\zeta_o, i, 0), z) \right] \quad ,$$

$\zeta = (\zeta_o, \zeta_1, \zeta_2)$ et $z = (z_o, z_1, z_2)$.

Dans le cas $p = 3$, on démontre facilement, en utilisant le théorème de la moyenne, que si $g \in A^3$, alors $g(z) B^{-1/3}(z,z) \in L^\infty$ et on a :

$$\|T_p g\|_* = \|g(z) B^{-1/3}(z,z)\|_\infty \leq C \|g\|_{A^3} \quad .$$

De même, dans le cas où $\frac{12}{7} \leq p < 3$, on démontre que si $g \in A^p$, alors $g(z) B^{-1/p}(z,z) \in L^\infty$; il s'ensuit que A^p est contenu dans $A^{\frac{3p}{3-p}, \frac{p}{3-p}}$ et par suite, on a :

$$\|T_p g\|_{C^{\frac{3p}{3-p}}} = \|g\|_{A^{\frac{3p}{3-p}, \frac{p}{3-p}}} \leq C_p \|g\|_{A^p} \quad .$$

Ceci démontre le théorème 2.

(iii) Nous supposons enfin $3 < p \leq +\infty$. Dans ce cas, le résultat est le suivant :

THEOREME 3. <u>Quel que soit</u> $p \in \,]3, +\infty[$, <u>il existe un opérateur linéaire</u> T_p <u>défini sur</u> A^p , <u>vérifiant</u> $\square T_p = \mathrm{Id}_{A^p}$, <u>et des constantes</u> C_p <u>telles que si</u> $g \in A^p$, <u>alors</u> $T_p g$ <u>est dans la classe de Lipschitz</u> $\Lambda_{1-\frac{3}{p}}$ <u>et</u>

$$\|T_p g\|_{\Lambda_{1-\frac{3}{p}}} \leq C_p \|g\|_{A^p} \quad .$$

Pour la démonstration, dans le cas où $3 < p < 6$, on peut à nouveau prendre pour T_p la primitive $T_p g(\zeta) = \int_\Omega (B - B_o) g(z)\, dV(z)$, et on conclut en raisonnant comme dans le cas classique du disque unité (cf. [4]) .

La démonstration du cas où $6 \leq p \leq +\infty$ sera donnée dans une publication ultérieure.

3. LE CAS OU $n \geq 3$.

Si l'on désigne par $\square^{(m)}$ le composé m fois de $\square$, m étant le plus petit entier strictement supérieur à $\frac{n-1}{2}$, les théorèmes précédents se généralisent à l'opérateur $\square^{(m)}$ lorsque $n \geq 3$, en vertu des résultats de [1] . Pour la définition de la classe de Bloch, on se réfèrera à cette note et on utilisera la primitive de $\square^{(m)}$ qui y est définie.

APPENDICE.

Nous donnons ici la démonstration des théorèmes D et E .

Démonstration du théorème D . On utilise un argument tiré du lemme de Schur (voir [5]) ; nous nous servons du lemme suivant :

LEMME 2. Soit g la fonction positive définie par

$$g(z) = y_o^{\alpha} (y_o y_1 - y_2)^{\beta} \ , \quad z = (x_o + iy_o, x_1 + iy_1, x_2 + iy_2) \in \Omega \quad .$$

1° Si l'on suppose $-3\varepsilon - 1 < \beta < 0$ et $-3(\varepsilon + \frac{1}{2}) < \alpha + \beta < -\frac{1}{2}$, alors :

$$\int_\Omega |B(\zeta, z)|^{1+\varepsilon} g(z) B^{-\varepsilon}(z,z)\, dV(z) = C_\varepsilon\, g(\zeta) \quad .$$

2° Si l'on suppose $-1 < \beta < 3\varepsilon$ et $-\frac{3}{2} < \alpha + \beta < 3\varepsilon - \frac{1}{2}$, alors :

$$B^{-\epsilon}(z,z)\int_{\Omega}|B(\zeta,z)|^{1+\epsilon}\,g(\zeta)\,dV(\zeta) = C'_{\epsilon}\,g(z) .$$

Le lemme 2 se démontre comme le lemme 1 (cf. [2]) .

Démontrons maintenant le théorème D . En vertu de l'argument tiré du lemme de Schur, il suffit de montrer qu'il existe une fonction positive g et des constantes C_1 et C_2 telles que :

1° $\int_{\Omega}|B(\zeta,z)|^{1+\epsilon}\,g(z)^{p'}\,B^{-\epsilon}(z,z)\,dV(z) \leq C_1\,g(\zeta)^{p'}$;

2° $B^{-\epsilon}(z,z)\int_{\Omega}|B(\zeta,z)|^{1+\epsilon}\,g(\zeta)^{p}\,dV(\zeta) \leq C_2\,g(z)^{p}$.

On prend $g(z) = y_0^{\alpha}(y_0y_1 - y_2^2)^{\beta}$, $z = x + iy$, et on conclut en utilisant le lemme 2 . Le théorème D est ainsi démontré.

Démonstration du théorème E. Le cas $p = 1$ du théorème ayant été établi dans [2] , il suffit de considérer les cas où $\frac{4}{3} < p < 4$ et $1 < p \leq \frac{4}{3}$.

Le cas où $\frac{4}{3} < p < 4$ découle immédiatement du théorème D et du lemme suivant :

LEMME 3. *Quel que soit* $p \in \left]\frac{7}{6}, 7\right[$, *les propriétés suivantes sont équivalentes* :

(i) *Le dual de* $A^p(\Omega)$ *coincide avec* $A^{p'}(\Omega)$;

(ii) *Le projecteur de Bergman de* Ω *s'étend en un opérateur continu de* $L^{p'}(\Omega)$ *dans lui-même*.

L'utilité du lemme 3 est bien connue pour ce genre de problème ; par ailleurs, sa démonstration ne présente aucune difficulté notable : nous l'omettrons.

Nous supposons maintenant $1 < p \leq \frac{4}{3}$. Soit L une forme linéaire continue sur A^p ; en vertu du théorème de Hahn-Banach, il existe $\ell \in L^{p'}$ tel que si $f \in A^p$, on a :
$$L(f) = \int_{\Omega}\ell(\zeta)\,\bar{f}(\zeta)\,dV(\zeta) .$$

Nous utiliserons le lemme suivant :

LEMME 4. Si $\ell \in L^{p'}$, $4 \leq p' < +\infty$, alors :

$$\left(\int_{\Omega} B^{4/3}(\zeta,z)\, \ell(z)\, dV(z)\right) B^{-1/3}(\zeta,\zeta) \in L^{p'} .$$

Ce lemme se démontre exactement comme le théorème D .

Désignons par G la fonction holomorphe définie dans Ω par :

$$G(\zeta) = C\int_{\Omega} B^{4/3}(\zeta,z)\, \ell(z)\, dV(z) .$$

Nous démontrons ensuite le lemme suivant :

LEMME 5. Quel que soit $f \in A^p(\Omega)$, $1 < p \leq \frac{4}{3}$, on a l'égalité :

$$\int_{\Omega} G(\zeta)\bar{f}(\zeta)\, B^{-1/3}(\zeta,\zeta)\, dV(\zeta) = \int_{\Omega} \ell(\zeta)\, \bar{f}(\zeta)\, dV(\zeta) .$$

Démonstration du Lemme 5. On remarque d'abord que le premier membre de l'égalité à établir est bien défini parce que, en vertu du lemme 4 , $G(\zeta)B^{-1/3}(\zeta,\zeta) \in L^{p'}$. Maintenant, en vertu du théorème de décomposition atomique des fonctions de A^p (§ 2), il suffit de démontrer le lemme lorsque f est un atome , $f(\zeta) = B^{\frac{2+\theta}{p}}(\zeta,\zeta_i)$ et l'on prendra θ assez grand. On conclut en vertu du théorème de Fubini en utilisant l'identité suivante (lemme 2.2' de l'appendice de [3]) :

$$C\int_{\Omega} B^{4/3}(\zeta,z)\, B^{\frac{2+\theta}{p}}(\zeta_i,\zeta)\, B^{-1/3}(\zeta,\zeta)\, dV(\zeta) = B^{\frac{2+\theta}{p}}(\zeta_i,z) .$$

Ceci démontre le lemme 5.

Maintenant, en vertu du théorème A , désignons par g une solution holomorphe de l'équation $\Box g = G$; il découle alors du lemme 4 que $g \in C^{p'}$. Par ailleurs, en vertu du lemme 5 , la fonction g définit sur A^p une forme linéaire continue L' par :

$$(*) \qquad L'(f) = \int_{\Omega} G(\zeta)\, \bar{f}(\zeta)\, B^{-1/3}(\zeta,\zeta)\, dV(\zeta) , \quad f \in A^p(\Omega) ,$$

et cette forme linéaire coïncide avec la forme linéaire initiale L ; on obtient ainsi que le dual de A^p coïncide avec un sous-espace de la classe $C^{p'}$.

Réciproquement, toute fonction $g \in C^{p'}$ définit une forme linéaire continue sur A^p par $(*)$; on conclut alors que le dual de A^p coïncide avec la classe $C^{p'}$. Ceci achève la démonstration du théorème E.

[1] BEKOLLE, D. Le dual de la classe de Bergman A^1 dans le complexifié du cône sphérique. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 296, 581-583 (1983).

[2] BEKOLLE, D. Le dual de l'espace des fonctions holomorphes intégrables dans des domaines de Siegel. (à paraître).

[3] COIFMAN, R. et ROCHBERG, R. Representation theorems for holomorphic and harmonic functions in L^p . Astérisque 77, 11-66, Soc. Math. France (1980).

[4] DUREN, P.L. Theory of H^p spaces. Academic Press (1970).

[5] FORELLI, F. et RUDIN, W. Projections on spaces of holomorphic functions in balls. Indiana Univ. Math. J. 24, 593-602 (1974).

[6] KRANTZ, S.G. Estimates for integral kernels of mixed type, fractional integration operators, and optimal estimates for the $\bar{\partial}$ operator. Manuscripta Math. 30 (1), 21-52 (1979).

[7] TREVES, F. Linear partial differential equations with constant coefficients. Mathematics and its applications, vol. 6, Gordon and Breach, 1966.

Département de Mathématiques
Université de Bretagne Occidentale
6 avenue Victor Le Gorgeu
29283 BREST cedex

RESOLUTION DE L'EQUATION $\bar{\partial}u=f$ ET APPLICATION AUX ZEROS DES FONCTIONS HOLOMORPHES DANS LE BIDISQUE

Philippe CHARPENTIER

I - INTRODUCTION

Nous présentons ici un résumé des résultats obtenus récemment dans le bidisque d'une part sur les estimations des solutions de l'équation $\bar{\partial}u = f$ et d'autre part sur l'étude des zéros des fonctions holomorphes. Plus précisement, nous étudions les zéros des fonctions appartenant aux classes suivantes :

$$N_\alpha(D^2) = \{f \text{ holomorphe dans } D^2 \text{ t.q. } \int_{D^2} \delta_{\partial D}^{\alpha-1}(z) \log^+|f(x)|\,d\lambda(z) < +\infty\}, \alpha>0$$

$$N(\partial D^2)=\{f \text{ holomorphe dans } D^2 \text{ t.q } \sup_{r<1} \int_{\partial D^2} \operatorname{Log}^+|f(rz)|\,d\sigma(z) < +\infty\},$$

$$N_\alpha(\Delta) = \{f \text{ holomorphe dans } D^2 \text{ t.q. } \int_\Delta \delta_{T^2}^{\alpha-1}(z) \operatorname{Log}^+|f(z)|\,d\sigma(z) < +\infty\}, \alpha>0,$$

$$N(T^2) = \{f \text{ holomorphes dans } D^2 \text{ t.q. } \sup_{r>1} \int_{T^2} \operatorname{Log}^+|f(rz)|\,d\sigma(z) < +\infty\},$$

où $D^2 = \{(z_1,z_2)\in D^2 \text{ t.q. } |z_1|<|z_2|<1\}$, $T^2=\{(z_1,z_2)\in D^2 \text{ t.q. } |z_1|=|z_2|=1\}$, $\Delta = \{(z_1,z_2)\in D^2 \text{ t.q. } |z_1|=|z_2|\}$, $\delta_{\partial D^2}(z) = \min(1|z_1|^2,1-|z_2|^2)$, $\delta_{T^2}(z) = \max(1-|z_1|^2,1-|z_2|^2)$, $z = (z_1,z_2) \in D^2$.

Les résultats que nous allons donner ayant été publiés par ailleurs, nous donnerons très peu de démonstration.

II - ESTIMATIONS DES SOLUTIONS DE L'EQUATION $\bar{\partial} u = f$

Ces estimations s'obtiennent, pour la plupart, à l'aide de formules intégrales explicites. La première de ces formules a été obtenue par G.M. Henkin [7] et a permis d'obtenir une estimation en norme L^∞. A partir de cette formule, M. Landucci ([9],[10]) a obtenue la même estimation pour la solution minimale dans $L^2(D^2)$. Dans [1], E. Amar et l'auteur ont construit une autre formule et obtenus des estimations en norme $L^p(\mathbb{T}^2)$, $1 \leq p \leq \infty$. Dans [3], l'auteur a construit explicitement les solutions minimales ce qui a permis d'obtenir d'autres estimations (voir ci-après). Enfin, G.M. Henkin et P. Polyakov, ont utilisé dans [8] une autre formule explicite pour obtenir des résultats sur les zéros des fonctions des classes $N_\alpha(\Delta)$ et $N(\mathbb{T}^2)$.

Les estimations que nous allons donner ici s'obtiennent essentiellement à l'aide des formules minimales de [3] : si $f = f_1 \, d\bar{\zeta}_1 + f_2 \, d\bar{\zeta}_2$ est une $(0,1)$-forme de classe C^1 dans $\bar{D}^2$, $\bar{\partial}$-fermée, pour $k = (k_1,k_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, la fonction

$$U_k(z_1,z_2) = \frac{1}{2i\pi}\{ \int_D f_1(\zeta_1,z_2)\, H_1(\zeta_1,z_1) d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1$$

$$+ \int_D f_2(z_1,\zeta_2)\, H_2(\zeta_2,z_2)\, d\bar{\zeta}_2 \wedge d\zeta_2\} + \frac{1}{4\pi^2}\{\int_{D^2} f(\zeta) \wedge K(\zeta,z)$$

$$+ \int_{D^2} f(\zeta) \wedge (L_1(\zeta,z) - L_2(\zeta,z))\} ,$$

où

$$H_i(\zeta_i,z_i) = \frac{(1-|\zeta_i|^2)^{k_i}}{(1-\bar{\zeta}_i z_i)^{k_i}(z_i-\zeta_i)}, \quad i = 1,2,$$

$$K(\zeta,z) = \left[\frac{1|\zeta_1|^2}{1-\bar{\zeta}_1 z_1}\right]^{k_1} \left[\frac{1-|\zeta_2|^2}{1-\bar{\zeta}_2\ z_2}\right]^{k_2} \frac{(\bar{\zeta}_1-\bar{z}_1)d\bar{\zeta}_2-(\bar{\zeta}_2-\bar{z}_2)d\bar{\zeta}_1}{|\zeta-z|^4}\wedge d\zeta_1\wedge\ d\zeta_2$$

et

$$L_i(\zeta,z) = k_j\frac{(1-|\zeta_i|^2)^{k_i}}{(1-\bar{\zeta}z_i)^{k_i}(z_i-\zeta_i)} \quad \frac{(1-|\zeta_j|^2)^{k_j-1}\ |\zeta_j-z_j|^2}{(1-\bar{\zeta}_j z_j)^{k_j+1}\ |\zeta-z|^2}\ d\bar{\zeta}_j \wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 ,$$

$i,j = 1,2,\ i \neq j$

vérifie $\bar{\partial}U_k = f$ et est orthogonale aux fonctions holomorphes dans

$$L^2((1-|z_1|^2)^{k_1-1}(1-|z_2|^2)^{k_2-1}d\lambda(z_1,z_2))$$

PROPOSITION 1 - Il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|U_k\|_{L^\infty(D^2)} \leq c(\|f_1\|_{L^\infty(D^2)} + \|f_2\|_{L^\infty(D^2)}) .$$

De plus si f_1 et f_2 sont continues dans $\bar{D}^2$ alors U_k est continue dans $\bar{D}^2$.

Cette proposition est démontrée dans [4](lemme 4) ; on y montre de plus par un exemple que si on ne suppose pas f_1 et f_2 continues alors U_k n'est pas nécessairement continue.

PROPOSITION 2.- Soient $p \in [1,+\infty[$ et $\alpha > 0$. On suppose $\min(k_1,k_2) > \alpha+1$. Il existe une constante $c>0$ telle que

$$\int_{D^2} \delta^{\alpha-1}_{\partial D^2}(z)\ |U_k(z)|^p d\lambda(z) \leq c\{\int_{D^2} \delta^{\alpha}_{\partial D^2}(\zeta)(|f_1(\zeta)|^p+|f_2(\zeta)|^p)d\lambda(z)+$$

$$\int_{D^2} \delta^{\alpha-1}_{\partial D^2}\ \delta_{T^2}(\zeta)\ (|f_1(\zeta)|^p\chi_1(\zeta)+|f_2(\zeta)|^p\chi_2(\zeta))d\lambda(\zeta)\}\ ,$$

où $\chi_i(\zeta)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble $\{|\zeta_i|<|\zeta_j|\}$, $i,j = 1,2$, $i \neq j$.

Remarque : En considérant la forme $f(\zeta) = f_1(\zeta_2)\, d\bar{\zeta}_1$ où f_1 est holomorphe on voit facilement que la seule condition

$$\int_{D^2} \delta^{\alpha}_{\partial D^2}(\zeta)\ (|f_1(\zeta)|^p+|f_2(\zeta)|^p)\ d\lambda(\zeta) < \infty\ ,$$

ne suffit pas à assurer que

$$\int_{D^2} \delta^{\alpha-1}_{\partial D^2}(\zeta)\ (|U_k(z)|^p)d\lambda(\zeta) < \infty\ ,$$

Les estimations des noyaux nécessaires pour la proposition 2 sont les suivantes (voir [3], [4], [5]) :

LEMME 1 .- (i) $\int_D |H_i(\zeta_i, z_i)|\, d\lambda(\zeta_i) \leq c$, $i = 1,2$;

$$\int_{D^2} |K(\zeta, z)|\, d\lambda(\zeta) \leq c \; ; \; \int_{D^2} |L_i(\zeta, z)|\, d\lambda(\zeta) \leq c.$$

(ii) $\int_{D^2} \delta^{\alpha-1}_{\partial D^2}(z)\, |K(\zeta, z)|\, d\lambda(z) \leq c\, \delta^{\alpha}_{\partial D^2}(\zeta)$;

$$\int_{D^2} \delta^{\alpha-1}_{\partial D^2}(z) |L_i(\zeta, z)|\, d\lambda(z) \leq c\, \delta^{\alpha}_{\partial D^2}(\zeta) \;,\; i = 1,2.$$

(iii) Pour $r \in [0,1]$,

$$\int_{\{|z_i|>r\}} (1-|z_i|^2)^{\alpha-1} |H_i(\zeta_i, z_i)|\, d\lambda(z_i) \leq c \min\left((1-|\zeta_i|^2)^{\alpha}, (1-r^2)^{\alpha}\right);$$

$$\int_{\{|z_i|<r\}} |H_i(\zeta_i, z_i)|\, d\lambda(z_i) \leq c\, \frac{(1-|\zeta_i|^2)^{k_i}}{(1-|\zeta_i|^2 + 1-r^2)^{k_i}} \;.$$

PROPOSITION 3.- On suppose $\min(k_1, k_2) \geq 1$. Soit $p \in [1, +\infty[$. Il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\int_{\partial D^2} |U_k(z)|^p\, d\sigma(z) \leq c \left\{ \int_{D^2} (|f_1(\zeta)|^p + |f_2(\zeta)|^p)\, d\lambda(\zeta) + \right.$$

$$\left. \int_{T\times D} \delta_{T^2}(\zeta)\, |f_2(\zeta)|^p\, d\sigma(\zeta) \right\} .$$

Comme pour la proposition 2, la seule condition $\int_D(|f_1|^p+|f_2|^p)d\lambda < \infty$ ne suffit pas à assurer $\int_{\partial D^2} |U_k|^p d\sigma < \infty$.

Pour démontrer la proposition 3, outre les estimation (i) du lemme précédent on a besoin des estimations suivantes :

LEMME 2 - $\int_{\partial D^2} |K(\zeta,z)|\ d\sigma(\zeta) < \infty$; $\int_{\partial D^2}|L_i(\zeta,z)|d\sigma(\zeta) < \infty$, $i = 1,2$;

$$\int_D |H_i(\zeta_i,z_i)|d\lambda(z_i) \leq c(1-|\zeta_i|^2) .$$

PROPOSITION 4 - Soient $p \in [1,+\infty[$, et $\alpha > 0$. On suppose $\min(k_1,k_2) > \alpha+1$. Il existe une constante $c > 0$ telle que ,

$$\int_\Delta \delta^{\alpha-1}_{T^2}(z)|U_k(z)|^p d\sigma(z) \leq$$

$$c\ \{ \int_{D^2} \frac{\delta^\alpha_{\partial D^2}(\zeta)}{\delta_{T^2}(\zeta)} \operatorname{Log} \frac{2\ \delta_{T^2}(\zeta)}{\delta_{T^2}(\zeta)-\delta_{\partial D^2}(\sigma)} [|f_1(\zeta)|^p+|f_2(\zeta)|^p]d\lambda(\zeta) +$$

$$\int_{D^2} \delta^{\alpha-1}_{\partial D^2}(\zeta) \operatorname{Log}(2+\frac{\delta_{\partial D^2}(\zeta)}{\delta_{T^2}(\zeta)-\delta_{\partial D^2}(\zeta)})[|f_1(\zeta)|^p\chi_1(\zeta)+|f_2(\zeta)|\chi_2(\zeta)]d\lambda(\zeta)\}$$

où χ_i est la fonction caractéristique de l'ensemble $\{|\zeta_i| < |\zeta_j|\}$, $i = 1,2,\ i \neq j$.

Les estimations nécessaires à la démonstration de cette proposition sont les suivantes (voir [4],[5]) :

LEMME 3 .- (i) $\displaystyle\int_\Delta \delta_{T^2}^{\alpha-1}(z)\ |K(\zeta,z)|d\sigma(z)$

$$\leq c\ \frac{\delta^\alpha_{\partial D^2}(\zeta)}{\delta_{T^2}(\zeta)}\ \mathrm{Log}\ \frac{2\ \delta_{T^2}(\zeta)}{\delta_{T^2}(\zeta)-\delta_{\partial D^2}(\zeta)}\ ;$$

(ii) $\displaystyle\int_\Delta \delta_{T^2}^{\alpha-1}(z)\ |L_i(\zeta,z)|d\sigma(z) \leq c\ \frac{\delta^\alpha_{\partial D^2}(\zeta)}{\delta_{T^2}(\zeta)}$;

(iii) Pour $r \in [0,1]$, $i = 1,2$

$$r\int_0^{2\Pi} |H_i(\zeta_i, re^{i\Theta_i})|d\Theta_i \leq c\left(\frac{1-|\zeta_i|^2}{1-|\zeta_i|^2+1-r^2}\right)^{k_i}\ \mathrm{Log}\ \left(2+\frac{1-|\zeta_i|^2}{\left||\zeta_i|^2-r^2\right|}\right).$$

Dans [8], G.M. Henkin et P. Polyakov donnent l'estimation suivante :

PROPOSITION 5.- Supposons que $d(f+\bar{f})$ soit un courant positif et que

$$\int_{D^2} \frac{\delta^\alpha_{\partial D^2}(\zeta)}{\delta_{T^2}(\zeta)}\ (|f_1(\zeta)| + |f_2(\zeta)|)\ d\lambda(\zeta) < +\infty\ ,$$

et

$$\int_{D^2} \delta^{\alpha-1}_{\partial D^2}(\zeta)\ (|f_1(\zeta)|\ \chi_1(\zeta) + |f_2(\zeta)|\ \chi_2(\zeta))\ d\lambda(\zeta) < +\infty\ ,$$

où χ_i est la fonction caractéristique de $\{|\zeta_i|<|\zeta_j|\}$, $i \neq j$.
Alors il existe une solution de $\bar{\partial}u = f$ dans D^2 qui vérifie

$$\int_\Delta \delta^{\alpha-1}_{T^2}(z)\ |\ \mathrm{Im}\ u(z)|\ d\sigma(z) < +\infty\ .$$

On peut démontrer cette estimation pour les solutions U_k en reprenant la méthode de démonstration du Lemme 8 de [4].

PROPOSITION 6.- On suppose $\min(k_1,k_2) \geq 1$. Pour $p \in [1,+\infty[$, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\int_{\mathbb{T}^2} |U_k(z)|^p d\sigma(z) \leq c \left\{ \int_{D^2} \frac{1}{\delta_{\mathbb{T}^2}(\zeta)} [|f_1(\zeta)|^p + |f_2(\zeta)|^p] d\lambda(\zeta) + \right.$$

$$\left. + \int_{D\times\mathbb{T}} |f_1(\zeta)|^p d\sigma(\zeta) + \int_{\mathbb{T}\times D} |f_2(\zeta)|^p d\sigma(\zeta) \right\}.$$

Bo Berndtsson m'a signalé que la seule condition

$$\int_{D\times\mathbb{T}} |f_1(\zeta)| + \int_{\mathbb{T}\times D} |f_2(\zeta)| < \infty ,$$

ne suffit pas pour assurer l'existence d'une solution de $\bar{\partial} u = f$ vérifiant

$$\int_{\mathbb{T}^2} |u(z)| d\sigma(z) < \infty .$$

Les estimations nécessaires pour la proposition 6 sont (cf [4]) :

LEMME 4.- Si $A(\zeta,z)$ désigne soit une composante de K soit un des noyaux $L_i(\zeta,z)$, on a

$$\int_{\mathbb{T}^2} |A(\zeta,z)| \, d\sigma(z) \leq \frac{c}{\delta_{\mathbb{T}^2}(\zeta)}$$

Remarques .- D'autres estimations d'une solution de $\bar{\partial}u = f$ en normes $L^p(\mathbb{T}^2)$ sont données dans [1]. Pour $1 < p \leq \infty$ ce sont dans un certain sens les meilleures possibles. Pour $p = 1$ ces estimations peuvent être légèrement améliorées en utilisant les solutions minimales U_k. Une estimation C^∞ a été obtenue, dans un cadre plus général, par Duffrenoy dans [6].

III - APPLICATION AUX ZEROS DES FONCTIONS HOLOMORPHES

Dans ce paragraphe, nous allons utiliser les résultats de II pour construire des fonctions holomorphes à ensemble de zéros donné en appliquant la méthode de P. Lelong de résolution de l'équation $i\partial\bar{\partial}u = \Theta$ [11].

THEOREME 1.- Soit $\alpha > 0$. Soit X un sous-ensemble analytique de D^2 de dimension pure 1 et soit $d\sigma_X$ la mesure d'aire sur X. Pour que X soit un zéro d'une fonction de $N_\alpha(D^2)$ il faut et il suffit que

$$\int_{D^2} \delta_{\partial D^2}^{\alpha+1}(z)\, d\sigma_X(z) < +\infty .$$

THEOREME 2.- Soit X un sous-ensemble analytique de dimension pure 1 de D^2 et soit $\Theta = i \sum_{i,j=1}^{2} \Theta_{i,j}\, dz_i \wedge d\bar{z}_j$ le courant d'intégration sur X de sorte que $d\sigma_X = \Theta_{11} + \Theta_{22}$. Pour que X soit l'ensemble des zéros d'une fonction de $N(\partial D^2)$ il faut que

$$\int_{D^2} \delta_{\partial D^2}(z)\, d\sigma_X(z) < +\infty ,$$

et il suffit que les deux conditions suivantes soient remplies :

(i) $\int_{D^2} \delta_{\partial D^2}(z)\, d\sigma(z) < +\infty$,

(ii) $\int_{D^2} \delta_{\mathbb{T}^2}(z)\, (|\Theta_{21}(z)| + |\Theta_{12}(z)|) < +\infty$.

Remarques .- Si il existe $\beta < 1$ tel que $\int_{D^2} \delta^{\beta}_{\partial D^2}(z)\, d\sigma_X < +\infty$, alors les deux conditions sufisantes du théorème sont satisfaites (voir lemme ci-dessous), mais une telle condition n'est pas nécessaire pour avoir (i) et (ii). Par exemple si X ne dépends que d'une variable , (ii) est trivialement satisfaite ; un autre exemple est fourni par la variété $X = \bigcup_{1}^{\infty} X_i$ où $X_i = \{(z_1,z_2) \in D^2$ tel que $z_1 + z_2 = 2a_i\}$, avec $a_i \in D$ et $\lim_{i\to\infty} |a_i|=1$; on voit facilement que la condition (i) équivaut à $\int_{D^2} \delta_{\mathbb{T}^2}(z)\, d\sigma_X(z) < \infty$ et par suite (ii) est satisfaite.

La condition nécessaire du théorème 2 est montrée dans [2] et celle du Théorème 1 se voit de la même manière. Les conditions suffisantes sont montrées dans [4], rappelons-en brièvement les étapes : il s'agit de résoudre l'équation $i\partial\bar{\partial}u = \Theta$ avec une estimation convenable. Pour cela, on résoud l'équation $idw = \Theta$ avec l'homotopie de Poincarré, puis, $w_{0,1}$ étant la composante de bidegré (0,1 de w, on résoud l'équation $\bar{\partial}U = w_{0,1}$ en utilisant les estimations des propositions 2 et 3, la solution cherchée étant alors $u = 2\,\Re U$. On s'apperçoit alors qu'il faut des estimations supplémentaires sur les coefficients du courant Θ :

LEMME 5.- Soit $\Theta = i \sum_{i,j=1}^{2} \Theta_{ij}\, dz_i \wedge d\bar{z}_j$ un courant positif fermé dans D^2.

a) Soit $\alpha > 0$. Il existe $c>0$ ne dépendant que de α tel que,

$$\int_{D^2} \delta^{\alpha}_{\partial D^2}(z)\ \delta_{\mathbb{T}^2}(z)\ [(\Theta_{11}(z)+|\Theta_{21}(z)|)\chi_1(z) +$$

$$+ (\Theta_{22}(z) + |\Theta_{12}(z)|)\ \chi_2(z)] \leq c \int_{D^2} \delta^{\alpha+1}_{\partial D^2}(z)\ (\Theta_{11}(z) + \Theta_{22}(z)) ,$$

où $\chi_i(z)$ désigne la fonction caractéristique de l'ensemble $\{|z_i| < |z_j|\} \cap D^2$, $i,j = 1,2$, $i \neq j$.

b) Il existe $c > 0$ tel que,

$$\int_{D^2} \delta_{\mathbb{T}^2}(z)\ (\Theta_{11}(z)\ \chi_1(z) + \Theta_{22}(z)\ \chi_2(z)) \leq$$

$$\leq \int_{D^2} \delta_{\partial D^2}(z)\ (\Theta_{11}(z) + \Theta_{22}(z)) ,$$

avec les mêmes notations qu'en a)

c) Soit $\beta \in]0,1[$. Il existe $c > 0$ ne dépendant que de β tel que

$$\int_{D^2} \delta_{\mathbb{T}^2}(z)\ (|\Theta_{21}(z)| + |\Theta_{12}(z)|) \leq c \int_{D^2} \delta^{\beta}_{\partial D^2}(z)\ (\Theta_{11}(z)+\Theta_{22}(z))$$

Ce lemme est démontré dans [4] (lemme 5)

THEOREME 3.- Soit $\alpha > 0$. Soit X un sous-ensemble analytique de dimension pure 1 de D^2 , de courant d'intégration

$$\Theta = i \sum_{i,j=1}^{2} \Theta_{ij}\, dz_i \wedge d\bar{z}_j .$$

a) Pour que X soit un zéro d'une fonction de $N_\alpha(\Delta)$ il faut que l'une des conditions équivalentes suivantes soit satisfaites

i) $\int_{D^2} \delta^{\alpha}_{\partial D^2}(z)\, (\Theta_{11}(z)\chi_1(z) + \Theta_{22}(z)\chi_2(z)) < 0$, où $\chi_i(z)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble $\{|z_i|<|z_j|\}\cap D^2$, $i,j = 1,2,\ i \neq j$;

ii) $\int_{\{|z_1|<|z_2|\}} \delta^{\alpha-1}_{\partial D^2}(z)\, \delta_{\mathbb{T}^2}(z)\, \Theta_{11}(z) < \infty$;

iii) $\int_{\{|z_2|<|z_1|\}} \delta^{\alpha-1}_{\partial D^2}\, \delta_{\mathbb{T}^2}(z)\, \Theta_{22}(z) < \infty$.

iv) $\int_{\Delta} \delta^{\alpha+1}_{\mathbb{T}^2}(z)\, d\sigma_X(z) = \int_0^{2\Pi} \left(\int_D (1-|\zeta|^2)^{\alpha+1} d\sigma_{X,\Theta}(\zeta)\right) d\Theta < \infty$

où $d\sigma_{X,\Theta}$ désigne la mesure d'aire sur l'ensemble des zéros de la fonction $\zeta \to f(\zeta e^{i\Theta}, \zeta)$, si f est une fonction holomorphe dans D^2 telle que $i\partial\bar{\partial}\, \mathrm{Log}\, |f| = \Theta$.

b) Pour que X soit un zéro d'une fonction de $N_\alpha(\Delta)$, il suffit que

$$\int_{D^2} \frac{\delta^{\alpha+1}_{\partial D^2}(z)}{\delta_{\mathbb{T}^2}(z)} (\Theta_{11}(z) + \Theta_{22}(z)) < +\infty .$$

THEOREME 4.- Soit X un sous-ensemble analytique de dimension pure 1 de D^2, de courant l'intégration

$$\Theta = i \sum_{i,j=1}^{2} \Theta_{ij}\, dz_i \wedge d\bar{z}_j$$

a) Pour que X soit l'ensemble des zéros d'une fonctions de $N(\mathbb{T}^2)$, il faut que l'une des conditions équivalentes suivantes soit satisfaites :

(i) $\int_{D^2} (\Theta_{11}(z)\chi_1(z) + \Theta_{22}(z)\chi_2(z)) < \infty$, les notations étant celles du théorème 3 ;

(ii) $\sup\limits_{0<r<1} \int_{D\times\mathbb{T}_r} (1-|z_1|^2)\, \Theta_{11}(z) < \infty$;

(iii) $\sup\limits_{0<r<1} \int_{\mathbb{T}_r\times D} (1-|z_2|^2)\, \Theta_{22}(z) < \infty$

(iv) $\int_{\Delta} \delta_{\mathbb{T}^2}(z)\, d\sigma_X(z) = \int_0^{2\Pi} \left(\int_D (1-|\zeta|^2) d\sigma_{X,\Theta}(\zeta)\right) < \infty$,

avec les notations du théorème 3.

b) Pour que X soit l'ensemble des zéros d'une fonction de $N(\mathbb{T}^2)$ il suffit que les deux conditions suivantes soient remplies :

(i) $\int_{D^2} \frac{\delta_{\partial D^2}(z)}{\delta_{\mathbb{T}^2}(z)} (\Theta_{11}(z) + \Theta_{22}(z)) < \infty$, et ,

(ii) $\int_{D^2} |\Theta_{21}(z)| + |\Theta_{12}(z)| < \infty$.

Avant de donner le schéma de la démonstration de ces théorèmes, on peut remarquer que la conditon suffisante du théorème 3 est assez proche d'une conditions nécessaire :

LEMME 6.- Soit $\alpha > 0$. Soit $\Theta = i \sum_{i,j=1}^{2} \Theta_{ij} dz_i \wedge d\bar{z}_j$ un courant positif fermé vérifiant l'une des quatre conditions équivalentes du a) du théorème 3. Alors

$$\int_{D^2} \frac{\delta^{\alpha+1}_{\partial D^2}(z)}{\delta_{\mathbb{T}^2}(z)} \frac{1}{(1-\operatorname{Log}\delta_{\mathbb{T}^2}(z))^2}(\Theta_{11}(z) + \Theta_{22}(z)) < \infty .$$

Démontrons rapidement ce lemme. Nous pouvous supposer que Θ est C^∞ dans $\bar{D}^2$ (cf. [4] Lemme 5). Considérons la forme différentielle

$$\omega_1 = z_1 (1-|z_1|^2)^{\alpha+1} (1-|z_1|^{2p}) \Theta \wedge d\bar{z}_1 ,$$

où p est un entier ≥ 1 . La formule de Stokes appliquée à ω_1 sur $\{|z_2| < |z_1|\}$ donne aussitôt

(1) $$\left| \int_\Delta \omega_1 \right| \leq c < +\infty ,$$

en utilisant la condition (i) du théorème 3 .

En remarquant que sur Δ , on a

$$\omega_1 = \omega_2 = z_1 (1-|z_2|^2)^{\alpha+1} (1-|z_1|^{2p}) \Theta \wedge d\bar{z}_1 ,$$

la formule de Stokes appliquée à ω_2 sur $\{|z_1| < |z_2|\}$ donne

$$\int_{\{|z_1|<|z_2|\}} (1-|z_2|^2)^{\alpha+1}(1-(p+1)|z_1|^{2p}\Theta \wedge dz_1 \wedge d\bar{z}_1 =$$

$$= \int_D \omega_1 + (\alpha+1)\int_{\{|z_1|<|z_2|\}} z_1\bar{z}_2(1-|z_2|^2)^{\alpha}(1-|z_1|^{2p})\Theta \wedge dz_2 \wedge d\bar{z}_1 \ .$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors, en utilisant (1) et le (ii) du théorème 3,

$$\int_{\{|z_1|<|z_2|\}} (1-|z_2|^2)^{\alpha+1}[\pm (1-(p+1)|z_1|^{2p}) - \frac{1}{K}(1-|z_1|^{2p})]\Theta \wedge dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \leqslant c < +\infty \ ,$$

où K est une constante arbitrairement grande. En prenant des combinaisons de cette dernière inégalité pour différentes valeurs de p on en déduit

$$(2) \qquad \int_{\{|z_1|<|z_2|\}} (1-|z_2|^2)^{\alpha+1}\Theta_{22} \leqslant c < +\infty \ .$$

Considérons maintenant la forme différentielle

$$\omega_3 = z_1 \frac{(1-|z_1|^2)^{\alpha+1}}{1-\mathrm{Log}\,(1-|z_1|^2)} \Theta \wedge d\bar{z}_1 \ .$$

La formule de Stokes appliquée à ω_3 sur $\{|z_2| < |z_1|\}$ donne

$$(3) \qquad \left| \int_\Delta \omega_3 \right| \leqslant c < +\infty \ ,$$

en utilisant la condition (i) du théorème 3.

En remarquant que sur Δ, on a

$$\omega_3 = \omega_4 = z_1 \frac{1-|z_2|^2)^{\alpha+1}}{1-\mathrm{Log}(1-|z_1|^2)} \Theta \wedge d\bar{z}_1 \ ,$$

la formule de Stokes appliquée à ω_4 sur $\{|z_1| < |z_2|\}$ donne

$$\left|\int_{\{|z_1|<|z_2|\}} \frac{(1-|z_2|^2)^{\alpha+1}}{(1-|z_1|^2)[1-\mathrm{Log}(1-|z_1|^2)]^2}\left[|z_1|^2 - \frac{1-|z_1|^2}{1-\mathrm{Log}(1-|z_1|^2)}\right]\Theta\wedge dz_1\wedge d\bar{z}_1\right|$$

$$\leqslant \left|\int_\Delta \omega_3\right| + (\alpha+1)\left|\int_{\{|z_1|<|z_2|\}} z_1\bar{z}_2 \frac{(1-|z_2|^2)^\alpha}{1-\mathrm{Log}(1-|z_1|^2)}\,\Theta\wedge dz_2\wedge d\bar{z}_1\right|$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors, en utilisant (3) et la condition (ii) du théorème 3,

$$\left|\int_{\{|z_1|<|z_2|\}} \frac{(1-|z_2|^2)^{\alpha+1}}{(1-|z_1|^2)[1-\mathrm{Log}(1-|z_1|^2)]^2}\left[|z_1|^2 - \frac{1-|z_1|^2}{1-\mathrm{Log}(1-|z_1|^2)} - \frac{1}{K}\right]\Theta_{22}(z)\right|$$

$$\leqslant c < \infty ,$$

où K est une constante arbitrairement grande. En combinant cette inégalité avec (2) il vient

$$\int_{\{|z_1|<|z_2|\}} \frac{\delta^{\alpha+1}_{\partial D^2}(z)}{\delta_{\mathbb{T}^2}(z)[1-\mathrm{Log}\,\delta_{\mathbb{T}^2}(z)]^2}\,\Theta_{22}(z) \leqslant c < +\infty ,$$

ce qui, combiné avec la condition (i) du théorème 3 donne le Lemme 6 pour Θ_{22} . Bien sûr, on peut obtenir l'inégalité pour Θ_{11} de manière similaire.

Nous donnons maintenant brièvement les étapes des démonstrations des théorèmes 3 et 4.

La condition nécessaire (i) du théorèm 4 est démontrée dans [2] et celle du théorème 3 se voit de la même manière. Les conditions (ii), (iii) et (iv) du a) des théorèmes 3 et 4 résultent de la formule de Jensen en une variable. L'équivalence de ces conditions se voit, par exemple, en remarquant que, si u est une fonction plurisousharmonique telle que $i\partial\bar\partial u = \Theta$, ces conditions sont toutes équivalentes à une même condition de croissance de u sur Δ.

Pour démontrer les parties b) des théorèmes 3 et 4, on procède comme pour les théorèmes 1 et 2, en utilisant les estimations du $\bar\partial$ données par les propositions 4 et 5. Pour cela il faut tout d'abord obtenir des estimations supplémentaires sur les coefficients du courant positif Θ :

LEMME 7.- Soit $\Theta = i \sum_{i,j=1}^{2} \Theta_{i,j}\, dz_i \wedge d\bar z_j$ un courant positif fermé dans D^2. Soit $\alpha > 0$. Supposons que

$$\int_{D^2} \frac{\delta_{\partial D^2}^{\alpha+1}(z)}{\delta_{\mathbb{T}^2}(z)} (\Theta_{11}(z) + \Theta_{22}(z)) < +\infty .$$

Alors on a

$$\int_{D^2} \delta_{\partial D^2}^{\alpha}(z)\, (\Theta_{11}(z)\chi_1(z) + \Theta_{22}(z)\chi_2(z)) < +\infty ,$$

avec les notations des théorèmes 3 et 4.

De plus, si $\alpha > 0$, on a

$$\int_{D^2} \delta_{\partial D^2}^{\alpha}(z)\, (|\Theta_{21}(z)|+|\Theta_{12}(z)|) < +\infty .$$

Ce Lemme est démontré dans [5].

Pour obtenir alors les estimations voulues sur une solution de $i\partial\bar\partial u = \Theta$ on est obligé d'avoir recours à des homotopies différentes de l'homotopie standart pour résoudre l'équation $i\, d\omega = \Theta$:

On utilise les homotopies suivantes (cf. [4], lemmes 14 et 15) :

$$F_t^r(z) = F_t^r(z_1,z_2) = (t^{1+r} z_1, tz_2),\ r \in [0,1]$$
$$Z_t^r(z) = Z_t^r(z_1,;z_2) = (\frac{1}{1+r}\ \frac{z_1}{t}\ , \frac{z_2}{t}\ )\ ,\ r \in [0,1]\ .$$

Pour le théorème 3, il sufit d'utiliser l'homotopie F_t^2 et pour le théorème 4, on fait une moyenne des solutions données par les homotopies F_t^r .

Les conclusions résultent alors des estimations suivantes :

LEMME 8.- Soit g une fonction continue dans D^2. Pour $r \in [0,1]$, posons

$$h_r(z) = \int_{1/10}^1 g\ (F_t^r(z))\ dt\ ,$$

et

$$h(z) = \int_0^1 h_r(z)\ dt\ .$$

i) Pour $\alpha > 0$, $i,j = 1,2,\ i \neq J$,

$$\int_{\{|z_i|<|z_j|\}} \delta_{\partial D^2}^{\alpha-1}(z)\ \mathrm{Log}(2 + \frac{\delta_{\mathbb{T}^2}(z)}{\delta_{\mathbb{T}^2}(z)-\delta_{\partial D^2}(z)})|h_2(z)|d\lambda(z) \leqslant$$

$$\leqslant c\ \{\int_{\{|z_i|<|z_j|\}} \delta_{\partial D^2}^{\alpha}(z)|g(z)|d\lambda(z)+\int_{D^2} \frac{\delta_{\partial D^2}^{\alpha+1}(z)}{\delta_{\mathbb{T}^2}(z)}|g(z)|d\lambda(z)\}\ .$$

(ii) Pour $\alpha > 0$,

$$\int_{D^2} \frac{\delta_{\partial D^2}^{\alpha}(z)}{\delta_{\mathbb{T}^2}(z)}\ \mathrm{Log}\ (\frac{4\ \delta_{T^2}(z)}{\delta_{\mathbb{T}^2}(z)-\delta_{\partial D^2}(z)})|h_2(z)|\ d\lambda(z) \leqslant$$

$$\leqslant c\ \int_{D^2} \frac{\delta_{\partial D^2}^{\alpha+1}(z)}{\delta_{\mathbb{T}^2}(z)}\ |g(z)|\ d\lambda(z)\ .$$

(iii) Pour $r \in [0,1]$,

$$\int_{D\times T} |h_r(z)|\, d\sigma(z) \leqslant c \, \{ \int_{\{|z_1|<|z_2|\}} |g(z)|\, d\lambda(z) +$$

$$+ \int_{D^2} \frac{\delta_{\partial D^2}(z)}{\delta_{\mathbb{T}^2}(z)} |g(z)|\, d\lambda(z)\} ,$$

$$\int_{T\times D} |h_r(z)|\, d\sigma(z) \leqslant c \, \{ \int_{\{|z_2|<|z_1|\}} |g(z)|\, d\lambda(z) +$$

$$+ \int_{D^2} \frac{\delta_{\partial D^2}(z)}{\delta_{\mathbb{T}^2}(z)} |g(z)|\, d\lambda(z)\} .$$

(iv) $$\int_{D^2} \frac{|h(z)|}{\delta_{\mathbb{T}^2}(z)}\, d\lambda(z) \leqslant c \int_{D^2} \frac{\delta_{\partial D^2}(z)}{\delta_{\mathbb{T}^2}(z)} |g(z)|\, d\lambda(z)\} .$$

où, dans ces majorations c est une constante ne dépendant éventuellement que de α.

<u>Remarque</u> .- Dans [8], G.M. Henkin et P. Polyakov donnent un autre résultat sur les zéros des fonctions des classes $N_\alpha(\Delta)$ et $N(\mathbb{T}^2)$:

Pour $\gamma \in [0,1]$, soit $A_\gamma = \{z \in D^2$ tel que $\dfrac{\delta_{\partial D^2}(z)}{\delta_{\mathbb{T}^2}(z)} > \delta\}$. Soit X un sous-ensemble analytique de dimension pure 1 de D^2 de courant d'intégration $\Theta = i \sum_{i,j=1}^{2} \Theta_{ij}\, dz_i \wedge d\bar{z}_j$. Pour $\alpha \geqslant 0$, posons

$$V_X^\alpha(\gamma) = \int_{A_\gamma} \delta^\alpha_{\partial D^2}(z)\, (\Theta_{11}(z) + \Theta_{22}(z) .$$

THEOREME (G.M Henkin, P. Polyakov [8]).- Pour que X soit un zéro d'une fonction de $N_{\alpha}(\Delta)$ lorsque $\alpha > 0$ et de $N(\Pi^2)$ lorsque $\alpha=0$, il faut que $V_x(\gamma) = O\left(\frac{1}{\gamma}\right)$, et il suffit que

$$\int_0^1 \left[\frac{V_x^{\alpha}(\gamma)}{\gamma}\right]^{1/2} d\gamma < \infty .$$

On peut montrer (cf [8]) que la condition suffisante de ce théorème est plus forte que celles des théorèmes 3 et 4 . Les théorèmes 3 et 4 donnent donc un résultat un peu meilleur que celui de Henkin et Polyakov.

Toutefois G.M. Henkin et P. Polyakov ont déduit de leur résultat une caractérisation des zéros des fonctions d'ordre finis :

Soit f une fonction holomorphe dans D^2. On dit que f est d'ordre fini $\alpha_0 \geq 0$ si $\alpha_0 = \inf\{\alpha \geq 0,$ tel que $f \in N_{\alpha}(\Delta)\}$.

De manière similaire, si X est un sous-ensemble analytique de dimension pure 1 dans D^2, de courant d'intégration

$\Theta = i \sum_{i,j=1}^{2} \Theta_{ij}\, dz_i \wedge d\bar{z}_j$, on dit que X est d'ordre fini $\alpha_0 \geq 0$ si

$$\alpha_0 = \inf\{\alpha \geq 0 \text{ tel que } \int_{D^2} \delta^{\alpha}_{\partial D^2}(z)(\Theta_{11}(z)\chi_1(z)+\Theta_{22}\chi_2(z)) < +\infty),$$

les notations étant celles des théorèmes 3 et 4.

On a alors le résultat suivant :

THEOREME 5 (G.M. Henkin et P. Polyakov [8]).- Pour qu'un sous-ensemble analytique X e D^2 soit d'ordre fini $\alpha_0 \geq 0$, il faut et il suffit qu'il soit un zéro d'une fonction d'ordre fini $\alpha_0 \geq 0$.

La condition suiffisante du théorème 5 résulte aussitôt des conditions nécessaires des théorèmes 3 et 4. La condition nécessaire se voit aussi aisément : Θ étant le courant d'intégration sur X, on résoud l'équation $i\partial\bar{\partial}u = \Theta$ en utilisant la méthode de la démonstration de la condition suffisante du théorème 3 : D'après le lemme 6 , pour tout $\alpha > \alpha_0$ on a

$$\int_{D^2} \frac{\delta_{\partial D^2}^{\alpha+1}(z)}{\delta_{\mathbb{T}^2}(z)} (\Theta_{11}(z) + \Theta_{22}(z)) < + \infty ,$$

et par suite , $\int_\Delta \delta_{T^2}^{\alpha-1}(z)|u(z)|d\sigma(z) < + \infty$. Puisque u s'écrit $\mathrm{Log}|f|$ où f est holomorphe dans D^2, on a construit une fonction holomorphe qui X pour ensemble de zéros et qui est dans $N(\Delta)$ pour tout $\alpha > \alpha_0$ c'est-à-dire qui est d'ordre $\leq \alpha_0$. D'où le théorème.

B I B L I O G R A P H I E

[1] E. AMAR et Ph. CHARPENTIER , Extensions dans les classes de Hardy de fonctions holomorphes définies sur une sous-variété du bidisque. Bull. Sc. Math. 2ème Série, 104, 1080 p. 145-175.

[2] Ph. CHARPENTIER , Sur la formule de Jensen et les zéros des fonctions holomorphes dans le polydisque. Math. Ann. 242 (1979), 27-46.

[3] Ph. CHARPENTIER , Formules explicites pour les solutions minimales de l'équation $\bar{\partial} u = f$ dans la boule et dans le polydisque de $\mathbb{C}^n$. Ann. Inst. Fourier, 30 (1980), 121-154.

[4] Ph. CHARPENTIER , Caractérisation des zéros des fonctions de certaines classes de type Nevanlinna dans le bidisque. A paraitre aux Ann. Inst. Fourier.

[5] Ph. CHARPENTIER , Sur les zéros des fonctions de type Nevanlinna dans le bidisque. Actes du Colloque d'Analyse Complexe de Toulouse, Mai 1983, A paraitre aux Springer Verlag.

[6] A. DUFRESNOY , sur l'opérateur d" et les foncions différentielles au sons de Whitney- Grenoble

[7] G.M. HENKIN , Boundary properties of holomorphic functions of several complex variables, J. Soviet Maht., 5 (1976), 612-687

[8] G.M. HENKIN et P. POLYAKOV , Les zéros des fonctions d'ordre fini dans le bidisque. C.R.A.S. Paris, t; 298, Série I, n 1, 1984, p. 5-8.

[9] M. LANDUCCI , On the projection of $L^2(D)$ into $H(D)$. Duke Math. J., 42 (1975), 231-237.

[10] M. LANDUCCI , Uniform bounds on derivatives for the $\bar{\partial}$.problem in the polydisk. Proc. Symp. Pure Math. 30 (1977), 177-180.

[11] P. LELONG , Fonctionnelles analytiques et fonctions entières (n variables). Montréal, les presses de l'Univ. de Montréal(1968).

Ph. CHARPENTIER

Université de Bordeaux I
U.E.R. de Mathématiques
et d'Informatique
351, Cours de la Libération

33405 TALENCE - Cedex

ON THE CONVERGENCE OF A SEQUENCE OF OPERATORS OR FUNCTIONALS ON SPACES OF BOUNDED FUNTIONS*

M. A. JIMÉNEZ POZO

Introduction.

On writing these notes on Korovkin type theorems for the Memories of the Harmonic Analysis Seminar of Orsay, I have considered convenient to include certain topics that I exposed separately at the University of Nancy I, with which the contents will be more complete.

The theory on Korovkin type theorems is too wide to cover with these notes. For this reason, I will present only a collection of personal results relative to the estimate of the rate of convergence of a sequence of operators or functionals, as the title indicates. Nevertheless, I will mention related papers and results in order to obtain the necessary unity, and also to facilitate the literature to the interested reader.

Korovkin's classical Theorem [18], establishes that a sequence of positive linear operators $L_n : C[a,b] \to C[a,b]$ converges strongly to the identity operator if the sequence $\{L_n f\}$ converges to f for three funtions (called test functions) $f(x) = x^2$, $f(x) = x$ and $f(x) = 1$.

If $C[a,b]$ is substituted by $C_{2\pi}$, the space of continuous 2π-periodic functions, then an analogous result holds with the test functions $f(x) = \cos x$, $f(x) = \sin x$ and $f(x) = 1$.

For the time being, we will only consider real functions.

---

* Traduit de l'espagnol par G. López Lagomasino

Examples.

For each $f \in C[0,1]$ and $x \in [0,1]$, the Bernstein polynomials are defined as follows.

$$(1) \qquad L_n(f,x) := \sum_{0\leq k\leq n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} .$$

For each $n \in \mathbb{N}$, L_n is a positive linear operator on $C[0,1]$. Since $L_n 1 \equiv 1$, $L_n x \equiv x$ and $L_n x^2 = x^2 + O(\frac{1}{n})$ then $L_n f \underset{n}{\to} f$ for all $f \in C[0,1]$.

For each $f \in C_{2\pi}$ and $x \in [0,2\pi]$, Cesaro's mean for the Fourier series of f is defined by,

$$(2) \qquad L_n(f,x) := (f * F_n)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) F_n(x-t)\,dt$$

where F_n is Fejer's n-th kernel

$$(3) \qquad F_n(t) = \frac{1}{n+1} \left[\frac{\sin \frac{n+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} \right]^2$$

Again, for each $n \in \mathbb{N}$, L_n is a positive linear operator on $C_{2\pi}$. Since $L_n 1 \equiv 1$, $L_n \cos = \frac{n}{n+1} \cos$ and $L_n \sin = \frac{n}{n+1} \sin$ then $L_n f \to f$ for all $f \in C_{2\pi}$.

Afterwards, the spaces $C[a,b]$ and $C_{2\pi}$ are substituted by others, such as $C(X)$, $C_o(X)$, $L^p(\mu)$, lattices, etc., while the operators (usually considered linear) belong to a certain class M , not necessarily the class of positive operators. A more detailed information will be given at the end of these notes, now we will restrict the attention to the following result of Shashkin [36].

"Let X be a compact metric space and F a linear subspace of $C(X)$, such that $1 \in F$. The condition :

$$\forall f \in C(X) \ , \ L_n f \underset{n}{\to} f ,$$

for all sequence of positive linear operators on $C(X)$ such that

$$\forall f \in F \quad , \quad L_n f \underset{n}{\to} f \quad ,$$

is true, if and only if the Choquet boundary F is X (i.e. $\text{Ch } F = X$) ".

Another side of the theory is related with quantitative type results. That is, estimates of the rate with which the sequence $\{L_n f\}$ converges to f. This direction was initiated by Mamedov [24], followed afterwards by papers of Freud and Shisha & Mond [37-38]. These last proved the following

"If $L_n : C[0,1] \to C[0,1]$ is a sequence of positive linear operators then, for all $f \in C[0,1]$ we have

$$(4) \qquad \|L_n f - f\| \leq \|A + L_n 1\| \, \omega(f, \alpha_n) + \|f(L_n 1 - 1)\|$$

where $\omega(f,\cdot)$ is the modulus of continuity (or total oscillation) of f (which we will define afterwards), $A > 0$ is an arbitrary positive constant and

$$(5) \qquad \alpha_n^2 := A^{-1} \sup_{t \in [0,1]} L_n((x-t)^2, t)$$
$$\leq A^{-1}(\|L_n 1 - 1\| + 2 \|L_n x - x\| + \|L_n x^2 - x^2\|) \text{" .}$$

"If $C[0,1]$ is substituted by $C_{2\pi}$, then (4) is also true where

$$(6) \qquad \alpha_n^2 := A^{-1}\pi^2 \sup_{t \in [0,2\pi]} L_n(\sin^2 \frac{t-x}{2}, t)$$
$$\leq A^{-1} \frac{\pi^2}{2} (\|L_n 1 - 1\| + \|L_n \cos - \cos\| + \|L_n \sin - \sin\|) \text{ "}$$

Examples.

Using (5) immediately follows that the operators of Bernstein and Cesaro's means, defined by (1) and (2) respectively, satisfy

$$(7) \qquad \|L_n f - f\| = O(\omega(f, \sqrt{1/n}))$$

The constant A actually did not appear in [37-38] but was introduced later by Mond [29]. It serves to optimize the estimates in certain cases. For example, taking A conveniently it is easy to prove that Bernstein's operator satisfies

(8) $$\|L_n f - f\| \leq 5/4\ \omega(f, \sqrt{1/n}) \quad .$$

The work of Shisha & Mond was generalized by Censor [5] to the case $C(X)$, when X is a compact convex subset of $\mathbb{R}^m$, selecting also α_n in terms of $L_n x_j^i$, $i = 0,1,2$; $j = 1,2,\ldots,m$. Nevertheless, in order to obtain estimates of the rate of convergence similar to those of Shisha & Mond in the case when X is not convex or in terms of the convergence of the operators with the same other set of test functions new technical difficulties arise.

In the following, we will develop a general method to obtain such estimates. I consider that the method in itself is more important that the results which we will derive, since the same idea can be applied in other situations which we will not consider here as for instance in the case of unbounded functions.

<u>Convergence of positive operators to the identity.</u>

The most surprising and interesting feature in Korovkin's theorem is without doubt the fact that it is necessary to prove only with three functions. If X is a compact metric space (we will always suppose that $X \neq \phi$) and $f_1,\ldots,f_m$ are test functions for the class of linear positive operators on $C(X)$, from Shashkin's results it follows that Choquet's boundary of the linear space generated by the test functions and the constant function 1 is X. In particular, the functions f_i, $1 \leq i \leq m$, must separate the points of X. (That is, if $x,y \in X$, $x \neq y$, then there exists an i such that $f_i(x) \neq f_i(y)$) . So, if we define

$$\varphi := (f_1,\ldots,f_m) : X \to \mathbb{R}^m$$

it results from the compacity of X that φ is a homeomorphism of X onto its image.

Thus, it's obvious that we do not loose much generality if we restrict our attention to compact sets in $\mathbb{R}^m$. But if X is a compact set of $\mathbb{R}^m$ and $G = \{g_1,\dots,g_k\}$ is a set of continuous functions that separates the points of X, then the functions $1, g_i, g_i^2$, $1 \leq i \leq k$, constitute a set of test functions since, obviously, the Choquet boundary of the linear space generated by them is X. From this, it results that in order to obtain estimates of the rate of convergence in terms of these test functions we have to define in X the distance

(9) $$d_G(x,y) := \sqrt{\sum_{1\leq i\leq k} (g_i(x)-g_i(y))^2}$$

which does not change the topology of X when this set is compact, or when its closure is compact and the functions in G can be extended continuously to the closure of X.

Thus, in the following, X denotes a metric space with distance d and $B(X)$ is the space of bounded real functions on X with the sup-norm $\|\cdot\|_X$. We will also consider non empty sets Z, Y such that $Z \subset Y \subset X$. We will also denote f the restriction to Y of a function f defined on X. Let E be a linear subspace of $B(X)$ and $L_n : E \to B(Y)$, $n \in \mathbb{N}$, a sequence of operators. Our aim is to estimate $\|L_n f - f\|_Z$. This allows us to consider simultaneously several cases

(i) If $X = Y = Z$, uniform convergence on X.

(ii) If $X = Y$ and $Z = \{z\}$, pointwise convergence.

(iii) If $Y = Z = \{z\}$, convergence of functionals.

<u>Definition 1</u>. A family $\{f_z, z \in Z\} \subset B(X)$ is called a test family on Z if

(i) $\forall z \in Z$, $f_z(z) = 0$.

(ii) There exists a function $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ such that, if $x \in X$, $z \in Z$, and $d(x,z) \geq \alpha > 0$, then $f_z(x) \geq \varphi(\alpha)$.

Examples.

If X is bounded we can consider

(10) $$\forall x \in X \quad \forall z \in Z \ , \quad f_z(x) := d^p(x,z)$$

where $p \geq 1$ is fixed and

(11) $$\varphi(\alpha) = \alpha^p \quad .$$

This example is very closely related to (9).

If $X =]-\pi,\pi]$ we define the distance

(12) $$d(x,y) := \min\{|x-y|, 2\pi-|x-y|\}$$

obviously, $C(X)$ is the space of 2π-periodic continuous functions. We then define

(13) $$\forall x \in X \quad \forall z \in Z \ , \ f_z(x) := |\sin\frac{x-z}{2}|^p$$

where $p \geq 1$ is fixed and

(14) $$\varphi(\alpha) = (\alpha/\pi)^p$$

In the following, we will suppose that $1 \in E$, $\{f_z, z \in Z\}$ is a test family on E and $L_n : E \to B(Y)$ are monotonic operators (that is, $f \geq g \Rightarrow L_n f \geq L_n g$) , whose restrictions to the linear space generated by the set $\{1, f_z, z \in Z\}$ are linear.

Definition 2. For every $f \in B(X)$ and $\alpha > 0$ we define the modulus of continuity (or oscillation) as

(15) $$\omega(f,Z,\alpha) := \sup\{|f(x)-f(z)| \ ; \ x \in X \ , \ z \in Z \ , \ d(x,z) \leq \alpha\}$$

We also introduce

(16) $$\omega(f,Z,0) := \lim_{\alpha\to 0+} \omega(f,Z,\alpha)$$

(17) $$\omega(f,X,\alpha) = \omega(f,\alpha)$$

Theorem 1. For every $f \in E$ and $\alpha > 0$, the following holds.

(18) $$\|L_n f-f\|_Z \leq \omega(f,Z,\alpha) \|L_n 1\|_Z + \|f(L_n 1-1)\|_Z + 2\|f\|_X \varphi(\alpha)^{-1} \sup\{L_n(f_z,z),\ z \in Z\}$$

Proof. Fix $z \in Z$. Let $\delta = 2\|f\|_X$. Let's define the following auxiliary functions

(19) $$g := \delta\varphi(\alpha)^{-1} f_z + \omega(f,Z,\alpha) + f(z)$$

(20) $$h := -\delta\varphi(\alpha)^{-1} f_z - \omega(f,Z,\alpha) + f(z) \quad .$$

Using definitions 1 and 2 it follows immediately that

(21) $$h \leq f \leq g$$

Now let's fix an index $n \in \mathbb{N}$. Since L_n is monotone from (21) we get

(22) $$L_n h \leq L_n f \leq L_n g$$

Observe that h and g belong to the linear subspace generated by $\{1, f_z;\ z \in Z\}$, where the restriction of L_n is linear. Thus, from (22) we deduce

(23) $$|L_n f - f(z) L_n 1| \leq \delta\varphi(\alpha)^{-1} L_n f_z + \omega(f,Z,\alpha) L_n 1$$

Using the triangular inequality and evaluating at $z \in Z$, we get

(24) $$|L_n(1,z)-f(z)| \leq \omega(f,Z,\alpha) L_n(1,z) + |f(z)(L_n(1,z)-1)| + \delta\varphi(\alpha)^{-1} L_n(f_z,z)$$

Then (18) follows from (24) taking supremum in Z .

Corollary 1. Under the assumptions above, if $L_n(f_z,z) \underset{n}{\to} 0$ uniformly on Z and $\|L_n 1-1\|_Z \underset{n}{\to} 0$; then $\|L_n f-f\|_Z \underset{n}{\to} 0$ for all $f \in E$ such that $\omega(f,Z,0) = 0$.

Proof. First take α small and then n large in (18).

Corollary 2. Let $\varepsilon > 0$ and $Z(\varepsilon) := \{x \in X | d(x,Z \leq \varepsilon\}$. Suppose that each L_n is linear and that the assumptions of corollary 1 hold. If $f,g \in E$ and $f = g$ on $Z(\varepsilon)$ for some $\varepsilon > 0$, then $\{L_n f\}$ and $\{L_n g\}$ have the same behaviour on Z .

Proof. From corollary 1 and the linearity of L_n it follows that

$$\|L_n f-L_n g\|_Z = \|L_n(f-g\|_Z \underset{n}{\to} 0 .$$

This corollary reminds us of the well known localization principle for Fourier series.

Theorem 1 is very general. There are no additional assumptions on the metric space X or on the test family. In order to obtain results closer to those of Shisha & Mond in form, it's necessary to prove the inequality (21) with $\delta = \omega(f,\alpha)$ in the construction of g and h . This demands additional conditions.

If X is a convex set of $\mathbb{R}^m$, it's easy to deduce from definition 2 that

(25) $$\omega(f,\lambda\alpha) \leq [\lambda+1]\omega(f,\alpha)$$

for all $f \in B(X)$, $\lambda \geq 1$, $\alpha \geq 0$ ($[\cdot]$ stands for the entire part). To obtain (25) you only use the following property that characterizes convex sets in $\mathbb{R}^m$:

Property. "If $x,y \in X$; $a,b \in \mathbb{R}_+$ and $d(x,y) = a+b$; then there exists $z \in X$ such that $d(x,z) = a$ and $d(z,y) = b$" .

This characterization of the convexity in $\mathbb{R}^m$ does not depend on the algebraic structure. So

Definition 3. A metric space is called metrically convex if it satisfies the above property.

Although no specific name had been assigned to them, these metric spaces had been used before in papers on Korovkin type theorems, c.f. [35]. It's obvious that in every metrically convex space property (25) holds. Moreover, every convex subset of a normed space is metrically convex, but there exist other sets in the normed spaces which are not metrically convex or convex in the classic sense. This guarantees a good generalization of (25). The problem is that this new definition does not better the situation in $\mathbb{R}^m$. In [13], we have introduced the following.

Definition 4. A metric space X, has a finite convex deformation coefficient, which we will denote $D(X)$, if for all $x,y \in X$ there exists a rectifiable arc Γ_{xy} with end points at x and y and

$$D(X) = \sup_{x \neq y} \inf_{\Gamma_{xy}} \frac{\ell(\Gamma_{xy})}{d(x,y)} < \infty ,$$

where $\ell(\Gamma)$ is the length of Γ.

For instance, a semicircumference in $\mathbb{R}^2$ has a coefficient $D(X) = \frac{\pi}{2}$.

In [13], we proved

Theorem 2. If X is compact, then $D(X) = 1$ if and only if X is metrically convex.

Theorem 3. If $D(X) = \rho < \infty$, then for all $\lambda \geq 1$ and $\alpha \geq 0$ we have

$$\omega(f,\lambda\alpha) \leq [\rho\lambda+1]\, \omega(f,\alpha) \qquad (26) \qquad \square$$

Now, we can prove the following :

Theorem 4. If (26) holds and $f \in B(X)$ then

$$(27) \qquad \|L_n f - f\|_Z \leq \omega(f,\alpha_n) \|L_n 1 + \rho A\|_Z + \|f(L_n 1 - 1)\|_Z$$

where $A > 0$ is arbitrary and

$$(28) \qquad \alpha_n^p = A^{-1} \sup\{L_n(d^p(\cdot,z),z) ;\ z \in Z\}$$

In particular, if the operators L_n are linear, $p = 2$ and $d = d_G$ as in (9), then

$$(29) \qquad \alpha_n^p \leq A^{-1} \sum_{1 \leq i \leq k} \left(\|L_n g_i^2 - g_i^2\|_Z + 2\|g_i\|_Z \|L_n g_i - g_i\|_Z + \|g_i^2\|_Z \|L_n 1 - 1\|_Z \right)$$

Proof. It's identical to the proof of theorem 1, but in this case the functions h and g are constructed taking $\delta = \rho\omega(f,\alpha)$; $\alpha > 0$. Property (26) allows us to prove (21) with which we arrive up to (24) with the new value of δ and the test family defined by (10) and (11). Observe also that

$$(30) \qquad \omega(f,Z,\alpha) \leq \omega(f,\alpha) \quad .$$

So it's enough to take $\alpha := \alpha_n$ as in (28) and $\alpha_n \neq 0$. If $\alpha_n = 0$, the theorem is also true taking the infimum in $\alpha > 0$.

Let $X = \prod_{1 \leq i \leq k}]-\pi,\pi]$, with the distance

$$(31) \qquad d((x_1,\dots x_k),(y_1,\dots,y_k)) := \sqrt{\sum_{1 \leq i \leq k} d'(x_i,y_i)^2}$$

where d' is the distance defined in (12). Obviously d inducts a topology that makes X a compact homeomorphic to the k-dimensional torus. Nevertheless, since d' inducts a convex metric in $]-\pi,\pi]$, it follows that X is metrically convex

That is, inequality (26) is true with $\rho = 1$. On the other hand, since

(32) $$\pi^2 \sum_{1\le i\le k} \sin^2 \frac{x_i - z_i}{2} \ge \sum_{1\le i\le k} d'(x_i, z_i) = d(x,z)^2$$

it follows that

(33) $$f_z(x) := \sum_{1\le i\le k} \sin^2 \frac{x_i - z_i}{2}$$

(34) $$\varphi(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\pi^2}$$

is a test family on X .

Finally, with the same proof of theorem 4 applied to this particular case we get

Theorem 5. Let $X = \prod_{1\le i\le k}]-\pi,\pi]$ with the distance defined in (31). If $f \in B(X)$ (that is, bounded and 2π-periodic on each variable) and the operators L_n are linear, then

(35) $$\|L_n f - f\|_X \le \omega(f,\alpha_n) \|L_n 1 + A\|_X + \|f(L_n 1 - 1)\|_Z$$

where $A > 0$ is arbitrary and

(36) $$\alpha_n^2 := A^{-1}\pi^2 \sup_{z\in X} L_n\Big(\sum_{1\le i\le k} \sin^2 \frac{z-x}{2}, z\Big)$$

$$\le \frac{A^{-1}\pi^2}{2} \Big(\sum_{1\le i\le k} \|L_n 1 - 1\|_X + \|L_n \cos x_i - \cos x_i\|_X +$$

$$+ \|L_n \sin x_i - \sin x_i\|_X \Big) \qquad \square$$

Examples.

For any continuous function $f \in C(X)$ we define

(37) $$L_n f := f * J_n = \frac{1}{(2\pi)^k} \int_X f(t) J_n(\cdot - t)\, dt$$

where $n = (n_1,\dots,n_k) \in \mathbb{N}^k$ and J_n is Jackson's kernel

$$(38) \qquad J_n(t) := \prod_{1\leq i\leq k} \frac{3}{n_i(2n_i^2+1)} \left(\frac{\sin\frac{n_i t_i}{2}}{\sin\frac{t_i}{2}}\right)^4$$

After some technical calculations you can obtain an estimate of α_n in (36) and you get (c.f. [16])

$$(39) \qquad \|f * J_n - f\|_X = O\left(\omega(f, \sqrt{\sum_{1\leq i\leq k} \frac{1}{n_i^2}})\right)$$

that is the best possible approximation by means of trigonometrical polynomials for periodic continuous functions

Exactitude of the formulas.

It's easy to see that, not always, the deducted estimates are exact. For instance, the sequence of operators defined by (2) and (3) verify

$$\forall f \in C_{2\pi}, \ \|f * F_n - f\| = O\left(\omega(f, \frac{\log(n+1)}{n+1})\right)$$

that is better than the one obtained in (7) through Shisha & Mond's theorem. On the other hand, the estimate in (39) is exact. Thus, it is interesting to have criteria in order to know in a particular case if the estimate obtained is exact or if it can be improved.

This problem was considered by us in (15). Here we will give the results for the test families defined by (10) and (11). The periodic case is analogous. Easier yet, let us consider the case when $Y = Z = \{z\}$. That is, when $\{L_n\}$ is a sequence of positive linear functionals and X is compact.

Let $\{\tau_n\}$ and $\{\tau'_n\}$ be two sequences of real numbers that tend to zero. We remind that $\{\tau_n\}$ and $\{\tau'_n\}$ are said to be equivalent infinitesimals, if

$$\tau_n = O(\tau'_n) \quad \text{and} \quad \tau'_n = O(\tau_n)$$

Suppose that $L_n f \underset{n}{\to} f$ for all $f \in C(X)$. Our problem is to consider the exactitude of formula

(40) $$|L_n f - f(z)| = O(\omega(f,\alpha_n) + \delta_n)$$

where $\alpha_n \underset{n}{\to} 0$ and $\delta_n \underset{n}{\to} 0$. This problem can be considered of course only in terms of equivalent infinitesimals.

First of all, we observe that from theorem 4 it follows that, in (40), you can always take

(41) $$\alpha_{n_i} := L_n(d(\cdot,z))$$

(42) $$\delta_{n_i} := |L_n 1 - 1|$$

Suppose that (40) is true. Taking $f \equiv 1$ we obtain that

$$|L_n 1 - 1| = O(\delta_n)$$

This, together with (42), shows that except for equivalent infinitesimals (42) gives the best possible choice for $\{\delta_n\}$.

Let's suppose again that (40) holds. If $\delta_n \equiv 0$, then

$$L_n(d(\cdot,z)) = O\ \omega(d(\cdot,z),\alpha_n) = O(\alpha_n) \quad .$$

This, together with (41), shows that, when $\delta_n \equiv 0$, (41) gives the best possible selection for $\{\alpha_n\}$, except for equivalent infinitesimals. Nevertheless, this last part is not always true if $\delta_n \not\equiv 0$. Let's look at the following example with $X = [0,1]$. Take

$$\forall f \in C[0,1] \quad , \quad L_n f = f(0) + n^{-1} f(1) \quad .$$

It's obvious that $L_n(d(\cdot,0)) = n^{-1}$, but (43) also immediately yields that

$$\forall f \in C[0,1] \ , \ |L_n f - f(0)| = O(n^{-1}).$$

That is, (41) is not optimal, since in this end you could take $\alpha_n \equiv 0$.

Suppose now that $L_n 1 \equiv 1$. Then

$$(44) \qquad \forall f \in C(X) \ , \ |L_n f - f(z)| = O(\omega(f,\alpha_n))$$

where (α_n) is defined by (41). But theorem 4 also yields that (44) is true taking

$$(45) \qquad \alpha_n^p := L_n(d^p(\cdot,z)) \quad ; \quad p \geq 1$$

It results that, for $p = 1$, formula (44) is exact but hard to calculate. But it's relatively easy to estimate α_n in (45) for the case when $p = 2$, which we already know that is not exact even when $\delta_n \equiv 0$ (case of Cesaro means for the Fourier series of f). Take

$$\beta_n^2 := L_n(d^2(\cdot,z)) \quad , \quad \gamma_n^4 := L^n(d^4(\cdot,z)) \quad .$$

From the Cauchy-Schwartz inequality for positive linear functionals you obtain that

$$\alpha_n \leq \beta_n \leq \gamma_n \quad .$$

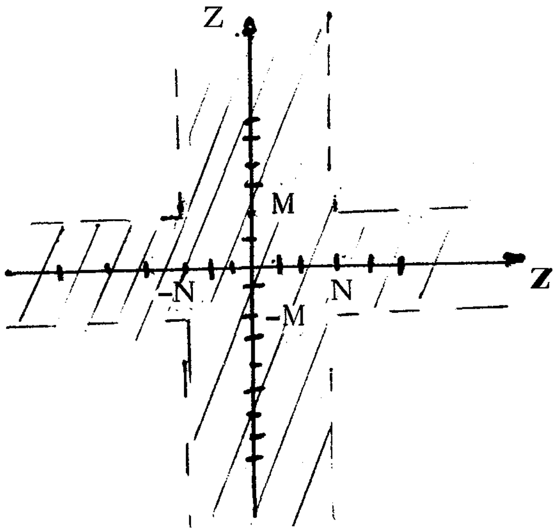
Since it's easier to calculate β_n and γ_n than α_n the following result is of interest

<u>Theorem 6</u>. If $\gamma_n = O(\beta_n)$, then $\beta_n = O(\alpha_n)$. That is $\{\beta_n\}$ is exact assymptotically with respect to $\{\alpha_n\}$.

The angular operator.

It corresponds to Potapov [32] the systematic use of the angular approximation in the study of the constructive characteristic and structural characteristic of certain function spaces of integrable periodic functions. The idea of this type of approximation is the following; we take only two variables for simplicity.

Let $f \in L^2([0,2\pi]^2)$ and $f(x,y) = \sum_{n,m} \hat{f}(n,m)\, e^{inx} e^{imy}$ its Fourier series. One way of summing up this series is to take partial sums with the indexes $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$ taken inside the two bands shown in the graphic. This means that



(46) $$f(x,y) = \lim_N \lim_M \Big(\sum_{|n|\leq N} \sum_{m\in\mathbb{Z}} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{|m|\leq M} - \sum_{|n|\leq N} \sum_{|m|\leq M} \Big) A_{n,m}(x,y)$$

where the limit is in L^2 and

$$A_{n,m}(x,y) := \hat{f}(n,m)\, e^{inx}\, e^{imy}$$

Following this idea Potapov and the author have developed the following for spaces of continuous functions.

Definition 5. Let $f \in C(X \times Y)$, where (X,d) and (Y,e) are two compact metric spaces. The mixed modulus of continuity of f, for all $\alpha > 0$ and $\beta > 0$ is defined as

$$(47)\qquad \tau(f;\alpha,\beta) = \sup_{\substack{d(x,u)\le\alpha \\ e(y,v)\le\beta}} \{f(x,y)-f(u,y)+f(u,v)-f(x,v)\}$$

and for $\alpha = 0$ or $\beta = 0$ by a limit process.

From the following inequality

$$(48)\qquad \tau(f;\alpha,\alpha) \le 2\omega(f,\alpha)$$

it's obvious that the mixed modulus is not worse than the usual modulus of continuity given in definition 2. Nevertheless, it can occur that f is not constant and $\tau(f,\alpha,\beta) \equiv 0$ so in (48) you may have strict inequality.

Following the idea in (46) :

<u>Definition 6</u>. Let $L : C(X) \to C(X)$ and $T : C(Y) \to C(Y)$ be two bounded linear operators. The angular operator $A = A(L,T)$ is defined on $C(X,Y)$ as

$$(49)\qquad A(f_1(x,y)) := L(f^y,x)+T(f_x,y)-L(T(f_o,y),x)$$

for all $f \in C(X \times Y)$, where $f^y \in C(X)$ and $f_y \in C(Y)$ denote corresponding partial functions.

It's easy to verify, using classical techniques of Functional Analysis, that $A : C(X \times Y) \to C(X \times Y)$ is well defined, is linear and does not depend on the order in which L and T are taken in the last term of (49) . With a more or less direct proof in [33] we obtained the following

<u>Theorem 7</u>. Let $L_n : C(X) \to C(X)$ and $T_n : C(Y) \to C(Y)$ be two sequences of linear operators, such that

$$||L_nf-f||_X \le B\omega(f,X,\alpha_n)$$

$$||T_nf-f||_Y \le C\omega(g,Y,\beta_n)$$

for all $f \in C(X)$ and $g \in C(Y)$, where B and C are positive absolute constants. Then, for all $h \in C(X \times Y)$, you get

$$(50) \qquad \|A_n h - h\|_{X \times Y} \le B.C\ \tau(h;\alpha_n,\beta_n)$$

Some complements.

The object of this last paragraph is to mention other results of the author on the subject, as well as to introduce some other complementary references for quantitative and qualitative results.

If $L : C(X) \to C(X)$ is a continuous linear operator and $x \in X$, it's possible to define the continuous linear functional

$$\forall f \in C(X) \quad , \quad L_x f := L(f,x) \quad .$$

So, if $\{L_n\}$ and T are continuous linear endomorphisms on $C(X)$, the study of the convergence of $\{L_n\}$ to T can be done in terms of the convergence of $\{L_{n_x}\}$ to T_x for all $x \in X$. This simplifies things and we may restrict our attention to functionals.

Definition 7. A linear functional T on $C(X)$ is of class M_p^+ if there exist different points $x_1,\ldots,x_k \in X$ and positive scalars $a_1,\ldots,a_k$, with $k \le p$, such that

$$(51) \qquad \forall f \in C(X) \quad , \quad Tf = \sum_{i \le i \le k} a_i f(x_i)$$

That is, if and only if T admits the representative measure $\sum_{1 \le i \le k} a_i \delta_{x_i}$, where δ_{x_i} is the Dirac probability on x_i .

For instance, if we fix $x \in [0,1]$, Bernstein's operator given in (1), defines a functional L_{n_x} in M_p^+ , for each $x \in [0,1]$ and $p \ge n+1$.

Michelli (c.f. [25-26]) has proved that a Tchebyshev system in $[0,1]$ is a Korovkin system for the class of positive functionals, with respect to the convergence to T, if and if $T \in M_p^+$ and p is not greater than a certain value that depends on the amount of functions in the Tchebyshev system.

Let X be a compact metric space.

<u>Theorem 8</u>. Let $E \subset C(X)$ be a linear subspace that contains the constants. Let L be a continuous linear functional on $C(X)$ and $T = \sum_{1 \le i \le k} a_i \delta_{x_i} \in M_p^+$. If $\{f_{x_i}, 1 \le i \le k\}$ is a test family on $Z := \{x_1, \dots, x_k\}$ and the $k+1$ generalized polynomials

$$\prod_{i \le i \le k} f_{x_i} \quad ; \quad \prod_{\substack{1 \le j \le k \\ i \ne j}} f_{x_j} \quad , \ 1 \le i \le k$$

belong to E; then, for all $f \in E$ and $\alpha > 0$ we have

$$(52) \qquad \begin{aligned} |Lf-Tf| \le {} & \frac{\|f\|_X + \|q\|_X}{\varphi(\alpha)^k} L\Big(\prod_{1 \le i \le k} f_{x_i}\Big) \\ & + [\omega(f,\alpha)+\omega(q,\alpha)]L1 \\ & + |Lq-Tq| \\ & + \Big(\frac{\|f\|_X + \|q\|_X}{\varphi(\alpha)^k} \Big\| \prod_{1 \le i \le k} f_{x_i} \Big\| + \\ & + \omega(f,\alpha)+\omega(q,\alpha)+\|f-q\|\Big) \frac{\|L\| - L1}{2} \end{aligned}$$

where $q := \sum_{1 \le i \le k} q_i$ and

$$q_i := \begin{cases} f(x_1) & \text{if } k = 1 \\ f(x_i)\Big(\prod_{\substack{1 \le j \le k \\ i \ne j}} f_{x_j}(x_i)\Big)^{-1} \prod_{\substack{1 \le j \le k \\ i \ne j}} f_{x_j} & \text{si } k > 1 \end{cases} \qquad \square$$

The proof of this theorem is a generalization of theorem 1. It is done analogous as before taking

$$g := \frac{\|f\|_x + \|q\|_x}{\varphi(\alpha)^k} \prod_{1\leq i\leq k} f_{x_i} + q + \omega(f,\alpha) + \omega(q,\alpha)$$

$$h := -\frac{\|f\|_x + \|q\|_x}{\varphi(\alpha)^k} \prod_{1\leq i\leq k} f_{x_i} - q - \omega(f,\alpha) - \omega(q,\alpha)$$

and using the fact that for all $u \in E$, with $u \geq 0$, you have that

$$Lu + u \frac{\|L_n\| - L1}{2} \geq 0$$

For more reference on this see [14].

In the last case, we have considered the convergence of non-positive operators (or functionals) to the operator $T \neq Id$. Nevertheless, the case of complex analytic functions on $X \subset \mathbb{C}$, where the interior $X^o \neq \phi$ has other technical difficulties, since there are no real analytic functions different from the constants.

In [12], we proved that 1 and z form a test system in the algebra of the continuous functions on $[|z| \leq 1]$ which are analytic in $[|z| < 1]$. Moreover, we have estimated the rate of convergence. Here we consider that $\|L_n\| \underset{n}{\rightarrow} 1$.

When X is a subset of $\mathbb{C}$ different from the unit disc, the method developed allows us to also obtain quantitative results but which become harder and harder with the geometry of the problem. Motivated by this, we have developed an idea in order to obtain qualitative results for classes of holomorphic functions in other domains (c.f. [22]).

Observe that to prove theorem 1 (and the following), we first estimate

(53) $$|L_n(f,x) - f(x)|$$

Then, instead of taking supremum on $x \in Z$, we could also integrate or take other norms. These different cases were studied and unified by Sendor [34], starting from the original ideas of Korovkin [19]. In [15], we have established the relationship between our work and that of Sendor.

Inspite of what was said above, the case of integrable functions cannot be treated starting from (53), because it has no sense to evaluate a class of functions at a point that may be, as a set, of measure zero. This case requires other techniques and has been treated by Berens & de Vore [3].

Let's return to qualitative results. After the paper of Shaskin in which he characterizes the test systems in $C(X)$, with X a compact metric space, in terms of the Choquet boundary several papers have appeared in that direction.

From the general point of view, we have the following :

Let E be a certain space (of Banach, for example) and $F \subset E$, $F \neq \phi$. For a given class M of operators from E to E, let's define

$$F(M) := \prod_{j} \{e \in E \mid L_n e \underset{n}{\rightarrow} e\}$$

where

$$j := \{(L_n) \subset M \mid \forall f \in F,\ L_n f \underset{n}{\rightarrow} f\}$$

Between the different problems considered you have

(i) Characterize those sets F such that $F(M) = E$.

(ii) Characterize $F(M)$.

(iii) Find Korovkin systems (finite).

(iv) Determine the minimum possible set of

Suppose that X is a compact metric space of Hausdorff and $E = C(X)$. Let F be a linear subspace of E, such that $1 \in F$. From papers of Wulbert 1968, Krasnoselski & Lipshits 1968, Franchetti 1969, Minkova 1972, Scheffold 1972, Lorentz 1972, Bernes & Lorentz 1973 and others you obtain a complete characterization of $F(M)$ for $M = M^+$ (positive linear operators), $M = M'$ (normal linear operators), $M = M^+ \cap M'$ and others.

For example, let $M(X)$ be the dual space of $C(X)$. Following Wulbert [42] we define :

$$cb^+F := \{x \in X \mid (T \in M(X);\ T \geq 0\ ;\ \forall f \in F,\ Tf = f(x)) \Rightarrow \forall f \in C(X),\ Tf = f(x)\},$$

$$cb'F := \{x \in X \mid (T \in M(X);\ \|T\| = 1; \forall f \in F,\ Tf = f(x)) \Rightarrow \forall f \in C(X),\ Tf = f(x)\},$$

$$cb^{+,'}F := \{x \in X \mid (T \in M(X)\ ;\ T \geq 0; \|T\| = 1;\ \forall f \in F,\ Tf = f(x)) \Rightarrow \forall f \in C(X), Tf = f(x)\}.$$

Then $F(M) = C(X)$ with respect to M^+ (respectively M' ; respectively $M^{+,'}$) if and only if $cb^+F = X$ (respectively $cb'F = X$; respectively $cb^{+,'}F = X$). When X is not metric, this charactérization needs nets of operators.

These problems, for continuous functions on an arbitrary topological space, have been studied by Bauer [1]. The case $C_o(X)$ (here $1 \in F$ doesn't make sense) by Bauer & Donner [2].

When E is a space of integrable functions $L^p(\mu)$, you can still consider in a natural way the classes M^+, M', $M^{+,'}$ and others. For these spaces there is a well advanced (but still incomplete) work in the papers of Dziadyk 1966, Zaricka 1967, Wulbert 1968 et 1975, James 1973, Kitto & Wulbert 1976 and others (c.f. [17], [40]). For example $(\{1/n^2\}, \{1/n^3\}, \{1/n^4\})$ is a Korovkin system for M^+ in $\ell^p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < \infty$. The sets $\{1,x,x^2\}$, $\{1,x\}$ and $\{\text{sign } x, x\}$ are Korovkin systems in $L^1[-1,1]$ with respect to M^+, M' and $M^{+,'}$ respectively.

The above mentioned papre of Krasnosetskii & Lipschitz is connected with problems of convergence in measure and almost everywhere.

We finally mention, for the case in which E is a lattice, the papers of Wolff [39], [40] and [41].

The reference that follows is incomplete, but contains a lot of basic results as well as other questions which we have had to omit because of space.

Acknowledgements.

The author wishes to express his deep thanks to the colleagues of the Mathematical Departments at Nancy I and Orsay for the invitations which have permeitted him to visit these universities as well as for the friendly treatment which he has received.

REFERENCES

[1] Bauer H., Theorems of Korovkin type for adapted spaces", Ann. Inst. Fourier 23, F-4 (1973), 245-260.

[2] Bauer H. and K. Donner, "Korovkin approximation in $C_o X$, Math. Ann. 236 (1978), 225-237.

[3] Berens H. and R. de Vore, Trans. Amer. Math. Soc. 245 (1978) 349-361.

[4] Berens H. and G.G. Lorentz, "Convergence of Positive Operators", J. Approx. Th. 17 (1976) 307-314.

[5] Censor E., "Quantitative results for positive linear approximation operators", J. Approx. Th. 4 (1971) 442-450.

[6] De Vore R., "Optimal convergence of positive linear operators", Proc of the Conf. on Constructive Theory of Functions, Budapest (1972) 101-120.

[7] Ditzias Z., "Convergence of sequences of positive linear operators, Remarks and applications", J. Approx. Th. 1 (1968), 355-359.

[8] Donner K., "Korovkin closures for positive linear operators", J. Approx. Th. 26 (1979) 14-25.

[9] Funandez Muniz J.L., "Teoremos cualitativos de tipo Korovkin para sucesiones de operadores de clase $\tilde{R}$ ", Rev. Ciencias Matematicas, Vol.III, N°1 (1982)

[10] Jiménez Pozo M.A., "Sur les opérateurs linéaires positifs et la méthode des fonctions test ", C.R. Acad. Sci. Paris 278 (1974), 149-152.

[11] ——————— , " Sobre la convergencia de operadores lineales y el método de las funciones de punba , "Rev. Centro Univ. Las Villas 3 (1975) 67-72.

[12] ——————— , "Convergence of sequences of linear operators", Vestnik Moskovskogo Univ. Matematika 4 (1978) 7-15 (Russian).

[13] ——————— , "Déformation de la convexité et théorèmes du type Korovkin" C.R. Acad. Sc. Paris, 290 (1968) 213-215.

[14] ——————— , Convergence of sequences of linear functionals", ZAMM 61 (1981) 495-500.

[15] ——————————, "Quantitative theorems of Korovkin type in bounded function spaces", Int. Conf. on Constructive Function Th. Varna (1981) 488-493.

[16] —————————— , "Aproximacion polinomial en varias variables por medio de teoremas de tipo Korovkin", Rev. Ciencias Mat. Univ. Habana VI, N°1, 1980.

[17] Kitto W. and E. Wulbert, "Korovkin approximations in L^p-spaces", Pacif. J. Math. 63 (1976) 154-167.

[18] Korovkin P.P., "On the convergence of positive linear operators in the space of continuous functions", Dok. Akad. Nauk USSR 90 (1953) 961-964 (Russian).

[19] ———————— , "Axiomatic construction of some problems in Approximation Theory", Int. Conf. on Constructive Function Th. Sofia (1972), 55-63 (Russian)

[20] Krasnoselskii M.A. and E.A. Lipschitz, "Principles of convergence of sequences of positive linear operators", Studia Math. 31 (1968) 445-468 (Russian).

[21] Kudriavchev, G.I., "Convergence of a sequence of linear operators", Mat. Analiz. Teoria Funktsii T-8 Matematika (1977) 102-105 (Russian).

[22] Lopez Lagomasino G. and Jiménez Pozo M.A., "Korovkin type theorems for certain classes of analytic functions", Int. Cong. of Math. IMU Warsaw (1983), Short Comm. submitted to Vestnik Moskovskogo Univ. (Matematika).

[23] Lorentz G.G., "Korovkin sets", Levture Notes, Regional Conf. on App. Th., Riverside (1972).

[24] Mamedov R.G., "Degree of approximation of functions by positive linear operators" Dok. Akad. Nauk USSR 128 (1959) 674-676.

[25] Micchelli C.A., "Tcebysheff subspaces and convergence of positive linear operators", Proc. Amer. Math. Soc. 40, 2 (1973) 448-452.

[26] ————————, "Convergence of positive linear operators on C(X)", J. Approx. Th. 13 (1975) 305-315.

[27] Minkova R.M., "Convergence of contractive operators in the space of continuous functions", Cib. Mat. Journal 13 (1972) 790-804.

[28] Mohapatra R.N., "Quantitative results on almost convergence of a sequence of positive linear operators", J. Approx. Th. 20 (1977) 239-250.

[29] Mond B., " On the degree of approximation by linear positive operators", J. Approx. Th. 18 (1976) 304-306.

[30] Nishishiraho T., "The degree of convergence of positive linear operators", Tohoku Math. J. 29 (1977) 81-89.

[31] Pai, D.V. and P.C. Jain, "Approximation theorems of Korokin type for complex valued functions", Indian J. Math. 13 (1971) 123-129.

[32] Potapov M.K., "On the angular approximations, Proc. of the Conf. on Constructive Theory of Functions, Budapest (1972) 371-399 (Russian).

[33] Potapov M.K. and Jiménez Pozo M.A., "Aproximacion angular", Revista Ciencias Matematica , Univ. Habana, Vol.II, N°3 (1981).

[34] Sendov B., "Convergence of sequences of monotonic operators in A-distance", C.R. Acad. Bulg. Sci. 30 N°5 (1977), 657-659.

[35] Shapiro H.S., "Topics in Approximation Theory", Springer-Verlag (1971).

[36] Shaskin Yu.A., "Milman-Choquet boundary and approximation theory", Funct. Analiz. i evo prilogenia 1 (1967) 95-96 (Russian).

[37] Shisha O. and B. Mond , "The degree of convergence of sequenc-s of linear positive operators", Proc. Mat. Acad. Sciences USA 60 (1968) 1196-1200.

[38] ——————————— , "The degree of approximation to periodic functions by linear positive operators", J. Approx. Th. 1 (1968) 335-339.

[39] Wolff M., "Darstellung von Banacverbänden und Sätze vom Korovkin-Typ", Math. Ann. 200 (1973) 47-67.

[40] ——— , "Über Korovkin-Sätze in lokalkonvexen Vektorverbänden", Math. Ann. 204 (1976) 49-56.

[41] ——— , "A general theorem of Korovkin type for vector lattices", J. Approx. Th. 9 (1973) 517-521.

[42] Wulbert D.E., "Contractive Korovkin approximation", J. Funct. Ann. 19 (1975) 205-215.

Havana University
Cuba

No. d'impression 742
1er trimestre 1985