

UNIVERSITÉ PARIS XI

U.E.R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

N° 95-7419

23.411

Anneaux de Chow des groupes algébriques

$SO(n)$, $Spin(n)$, G_2 et F_4

par

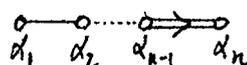
ROGER MARLIN



Soient k un corps algébriquement clos, G un k -groupe algébrique semi-simple (déployé), B un groupe de Borel de G , T un tore maximal de B (donc de G), W le groupe de Weyl de G par rapport à T , $A(G/B)$ (resp. $A(G)$) l'anneau de Chow de la variété G/B (resp. G), T_G l'homomorphisme canonique de $A(G/B)$ dans $A(G)$.

. Si G est de type B_n ($SO(2n+1)$ ou $Spin(2n+1)$),

soient:
$$p_i = 2^{\lfloor \log_2 \frac{n}{i} \rfloor + 1},$$



w_0 l'élément de longueur maximale de W ,

s_i la symétrie par rapport à la racine simple α_i ,

$$w_i = s_{n-i+1} s_{n-i+2} \dots s_{n-1} s_n,$$

x_i l'élément de $A(G/B)$ classe de l'adhérence de la

cellule de Bruhat $Bw_0 w_i B/B$,

$$X_i = T_G(x_i).$$

Théorème:

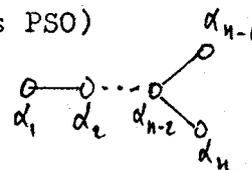
$$\left\{ \begin{aligned} A(SO(2n+1))^+ &= \mathbb{F}_2[X_1, X_3, X_5, \dots, X_{2 \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1}]^+ / (X_i^{p_i} = 0), \\ A(Spin(2n+1))^+ &= \mathbb{F}_2[X_3, X_5, \dots, X_{2 \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1}]^+ / (X_i^{p_i} = 0). \end{aligned} \right.$$

. Si G est de type D_n ($SO(2n)$ ou $Spin(2n)$, mais pas PSO)

soient les mêmes notations que précédemment sauf:

$$p_i = 2^{\lfloor \log_2 \frac{n-1}{i} \rfloor + 1},$$

$$w_i = s_{n-i} s_{n-i+1} \dots s_{n-2} s_n.$$



Théorème:

$$\left\{ \begin{aligned} A(SO(2n))^+ &= \mathbb{F}_2[X_1, X_3, X_5, \dots, X_{2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}]^+ / (X_i^{p_i} = 0), \\ A(Spin(2n))^+ &= \mathbb{F}_2[X_3, X_5, \dots, X_{2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}]^+ / (X_i^{p_i} = 0) \end{aligned} \right.$$

. Si G est de type G_2 , soient:

x_3 l'élément de $A(G/B)$ classe de l'adhérence de la cellule de Bruhat $Bw_0s_1s_2s_1B/B$,

$$X_3 = T_G(x_3).$$

Théorème:

Si G est de type G_2 , on a: $A(G)^+ = \underline{\mathbb{F}}_2[X_3]^+ / (X_3^2)$.

. Si G est de type F_4 , soient:

x_3 (resp. x_4) l'élément de $A(G/B)$ classe de l'adhérence de la cellule de Bruhat $Bw_0s_1s_2s_3B/B$ (resp. $Bw_0s_1s_2s_3s_4B/B$)

$$X_3 = T_G(x_3), X_4 = T_G(x_4).$$

Théorème:

Si G est de type F_4 , on a: $A(G) = \underline{\mathbb{Z}}[X_3, X_4] / \mathcal{J}$,
où \mathcal{J} est l'idéal engendré par $2X_3, 3X_4, X_3^2, X_4^3, X_3X_4$.

La démonstration de ces théorèmes sera obtenue ci-dessous en utilisant, d'une part, l'interprétation géométrique des invariants symétriques entiers des groupes de Weyl ((1), p.300) permettant de déterminer $A(G/B)$ et c_G (l'homomorphisme caractéristique de $S(\hat{T})$ dans $A(G/B)$), et d'autre part, la remarque de Grothendieck ((4), p.21 rem.2) permettant d'obtenir $A(G)$ comme quotient de $A(G/B)$ par l'idéal engendré par l'image de c_G .

Je tiens à remercier M. Demazure qui par son efficace aide hebdomadaire m'a permis d'obtenir ces humbles résultats.

§1 . Préliminaires .

Soit \mathcal{A} la catégorie des anneaux commutatifs gradués à degrés positifs et tels que la partie de degré zéro soit isomorphe à $\underline{\mathbb{Z}}$.

Définition:

Si A est un objet de \mathcal{A} , soit A^+ l'idéal gradué de A engendré par les éléments homogènes de A de degré strictement positif.

Définition:

On appellera suite exacte dans \mathcal{A} la situation suivante:

- A, B, C des objets de \mathcal{A} ,
- i (resp. ψ) un homomorphisme de B dans A (resp. de A dans C),
- $\text{Ker } \psi = i(B^+).A$
- ψ est surjectif.

Proposition 1:

Etant données:

- une suite exacte $B \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\psi} C$,
- une partie génératrice P_B de l'anneau B ,
- une partie P_C de A telle que $\psi(P_C)$ soit une partie génératrice de l'anneau C ;

alors $P_C \cup i(P_B)$ est une partie génératrice de l'anneau A .

Démonstration:

Soit A' le sous anneau de A engendré par $P_C \cup i(P_B)$. Démontrons, par récurrence sur leurs degrés, que les éléments homogènes de A appartiennent à A' . C'est clair en degré zéro. Supposons ceci vrai jusqu'au degré n .

Soit a un élément de A^{n+1} . Soient $\{\beta_k\}_{k \in K}$ les éléments de P_B , $\{\gamma_l\}_{l \in L}$ les éléments de P_C . $\psi(P_C)$ engendre C , donc $\psi(a)$ est un polynôme en les $\psi(\gamma_l)$, $\psi(a) = P[(\psi(\gamma_l))_{l \in L}] = \psi[P((\gamma_l)_{l \in L})]$ donc, $a - P((\gamma_l)_{l \in L}) \in \text{Ker } \psi$, soit: $a = P((\gamma_l)_{l \in L}) + \sum_{\substack{k \in K \\ d^{\beta_k} > 0}} i(\beta_k) a_k$

les a_k étant des éléments de A presque tous nuls de degré inférieur ou égal à n . A' contenant les $i(\beta_k)$, les γ_l et les a_k

contient a , d'où $A = A'$.

Définitions:

Soit T le foncteur covariant de \mathcal{A} dans \mathcal{A} qui à A associe $T(A) = A/A^1A$, où A^1A est l'idéal gradué de A engendré par les éléments homogènes de degré 1.

Soit $T_A: A \rightarrow T(A)$ l'homomorphisme canonique.

Proposition 2:

Si $B \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\psi} C$ est une suite exacte, $T(B) \xrightarrow{T(i)} T(A) \xrightarrow{T(\psi)} T(C)$ en est aussi une.

Démonstration:

Claire d'après la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{\psi} & C \\ T_B \downarrow & & T_A \downarrow & & T_C \downarrow \\ T(B) & \xrightarrow{T(i)} & T(A) & \xrightarrow{T(\psi)} & T(C) \end{array}$$

§ 2. Suite exacte d'anneaux de cohomologie.

En suivant les ^{notations} de (1), soient: (M, R, ρ) un système de racines précisé, (M', R', ρ) un sous système (i.e.: $R' \subset R$, $M' = M \cap Q(R')$), W (resp. W') le groupe de Weyl de R (resp. R'), W/W' l'ensemble des classes à droite de W modulo W' , $W^{(1)}$ un système de représentants des classes d'équivalence par des éléments de plus petite longueur dans chaque classe, H (resp. H') l'anneau de cohomologie du système R (resp. R'). Il est à noter que H dépend de R , pas de M .

Lemme 0:

Si $Z_{w'} Z_w = \sum a_i Z_{w_i}$, w, w' et les w_i étant des éléments de W , on a: $w \leq w_i$, pour tout i .

Démonstration:

Si $l(w') = 1$, ceci résulte de la formule de Chevalley (Cf. 4.4, (2))

$$Z_{s_\alpha} Z_w = \sum_{\beta \in R_+} \langle \beta, w \rangle Z_{ws_\beta} \\ l(ws_\beta) = l(w) + 1$$

Si $l(w') > 1$, on remarque que $H^1 H^{n-1} \otimes Q = H^n \otimes Q$ (Cf. (1)) ce qui permet d'achever la démonstration par récurrence.

Lemme 1:

Chaque classe d'équivalence de W modulo W' possède un unique élément de longueur minimale; c'est aussi l'élément minimum de la classe.

Démonstration:

Soit $w = w^{(1)} w'$, avec $w^{(1)} \in W^{(1)}$, $w' \in W'$. Si $l(w) < l(w^{(1)}) + l(w')$ on peut écrire $w^{(1)} = \bar{w} \cdot s_\alpha$, $w' = s_\alpha \cdot \bar{w}'$ avec $l(\bar{w}) = l(w^{(1)}) - 1$, $l(\bar{w}') = l(w') - 1$, α étant une racine simple de R . s_α intervenant dans une décomposition réduite d'un élément de W' est un élément de W' , et donc $w^{(1)} \sim \bar{w}$ et $l(\bar{w}) < l(w^{(1)})$ ce qui est impossible, donc $l(w) = l(w^{(1)}) + l(w')$. Mais alors une décomposition de w s'obtient en mettant bout à bout une décomposition de $w^{(1)}$ et une de w' , et donc $w^{(1)} \preceq w$.

Lemme 2.

Si $w^{(1)} w' \preceq \bar{w}^{(1)} \bar{w}'$ avec $w^{(1)}, \bar{w}^{(1)} \in W^{(1)}$, $w', \bar{w}' \in W'$ alors $w^{(1)} \preceq \bar{w}^{(1)}$.

Démonstration:

$$w^{(1)} \preceq w^{(1)} w' \preceq \bar{w}^{(1)} \bar{w}'$$

$$\text{Soient: } \bar{w}^{(1)} = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \dots s_{\alpha_p}, \alpha_p \in R'$$

$$\bar{w}' = s_{\beta_1} s_{\beta_2} \dots s_{\beta_q}, \beta_i \in R'$$

$$\bar{w}^{(1)} \bar{w}' = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_p} s_{\beta_1} \dots s_{\beta_q}$$

On peut extraire de la décomposition de $\bar{w}^{(1)} \bar{w}'$ une décomposition réduite de $w^{(1)}$, soit: $w^{(1)} = s_{\gamma_1} \dots s_{\gamma_r}$, $\gamma_r \in R'$, donc γ_r est l'un des α_i et donc $w^{(1)} \preceq \bar{w}^{(1)}$.

Dans la suite $w = w^{(1)} w'$ désignera l'unique décomposition de w en un élément de $W^{(1)}$ et un de W' .

Lemme 3:

Le sous-module libre H_n de H de base $(Z_{w^{(1)} w'}^{(1)})$ avec $l(w^{(1)}) \geq n$ est un idéal de H .

Démonstration:

Soient $w \in W$, $w' \in W'$, $w^{(1)} \in W^{(1)}$, avec $l(w^{(1)}) \geq n$. On a:

$$Z_{w w^{(1)} w'}^{(1)} = \sum a_i Z_{w_i} = \sum a_i Z_{w_i^{(1)} w_i'}, \text{ avec } w^{(1)} w' \preceq w_i = w_i^{(1)} w_i' \text{ (lemme 0),}$$

et donc: $w^{(1)} \preceq w_i^{(1)}$ et $n \leq l(w^{(1)}) \leq l(w_i^{(1)})$, d'où $Z_{w_i^{(1)} w_i'}^{(1)} \in H_n$.

Définition:

Soit $H^{(1)}$ le sous-module de H défini par $H^{(1)} = [c(S(M)^{W'}) \otimes \mathbb{Q}] \cap H$, où $S(M)^{W'}$ est l'anneau des invariants par W' de l'algèbre symétrique de M , et c l'homomorphisme caractéristique de $S(M)$ dans H .

Lemme 4:

La famille $(Z_{w^{(1)}})_{w^{(1)} \in W^{(1)}}$ est une base du \mathbb{Z} -module $H^{(1)}$.

Démonstration:

Soit $w^{(1)} \in W^{(1)}$; on a $c(D_{w^{(1)}-1_{w_0}}(a)) = D_{w_0}(a) \cdot Z_{w^{(1)}}$, si $a \in S^N(M)$.

Soit $\alpha \in R'$, $l(w^{(1)}_{s_\alpha}) = l(w^{(1)}) + 1$. Donc $l(s_\alpha w^{(1)}-1_{w_0}) = l(w^{(1)}-1_{w_0}) - 1$, et donc $D_{s_\alpha w^{(1)}-1_{w_0}} = 0$ (Cf. Prop. 3 (1)). D'où:

$s_\alpha(D_{w^{(1)}-1_{w_0}}(a)) = D_{w^{(1)}-1_{w_0}}(a)$, $\forall \alpha \in R'$, et donc $D_{w^{(1)}-1_{w_0}}(a) \in S(M)^{W'}$ et $D_{w_0}(a) \cdot Z_{w^{(1)}} \in c(S(M)^{W'})$. Or il existe a tel que $D_{w_0}(a)$ ne soit pas nul, donc $Z_{w^{(1)}} \in H^{(1)}$.

Réciproquement, on a: $c(u) = \sum_{w^{(1)} \in W^{(1)}} \xi D_{w^{(1)}} D_{w'}(u) \cdot Z_{w^{(1)}_{w'}}$, $u \in S(M)$.

Si $u \in S(M)^{W'}$, et $w' \neq 1$, $D_{w'}(u) = 0$. Donc si $u \in S(M)^{W'}$,

$$c(u) = \sum_{w^{(1)} \in W^{(1)}} \xi D_{w^{(1)}}(u) \cdot Z_{w^{(1)}}.$$

Lemme 5:

Soient $w^{(1)} \in W^{(1)}$, $w' \in W'$, $l(w^{(1)}) = n-1$, alors:

$$Z_{w^{(1)}} Z_{w'} \equiv Z_{w^{(1)}_{w'}} \quad \left[\begin{array}{c} H \\ n \end{array} \right].$$

Démonstration:

Rappelons tout d'abord que $l(w^{(1)}_{w'}) = l(w^{(1)}) + l(w')$; pour $a \in S^N(M)$ et $D_{w_0}(a) \neq 0$ on a

$$Z_{w^{(1)}} = \left[D_{w_0}(a) \right]^{-1} \cdot c(D_{w^{(1)}-1_{w_0}}(a)), \quad Z_{w'} = D_{w_0}(a)^{-1} \cdot c(D_{w'-1_{w_0}}(a)),$$

$$Z_{w^{(1)}} Z_{w'} = \left[D_{w_0}(a) \right]^{-2} \cdot c(D_{w^{(1)}-1_{w_0}}(a) D_{w'-1_{w_0}}(a)),$$

$$Z_{w(1)} Z_{w'} = \left[D_{w_0}(a) \right]^{-2} \sum_{\substack{w'_i \in W^{(i)} \\ w'_i \in W'}} \epsilon^D D_{w_i(1)} w'_i \left[D_{[w(1)]^{-1} w_0}(a) D_{w'^{-1} w_0}(a) \right] Z_{w_i(1)} w'_i,$$

donc modulo H_n :

$$Z_{w(1)} Z_{w'} = \left[D_{w_0}(a) \right]^{-2} \sum_{\substack{w'_i \in W^{(i)} \\ w'_i \in W' \\ \ell(w'_i) \geq \ell(w')}} D_{w_i(1)} w'_i \left[D_{[w(1)]^{-1} w_0}(a) D_{w'^{-1} w_0}(a) \right] Z_{w_i(1)} w'_i,$$

mais $D_{w_i(1)} w'_i = D_{w_i(1)} w_i$, et $D_{w'_i} \left[D_{[w(1)]^{-1} w_0}(a) \right] = 0$. Plus précisément

$D_{[w(1)]^{-1} w_0}(a)$ est invariant par W' , donc:

$$A_i = D_{w_i(1)} w'_i \left[D_{[w(1)]^{-1} w_0}(a) D_{w'^{-1} w_0}(a) \right] = D_{w_i(1)} \left[D_{[w(1)]^{-1} w_0}(a) D_{w'_i w'^{-1} w_0}(a) \right],$$

et comme $\ell(w'_i) \geq \ell(w')$, $D_{w'_i} D_{w'^{-1} w_0}(a) = \delta_{w', w'_i} D_{w_0}(a)$ (Cf. Cor. 3 (1)).

Et il reste:

$$A_i = D_{w_0}(a) D_{w_i(1)} D_{[w(1)]^{-1} w_0}(a) \delta_{w', w'_i} = \left[D_{w_0}(a) \right]^2 \delta_{w', w'_i} \delta_{w(1), w'_i},$$

et donc: $Z_{w(1)} Z_{w'} \equiv Z_{w(1)} w' \pmod{H_n}$.

Définition:

Soit $\psi: H \rightarrow H'$ défini par: $\psi(Z_w) = 0$ si $w \notin W'$,

$$\psi(Z_{w'}) = Z_{w'}, \text{ si } w' \in W'.$$

$Z_{w'}$ étant l'élément de base de H' d'indice w' .

Remarque: $\text{Ker } \psi = H_1$

Lemme 6:

ψ est un homomorphisme d'anneaux gradués.

Démonstration:

Le noyau de ψ est bien un idéal, il suffit donc de vérifier que, pour w' et \bar{w}' éléments de W' , on a: $\psi(Z_{w'} Z_{\bar{w}'}) = Z_{w'} Z_{\bar{w}'}$,

. $\ell(w') \geq 1$, $w' = s_\alpha$, $\alpha \in R'$, α simple. Dans H , on a:

$Z_{s_\alpha} Z_{w'}^- = \sum_{\substack{\beta \in R \\ \ell(\bar{w}s_\beta) = \ell(\bar{w})+1}} \langle \beta^\vee, \omega_\alpha \rangle Z_{w'}^- s_\beta$ (Cf. 4.4, (2)), ω_α étant le poids fon-

amental de α . Dans H' , on a: $Z_{s_\alpha}^1 Z_{w'}^1 = \sum_{\substack{\beta \in R' \\ \ell(\bar{w}s_\beta) = \ell(\bar{w})+1}} \langle \beta^\vee, \omega_\alpha' \rangle Z_{w'}^1 s_\beta$.

Si $\beta \notin R'$, $\psi(Z_{w'}^- s_\beta) = 0$ car $\bar{w}'s_\beta \notin W'$. Si $\beta \in R'$ $\langle \beta^\vee, \omega_\alpha' \rangle = \langle \beta^\vee, \omega_\alpha \rangle$ et donc $\psi(Z_{s_\alpha} Z_{w'}^-) = \sum \langle \beta^\vee, \omega_\alpha' \rangle Z_{w'}^- s_\beta = Z_{s_\alpha}^1 Z_{w'}^1$.

. Supposons le lemme vrai pour $\ell(w') < p$. Soit $w' \in W'$, $\ell(w') = p$ et $Z_{w'} = \sum_{\alpha_i \in Q} a_i Z_{s_{\alpha_i}} Z_{w_i}$. Si s_{α_i} et w_i sont des éléments de W' , on a: $\psi(Z_{s_{\alpha_i}} Z_{w_i} Z_{w'}^-) = Z_{s_{\alpha_i}}^1 \psi(Z_{w_i} Z_{w'}^-) = Z_{s_{\alpha_i}}^1 Z_{w_i}^1 Z_{w'}^-$, sinon $\psi(Z_{s_{\alpha_i}} Z_{w_i} Z_{w'}^-) = 0$.

Donc: $\psi(Z_{w'} Z_{w'}^-) = \left(\sum_{\substack{\alpha_i \in S \\ w_i \in W'}} a_i Z_{s_{\alpha_i}}^1 Z_{w_i}^1 \right) Z_{w'}^-$, mais on a $Z_{w'}^1 = \sum_{\substack{\alpha_i \in S' \\ w_i \in W'}} a_i Z_{s_{\alpha_i}}^1 Z_{w_i}^1$,

donc $\psi(Z_{w'} Z_{w'}^-) = \psi(Z_{w'}^1) \psi(Z_{w'}^-)$.

Lemme 7:

$$\left| \text{Ker } \psi = H^{(1)+} \cdot H \right.$$

Démonstration:

Nous avons remarqué que $\text{Ker } \psi$ était égal à H_1 .

Soit $w = w^{(1)} w'$, avec $\ell(w^{(1)}) = n \geq 1$. Le lemme 5 montre que:

$$Z_w = Z_{w^{(1)}} Z_{w'} + \sum_{\substack{\ell(w_i' w_i) = \ell(w) \\ \ell(w_i') > n \\ a_i \in \mathbb{Z}}} a_i Z_{w_i} Z_{w'}.$$

D'où par récurrence: $Z_w = Z_{w^{(1)}} Z_{w'} + \sum_{\substack{\ell(w_j' w_j) = \ell(w) \\ \ell(w_j') > n \\ b_j \in \mathbb{Z}}} b_j Z_{w_j} Z_{w'} Z_{w'}^-$,

donc $H_1 = H^{(1)+} \cdot H$.

Proposition 3:

La suite d'anneaux gradués $H^{(1)} \xrightarrow{\psi} H \rightarrow H'$ est exacte.

Démonstration:

Claire d'après les lemmes.

Remarque:

L'homomorphisme de \mathbb{Z} -modules de $H^{(1)} \otimes_{\mathbb{Z}\text{-mod}} H'$ dans H , défini par:

$$\mathbb{Z}_W(1) \otimes_{\mathbb{Z}_W} \mathbb{Z}_W' \rightarrow \mathbb{Z}_W(1) \otimes_{\mathbb{Z}_W} \mathbb{Z}_W'$$
 est un isomorphisme.

§3 . Interprétation géométrique de la suite $H^{(1)} \rightarrow H \rightarrow H'$.

Soient: \underline{k} un corps algébriquement clos, G un \underline{k} -groupe réductif, T un tore maximal de G , B un groupe de Borel de G contenant T , P un sous-groupe parabolique de G contenant B , M le groupe des caractères de T , $\mathcal{R} = (M, R, \rho)$ le système de racines précisé correspondant, W le groupe de Weyl de G par rapport à T ($W = \text{Norm}_G T/T$), W' le sous-groupe de W correspondant à P , $A(G/T)$ (resp. $A(G/B)$, $A(G)$) l'anneau de Chow de la variété G/T (resp. G/B , G), $(A(G/T) = A(G/B))$.

Le foncteur A (considéré comme foncteur contravariant) transforme la suite $P/B \xrightarrow{f} G/B \xrightarrow{g} G/P$ en $A(G/P) \xrightarrow{g^*} A(G/B) \xrightarrow{f^*} A(P/B)$.

L'interprétation géométrique des invariants symétriques entiers des groupes de Weyl ((1), p.300) permet d'identifier $A(G/B)$ à l'anneau de cohomologie H du système de racines \mathcal{R} . Plus précisément, l'application de H dans $A(G/B)$ qui à \mathbb{Z}_W associe $X_{w_0 w}$ (classe de l'adhérence de la cellule de Bruhat $Bw_0 wB/B$, où w_0 est l'élément de longueur maximale de W relativement à T) est un isomorphisme d'anneaux.

Si L est l'unique sous-groupe de Levi tel que $T \subset L \subset P$, alors P/B s'identifie à $L/B \cap L$, $B \cap L$ est un groupe de Borel de L , L est réductif et son système de racines est isomorphe au sous-système de \mathcal{R} définissant P .

$A(P/B)$ s'identifie donc au H' précédemment défini .

L'image par f^* de $X_{w_0 w}$ est la classe de l'image de l'intersection d'un translaté de $\overline{Bw_0 wB}$ et de P dans le quotient par B .

Vu que $P = \overline{Bw_0 B}$, ceci revient à faire le produit dans H de Z_w par $Z_{w_0 w'}$, w' étant l'élément de plus grande longueur de W' .

Soit $w_0^{(1)} = w_0 w'$ le plus grand élément de $W^{(1)}$. Le lemme 5 nous montre que si w appartient à W' alors $Z_w Z_{w_0^{(1)}} = Z_{w_0^{(1)}} w$, zéro sinon.

Donc $f^*(X_{w_0 w}) = X_{w_0 w}$ si $w \in W'$, $f(X_{w_0 w}) = 0$ si $w \notin W'$. Ceci montre que $A(G/B) \xrightarrow{f^*} A(P/B)$ s'identifie à $H \xrightarrow{\psi} H'$. On a $G/P = \bigcup_{w \in W} BwP/P$, donc $A(G/P)$ est engendré par les classes des $\overline{BwP/P}$, soit Y_w ces classes. $Bw_0 wP = \bigcup_{w' \in W'} Bw_0 wB \cdot Bw'B \subset \overline{Bw_0 w^{(1)} B}$, si $w^{(1)}$ est le plus petit élément de la classe de w modulo W' .

Donc: la famille des $Y_{w_0 w^{(1)}}$ forme une base de $A(G/P)$.

$$\bullet \quad g^*(Y_{w_0 w^{(1)}}) = X_{w_0 w^{(1)}}$$

$A(G/P) \xrightarrow{g^*} A(G/B)$ s'identifie donc à $H^{(1)} \hookrightarrow H$.

En résumé, l'interprétation géométrique de la suite

$$H^{(1)} \hookrightarrow H \xrightarrow{\psi} H' \text{ est la suite } A(G/P) \xrightarrow{g^*} A(G/B) \xrightarrow{f^*} A(P/B).$$

§4 . Calcul de H si R est de type B_n.



Les notations seront celles de (3) chapitre 6.

Si s_i est la symétrie par rapport à la racine simple α_i

posons: $x_i = Z_{s_{n-i+1} s_{n-i+2} \dots s_{n-1} s_n}$,

$$\eta_i = c(\mathcal{E}_i),$$

σ_j le polynôme symétrique élémentaire, en les η_i ,

de degré j .

On a alors:

Théorème 1:

Si R est de type B_n, $H = \underline{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n] / \mathcal{J}$

où \mathcal{J} est l'idéal (facteur direct) engendré par:

$$2x_i - \sigma_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

$$x_{2i} + (-1)^i x_i^2 + 2 \sum_{p=1}^{i-1} (-1)^p x_p x_{2i-p}, \quad 2 \leq 2i \leq n,$$

$$(-1)^i x_i^2 + 2 \sum_{p=2i-n}^{i-1} (-1)^p x_p x_{2i-p}, \quad n < 2i \leq 2n-2.$$

Remarque:

Nous démontrerons le théorème par récurrence sur n en faisant intervenir la suite exacte $(H^{(1)}, H, H')$ précédemment décrite en faisant apparaître le système B_{n-1} contenu dans B_n . Nous utiliserons simplement le fait que H' est engendré par $(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}, \eta'_2, \eta'_3, \dots, \eta'_n)$.

Dans le cas $n=3$, H' est l'anneau de cohomologie du système B_2 .

Le \underline{Z} -module H' a pour base: $(e, Z_{s_2}, Z_{s_3}, Z_{s_2 s_3}, Z_{s_3 s_2}, Z_{s_2 s_3 s_2},$

$Z_{s_3 s_2 s_3}, Z_{s_2 s_3 s_2 s_3})$, avec:

$$Z_{s_2} = \eta'_2, \quad Z_{s_3} = x'_1.$$

D'après (2) 4.4, il vient:

$$Z_{s_2 s_3} Z_{s_2 s_3} = Z_{s_2 s_3} + Z_{s_3 s_2}, \quad Z_{s_3}^2 = Z_{s_2 s_3}, \quad Z_{s_2} Z_{s_3 s_2} = Z_{s_2 s_3 s_2},$$

$$Z_{s_3} Z_{s_2 s_3} = Z_{s_3 s_2 s_3}, \quad Z_{s_3} Z_{s_2 s_3 s_2} = Z_{s_2 s_3 s_2 s_3}.$$

Soit encore: $Z_{s_2 s_3} = x_1'^2,$

$$Z_{s_3 s_2} = x_1'(\eta_2' - x_1'),$$

$$Z_{s_2 s_3 s_2} = x_1' \eta_2' (\eta_2' - x_1'),$$

$$Z_{s_3 s_2 s_3} = x_1'^3,$$

$$Z_{s_2 s_3 s_2 s_3} = \eta_2' x_1'^2 (\eta_2' - x_1').$$

H' est donc engendré par (x_1', η_2') , l'hypothèse de récurrence est donc réalisée pour $n=3$.

Lemme 8:

$$W^{(1)} = \left\{ e, s_1, s_2 s_1, s_3 s_2 s_1, \dots, s_n s_{n-1} s_{n-2} \dots s_2 s_1, s_{n-1} s_n s_{n-1} \dots s_2 s_1, \dots \right. \\ \left. \dots, s_1 s_2 s_3 \dots s_{n-1} s_n s_{n-1} \dots s_2 s_1 \right\}$$

Démonstration:

$$\#W = 2^n n!, \quad \#W' = 2^{n-1} (n-1)!, \quad \text{donc } \#W^{(1)} = 2n.$$

Les éléments de W désignés dans le lemme n'ont qu'une seule écriture réduite possible. Cette écriture faisant apparaître à l'extrême droite s_1 , ils sont à l'évidence les plus petits dans leur classe. Comme d'autre part ils sont en nombre égal au cardinal de $W^{(1)}$, cela démontre le lemme.

Proposition 4:

$$H^{(1)} = \mathbb{Z}[Z_{s_1}, a] / (Z_{s_1}^{2n} = 0, Z_{s_1}^n = 2a, a^2 = 0).$$

Démonstration:

$H^{(1)}$ est un anneau gradué dans lequel tous les \underline{Z} -modules $H^{(1)^i}$, ($0 \leq i \leq 2n-1$), sont de dimension 1. Si on appelle Z_p l'élément de base de degré p , ($Z_p = Z_{w_p}$ avec $w_p \in W^{(1)}$ et $l(w_p) = p$), on a

donc $Z_{s_1} Z_p = q Z_{p+1}$, $q \in \underline{Z}$. Et donc d'après (2) 4.4:

$$q = (w_p^{-1}(\alpha_{p+1}^\vee | \omega_1)) \text{ si } p < n, \quad q = (w_p^{-1}(\alpha_{2n-p-1}^\vee | \omega_1)) \text{ si } p \geq n,$$

ω_1 étant le poids fondamental attaché à α_1 , soit

$$q = (\alpha_{p+1}^\vee |_{w_p}(\omega_1)) \text{ si } p < n, \quad q = (\alpha_{2n-p-1}^\vee |_{w_p}(\omega_1)) \text{ si } p \geq n.$$

Or, $\omega_1 = \varepsilon_1$, donc $w_p(\omega_1) = \varepsilon_{p+1}$ si $p < n$, et $w_p(\omega_1) = -\varepsilon_{2n-p}$ si $p \geq n$.

D'où: $q = (\alpha_{p+1}^\vee |_{w_p}(\omega_1)) = \langle \varepsilon_{p+1} - \varepsilon_{p+2} | \varepsilon_{p+1} \rangle = 1$, pour $p < n-1$,

$$q = (\alpha_n^\vee |_{w_{n-1}}(\omega_1)) = \langle 2\varepsilon_n | \varepsilon_n \rangle = 2, \text{ pour } p = n-1;$$

$$q = (\alpha_{2n-p-1}^\vee |_{w_p}(\omega_1)) = \langle \varepsilon_{2n-p-1} - \varepsilon_{2n-p} | -\varepsilon_{2n-p} \rangle = 1, \text{ pour } p \geq n,$$

d'où $Z_p = Z_1^p$ si $p < n$, $Z_p = \frac{1}{2} Z_1^p$ si $p \geq n$. Soit encore:

$$Z_{s_n s_{n-1} \dots s_2 s_1} = c \left(\frac{1}{2} \varepsilon_1^n \right).$$

$H^{(1)}$ est donc engendré par Z_n et $Z_1 = \eta_1$. Avec l'hypothèse de récurrence : H' est engendré par $(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}, \eta'_2, \eta'_3, \dots, \eta'_n)$, on a:

Corollaire:

H est engendré par $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, Z_{s_n s_{n-1} \dots s_1})$.

Démonstration:

Claire d'après les propositions 2 et 4.

Corollaire:

Si w_p est l'élément de $W^{(1)}$ de longueur p , on a dans $H^{(1)}$

$$Z_{w_p} = Z_{s_1}^p \text{ si } p < n, \quad Z_{w_p} = \frac{1}{2} Z_{s_1}^p \text{ si } p \geq n.$$
Lemme 9:

$Z_{s_n s_{n-1} \dots s_2 s_1} = c \left(\frac{1}{2} \varepsilon_1^n \right)$, et $Z_{s_i s_{i+1} \dots s_n} = \frac{1}{2} \sigma_{n-i+1}$, $1 \leq i \leq n$,
où σ_j est l'image par c du polynôme symétrique élémentaire A_j de degré j en les ε_i .

Démonstration:

Nous avons vu dans la démonstration de la proposition 4 que $Z_{s_n s_{n-1} \dots s_2 s_1}$ était égale à $c(\frac{1}{2} \varepsilon_1^n)$.

• Si α est une racine simple $D_{s_\alpha}(\lambda_j) = 2\lambda_{j-1}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}, 0) \delta_{\alpha, \alpha_n}$
 λ_j est en effet invariant par les symétries autres que celle par rapport à α_n puisque celles-ci permutent les ε_k . Par ailleurs:
 $\lambda_j = \varepsilon_n \lambda_{j-1}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}, 0) + \lambda_j(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}, 0)$, $D_{s_{\alpha_n}}(\varepsilon_n) = 2$,
 $D_{s_{\alpha_n}}(\lambda_{j-1}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}, 0)) = 0$, $D_{s_{\alpha_n}}(\lambda_j(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}, 0)) = 0$,
 donc: $D_{s_{\alpha_n}}(\lambda_j) = 2\lambda_{j-1}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}, 0)$.

• Si α est une racine simple et k tel que $1 \leq k < n$,
 $D_{s_\alpha}(\lambda_j(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, 0, \dots, 0)) = \delta_{\alpha, \alpha_k} \lambda_{j-1}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1}, 0, \dots, 0)$.
 En effet les symétries élémentaires autres que s_{α_k} laissent stables les deux familles $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ $(\varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_n)$.

La formule $c(u) = \sum_{w \in W} \varepsilon D_w(u) Z_w$ (Cf. (1) Prop.3 Cor.4)

permet de conclure.

Lemme 10:

Dans H , on a: $Z_{s_n s_{n-1} \dots s_1} + Z_{s_1 s_2 \dots s_n} \in H^1 \cdot H$.

Démonstration:

$$\begin{aligned} Z_{s_n s_{n-1} \dots s_1} + Z_{s_1 s_2 \dots s_n} &= \frac{1}{2} c(\varepsilon_1^n + \lambda_n) \\ &= c(\varepsilon_1) c\left(\frac{1}{2}(\varepsilon_1^{n-1} + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \dots \varepsilon_n)\right) \\ &= Z_{s_1} c\left(\frac{1}{2}(\varepsilon_1^{n-1} + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \dots \varepsilon_n)\right). \end{aligned}$$

Reste à montrer que $c(\frac{1}{2}(\varepsilon_1^{n-1} + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \dots \varepsilon_n))$ appartient à H , en d'autres termes, que $\varepsilon D_w(\frac{1}{2}(\varepsilon_1^{n-1} + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \dots \varepsilon_n))$ est entier pour tout w .

Si w peut s'écrire $w's_\alpha$ avec $l(w) = l(w') + 1$, on a:

$\varepsilon D_w \left(\frac{1}{2}(\varepsilon_1^{n-1} + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \dots \varepsilon_n) \right) = 0$ si α est un racine simple autre que α_1 et α_n , puisque $(\varepsilon_1^{n-1} + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \dots \varepsilon_n)$ est invariant par s_α .

Si $w = w's_{\alpha_n}$ avec $l(w) = l(w') + 1$, on a:

$$\begin{aligned} \varepsilon D_w \left(\frac{1}{2}(\varepsilon_1^{n-1} + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \dots \varepsilon_n) \right) &= \varepsilon D_{w'} D_{s_{\alpha_n}} \left(\frac{1}{2}(\varepsilon_1^{n-1} + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \dots \varepsilon_n) \right) \\ &= \varepsilon D_{w'} (\varepsilon_2 \varepsilon_3 \dots \varepsilon_{n-1}) \in \underline{Z}. \end{aligned}$$

Si enfin $w = w's_{\alpha_1}$ avec $l(w) = l(w') + 1$, et ne peut s'écrire

d'aucune des deux manières précédentes, c'est que w est l'unique élément de $W^{(1)}$ de longueur $n-1$ soit: $w = s_{n-1} s_{n-2} \dots s_2 s_1$ et

$$D_w = D_{s_{n-1}} D_{s_{n-2}} \dots D_{s_2} D_{s_1}.$$

$$D_{s_1} \left(\frac{1}{2}(\varepsilon_1^{n-1} + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \dots \varepsilon_n) \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{\sum \alpha_i = n-2} \varepsilon_1^{\alpha_1} \varepsilon_2^{\alpha_2} - \varepsilon_3 \varepsilon_4 \dots \varepsilon_n \right)$$

$$\frac{1}{2} D_{s_2} \left(\sum_{\sum \alpha_i = n-2} \varepsilon_1^{\alpha_1} \varepsilon_2^{\alpha_2} - \varepsilon_3 \varepsilon_4 \dots \varepsilon_n \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{\sum \alpha_i = n-3} \varepsilon_1^{\alpha_1} \varepsilon_2^{\alpha_2} \varepsilon_3^{\alpha_3} + \varepsilon_4 \varepsilon_5 \dots \varepsilon_n \right)$$

.....

$$\frac{1}{2} D_{s_{n-1}} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{n-1} + (-1)^n \varepsilon_n) = 0 \text{ si } n \text{ est pair,}$$

1 si n est impair.

Donc $c \left(\frac{1}{2}(\varepsilon_1^{n-1} + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \dots \varepsilon_n) \right) \in H$.

Cela montre qu'on peut remplacer dans H le générateur

$Z_{s_n s_{n-1} \dots s_1}$ par le générateur $Z_{s_1 s_2 \dots s_n}$, plus précisément:

Proposition 5:

H est engendré par $(x_1, x_2, \dots, x_n, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$,

plus précisément:

$$H = \underline{Z} [x_1, x_2, \dots, x_n, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n] / \bar{J}$$

où \bar{J} est le plus petit idéal facteur direct contenant:

$$2x_i - \sqrt{i}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad \zeta_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Les notations étant celles du théorème 1, ζ_i étant le polynôme symétrique élémentaire de degré i en les η_k .

Démonstration:

Le noyau de c est l'idéal engendré par les polynômes invariants sous l'action du groupe de Weyl, à savoir les polynômes symétriques en les carrés des variables. Donc:

$H = S(M) / \{S(M)^W S(M)\} [x_1, x_2, \dots, x_n]$, avec $2x_i = \sigma_i$, $\{S(M)^W S(M)\}$ désignant le facteur direct engendré par l'idéal $S(M)^W S(M)$, ce qui démontre la proposition.

Considérons l'élément $S(t)$ de $H[t]$, défini par:

$$S(t) = \sum_{i=0}^n \sigma_i t^i = \prod_{i=0}^n (1 + \eta_i t).$$

Tout élément de H^+ étant nilpotent, $(1 + \eta_i t)$ et donc $S(t)$ sont inversibles. Considérons $\frac{S'(t)}{S(t)} = \sum_i \frac{\eta_i}{1 + \eta_i t}$
 $= \sum_i \eta_i (1 + \eta_i t + \eta_i^2 t^2 + \eta_i^3 t^3 + \dots)$
 $= (\sum \eta_i) + t(\sum \eta_i^2) + t^2(\sum \eta_i^3) + \dots$

Mais $\sum \eta_i^{2k} = 0$, donc $\frac{S'(t)}{S(t)}$ est paire, soit: $\frac{S'(t)}{S(t)} = \frac{S'(-t)}{S(-t)}$,

soit encore: $S'(t)S(-t) - S(t)S'(-t) = 0$. $S(t)S(-t)$ est donc constant: $S(t)S(-t) = 1$.

Définissons $S_+(t)$ et $S_-(t)$ par:

$$S_+(t) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{\sigma_{2i}}{2} t^{2i} = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} x_{2i} t^{2i},$$

$$S_-(t) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{\sigma_{2i+1}}{2} t^{2i+1} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} x_{2i+1} t^{2i+1}.$$

On a:

$$\frac{1}{2}S(t) = \frac{1}{2} + S_+(t) + S_-(t), \quad \frac{1}{2}S(-t) = \frac{1}{2} + S_+(t) - S_-(t).$$

$$\text{Donc: } \frac{1}{4} = \frac{1}{4}S(t)S(-t) = \frac{1}{4} + S_+(t) + S_+^2(t) - S_-^2(t),$$

$$\text{soit: } S_+(t) = S_-^2(t) - S_+^2(t).$$

Soit encore:

$$(I) \begin{cases} x_{2i} = (-1)^{i+1} x_i^2 + 2 \sum_{p=1}^{i-1} (-1)^{p+1} x_{2i-p} x_p, & 2 \leq 2i \leq n, \\ 0 = (-1)^i x_i^2 + 2 \sum_{p=2i-n}^{i-1} (-1)^p x_{2i-p} x_p, & n < 2i \leq 2n. \end{cases}$$

Ces égalités qui expriment la parité de $\frac{S'(t)}{S(t)}$ sont donc équivalentes à la nullité des $\sum \eta_i^{2k}$, elles-mêmes, grâce aux formules de Newton, équivalentes à la nullité des τ_i .

Pour achever la démonstration du théorème 1, il suffit donc de montrer que le quotient de $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n, \eta_1, \dots, \eta_n]$ par l'idéal \mathcal{J} est sans torsion.

Notation:

$$\left| \begin{array}{l} \cdot A = \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n] / \mathcal{J}, \text{ où } \mathcal{J} \text{ est l'idéal engendré par (I),} \\ \cdot x_L = \prod_{i \in L} x_i, \quad L \subset \{1, 2, \dots, n\} \end{array} \right.$$

Lemme 11:

$$\left| \text{Le } \mathbb{Z}\text{-module } A \text{ est engendré par la famille } \{x_L\}_{L \subset \{1, 2, \dots, n\}} \right.$$

Démonstration:

Soit A' le \mathbb{Z} -module engendré par les x_L . Il suffit pour montrer que $A = A'$ de démontrer que:

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \forall L \subset \{1, 2, \dots, n\}; x_i x_L \in A'.$$

Munissons $\{1, \dots, n\} \times \mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$ de la relation d'ordre totale suivante:

$$(i, L) < (j, L') \Leftrightarrow \begin{cases} \#L < \#L' \\ \text{ou} \\ \#L = \#L' \text{ et } i > j \\ \text{ou} \\ \#L = \#L', i = j \text{ et } \inf(L \Delta L') \in L \end{cases}$$

Opérons par récurrence:

1°/ Si $\#L=1; \forall i, x_i x_L \in A'$. En effet, soit i n'appartient pas à L et $x_i x_L = x_{\{i\} \cup L}$, soit i appartient à L et

$$x_i x_L = x_i^2 = -2 \sum (-1)^{p-i} x_{2i-p} x_p + (-1)^{i+1} x_{2i}.$$

2°/ $x_n x_L \in A'$. En effet, soit n n'appartient pas à L et

$$x_n x_L = x_{\{n\} \cup L}, \text{ soit } n \text{ appartient à } L \text{ et } x_n x_L = x_n^2 x_L = 0.$$

3°/ Supposons que $x_i x_L \in A'$ pour tout (i, L) strictement inférieur à (k, R) .

. $k \notin R$, alors $x_k x_R = x_{\{k\} \cup R} \in A'$.

. $k \in R$, alors $x_k x_R = x_k^2 x_R$, avec $\#R' = \#R - 1$

$$= (-1)^{k+1} x_{2k} x_R, -2 \sum (-1)^{p-k} x_{2k-p} (x_p x_R),$$

$x_h x_R$, appartient à A' par hypothèse de récurrence pour tout h .

Dans la décomposition de $x_p x_R$, n'interviennent que des éléments

x_M avec $\#M \leq \#R' + 1$, soit $\#M \leq \#R$ et $2k - p$ est supérieur à k ,

donc: $x_{2k-p} (x_p x_R) \in A'$ et donc $x_k x_R \in A'$.

$\{x_L\}_{L \subset \{1, \dots, n\}}$ est donc une famille génératrice de A en tant que \mathbb{Z} -module.

Si $B = A[\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n] / (2x_i = \sigma_i)$, H est le quotient du

\mathbb{Z} -module B par son sous-module de torsion. Mais :

$$\dim_{\mathbb{Z}} H = \#W = 2^n n!, \quad \dim_A B = n! \quad (\text{en effet } B \text{ est le } A\text{-module}$$

libre des racines d'un polynôme de degré n sur A).

$$\dim_{\mathbb{Z}} L(A) \leq \#(\{x_L\}_{L \subset \{1, \dots, n\}}) = 2^n, \text{ où } L(A) \text{ est le quotient de}$$

A par son sous-module de torsion. Et $\dim_{\mathbb{Z}} H = \dim_{\mathbb{Z}} L(A) \cdot \dim_A B$.

Donc: $\dim_{\mathbb{Z}} L(A) = 2^n$, la famille x_L est une base du \mathbb{Z} -module

A , B est un \mathbb{Z} -module libre et $H = B$.

Ceci achève la démonstration du théorème 1.



§5 . Calcul de $T_M(H)$ dans le cas B_n .

Définition:

Si (M, R, ρ) est un système de racines réduit précisé, H l'anneau de cohomologie de R et c l'homomorphisme caractéristique, notons:

$$T_M(H) = H / c(S(M)^+).H$$

Remarque:

On a toujours $T_M(H)^0 = \mathbb{Z}$. Dans la suite nous déterminerons donc $T_M(H)^+$.

Théorème 2:

Si R est de type B_n , et $M = Q(R) = \sum_{i=1}^n \mathbb{Z}\varepsilon_i$,

$$T_M(H)^+ = \mathbb{F}_2 \left[X_1, X_3, \dots, X_{2k+1}, \dots, X_{2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1}} \right]^+ / (X_i^{p_i} = 0),$$

avec: $p_i = 2^{\lfloor \log_2 \frac{n}{i} \rfloor + 1}$, X_i l'image de x_i dans $T_M(H)$.

Corollaire 1:

Si R est de type B_n , et $M = P(R) = \sum_{i=1}^n \mathbb{Z}\varepsilon_i + \mathbb{Z} \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n}{2}$,

$$T_M(H)^+ = \mathbb{F}_2 \left[X_3, X_5, \dots, X_{2k+1}, \dots, X_{2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1}} \right]^+ / (X_i^{p_i} = 0).$$

Corollaire 2:

L'indice de torsion d'un système de type B_n (Cf. (1) p.294) divise $2^{n - \lfloor \log_2 n \rfloor - 1}$.

Démonstration:

. Il est clair que $T_{Q(R)}(H)$ est le quotient de H par l'idéal engendré par les η_i .

Vu le théorème 1, $T_{Q(R)}(H) = \mathbb{Z} \left[x_1, \dots, x_n, \eta_1, \dots, \eta_n \right] / \mathcal{K}$
où \mathcal{K} est l'idéal engendré par:

- (1) $\eta_i, 1 \leq i \leq n,$
 (2) $2X_i, 1 \leq i \leq n,$
 (3) $X_{2i} - X_i^2, 2 \leq 2i \leq n,$
 (4) $X_i^2, n < 2i \leq 2n.$

Si $j = 2^l(2k+1)$, avec j inférieur ou égal à n , ceci montre que : $X_j = X_{2^{l-1}(2k+1)}^2 = \dots = X_{2k+1}^{2^l}$. Et les relations (3') est

équivalente à (3):

$$(3') \quad X_{2^l(2k+1)}^2 = X_{2k+1}^{2^l}, \quad 1 \leq 2^l(2k+1) \leq n.$$

(4) s'écrit alors (4'):

$$(4') \quad X_{2k+1}^{2^l} = 0, \quad n < 2^l(2k+1) \leq 2n, \quad 1 \leq 2k+1 \leq n.$$

Mais k étant fixé tel que $2k+1$ soit inférieur ou égal à n , il existe un unique l tel que: $n < 2^l(2k+1) \leq 2n$. C'est:

$$l_k = \left[\log_2 \left(\frac{n}{2k+1} \right) \right] + 1, \quad \text{d'où (4'')}$$

$$(4'') \quad X_{2k+1}^{2^{l_k}} = 0, \quad 0 \leq k \leq \left[\frac{n+1}{2} \right] - 1.$$

Ceci achève la démonstration du théorème 2.

. Le corollaire 1 est clair si l'on remarque que:

X_1 est l'image de $x_1 = c\left(\frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)\right)$ et que $P(R)$ est engendré par $\frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)$ et $Q(R)$.

. Pour démontrer le corollaire 2 montrons tout

d'abord qu'une partie génératrice du $c(S(P(R)))$ -module H est

constituée par la famille des monômes du type: $x_L = \prod_{i \in L} x_i,$
 $L \subset \{1, 2, \dots, n\}, \quad L \cap \{1, 2, 4, 8, \dots, 2^l, \dots\} = \emptyset.$

Il est à noter que la famille des $X_L = T_H(x_L)$, pour L non vide, forme une base du \underline{F}_2 -espace vectoriel $T_{P(R)}(H)^+$.

Les éléments homogènes de degré 1 ou 2 sont combinaisons linéaires d'éléments de type x_L à coefficients dans $c(S(P(R)))$ (c est surjective en ces degrés).

Supposons que les éléments de H de degré inférieur ou égal à p soient combinaisons linéaires d'éléments de type x_L .

$$\text{Soit } x \in H^{p+1}, T_H(x) = \sum_L \lambda_L x_L.$$

D'où $y = x - \sum_L \lambda_L x_L \in c(S(P(R)))^+ \cdot H$. Soit $y = \sum_i y_i y_i'$, avec:
 $y_i \in c(S(P(R)))^+, y_i' \in H, d^\circ y_i' < d^\circ y = p+1$.

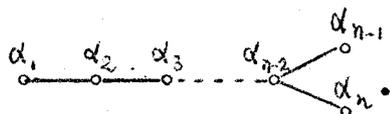
Les y_i' sont donc combinaison linéaire à coefficients dans $c(S(P(R)))$ des x_L . Il en est donc de même de y et de x .

L'indice de torsion $t_{\mathcal{R}}$ étant le plus petit entier t tel que $tH \subset c(S(P(R)))$, on voit que c'est aussi le plus petit entier tel que: $tx_L \in c(S(P(R)))$, pour tout L . On sait que pour tout i , $2x_i \in c(S(P(R)))$ et $d^\circ x_L \leq n - \lfloor \log_2 n \rfloor - 1$, donc $2^{n - \lfloor \log_2 n \rfloor - 1} x_L$ appartient à $c(S(P(R)))$ pour tout L , et $t_{\mathcal{R}}$ divise ce nombre.

Remarque:

Dans les cas B_5, B_6 et B_7 , $t_{\mathcal{R}}$ divise strictement le nombre indiqué dans le corollaire.

§6 . Calcul de H si R est de type D_n .



Les notations sont toujours celles de (3) chapitre 6.

Si s_i est la symétrie par rapport à la racine simple α_i .

posons: $x_i = Z_{s_{n-i} s_{n-i+1} \dots s_{n-3} s_{n-2} s_n}, 2 \leq i \leq n-1,$

$$x_1 = Z_{s_n},$$

$$\eta_i = c(\xi_i), 1 \leq i \leq n,$$

σ_j le polynôme symétrique élémentaire, en les η_i ,

de degré j .

Théorème 3:

Si R est de type D_n , $H = \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n] / \mathcal{J}$,
où \mathcal{J} est l'idéal (facteur direct) engendré par:

$$2x_i - \sigma_i, 1 \leq i \leq n-1,$$

$$x_{2i}^2 + (-1)^i x_i^2 + 2 \sum_{p=1}^{i-1} (-1)^p x_p x_{2i-p}, 2 \leq 2i \leq n-1,$$

$$(-1)^i x_i^2 + 2 \sum_{p=2i-n+1}^{i-1} (-1)^p x_p x_{2i-p}, n \leq 2i \leq 2n-2,$$

$$\sigma_n.$$

Remarque:

La démonstration du théorème 3 sera très exactement calquée sur celle du théorème 1, nous ne donnerons donc à chaque étape qu'une éventuelle démonstration allégée. La récurrence se fera encore sur n en faisant apparaître le système D_{n-1} contenu dans le système D_n . Nous utiliserons simplement le fait que H' est engendré par $(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}, \eta'_2, \dots, \eta'_n)$.

Dans le cas $n=4$, H' est l'anneau de cohomologie du système A_3 .

D'après (1) lemme 5, l'anneau de cohomologie d'un système A_n est engendré par ses éléments homogènes de degré 1. L'hypothèse de récurrence est donc bien remplie pour $n=4$.

Lemme 12:

Si R est de type D_n , $W^{(1)} = \left\{ e, s_1, s_2 s_1, \dots, s_{n-2} s_{n-3} \dots s_1, \right.$
 $s_{n-1} s_{n-2} s_{n-3} \dots s_1, s_n s_{n-2} s_{n-3} \dots s_1, s_n s_{n-1} s_{n-2} s_{n-3} \dots s_1,$
 $\left. s_{n-2} s_n s_{n-1} s_{n-2} \dots s_1, \dots, s_1 s_2 \dots s_{n-2} s_n s_{n-1} s_{n-2} \dots s_2 s_1 \right\}.$

Démonstration:

Voir lemme 8.

Notations:

Soient: $u = Z_{s_{n-1} s_{n-2} \dots s_1}$, $v = Z_{s_n s_{n-2} \dots s_1}$, les deux générateurs de degré $n-1$ de $H^{(1)}$.

Proposition 6:

$H^{(1)} = \underline{Z} [Z_{s_1}, u, v]$ avec:

$$Z_{s_1}^{2n-1} = 0$$

$$Z_{s_1} u = Z_{s_1} v = \frac{1}{2} Z_{s_1}^n = Z_{s_n s_{n-1} s_{n-2} \dots s_2 s_1},$$

$$u + v = Z_{s_1}^{n-1},$$

$$u = \frac{1}{2} c(\mathcal{E}_1^{n-1} + \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_3 \mathcal{E}_4 \dots \mathcal{E}_n),$$

$$v = \frac{1}{2} c(\mathcal{E}_1^{n-1} - \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_3 \mathcal{E}_4 \dots \mathcal{E}_n),$$

si n est pair:

$$u^2 = v^2 = 0,$$

$$uv = \frac{1}{2} Z_{s_1}^{2n-2}.$$

si n est impair:

$$u^2 = v^2 = \frac{1}{2} Z_{s_1}^{2n-2},$$

$$uv = 0.$$

Interprétation géométrique:

G/P est une quadrique d'anneau de Chow $H^{(1)}$.

Démonstration:

Par des procédés semblables à ceux de la proposition 4, il est clair que: $Z_{s_1}^p = Z_{s_p s_{p-1} \dots s_1}$, $p \leq n-2$,

$$Z_{s_1}^{n-1} = u+v,$$

$$Z_{s_1}^p u = Z_{s_{n-p} s_{n-p+1} \dots s_{n-2} s_n s_{n-1} s_{n-2} \dots s_1}, \quad p < n,$$

$$u = \frac{1}{2} c(\epsilon_1^{n-1} + \epsilon_2 \epsilon_3 \dots \epsilon_n).$$

Reste à calculer u^2 , v^2 et uv .

$$u^2 = \frac{1}{4} c(\epsilon_1^{2n-2} + 2\epsilon_1^{n-2} \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \dots \epsilon_n + \epsilon_2^2 \epsilon_3^2 \dots \epsilon_n^2) = \frac{1}{4} c(\epsilon_1^{2n-2} + \epsilon_2^2 \epsilon_3^2 \dots \epsilon_n^2),$$

$$v^2 = \frac{1}{4} c(\epsilon_1^{2n-2} - 2\epsilon_1^{n-2} \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \dots \epsilon_n + \epsilon_2^2 \epsilon_3^2 \dots \epsilon_n^2) = \frac{1}{4} c(\epsilon_1^{2n-2} + \epsilon_2^2 \epsilon_3^2 \dots \epsilon_n^2),$$

$$uv = \frac{1}{4} c(\epsilon_1^{2n-2} - \epsilon_2^2 \epsilon_3^2 \dots \epsilon_n^2).$$

(notons que les invariants symétriques de D_n sont les polynômes symétriques des carrés des variables et le produit des variables, donc $c(\epsilon_1 \dots \epsilon_n) = 0$)

Mais:

$$\epsilon_2^2 \epsilon_3^2 \dots \epsilon_n^2 = \chi_{n-1} - \epsilon_1^2 \chi_{n-2} + \epsilon_1^4 \chi_{n-3} - \dots + (-1)^{n-2} \epsilon_1^{2n-4} \chi_1 + (-1)^{n-1} \epsilon_1^{2n-2}$$

les χ_i étant les polynômes symétriques élémentaires en les carrés des variables ($c(\chi_i) = 0$). Et donc:

$$u^2 = v^2 = (1 + (-1)^{n-1}) \frac{1}{4} c(\epsilon_1^{2n-2}),$$

$$uv = (1 + (-1)^{n-1}) \frac{1}{4} c(\epsilon_1^{2n-2}).$$

Corollaire:

H est engendré par $(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, u, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$.

Lemme 13:

Dans H, on a: $Z_{s_i s_{i+1} \dots s_{n-2} s_n} = \frac{1}{2} c(\sigma_{n-i})$.

Démonstration:

Voir lemme 9.

Lemme 14:

Dans H , on a: $u + x_{n-1} \in H^1 H$.

Démonstration:

$$\begin{aligned} u + x_{n-1} &= \frac{1}{2} c(\mathcal{A}_{n-1} + \mathcal{E}_1^{n-1} + \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_3 \dots \mathcal{E}_n) \\ &= c(\mathcal{E}_2 \mathcal{E}_3 \dots \mathcal{E}_n) + c(\mathcal{E}_1) c\left(\frac{1}{2}(\mathcal{E}_1^{n-2} + \mathcal{A}_{n-2}(0, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n))\right), \end{aligned}$$

où \mathcal{A}_j sont les polynômes symétriques de degré j en les \mathcal{E}_k .

Et comme dans le lemme 10 on montre que pour tout w dans W

$$\frac{1}{2} D_w(\mathcal{E}_1^{n-2} + \mathcal{A}_{n-2}(0, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n)) \text{ est entier.}$$

Proposition 7:

$H = \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \eta_1, \dots, \eta_n] / \mathcal{I}$, où \mathcal{I} est l'idéal
(facteur direct) engendré par: $2x_i - \tau_i, 1 \leq i \leq n,$
 $\tau_i, 1 \leq i \leq n,$
 $\tau_n.$

Démonstration:

Claire.

Comme précédemment la considération de $S(t)$ et la parité de $\frac{S'(t)}{S(t)}$ mettent en évidence les formules:

$$(II) \begin{cases} x_{2i} = (-1)^{i+1} x_i^2 + 2 \sum_{p=1}^{i-1} (-1)^{p+1} x_{2i-p} x_p, & 2 \leq 2i \leq n-1, \\ 0 = (-1)^i x_i^2 + 2 \sum_{p=2i-n}^{i-1} (-1)^p x_{2i-p} x_p, & n \leq 2i \leq 2n-2. \end{cases}$$

Ceci achève la démonstration du théorème 3.

§7 . Calcul de $T_M(H)$ dans le cas D_n .

Soient X_i l'image de x_i dans $T_M(H)$, $p_i = 2^{\left[\log_2 \frac{n-1}{i}\right] + 1}$.

Théorème 4:

Si R est de type D_n et $M = \sum_{i=1}^n \mathbb{Z} \varepsilon_i$,

$$T_M(H)^+ = \mathbb{F}_2 \left[X_1, X_3, \dots, X_{2k+1}, \dots, X_{2^{\left[\frac{n}{2}\right]-1}} \right]^+ / (X_i^{p_i} = 0)$$

Corollaire 1:

Si R est de type D_n et $M = P(R) = \sum_{i=1}^n \mathbb{Z} \varepsilon_i + \mathbb{Z} \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n}{2}$

$$T_M(H)^+ = \mathbb{F}_2 \left[X_3, X_5, \dots, X_{2k+1}, \dots, X_{2^{\left[\frac{n}{2}\right]-1}} \right]^+ / (X_i^{p_i} = 0)$$

Corollaire 2:

L'indice de torsion d'un système de type D_n divise $2^{n - \left[\log_2(n-1)\right] - 2}$.

Démonstration:

Voir théorème 2.

§8 . Interprétation géométrique.

Les notations seront les mêmes que lors de la précédente interprétation géométrique. c_G dénotera l'homomorphisme caractéristique de $S(M)$ dans $A(G/B)$.

• Type B_n .

Si G est de type B_n , soient:

• $w_i = s_{n-i+1} s_{n-i+2} \dots s_{n-1} s_n$, $1 \leq i \leq n$,

• x_i l'élément de $A(G/B)$ classe de l'adhérence de la cellule de Bruhat $Bw_0 w_i B/B$, où w_0 est l'élément de longueur maximum de W relativement à T ,

• y_i l'élément de $A^1(G/B)$ classe de l'adhérence de la cellule de Bruhat $Bw_0 s_i B/B$, $1 \leq i \leq n$,

- $\eta_i = c_G(\mathcal{E}_i)$, $1 \leq i \leq n$,
- σ_j le polynôme symétrique élémentaire de degré j en

les η_i .

Remarque:

On a: $\eta_1 = y_1$,

$$\eta_i = y_i - y_{i-1}, \quad 1 < i < n,$$

$$\eta_n = 2y_n - y_{n-1}.$$

le théorème 1 s'interprète :

Théorème 5:

Si G est de type B_n , on a:

$A(G/B) = \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n] / \mathcal{J}$, où \mathcal{J} est l'idéal engendré par:

$$2x_i - \eta_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

$$x_{2i} + (-1)^i x_i^2 + 2 \sum_{p=1}^{i-1} (-1)^p x_p x_{2i-p}, \quad 2 \leq 2i \leq n,$$

$$(-1)^i x_i^2 + 2 \sum_{p=2i-n}^{i-1} (-1)^p x_p x_{2i-p}, \quad n+1 \leq 2i \leq 2n.$$

• Type D_n .

Si G est de type D_n , soient les notations précédentes avec cette fois:

$$\bullet w_1 = s_n,$$

$$\bullet w_i = s_{n-i} s_{n-i+1} \dots s_{n-3} s_{n-2} s_n, \quad 2 \leq i \leq n-1.$$

Remarque:

On a: $\eta_1 = y_1$,

$$\eta_i = y_i - y_{i-1}, \quad 1 < i < n-1,$$

$$\eta_{n-1} = y_n + y_{n-1} - y_{n-2},$$

$$\eta_n = y_n - y_{n-1}.$$

le théorème 3 s'interprète:

Théorème 6:

Si G est de type D_n , on a:

$A(G/B) = \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \eta_1, \dots, \eta_n] / \mathcal{J}$, où \mathcal{J} est l'idéal

engendré par: $2x_i - \sqrt{-1}$, $1 \leq i \leq n-1$,

$\sqrt{-1}$,

$$x_{2i} + (-1)^i x_i^2 + 2 \sum_{p=1}^{i-1} (-1)^p x_p x_{2i-p}, \quad 2 \leq 2i \leq n-1,$$

$$(-1)^i x_i^2 + 2 \sum_{p=2i-n+1}^{i-1} (-1)^p x_p x_{2i-p}, \quad n \leq 2i \leq 2n-2.$$

La remarque de Grothendieck ((4), p.21 rem.2) permet d'obtenir $A(G)$ comme quotient de $A(G/B)$ par l'idéal engendré par l'image de c_G .

Les théorèmes 2 et 4 s'interprètent donc:

Théorème 7:

Type B_n :

$$A(SO(2n+1))^+ = \mathbb{F}_2[X_1, X_3, X_5, \dots, X_{2\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1}]^+ / (X_i^{p_i} = 0),$$

$$A(\text{Spin}(2n+1))^+ = \mathbb{F}_2[X_3, X_5, \dots, X_{2\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1}]^+ / (X_i^{p_i} = 0),$$

avec: $p_i = 2^{\lfloor \log_2 \frac{n}{i} \rfloor + 1}$.

Type D_n :

$$A(SO(2n))^+ = \mathbb{F}_2[X_1, X_3, X_5, \dots, X_{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}]^+ / (X_i^{p_i} = 0),$$

$$A(\text{Spin}(2n))^+ = \mathbb{F}_2[X_3, X_5, \dots, X_{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}]^+ / (X_i^{p_i} = 0),$$

avec: $p_i = 2^{\lfloor \log_2 \frac{n-1}{i} \rfloor + 1}$.

Corollaire 1:

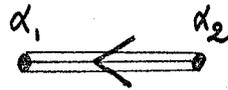
Soit m un entier, soit n tel que: $n = \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$, on a:

l'indice de torsion de $\text{Spin}(m)$ divise $2^{n - \lfloor \log_2 n \rfloor - 1}$.

Corollaire 2:

Si $G = SO(m)$ et $n = \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$; une base du \mathbb{F}_2 -espace vectoriel $A(SO(m))^+$ est constituée par la famille des éléments $x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_n^{q_n}$, avec $q_i \in \{0, 1\}$, $\sum q_i \neq 0$.

§ 8. Calcul de l'anneau de Chow d'un groupe algébrique de type G_2 .

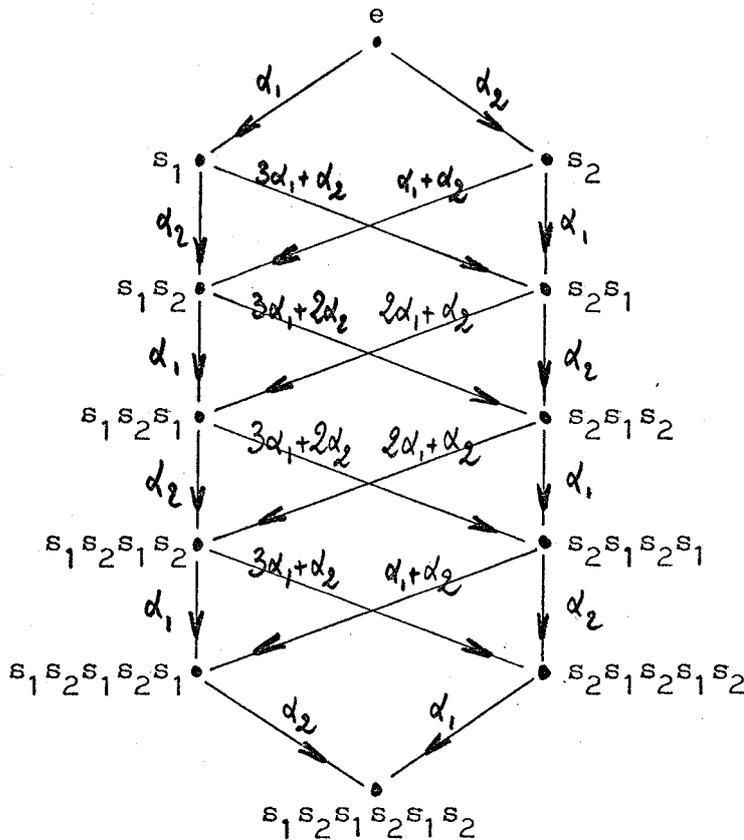


Nous ferons ce calcul directement en utilisant, pour déterminer l'idéal engendré par l'image de c_G , la formule due à Chevalley, démontré dans (2):

$$c_G(\lambda) \cdot Z_w = \sum_{\substack{\alpha \in R_+ \\ l(ws_\alpha) = l(w) + 1}} \langle \alpha^\vee, \lambda \rangle Z_{ws_\alpha},$$

λ étant un élément de M , w un élément de W .

Il faut donc déterminer, w étant donné, les α tels que: $l(ws_\alpha) = l(w) + 1$. Si $w \xrightarrow{\alpha} w'$ correspond à: $w' = ws_\alpha$ et $l(w') = l(w) + 1$, on a le tableau suivant:



si $\lambda = x\alpha_1 + y\alpha_2$, on a: $\langle \alpha_1^V, \lambda \rangle = 2x - 3y$, $\langle \alpha_2^V, \lambda \rangle = -x + 2y$.

On a donc:

$$c(\lambda)Z_{s_1} = (-x+2y)Z_{s_1s_2} + (x-y)Z_{s_2s_1},$$

$$c(\lambda)Z_{s_2} = (-x+3y)Z_{s_1s_2} + (2x-3y)Z_{s_2s_1};$$

$$c(\lambda)Z_{s_1s_2} = yZ_{s_2s_1s_2} + (2x-3y)Z_{s_1s_2s_1},$$

$$c(\lambda)Z_{s_2s_1} = (-x+2y)Z_{s_2s_1s_2} + xZ_{s_1s_2s_1};$$

$$c(\lambda)Z_{s_1s_2s_1} = (-x+2y)Z_{s_1s_2s_1s_2} + yZ_{s_2s_1s_2s_1},$$

$$c(\lambda)Z_{s_2s_1s_2} = xZ_{s_1s_2s_1s_2} + (2x-3y)Z_{s_2s_1s_2s_1};$$

$$c(\lambda)Z_{s_1s_2s_1s_2} = (x-y)Z_{s_2s_1s_2s_1s_2} + (2x-3y)Z_{s_1s_2s_1s_2s_1},$$

$$c(\lambda)Z_{s_2s_1s_2s_1} = (-x+2y)Z_{s_2s_1s_2s_1s_2} + (-x+3y)Z_{s_1s_2s_1s_2s_1};$$

$$c(\lambda)Z_{s_1s_2s_1s_2s_1} = (-x+2y)Z_{s_1s_2s_1s_2s_1s_2},$$

$$c(\lambda)Z_{s_2s_1s_2s_1s_2} = (2x-3y)Z_{s_1s_2s_1s_2s_1s_2}.$$

Dans H^1 , on a:

$$Z_{s_1} = c(2\alpha_1 + \alpha_2), \quad Z_{s_2} = c(3\alpha_1 + 2\alpha_2);$$

dans H^2 , on a:

$$Z_{s_1s_2} = c(\alpha_1 + \alpha_2)Z_{s_1}, \quad Z_{s_2s_1} = c(2\alpha_1 + \alpha_2).$$

Dans H^3 , une base de l'idéal engendré par l'image de c est (a, b) ,

avec $a = 2Z_{s_1s_2s_1}$, $b = Z_{s_1s_2s_1} + Z_{s_2s_1s_2}$. En effet :

$$c(\alpha_1)Z_{s_1s_2} = a, \quad c(\alpha_2)Z_{s_1s_2} = b - 2a, \quad c(\alpha_1)Z_{s_2s_1} = a - b, \quad c(\alpha_2)Z_{s_2s_1} = 2b - a.$$

Dans H^4 , on a:

$$Z_{s_1s_2s_1s_2} = c(-\alpha_1)Z_{s_1s_2s_1}; \quad Z_{s_2s_1s_2s_1} = c(2\alpha_1 + \alpha_2)Z_{s_1s_2s_1};$$

dans H^5 , on a :

$$Z_{s_1 s_2 s_1 s_2 s_1} = c(-\alpha_1 - \alpha_2) Z_{s_1 s_2 s_1 s_2}, \quad Z_{s_2 s_1 s_2 s_1 s_2} = c(3\alpha_1 + 2\alpha_2) Z_{s_1 s_2 s_1 s_2};$$

dans H^6 , on a :

$$Z_{s_1 s_2 s_1 s_2 s_1 s_2} = c(-\alpha_1) Z_{s_1 s_2 s_1 s_2 s_1}.$$

Si \mathcal{M}^i est la composante homogène de degré i de l'idéal (gradué) engendré par l'image de c , on a \mathcal{M}^i égal H^i pour tout i différent de trois, et H^3/\mathcal{M}^3 isomorphe à \underline{F}_2 . Si X_3 est le seul élément non nul de H^3/\mathcal{M}^3 , X_3^2 est nul puisque de degré 6. D'où :

Théorème 8 :

Si G est un groupe réductif de type G_2 , on a :

$$A(G)^+ = \underline{F}_2[X_3]^+ / (X_3^2),$$

où X_3 est l'image par T de l'élément de $A(G/B)$ classe de la cellule de Bruhat $Bw_0 s_1 s_2 s_1 B/B$.

Corollaire :

L'indice de torsion de G_2 est 2.

Démonstration:

Il est à noter, tout d'abord, que les éléments de W cités dans le lemme sont représentés par leur première écriture par ordre lexicographique. Ces écritures étant toutes distinctes, les éléments sont donc bien différents. Ce sont bien des éléments de $W^{(1)}$ car pour chacun d'eux toutes ses écritures irréductibles comporte s_4 à l'extrême droite. De plus: $W = 2^7 \cdot 3^2$, $W' = 2^3 \cdot 3!$ donc $W^{(1)} = 24$.

Lemme 16:

Dans $T(H^{(1)})$, on a:
 $T^0(H^{(1)}) = \underline{\mathbb{Z}}$, $T^4(H^{(1)}) \simeq \underline{\mathbb{Z}}$, $T^8(H^{(1)}) \simeq \underline{\mathbb{F}_3}$, $T^i(H^{(1)}) = \{0\}$ pour $i \notin \{0, 4, 8\}$.

Démonstration:

Pour $i \in \{1, 2, 3, 12, 13, 14, 15\}$, soient $Z_i = Z_{w_i}$, w_i étant le seul élément de $W^{(1)}$ de longueur i .

Pour $i \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$, soient $Z_i' = Z_{w_i'}$ et $Z_i'' = Z_{w_i''}$, w_i' et w_i'' étant les deux éléments de $W^{(1)}$ de longueur i pris dans l'ordre où ils sont énoncés dans le lemme 15.

Dans $H^{(1)}$, on a alors:

$$Z_2 = Z_1^2,$$

$$Z_3 = Z_1^3,$$

$$Z_4' + Z_4'' = Z_1^4,$$

$$Z_5' = Z_1 Z_4', \quad Z_5'' = Z_1 (Z_4'' - Z_4'),$$

$$Z_6' = Z_1 (Z_5' - Z_5''), \quad Z_6'' = Z_1 Z_5'',$$

$$Z_7' = Z_1 (Z_6' - Z_6''), \quad Z_7'' = Z_1 Z_7'',$$

$$Z_8' + 2Z_8'' = Z_1 Z_7'', \quad 2Z_8' + Z_8'' = Z_1 Z_7',$$

$$Z_9' = Z_1 Z_8', \quad Z_9'' = Z_1 (Z_8'' - Z_8'),$$

$$Z_{10}' = Z_1 Z_9', \quad Z_{10}'' = Z_1 (Z_9'' - Z_9'),$$

$$Z'_{11} = Z_1(Z'_{10} - Z''_{10}), \quad Z''_{11} = Z_1 Z''_{10},$$

$$Z_{12} = Z_1 Z'_{11},$$

$$Z_{13} = Z_1 Z_{12},$$

$$Z_{14} = Z_1 Z_{13},$$

$$Z_{15} = Z_1 Z_{14}.$$

Ceci permet de calculer dans chaque degré le quotient de $H^{(1)}$ par l'idéal gradué engendré par les éléments de degré un.

D'où le lemme.

Lemme 17:

$T(H)$ est engendré par X_3, X_4 et X_8 (où $X_8 = T(Z'_8)$).

De plus $T^8(H)$ est engendré par X_8 .

Démonstration:

$T(H^{(1)})$ est engendré par X_4 et X_8 .

$T(H')$ est engendré par la projection de X_3 .

D'après les propositions 2 et 3, $T(H)$ est engendré par X_3, X_4 et X_8 . Donc $T^8(H^{(1)}) \rightarrow T^8(H)$ est surjectif, d'où le lemme.

Lemme 18:

Dans $T(H)$, on a: $X_4 \neq 0,$

$$3X_4 = 0,$$

$$X_4^2 \neq 0.$$

Démonstration:

Grace au tableau de la page 34 on peut déterminer $T^4(H)$, quotient H^4 par $H^1 H^3$, comme on l'avait fait dans le cas G_2 .

On sait déjà que $T^4(H)$ est isomorphe à un quotient de Z , et que X_4 l'engendre. Le calcul montre que $X_4 \neq 0$ et que $3X_4 = 0$.

$T(H) \otimes_{\mathbb{F}_3}$ est une algèbre de Hopf sur \mathbb{F}_3 puisque $A(G)$ est une \mathbb{Z} -algèbre de Hopf.

Cette algèbre de Hopf n'ayant pas d'éléments de degré 1, 2 ou 3 a forcément dans tous ses systèmes générateurs un générateur de degré 4. Ce générateur ne peut être que X_4 . Or dans une algèbre de Hopf il existe un système générateur tel que les seules relations entre les générateurs soient la nullité d'une certaine puissance de chacun, cette puissance étant elle-même une puissance de la caractéristique du corps de base de l'algèbre.

X_4^2 ne peut donc être nul. Mais $X_4^3 = 0$ puisque $T^{12}(H^{(1)}) = \{0\}$.

Lemme 19:

Dans $T(H)$, on a $X_3 \neq 0$, $2X_3 = 0$, $X_3^2 = 0$.

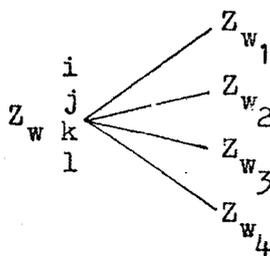
Démonstration:

La projection de X_3^2 dans $T(H')$ est nulle donc $x_3^2 = x_4 \cdot a$, $a \in H^2$; mais $T(a) = 0$, donc $X_3^2 = 0$. La projection de $T^2(H)$ sur $T^2(H')$ étant une bijection, $X_3 \neq 0$ et $2X_3 = 0$.

Pour achever la démonstration du théorème il suffit de remarquer que X_8 ne peut être que $\pm X_4^2$, et que $X_3 X_4$ est nul puisqu'annulé par 2 et par 3 donc par leur p.g.c.d.

Notations utilisées dans le tableau de la page 34.

$$Z_{abc} = Z_{s_a s_b s_c},$$



signifie: $c(\lambda)Z_w = \langle \alpha_1^v, \lambda \rangle Z_{w_1} + \dots + \langle \alpha_4^v, \lambda \rangle Z_{w_4}$.

$$\begin{aligned} \alpha_5 &= s_{\alpha_2}(\alpha_1), & \alpha_9 &= s_{\alpha_3} s_{\alpha_2}(\alpha_1), & \alpha_{13} &= s_{\alpha_2} s_{\alpha_3} s_{\alpha_2}(\alpha_1), \\ \alpha_6 &= s_{\alpha_3}(\alpha_2), & \alpha_{10} &= s_{\alpha_4} s_{\alpha_3}(\alpha_2), & \alpha_{14} &= s_{\alpha_1} s_{\alpha_4} s_{\alpha_3}(\alpha_2), \\ \alpha_7 &= s_{\alpha_2}(\alpha_3), & \alpha_{11} &= s_{\alpha_1} s_{\alpha_2}(\alpha_3), & \alpha_{15} &= s_{\alpha_4} s_{\alpha_1} s_{\alpha_2}(\alpha_3), \\ \alpha_8 &= s_{\alpha_3}(\alpha_4), & \alpha_{12} &= s_{\alpha_2} s_{\alpha_3}(\alpha_4), & \alpha_{16} &= s_{\alpha_3} s_{\alpha_2} s_{\alpha_3}(\alpha_4). \end{aligned}$$

Bibliographie.

(1) Demazure, M.

Invariants symétriques entiers des groupes de Weyl et torsion. *Inventiones Mathematicæ*, 21, 1973, p. 287-301.

(2) Demazure, M.

Désingularisation des variétés de Schubert généralisées.
A paraître aux *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*

(3) Bourbaki, N.

Groupes et algèbres de Lie, chap. 4, 5 et 6.
Hermann, Paris, 1968.

(4) Grothendieck, A.

Torsion homologique et sections rationnelles, exposé 5
dans *Anneaux de Chow et applications*. Séminaire C. Chevalley,
1958, Multigraphié, Secrétariat de mathématique, Paris, 1958.

