PUBLICATIONS MATHEMATIQUES D'ORSAY

SOLUTIONS GÉNÉRALISÉES

D'ÉQUATIONS NON LINÉAIRES

NON UNIFORMÉME LLIPTIQUES

Roger Temam

année universitaire 1970-1971

U.E.R. Mathématiques (425)
Université Paris XI
Centre d'ORSAY
Essonne (France)

SOLUTIONS GÉNÉRALISÉES

D'ÉQUATIONS NON LINÉAIRES

NON UNIFORMÉMENT ELLIPTIQUES

Roger Temam

année universitaire 1970-1971

U.E.R. Mathématiques (425)
Université Paris XI
Centre d'ORSAY
Essonne (France)

SOLUTIONS GENERALISEES D'EQUATIONS NON LINEAIRES, NON UNIFORMEMENT ELLIPTIQUES

Roger TEMAM (*)

INTRODUCTION.

Ce travail comprend trois parties : les deux premières parties sont complètement distinctes et préparent la troisième partie qui contient le résultat essentiel de ce travail.

La première partie (n°1 à 3) est l'étude d'une perturbation singulière, en l'occurence la régularisation elliptique d'une équation non linéaire non uniformément elliptique. Nous n'avons pas recherché dans cette partie le maximum de généralités du point de vue des perturbations singulières et nous nous sommes seulement limités à un résultat indispensable pour la suite.

De manière précise, on considère une classe d'équations elliptiques non linéaires du type

$$(0.1) \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i}\, a_i(x,\, u,\, \text{grad } u) = a(x,\, u,\, \text{grad } u)$$

$x = (x_1,\ldots,x_n) \in \Omega$ ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, auxquelles on associe la famille d'équations régularisées elliptiques $(\varepsilon > 0)$:

$$(0.2) \qquad \varepsilon\Delta u + \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i}\, a_i(x,\, u,\, \text{grad } u) = (a(x,\, u,\, \text{grad } u)$$

Nos hypothèses sur le problème (0.1) sont essentiellement

(*) Une partie de ce travail a été réalisée pendant un séjour de l'auteur à l'Université de Chicago.

celles de Ladyzenskaya et Uralceva [16] . Ces auteurs ont démontré que si u est une solution bornée de (0.1) de classe C^2 , alors grad u vérifiait certaines majorations a priori uniformes sur tout compact intérieur à Ω ; ce résultat avait été démontré auparavant par Bombieri - de Giorgi - Miranda [2] dans le cas où (0.1) est l'équation des surfaces minima.

Il était raisonnable de penser que si u_ε est solution de (0.2) pour $\forall\ \varepsilon \in]0,\varepsilon_0]$, et si $\sup\limits_{\varepsilon\leq\varepsilon_0}\ \sup\limits_{\Omega}|u_\varepsilon(x)|$ est borné, alors $\sup\limits_{\Omega'}|\text{grad}\ u_\varepsilon(x)|$ serait majoré indépendamment de ε sur tout ouvert Ω' relativement compact dans Ω . C'est ce résultat que nous démontrons dans la première partie.

Notons que ce résultat ne dit rien sur le comportement de u_ε à la frontière $\partial\Omega$ de Ω ; c'est seulement la troisième partie qui permet a posteriori de préciser un peu le comportement de u_ε sur $\partial\Omega$.

La seconde partie (n° 4 et 5) du travail est une application de la dualité à des problèmes de calcul des variations. Utilisant un cadre fonctionnel et quelques résultats de Rockafellar [24] nous établissons certaines relations entre des problèmes de calcul des variations et leur problème dual convenablement défini.

Nous présentons tout d'abord le cadre fonctionnel de [24] pour la dualité en optimisation convexe. Avec des notations légèrement différentes de celles de Rockafellar, il s'agit de problèmes d'optimisation du type

$$(\mathcal{P}) \qquad \operatorname*{Inf}_{u\in V}\ \{F(u)+G(Lu)\}$$

où F et G sont des fonctionnelles numériques convexes sur V et Y , V et Y espaces de Banach, et $L\in\mathcal{L}(V,Y)$.

On définit le problème $(\mathcal{P}^*)$ dual de $(\mathcal{P})$ et moyennant quelques hypothèses (minimes) sur F et G on obtient des relations simples mais non dépourvues d'intérêt entre les solutions éventuelles de $(\mathcal{P})$ et les solutions de $(\mathcal{P}^*)$.

Ici encore nous nous sommes quelque peu limités ; nous donnons seulement quelques exemples les plus intéressants par les résultats auxquels ils conduisent ou par les problèmes ouverts sur lesquels ils débouchent. Nous renvoyons à [28] pour une étude détaillée du sujet.

La troisième partie (n° 6 à 8) concerne des problèmes de calcul des variations du type

$$(0.3) \qquad \operatorname*{Inf}_{u-\phi/_{\partial\Omega}=0} \int_\Omega g(x,u(x),\operatorname{grad} u(x))\,dx$$

(ϕ donné), dont l'équation d'Euler est du type (0.1) et présente des dégénérescences analogues à celles de l'équation des surfaces minima. Notre résultat essentiel est alors le suivant : la mise en évidence d'une solution généralisée pour (0.3) ou ce qui revient au même le problème de Dirichlet pour l'équation d'Euler correspondante.

Notre démarche est la suivante : on montre que le problème $(\mathcal{P}^*)$ dual de (0.3) possède une solution unique p^*, et que le problème (0.3) possède une solution u alors on a une relation ponctuelle du type

$$(0.4) \qquad \operatorname{grad} u(x) = \mathcal{G}(p^*(x)) \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega,$$

où la fonction $\mathcal{G}$ ne dépend que de g.

Lorsque le problème (0.3) ne possède pas de solution, on peut se demander si la fonction $\mathcal{G}(p^*(x))$, parfaitement déterminée, est le gradient d'une fonction u que l'on considérerait comme une solution généralisée de (0.3) (il s'agit essentiellement d'un problème de régularité pour p^*). C'est ce problème qui trouve sa réponse dans la troisième partie. Utilisant les résultats de la première partie et des techniques de dualité, nous démontrons les résultats suivants :

- il existe $u \in L^1(\Omega)$, avec $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^1(\Omega)$, $1 \leq i \leq n$, telle que $\sup_{\Omega'} |\text{grad } u(x)| < +\infty$,

$\forall \Omega'$ relativement compact dans Ω, qui vérifie l'équation d'Euler de (0.3) dans Ω, qui vérifie (0.4) p.p. dans Ω. Enfin u est uniquement définie sauf peut-être à une constante additive près (conséquence facile de (0.4)) et toute suite minimisante de (0.3) converge dans $L^1(\Omega)/\mathbb{R}$ (et dans $L^1(\Omega)$ en cas de complète unicité) vers cette fonction u. Insistons sur le fait qu'il s'agit de n'importe quelle suite minimisante bornée et que c'est la suite minimisante tout entière qui converge vers u.

Ces résultats s'appliquent en particulier aux hypersurfaces minima non paramétriques pour lesquelles nous donnons d'ailleurs quelques résultats complémentaires. Précisons toutefois que dans une série de conférences [5], E. de Giorgi a proposé une méthode complètement différente pour obtenir un concept analogue de solution généralisée pour l'équation d'Euler des hypersurfaces minima.

Divers problèmes demeurent ouverts encore, dont certains feront l'objet d'un travail ultérieur : extension de ces résultats à des problèmes de calcul des variations autres que (0.3) (ordre supérieur ou hypersurfaces avec obstacles, ... cf. la 2ème partie); analyse plus complète du comportement frontière de u (cf. un résultat partiel dans la prop. 7.1) ce qui est lié à l'obtention d'estimations a priori à la frontière dans (0.2) et résoudrait complètement l'unicité pour u ; extension des résultats aux équations d'évolution associées à l'équation d'Euler de (0.3).

L'auteur remercie E. de Giorgi, J.L. Lions et M. Miranda pour de nombreuses discussions intéressantes durant l'élaboration de ce travail.

Le plan est le suivant :

I. UN PROBLEME DE PERTURBATION SINGULIERE.

1. Le théorème de perturbation.

1.1. Le problème exact.

On s'intéresse comme dans [16] à des équations non linéaires non uniformément elliptiques du type

$$(1.0) \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i(x,u,\text{grad } u) = a(x,u,\text{grad } u) \ ,$$

où $x = (x_1,\dots,x_n) \in \Omega$ ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et où les fonctions a_i sont supposées deux fois continûment dérivables dans $\Omega \times \mathbb{R}^{n+1}$, la fonction a une fois continûment dérivable dans $\Omega \times \mathbb{R}^{n+1}$ et

$$(1.1) \qquad \frac{\partial a_i}{\partial \xi_j}(x,u,\xi) = \frac{\partial a_j}{\partial \xi_i}(x,u,\xi) \ , \ 1 \leq i,j \leq n \quad ^{(1)} \ .$$

En outre, pour tout $M>0$, $\forall\, x \in \Omega$, $\forall\, u \in \mathbb{R}$, $|u| \leq M$ et $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$, il existe des constantes finies $\mu_o(M),\dots,\mu_5(M)$ avec

$$(1.2) \qquad |a_i(x,u,\xi)| \leq \mu_o(M)$$

$$(1.3) \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i(x,u,\xi)\xi_i \geq \mu_1(M)\sqrt{1+|\xi|^2} - \mu_2(M) \ , \quad \mu_1(M)>0 \ ,$$

$$(1.4) \qquad |a(x,u,\xi)| \leq \mu_3(M) \ ,$$

$$(1.5) \qquad \mu_4(M)\frac{|\eta'|^2}{\sqrt{1+|\xi|^2}} \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,u,\xi)\,\eta_i\eta_j \leq \mu_5(M)\frac{|\eta'|^2}{\sqrt{1+|\xi|^2}} \ ,$$

$$\mu_4(M)>0 \ , \ \mu_5(M)>0 \ , \ \forall\, \eta \in \mathbb{R}^n \ , \text{ où}$$

---

(1) Cette hypothèse qui n'apparaît pas dans [16] nous semble nécessaire.

$$(1.6) \qquad a_{ij}(x,u,\xi) = \frac{\partial a_i}{\partial \xi_j}(x,u,\xi) \; ,$$

et où le vecteur $\eta' = (\eta'_1,\dots,\eta'_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ est défini à partir du vecteur $\eta = (\eta_1,\dots,\eta_n) \in \mathbb{R}^n$ par

$$(1.7) \qquad \begin{cases} \eta' = \hat{\eta} - (\hat{\eta}.\nu_\xi)\nu_\xi \; , \; \nu_\xi = \dfrac{1}{\sqrt{1+|\xi|^2}}(-\xi_1,\dots,-\xi_n,1) \\ \hat{\eta} = (\eta_1,\dots,\eta_n,0) \; . \end{cases}$$

La condition (1.5) caractérise le type de dégénérescence admise pour l'équation (1.0). Les a_i et a satisfont en outre à une hypothèse "technique" que nous allons préciser dans un instant.

Pour simplifier les notations nous noterons $u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq u$, $Du = u_x = \text{grad } u$, et δu une fonction à valeur dans $\mathbb{R}^{n+1}$ et qui est construite à partir du vecteur Du de la même manière que η' est construit à partir de η avec la précision supplémentaire, $\xi = Du$:

$$(1.8) \qquad \begin{cases} \delta u = \widehat{Du} - (\widehat{Du},\nu)\nu \; , \; \widehat{Du} = (u_1,\dots,u_n,0) \\ \nu = \dfrac{1}{\sqrt{1+|Du|^2}}(-u_1,\dots,-u_n,1) \; . \end{cases}$$

Appliquons à (1.0) l'opérateur $\sum_{\ell=1}^{n} u_\ell \frac{du}{dx_\ell}$; on obtient en posant $v = |\text{grad } u|^2$ (1) :

$$(1.9) \qquad -\frac{1}{2}\frac{d}{dx_i}(a_{ij}\, v_j) + a_{ij}\, u_{\ell i}\, u_{\ell j} = A \; ,$$

(1) On utilise désormais la convention de sommation des indices répétés.

où

$$(1.10)\quad A = \frac{1}{2}\frac{\partial a_i}{\partial u} v_i + v \frac{d}{dx_i}\frac{\partial a_i}{\partial u} + u_\ell \frac{d}{dx_i}\frac{\partial a_i}{\partial x_\ell} - \frac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial u_j} v_j - \frac{\partial a}{\partial u} - u_\ell \frac{\partial a}{\partial x_\ell} .$$

L'hypothèse complémentaire est que, pour tout $M>0$, pour tout $x\in\Omega$, $\forall\, u\in\mathbb{R}$, $|u|\leq M$, et $\forall\, \xi\in\mathbb{R}^n$, il existe deux constantes $\mu_6(M)$, $\mu_7(M)$ avec

$$(1.11)\quad A(x,u,\xi) \leq \mu_6(M)|\delta u_x| + \mu_7(M)\sqrt{1+u_x^2} ,$$

où

$$(1.12)\qquad |\delta u_x| = \Big(\sum_{i=1}^{n} |\delta u_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

D'après [16] cette condition (1.11) est certainement réalisée si, pour $\forall\, M>0$, $\forall\, x\in\Omega$, $\forall\, u\in R$, $|u|\leq M$, $\forall\, \xi\in\mathbb{R}^n$, $\exists\, \mu(M)$ avec :

$$(1.13)\quad \left[\begin{aligned} &\Big|\frac{\partial a_i}{\partial u} - \frac{\partial a}{\partial u_i}\Big| \leq \frac{\mu(M)}{|u_x|} , \quad \Big|\frac{\partial^2 a_\ell}{\partial u_i \partial u}\Big| \leq \frac{\mu(M)}{u_x^2} \\ &\Big|\frac{\partial^2 a_\ell}{\partial u_i \partial x_j}\Big| \leq \frac{\mu(M)}{|u_x|} \end{aligned}\right.$$

$$(1.14)\quad \left[\begin{aligned} &\Big|\frac{\partial a_i}{\partial u} - \frac{\partial a}{\partial u_i}\Big| \leq \frac{\mu(M)}{u_x^2} , \quad \Big|\frac{\partial^2 a_\ell}{\partial u_j \partial u} u_j\Big| \leq \frac{\mu(M)}{u_x^2} \\ &\Big|\frac{\partial^2 a_\ell}{\partial u_i \partial x_j} u_i u_j\Big| \leq \mu(M) \end{aligned}\right.$$

$$(1.15)\quad \Big|\frac{\partial^2 a_i}{\partial u^2} u_i - \frac{\partial a}{\partial u}\Big| \leq \frac{\mu(M)}{u_x^2} , \quad \Big|\frac{\partial^2 a_i}{\partial u \partial x_\ell} u_i - \frac{\partial a}{\partial x_\ell}\Big| \leq \mu(M)$$

$$(1.16)\qquad \left|\frac{\partial^2 a_i}{\partial u \partial x_i}\right| \leqslant \frac{\mu(M)}{|u_x|}\ ,\ \left|\frac{\partial^2 a_i}{\partial x_\ell \partial x_i}\right| \leqslant \mu(M)\ .$$

On verra au III des situations simples où (1.13) - (1.16) sont automatiquement vérifiées.

1.2. Enoncé du théorème de perturbation.

Nous considérons pour $\varepsilon>0$, l'équation perturbée de (1.1) :

$$(1.17)\qquad \varepsilon \Delta u_\varepsilon + \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i}\, a_i(x,u_\varepsilon,\operatorname{grad} u_\varepsilon) = a(x,u_\varepsilon,\operatorname{grad} u_\varepsilon)\ .$$

Nous nous proposons de démontrer le :

Théorème 1.1.

On suppose que les conditions (1.1) - (1.5) *et* (1.11) *sont réalisées.*

On suppose que pour tout ε, $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^2(\bar\Omega)$, *vérifie* (1.17) *et que la famille* u_ε *est uniformément bornée dans* Ω :

$$(1.18)\qquad \sup_{0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0}\ \sup_{x\in\Omega} |u_\varepsilon(x)| \leqslant M_0 < +\infty\ .$$

Alors pour tout ouvert $\Omega' \subset\subset \Omega$ [1],

$$(1.19)\qquad \sup_{0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0}\ \sup_{x\in\Omega'} |\operatorname{grad} u_\varepsilon(x)| < +\infty\ .$$

Le théorème sera démontré aux n°2 et 3 .

---

(1) $\Omega' \subset\subset \Omega$ signifie $\Omega' \subset \bar\Omega' \subset \Omega$.

1.3. Principe du maximum.

Avant d'aborder la démonstration du théorème 1.1 nous voulons donner des conditions très simples sur les a_i et a, qui, par un raisonnement élémentaire de principe du maximum assurent (1.19).

Proposition 1.1.

Supposons qu'il existe M_1 *tel que pour tout* $x \in \Omega$, $\forall u \in R$, $|u| > M_1$,

(1.20) $$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,u,\xi)\xi_i > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \ \xi \neq 0,$$

(1.21) $$a(x,u,\xi) \geqslant 0 .$$

Si, en outre

(1.22) $$\sup_{0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0} \ \sup_{x\in\partial\Omega} |u_\varepsilon(x)| \leqslant M_2 < +\infty ,$$

alors (1.18) *a lieu avec* $M_0 = \max(M_1, M_2)$.

Démonstration.

On multiplie (1.17) par $(u_\varepsilon - M_0)_+$, $(u_\varepsilon - M_0)_+ = u_\varepsilon - M_0$ si $u_\varepsilon - M_0 > 0$, $= 0$ autrement ; on intègre dans Ω et on intègre par parties à gauche :

$$\int_{\Omega \cap \{u_\varepsilon > M_0\}} \left\{ \varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} + a_i(x, u_\varepsilon, \operatorname{grad} u_\varepsilon) \right\} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \, dx$$

$$= - \int_{\Omega \cap \{u_\varepsilon > M_0\}} a(x, u_\varepsilon, \operatorname{grad} u_\varepsilon) \, (u_\varepsilon - M_0) \, dx \leqslant 0 ,$$

ce qui entraîne :

$$a_i(x,u_\varepsilon,\mathrm{grad}\ u_\varepsilon)\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} = 0$$

et $\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} = 0$ p.p. sur $\{u_\varepsilon > M_o\}$. Le résultat est démontré.

2. Estimations a priori préliminaires.

Ce numéro et le suivant sont consacrés à l'obtention d'estimations a priori diverses ; le point de départ est (1.17) et, pour alléger les notations nous noterons u au lieu de la solution considérée de (1.17).

On fera souvent usage de l'équation suivante déduite de (1.17) comme (1.9) se déduit de (1.1)

$$(2.1) \qquad -\frac{\varepsilon}{2}\ \frac{dv_i}{dx_i} - \frac{1}{2}\ \frac{d}{dx_i}\ (a_{ij}\ v_j) + \varepsilon\ u_{\ell i}\ u_{\ell i} + a_{ij}\ u_{\ell i}\ u_{\ell j} = A\ ,$$

où l'on a de même $v = v_\varepsilon$, $A = A(x,u_\varepsilon,\mathrm{grad}\ u_\varepsilon)$.

2.1. Première majoration

Lemme 2.1.

Pour tout $\Omega' \subset\subset \Omega$,

$$(2.2) \qquad \int_{\Omega'} (\varepsilon\ u_x^2 + \sqrt{1+u_x^2})\ dx \leqslant c$$

où c dépend de Ω' et des données [1]

---

(1) Les lettres c, d, désigneront des constantes positives diverses dépendant des données. On entend par données, l'ouvert Ω et les $\mu_\alpha(M_o)$, μ_α apparaissant en (1.2), ..., et M_o en (1.18).

Démonstration. Soit ζ une fonction régulière, $0\leq\zeta\leq 1$, $\zeta(x) = 1$, $x\in\Omega'$, supp $\zeta\subset\Omega$. On multiplie (1.17) par $u\zeta^2$, on intègre dans Ω et on intègre par parties à gauche pour obtenir

$$\varepsilon\int_\Omega u_x^2\,\zeta^2\,dx + 2\,\varepsilon\int_\Omega u_i\,u\,\zeta\,\zeta_i\,dx + \int_\Omega a_i\,u_i\,\zeta^2\,dx$$

$$+\,2\int_\Omega a_i\,u\,\zeta\,\zeta_i\,dx = -\int_\Omega a\,u\,\zeta^2\,dx\,.$$

On en déduit aisément avec (1.2)-(1.4),

$$(2.3)\qquad \int_\Omega(\varepsilon\,u_x^2 + \sqrt{1+u_x^2})\zeta^2\,dx \leq d\,\max_\Omega\,(\zeta^2+\zeta_x^2)\,,$$

où d ne dépend que des données ; (2.2) en résulte.

2.2. Majoration de $|v|_{L^\alpha(\Omega')}$ en fonction de ε

Lemme 2.2.

Pour tout $\alpha\geq 0$, pour toute fonction ζ régulière à support compact dans Ω,

$$(2.4)\quad \varepsilon\int_\Omega(1+v)^{\alpha+2}\,\zeta^2\,dx + \int_\Omega|\delta u_x|^2(1+v)^{\alpha-\frac{1}{2}}\,\zeta^2\,dx$$

$$\leq\; d\varepsilon\int_\Omega(1+v)^{\alpha+1}(\zeta_x^2+\zeta^2)\,dx + d\int_\Omega(1+v)^{\alpha+\frac{1}{2}}(\zeta^2+\zeta_x^2)\,dx\,,$$

où d ne dépend que de α et des données.

Démonstration. On multiplie (2.1) par $(1+v)^\alpha\zeta^2$, on intègre dans Ω et on intègre par parties à gauche :

$$\frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega (1+v)^{\alpha-1}\, v_x^2\, \zeta^2\, dx + \varepsilon \int_\Omega (1+v)^\alpha\, v_i\, \zeta\, \zeta_i\, dx$$

$$+ \frac{\alpha}{2}\int_\Omega a_{ij}\, v_j v_i\, (1+v)^{\alpha-1}\zeta^2\, dx + \int_\Omega a_{ij}\, v_j\, (1+v)^\alpha \zeta\, \zeta_i\, dx$$

$$+ \varepsilon \int_\Omega u_{\ell i}\, u_{\ell i}\, (1+v)^\alpha\, \zeta^2\, dx + \int_\Omega a_{ij}\, u_{\ell i}\, u_{\ell j}\, (1+v)^\alpha\, \zeta^2\, dx$$

$$= \int_\Omega A(1+v)^\alpha\, \zeta^2\, dx \leqslant \text{par } (1.11)$$

$$\leqslant \mu_6(M_o) \int_\Omega |\delta u_x|\,(1+v)^\alpha\, \zeta^2\, dx + \mu_2(M_o) \int_\Omega (1+v)^{\alpha+\frac{1}{2}}\, dx\ .$$

On note $I_1, \ldots, I_6$ les intégrales apparaissant à gauche dans cette inégalité, et I_7, I_8 les intégrales apparaissant à droite. On a :

$$I_2 = 2\varepsilon \int_\Omega (1+v)^\alpha\, u_\ell u_{\ell i}\, \zeta\, \zeta_i\, dx\ ,$$

$$|I_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega (1+v)^\alpha\, u_{\ell i}\, u_{\ell i}\, \zeta^2\, dx + 2\varepsilon \int_\Omega (1+v)^\alpha\, u^2\, \zeta_x^2\, dx$$

$$|I_2| \leqslant \frac{I_5}{2} + d\,\varepsilon \int_\Omega (1+v)^{\alpha+1}\, \zeta_x^2\, dx\ .$$

Par (1.5) :

$$I_6 \geqslant \mu_4(M_o) \int_\Omega \frac{|\delta u_x|^2}{\sqrt{1+v}}\, (1+v)^\alpha\, \zeta^2\, dx = I_6'\ .$$

Par l'inégalité de Schwarz, (1.1) et (1.5),

$$|I_4| \leqslant \int_\Omega (a_{ij}\ v_i v_j)^{\frac{1}{2}}\ (a_{ij}\ \zeta_i\zeta_j)^{\frac{1}{2}}\ (1+v)^{\alpha}\ \zeta\ dx$$

$$\leqslant \mu_5(M_o) \int_\Omega \frac{|\delta_v||\delta\zeta|}{\sqrt{1+v}}\ (1+v)^{\alpha}\ \zeta\ dx$$

et comme (cf. [16])

$$(2.5) \qquad |\delta v| \leqslant 2|u_x||\delta u_x| \leqslant 2\sqrt{1+v}\ |\delta u_x|\ ,$$

$$|I_4| \leqslant d \int_\Omega |\delta u_x||\delta\zeta|\ (1+v)^{\alpha}\ \zeta\ dx$$

$$\leqslant \frac{\mu_4(M_o)}{2} \int_\Omega \frac{|\delta u_x|^2}{\sqrt{1+v}}\ (1+v)^{\alpha}\ \zeta^2\ dx + d \int_\Omega |\delta\zeta|^2\ (1+v)^{\alpha+\frac{1}{2}}\ dx$$

$$|I_4| \leqslant \frac{I_6'}{2} + d \int_\Omega |\delta\zeta|^2\ (1+v)^{\alpha+\frac{1}{2}}\ dx\ .$$

$$|I_7| \leqslant \frac{\mu_4(M_o)}{4} \int_\Omega \frac{|\delta u_x|^2}{\sqrt{1+v}}\ (1+v)^{\alpha}\ \zeta^2\ dx + d \int_\Omega (1+v)^{\alpha+\frac{1}{2}}\ \zeta^2\ dx\ ,$$

$$|I_7| \leqslant \frac{I_6'}{2} + d\ I_8\ .$$

La prise en compte de toutes ces inégalités entraîne a fortiori

$$(2.6)\ \varepsilon \int_\Omega (1+v)^{\alpha}\ u_{\ell i}\ u_{\ell i}\ \zeta^2\ dx + \int_\Omega |\delta u_x|^2\ (1+v)^{\alpha-\frac{1}{2}}\ \zeta^2\ dx$$

$$\leqslant d\ \varepsilon \int_\Omega (1+v)^{\alpha+1}\ \zeta_x^2\ dx + d \int_\Omega |\delta\zeta|^2\ (1+v)^{\alpha+\frac{1}{2}}\ dx$$

$$+ d \int_\Omega (1+v)^{\alpha+\frac{1}{2}}\ \zeta^2\ dx\ .$$

Pour toute fonction σ , on a :

$$|\delta\sigma| \leqslant |\sigma_x| \tag{2.7}$$

et en particulier $|\delta\zeta| \leqslant |\zeta_x|$.

Par ailleurs d'après [15] (inégalité (4.7) p.59),

$$\int_\Omega (1+v)^{\alpha+2}\, \zeta^2\, dx \leqslant d \int_\Omega (1+v)^\alpha\, u_{\ell i}\, u_{\ell i}\, \zeta^2\, dx + d \int_\Omega (1+v)^{\alpha+1}(\zeta^2+\zeta_x^2)dx,$$

où d dépend de Ω , α et M_0 .

Avec (2.6), (2.7) et cette dernière inégalité, on obtient aisément (2.4).

<u>Lemme 2.3.</u>

<u>Pour tout</u> $\beta \geqslant 1$, <u>tout</u> $\Omega' \subset\subset \Omega$,

$$\varepsilon |v|_{L^\beta(\Omega')} \leqslant c\ , \tag{2.8}$$

<u>où</u> c <u>dépend de</u> β <u>de</u> Ω' <u>et des données</u>.

<u>Démonstration</u>. Cela se démontre par récurrence pour les entiers et ensuite par interpolation utilisant le théorème de M. Riesz pour les β non entiers.

Pour $\beta=1$ c'est une conséquence immédiate de (2.2). Montrons que si la propriété est vraie pour β , elle l'est aussi pour $\beta+1$: étant donné $\Omega' \subset\subset \Omega$, on choisit un ouvert Ω'' , $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega$ et une fonction ζ régulière, $0 \leqslant \zeta \leqslant 1$, supp $\zeta \subset \Omega$, $\zeta=1$ sur Ω'' . On applique alors (2.4) avec $\alpha=\beta-1 \geqslant 0$ pour obtenir :

$$\int_{\Omega'} (1+v)^{\beta+1}\, dx \leqslant c \int_{\Omega''} (1+v)^\beta\, dx + \frac{c}{\varepsilon} \int_{\Omega''} (1+v)^{\beta-\frac{1}{2}}\, dx$$

où $c = d \max\limits_{\Omega''}(\zeta^2+\zeta_x^2)$ ne dépend que de Ω' et des données puisque

ζ et Ω'' sont choisis en fonction de Ω'.

L'hypothèse de récurrence donne alors :

$$\int_{\Omega'} (1+v)^{\beta+1}\, dx \leq c \int_{\Omega''} (1+v)^{\beta}\, dx + \frac{c}{\varepsilon} \int_{\Omega''} (1+v)^{\beta}\, dx \leq \frac{c(\Omega'')}{\varepsilon^{\beta+1}} ,$$

et (2.8) en résulte pour $\beta+1$.

2.3. <u>Majoration de</u> $|v|_{L^\infty(\Omega')}$ <u>en fonction de</u> ε.

<u>Lemme 2.4.</u>

<u>Pour toute fonction régulière</u> ζ <u>à support compact dans</u> Ω, <u>majorée par un en module</u> :

$$(2.9) \qquad \int_{\Omega_k} v_x^2\, \zeta^2\, dx \leq d\,\left(1 + \frac{1}{\varepsilon\sqrt{k}}\right) \int_{\Omega_k} (v-k)^2\, \zeta_x^2\, dx$$

$$+ \frac{dk}{\varepsilon^2} \left(\text{mes}(\Omega_k \cap \text{supp}\, \zeta)\right)^{1+\frac{2}{n}} + \frac{d}{\varepsilon^4} \left(\text{mes}(\Omega_k \cap \text{supp}\, \zeta)\right)^{1+\frac{6}{n}} ,$$

<u>où les</u> d <u>ne dépendent que des données</u>, supp ζ = <u>support</u> ζ, <u>et</u>,

$$(2.10) \qquad \Omega_k = \{x \mid x \in \Omega ,\ v(x) > k\} .$$

<u>Démonstration</u>. On multiplie (2.1) par $(v-k)_+ \zeta^2$, on intègre en x dans Ω et on intègre par parties :

$$\frac{\varepsilon}{2}\int_{\Omega_k} v_x^2\,\zeta^2\,dx + \varepsilon\int_{\Omega_k}(v-k)\,v_i\,\zeta\,\zeta_i\,dx$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\Omega_k} a_{ij}\,v_j\,v_i\,\zeta^2\,dx + \int_{\Omega_k}(v-k)\,a_{ij}\,v_j\,\zeta_i\,\zeta\,dx$$

$$+\ \varepsilon\int_{\Omega_k} u_{\ell i}\,u_{\ell i}\,(v-k)\zeta^2\,dx + \int_{\Omega_k} a_{ij}\,u_{\ell i}\,u_{\ell j}\,(v-k)\zeta^2\,dx$$

$$= \int_{\Omega_k} A(v-k)\zeta^2\,dx \leqslant \text{(par (1.11))}$$

$$\leqslant \mu_6(M_o)\int_{\Omega_k}|\delta u_x|(v-k)\zeta^2\,dx + \mu_7(M_o)\int_{\Omega_k}\sqrt{1+v}\,(v-k)\zeta^2\,dx\ .$$

On note $I_1,\dots,I_6$, les intégrales apparaissant à gauche dans cette inégalité et I_7, I_8 , celles figurant dans le membre de droite. On a

$$|I_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\int_{\Omega_k} v_x^2\,\zeta^2\,dx + d\,\varepsilon\int_{\Omega_k}(v-k)^2\,\zeta_x^2\,dx\ ,$$

$$|I_2| \leqslant \frac{I_1}{2} + d\,\varepsilon\int_{\Omega_k}(v-k)^2\,\zeta_x^2\,dx\ .$$

$$|I_3| \geqslant \frac{\mu_4(M_o)}{2}\int_{\Omega_k}\frac{|\delta v|^2}{\sqrt{1+v}}\,\zeta^2\,dx = I_3'$$

$$|I_4| \leqslant \int_{\Omega_k}(a_{ij}\,v_i\,v_j)^{\frac{1}{2}}\,(a_{ij}\,\zeta_i\,\zeta_j)^{\frac{1}{2}}\,(v-k)\zeta\,dx$$

$$\leqslant \mu_5(M_o)\int_{\Omega_k}\frac{|\delta v|\,|\delta\zeta|}{\sqrt{1+v}}\,(v-k)\zeta\,dx$$

$$\leqslant \frac{\mu_4(M_o)}{4}\int_{\Omega_k}\frac{|\delta v|^2}{\sqrt{1+v}}\,\zeta^2\,dx + d\int_{\Omega_k}\frac{|\delta\zeta|^2}{\sqrt{1+v}}\,(v-k)^2\,dx$$

$$|I_4| \leqslant \frac{I_3'}{2} + d \int_{\Omega_k} \frac{|\delta\zeta|^2}{\sqrt{1+v}} (v-k)^2 \, dx$$

$$I_6 \geqslant \mu_4(M_o) \int_{\Omega_k} \frac{|\delta u_x|^2}{\sqrt{1+v}} (v-k) \, \zeta^2 \, dx = I_6' .$$

$$I_7 \leqslant \frac{\mu_4(M_o)}{2} \int_{\Omega_k} \frac{|\delta u_x|^2}{\sqrt{1+v}} (v-k) \, \zeta^2 \, dx + d \int_{\Omega_k} (v-k) \sqrt{1+v} \, \zeta^2 \, dx$$

$$I_7 \leqslant \frac{I_6'}{2} + d \, I_8 .$$

Regroupant ces inégalités et tenant compte de (2.7) on obtient a fortiori :

$$(2.11) \qquad \int_{\Omega_k} v_x^2 \, \zeta^2 \, dx \leqslant d \int_{\Omega_k} (v-k)^2 \, \zeta_x^2 \, dx$$

$$+ \frac{d}{\varepsilon} \int_{\Omega_k} \frac{\zeta_x^2}{\sqrt{1+v}} (v-k)^2 \, dx + \frac{d}{\varepsilon} \int_{\Omega_k} \sqrt{1+v} \, (v-k) \, \zeta^2 \, dx$$

On a $\frac{1}{\sqrt{1+v}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}$ sur Ω_k et $\sqrt{1+v} \leqslant \sqrt{2}\sqrt{k} + \sqrt{v-k}$ si $k \geqslant 1$;

alors :

$$(2.12) \qquad \int_{\Omega_k} v_x^2 \, \zeta^2 \, dx \leqslant d\left(1 + \frac{1}{\varepsilon\sqrt{k}}\right) \int_{\Omega_k} (v-k)^2 \, \zeta_x^2 \, dx$$

$$+ \frac{d\sqrt{k}}{\varepsilon} \int_{\Omega_k} (v-k)\zeta^2 \, dx + \frac{d}{\varepsilon} \int_{\Omega_k} (v-k)^{\frac{3}{2}} \, \zeta^2 \, dx .$$

Avec l'inégalité de Schwarz et puisque $\zeta^2 \leqslant 1$:

$$\int_{\Omega_k} (v-k)\, \zeta^2\, dx \leqslant \Big(\int_{\Omega_k} (v-k)^2\, \zeta^2\, dx\Big)^2 \Big(\int_{\Omega_k} \zeta^2\, dx\Big)^2$$

$$\leqslant (\mathrm{mes}\,(\Omega_k \cap \mathrm{supp}\ \zeta))^{\frac{1}{2}} \Big\{\int_{\Omega_k} (v-k)^2\, \zeta^2\, dx\Big\}^{\frac{1}{2}}$$

D'après l'inégalité {(2.12) p.43} de [15] ,

$$\int_{\Omega_k} (v-k)^2\, \zeta^2\, dx = \int_{\Omega} (v-k)_+^2\, \zeta^2\, dx$$

$$\leqslant d\, \Big\{\mathrm{mes}(\Omega_k \cap \mathrm{supp}\ \zeta)\Big\}^{\frac{2}{n}} \int_{\Omega} (((v-k)_+)_x \zeta + (v-k)_+\, \zeta_x)^2\, dx$$

$$(2.13) \quad \int_{\Omega_k} (v-k)^2\, \zeta^2\, dx \leqslant d\Big\{\mathrm{mes}(\Omega_k \cap \mathrm{supp}\ \zeta)\Big\}^{\frac{2}{n}} \int_{\Omega_k} ((v-k)^2 \zeta_x^2 + v_x^2 \zeta^2)\, dx$$

Portant cette majoration dans la dernière inégalité, on trouve :

$$\int_{\Omega_k} (v-k)\zeta^2\, dx \leqslant d(\mathrm{mes}(\Omega_k \cap \mathrm{supp}\zeta))^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} \Big(\int_{\Omega_k} (v_x^2\, \zeta^2 + (v-k)^2\, \zeta_x^2) dx\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$(2.14) \quad \frac{d\sqrt{k}}{\varepsilon} \int_{\Omega_k} (v-k)\zeta^2\, dx \leqslant \frac{1}{4} \int_{\Omega_k} (v_x^2\, \zeta^2 + (v-k)^2\, \zeta_x^2)\, dx$$

$$+ d\, \frac{k}{\varepsilon^2}\, (\mathrm{mes}(\Omega_k \cap \mathrm{supp}\zeta))^{1+\frac{2}{n}}$$

De manière analogue, on écrit :

$$\int_{\Omega_k}(v-k)^{\frac{3}{2}}\,\zeta^2\,dx = \int_{\Omega_k}(v-k)^{\frac{3}{2}}\,\zeta^{\frac{3}{2}}\,\zeta^{\frac{1}{2}}\,dx \leqslant \left(\int_{\Omega_k}(v-k)^2\,\zeta^2\,dx\right)^{\frac{3}{4}}\left(\int_{\Omega_k}\zeta^2 dx\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\leqslant (\mathrm{mes}(\Omega_k\cap\mathrm{supp}\zeta))^{\frac{1}{4}}\left(\int_{\Omega_k}(v-k)^2\,\zeta^2\,dx\right)^{\frac{3}{4}} ;$$

et, avec (2.13),

$$\int_{\Omega_k}(v-k)^{\frac{3}{2}}\,\zeta^2\,dx \leqslant d(\mathrm{mes}(\Omega_k\cap\mathrm{supp}\;\zeta))^{\frac{1}{4}+\frac{3}{2n}}\left(\int_{\Omega_k}(v_x^2\,\zeta^2+(v-k)^2\,\zeta_x^2)dx\right)^{\frac{3}{4}}$$

Utilisant alors l'inégalité de Young, on trouve :

$$(2.15)\quad \frac{d}{\varepsilon}\int_{\Omega_k}(v-k)^{\frac{3}{2}}\,\zeta^2\,dx \leqslant \frac{1}{4}\int_{\Omega_k}(v_x^2\,\zeta^2 + (v-k)^2\,\zeta_x^2)\,dx$$

$$+ \frac{d}{\varepsilon^4}\,(\mathrm{mes}(\Omega_k\cap\mathrm{supp}\zeta))^{1+\frac{6}{n}}$$

Grâce à (2.14) et (2.15), (2.12) donne exactement (2.9).

<u>Remarque 2.1.</u>

Si on se limite à $k\geqslant\frac{1}{\varepsilon^2}$ et $\varepsilon\leqslant 1$, alors (2.9) entraîne aisément :

$$(2.16)\quad \int_{\Omega_k} v_x^2\,\zeta^2\,dx \leqslant d\int_{\Omega_k}(v-k)^2\,\zeta_x^2\,dx + d\,k^2(\mathrm{mes}(\Omega_k\cap\mathrm{supp}\zeta))^{1+\frac{2}{n}}$$

$$+ d\,k^2(\mathrm{mes}(\Omega_k\cap\mathrm{supp}\zeta))^{1+\frac{6}{n}} .$$

<u>Lemme 2.5.</u>

<u>Pour tout</u> $\Omega'\subset\subset\Omega$

(2.17) $$|v|_{L^\infty(\Omega')} \leq \frac{c}{\varepsilon^2} ,$$

<u>où</u> c <u>ne dépend que de</u> Ω' <u>et des données.</u>

<u>Démonstration.</u> Utilisant (2.9) et le lemme 5.4 p.71 de [15] on obtient très aisément une majoration du type

(2.18) $$|v|_{L^\infty(\Omega')} \leq \phi\ (\Omega',\varepsilon)$$

où ϕ dépend de Ω' et de ε. Nous allons reprendre la démonstration de ce lemme et faire ressortir clairement la dépendance de ϕ en ε.

On considère un ouvert Ω'' tel que $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega$, et on va démontrer (2.17), ce qui suffira, lorsque Ω' est une boule $B_{\rho_o(1-\sigma_o)}$ de centre $x_o \in \Omega''$, de rayon $\rho_o(1-\sigma_o)$, $0<\sigma_o<1$, la boule B_{ρ_o} de centre x_o de rayon ρ_o étant située dans Ω''.

Suivant [15], on considère une suite de nombres $k_h = 2k_o - \frac{k_o}{2^h}$, k_o choisi ultérieurement, assez grand, et une suite de rayons $\rho_h = \rho_o(1-\sigma_o+\frac{\sigma_o}{2^h})$, h entier ; si $\bar\rho_h = \frac{1}{2}(\rho_h+\rho_{h+1})$ on aura $\Omega_h \supset \Omega_{h+1}$ car $k_h < k_{h+1}$ et $B_{\rho_{h+1}} \subset B_{\bar\rho_h} \subset B_{\rho_h}$ car $\rho_{h+1} < \bar\rho_h < \rho_h$. On note $\mathcal{E}_h = \Omega_{k_{h+1}} \cap B_{\rho_h}$, $\mathcal{E}_h^* = \Omega_{k_h} \cap B_{\rho_h}$,

$\bar{\mathcal{E}}_h = \Omega_{k_{h+1}} \cap B_{\bar\rho_h}$, et $\mathcal{E}^*_{h+1} \subset \bar{\mathcal{E}}_h \subset \mathcal{E}_h \subset \mathcal{E}^*_h$.

Supposant

(2.19) $$k_o \geq \frac{1}{\varepsilon^2} ,$$

on applique (2.16) avec $k = k_{h+1}$ et une fonction ζ régulière,

$0 \leq \zeta \leq 1$, $\zeta = 1$ sur $B_{\bar{\rho}_h}$, nulle hors de B_{ρ_h} .

On peut trouver ζ tel que $|\zeta_x| \leq \frac{d}{\rho_h - \bar{\rho}_h} = \frac{d}{\rho_o \sigma_o} 2^{h+2}$, et alors on aura :

$$\int_{\bar{\mathcal{E}}_h} v_x^2 \, dx \leq d \int_{\mathcal{E}_h} (v-k)_{h+1}^2 \frac{2^{2h+4}}{\rho_o^2 \sigma_o^2} \, dx + dk_{h+1}^2 (\text{mes } \mathcal{E}_h)^{1+\frac{2}{n}}$$
$$+ dk_{h+1}^2 (\text{mes } \mathcal{E}_h)^{1+\frac{6}{n}}$$

si les c désignent des constantes dépendant de $\rho_o \sigma_o$, c'est-à-dire de l'ouvert Ω' , cela s'écrira :

$$(2.20) \quad \int_{\bar{\mathcal{E}}_h} v_x^2 \, dx \leq d \, 2^{2h} \int_{\mathcal{E}_h} (v-k_{h+1})^2 \, dx + d \, k_o^2 (\text{mes } \mathcal{E}_h)^{1+\frac{2}{n}}$$
$$+ d \, k_o^2 (\text{mes } \mathcal{E}_h)^{1+\frac{6}{n}} \; ;$$

$(k_{h+1} \leq 2k_o)$.

Posons comme en [15] ,

$$(2.21) \qquad J_h = \int_{\mathcal{E}_h^*} (v-k_h)^2 \, dx \, ,$$

on majore mes $\mathcal{E}_h$ par :

$$J_h \geq \int_{\mathcal{E}_h} (v-k_h)^2 \, dx \geq (k_{h+1}-k_h)^2 (\text{mes } \mathcal{E}_h) = \frac{k_o^2}{2^{2h+2}} (\text{mes } \mathcal{E}_h) \, .$$

$$(2.22) \qquad \operatorname{mes} \overline{\mathcal{E}}_h \leq \operatorname{mes} \mathcal{E}_h < \frac{2^{2h+2}}{k_o^2} J_h .$$

On utilise cela dans (2.20) pour obtenir :

$$(2.23) \quad \int_{\overline{\mathcal{E}}_h} v_x^2 \, dx \leq d \, 2^{2h} \int_{\mathcal{E}_h} (v-k_{h+1})^2 \, dx + d \, \frac{2^{2h(1+\frac{2}{n})}}{k_o^{\frac{4}{n}}} J_h^{1+\frac{2}{n}}$$

$$+ d \, \frac{2^{2h(1+\frac{6}{n})}}{k_o^{\frac{12}{n}}} J_h^{1+\frac{6}{n}}$$

Mais

$$(2.24) \quad \int_{\mathcal{E}_h} (v-k_{h+1})^2 \, dx = \int_{\Omega_{k_{h+1}} \cap B_{\rho_h}} (v-k_{h+1})_+^2 \, dx$$

$$\leq \int_{\Omega_{k_{h+1}} \cap B_{\rho_h}} (v-k_h)_+^2 \, dx \leq \int_{\Omega_{k_h} \cap B_{\rho_h}} (v-k_h)_+^2 \, dx$$

$$= \int_{\mathcal{E}_h^*} (v-k_h)_+^2 \, dx = J_h .$$

Par ailleurs avec (2.8) ,

$$(2.25) \qquad J_h \leq \int_{B_{\rho_o}} v^2 \, dx \leq \int_{\Omega''} v^2 \, dx \leq \frac{c}{\varepsilon^2} \quad (c=c(\Omega'')) .$$

Avec (2.24) et (2.25), (2.23) entraîne :

$$\int_{\bar{\mathcal{E}}_h} v_x^2\, dx \leqslant d\, 2^{2h}\, J_h + c\, \frac{2^{2h(1+\frac{2}{n})}}{k_o^{\frac{4}{n}}}\, \frac{J_h}{\varepsilon^{\frac{4}{n}}} + c\, \frac{2^{2h(1+\frac{6}{n})}}{k_o^{\frac{12}{n}}}\, \frac{J_h}{\varepsilon^{\frac{12}{n}}}$$

Comme on a supposé (2.19), cela entraîne :

$$\int_{\bar{\mathcal{E}}_h} v_x^2\, dx \leqslant d\, 2^{2h}\, J_h + c\, \frac{2^{2h(1+\frac{6}{n})}}{k_o^{\frac{2}{n}}}\, J_h$$

(2.26) $$\int_{\bar{\mathcal{E}}_h} v_x^2\, dx \leqslant c\, 2^{2h(1+\frac{6}{n})}\, J_h \,.$$

On majore ensuite J_{h+1} comme en [15] :

$$J_{h+1} \leqslant d(\text{mes}\ \bar{\mathcal{E}}_h)^{\frac{2}{n}} \left[\int_{\bar{\mathcal{E}}_h} v_x^2\, dx + 2^{2h}\, J_h\right] .$$

D'où, avec (2.26) et (2.22)

$$J_{h+1} \leqslant d \left(\frac{2^{2h}\, J_h}{k_o^2}\right)^{\frac{2}{n}} \left[2^{2h(1+\frac{6}{n})}\, J_h\right]$$

(2.27) $$J_{h+1} \leqslant \gamma b^h\, J_h^{1+\frac{2}{n}}$$

(2.28) $$\gamma = \frac{d}{k_o^{\frac{4}{n}}}\,, \quad b = 2^{2+\frac{16}{n}}$$

On aura, ce qui est le but recherché, $J_h \longrightarrow 0$, $h \longrightarrow \infty$, pourvu que (lemme 4.7 p.62 [15])

(2.29) $$J_1 \leqslant \gamma^{-\frac{n}{2}}\, b^{-\frac{n^2}{4}}$$

Comme $J_1 \leqslant \gamma J_o^{1+\frac{2}{n}} \leqslant (\text{par}(2.25)) \leqslant \dfrac{\gamma c^{1+\frac{2}{n}}}{\varepsilon^{2(1+\frac{2}{n})}}$ on aura certainement (2.29) si

$$\frac{\gamma c^{1+\frac{2}{n}}}{\varepsilon^{2(1+\frac{2}{n})}} \leqslant \gamma^{-\frac{n}{2}} b^{-\frac{n^2}{4}}$$

$$\gamma^{1+\frac{n}{2}} c^{1+\frac{2}{n}} \leqslant \varepsilon^{2(1+\frac{2}{n})} b^{-\frac{n^2}{4}}$$

$$b^{\frac{n^2}{4}} d^{1+\frac{n}{2}} c^{1+\frac{2}{n}} \leqslant k_o^{\frac{4}{n}+2} \varepsilon^{2(1+\frac{2}{n})} \;,$$

ce qui est acquis si $k_o \geqslant \frac{d_1}{\varepsilon}$ avec d_1 assez grand.

Choisissant $k_o = \max(\frac{d_1}{\varepsilon} , \frac{1}{\varepsilon^2})$, on sera assuré que $J_h \longrightarrow 0$ $h \longrightarrow \infty$, et on sait que cela entraîne

$$0 \leqslant v \leqslant 2k_o \leqslant \frac{d}{\varepsilon^2} \quad \text{sur} \quad B_{\rho_o(1-\sigma_o)} \;,$$

ce qui, on l'a dit entraîne (2.17).

3. Démonstration du théorème 1.1.

3.1. Inégalités de Sobolev.

On appelle $S = S_\varepsilon$ la surface

(3.1) $$S_\varepsilon = \{(x,x_{n+1}) | x \in \Omega , x_{n+1} = u_\varepsilon(x)\} .$$

Lemme 3.1.

On suppose que pour $0<\varepsilon\leq\varepsilon_0$, les fonctions $u = u_\varepsilon \in \mathscr{C}^2(\Omega)$ et vérifient (1.17)(1.18). Soit Ω_* un ouvert quelconque $\Omega_* \subset\subset \Omega$, et soit Ω' un ouvert dont l'enveloppe convexe fermée est incluse dans Ω_*.

Alors pour toute fonction f régulière égale à 0 sur la frontière $\partial\Omega'$ de Ω', on a

$$(3.2) \qquad \left(\int_{S'} |f|^{\frac{n}{n-1}} dH_n\right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \beta(\Omega_*) \int_{S'} |\delta f| dH_n ,$$

où δ est construit comme en (1.8) à partir de u_ε,

$dH_n = \sqrt{1+u_{\varepsilon x}^{\ 2}}\, dx$ et $S' = \{(x,x_{n+1}), x \in \Omega', x_{n+1} = u_\varepsilon(x)\}$.

La constante β dépend des données et de Ω_*.

Démonstration. Ceci est l'analogue pour notre situation du lemme 1 de [16] et la démonstration est maintenant identique compte tenu des résultats déjà établis.

La seule différence apparaît dans le choix de ω_0 ; il nous faut prendre ici

$$\omega_0 = C_1^{-1} \left[\sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} (\varepsilon u_i + a_i(x,u,u_x))\, \widehat{dx_i} + x_{n+1}\, a(x,u,u_x)\, \widehat{dx_{n+1}}\right]$$

en sorte que

$$d\omega_0 = \frac{(-1)^{n-1}}{C_1} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} (\varepsilon u_i + a_i(x,u,u_x) - a(x,u,u_x)\right] dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n+1} = 0 ,$$

et que $\omega_0 = d\,\phi$.

On a par ailleurs avec (2.17), (1.2), (1.4), (1.18),

$$\sum_{i=1}^{n+1} |\omega_{oi}(x)|^2 \leqslant \frac{1}{C_1^2} \Big(\sum_{i=1}^{n} 2\, \varepsilon^2\, u_i(x)^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} (a_i(x,u,u_x))^2 + M_o^2\, \mu_3(M_o)^2 \Big)$$

$$\leqslant \frac{1}{C_1^2} \Big(2\, C^2(\Omega_*) + 2n\, \mu_o(M_o)^2 + M_o^2\, \mu_3(M_o)^2 \Big) ;$$

La condition $\max\limits_{Q_M} \sum\limits_{i=1}^{n} |\omega_{oi}(x)|^2 \leqslant 1$ sera réalisée si on prend

$$C_1 = (2\, C^2(\Omega_*) + 2n\, \mu_o(M_o)^2 + M_o^2\, \mu_3(M_o)^2)^{\frac{1}{2}} \tag{3.3}$$

Le raisonnement se poursuit ensuite sans modification et la minoration (2.38) de [1] reste valable en sorte que l'on obtient exactement les mêmes inégalités à condition de remplacer C_1 par l'expression (3.3).

Lemme 3.2.

Dans les conditions du lemme 3.1 si g est une fonction régulière, nulle sur $\partial\Omega'$,

$$\int_{S'} g^2\, dH_n \leqslant \beta'(\Omega_*)\, H_n^{\frac{2}{n}}(S') \int_{S'} |\delta g|^2\, dH_n , \tag{3.4}$$

β' dépendant de Ω_* et des données.

Démonstration. On pose $f = g^{2(n-1)/n}$ et on applique (3.2).

Remarque 3.1.

Cette inégalité (3.4) est un peu moins précise que l'inégalité analogue de [16] mais il est clair que cela sera suffisant pour une étude à l'intérieur de Ω .

3.2. Estimations a priori (suite).

On continue à noter $u = u_\varepsilon$, $v = v_\varepsilon = |\text{grad } u_\varepsilon|^2$ et on notera désormais

$$(3.5) \qquad w = \log(1+v) .$$

On a avec (2.5) (1) :

$$\frac{|w_x|^2}{1+u_x^2} \leqslant |\delta w|^2 = \frac{|\delta v|^2}{(1+v)^2} = \frac{4u_x^2|\delta u_x|^2}{(1+v)^2}$$

$$(3.6) \qquad w_x^2 \leqslant 4|\delta u_x|^2$$

L'inégalité (2.6) applicable sous les hypothèses du lemme 2.2 donne, pour $\alpha=0$:

$$\varepsilon\int_\Omega u_{\ell i}\, u_{\ell i}\, \zeta^2\, dx + \int_\Omega \frac{|\delta u_x|^2}{\sqrt{1+v}}\, \zeta^2\, dx$$

$$\leqslant d\, \varepsilon\int_\Omega (1+u_x^2)\, \zeta_x^2\, dx + d\int_\Omega |\delta\zeta|^2 \sqrt{1+u_x^2}\, dx + d\int_\Omega \sqrt{1+u_x^2}\, \zeta^2\, dx .$$

Soit Ω_* un ouvert quelconque $\Omega_* \subset\subset \Omega$; si $\operatorname{supp} \zeta \subset \Omega_*$, on aura avec (2.7) :

---

(1) Pour toute fonction ϕ régulière $|\phi x| \leqslant \sqrt{1+u_x^2}\, |\delta\phi|$.

$$(3.7)\quad \varepsilon \int_\Omega u_{\ell i}\, u_{\ell i}\, \zeta^2\, dx + \int_\Omega \frac{|\delta u_x|^2}{\sqrt{1+v}}\, \zeta^2\, dx$$

$$\leqslant d \left\{ \int_\Omega (\varepsilon(1+u_x^2) + \sqrt{1+u_x^2})\, dx \right\} \max_{\Omega_*}(\zeta^2+\zeta_x^2) .$$

D'après (2.2) l'intégrale figurant dans le membre de droite de (3.7) est majorée par une constante $c = c(\Omega_*)$, d'où

$$(3.8)\quad \varepsilon \int_\Omega u_{\ell i}\, u_{\ell i}\, \zeta^2\, dx + \int_\Omega \frac{|\delta u_x|^2}{\sqrt{1+v}}\, \zeta^2\, dx \leqslant c(\Omega_*) \max_{\Omega_*}(\zeta^2+\zeta_x^2) ;$$

et avec (3.6) on obtient :

$$(3.9)\quad \varepsilon \int_\Omega u_{\ell i}\, u_{\ell j}\, \zeta^2\, dx + \int_\Omega \frac{w_x^2}{\sqrt{1+v}}\, \zeta^2\, dx \leqslant c(\Omega_*) \max_{\Omega_*}(\zeta^2+\zeta_x^2) ,$$

pourvu que ζ soit régulière et que $\operatorname{supp} \zeta \subset \Omega_* \subset\subset \Omega$.

<u>Lemme 3.3.</u>

$$(3.10)\qquad \int_{\Omega_*} w^2\, dx \leqslant c(\Omega_*) ,\ \Omega_* \subset\subset \Omega \quad .$$

<u>Démonstration</u>. D'après (2.2) , $\int_{\Omega_0} \sqrt{1+v}\, dx \leqslant c(\Omega_*)$, et il existe $d>0$ tel que $\log(1+s) \leqslant d(1+s)^{\frac{1}{4}}$ pour $s \geq 0$, c'est-à-dire ici, $w^2 \leqslant d^2 \sqrt{1+v}$.

Lemme 3.4.

$$(3.11)\qquad \int_{S*} w^2\, dH_n = \int_{\Omega_*} w^2 \sqrt{1+v}\, dx \leqslant c(\Omega_*)\ ,\ \forall\, \Omega_* \subset\subset \Omega\ .$$

Démonstration. Soit Ω' un ouvert, $\Omega_* \subset\subset \Omega'_* \subset\subset \Omega$ et soit ζ une fonction régulière, $\zeta=1$ sur Ω_*, supp $\zeta \subset \Omega'_*$. On multiplie (1.17) par $u\, w^2 \zeta^2$, on intègre en x dans Ω et on intègre par parties :

$$\varepsilon\int_\Omega u_x^2\, w^2\, \zeta^2\, dx + 2\varepsilon\int_\Omega u_i\, u\, w\, w_i\, \zeta^2\, dx + 2\varepsilon\int_\Omega u_i\, u\, w^2\, \zeta\, \zeta_i\, dx$$

$$+ \int_\Omega a_i\, u_i\, w^2\, \zeta^2\, dx + 2\int_\Omega a_i\, u\, w\, w_i\, \zeta^2\, dx + 2\int_\Omega a_i\, u w^2 \zeta \zeta_i\, dx$$

$$= -\int_\Omega a\, u\, w^2\, \zeta^2\, dx\ .$$

On note $I_1, \ldots, I_6$ les intégrales figurant à gauche et l'intégrale figurant à droite.

Comme $w_i = \dfrac{v_i}{1+v} = \dfrac{2u_\ell\, u_{\ell i}}{1+v}$,

$$I_2 = 4\varepsilon \int_\Omega \frac{u_i\ u\ w\ u_\ell\ u_{\ell i}}{1+v}\, \zeta^2\, dx\ .$$

$$|I_2| \leqslant 4\varepsilon\, M_o \int_\Omega \frac{u_x^2}{1+v}\, (u_{\ell i}\, u_{\ell i})^{\frac{1}{2}}\, w\, \zeta^2\, dx$$

$$|I_2| \leqslant 4\varepsilon\, M_o \int_\Omega (u_{\ell i}\, u_{\ell i})^{\frac{1}{2}}\, w\, \zeta^2\, dx$$

$$|I_2| \leqslant \varepsilon \int_\Omega u_{\ell i}\, u_{\ell i}\, \zeta^2\, dx + \varepsilon\, d \int_\Omega w^2\, \zeta^2\, dx \,.$$

D'après (3.9 et (3.10), comme supp $\zeta \subset \Omega'_*$,

$$|I_2| \leqslant c(\Omega'_*) \max_{\Omega'_*}(\zeta^2+\zeta_x^2) \,.$$

$$|I_3| \leqslant 2\varepsilon \left(\int_\Omega u_x^2\, w^2\, \zeta^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega u^2\, w^2\, \zeta_x^2\, dx\right)$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \int_\Omega u_x^2\, w^2\, \zeta^2\, dx + d \int_\Omega w^2\, \zeta_x^2\, dx$$

$$|I_3| \leqslant \frac{I_1}{2} + c(\Omega'_*) \max_{\Omega'_*}(\zeta_x^2) \,.$$

Par (1.3),

$$I_4 \geqslant \mu_1(M_o) \int_\Omega \sqrt{1+u_x^2}\, w^2\, \zeta^2\, dx - \mu_2(M_o) \int_\Omega w^2\, \zeta^2\, dx$$

$$= I'_4 - \mu_2(M_o) \int_\Omega w^2\, \zeta^2\, dx$$

$$I_4 \geqslant I'_4 - c(\Omega'_*)(\max_{\Omega'_*} \zeta^2) \,.$$

$$|I_5| \leqslant 2\mu_o(M_o)\, M_o n^{\frac{1}{2}} \int_\Omega w\, |w_x|\, \zeta^2\, dx$$

$$\leqslant \frac{\mu_1(M_o)}{2} \int_\Omega \sqrt{1+v}\, w^2\, \zeta^2\, dx + d \int_\Omega \frac{w_x^2}{\sqrt{1+v}}\, \zeta^2\, dx$$

$$|I_5| \leqslant \frac{I'_4}{2} + d \int_\Omega \frac{w_x^2}{\sqrt{1+v}}\, \zeta^2\, dx$$

D'après (3.9) on obtient enfin pour I_5 ,

$$|I_5| \leqslant \frac{I_4'}{2} + c(\Omega_*')(\max_{\Omega_*'}(\zeta^2+\zeta_x^2)) \ .$$

$$|I_6| \leqslant 2\mu_o(M_o)\ M_o\ n^{\frac{1}{2}} \int_\Omega w^2\ \zeta|\zeta_x|\ dx \leqslant d\int_\Omega w^2(\zeta^2+\zeta_x^2)\ dx$$

$$\leqslant (\text{par}(3.10)) \leqslant c(\Omega_*')(\max_{\Omega_*'}(\zeta^2+\zeta_x^2)) \ .$$

$$I_7 \leqslant \mu_3(M_o)\ M_o \int_\Omega w^2\ \zeta^2\ dx \leqslant c(\Omega_*')(\max_{\Omega_*'}\ \zeta^2) \ .$$

Regroupant toutes ces inégalités, on obtient :

$$(3.12) \qquad \varepsilon\int_\Omega u_x^2\ w^2\ \zeta^2\ dx + \int_S w^2\ \zeta^2\ dH_n \leqslant c(\Omega_*')(\max_{\Omega_*'}(\zeta^2+\zeta_x^2)) \ ,$$

et (3.11) en résulte.

3.3. <u>Estimations a priori (fin)</u>.

<u>Lemme 3.5</u>.

<u>Soit</u> Ω_* <u>un ouvert</u>, $\Omega_* \subset\subset \Omega$ <u>et soit</u> ζ <u>une fonction régulière à support dans</u> Ω_* . <u>Alors on a</u>, <u>pour</u> k>

$$(3.13) \qquad \int_{S_k} |\delta w|^2\ \zeta^2\ dH_n \leqslant c(\Omega_*') \int_{S_k} |\zeta_x|^2(w-k)^2\ dH_n$$

$$+ c(\Omega_*')\ H_n^{1+\frac{2}{n}}\ (S_k \cap \widetilde{\text{Supp } S})\ \max_\Omega \zeta^2 \ ,$$

où $S_k = \{(x,x_{n+1}) | (x,x_{n+1}) \in S \ , \ w(x) > k\}$

et $\widetilde{\operatorname{supp} S} = \{(x,x_{n+1}) | (x,x_{n+1}) \in S \ , \ x \in \operatorname{supp} \zeta\}$.

Démonstration. On multiplie (2.1) par $(w-k)_+ \zeta^2$, on intègre en x et on intègre par parties ; on note $\mathcal{O}_k = \{x | x \in \Omega ,$ $w(x) > k\}$; on a :

$$\frac{\varepsilon}{2} \int_{\mathcal{O}_k} v_i \, w_i \, \zeta^2 \, dx + \varepsilon \int_{\mathcal{O}_k} v_i (w-k) \, \zeta \, \zeta_i \, dx + \varepsilon \int_{\mathcal{O}_k} u_{\ell i} \, u_{\ell i} \, (w-k) \zeta^2 \, dx$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\mathcal{O}_k} a_{ij} \, v_j \, w_i \, \zeta^2 \, dx + \int_{\mathcal{O}_k} a_{ij} \, v_j (w-k) \zeta_i \, \zeta \, dx$$

$$+ \int_{\mathcal{O}_k} a_{ij} \, u_{\ell i} \, u_{\ell j} (w-k) \zeta^2 \, dx$$

$$= \int_{\mathcal{O}_k} A(w-k) \zeta^2 \, dx \leq \text{(par (1.11))}$$

$$\leq \mu_6(M_o) \int_{\mathcal{O}_k} |\delta u_x| (w-k) \zeta^2 \, dx + \mu_2(M_o) \int_{\mathcal{O}_k} (w-k) \sqrt{1+v} \, \zeta^2 \, dx \, .$$

On appelle $I_1, \ldots, I_6$ les intégrales figurant à gauche dans cette inégalité et I_7, I_8 celles figurant à droite.

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{2} \int_{\mathcal{O}_k} \frac{v_x^2}{1+v} \zeta^2 \, dx$$

$$|I_2| \leqslant \varepsilon \int_{Q_k} |v_x| (v-k) \zeta |\zeta_x| \, dx$$

$$\leqslant \varepsilon \Big(\int_{Q_k} \frac{v_x^2}{1+v} \zeta^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int (1+v)(v-k)^2 \, \zeta_x^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{4} \int_{Q_k} \frac{v_x^2}{1+v} \zeta^2 \, dx + d\varepsilon \int_{Q_k} (1+v)(v-k)^2 \, \zeta_x^2 \, dx \, .$$

D'après (2.17)

$$|I_2| \leqslant \frac{I_4}{2} + c(\Omega_M) \int_{Q_k} (v-k)^2 \sqrt{1+v} \; \zeta_x^2 \, dx$$

$$|I_2| \leqslant \frac{I_4}{2} + c(\Omega_M) \int_{S_k} (v-k)^2 \; \zeta_x^2 \, dH_n \, .$$

$$I_4 = \frac{1}{2} \int_{Q_k} a_{ij} \; v_j \; v_i (1+v) \; \zeta^2 \, dx \geqslant \text{(par (1.5))}$$

$$\geqslant \frac{\mu_4(M_0)}{2} \int_{Q_k} |\delta v|^2 \sqrt{1+v} \; \zeta^2 \, dx$$

$$I_4 \geqslant \frac{\mu_4(M_0)}{2} \int_{S_k} |\delta v|^2 \; \zeta^2 \, dH_n = I_4' \, .$$

$$|I_5| \leqslant \int_{Q_k} (a_{ij} \; v_j \; v_i)^{\frac{1}{2}} \; (a_{ij} \; \zeta_i \; \zeta_j)^{\frac{1}{2}} \; (v-k)\zeta \, dx$$

$$\leqslant \mu_5(M_0) \int_{Q_k} \frac{|\delta v| \, |\delta \zeta|}{\sqrt{1+v}} \; (v-k)\zeta \, dx$$

$$\leqslant \mu_5(M_0) \int_{S_k} |\delta v| \; |\delta \zeta| (v-k) \zeta \, dH_n$$

$$|I_5| \leqslant \frac{\mu_4(M_o)}{4} \int_{S_k} |\delta w|^2\ \zeta^2\ dH_n + d \int_{S_k} |\delta\zeta|^2\ (w-k)^2\ dH_n$$

$$|I_5| \leqslant \frac{I_4'}{2} + d \int_{S_k} |\delta\zeta|^2\ (w-k)^2\ dH_n\ .$$

$$|I_5| \leqslant (\text{par } (2.7)) \leqslant \frac{I_4'}{2} + d \int_{S_k} \zeta_x^2 (w-k)^2\ dH_n\ .$$

$$I_6 \geqslant \mu_4(M_o) \int_{\mathcal{O}_k} \frac{|\delta u_x|^2}{\sqrt{1+v}}\ (w-k)\ \zeta^2\ dx = I_6'\ .$$

$$I_7 \leqslant \mu_6(M_o) \left(\int_{\mathcal{O}_k} \frac{|\delta u_x|^2}{\sqrt{1+v}}\ (w-k)\ \zeta^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathcal{O}_k} \sqrt{1+v}\ (w-k)\ \zeta^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$I_7 \leqslant \frac{\mu_4(M_o)}{2} \int_{\mathcal{O}_k} \frac{|\delta u_x|^2}{\sqrt{1+v}}\ (w-k)\zeta^2\ dx + d \int_{\mathcal{O}_k} \sqrt{1+v}\ (w-k)\zeta^2\ dx$$

$$I_7 \leqslant \frac{I_6'}{2} + d \int_{S_k} (w-k)\ \zeta^2\ dH_n\ .$$

$$I_8 = \mu_7(M_o) \int_{S_k} (w-k)\ \zeta^2\ dH_n\ .$$

Regroupant toutes ces majorations, on trouve :

$$(3.14) \qquad \int_{S_k} |\delta w|^2\ \xi^2\ dH_n \leqslant c(\Omega_*) \int_{S_k} (w-k)^2\ \zeta_x^2\ dH_n + d \int_{S_k} (w-k)\ \zeta^2\ dH_n$$

A partir de (3.4) et (3.14), on obtient (3.13) exactement comme en [16] .

Fin de la démonstration du théorème 1.1 : à partir de (3.4), (3.10) et (3.13) on démontre que $w \leq 2k_o$ pour k_o assez grand mais indépendant de ε , toutes les constantes dans (3.4), (3.10), (3.13) étant indépendantes de ε . Le principe du raisonnement est le même qu'en [16] ; le fait que l'on ait ζ_x^2 au lieu de $|\delta\zeta|^2$ dans l'intégrale du membre droit de (3.13) n'altère en rien le raisonnement.

Cela démontre complètement le théorème 1.1.

Remarque 3.2.

L'ouvert Ω ne jouant pas de rôle particulier, on peut obtenir (1.19) si l'on remplace (1.18) par

$$(3.15) \qquad \sup_{0<\varepsilon\leq\varepsilon_o} \ \sup_{x\in\Omega''} |u_\varepsilon(x)| \leq M_o(\Omega') < +\infty \ , \quad \forall\, \Omega'' \subset\subset \Omega \ .$$

Remarque 3.3.

Il est certain qu'avec (1.5) et le théorème 1.1 on doit pouvoir obtenir des estimations à l'intérieur des dérivées d'ordre supérieur de u_ε , utilisant pour cela les méthodes de [15] , [4], [8]. Nous expliciterons seulement le résultat simple suivant,

Lemme 3.6.

Sous les conditions du théorème 1.1,

$$(3.16) \qquad \sup_{0<\varepsilon\leq\varepsilon_o} \left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\right|_{H^1(\Omega')} < +\infty \ , \quad \forall\, \Omega' \subset\subset \Omega, \quad i=1,\ldots,n \ .$$

Démonstration. Avec un choix convenable de ζ , (3.7) entraîne

$$(3.17) \qquad \int_{\Omega'} \frac{|\delta u_x|^2}{\sqrt{1+v}}\, dx \leq c(\Omega') \ .$$

Mais on vérifie aisément que

$$|\delta u_x|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\delta u_i|^2 \geqslant \frac{|\mathrm{grad}\ u_i|^2}{1+u_x^2} = \frac{|\mathrm{grad}\ u_i|^2}{1+v}$$

Avec cette inégalité et l'inégalité $\dfrac{1}{(1+v)^{3/2}} \geqslant \alpha(\Omega') > 0$ sur Ω' (déduite de (1.18)) on obtient évidemment le résultat annoncé.

-:-:-:-

II. DUALITE EN CALCUL DES VARIATIONS.

4. Rappels.

Nous faisons ici quelques rappels d'analyse convexe (cf. [26], [20]).

4.1. Rappels sur la dualité.

Soient V et Y deux espaces de Banach réels et respectivement V^* et Y^* les espaces duals topologiques (1). Aucune ambiguïté n'étant à craindre en général, on notera indifféremment $<.,.>$ le produit scalaire dans la dualité entre V et V^* ou entre Y et Y^* ; les éléments de V seront notés $u, v, w, \ldots$, ceux de V^*, $u^*, v^*, w^*, \ldots$, ceux de Y et Y^*, $p, q, r, \ldots$, et respectivement $p^*, q^*, r^*, \ldots$

On se donne un opérateur L linéaire continu de V dans Y, $L \in \mathcal{L}(V,Y)$, et on appelle L^* son adjoint, $L^* \in \mathcal{L}(Y^*,V^*)$. Soit aussi F (resp. G) une fonction convexe de V (resp. Y) dans $]-\infty,+\infty]$, supposée convexe, propre (2), et semi-continue inférieurement. On sait que l'on peut associer à F (resp. G) une fonctionnelle conjuguée F^* (resp. G^*) :

$$(4.1) \qquad F^* : V^* \longmapsto]-\infty,+\infty],$$

$$(4.2) \qquad F^*(u^*) = \operatorname*{Sup}_{u\in V} \{<u^*,u> - F(u)\}, \quad \forall u^* \in V^*,$$

$$(4.3) \qquad G^* : Y^* \longmapsto]-\infty,+\infty]$$

$$(4.4) \qquad G^*(p^*) = \operatorname*{Sup}_{p\in Y} \{<p^*,p> - G(p)\}, \quad \forall p^* \in Y^*,$$

(1) On s'écarte un peu, par commodité, de la notation plus standard V', Y'.

(2) C'est-à-dire non identiquement égale à $+\infty$.

et la fonctionnelle F^* (resp. G^*) est également convexe, propre et semi-continue inférieurement sur V^* (resp. Y^*). Pour cela et pour tout ce qui concerne les fonctionnelles convexes, on se reportera à Moreau [19] et Rockafellar [26].

Le problème d'optimisation auquel on s'intéresse est le

Problème $\mathcal{P}$.

$$\inf_{v\in V} \{F(v) + G(Lv)\} . \tag{4.5}$$

Nous appelons avec Fenchel [7] et Rockafellar [24] problème dual de $\mathcal{P}$ le problème $\mathcal{P}^*$ ci-après :

Problème $\mathcal{P}^*$.

$$\sup_{p^*\in Y^*} \{-F^*(L^*p^*) - G^*(-p^*)\} . \tag{4.6}$$

On note $\inf \mathcal{P}$ l'infinimum dans (4.5), et on appellera solution de $\mathcal{P}$ tout élément de V qui réalise le minimum dans (4.5) ; définition analogue de $\sup \mathcal{P}^*$ et d'une solution de $\mathcal{P}^*$.

On démontre alors les résultats suivants :

Proposition 4.1.

Sous les hypothèses précédentes, on a

$$-\infty \leq \sup \mathcal{P}^* \leq \inf \mathcal{P} \leq +\infty . \tag{4.7}$$

Proposition 4.2.

Les hypothèses sont celles qui précèdent et en outre

$$(4.8)\begin{cases}\underline{\text{il existe}}\quad u_o \in V \quad \underline{\text{tel que}}\quad F(u_o) < +\infty\,, \\ \underline{\text{la fonction}}\quad G \quad \underline{\text{étant finie et}} \\ \underline{\text{continue en}}\quad L\,u_o\,;\end{cases}$$

<u>Alors le problème</u> $\mathcal{P}$ <u>possède au moins une solution</u> p^* <u>et</u>

$$(4.9)\qquad \inf \mathcal{P} = \max \mathcal{P}^* .$$

<u>Si le problème</u> $\mathcal{P}$ <u>possède également une solution</u> u , <u>alors on a les relations suivantes</u>

$$(4.10)\qquad F(u) + F^*(L^*p^*) = \langle L^*p^*, u\rangle$$

$$(4.11)\qquad G(Lu) + G^*(p^*) = \langle p^*, Lu\rangle .$$

Les résultats précédents sont donnés dans [24] sous une forme un peu différente et un peu plus générale ; cf. aussi [27].

<u>Remarque 4.1.</u> Il résulte de (4.2) que

$$F^*(v^*) + F(v) \geq \langle v^*, u\rangle\,,\ \forall\, v^* \in V^*,\ \forall\, v \in V\ ;$$

(remarque analogue pour G). Pour cette raison les relations (4.10) et (4.11) seront appelées relations d'extrèmalité.

4.2. <u>Sous différentiabilité</u>.

Nous rappelons à présent quelques définitions et propriétés des sous-différentiels et des sous-différentiels à ε près (cf. [3], [19], [24]) ; résultats qui seront utilisés au n°6.

Soit G une fonctionnelle convexe propre et s.c.i., définie sur un espace de Banach Y , à valeurs dans $]-\infty,+\infty]$; soit Y^*

l'espace dual de Y et G^* la fonctionnelle conjuguée de G ($G^* : Y^* \longmapsto]-\infty,+\infty]$).

On appelle sous-différentiel de G au point $y_o \in Y$, l'ensemble des $y^* \in Y^*$ tels que

$$(4.11) \qquad G(y) \geq G(y_o) + \langle y^*, y-y_o \rangle , \quad \forall y \in Y ,$$

ou, ce qui revient au même

$$(4.12) \qquad G^*(y^*) + G(y_o) - \langle y^*, y_o \rangle = 0$$

On note $\partial G(y_o)$ cet ensemble. En raison de la symétrie de (4.12) et G étant la fonctionnelle conjuguée de G^*,

$$(4.13) \qquad y^* \in \partial G(y_o) \iff y_o \in \partial G^*(y^*) .$$

Pour $\varepsilon > 0$ donné, on appelle sous-différentiel à ε près de G au point y (et on note $\partial_\varepsilon G(y)$) l'ensemble

$$(4.14) \qquad \partial_\varepsilon G(y) = \{y^* \in Y^*, 0 \leq G^*(y^*)+G(y)-\langle y^*, y\rangle \leq \varepsilon\}$$

(l'inégalité de gauche, $0 \leq \ldots$, est automatique $\forall y, y^*$).

On a pour les sous-différentiels à ε près le résultat fondamental suivant

Proposition 4.3.

Soit G une fonctionnelle de $Y \longmapsto]-\infty,+\infty]$, Y espace de Banach, G propre, convexe et s.c.i.

Alors si $y^* \in \partial_\varepsilon G(y)$, il existe $y^*_\varepsilon \in Y^*$, $y_\varepsilon \in Y$ tels que

$$(4.15) \qquad \|y^*_\varepsilon - y^*\|_{Y^*} \leq \sqrt{\varepsilon} \;, \quad \|y_\varepsilon - y\|_Y \leq \sqrt{\varepsilon} \;,$$

et

$$(4.16) \qquad y^*_\varepsilon \in \partial G(y_\varepsilon) \;.$$

Un résultat plus précis est donné en [3], [19], mais celui qui précède nous suffira ici.

5. Applications.

Nous allons donner quelques applications simples des concepts de dualité rappelés au n°4.1, à des problèmes de calcul des variations. Les espaces V et Y seront alors des espaces fonctionnels [(1)] et L un opérateur différentiel. Chaque exemple sera écrit sous la forme d'un problème $\mathcal{P}$; la condition (4.8) sera facilement vérifiée et on exploitera alors la proposition 4.2 et en particulier les relations d'extrémalité.

Dans toute la suite Ω désignera un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ et on supposera que

(5.1) Γ est une variété deux fois continument différentiable de dimension $n-1$, et Ω est situé localement d'un

(1) du type espace L^p ou espace de Sobolev. On suppose le lecteur familiarisé avec ces espaces ; les notations utilisées sont à peu près standard et sont celles de [17].

seul côté de Γ.

Exemple 1.

Il s'agit du problème (cf. [21], [18]) :

$$(5.2) \qquad \operatorname*{Inf}_{u\in H_0^1(\Omega)} \left\{\frac{\alpha}{2}\int_\Omega |\text{grad } u(x)|^2\, dx + \beta\int_\Omega |\text{grad } u(x)|dx - \int_\Omega f(x)\, u(x)\, dx\right\}$$

où α et β sont des constantes >0 et $f\in L^2(\Omega)$ est donné.

Posons $V = H_0^1(\Omega)$, muni du produit scalaire

$$((u,v))_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)_{L^2(\Omega)},$$

et $Y = L^2(\Omega)^n$; alors $V^* = H^{-1}(\Omega)$ et $X^* = X = L^2(\Omega)^n$; l'opérateur L sera l'opérateur gradient et l'opérateur L^*, $-\text{div}$. On note

$$(5.3) \qquad F(v) = \frac{\alpha}{2}\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \langle f,v\rangle$$

$$(5.4) \qquad G(p) = \beta\int_\Omega |p(x)|\, dx .$$

Le problème $\mathcal{P}$

$$(5.5) \qquad \operatorname*{Inf}_{v\in V} \{F(v) + G(L_v)\}$$

est alors identique au problème (5.2).

On explicite aisément F^* et G^*

$$F^*(v^*) = \frac{1}{2\alpha} \| v^* + f \|_{V^*}$$

$$G^*(p^*) = \begin{cases} 0 & \text{si } |p^*(x)| \leq \beta \text{ p.p.} , \\ +\infty & \text{autrement} . \end{cases}$$

Le problème $\mathcal{P}^*$ s'écrit

$$(5.6) \qquad \sup_{\substack{p^* \in L^2(\Omega)^n \\ |p^*(x)| \leq \beta \text{ p.p.}}} \left\{ \frac{1}{2\alpha} \| f - \operatorname{div} p^* \|^2_{H^{-1}(\Omega)} \right\}$$

La condition (4.8) est manifestement réalisée et on a donc (4.9) et l'existence d'une solution p^* de (5.6).

Par ailleurs, les méthodes directes du calcul des variations donnent aisément l'existence et l'unicité d'une solution u de (5.2) (le problème $\mathcal{P}$). Il n'y a plus qu'à exploiter les relations d'extrémalité (4.10) et (4.11). On vérifie aisément qu'elles entraînent :

$$(5.7) \qquad -\alpha\Delta u + \operatorname{div} p^* = f \quad \text{dans } H^{-1}(\Omega) ,$$

$$(5.8) \qquad p^*(x) . \operatorname{grad} u(x) = \beta |\operatorname{grad} u(x)| \quad \text{p.p. dans } \Omega .$$

En "remontant" les calculs, on obtient facilement le résultat réciproque, et alors

Proposition 5.1.

Soit $u \in H_0^1(\Omega)$; u est solution de (5.2) si et seulement si il existe $p^* \in L^2(\Omega)^n$ (1) qui vérifie (5.7), (5.8) et

$$(5.9) \qquad |p^*(x)| \leq \beta \quad p.p.$$

Remarque 5.1.

Il n'y a pas en général une manière unique de dualiser un problème de calcul des variations. Par exemple, les autres définitions étant inchangées, on peut poser

$$F(v) = - \langle f,v \rangle$$

$$G(p) = \int_\Omega (\alpha|p(x)|^2 + \beta|p(x)|)\, dx \; ,$$

et obtenir une méthode différente pour "dualiser" le problème (5.2).

Remarque 5.2.

Une variante du problème (5.2) apparaît en mécanique des fluides non newtoniens. Pour les applications de la dualité cf. [6]. Pour les applications numériques cf. [9], [10].

Exemple 2.

On considère le problème

$$(5.10) \qquad \operatorname*{Inf}_{\substack{u \in H^2(\Omega) \\ u \in C}} \int_\Omega \sqrt{1+(\ u)^2}\, dx \; ,$$

(1) il n'y a pas unicité d'un tel p^*.

où $C \subset H^2(\Omega)$ est le convexe

$$\{u \mid u-\phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega \,,\ \frac{\partial}{\partial\nu}(u-\phi) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \,,\ \phi \text{ donné dans } H^2(\Omega)\} \,.$$

On pose $V = H^2(\Omega)$, $Y = L^2(\Omega)$, $L = \Delta$,

$F(v) = \psi_C(v)$ = fonction indicatrice de C (1)

$G(p) = \int_\Omega \sqrt{1+p(x)^2}\, dx$.

Le problème $\mathcal{P}$ est alors idéntique au problème (5.10). On a aisément

$$F^*(v^*) = \langle v^*,\phi\rangle + \psi_{C^*}(v^*)$$

$$G^*(p^*) = -\int_\Omega \sqrt{|1-p\ (x)^2|}\, dx + \psi_{D^*}(p^*) \,,$$

où

$C^* = H_0^2(\Omega)^\circ$ = l'ensemble polaire de $H_0^2(\Omega)$ dans V^* ,

$D^* = \{p^* \mid p^* \in Y^* = L^2(\Omega),\ |p^*(x)| \leq 1 \text{ p.p.}\}$.

On vérifie que $L^*p^* \in L^*$ équivaut à

(5.11) $$\Delta p^* = 0 \,,$$

et le problème $\mathcal{P}^*$ s'écrit

(5.12) $$\sup_{\substack{p^* \in L^2(\Omega) \\ |p^*(x)| \leq 1 \\ \Delta p^* = 0}} \left\{\int_\Omega \left(\sqrt{1-p^*(x)^2} - p^*(x)\,\Delta\phi(x)\right) dx\right\} \,.$$

---

(1) c'est-à-dire $\psi_C(v) = 0$ si $v \in C$, $\psi_C(v) = +\infty$ autrement.

La condition (4.8) est évidemment vérifiée. Le problème $\mathcal{P}^*$ a donc une solution p^* et $\inf \mathcal{P} = \max \mathcal{P}^*$. En fait l'existence de p^* est facile à obtenir par les méthodes directes du calcul des variations et comme $\int_\Omega \sqrt{1-p^*(x)^2}\, dx$ est strictement concave, le problème $\mathcal{P}^*$ possède une seule solution p^*. Le problème $\mathcal{P}$ ne possède pas nécessairement de solution mais si une telle solution u existe, alors la relation d'extrémalité [17] entraîne

$$(5.13)\quad \int_\Omega \{\sqrt{1+|\Delta u(x)|^2} - \sqrt{1-|p^*(x)|^2}\}dx = \int_\Omega p^*(x).\Delta u(x)\, dx$$

et on en déduit aisément la

<u>Proposition 5.2.</u>

<u>Le problème</u> $\mathcal{P}^*$ <u>possède une solution unique</u> p^* <u>et</u>

$$(5.14)\qquad \inf \mathcal{P} = \max \mathcal{P}^*,$$

<u>Si le problème</u> (5.10) <u>possède une solution</u> u <u>alors</u> p^* <u>vérifie</u> $|p^*(x)| < 1$ p.p. <u>et on a</u>

$$(5.15)\qquad \Delta u(x) = -\frac{p^*(x)}{\sqrt{1-p\ (x)^2}}\quad \text{p.p.}\ .$$

<u>Remarque 5.3.</u>

Supposons que le problème $\mathcal{P}$ ne possède pas de solution et que la fonction dans le second membre de (5.15) soit de carré sommable ; alors (5.15) et l'une des conditions $u = \phi$ ou $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial \phi}{\partial \nu}$ sur $\partial\Omega$, définissent un élément unique $u \in H^2(\Omega)$. Il est naturel de se demander ce que représente ces fonctions pour le problème (5.10). Il s'agit là d'un problème ouvert ; le problème analogue pour certains problèmes d'optimisations autres que (5.10) est résolu dans la troisième partie.

Exemple 3.

Considérons ici un problème du type hypersurfaces minima non paramétriques :

$$(5.16) \qquad \operatorname*{Inf}_{\substack{u \in W^{1,1}(\Omega) \\ u \in C}} \left\{ \int_\Omega \sqrt{1+|\text{grad } u|^2}\, dx \right\} ,$$

où C est un ensemble convexe fermé de $W^{1,1}(\Omega)$; par exemple dans le cas des hypersurfaces minima non paramétriques, $C = C_o$,

$$(5.17) \qquad C_o = \{u \mid u \in W^{1,1}(\Omega) \ , \ u = \phi \ \text{ sur } \ \partial\Omega\} ,$$

$\phi \in W^{1,1}(\Omega)$ donné, et, dans le cas avec obstacles , $C = C_o \cap C_1$,

$$(5.18) \qquad C_1 = \{u \mid u \in W^{1,1}(\Omega) \ , \ u(x) \geqslant \theta(x) \ \text{ p.p.}\} ,$$

où $\theta \subset W^{1,1}(\Omega)$ est donné.

On pose, dans le cas du problème

(5.16) $V = W^{1,1}(\Omega)$, $Y = L^1(\Omega)^n$, $Y^* = L^\infty(\Omega)^n$, $L = \text{grad}$, et,

$$F(v) = \psi_C(v) ,$$

$$G(p) = \int_\Omega \sqrt{1+|p(x)|^2}\ dx .$$

On a facilement

$$F^*(v^*) = \sup_{v\in C} \langle v^*, v\rangle = \mathcal{A}_C(v^*)^{(1)} ,$$

$$G^*(p^*) = \psi_{D^*}(p^*) - \int_\Omega \sqrt{1-|p^*(x)|^2}\, dx ,$$

$$D^* = \{p^* | p^* \in L^\infty(\Omega)^* , |p^*(x)| \leqslant 1 \ \text{p.p.}\} .$$

Le problème $\mathcal{P}^*$ s'écrit

$$(5.19) \qquad \sup_{\substack{p^*\in L^\infty(\Omega)^n \\ |p^*(x)|\leqslant 1 \ \text{p.p.}}} \{ - \mathcal{A}_C(L^*p^*) + \int_\Omega \sqrt{1-|p^*(x)|^2}\, dx\}$$

La condition (4.8) est manifestement vérifiée et la proposition 4.2 est donc applicable. Le problème (5.19) admet une solution p^* qui est unique puisque $p^* \longmapsto \int_\Omega \sqrt{1-|p^*(x)|^2}\, dx$ est strictement concave sur la boule unité de $L^\infty(\Omega)^n$. On a alors, utilisant les relations d'extrémalité :

<u>Proposition 5.3.</u>

<u>Le problème</u> $\mathcal{P}^*$ <u>possède une solution unique</u> p^* <u>et</u>

$$(5.20) \qquad \inf \mathcal{P} = \max \mathcal{P}^* .$$

<u>Si le problème</u> (5.15) <u>possède une solution</u> u , <u>alors</u> p^* <u>vérifie</u> $|p^*(x)| < 1$ p.p. <u>et on a</u>

(1) On dit [19] que $F^*(v^*) = \mathcal{A}_C(v^*)$ est la fonction d'appui du convexe C .

$$\text{(5.21)} \qquad \operatorname{grad} u(x) = - \frac{p^*(x)}{\sqrt{1-|p^*(x)|^2}} \quad \text{p.p.}$$

Remarque 5.4.

Explicitant $\mathcal{A}_{C_o}$, on vérifie aisément que pour $C = C_o$ on a $\operatorname{div} p^* = 0$. Si maintenant Ω est simplement connexe alors on peut introduire une fonction ζ telle que $p^* = (\frac{\partial \zeta}{\partial x_2} , - \frac{\partial \zeta}{\partial x_1})$, liée à u par (5.21) ; ζ apparaît dans de nombreux travaux sur les surfaces minimums (par exemple [J. Serre]) et s'appelle la fonction conjuguée de u . La proposition 5.3 est alors un résultat d'existence et d'unicité (à C près) de cette fonction conjuguée, que l'on ait ou non existence de u .

Remarque 5.5. (analogue à la remarque 5.3).

Quand le problème (5.15) ne possède pas de solution, on peut se demander si le second membre de (5.21) est assez régulier pour représenter le gradient d'une fonction u localement sommable. Si oui, quelle relation existe-t-il alors entre le problème (5.15) et cette fonction u définie à une constante additive près par (5.21) ? Pour $C = C_o$, cf. la troisième partie ; dans les autres cas le problème est ouvert.

Remarque 5.6.

Il est évident que l'on peut, dans le cadre de ce numéro, varier à l'infini les exemples en modifiant les fonctionnelles, les opérateurs différentiels et les contraintes. Comme il a été dit, nous renvoyons au III et à [28] pour de nombreux autres exemples.

-:-:-:-

III. SOLUTIONS GENERALISEES DE CERTAINS PROBLEMES.

Nous nous proposons ici d'appliquer les méthodes du II et les résultats du I à certains problèmes de calcul des variations du type

$$(*) \qquad \operatorname*{Inf}_{u} \int_{\Omega} g(x,u(x),\operatorname{grad} u(x))\, dx .$$

Nous commencerons par quelques considérations techniques sur la fonction g et une fonctionnelle G associée.

6. Hypothèses.

6.1. Premières hypothèses sur g.

Soit $g = g(x,u,\xi)$ une fonction réelle et trois fois continument dérivable sur $\Omega \times \mathbb{R}^{n+1}$. Nous voulons tout d'abord que l'équation d'Euler du problème (*)

$$(6.1) \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} \frac{\partial g}{\partial \xi_i}(x,u,u_x) = \frac{\partial g}{\partial u}(x,u,u_x) ,$$

satisfasse aux hypothèses du théorème 1.1 ; c'est-à-dire $(a_i = \frac{\partial g}{\partial \xi_i}$, $a = \frac{\partial g}{\partial u})$ que pour tout $M>0$, il existe des constantes $\mu_1(M)$, ... , telles que $\forall x \in \Omega$, $\forall u \in \mathbb{R}$, $|u| \leq M$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$:

$$(6.2) \qquad \left|\frac{\partial g}{\partial \xi_i}(x,u,\xi)\right| \leq \mu_0(M) ,$$

$$(6.3) \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial \xi_i}(x,u,\xi)\xi_i \geq \mu_1(M)\sqrt{1+|\xi|^2} - \mu_2(M) ,$$

$$\mu_1(M) > 0 , \mu_2(M) \geq 0 ,$$

$$\left|\frac{\partial g}{\partial u}(x,u,\xi)\right| \leq \mu_3(M) ,$$

$$\mu_4(M)\frac{|\eta'|^2}{\sqrt{1+|\xi|^2}} \leq \frac{\partial^2 g}{\partial \xi_i\, \partial \xi_j}(x,u,\xi)\eta_i\eta_j \leq \frac{|\eta'|^2}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\mu_5(M)$$

En outre les conditions (1.13), (1.16) qui entraînent (1.11) s'écrivent : pour tout $M>0$ il existe $\mu(M)$ tel que $\forall\, x\in\Omega$, $\forall\, u\in\mathbb{R}$, $|u|\leq M$, $\forall\, \xi\in\mathbb{R}^n$:

$$(6.6) \quad \left|\frac{\partial^3 g}{\partial \xi_i\, \partial \xi_\ell\, \partial u}\right| \leq \frac{\mu(M)}{|\xi|^2} , \quad \left|\frac{\partial^3 g}{\partial \xi_i\, \partial \xi_\ell\, \partial x_j}\right| \leq \frac{\mu(M)}{|\xi|}$$

$$(6.7) \quad \left|\frac{\partial^3 g}{\partial \xi_\ell\, \partial \xi_j\, \partial u}\xi_j\right| \leq \frac{\mu(M)}{|\xi|^2} , \quad \frac{\partial^3 g}{\partial \xi_\ell\, \partial \xi_i\, \partial x_j}\xi_i\xi_j\Big| \leq \mu(M)$$

$$(6.8) \quad \left|\frac{\partial^3 g}{\partial \xi_i\, \partial u^2}\xi_i - \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\right| \leq \frac{\mu(M)}{|\xi|^2} , \quad \left|\frac{\partial^3 g}{\partial \xi_i\, \partial u\, \partial x_\ell}\xi_i - \frac{\partial^2 g}{u \quad x}\right| \leq \mu(M)$$

$$(6.9) \quad \left|\frac{\partial^3 g}{\partial \xi_i\, \partial u\, \partial x_i}\right| \leq \frac{\mu(M)}{|\xi|} , \quad \left|\frac{\partial^2 g}{\partial \xi_i\, \partial x_\ell\, \partial x_i}\right| \leq \mu(M) .$$

Il est bon de remarquer que (6.6), (6.9) sont <u>automatiquement vérifiées</u> si g est indépendant de x et u .

Enfin les conditions (1.20), (1.21) : il existe $M_1>0$

tel que $\forall\ x \in \Omega$, $\forall\ u \in \mathbb{R}$, $|u| > M_1$:

$$(6.10) \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial \xi_i}(x,u,\xi)\xi_i > 0 \ , \ \xi \in \mathbb{R}^n \ , \ \xi \neq 0 \ ,$$

$$(6.11) \qquad \frac{\partial g}{\partial u}(x,u,\xi) \geq 0 \ , \quad \xi \in \mathbb{R}^n \ .$$

Exemples : on vérifiera aisément que ces propriétés sont satisfaites pour les fonctions g suivantes :

$\sqrt{1+|\xi|^2}$ (hypersurfaces minima), $\sqrt{1+|x|^2+|\xi|^2}$ (considérée par Bernstein [1], $(1+(1+\xi^2)^s)^{\frac{1}{2s}}$, $s \geq \frac{1}{2}$, etc ...

6.2. La fonctionnelle G .

On suppose en outre que g vérifie les conditions suivantes

$$(6.12) \qquad \pi = (\pi_0,\dots,\pi_n) \longmapsto g(x,\pi) \ \text{ est convexe, } \forall\ x \in \Omega \ ,^{(1)}$$

(6.13) $\forall\ p \in L^1(\Omega)^{n+1}$, la fonction $x \longmapsto g(x,p(x))$ est sommable sur Ω ;

$$(6.14) \quad \begin{cases} \forall\ M \ , \ \exists\ \mu_8(M) > 0 \ , \ \mu_9(M) \geq 0 \ \text{ tel que } \ \forall\ x \in \Omega \\ \forall\ u \in \mathbb{R} \ , \ |u| \leq M \ , \ \forall\ \xi \in \mathbb{R}^n \\ g(x,u,\xi) \geq \mu_8(M)\ |\xi| - \mu_9(M) \ . \end{cases}$$

---

(1) D'après (6.5), $(\pi_1,\dots,\pi_n) \longmapsto g(x,\pi_0,\pi_1,\dots,\pi_n)$ est strictement convexe $\forall\ x \in \Omega$, $\forall\ \pi_0 \in \mathbb{R}$: cela traduit l'ellipticité de l'équation d'Euler du problème. On ajoute ici la convexité en π_0 (= en u) .

Il résulte de la continuité de g , de (6.13) et d'un théorème de Krasnoselski [14] que la fonctionnelle

$$(6.15) \qquad G(p) : p \longmapsto \int_\Omega G(x,p(x))\, dx \in \mathbb{R} ,$$

est continue sur $L^1(\Omega)^{n+1}$; d'après (6.12) cette fonctionnelle est aussi convexe.

La fonctionnelle G^* conjuguée de G est définie sur $L^\infty(\Omega)^{n+1}$:

$$(6.16) \quad G^*(p^*) = \operatorname*{Sup}_{p \in L^1(\Omega)^{n+1}} \{\int_\Omega [p^*(x).p(x)-g(x,p(x))]\, dx\}$$

Il est facile de voir (cf. aussi [25] que

$$(6.17) \qquad G^*(p^*) = \int_\Omega g^*(x,p^*(x))\, dx ,$$

où g^* éventuellement égale à $+\infty$ est la fonction conjuguée ponctuelle de g :

$$(6.18) \qquad g^*(x,\pi^*) = \operatorname*{Sup}_{\pi \in R^{n+1}} \{\pi^*.\pi-g(x,\pi)\} .$$

On vérifie aisément que g^* est bornée inférieurement sur $\Omega \times \mathbb{R}^{n+1}$,

$$(6.19) \qquad g^*(x,\pi) \geqslant - \operatorname*{Sup}_{\Omega} g(x,0) > -\infty ;$$

de ce fait et en raison de la semi-continuité inférieure de g^*, l'intégrale (6,17) est parfaitement définie dans $]-\infty,+\infty]$. On appelle $\operatorname{dom} g^*$ l'ensemble

(6,20) $\quad \{(x,\pi) \mid x \in \Omega, \pi \in \mathbb{R}^{n+1}, \; g^*(x,\pi) < +\infty\}$.

Nous supposerons

(6,21) $\quad g^*$ est continue sur $\operatorname{dom} g^*$

et pour simplifier un peu

(6,22) $\left\{\begin{array}{l} (\pi_1^*,\ldots,\pi_n^*) \longmapsto g^*(x,\pi^*) \text{ est strictement convexe,} \\ \forall x \in \Omega, \; \forall \pi_0^* \in \mathbb{R} \text{ avec } (x,\pi) \in \operatorname{dom} g^* . \end{array}\right.$

Notre dernière hypothèse est une sorte d'hypothèse de continuité de ∂G et s'énonce

(6,23)

Soient q_m et q_m^* deux suites telles que

(i) $q_m \in L^1(\Omega)^{n+1}$, $q_m^* \in L^\infty(\Omega)^{n+1}$,

(ii) $q_m^* \in \partial G(q_m)$

(iii) $q_m^* \longrightarrow q^*$ dans $L^\infty(\Omega)^{n+1}$,

où $q^* \in \partial G(q)$ et q vérifie

(iv) $\sup\limits_K |q(x)| < +\infty$, K Ω mesurable.

Alors, pour $i=1,\ldots,n$,

$$(q_m)_i \longrightarrow q_i \text{ dans } L^1(K) .$$

Remarque 6.1. La relation $q^* \in \partial G(q)$ est bien sûr équivalente à

$$(6.24) \qquad g^*(x,q^*(x)) + g(x,q(x)) = q^*(x).q(x) \quad \text{p.p.}$$

et cela entraîne $(x,q^*(x)) \in \operatorname{dom} g^*$ p.p.

7. Le résultat principal du III.

On s'intéresse au problème d'optimisation

$$(7.1) \qquad \inf_{\substack{u \in W^{1,1}(\Omega) \\ u=\phi \text{ sur } \partial\Omega}} \int_\Omega g(x,u(x),\operatorname{grad} u(x))\,dx$$

où g a été précédemment défini et où ϕ est donné

$$(7.2) \qquad \phi \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) .$$

Ce problème est un problème $\mathcal{P}$, (4.5), si on pose

$$(7.3) \quad \left[\begin{array}{l} V = W^{1,1}(\Omega)\ ,\ Y = L^1(\Omega)^{n+1}\ ,\ Y^* = L^\infty(\Omega)^{n+1}\ , \\ Lu = \{u,\operatorname{grad} u\}\ ,\ \forall\, u \in V\ , \\ F(v) = \psi_{C_o}(v)\ ,\ C_o = \{v \mid v \in W^{1,1}(\Omega)\ ,\ v-\phi = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega\} \\ G(p) = \int_\Omega g(x,p(x))\,dx\ ,\ \forall\, p \in L^1(\Omega)^{n+1} \end{array}\right.$$

On a aisément :

$$(7.4) \qquad F^*(L^*p^*) = \begin{cases} \langle p^*, L\phi\rangle & \text{si} \quad p_o^* + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p_i^*}{\partial x_i} = 0 \\ +\infty & \text{autrement} \end{cases}$$

et G^* a été explicité.

Le problème $\mathcal{P}^*$, dual de (7.1), s'écrit,

$$(7.5) \qquad \operatorname*{Sup}_{p^* \in Y^*} \{- F^*(L^*p^*) - G^*(-p^*)\}$$

soit

$$(7.6) \qquad \operatorname*{Sup}_{\substack{p^* \in L^\infty(\Omega)^{n+1} \\ p_o^* + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p_i^*}{\partial x_i} = 0}} \{- \langle p^*, L\phi\rangle - \int_\Omega g^*(x, -p^*(x))\, dx\}$$

Comme la condition (4.8) est trivialement satisfaite (cf.(6.15)), le problème (7.6) possède une solution au moins ; en raison de (6.22) et de la contrainte $p_o^* + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p_i^*}{\partial x_i} = 0$, le problème $\mathcal{P}^*$ possède une solution unique p^*.

Cela étant, nous avons le

Théorème 7.1.

Sous les hypothèses (6.2) - (6.14) et (6.21) - (6.23), pour ϕ donné vérifiant (7.2), le problème $\mathcal{P}^*$ possède une solution p^* unique et

$$(7.7) \qquad \inf \mathcal{P} = \max \mathcal{P}^*.$$

Il existe par ailleurs une fonction u unique (sauf peut-être

<u>à une constante près)</u> <u>telle que</u>

(7.8) $$u \in W^{1,1}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$$

(7.9) $$\sup_{\Omega'} |\text{grad } u(x)| < +\infty \;,\quad \forall\, \Omega' \subset\subset \Omega \;,$$

(7.10) $$Lu = \{u, \text{grad } u\} \in \partial G(-p^*)$$

(7.11) u <u>est solution de</u> (6.1), <u>l'équation d'Euler de</u> (7.1)

(7.12) <u>toute suite minimisante bornée</u> $\{v_m\}$ de (7.1) <u>converge vers</u> u <u>au sens suivant</u> :

$$\begin{cases} v_m \longrightarrow u \ \underline{\text{dans}}\ L^1(\Omega)/R \;, \\ \dfrac{\partial v_m}{\partial x_i} \longrightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \ \underline{\text{dans}}\ L^1(\Omega') \;,\ \forall\, \Omega' \subset\subset \Omega \;,\quad i=1,\ldots,n \;. \end{cases}$$

<u>Remarque 7.1.</u>

D'après (7.10) et (6.24) on a la relation d'extrémalité ponctuelle (qui entraîne l'unicité de u aux constantes près peut-être) :

(7.13) $$g^*(x,-p^*(x)) + g(x,Lu(x)) = -\, p^*(x).Lu(x)$$

$$\text{p.p. } x \in \Omega \;.$$

<u>Remarque 7.2.</u>

En raison de (7.9), (7.11) et des résultats classiques [15], [4], [8], la fonction u est d'autant plus régulière dans Ω que g est régulière (jusqu'à l'analyticité).

Remarque 7.3.

Des exemples très élémentaires montrent que l'on ne saurait espérer dans (7.12) une convergence forte des $\frac{\partial v_m}{\partial x_i}$ dans tout Ω .

Relativement à l'unicité et au comportement "à la frontière" d'une suite minimisante, nous avons un résultat a posteriori plus précis que nous allons donner ci-après. Ce résultat suppose que, pour l'une des fonctions u mise en évidence par le théorème 7.1, grad u est borné au voisinage d'au moins un point de $\partial\Omega$:

$$
(7.14) \quad \begin{cases} \exists\, x_o \in \partial\Omega , \\ \limsup\limits_{\substack{x \to x_o \\ x \in \Omega}} |\mathrm{grad}\, u(x)| < +\infty . \end{cases}
$$

Cela donne :

Proposition 7.1.

Les hypothèses sont celles du théorème 7.1 et on suppose en outre que l'une des fonctions u définies par le théorème 7.1 vérifie (7.14).

Il existe alors une fonction u unique, qui satisfait toutes les conclusions du théorème 7.1 et en outre

$$(7.15)\quad \begin{cases} u = \phi \ \text{p.p. } \underline{\text{sur une partie de}}\ \partial\Omega\ \underline{\text{de mesure non}} \\ \underline{\text{nulle et plus précisément sur}} \\ \{x \mid x \in \partial\Omega\ ,\ \limsup\limits_{\substack{y\to x \\ y\in\Omega}} |\text{grad } u(y)| < +\infty\}\ . \end{cases}$$

$$(7.16)\quad \begin{cases} \underline{\text{toute suite minimisante bornée}}\ \{v_m\}\ \underline{\text{de}}\ (7.1) \\ \underline{\text{converge vers}}\ \ u\ \ \underline{\text{au sens suivant}} \\ v_m \longrightarrow u \ \text{ dans } L^1(\Omega)\ , \\ \dfrac{\partial v_m}{\partial x_i} \longrightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \ \text{ dans } L^1(\Omega')\ ,\ \forall\, \Omega' \subset\subset \Omega\ ,\quad i=1,\ldots,n \end{cases}$$

<u>Remarque 7.4.</u>

Lorsque g est indépendant de u, les conclusions (7.12) et (7.16) sont aussi vraies pour des suites minimisantes non nécessairement bornées.

Il serait très intéressant d'obtenir des conditions <u>a priori</u> sur Ω et sur ϕ, qui assurent (7.14).

8. Démonstration du théorème 7.1.

8.1. Suite minimisante régulière du problème (7.1).

On considère pour $\varepsilon > 0$, la fonction $u_\varepsilon \in H^1(\Omega)$ solution du problème

$$(8.1) \qquad \operatorname*{Inf}_{\substack{v \in H^1(\Omega) \\ v-\phi/_{\partial\Omega}=0}} \left\{ \int_\Omega \left[\varepsilon |\operatorname{grad} v(x)|^2 + g(x, v(x), \operatorname{grad} v(x)) \right] dx \right\}$$

L'existence de u_ε est facile ; on sait que $u_\varepsilon \in \mathscr{C}^2(\Omega)$ au moins (cf. par exemple [15]) et que

$$(8.2) \qquad \varepsilon \, \Delta u_\varepsilon + \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} \frac{\partial g}{\partial \xi_i} (x, u_\varepsilon, \operatorname{grad} u_\varepsilon) = \frac{\partial g}{\partial u} (x, u_\varepsilon, \operatorname{grad} u_\varepsilon)$$

Grâce à la proposition 1.1, au théorème 1.1 et au lemme 3.6, on a

$$(8.3) \qquad \sup_\Omega |u_\varepsilon(x)| \leqslant c$$

$$(8.4) \qquad |u_\varepsilon|_{W^{1,1}(\Omega)} \leqslant c$$

$$(8.5) \qquad \sup_{\Omega'} |\operatorname{grad} u_\varepsilon(x)| \leqslant c(\Omega') \, , \ \forall \ \Omega' \subset\subset \Omega$$

$$(8.6) \qquad |u_\varepsilon|_{H^2(\Omega')} \leqslant c(\Omega') \, , \ \forall \ \Omega' \subset\subset \Omega$$

où les c sont indépendants de ε.

Il est facile de vérifier que u_ε est une suite minimisante pour (7.1).

En effet, $\forall\ v \in H^1(\Omega)$, $v|_{\partial\Omega} = \phi|_{\partial\Omega}$, on a

$$\inf \mathcal{G} \leq G(Lu_\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_\Omega |\text{grad } u_\varepsilon(x)|^2 \, dx + G(Lu_\varepsilon)$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_\Omega |\text{grad } v(x)|^2 \, dx + G(Lv) .$$

Alors, pour $\varepsilon \longrightarrow 0$,

$$\inf \mathcal{G} \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} G(Lu_\varepsilon) \leq \limsup_{\varepsilon \to 0} G(Lu_\varepsilon) \leq G(Lv) ,$$

et comme les v considérés sont dans $W^{1,1}(\Omega) \cap C_0$, on a bien le résultat annoncé pour u_ε . Ainsi :

(8.7) $\qquad \inf \mathcal{G} \leq G(Lu_\varepsilon) = \inf \mathcal{G} + \rho(\varepsilon)$, et $\rho(\varepsilon) \to 0$ pour $\varepsilon \to 0$.

Précisons le comportement de u_ε, $\varepsilon \longrightarrow 0$. Grâce à (8.3)-(8.6) et utilisant le procédé de la diagonale, on peut extraire de u_ε une suite u_{ε_m} telle que

(8.8) $\qquad u_{\varepsilon_m} \longrightarrow u$ pour $\sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))$

(8.9) $\qquad \left.\frac{\partial u_{\varepsilon_m}}{\partial x_i}\right|_{\Omega'} \longrightarrow \left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{\Omega'}$ pour $\sigma(L^\infty(\Omega'), L^1(\Omega')))$, $\forall\ \Omega' \subset\subset \Omega$,

$i=1,\ldots,n$,

(8.10) $\qquad u_{\varepsilon_m}|_{\Omega'} \longrightarrow u|_{\Omega'}$ dans $H^2(\Omega')$ faible, $\forall\ \Omega' \subset\subset \Omega$.

Cette fonction $u \in L^{\infty}(\Omega)$ et vérifie (7.9). Grâce à (8.4) et au théorème de Sobolev [17], pour α fixé, $1 < \alpha < \frac{n}{n-1}$, on peut choisir u_{ε_m} en sorte que

(8.11) $$u_{\varepsilon_m} \longrightarrow u \text{ dans } L^{\alpha}(\Omega) \text{ fort.}$$

De même avec (8.4) et les théorèmes de compacité dans les espaces de Sobolev

(8.12) $$u_{\varepsilon_m}\big|_{\Omega'} \longrightarrow u\big|_{\Omega'} \text{ dans } H^1(\Omega') \text{ fort, } \forall\ \Omega' \subset\subset \Omega \ .$$

Grâce à (8.12) et utilisant encore le procédé de la diagonale, on peut extraire de u_{ε_m} une suite (encore notée u_{ε_m}) telle que

(8.13) $$\frac{\partial u_m}{\partial x_i}(x) \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{p.p.,} \quad i=1,\dots,n \ .$$

En raison de (8.13) et du lemme de Fatou, $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^1(\Omega)$, $i=1,\dots,n$, et puisque $u \in L^{\infty}(\Omega)$, la propriété (7.8) est satisfaite.

Passons à la limite dans (8.2) : en raison de (8.3), (6.2), (6.4), les fonctions

$$\frac{\partial g}{\partial \xi_i}(x, u_\varepsilon, \operatorname{grad} u_\varepsilon) \ , \ \frac{\partial g}{\partial u}(x, u_\varepsilon, \operatorname{grad} u_\varepsilon)$$

sont uniformément bornées dans Ω, indépendamment de ε ; comme $\frac{\partial g}{\partial \xi_i}$ et $\frac{\partial g}{\partial u}$ sont continues, (8.12), (8.13) entraînent que

$$\frac{\partial g}{\partial \xi_i}(x, u_\varepsilon(x), \text{grad } u_\varepsilon(x)) \longrightarrow \frac{\partial g}{\partial \xi_i}(x, u(x), \text{grad } u(x)) \quad \text{p.p.}$$

$$\frac{\partial g}{\partial u}(x, u_\varepsilon(x), \text{grad } u_\varepsilon(x)) \longrightarrow \frac{\partial g}{\partial u}(x, u(x), \text{grad } u(x)) \quad \text{p.p.}$$

Cela entraîne avec un lemme de [17] que .

$$\frac{\partial g}{\partial \xi_i}(\cdot u_\varepsilon, \text{grad } u_\varepsilon) \longrightarrow \frac{\partial g}{\partial \xi_i}(\cdot, u, \text{grad } u)$$

$$\frac{\partial g}{\partial u}(\cdot, u_\varepsilon, \text{grad } u_\varepsilon) \longrightarrow \frac{\partial g}{\partial u}(\cdot, u, \text{grad } u)$$

dans $L^2(\Omega)$ faible (par exemple) et donc au sens des distributions.

Passant à la limite dans (8.2) on voit alors que u vérifie l'équation (6.1) : c'est (7.11).

8.2. <u>Régularité de</u> p^* .

Une étude de la régularité de p^* va nous permettre de démontrer (7.10) qui entraîne (remarque 7.1) une caractérisation de u indépendante de la sous-suite u_{ε_m} extraite de u_ε .
On a, avec (4.2), (4.4), (7.7) et (8.7) :

$$\begin{aligned}
\inf \mathcal{P} + \rho(\varepsilon) &= F(u_\varepsilon) + G(Lu_\varepsilon) \\
&= - \{\langle L^*p^*, u_\varepsilon\rangle - F(u_\varepsilon)\} - \{\langle -p^*, Lu_\varepsilon\rangle - G(Lu_\varepsilon)\} \\
&\geq - F^*(L^*p^*) - G^*(-p^*) \\
&= \text{Sup } \mathcal{P}^* = \text{Inf } \mathcal{P} .
\end{aligned}$$

Il vient ainsi :

$$(8.14) \qquad 0 \leqslant \{F^*(L^*p^*) + F(u_\varepsilon) - \langle L^*p^*, u_\varepsilon\rangle\}$$
$$+ \{G^*(-p^*) + G(Lu_\varepsilon) - \langle -p^*, Lu\rangle\} \leqslant \rho(\varepsilon) .$$

Comme les expressions entre les accolades sont toutes deux positives, cela entraîne

$$(8.15) \qquad 0 \leqslant G(Lu_\varepsilon) + G^*(-p^*) - \langle -p^*, Lu_\varepsilon\rangle \leqslant \rho(\varepsilon)$$

en sorte que

$$(8.16) \qquad -p^* \in \partial_{\rho(\varepsilon)} G(Lu_\varepsilon)$$

Appliquons la proposition 4.3 : on obtient l'existence de p_ε et p_ε^* tels que

$$(8.17) \qquad p_\varepsilon \in L^1(\Omega)^{n+1} ,$$

$$(8.18) \qquad p_\varepsilon^* \in L^\infty(\Omega)^{n+1} ,$$

$$(8.19) \qquad |p_\varepsilon - Lu_\varepsilon|_{L^1(\Omega)^{n+1}} \leqslant \sqrt{\rho(\varepsilon)} ,$$

$$(8.20) \qquad |p_\varepsilon^* - p^*|_{L^\infty(\Omega)^{n+1}} \leqslant \sqrt{\rho(\varepsilon)} ,$$

$$(8.21) \qquad - p_\varepsilon^* \in \partial G(p_\varepsilon) .$$

D'après la remarque 6.1, (8.21) signifie

$$(8.22) \qquad g^*(x,-p_\varepsilon^*(x)) + g(x,p_\varepsilon(x)) = -p_\varepsilon^*(x).p_\varepsilon(x) \text{ , p.p. ,}$$

et entraîne

$$(8.23) \qquad (x,-p^*_\varepsilon(x)) \in \operatorname{dom} g^* \ , \ \text{p.p.} \quad x \in \Omega \ .$$

En raison de (8.19) on peut, par extraction d'une nouvelle sous-suite, supposer que

$$p_{\varepsilon_m}(x) - Lu_{\varepsilon_m}(x) \longrightarrow 0 \quad \text{p.p.} \ ,$$

et avec (8.13)

$$(8.24) \qquad p_{\varepsilon_m}(x) \longrightarrow Lu(x) \quad \text{p.p.}$$

Evidemment par (8.20)

$$(8.25) \qquad p^*_{\varepsilon_m}(x) \longrightarrow p^*(x) \quad \text{p.p.}$$

Passant à la lim. inf. dans (8.22), on obtient

$$g^*(x,-p^*(x)) \leqslant -p^*(x)\ Lu(x) - g(x,Lu(x)) < +\infty \quad \text{p.p.} \ ,$$

en sorte que $(x,-p^*(x)) \in \operatorname{dom} g^*$ p.p. ; on peut alors passer à la limite dans (8.22) grâce à (6.21) et en déduire l'égalité

$$(8.26) \quad g^*(x,-p^*(x)) + g(x,Lu(x)) = -p^*(x).Lu(x) \quad \text{p.p.}$$

qui est équivalente à (7.10).

8.3. <u>Propriété des suites minimisantes de (7.1)</u>.

Nous démontrons (7.12). Soit v_m une suite minimisante bornée de (7.1) (1) :

$$(8.27)\quad \begin{cases} v_m \in W^{1,1}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)\ , \ \forall\ m \\ |v_m|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant c. \\ v_m - \phi\big|_{\partial\Omega} = 0 \\ G(Lv_m) \longrightarrow \inf \mathcal{P}\ , \ m \longrightarrow \infty \end{cases}$$

On en déduit avec (6.14) que la suite $\{v_m\}$ est aussi bornée dans $W^{1,1}(\Omega)$.

Posons $G(Lv_m) = \inf \mathcal{P} + \sigma_m$, $\sigma_m \geqslant 0$, $\sigma_m \longrightarrow 0$ pour $m \longrightarrow \infty$. Un raisonnement semblable à celui qui a conduit à (8.15), (8.16) entraîne :

$$(8.28)\qquad 0 \leqslant G(Lv_m) + G^*(-p^*) - \langle -p^*, Lv_m \rangle \leqslant \sigma_m\ ,$$

$$(8.29)\qquad -p^* \in \partial_{\sigma_m} G(Lv_m)\ .$$

Utilisant la proposition 4.3, on obtient pour tout m , l'existence de p_m et p_m^* , tels que

(1) En particulier $\{v_m\}$ peut être la suite $\{u_\varepsilon\}$ du n°8.1.

$$(8.30) \qquad p_m \in L^1(\Omega)^{n+1} \quad , \; p_m^* \in L^\infty(\Omega)^{n+1} \; ,$$

$$(8.31) \qquad |p_m - Lv_m|_{L^1(\Omega)^{n+1}} \leq \sqrt{\sigma_m} \; ,$$

$$(8.32) \qquad |p_m^* - p^*|_{L^\infty(\Omega)^{n+1}} \leq \sqrt{\sigma_m} \; ,$$

$$(8.33) \qquad - p_m^* \in \partial G(p_m) \; .$$

D'après (8.32), $p_m^* \longrightarrow p^*$ dans $L^\infty(\Omega)^{n+1}$ et d'après (7.8), (7.10), $- p^* \in \partial G(Lu)$ avec pour Lu :

$$(8.34) \qquad \operatorname*{Sup}_{\Omega'} |Lu(x)| < +\infty \; , \; \forall \; \Omega' \subset\subset \Omega \; .$$

On peut donc appliquer (6.23) et en déduire

$$(p_m)_i \longrightarrow (Lu)_i \quad \text{dans} \quad L^1_{loc}(\Omega) \; , \quad 1 \leq i \leq n \; .$$

Mais alors, d'après (8.31),

$$(Lu_m)_i \longrightarrow (Lu)_i \quad \text{dans} \quad L^1_{loc}(\Omega) \; ,$$

ce qui signifie

$$(8.35) \qquad \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{dans} \quad L^1_{loc}(\Omega) \ , \ 1\leq i\leq n$$

A présent, comme v_m est bornée dans $W^{1,1}(\Omega)$ et dans $L^\infty(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite v_{m_ℓ} telle que

$$(8.36) \qquad v_{m_\ell} \longrightarrow \psi \ \text{pour} \ \sigma(L^\infty(\Omega),L^1(\Omega)) \ \text{et pour} \ L^\alpha(\Omega) \ \text{fort}, \ \alpha \ \text{fixé}, \ 1\leq\alpha<\frac{n}{n-1} .$$

On a nécessairement $\psi = u + \text{Cste}$ dans chaque composante connexe de Ω, et si l'on passe au quotient par les constantes, la limite dans (8.36) est indépendante de la sous-suite et la convergence a lieu pour v_m toute entière ; il existe une suite de nombres λ_m, bornée, telle que

$$(8.37) \qquad v_m + \lambda_m \longrightarrow u \ \text{pour} \ \sigma(L^\infty(\Omega),L^1(\Omega)) \ \text{et dans} \ L^\alpha(\Omega) \ \text{fort}.$$

Le théorème 7.1 est complètement démontré.

8.4. <u>Démonstration de la proposition 7.1</u>.

Supposons que (7.14) ait lieu ; alors $|\text{grad } u(x)|$ est borné sur un ensemble ouvert $\Omega_o = B_\rho(x_o) \cap \Omega$, $B_\rho(x_o)$ = boule ouverte de centre x_o. On aura en plus de (8.34)

$$(8.38) \qquad \sup_{\Omega_o} |Lu(x)| < +\infty .$$

Pour toute suite minimisante $\{v_m\}$ de (7.1), on aura comme à la section 8.3,

(8.39) $$\frac{\partial v_m}{\partial x_i} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{dans} \quad L^1(\Omega_o) \; , \; 1\leq i\leq n \; .$$

Comme $\Gamma_o = \partial\Omega_o \cap \partial\Omega$ est de mesure non nulle, la norme naturelle de $W^{1,1}(\Omega_o)$ est équivalente à la norme

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right| dx + \int_{\Gamma_o} |v| d\Gamma \; .$$

Puisque $v_m = \varphi$ sur $\partial\Omega$, il résulte de cela et de (8.39) que v_m est une suite de Cauchy dans $W^{1,1}(\Omega_o)$; sa limite dans $W^{1,1}(\Omega_o)$ est $u+c$, u l'une des fonctions apparues précédemment et c constante convenable. On peut supposer que $c = 0$, et la fonction u vérifie alors d'après Gagliardo [8']

(8.40) $$u = \varphi \quad \text{sur} \quad \Gamma_o \; .$$

Avec (8.26) et (8.40) on voit que la fonction u est définie de manière unique. Par ailleurs, le raisonnement que l'on vient de faire au voisinage de x_o, peut être reproduit au voisinage de tout point $x \in \partial\Omega$ tel que

$$\limsup_{\substack{y\to x \\ y\in\Omega}} |\text{grad } u(y)| < +\infty \; .$$

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. BERNSTEIN - Sur les équations du calcul des variations. Ann. Ec. Norm. Sup., 29, 1912, p.431-485.

[2] E. BOMBIERI, E. DE GIORGI, M. MIRANDA - Una maggiorazione a priori relative alle ipersuperfici minimali non parametriche. Arch. Rat. Mech. Anal., 32, 1969, p.255-267.

[3] A. BRONSTED, R.T. ROCKAFELLAR - On the subdifferentiability of convex functions. Proc. Am. Math. Soc., 16, 1965, p. 605-611.

[4] E. DE GIORGI - Sulla differenziabilita e l'analiticitá delle estremali degli integrali multipli regolari. Memorie delle Acc. Sci. Torino, S.3, t.3, 1957, p.25-43.

[5] E. DE GIORGI - Nouveaux résultats dans la théorie des hyper-surfaces minima. Conf. faites au Collège de France, Juin 1970.

[6] G. DUVAUT, J.L. LIONS - Livre à paraître.

[7] W. FENCHEL - Convex cones, sets and functions. Lecture Notes, Princeton, 1953.

[8] H. FEDERER - Geometric measure theory. Springer-Verlag, Berlin 1969.

[8'] E. GAGLIARDO - Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili. Rend. Sem. Mat. Un. di Padova, XXVII, 1957, p.284-305.

[9] R. GLOWINSKI - Méthodes numériques pour l'écoulement stationnaire d'un fluide rigide visco-plastique incompressible. Proceeding of the 2nd International Conference on numerical methods in hydrodynamics, (Berkeley, September 1970). Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag, Berlin, à paraître.

[10] R. GLOWINSKI, J.L. LIONS, TREMOLIERES - Livre à paraître.

[11] E. HOPF - Über den funktionalen, insbesondere den analytischen charakter, der Lösungen elliptischer differentialgleichungen zweiter ordnung,
Math. Z., 34, 1931, p.194-233.

[12] JENKIN, J.SERRIN - Variational problems of minimal surface type, I, II, III,
Arch. Rat. Mech. Anal.12, 1963, p.185-212 ; 21, 1966, p.321-342 ; 29, 1968, p.304-322.

[13] J.J. KOHN, L. NIRENBERG - Degenerate elliptic parabolic equations of second order,
Comm. pure Appl. Math. XX, 1967, p.797-872.

[14] KRASNOSELSKI - Topological methods and the theory of non linear integral equations,
Pergamon Press, New-York, 1964.

[15] O.A. LADYZENSKAYA, N.N. URALCEVA - Equations aux dérivées partielles de type elliptique,
Dunod, Paris, 1968.

[16] O.A. LADYZENSKAYA, N.N. URALCEVA - Local estimates for gradients of solutions of non-uniformly elliptic and parabolic equations,
Comm. Pure Appl. Math., XVIII, 1970, p.677-703.

[17] J.L. LIONS - Problèmes aux limites,
Presses de l'Univ. de Montréal, 1962.

[18] J.L. LIONS - Quelques méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles non linéaires,
Dunod-Gauthier Villars, Paris, 1969.

[19] J.J. MOREAU - Fonctionnelles convexes,
Séminaire équations aux dérivées partielles,
Collège de France, 1966.

[20] C.B. MORREY - Multiple integrals in the calculus of variations,
Springer-Verlag, Berlin - New-York, 1966.

[21] P.P. MOSSOLOV - Sur une fonctionnelle liée aux surfaces de courbure moyenne donnée,
Mat. Sborn. 78(120), 1969, p.51-64 (en russe).

[22] J.C.C. NITSCHE - Variational problems with Inequalities as Boundary conditions or how to fashion a cheap hat for Giacometti's Brother,
Arch. Rat. Mec. Anal., 35, 1969, p.83-113.

[23] R.T. ROCKAFELLAR - Extension of Fenchel's duality theorem for convex functions,
Duke, Math. J. 33, 1966, p.81-90.

[24] R.T. ROCKAFELLAR - Duality and stability in extremum problems involving convex functions,
Pac. J. of Math., 21 , 1967, p.167-187.

[25] R.T. ROCKAFELLAR - Integrals which are convex functions,
Pac. J. Math., 24, 1968, p.867-873.

[26] R.T. ROCKAFELLAR - Convex analysis,
Princeton University Press, 1970.

[27] R. TEMAM - Remarques sur la dualité en calcul des variations,
C.R.Ac.Sc. Paris, 270, 1970, p.754-757.

[28] R. TEMAM - Calcul des variations,
Cours de 3ème cycle, Fac. Sc. d'Orsay, 1970, à paraître.

-:-:-:-